

PROPRIEDADE DA BIBLIOTECA
DO INSTITUTO DE FÍSICA

Vácuo Confinado da Eletrodinâmica Quântica em Campo Magnético Externo

Margarida Maria Rodrigues Negrão

Orientador: M. V. Cougo-Pinto

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, 05 de março de 1999

IF
Tese
1999
N3850



Vácuo confinado da eletrodinâmica
quântica em campo magnético
externo

Margarida Maria Rodrigues Negrão

Tese submetida ao corpo docente do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Aprovada por:

Prof. *Marcus Venícios Cougo Pinto*
.....
Marcus Venícios Cougo-Pinto (Presidente)

Prof. *Paulo A. Maia Neto*
.....
Paulo Américo Maia Neto

Prof. *J. A. Helayël Neto*
.....
José Abdalla Helayël Neto

Prof. *Marcelo Gomes*
.....
Marcelo Gomes

Prof. *Arvind Vaidya*
.....
Arvind Narayan Vaidya (suplente)

Prof. *Sebastião Alves Dias*
.....
Sebastião Alves Dias (suplente)

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
05 de Março de 1999

NEGRÃO, Margarida Maria Rodrigues

Vácuo confinado da eletrodinâmica quântica em
campo magnético externo

v, 100f.

Tese: Doutor em Física (Teoria de Campos)

Universidade Federal do Rio de Janeiro, IF, 1999.

1. Teoria de Campos 2. Vácuo 3. Confinamento
4. Teorias Efetivas 5. Temperatura Finita

Tese.

À minha família, em especial ao meu Lindinho

A ciência surgiu com o despertar da alma humana, mas não surgiu com fins utilitários. Foi a ânsia de resolver o mistério do Universo, diante do qual o homem é simples grão de areia, que lhe deu o primeiro impulso. Seu verdadeiro desenvolvimento resultou, antes de tudo, do esforço em penetrar e compreender o Infinito. E ainda hoje, depois de havermos passado séculos a tentar, em vão, afastar o espesso velário, ainda hoje é a busca do Infinito que nos leva para diante. O progresso material dos homens depende das pesquisas abstratas ou científicas do presente, e será aos homens de ciência que trabalham para fins puramente científicos, sem nenhum intuito de aplicação de suas doutrinas, que a humanidade ficará devedora em tempos futuros.

(Malba Tahan, adaptado.)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, ajudaram na realização desta tese. Ao meu orientador, Marcus e ao meu co-orientador, Farina, pela sugestão do tema aqui desenvolvido e pelo incentivo durante toda a elaboração deste trabalho. Ao nosso grupo pelas reuniões e seminários que me ajudaram demais a aprender um pouco de Física. Em especial ao Alexandre pelos vários “toques” a respeito dos trabalhos e ao Vaidya pela paciência em me tirar dúvidas nem sempre muito inteligentes. O ambiente no grupo e a receptividade por parte de cada membro dele me ajudaram demais a seguir em frente no dia-a-dia.

Ao Prof. E. Marino pelos excelentes cursos de Teoria de Campos. Sua participação na minha formação foi muito importante, não só pela qualidade dos cursos como também pela sua simpatia e disponibilidade na hora de tirar dúvidas.

Agradeço a todo o pessoal do DCP/CBPF. A hospitalidade que eu recebi lá por parte de todos e a infra-estrutura totalmente ausente no IF-UFRJ, me ajudaram demais a fazer meu trabalho. Agradeço principalmente ao Helayël que é um amigo impressionante e um verdadeiro exemplo de ser humano. Ele me ensinou muito sobre Física e, principalmente, sobre como ser uma pessoa melhor. Ao Tião, que sempre esteve pronto a tirar dúvidas, jogar conversa fora, quebrar galhos ou o que quer que pintasse. Aos melhores companheiros que alguém poderia ter: André Penna-Firme, Oswaldo, Guilherme, Winder, Leon,

Álvaro (DEDA), Álvaro, Márcia, Boldo, Colatto, Emília, Cristine, Marquinho, Cláudio, Nelson, Humberto, Roman, Danilo, Martin, Zé Luiz...enfim todos que conviveram comigo no DCP. Vocês não podem imaginar quantas vezes a presença e o carinho de vocês me ajudaram a sair do buraco. A Rosângela e a Beth, que sempre me trataram com o maior carinho e sempre quebraram todos os meus galhos.

Aos membros da Banca Examinadora pela atenção dispensada.

Ao pessoal do IF/UFRJ: Edu (meu amigão do coração), Jayme, Ronaldo, Cresus, Everton, Paulo, Barbi, Clifford, André, Tânia, etc.

Ao pessoal da Biblioteca pela boa vontade que sempre demonstraram.

Ao pessoal da secretaria da pós, principalmente a Edna que chegou para desembaraçar a secretaria e torná-la eficiente. Foi muito bom ter você por perto!

A minha família, pelo carinho e apoio incondicional que sempre me deram, agradeço sinceramente tudo o que fizeram por mim. Em especial, a minha mãe Aparecida, as minhas irmãs Patrícia e Daniele e minha sogra Sarah por sempre torcerem por mim.

Ao meu marido Mauro (*Lindinho*), que sempre me apoiou e me deu forças para continuar. A ele agradeço pelo seu companheirismo, pelas madrugadas na pedra do Leme me consolando nos momentos de desânimo, por ser meu melhor amigo, pelo incansável sorriso em seus lábios, por ter me mostrado que, apesar de tudo, ainda vale a pena e por todo o seu amor.

A todos que, apesar de não terem colaborado diretamente, não podem ser esquecidos neste momento: Sônia Penna Firme e Andrezinho, Márcia E. Braga, Paulo César da Rocha (*Tchum*), Márcia e Marcinho, meus cunhados, sobrinhos, tios e primos.

Agradeço também (e peço desculpas!) a todos aqueles que estiveram comigo e não foram mencionados aqui por esquecimento meu.

Finalmente à CAPES pela bolsa de estudos concedida neste período de trabalho no IF/UFRJ.

Resumo

Esta tese apresenta um estudo do vácuo confinado da eletrodinâmica quântica escalar em campo magnético externo, utilizando o método de tempo próprio de Schwinger para o cálculo de ações efetivas, em temperatura zero e em temperatura finita. Foram abordados nesse estudo dois pontos de vista diferentes: em um deles foi analisado o efeito de um campo magnético externo uniforme e constante na energia de Casimir da eletrodinâmica escalar e, no outro, o efeito da condição de contorno de Dirichlet na lagrangeana efetiva da eletrodinâmica escalar. Foi possível mostrar, que um campo magnético uniforme e constante inibe fortemente o efeito Casimir da eletrodinâmica escalar, tanto em temperatura zero quanto em temperatura finita. Na abordagem de lagrangeanas efetivas ficou demonstrado que o confinamento provoca uma alteração na constante de permeabilidade magnética do vácuo da eletrodinâmica escalar e que esta é uma constante de permeabilidade diamagnética. As correções térmicas para essa abordagem também foram calculadas.

Abstract

This thesis presents a study on the confined vacuum of quantum scalar electrodynamics under the influence of an external magnetic field using Schwinger's proper-time method for computing effective actions in zero temperature and in finite temperature case. Two different points of view have been used: in one of them the effect of an external uniform and constant magnetic field on the Casimir energy of quantum electrodynamics was computed and, on the other, the effect of the confinement on the effective Lagrangian of quantum scalar electrodynamics was computed. It has been possible to show that a constant and uniform magnetic field strongly inhibits the Casimir effect of scalar electrodynamics, both in zero temperature and in finite temperature. On the effective Lagrangian scheme it has been shown that the confinement alters the permeability constant of scalar electrodynamics vacuum and that this constant is diamagnetic. The corrections due to finite temperature contribution have also been computed for this case.

Índice

1	Introdução	2
1.1	O efeito Casimir	3
1.2	A lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg	8
1.3	O vácuo quântico sob condições de contorno e campo externo	16
2	Formalismo de Schwinger para calcular o efeito Casimir e lagrangeanas efetivas a um laço	23
2.1	Formalismo de ação de Schwinger	24
2.2	Representação de tempo próprio da ação efetiva	27
2.3	O método de Schwinger para calcular o efeito Casimir	34
2.4	O método de Schwinger para calcular lagrangeanas efetivas a um laço	38
3	Vácuo da EDQ sob condições de contorno em campo magnético externo	44
3.1	O vácuo fermiônico sob condições de contorno em campo magnético externo	45
3.2	O efeito Casimir do campo escalar carregado em campo magnético externo	51
3.3	A lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger sob condições de contorno	66

4	Vácuo confinado da EDQ escalar em campo magnético externo em temperatura finita	73
4.1	O Efeito Casimir do campo escalar carregado em campo externo e temperatura finita	76
4.2	A lagrangeana efetiva da EDQ escalar em campo externo e temperatura finita	80
5	Considerações finais	86

Capítulo 1

Introdução

O efeito Casimir e a lagrangeana de Euler-Heisenberg são duas contribuições importantes à longamente debatida questão da existência ou não do vácuo como um espaço totalmente inerte e vazio. Tal questão, de evidente interesse na física, tem merecido a atenção de filósofos e historiadores da ciência e foi tema de reflexão de grandes pensadores (cf. [1] para breves histórico e bibliografia). Nas seções deste capítulo será feita uma exposição sobre esses dois tópicos e sobre a interessante possibilidade de considerá-los conjuntamente em um único fenômeno.

Em primeiro lugar, uma visão geral do conteúdo desta tese. Após este capítulo introdutório é feito no capítulo 2 um resumo dos fundamentos teóricos e dos métodos de cálculo no formalismo de Schwinger para obtenção do efeito Casimir e das lagrangeanas efetivas. Na primeira seção é apresentado o princípio da ação e o conceito de ação bem ordenada. Na segunda é apresentada a representação do tempo próprio para a ação bem

ordenada. A representação é deduzida no artigo original de Schwinger [2] para o caso da eletrodinâmica quântica espinorial. No caso da eletrodinâmica quântica escalar a representação é dada por Schwinger sem demonstração. Como não foi possível encontrar tal demonstração na literatura, ela foi apresentada em detalhe nessa segunda seção. Na terceira seção o método de Schwinger para calcular a energia de Casimir é mostrado e na quarta e última seção, é apresentado o método de Schwinger para calcular a lagrangeana efetiva no caso de campo puramente magnético. No capítulo 3 é apresentado o estudo do vácuo confinado da EDQ (eletrodinâmica quântica) escalar em campo magnético externo. Esse estudo é precedido pela primeira seção na qual é feito um resumo dos resultados correspondentes para a EDQ espinorial, que serão posteriormente mencionados para comparação com os resultados para a EDQ escalar. Na segunda seção é apresentado o efeito Casimir da EDQ escalar em campo magnético externo e, na terceira, a lagrangeana efetiva da EDQ escalar sob condições de contorno de Dirichlet em dois planos paralelos. No capítulo 4 os problemas das duas seções anteriores são tratados em temperatura finita e o quinto e último capítulo é reservado para considerações finais. No apêndice, que seria interessante ser agora lido, é explicada a notação, nomenclatura e convenções usadas na tese.

1.1 O efeito Casimir

Hendrik Brugt Gerhard Casimir trabalhava nos anos 1940 nos laboratórios de pesquisa

da Philips, em Eindhoven, na Holanda, nos quais se realizavam experimentos com suspensões de pó de quartzo utilizado na produção industrial. A teoria vigente na época para explicar as propriedades de tais suspensões era baseada na energia de interação de van der Waals entre átomos neutros, que cai com o inverso da sexta potência da distância entre os átomos, mas os resultados experimentais indicavam uma queda mais rápida para grandes distâncias. Havia a sugestão de que a teoria correta seria obtida incorporando efeitos de retardamento nas forças de interação de van der Waals. Esta teoria foi obtida por Casimir e Polder em 1947 e nela a energia de interação entre átomos neutros a grandes distâncias cai com o inverso da sétima potência da distância R entre os átomos. Casimir e Polder [3] encontraram a seguinte energia potencial de interação entre dois átomos neutros:

$$\Delta_L E(R \rightarrow \infty) = -\frac{23 \hbar c}{4\pi R^7} \alpha(A) \alpha(B), \quad (1.1)$$

onde $\alpha(A)$ e $\alpha(B)$ são as polarizabilidades dos dois átomos. Casimir e Polder ficaram intrigados com a complexidade dos cálculos que fizeram para obter um resultado tão simples como (1.1). Em suas próprias palavras ¹:

“A forma muito simples da equação ... e a fórmula ... sugerem que deve ser possível derivar essas expressões, talvez a menos de fatores numéricos, por meio de considerações mais elementares. Isso seria desejável, pois também daria um contexto mais físico ao nosso resultado, um resultado por outro lado notável, em nossa opinião. Até o momento não fomos capazes de encontrar tal argumento simples.” [3]

¹Conforme tradução livre em [1]

O argumento simples para obter (1.1) foi obtido em uma conversa que Casimir teve com Niels Bohr, conforme o seguinte relato feito pelo próprio Casimir ²:

“No verão ou outono de 1947 (mas não estou absolutamente certo de que não tenha sido um pouco antes ou depois), mencionei meus resultados a Niels Bohr, durante uma caminhada. “Isto é ótimo,” disse ele. “Isto é algo novo.” Disse-lhe que estava intrigado com a forma extremamente simples das expressões para a interação a grandes distâncias e ele resmungou algo sobre a energia do ponto zero. Isto foi tudo, mas colocou-me em uma nova pista.

Descobri que calcular as variações da energia do ponto zero leva realmente aos mesmos resultados dos cálculos que fiz com Polder....

Em 29 de maio de 1948 apresentei meu trabalho *Sobre a atração entre duas placas perfeitamente condutoras* à Academia Real Holandesa de Artes e Ciências.

O trabalho foi publicado no decorrer daquele ano...” [4]

Casimir mostrou em um colóquio realizado em Paris (“*Colloque sur la théorie de la liaison chimique*”, Paris, 12 a 17 de abril de 1948), que o resultado obtido com Polder podia ser recalculado recorrendo-se à energia de ponto zero do vácuo do campo eletromagnético quântico. No seu trabalho com Polder, além da energia de interação (1.1) entre dois átomos neutros, é também calculada a energia de interação entre um átomo e uma placa condutora, ambos neutros. Conforme seu próprio relato reproduzido acima, Casimir apresentou então em 29 de maio de 1948 o cálculo da energia de interação en-

²Conforme tradução livre em [1]

tre duas placas condutoras paralelas e neutras. Esse foi o trabalho seminal [5] do qual nasceu o efeito Casimir como um ramo ativo de investigação na física moderna. Nesse seu trabalho aparece a expressão da seguinte energia de atração que hoje leva o seu nome:

$$\mathcal{E} = -\ell^2 \frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}, \quad (1.2)$$

onde ℓ é o lado das placas, supostas quadradas, a é a separação entre elas e a condição de que a separação é pequena diante das dimensões das placas ($a \ll \ell$) está pressuposta.

A força de atração entre as placas é naturalmente dada por $-\partial\mathcal{E}/\partial a$, *i.e.*, por:

$$F = -\ell^2 \frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} = -0,013 \frac{1}{(a/\mu\text{m})^4} \text{ dynas/cm}^2. \quad (1.3)$$

Essa força de atração entre as placas foi verificada experimentalmente pela primeira vez por Sparnaay em 1958 [6], sendo que recentemente foi confirmada com grande precisão por Lamoreaux [7] e por Mohideen e Roy [8]. A atração entre as placas neutras é o efeito Casimir original e deu origem à definição generalizada de efeito Casimir como sendo a variação da energia de ponto zero de qualquer campo quântico em consequência da alteração da topologia trivial euclideana do espaço [9]. No caso do efeito original, por exemplo, o campo quântico é o eletromagnético e a alteração da topologia consiste em passar do espaço \mathbb{R}^3 originalmente disponível, na ausência das placas, para o espaço $\mathbb{R}^2 \times [0, a]$, onde o campo fica confinado pela presença das placas. Uma outra alteração notável de topologia que leva ao efeito Casimir consiste em compactificar dimensões em círculos. Assim, por exemplo, passamos do espaço \mathbb{R}^3 para o espaço $\mathbb{R}^2 \times S^1$, onde S^1 representa o círculo em que compactificamos um dos \mathbb{R} de \mathbb{R}^3 . Essa compactificação costuma ser usada no caso de férmions para evitar as complexidades que surgem nesse

caso com a compactificação em $\mathbb{R}^2 \times [0, a]$ [10, 11].

O efeito Casimir para outros campos quânticos e outras condições de contorno ou topologias espaciais tem sido ativamente investigado e aplicado em diversos assuntos [9, 12, 13]. O efeito Casimir é particularmente importante no seu contexto original da eletrodinâmica quântica e em pelo menos dois assuntos de interesse atual: no confinamento de quarks e gluons, que é uma condição de contorno dada pela natureza, e em teorias com dimensões compactificadas, como as teorias do tipo Kaluza-Klein [14].

As flutuações do vácuo eletromagnético são afetadas pela presença de corpos dielétricos macroscópicos e se manifestam como uma atração entre esses corpos. Quando há separações não muito pequenas entre os corpos, de modo a exigir que os efeitos de retardamento na propagação da interação eletromagnética sejam levados em conta, a atração pode ser descrita corretamente pela alteração da energia de ponto zero e se constitui em mais um exemplo de efeito Casimir. A mesma atração pode, é claro, ser descrita pelo efeito integrado das interações de van der Waals, como é feito na teoria de Lifshitz [15]. Na verdade, como relatado anteriormente, o próprio Casimir descobriu o efeito que leva o seu nome ao estudar as forças de van der Waals dispersivas. O efeito Casimir com dielétricos apresenta a vantagem de poder ser medido com altíssima precisão. O efeito Casimir original com placas metálicas pode ser confirmado por extrapolação para grandes permissividades das medições feitas para dielétricos [16, 17, 18, 19].

O efeito Casimir é um dos chamados efeitos do vácuo quântico (para uma introdução *cf.*, *e.g.* [20] e [21]), tais como a emissão espontânea em átomos e núcleos, a atração ou repulsão entre objetos neutros, o deslocamento de Lamb, o momento magnético anômalo

do elétron ou a polarização do vácuo. Tais efeitos podem ser vistos como decorrentes da existência do vácuo quântico e portanto encontram-se no cerne da teoria quântica dos campos. Eles manifestam-se devido à presença no vácuo quântico de corpos ou campos ou, como dito anteriormente no caso do efeito Casimir generalizado, devido a desvios que o espaço apresenta em relação à topologia trivial euclídeana.

1.2 A lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg

Dentre os efeitos do vácuo quântico dois são especialmente importantes pela sua simplicidade e pela clareza com que exibem as propriedades de tal vácuo: o já mencionado efeito Casimir e as variações das relações constitutivas do vácuo quântico carregado descritas na lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg [2, 22, 23, 24, 25], que será discutido agora.

O campo eletromagnético clássico $F_{\mu\nu}$ em um vácuo clássico é descrito pela lagrangeana de Maxwell:

$$\mathcal{L}^{(0)}(A) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

onde A é o potencial eletromagnético e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o campo eletromagnético. Uma tal lagrangeana leva às equações de Maxwell usuais, que são lineares no campo eletromagnético. Os efeitos associados a tal lagrangeana e às equações de Maxwell são ditos lineares.

Se por outro lado o campo encontra-se em um meio material, ele polariza e magnetiza

o meio e a corrente j_p^μ que descreve tais alterações acopla com o campo eletromagnético. Entretanto, tal corrente característica do meio é microscópica e, enquanto tal, não pode ser incorporada à teoria clássica. Supondo, no entanto, que o termo de acoplamento $j_p^\mu A_\mu$, onde A_μ é o potencial eletromagnético, possa ser expresso em termos do campo clássico por meio de relações constitutivas, embora a lagrangeana

$$\mathcal{L}^{(1)}(A) = j_p^\mu A_\mu \quad (1.5)$$

seja uma função apenas de variáveis clássicas, ela descreve de modo efetivo os efeitos das propriedades microscópicas do meio sobre o campo clássico. Aqui $\mathcal{L}^{(1)}$ é chamada de lagrangeana efetiva do campo eletromagnético no meio em consideração. É também chamada de lagrangeana efetiva, o que é na verdade mais apropriado, a lagrangeana completa $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)}$. A lagrangeana efetiva descreve o efeito das cargas microscópicas ao preço de acrescentar à lagrangeana de Maxwell (1.4), que é quadrática em F , também potências superiores de F . Os termos de $\mathcal{L}^{(1)}(A)$ quadráticos em F dão origem às constantes constitutivas, as constantes de permissividade e permeabilidade, enquanto que os termos com potências superiores de F descrevem os chamados efeitos não-lineares da teoria. É essencial à idéia de lagrangeana efetiva que as cargas microscópicas permaneçam como tais, *i.e.* não se tornem cargas livres, como ocorre quando há rompimento de dielétrico.

Se for considerado o vácuo real, observável, surge a questão de saber se ele realmente comporta-se na presença do campo eletromagnético como o vácuo clássico idealizado, *i.e.*, um vazio total e inerte ou se comporta-se como um meio que reage à presença do campo

clássico polarizando-se e magnetizando-se. Dito de outro modo, no vácuo real o campo eletromagnético exhibe única e exclusivamente fenômenos lineares?

Em escala macroscópica todos os experimentos até a data presente testam a superposição linear com 0,1 % de precisão. Em ótica, há uma multidão de fenômenos que confirmam a linearidade: os sistemas com fendas mostram padrões de difração, a difração por raio X descreve a estrutura de cristais, a luz branca que é refratada por um prisma formando um arco-íris e recombina-se novamente em luz branca e assim por diante [26]. Em escala subatômica, entretanto, o panorama começa a mudar em uma série de situações. Conforme partículas carregadas aproximam-se umas das outras, o eletromagnetismo prevê um crescimento absurdamente alto da energia eletromagnética. Por outro lado prevê autoenergias infinitas para as partículas puntiformes. Tais fenômenos levaram a especulações sobre a possibilidade de haver um limite superior para as intensidades dos campos. Um exemplo de teoria com tal limite é a teoria não-linear clássica de Born e Infeld [27], dada pela lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{BI}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = E_{cr} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{E_{cr}^2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{1}{E_{cr}^4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (1.6)$$

onde E_{cr} é um valor crítico em torno e acima do qual fenômenos não-lineares mostrar-se-iam significativos; para campos muito mais fracos do que E_{cr} , a lagrangeana $\mathcal{L}_{BI}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ reduz-se à lagrangeana de Maxwell, após a raiz quadrada em (1.6) ser expandida em potências do campo e sendo mantidos apenas termos de segunda ordem. Nas órbitas dos elétrons nos átomos há campos elétricos com intensidades da ordem de 10^9 a 10^{15} Volts/cm e, em núcleos pesados chega-se à ordem de 10^{19} Volts/cm. Com tais intensidades são

esperados alguns efeitos não-lineares. A lagrangeana de Born-Infeld prevê para o vácuo uma permissividade ϵ e uma permeabilidade μ não-lineares que podem ser escritas como:

$$\epsilon = \frac{1}{\mu} = \left[1 + \frac{1}{E_{cr}^2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \right]^{-1/2}. \tag{1.7}$$

Não há, porém, evidências de tal tipo de não-linearidade. Saindo da mecânica clássica e entrando na quântica, tem-se que o princípio da incerteza permite a criação momentânea de um par elétron-pósitron por dois fótons com a subsequente aniquilação desse par com a emissão de dois fótons, como indicado no diagrama da figura 1.1.

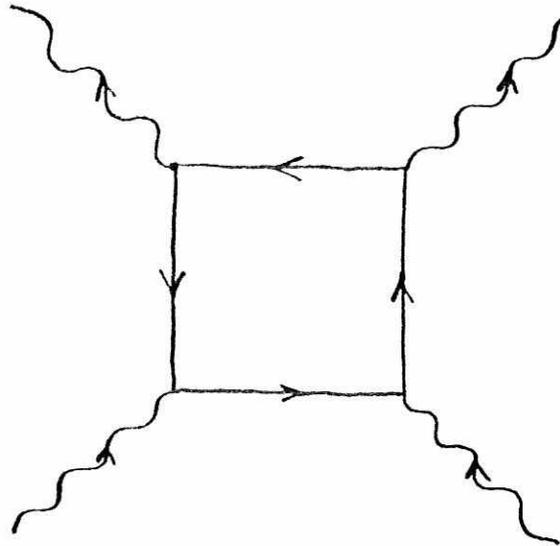


Figura 1.1: Espalhamento $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$.

Esse processo é chamado de espalhamento da luz pela luz. A criação do par elétron-pósitron torna possível também os chamados espalhamento de Delbrück [28, 29, 30] e o espalhamento de partição de fóton, indicados na figura 1.2.

No espalhamento Delbrück um fóton é espalhado por um campo eletromagnético ex-

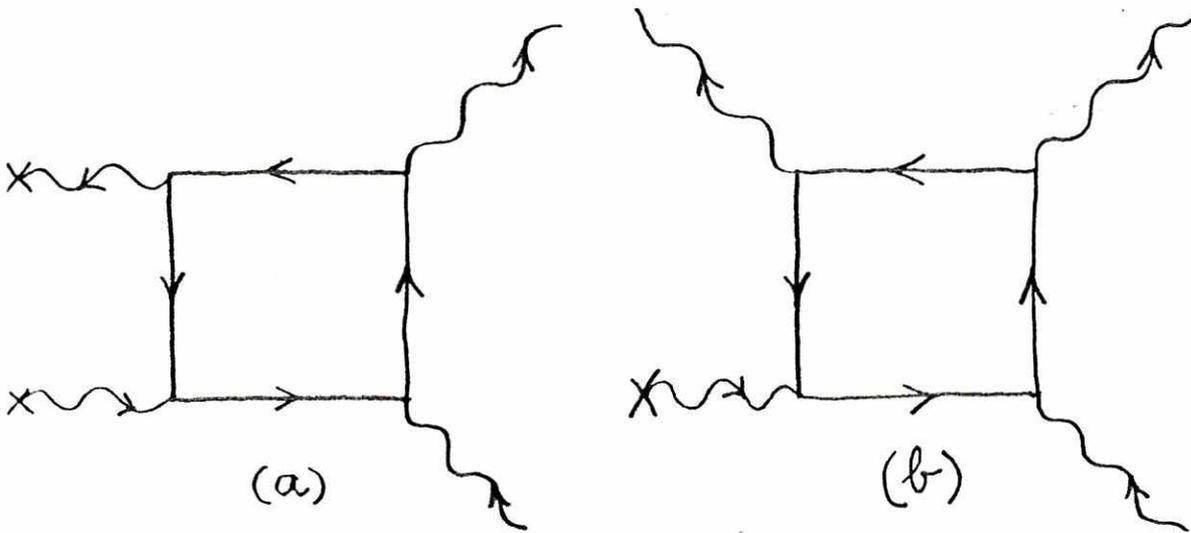


Figura 1.2: (a) Espalhamento Delbrück (b) Espalhamento de partição de fóton.

terno, por exemplo o campo forte de um núcleo. Na repartição de um fóton tem-se que um fóton é espalhado em dois pelo campo externo intenso de um núcleo. O valor crítico para a ocorrência de tais fenômenos é dado pela mecânica quântica como sendo:

$$E_{cr} = \frac{\sqrt{45\pi}}{2} \sqrt{\frac{e^2 |e|}{\hbar c r_0^2}} \approx 0,51 \frac{|e|}{r_0^2} \approx 0,9 \times 10^{18} \text{ Volts/cm}, \quad (1.8)$$

onde e é a carga do elétron, r_0 seu raio clássico e o valor do campo na superfície do elétron clássico é dado por $|e|/r_0^2 \approx 1,8 \times 10^{18} \text{ Volts/cm}$. Um tal valor intenso é a explicação para não ser observado em todos os fenômenos conhecidos do eletromagnetismo comportamento não-linear algum. No entanto, como questão de primeiros princípios, fica a possibilidade de fenômenos não-lineares no vácuo devido às flutuações quânticas.

A idéia de que a teoria quântica possibilita fenômenos eletromagnéticos não-lineares foi desenvolvida no começo dos anos 1930 por Euler, Kockel e Heisenberg [22, 23, 24]. Em seu trabalho seminal de 1936 [24] Euler e Heisenberg usaram a idéia de que o vácuo da EDQ comporta-se como um meio sob a ação do campo eletromagnético clássico. Obtiveram para

esse meio uma lagrangeana efetiva $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$ para um campo eletromagnético F lentamente variável, *i.e.* [25]:

$$\frac{\hbar}{mc} |\nabla F| \ll |F| \quad \frac{\hbar}{mc^2} \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \ll |F|, \quad (1.9)$$

onde m é a massa do elétron. No processo de cálculo, o campo é na verdade considerado constante e a lagrangeana efetiva obtida, dita de Euler-Heisenberg, é dada por:

$$\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(F) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[(se)^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re} \cosh(seX)}{\text{Im} \cosh(seX)} - 1 - \frac{2}{3}(se)^2 \mathcal{F} \right],$$

onde são usados os invariantes:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad \mathcal{G} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} {}^*F_{\mu\nu} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \quad (1.10)$$

e a definição:

$$X^2 := (\mathbf{B} + i\mathbf{E})^2. \quad (1.11)$$

Essa lagrangeana, que resultou dos trabalhos de Euler, Kockel e Heisenberg [22, 23, 24], foi recalculada de modo mais simples por Weisskopf [25] (o método de cálculo de Weisskopf é reproduzido no manual [31]). Aqui, interessa particularmente o método pelo qual foi obtido posteriormente por Schwinger [2], cuja notação foi usada para escrever (1.10). Como foi dito acima, é inerente à idéia de lagrangeana efetiva que as cargas presas do meio não se tornem livres e no caso da lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg isso significa que não haja criação de pares no vácuo da EDQ. Para um campo elétrico estático \mathbf{E} deve-se ter [31]

$$|e\mathbf{E}| \frac{\hbar}{mc} \ll mc^2 \quad (1.12)$$

A lagrangeana (1.10) desempenha este papel de lagrangeana clássica efetiva para campos fracos, quando supõe-se que (1.10) pode ser expandida em potências dos campos. O primeiro termo da expansão é dado por:

$$\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(F) = \frac{2\alpha^2 (\hbar/mc)^3}{45 mc^2} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] + \dots, \quad (1.13)$$

onde $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ é a constante de estrutura fina. No entanto, a lagrangeana (1.10) tem, em geral, uma parte não perturbativa imaginária, que dá a taxa de criação de pares [2]. A pequenez dessa taxa no regime de campos fracos, como expresso em (1.9) e (1.12), justifica o uso da parte real de (1.10) para descrever as propriedades dispersivas do vácuo quântico. Na verdade essa discussão visa apenas dar o contexto desse trabalho, pois o interesse aqui está apenas no caso de um campo estático puramente magnético, em que não há qualquer possibilidade de criação de pares mesmo no regime de campo magnético intenso. Nesse caso particular (1.10) reduz-se a:

$$\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} [(seB)^2 \coth(seB) - 1 - \frac{1}{3}(seB)^2], \quad (1.14)$$

onde um dos eixos de coordenadas, por exemplo o \mathcal{OZ} , foi escolhido na direção do campo magnético \mathbf{B} , com o sentido que torna o produto eB positivo.

O vácuo da EDQ é, na verdade, o meio real e inevitável em que estão os campos eletromagnéticos clássicos, sendo o vácuo clássico apenas uma aproximação macroscópica para campos não muito intensos. Consequentemente, a lagrangeana de Euler-Heisenberg é de fundamental importância sob dois pontos de vista. Em primeiro lugar, no estudo do eletromagnetismo clássico em sua situação concreta e real, em que o vácuo não é a idealização clássica do vazio completo. Em segundo lugar, como o fundamento teórico para

a prospecção do vácuo quântico por intermédio de campos eletromagnéticos clássicos. A própria validade da idealização do vácuo clássico é explicada pela lagrangeana de Euler-Heisenberg, que prevê o valor crítico m^2/e dos campos eletromagnéticos em torno e acima do qual a aproximação de vácuo clássico perderia sua validade. Tal valor, de $1,7 \times 10^{18} V/m$ para o campo elétrico e $4,4 \times 10^9 T$ para o campo magnético, é grande o bastante para que os campos eletromagnéticos de laboratório possam ser considerados como existindo no vácuo clássico. Essa mesma grandeza dos campos críticos tem dificultado enormemente uma observação experimental direta dos efeitos previstos pela lagrangeana de Euler-Heisenberg. Entretanto, trabalhos experimentais recentes indicam que a obtenção dos campos críticos em laboratório já não está fora de cogitação. Trabalhos experimentais com feixes de elétrons do SLAC em combinação com feixes intensos de lasers têm dado sinais de que podemos estar na iminência de obter em laboratório o campo elétrico crítico [32, 33]. Também encontram-se em andamento experimentos para medir efeitos de birrefringência induzidos no vácuo por um campo magnético [34, 35, 36]. Tal situação experimental torna ainda mais importante o estudo atual de lagrangeanas efetivas.

Lagrangeanas efetivas análogas à de Euler-Heisenberg podem ser calculadas para quaisquer campos quânticos com flutuações carregadas que acoplem com campos aplicados. De especial importância é a lagrangeana efetiva para a EDQ escalar obtida por Weisskopf [25] e posteriormente por Schwinger [2], pois a EDQ escalar constitui-se em um laboratório teórico privilegiado para investigar as contrapartidas bosônicas das propriedades fermiônicas da EDQ usual que, em oposição à escalar, é chamada nesse contexto de es-

pinorial. A lagrangeana efetiva da EDQ escalar será chamada de lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger e denotada por $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}$. A lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger supõe a condição (1.9) de campo eletromagnético clássico lentamente variável e é dada, na notação de Schwinger, por:

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(F) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[\frac{(se)^2 \mathcal{G}}{\text{Im} \cosh(seX)} - 1 + \frac{1}{3}(se)^2 \mathcal{F} \right],$$

onde agora m e e são a massa e a carga do campo escalar carregado.

O efeito Casimir e a lagrangeana de Euler-Heisenberg são duas contribuições distintas à longamente debatida questão sobre a natureza do vácuo físico. A seguir, será feita a discussão de como esses dois efeitos podem ser combinados.

1.3 O vácuo quântico sob condições de contorno e campo externo

Um campo quântico tem suas flutuações afetadas por condições de contorno e, se for carregado, essas mesmas flutuações são afetadas pela presença de um campo externo. Portanto, para um campo quântico carregado impõe-se por si mesma a questão de como tais flutuações são afetadas pela ação simultânea de condições de contorno e de campos externos. Essa questão pode ser formulada de duas maneiras complementares. Em uma delas pergunta-se que efeito um campo externo tem sobre as flutuações do vácuo já restritas por condições de contorno. Trata-se nesse caso de investigar a influência de um

campo externo sobre o efeito Casimir. Na outra, pergunta-se que influência condições de contorno exercem sobre flutuações do vácuo que já estão sob o efeito de um campo externo. Nesse caso estarão sendo investigadas as modificações induzidas por condições de contorno na lagrangeana efetiva do campo carregado. Esses dois pontos de vista, que podem ser formulados em termos tão similares, levam na verdade a fenômenos físicos completamente distintos, embora relacionados.

Note que a consideração simultânea de campos externos e condições de contorno agindo conjuntamente sobre as flutuações do vácuo é um problema que precisa ser estudado por razões muito objetivas. Em primeiro lugar porque é possível submeter as flutuações do vácuo simultaneamente a esses dois agentes, por exemplo, aplicando um campo magnético estático entre as placas metálicas do efeito Casimir original. Se o efeito resultante for desprezível ainda assim a explicação teórica do modo como ocorre e a previsão exata de seu valor são obviamente relevantes. O caráter fundamental dos agentes envolvidos no problema, em particular as flutuações de ponto zero, fazem dele uma questão de primeiros princípios em teoria quântica dos campos. Uma outra razão para investigar tal problema é que ele se impõe em pelo menos duas situações notáveis. No caso de quarks e gluons as flutuações de ponto zero não só estão sob influência do confinamento como também, inevitavelmente, sob a ação de outros campos. Pode-se considerar, por exemplo, as flutuações de ponto zero do campo de um tipo qualquer de quark. Elas estão sob as condições de contorno do confinamento e, sendo carregadas, sob a ação inevitável dos campos eletromagnéticos de todos os quarks presentes. Naturalmente que em uma primeira aproximação todos esses outros campos podem ser promediados em um campo

externo aplicado. Essa aproximação com o campo médio e com as condições de contorno de confinamento fornecem claramente um exemplo do tipo de problema considerado. No caso de teorias com dimensões compactificadas, como as teorias do tipo Kaluza-Klein que citamos acima [14], as flutuações em dimensões compactificadas em uma situação ou outra podem também estar sob a ação de campos externos. Ressalte-se que em aplicações dessas teorias a modelos cosmológicos devemos considerar a possibilidade dos chamados campos cósmicos, de elevadíssimos valores [37].

Nos exemplos acima de quarks e gluons confinados ou de dimensões compactificadas, condições razoavelmente realísticas levam a formalismos bastante complicados. Para investigar um novo fenômeno é usual considerar primeiramente uma situação que retenha as características essenciais dos problemas de interesse mas que de resto seja a mais simples possível. É possível então, entender as propriedades mais fundamentais do fenômeno físico, obter os parâmetros importantes da teoria e as relações entre as ordens de magnitude. De posse desses resultados situações mais intrincadas podem ser então enfrentadas com mais eficiência, por exemplo as flutuações do vácuo de quarks e gluons. Um modelo razoavelmente realista supõe os quarks e gluons confinados em uma esfera. O cálculo da energia de Casimir com geometria esférica é de tal complexidade que ainda hoje gera controvérsias [13], apesar de ter sido feito em 1968 [38]; o seu autor, Timothy Boyer o classificou como um “longo pesadelo envolvendo a teoria clássica das funções especiais”. Tal cálculo foi precedido por um outro imensamente mais simples feito por Johnson, um dos criadores do modelo de sacola MIT [39], que considerou os quarks e gluons confinados entre dois planos paralelos [40], naturalmente com separação da ordem de $1/F$, e obteve

que a energia de Casimir deveria contribuir com cerca de 9 % da massa dos hadrons.

Para obter os resultados mais essenciais da ação conjunta de condições de contorno e campo externo sobre as flutuações de ponto zero dos quarks também pode-se considerar uma situação simplificada ao máximo sem perder as características básicas do problema. É possível, por exemplo, considerar um campo de Dirac sob condições de contorno antiperiódicas [10] para evitar as complexidades cinemáticas envolvidas nas condições de contorno do modelo de sacola MIT. A condição de antiperiodicidade no intervalo $[-a, a]$ leva a uma energia de Casimir com ordem de magnitude e dependência em a comparável à do caso confinado entre placas com separação a . Também o campo externo foi considerado como sendo puramente magnético, o que no caso de placas metálicas evita o aparecimento de cargas e correntes e, no caso geral, evita a criação de pares. Sob essas condições obtém-se que as condições, de contorno geram correções à lagrangeana de Euler-Heisenberg e, o que é mais interessante, um termo totalmente novo que dá origem a uma constante de permeabilidade paramagnética para o vácuo que depende de a [11].

Igualmente importante é a análise do efeito conjunto de condições de contorno e campo externo sobre as flutuações de ponto zero dos campos gluônicos. Nesse caso é claro que o campo externo é considerado como uma média que simula, em primeira aproximação, a ação conjunta de todos os campos de cores que estão acoplados com as flutuações gluônicas. É possível reter as características essenciais do problema que são de interesse aqui, considerando um campo escalar carregado da EDQ escalar confinado entre dois planos e sob a ação de um campo magnético externo perpendicular aos planos. O campo escalar carregado evita complexidades cinemáticas inerentes a campos vetoriais, e na ver-

dade, proporciona a cinemática mais simples possível para o problema. O acoplamento do campo escalar carregado com um campo eletromagnético também é a escolha mais simples para o grupo de calibre. Uma vez que o problema em EDQ escalar seja bem compreendido, pode-se, com mais facilidade, considerar cinemáticas e grupos de calibre mais complicados, como os da cromodinâmica quântica. Este estudo é mais um exemplo da utilidade da EDQ escalar como laboratório teórico para auxiliar na compreensão de fenômenos físicos interessantes, apesar da ausência na natureza de escalares fundamentais carregados limitar as aplicações diretas da EDQ escalar a problemas concretos. Finalmente, as condições de contorno sobre planos paralelos, e a escolha de um campo externo puramente magnético e perpendicular aos planos são hipóteses obviamente simplificadoras que já foram discutidas anteriormente. Note que as condições de confinamento do campo escalar carregado entre placas são simples de implementar, ao contrário do que acontece no caso do campo de Dirac, e são dadas por condições de Dirichlet usuais. É importante ressaltar que o resultado mencionado acima, de que as condições de contorno no caso da EDQ espinorial produzem uma constante de permeabilidade paramagnética [11], remete imediatamente ao caso da EDQ escalar, para verificar em que medida se confirma a visão geral de que o vácuo fermiônico deve apresentar propriedades paramagnéticas enquanto que o vácuo bosônico deve apresentar propriedades diamagnéticas.

As considerações anteriores dão o contexto e as motivações do problema investigado nessa tese: a ação conjunta sobre o vácuo da EDQ escalar de condições de contorno confinantes entre dois planos paralelos e de um campo magnético externo perpendicular aos planos. Foram tratados aqui os dois pontos de vista complementares: o da influência

do campo magnético sobre o efeito Casimir da EDQ escalar [41] e o do efeito das condições de contorno sobre a lagrangeana efetiva da EDQ escalar [42]. Foram também calculados os efeitos de temperatura finita nos dois problemas anteriores [43, 44]. Na EDQ escalar, o campo magnético externo inibe o efeito Casimir e gera uma constante de permeabilidade diamagnética. Esses resultados devem ser contrapostos aos obtidos anteriormente para a EDQ espinorial, na qual o campo magnético externo acentua o efeito Casimir [45] e gera uma constante de permeabilidade paramagnética [11]. Um antecedente desse trabalho no qual condições de contorno também modificam as relações constitutivas do vácuo da EDQ é o efeito Scharnhorst [46, 47, 48, 49, 50]. Nesse efeito, entretanto, a mudança no índice de refração do vácuo se deve às condições de contorno impostas ao campo eletromagnético e não ao campo carregado do elétron, ou ao campo escalar carregado se for considerado o caso de EDQ escalar [50]. Consequentemente, esse é um efeito que se manifesta apenas por meio de diagramas com dois laços, enquanto que os efeitos que foram estudados aqui, com as condições de contorno nos campos carregados, já se manifestam em diagramas com um laço.

Em todos esses cálculos, foram utilizados os métodos propostos por Schwinger que derivam de seus trabalhos magistrais no formalismo geral da teoria quântica dos campos [51] e no problema da polarização do vácuo e invariância de calibre [2]. Nesse formalismo, foram obtidos o efeito Casimir e as lagrangeanas efetivas de modo unificado a partir de primeiros princípios, especificamente: a partir do princípio da ação de Schwinger e de seu conceito de ação bem ordenada, que no casos considerados, com diagramas de um laço, identifica-se com a ação efetiva dos formalismos funcionais atualmente em uso [52]. O

método de obtenção das lagrangeanas efetivas a partir da representação de tempo próprio da ação bem ordenada é dado no artigo original de Schwinger sobre invariância de calibre e polarização do vácuo [2] e já é amplamente conhecido na literatura [53]. Como o caso examinado aqui será apenas o mais simples de campo externo puramente magnético, não será necessário lançar mão de todos os recursos do método. O método de Schwinger para a obtenção da energia de Casimir foi proposto em um trabalho relativamente recente [54] e foi posteriormente aplicado em diversas situações [45, 55, 56, 57].

Capítulo 2

Formalismo de Schwinger para calcular o efeito Casimir e lagrangeanas efetivas a um laço

Neste capítulo é apresentado um resumo do formalismo de Schwinger para o cálculo do efeito Casimir e de lagrangeanas efetivas. Do princípio de ação de Schwinger, é apresentado apenas o necessário para que seja possível chegar ao efeito Casimir e à idéia de ação efetiva a um laço. É apresentada a dedução da representação de tempo-próprio para os casos de EDQ espinorial e escalar, nas linhas expostas no artigo original de Schwinger [2]. Finalmente, a EDQ escalar é usada para exemplificar os mencionados métodos de cálculo.

2.1 Formalismo de ação de Schwinger

Em seus trabalhos magistrais no formalismo geral da teoria quântica de campos [51], Schwinger propõe-se a derivar toda a dinâmica de um campo quântico de um único princípio, o princípio da ação. Para formulá-lo, deve-se lembrar que em teoria quântica, os autoestados simultâneos de um conjunto completo de observáveis comutantes podem representar qualquer estado do sistema e que o objetivo da dinâmica da teoria é calcular amplitudes de transição entre tais autoestados definidos em dois instantes. Sejam ζ_1 e ζ_2 dois conjuntos completos definidos nos instantes respectivos t_1 e t_2 e sejam, respectivamente, ζ'_1 e ζ'_2 dois conjuntos de autovalores correspondentes a esses conjuntos completos de operadores. Considere uma variação infinitesimal qualquer da amplitude de transição $\langle \zeta'_2, t_2 | \zeta'_1, t_1 \rangle$ provocada por variações de parâmetros tais como o instante inicial ou o instante final ou, que é o caso que aqui interessa, fontes externas reais ou virtuais. O princípio da ação de Schwinger afirma que a variação $\delta \langle \zeta'_2, t_2 | \zeta'_1, t_1 \rangle$ da amplitude de transição é dada por

$$\delta \langle \zeta'_2, t_2 | \zeta'_1, t_1 \rangle = \langle \zeta'_2, t_2 | i\delta W | \zeta'_1, t_1 \rangle, \quad (2.1)$$

onde δW é a variação correspondente do operador de ação W da teoria em consideração. Schwinger usa tal princípio para obter as equações de movimento para os campos, as relações de comutação entre eles e as correntes noetherianas, em particular os observáveis da representação que a teoria fornece para a álgebra de Poincaré. Não interessa aqui esse desenvolvimento do formalismo de Schwinger e seus resultados são considerados como da-

dos, mesmo porque o interesse aqui se concentra nas teorias da EDQ escalar e espinorial, cujos resultados são bem conhecidos e obtidos também por outros métodos considerados mais elementares do que o de Schwinger. Na verdade, o interessante aqui é um outro resultado que Schwinger obtém diretamente de seu princípio da ação. Note que o elemento de matriz $\langle \zeta'_2 t_2 | \delta W | \zeta'_1 t_1 \rangle$ é um número complexo que depende dos parâmetros cujas variações provocam a variação da amplitude $\langle \zeta'_2 t_2 | \zeta'_1 t_1 \rangle$. Schwinger usa tal elemento de matriz para introduzir uma função complexa \mathcal{W} (em letra caligráfica, para distinguir do operador W) cuja variação é dada por:

$$\delta \mathcal{W} := \frac{\langle \zeta'_2 t_2 | \delta W | \zeta'_1 t_1 \rangle}{\langle \zeta'_2 t_2 | \zeta'_1 t_1 \rangle}. \quad (2.2)$$

Usando a notação de Schwinger:

$$\langle F \rangle := \frac{\langle \zeta'_2 t_2 | F | \zeta'_1 t_1 \rangle}{\langle \zeta'_2 t_2 | \zeta'_1 t_1 \rangle}, \quad (2.3)$$

na qual F é um operador qualquer da teoria, a equação (2.2) pode ser escrita simplesmente como

$$\delta \mathcal{W} := \langle \delta W \rangle \quad (2.4)$$

A função \mathcal{W} é definida a menos de funções complexas \mathcal{C} cuja variação induzida pela variação dos parâmetros é zero: $\delta \mathcal{C} = 0$. Usando (2.2) para eliminar o operador δW do princípio de ação (2.1) obtem-se que:

$$\langle \zeta'_2 t_2 | \zeta'_1 t_1 \rangle = e^{i\mathcal{W}}. \quad (2.5)$$

Nessa equação, fica evidente que qualquer amplitude de transição é totalmente determinada pela função \mathcal{W} . Schwinger observa que a variação δW da ação só depende de

operadores nos instantes t_1 e t_2 e que as relações de comutação da teoria podem ser utilizadas para ordenar em δW os operadores de modo que todos os operadores no instante t_1 fiquem a direita dos operadores no instante t_2 ; com essa ordenação de operadores, δW fica em uma forma que Schwinger chama de bem ordenada. Se os estados $|\zeta'_1 t_1\rangle$ e $|\zeta'_2 t_2\rangle$ forem autoestados desses operadores é obtida então de imediato a igualdade $\langle \zeta'_2 t_2 | \delta W | \zeta'_1 t_1 \rangle = \delta W'_{BO} \langle \zeta'_2 t_2 | \zeta'_1 t_1 \rangle$, na qual δW está bem ordenada e o membro direito nos fornece a expressão numérica $\delta W'_{BO}$, que é uma função dos autovalores citados. Tal função nos fornece uma expressão para \mathcal{W} definida em (2.2) e explica o nome de ação bem ordenada que Schwinger já usou para \mathcal{W} .

Passando agora ao caso específico de interessa, é considerada a amplitude de que um sistema que se encontrava no estado de vácuo no passado remoto persista no estado de vácuo no futuro distante. Representando tais estados assintóticos, respectivamente, por $|0 t_1\rangle$ e $|0 t_2\rangle$, pode-se então escrever a amplitude de persistência no vácuo, de acordo com (2.5), na forma

$$\langle 0 t_2 | 0 t_1 \rangle = e^{i\mathcal{W}}. \quad (2.6)$$

Se \mathcal{W} for puramente real, a probabilidade associada a essa amplitude será igual a 1; nesse caso é certo que o sistema persistirá no estado de vácuo. Por outro lado, se houver alguma parte imaginária em \mathcal{W} a probabilidade será menor do que 1, indicando a possibilidade de criação de excitações do campo em consideração.

Em todos os processos que estarão sendo considerados, com diagramas de Feynmann com apenas um laço, a função \mathcal{W} identifica-se com a ação efetiva dos formalismos fun-

cionais atualmente em uso e, por esse motivo, será chamada doravante de ação efetiva. Supondo que o vácuo da teoria seja um estado não degenerado, tem-se que em um processo estacionário:

$$\langle 0 t_2 | 0 t_1 \rangle = e^{-i\mathcal{E}T}, \quad (2.7)$$

onde \mathcal{E} é a energia do vácuo e $T = t_2 - t_1$. Espera-se, é claro, que \mathcal{E} seja dotada de significado físico somente depois de apropriadamente renormalizada. Usando (2.7) e (2.6) obtém-se que em situações estacionárias, como no efeito Casimir estático, a energia de ponto zero pode ser obtida da ação efetiva por intermédio da fórmula [54]:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathcal{W}}{T}. \quad (2.8)$$

2.2 Representação de tempo próprio da ação efetiva

Em seu trabalho sobre invariância de calibre e polarização do vácuo [2], Schwinger obtém a chamada representação de tempo próprio para a ação efetiva do vácuo da EDQ em campo externo. Os dados iniciais do problema são, portanto, as equações de movimento e as relações de comutação para o campo de Dirac quantizado ψ de massa m e carga e , em presença de um campo eletromagnético externo A , *i.e.*:

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu(x) + m)\psi = 0, \quad (2.9)$$

onde

$$\Pi_\mu(x) := -i\partial_\mu - e A_\mu \quad (2.10)$$

e

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (2.11)$$

Tendo em vista o acoplamento mínimo entre o campo de Dirac e o campo externo A e o fato de que este é o parâmetro de variação da ação, tem-se que a variação desta é dada por:

$$\delta W^{(1)} = \int dx j^\mu(x) \delta A_\mu(x) , \quad (2.12)$$

onde $W^{(1)}$ é o termo de acoplamento da ação e j é a corrente do campo de Dirac, dada em forma simetrizada por:

$$j^\mu(x) = \frac{e}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma^\mu \psi(x)] . \quad (2.13)$$

Usando (2.4) obtem-se para a ação efetiva:

$$\delta \mathcal{W}^{(1)} = \int dx \langle j^\mu(x) \rangle \delta A_\mu(x) , \quad (2.14)$$

Para relacionar a corrente com as equações de movimento por meio de uma função de Green, Schwinger faz a chamada separação de pontos na expressão no membro direito de (2.13), *i.e.*, escreve nessa expressão os produtos de $\bar{\psi}(x)$ e $\psi(x)$ como limites apropriados de $\bar{\psi}(x)$ e $\psi(x')$ em pontos separados x e x' . Deste modo, usando o operador T de ordenação cronológica e a definição de limite simétrico

$$\lims_{x' \rightarrow x} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x' \rightarrow x+0} + \lim_{x' \rightarrow x-0} \right) , \quad (2.15)$$

é possível escrever a corrente (2.13) na forma:

$$j^\mu(x) = -e \gamma_{\alpha\beta}^\mu \lims_{x' \rightarrow x} T[\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(x')] . \quad (2.16)$$

Usando a notação (2.3) tem-se que

$$G_{\alpha\beta}(x, x') := \langle i T[\psi_\beta(x)\bar{\psi}_\alpha(x')] \rangle \quad (2.17)$$

é função de Green do operador de Dirac:

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu(x) + m)_{\alpha\sigma} G_{\sigma\beta}(x, x') = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x') . \quad (2.18)$$

Usando a notação matricial comum da mecânica quântica, o operador G é definido por meio de

$$\langle x \alpha | G | x' \beta \rangle = \langle x | G_{\alpha\beta} | x' \rangle = G_{\alpha\beta}(x, x') \quad (2.19)$$

e obtem-se de (2.16) e (2.17) que:

$$\langle j^\mu(x) \rangle = ie \lim_{x' \rightarrow x} \langle x | \gamma_{\alpha\beta}^\mu G_{\beta\alpha} | x' \rangle \quad (2.20)$$

onde G satisfaz a seguinte equação equivalente a (2.18):

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu + m)G = 1 , \quad (2.21)$$

$\langle x | \Pi_\mu | x' \rangle = \Pi_\mu(x) \delta(x - x')$. Substituindo o resultado (2.20) para a corrente de Dirac em (2.14), obtem-se para a ação efetiva $\mathcal{W}^{(1)}$, o resultado:

$$\delta \mathcal{W}^{(1)} = Tr(i e \gamma^\mu G \delta A_\mu) , \quad (2.22)$$

onde Tr é o traço total, que inclui a soma nos índices espinoriais e nas coordenadas espaço-temporais. Da equação (2.21) tem-se que G é o inverso do operador de Dirac e também pode ser escrito como:

$$G = (-\gamma^\mu \Pi_\mu(x) + m) \frac{1}{H} \quad (2.23)$$

com:

$$H := -(\gamma^\mu \Pi_\mu(x))^2 + m^2. \quad (2.24)$$

A representação integral:

$$\frac{1}{\mathcal{O} - i\epsilon} = i \int_0^\infty ds e^{-is(\mathcal{O} - i\epsilon)}, \quad (2.25)$$

para o inverso de um operador \mathcal{O} , na qual o regulador ϵ não será escrito a seguir, pode ser usada para H definido em (2.24) de modo a obter de (2.23) o resultado:

$$G = i \int_0^\infty ds (-\gamma^\mu \Pi_\mu(x) + m) e^{-isH}. \quad (2.26)$$

Substituindo esse resultado em (2.22) e usando a propriedade cíclica do traço, Schwinger finalmente obtém, a menos de uma constante aditiva:

$$\mathcal{W}^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-isH}. \quad (2.27)$$

A forma da exponencial no integrando dessa equação levou Schwinger a chamar o parâmetro s de “tempo próprio” e o operador de Klein-Gordon H de “hamiltoniana de tempo próprio”. A expressão (2.27) é a representação de tempo próprio da ação efetiva $\mathcal{W}^{(1)}$ da EDQ espinorial.

A fórmula correspondente a (2.27) na EDQ escalar é apresentada por Schwinger sem demonstração. Sendo exatamente a fórmula a ser utilizada nesse trabalho e não tendo encontrado sua demonstração na literatura não será sem utilidade apresentar a seguir a sua dedução algo detalhada em paralelo com a dedução feita acima para o caso espinorial. Começando com a lagrangeana simetrizada do campo quântico escalar carregado ϕ de

massa m e carga e , acoplado a um campo eletromagnético externo A :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\{(\Pi_\mu(x)\phi(x)^\dagger, \Pi^\mu(x)\phi(x))\} - \frac{1}{2}m^2\{\phi^\dagger(x), \phi(x)\}, \quad (2.28)$$

onde $\Pi(x)$ tem a forma dada em (2.10), tem-se para ϕ a equação de movimento:

$$(\Pi^2(x) + m^2)\phi(x) = 0 \quad (2.29)$$

e as relações de comutação

$$[\phi(\mathbf{x}, t), (\Pi^0\phi)^\dagger(\mathbf{y}, t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.30)$$

Uma variação infinitesimal do campo externo induz na lagrangeana (2.28), a variação

$\delta_A\mathcal{L} = j^\mu(x)\delta A_\mu(x)$, que dá para a ação a variação:

$$\delta W^{(1)} = \int dx j^\mu(x) \delta A_\mu(x), \quad (2.31)$$

onde tem-se agora a corrente do campo escalar:

$$j^\mu(x) := \frac{e}{2} \left[\{\phi^\dagger(x), \Pi^\mu(x)\phi(x)\} + \{(\Pi^\mu(x)\phi(x))^\dagger, \phi(x)\} \right]. \quad (2.32)$$

Note que essa é a corrente noetheriana correspondente à invariância da teoria sob o grupo

de calibre $U(1)$. Usando (2.4) a ação efetiva torna-se

$$\delta\mathcal{W}^{(1)} = \int dx \langle j^\mu(x) \rangle \delta A_\mu(x). \quad (2.33)$$

A técnica de separação de pontos aplicada nessa corrente leva agora à expressão:

$$j^\mu(x) = \lim_{x' \rightarrow x} e[\Pi^\mu(x) + \Pi^{\mu*}(x')]T[\phi^\dagger(x')\phi(x)]. \quad (2.34)$$

Usando a média de Schwinger (2.3) dos operadores ordenados cronologicamente é obtida

$$G(x, x') := \langle i T[\phi^\dagger(x')\phi(x)] \rangle, \quad (2.35)$$

que é função de Green do operador de Klein-Gordon:

$$[\Pi^2(x) + m^2]G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (2.36)$$

É obtida então, a seguinte expressão da média de Schwinger da corrente escalar (2.34) em termos da função de Green (2.35):

$$\langle j^\mu \rangle = -ie \lims_{x' \rightarrow x} [\Pi^\mu(x) + \Pi^{\mu*}(x')]G(x, x'). \quad (2.37)$$

Usando novamente a notação matricial comum da mecânica quântica, o operador de Green G da EDQ escalar é definido por meio de

$$\langle x|G|x' \rangle = G(x, x') \quad (2.38)$$

onde G satisfaz a equação:

$$(\Pi^2 + m^2)G = 1. \quad (2.39)$$

Em termos desse operador G a corrente (2.37) é dada pela expressão:

$$\langle j^\mu \rangle = -ie \lims_{x' \rightarrow x} \langle x|[\Pi^\mu + \Pi^\mu]G|x' \rangle = -2ie \lims_{x' \rightarrow x} \langle x|\Pi^\mu G|x' \rangle, \quad (2.40)$$

na qual o operador Π^μ tem a definição costumeira:

$$\Pi^\mu = p^\mu - eA^\mu, \quad (2.41)$$

com $\langle x|p_\mu|x' \rangle = -i\partial_\mu\delta(x - x')$ e $\langle x|A_\mu|x' \rangle = A_\mu\delta(x - x')$. Note que o resultado (2.40) deve-se ao fato de que $\langle x|\Pi^\mu|x' \rangle = \Pi^\mu(x)\delta(x, x') = \Pi^{\mu*}(x')\delta(x, x')$. A substituição da corrente

(2.40) em (2.14) fornece uma expressão para $\delta\mathcal{W}^{(1)}$ que, usada em (2.4), leva ao seguinte resultado para a variação da ação efetiva:

$$\delta\mathcal{W}^{(1)} = - \int dx \, 2 \lim_{x' \rightarrow x} \langle x | ie\Pi^\mu G \delta A_\mu | x' \rangle , \quad (2.42)$$

que também podemos escrever como:

$$\delta\mathcal{W}^{(1)} = -2 \operatorname{tr}_x (ie\Pi^\mu G \delta A_\mu) , \quad (2.43)$$

onde tr_x é novamente o traço nas coordenadas espaço-temporais. De (2.39) obtemos para o operador G a solução:

$$G = \frac{1}{H} \quad (2.44)$$

onde

$$H := (\Pi^2 + m^2) \quad (2.45)$$

é a hamiltoniana de tempo próprio do campo escalar. Na representação integral (2.25) a solução (2.44) toma a forma:

$$G = i \int_0^\infty ds \, e^{-isH} . \quad (2.46)$$

Substituindo essa expressão em (2.43) obtemos:

$$\delta\mathcal{W}^{(1)} = -i \int_0^\infty ds \, \operatorname{tr}_x 2ie \delta A_\mu \Pi^\mu e^{-isH} . \quad (2.47)$$

Levando em conta que

$$\delta H = -e(\delta A_\mu \Pi^\mu + \Pi^\mu \delta A_\mu) \quad (2.48)$$

e usando a propriedade cíclica do traço, obtem-se de (2.47) que:

$$\delta\mathcal{W}^{(1)} = \delta \left[-i \int_0^\infty \frac{ds}{s} \operatorname{tr}_x e^{-isH} \right] \quad (2.49)$$

e portanto que:

$$\mathcal{W}^{(1)} = -i \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr}_x e^{-isH}. \quad (2.50)$$

Esse resultado pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{W}^{(1)} = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-isH} \quad (2.51)$$

onde novamente Tr designa o traço total, que inclui também a soma nos dois graus de liberdade do campo escalar carregado, que na passagem da equação (2.50) para a equação (2.51) se resume a trocar 2tr_x por Tr . A expressão (2.51) é a representação de tempo próprio para a ação efetiva da EDQ escalar. É possível escrever conjuntamente o resultado (2.27) para o campo de Dirac e o resultado (2.51) para o campo escalar na seguinte forma:

$$\mathcal{W}^{(1\pm)} = \pm \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-isH^{(\pm)}}, \quad (2.52)$$

onde os sinais mais e menos indicam grandezas associadas aos respectivos campos carregados de Dirac e escalar (os sinais mais e menos são remissivos das respectivas relações de anticomutação e comutação obedecidas pelos campos).

2.3 O método de Schwinger para calcular o efeito Casimir

Em resposta a um desafio à sua teoria das fontes [58], de que nela não seria possível calcular o efeito Casimir, Schwinger publicou uma série de três artigos [54, 59, 60], nos

quais responde ao desafio exibindo o cálculo cuja possibilidade fora questionada. O método de cálculo pode ser utilizado no formalismo convencional da teoria quântica dos campos, sem apelar para a teoria das fontes. A versão apresentada no segundo [54] dos três artigos da série é particularmente eficiente e leva rapidamente à energia de Casimir do campo eletromagnético. O método de Schwinger consiste essencialmente em usar a relação (2.8) entre energia de ponto zero e ação efetiva juntamente com a representação de tempo próprio (2.52) para a ação efetiva. Tal método foi posteriormente aplicado a diversas outras situações [55, 56, 57] e será também usado no presente trabalho. É interessante notar que o efeito Casimir foi o assunto que ocupou o grande mestre de teoria quântica dos campos em suas últimas publicações.

Como exemplo simples do método de Schwinger, o cálculo da energia de Casimir de um campo escalar carregado sem massa será considerado. Formalmente esse cálculo é idêntico ao apresentado por Schwinger para o campo eletromagnético [54], porque nesses cálculos específicos da ação efetiva os dois graus de liberdade do campo escalar carregado e as duas polarizações do campo eletromagnético comportam-se do mesmo modo diante do traço da representação de tempo próprio. As condições de contorno são as de Dirichlet em duas placas planas paralelas separadas por uma distância a . As placas são consideradas como sendo quadrados de lado ℓ e a separação entre elas é pequena, *i.e.*, $a \ll \ell$. A seguir é feita a suposição de que as placas permaneçam na configuração estática considerada por um longo intervalo de tempo T ; seguindo Schwinger T será chamado de tempo de medição. O formalismo a ser utilizado supõe a idealização descrita pelos limites $\ell \rightarrow \infty$ e $T \rightarrow \infty$ para ser considerado exato. A fonte externa não age sobre o campo no

espaço entre as placas, de modo que a hamiltoniana de tempo próprio na região entre elas é simplesmente: $H = p^2 = \mathbf{p}^2 - (p^0)^2$. Nas próprias placas, a ação confinante da fonte é descrita pelas condições de contorno. Considere um sistema de eixos com as placas perpendiculares ao eixo OZ e localizadas em $z = 0$ e $z = a$. Os autovalores de p_z são dados por $\pi n/a$ ($n \in \mathbb{N}$), devido às condições de Dirichlet nas placas, enquanto que os autovalores de p_x , p_y e p^0 são números reais quaisquer. Tem-se então:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} e^{-isH} &= 2 \text{tr}_x e^{-is(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_0^2)} \\
 &= 2 \frac{\ell}{2\pi} \int dp_x e^{-is p_x^2} \frac{\ell}{2\pi} \int dp_y e^{-is p_y^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-is(n\pi/a)^2} \frac{T}{2\pi} \int d\omega e^{is\omega^2} \\
 &= 2 \ell^2 T [i(4\pi s)^3]^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-is(n\pi/a)^2}.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Substituindo esse traço na representação de tempo próprio (2.51), obtém-se:

$$\mathcal{W}^{(1)} = -\frac{\sqrt{i} \ell^2 T}{8\pi^{3/2}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-is(n\pi/a)^2}, \tag{2.54}$$

onde foi usado o corte s_0 para regularizar a integral no tempo próprio. De fato, a integral (2.54) é divergente no limite $s_0 \rightarrow 0$ e os termos que levam às divergências podem ser isolados por meio da fórmula de soma de Poisson, que Schwinger cita no trabalho original [61], e é dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi(1/\tau)}. \tag{2.55}$$

Escolhendo $\tau = i\pi s/a^2$ e isolando os termos com $n = 0$ obtém-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-is(\pi n/a)^2} = \frac{a}{2\sqrt{\pi i s}} - \frac{1}{2} + \frac{a}{\sqrt{\pi i s}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(an)^2/s}. \tag{2.56}$$

Usando essa fórmula na ação (2.54) e usando a relação (2.8) entre energia de ponto zero e ação efetiva, tem-se que:

$$\mathcal{E} = a\ell^2 \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} - \ell^2 \frac{\sqrt{i}}{16\pi^{3/2}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} + \frac{a\ell^2}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(an)^2/s}. \quad (2.57)$$

As duas primeiras integrais levam a infinitos quando o corte s_0 no tempo próprio é removido. Schwinger elimina essas divergências basicamente por meio do argumento a seguir. A primeira integral é proporcional ao volume entre as placas e descreve uma densidade volumar uniforme de energia do vácuo, densidade que é independente da localização das placas. Essa é a densidade do vácuo usual (sem condições de contorno) e deve ser normalizada como zero. É possível descartar essa densidade subtraindo na equação (2.57) a primeira integral da energia de ponto zero \mathcal{E} no membro esquerdo. A segunda integral é proporcional à área ℓ^2 das placas, não depende da separação entre as mesmas e está associada à auto-energia de cada placa individual. Essa energia deve ser normalizada como zero, pois o interesse está apenas na variação de energia produzida ao aproximar as duas placas. Também a segunda integral pode ser subtraída da energia de ponto zero \mathcal{E} no membro esquerdo de (2.57). A energia restante após essas subtrações, que continuará a ser representada por \mathcal{E} , é dada por:

$$\frac{\mathcal{E}}{\ell^2} = \frac{a}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(an)^2/s}. \quad (2.58)$$

Essa energia pode ser escrita em forma manifestamente real com a utilização do teorema do contorno de Cauchy para rodar dextrogiamente de $\pi/2$ o eixo de integração em s ; essa rotação equivale a substituir no integrando s por $-is$. Schwinger faz essa rotação juntamente com uma outra troca de variável de integração que equivale a substituir no

integrando de (2.58) a variável s pela variável $\sigma = a^2/is$. Essa substituição leva a:

$$\frac{\mathcal{E}}{\ell^2} = -\frac{1}{8\pi^2 a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} d\sigma \sigma e^{-n^2 \sigma}. \quad (2.59)$$

Essa integral é convergente no limite $s_0 \rightarrow 0$ e é dada em termos de uma função Γ de Euler por $\Gamma(2)/a^4$ [62] e (2.59) pode ser escrita como:

$$\frac{\mathcal{E}}{A} = -\frac{1}{8\pi^2 a^3} \zeta(4), \quad (2.60)$$

onde ζ é a função zeta de Riemann [62], para a qual tem-se: $\zeta(4) = \pi^4/90$. Portanto:

$$\frac{\mathcal{E}}{A} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{1}{a^3}. \quad (2.61)$$

A energia \mathcal{E} finita obtida nesse resultado é a energia de Casimir do campo escalar carregado entre placas confinantes paralelas com separação a . De acordo com a observação feita acima, é também a energia de Casimir original do campo eletromagnético entre placas metálicas separadas de a (1.2). A expressão para a pressão de Casimir é obtida a partir da derivada da energia por unidade de área em relação à distância entre as placas:

$$p = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} \frac{1}{A} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{1}{a^4}. \quad (2.62)$$

2.4 O método de Schwinger para calcular lagrangeanas efetivas a um laço

Para calcular a lagrangeana efetiva da EDQ, Schwinger usa a equação (2.14) para a ação efetiva $\mathcal{W}^{(1)}$ do campo de Dirac, na qual aparece o integrando: $\langle j^\mu(x) \rangle A_\mu$. Na

situação inerente à idéia de lagrangeana efetiva, em que a amplitude de transição entre o vácuo e estados com pares é desprezível, o termo dominante desse integrando descreve o acoplamento do campo eletromagnético clássico com o valor esperado no vácuo da corrente do campo de Dirac. Esse integrando é exatamente a lagrangeana efetiva $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$ que Euler-Heisenberg obtiveram no formalismo dos primórdios da teoria quântica de campos e que no formalismo de Schwinger aparece como:

$$\mathcal{W}^{(1)} = \int dx \mathcal{L}_{HE}^{(1)}. \quad (2.63)$$

No caso da EDQ escalar, em que a lagrangeana efetiva será chamada de lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger e representada por $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}$, tem-se igualmente que:

$$\mathcal{W}^{(1)} = \int dx \mathcal{L}_{WS}^{(1)}, \quad (2.64)$$

onde agora $\mathcal{W}^{(1)}$ é a ação efetiva para o campo escalar carregado.

A situação de interesse nesse caso é aquela em que o campo externo é puramente magnético e, conseqüentemente, a interdição de transição entre vácuo e estados com pares cumpre-se exatamente. Para ilustrar o método de Schwinger de obtenção de lagrangeanas efetivas ele será utilizado a seguir para obter nessa situação de campo externo puramente magnético a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger. Considera-se um campo magnético \mathbf{B} constante e uniforme e o eixo OZ é escolhido paralelo ao campo. Por conveniência, o sentido do eixo foi escolhido de modo que o produto eB da carga e do campo escalar pela componente $B_z = B$ do campo seja positivo. Para calcular a ação efetiva (2.51) nesse caso, não é necessário usar todos os recursos do formalismo de tempo próprio desenvolvido por Schwinger. É possível perceber claramente que o método

de cálculo é semelhante ao usado para o efeito Casimir apresentado na seção anterior.

Começa-se computando o traço que aparece na representação de tempo próprio (2.51).

Agora a hamiltoniana de tempo próprio é dada por

$$H = \Pi^2 + m^2 = (p - eA)^2 + m^2 \quad (2.65)$$

na qual o potencial pode ser escrito como $A_\mu = \delta_\mu^1 x^1 B$. Usando coordenadas x, y, z e t é possível escrever:

$$H = -\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2ieBx \frac{\partial}{\partial y} + (eB)^2 x^2 + m^2. \quad (2.66)$$

Os autovetores desse operador calculam-se da maneira usual por separação de variáveis (cf., e.g., a seção 32 do manual [63]) e levam aos autovalores:

$$H' = eB(2n + 1) + p_z'^2 - \omega^2 + m^2, \quad (2.67)$$

onde ω e p_z' são números reais arbitrários e $n = 0, 1, 2, \dots$, tendo cada nível de Landau n a degenerescência $eB\ell^2/2\pi$. Tem-se portanto:

$$Tre^{-isH} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{eB\ell^2}{2\pi} e^{-iseB(2n'+1)} \frac{\ell}{2\pi} \int dp_z' e^{-isp_z'^2} \frac{T}{2\pi} \int d\omega e^{is\omega^2} e^{-ism^2}. \quad (2.68)$$

A soma nos níveis de Landau é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{eB\ell^2}{2\pi} e^{-iseB(2n+1)} = \frac{\ell^2}{4\pi is} iseB \csc(iseB), \quad (2.69)$$

e o traço reduz-se a:

$$Tre^{-isH} = \frac{\ell^3 T}{8\pi^2 i} \frac{e^{-ism^2}}{s^2} iseB \csc(iseB).$$

Substituindo essa expressão em (2.51) obtém-se para a ação efetiva:

$$\mathcal{W}^{(1)} = -\frac{a\ell^2 T}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} iseB \csc(iseB).$$

Uma rotação do eixo de integração de $\pi/2$ no sentido horário torna essa ação manifestamente real:

$$\mathcal{W}^{(1)} = \frac{a\ell^2 T}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} seB \csc(seB). \quad (2.70)$$

Usando então a equação (2.64) obtém-se a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger em forma ainda não renormalizada e dependente do corte s_0 no tempo próprio:

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} seB \csc(seB). \quad (2.71)$$

Para dotar de significado físico esse resultado, as prescrições de renormalização dadas por Schwinger [2] são seguidas. Em (2.71) a cossecante é expandida até termos de segunda ordem no tempo próprio s e a expressão da lagrangeana assim obtida é adicionada à lagrangeana de Maxwell para a seguinte lagrangeana total ser obtida:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B) = & -\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} - \left(\frac{e^2}{96\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-sm^2} \right) B^2 + \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} [seB \csc(seB) - 1 + \frac{1}{6}(seB)^2]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

A primeira integral nessa expressão tende para o limite infinito $m^4\Gamma(-2)/16\pi^2$ se o corte s_0 for eliminado. Tal termo pode ser subtraído de $\mathcal{L}_S^{(1)}(B)$ e com isso eliminado do membro direito de (2.72). O segundo termo em (2.72) é proporcional a B^2 com uma constante de proporcionalidade que tende, com a remoção do corte, para o limite infinito $-e^2\Gamma(0)/48\pi^2$.

Essa constante de proporcionalidade define uma constante Z_3 por meio da relação:

$$Z_3^{-1} - 1 = \frac{e^2}{96\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-sm^2}. \quad (2.73)$$

Agora, nas palavras de Schwinger, uma “mudança de escala” no campo e na carga é feita, definindo:

$$B_R = BZ_3^{-1/2} \quad e_R = eZ_3^{1/2}. \quad (2.74)$$

Expressando a lagrangeana (2.72), da qual o primeiro termo divergente já foi subtraído, em termos de B_R e e_R a seguinte lagrangeana $\mathcal{L}_R(B_R)$ na qual não aparece divergência alguma é obtida:

$$\mathcal{L}_R(B_R) = -\frac{1}{2}B_R^2 + \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} [se_R B_R \csc(se_R B_R) - 1 + \frac{1}{6}(se_R B_R)^2]. \quad (2.75)$$

Tomando o limite $s_0 \rightarrow 0$ e interpretando o campo e a carga nuas como não observáveis e a carga e o campo renormalizados como sendo as grandezas físicas observáveis obtém-se finalmente de (2.75) a lagrangeana efetiva da EDQ escalar. Estando claro que agora só há grandezas renormalizadas, o sub-índice R indicador da renormalização será omitido. O resultado final para a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger para a EDQ escalar é expresso como:

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} [seB \csc(seB) - 1 + \frac{1}{6}(seB)^2]. \quad (2.76)$$

Esse resultado também pode ser expresso em termos de uma função zeta de Rieman, conforme mostrado por Dittrich [64].

De posse dessa lagrangeana efetiva é possível investigar (em aproximação de um laço) as propriedades magnéticas do vácuo da EDQ escalar. A grandeza mais relevante no caso é a magnetização \mathbf{M} do vácuo, dada por (*cf.*, *e.g.*: seção 127 de [31]):

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{L}_S^{(1)}}{\partial \mathbf{B}}. \quad (2.77)$$

Dado que a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger (2.76) não tem termo quadrático no campo magnético, a magnetização do vácuo da EDQ escalar é um fenômeno não-linear. A mesma ausência de linearidade é prevista no caso da EDQ espinorial pela lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg, como pode ser visto em (1.13) ou (1.14).

Capítulo 3

Vácuo da EDQ sob condições de contorno em campo magnético externo

Neste capítulo é apresentado o trabalho tema dessa dissertação, que consistiu em estudar a ação conjunta de condições de contorno confinantes e campo externo magnético sobre o campo escalar carregado da EDQ escalar. Tal estudo será feito nas duas abordagens que foram chamadas anteriormente de complementares. Em uma foi considerado o efeito do campo magnético externo sobre o efeito Casimir do campo escalar carregado; esse estudo é apresentado na seção 2. No outro, foi considerado o efeito que as placas confinantes do efeito Casimir têm sobre a lagrangeana efetiva do EDQ escalar, chamada aqui de lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger; esse tópico é apresentado na seção

3. Uma das motivações desse estudo na EDQ escalar foi um estudo similar anterior na EDQ espinorial, cujos resultados estão resumidamente expostos na seção 1, para estarem disponíveis para comparação no correr do formalismo apresentado nas seções 2 e 3.

3.1 O vácuo fermiônico sob condições de contorno em campo magnético externo

Conforme a discussão feita na introdução, é importante estudar o efeito conjunto de condições de contorno e de campo externo sobre o vácuo fermiônico carregado. Para compreender as características essenciais de um efeito é usual estudá-lo inicialmente em uma situação simples, na qual complexidades técnicas são evitadas. No caso em questão, a situação mais simples consiste em considerar um campo de Dirac carregado sob o efeito conjunto de uma condição de contorno antiperiódica em uma certa direção e de um campo magnético externo constante e uniforme ao longo dessa mesma direção. A escolha do campo de Dirac e de um campo magnético externo constante e uniforme são, obviamente, simplificadoras. Quanto à escolha de condição de contorno antiperiódica, vale dizer que a condição de contorno de confinamento mais interessante para aplicações realistas é de extrema complexidade, exceto no caso mais simples de campo de Dirac sem massa e sem campo externo confinado entre placas paralelas [40]. Condições de contorno periódicas e antiperiódicas [10] são, pelo contrário, comparativamente simples de serem implementadas e, pelo que se sabe dos limites de massa nula, levam a resultados semelhantes aos

obtidos com tanta dificuldade no caso de condições de contorno confinantes. As condições antiperiódicas merecem ser escolhidas porque o formalismo resultante não padece dos problemas de causalidade que ocorrem no caso de condições periódicas [10]. Esse problema do campo de Dirac carregado sob o efeito conjunto de condição de contorno e campo magnético externo já foi estudado sob os dois pontos de vista complementares: o da influência do campo magnético sob o efeito Casimir fermiônico decorrente das condições antiperiódicas [45] e o da influência das condições de contorno antiperiódicas na lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg [11]. Nessa seção será feito um resumo dos resultados obtidos [11, 45] para que possam ser confrontados com eles os resultados obtidos para o problema bosônico análogo, a ser tratado nas seções seguintes.

Considere um campo magnético \mathbf{B} como de costume na direção do eixo \mathcal{OZ} , com sentido que faça positivo o produto da carga e do campo de Dirac pela componente B do campo ao longo de \mathcal{OZ} . A condição de contorno antiperiódica é implementada nos planos $z = -a$ a $z = a$; tais planos são considerados como quadrados de lado ℓ com $\ell \gg a$. O cálculo é feito pelos métodos de Schwinger, explicados no capítulo 2.

A fórmula de Schwinger para o cálculo de ações efetivas do campo de Dirac (2.27) é dada por:

$$\mathcal{W}^{(1)} = \frac{i}{2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-isH}, \quad (3.1)$$

onde s_0 é um corte no tempo próprio s , Tr significa o traço total, H é a hamiltoniana de tempo próprio dada por $H = (p - eA)^2 - (e/2)\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2$, p possui componentes $p_\mu = -i\partial_\mu$, e é a carga da partícula de Dirac, A é o potencial eletromagnético, F é o campo eletromagnético, que está sendo contraído com a combinação de matrizes gama

$\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$ e m é a massa da partícula de Dirac. A condição de contorno anti-periódica fornece para p os autovalores $\pi n/a$, onde n é um inteiro ímpar. As outras componentes espaciais de p estão restritas aos níveis de Landau criados pelo campo magnético B .

Obtém-se para a ação (2.27), reescrita na equação (3.1):

$$\mathcal{W}^{(1)} = \mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B) T 2a\ell^2 - \mathcal{E}(a, B) T, \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B)$ é a lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg e $\mathcal{E}(a, B)$ é a energia de Casimir sob a ação do campo externo B . A lagrangeana efetiva pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} [seB L(seB) - \frac{1}{3}(seB)^2], \quad (3.3)$$

em termos da função de Langevin:

$$L(\xi) = \coth(\xi) - \frac{1}{\xi}. \quad (3.4)$$

Sendo a lagrangeana $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B)$ totalmente independente de a o primeiro termo no membro direito de (3.2) não contribui para a energia de Casimir, que é dada pelo segundo termo e pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}(a, B)}{2a\ell^2} &= -\frac{(am)^2}{2\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} K_2(2amn) \\ &\quad - \frac{eB}{4\pi^2 a^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} \int_0^\infty d\sigma e^{-n^2\sigma - (am)^2/\sigma} L(eBa^2/\sigma). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Os resultados (3.3) e (3.5) são obtidos após as necessárias renormalizações.

Na ausência de campo externo, a energia de Casimir do campo de Dirac é dada pelo primeiro termo em (3.5):

$$\frac{\mathcal{E}(a, 0)}{2a\ell^2} = -\frac{(am)^2}{2\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} K_2(2amn). \quad (3.6)$$

O segundo termo em (3.5) descreve a procurada influência do campo externo na energia de Casimir. No caso de maior interesse, em que o campo magnético é forte ($B \gg m/ea$), a energia (3.5) pode ser aproximada pela expressão:

$$\frac{\mathcal{E}(a, B)}{2a\ell^2} = \frac{eBm}{2\pi^2 a} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n} K_1(2amn) . \quad (3.7)$$

A pressão de Casimir p associada à energia de Casimir (3.6) na ausência do campo externo é dada por:

$$p(a, 0) = -\frac{3(am)^2}{2\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} [K_2(2amn) + (2amn/3) K_1(2amn)] \quad (3.8)$$

e a pressão de Casimir na presença de um campo magnético forte B , obtida de (3.7), por:

$$p(a, B) = -\frac{am}{2\pi^2 a^4} eBa^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n} [K_1(2amn) + 2amn K_0(2amn)] . \quad (3.9)$$

Os resultados obtidos mostram que o campo magnético aumenta a energia de Casimir [45]. Agora o problema complementar no qual se procura determinar a influência da condição de contorno na lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg. Nesse caso pode-se reescrever a ação (2.27) na forma

$$\mathcal{W}^{(1)} = [\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B) + \mathcal{L}_{HEC}^{(1)}(B, a)] T2a\ell^2 , \quad (3.10)$$

onde aparece novamente a lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B)$ dada por (3.3). Agora o interesse se concentra no regime de campos magnéticos fracos, em que B é pequeno comparado com o campo crítico $B_{cr} = m^2/e$. Nesse regime $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B)$ pode ser expandida em potências de B^{2k}/B_{cr}^{2k} , conforme dado pela seguinte expressão:

$$\mathcal{L}_{HE}^{(1)}(B) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{8\pi^2} \frac{2^{2k} |B_{2k}| m^4}{2k(2k-1)(2k-2)} \frac{B^{2k}}{B_{cr}^{2k}} \quad (3.11)$$

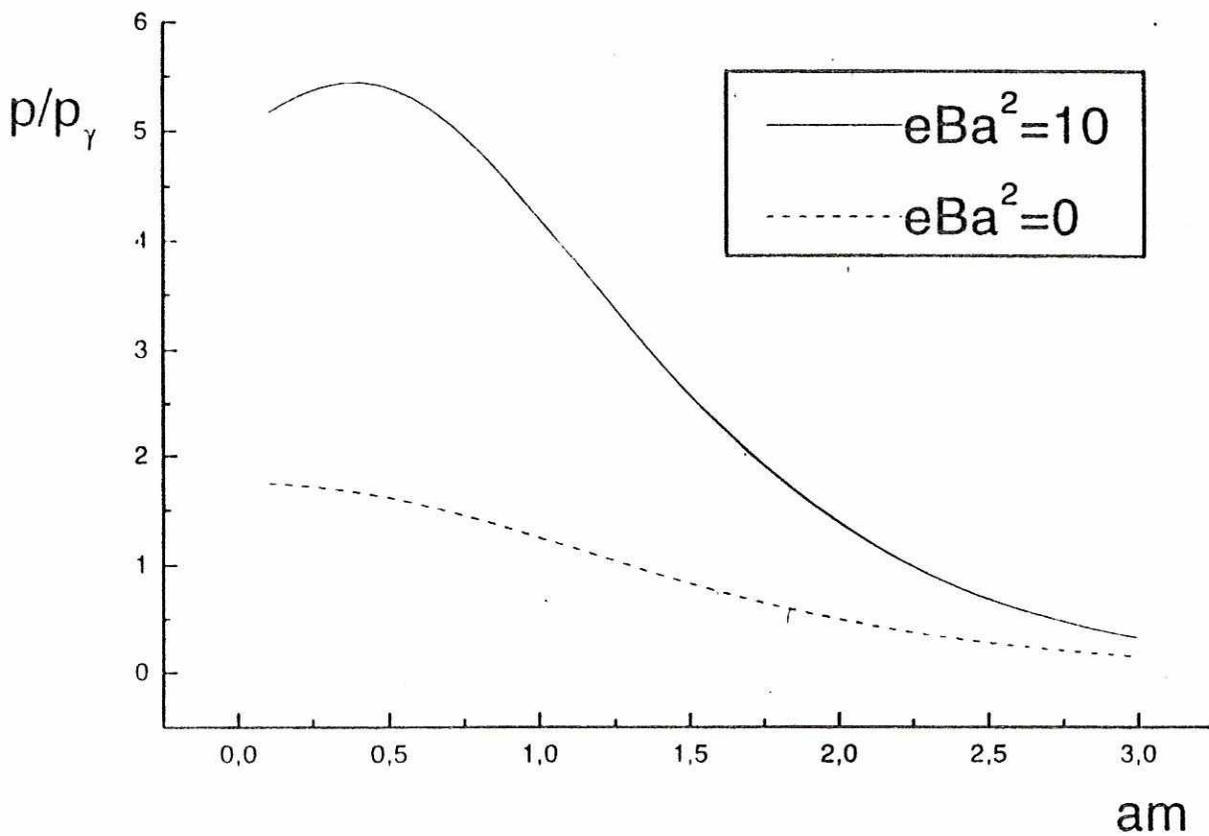


Figura 3.1: Pressão de Casimir para o campo de Dirac em um campo magnético externo uniforme e constante; a pressão está normalizada pela pressão de Casimir eletromagnética.

onde B_{2k} é o $2k$ -ésimo número de Bernoulli. O termo $\mathcal{L}_{HEC}^{(1)}(B, a)$ em (3.10) é dado por:

$$\mathcal{L}_{HEC}^{(1)}(B, a) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (an)^2/s} [1 + seB L(seB)] . \quad (3.12)$$

$\mathcal{L}_{HEC}^{(1)}(B, a)$ é o termo que surge devido à condição de contorno e será chamada de lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg-Casimir. Também $\mathcal{L}_{HEC}^{(1)}(B, a)$ é obtida após as necessárias renormalizações. A lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg-Casimir pode ser escrita na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{HEC}^{(1)}(B) = \frac{(am)^2}{2\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} K_2(2amn) + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\mu(am)} \right] B^2 + \mathcal{L}_{HE}^{(1)'}(a, B) , \quad (3.13)$$

onde

$$\frac{1}{\mu(am)} = 1 - \frac{e^2}{3\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} K_0(2amn) , \quad (3.14)$$

$$\mathcal{L}_{HEC}^{(1)'}(a, B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (an)^2/s} [seB L(seB) - \frac{1}{3}(seB)^2] . \quad (3.15)$$

O primeiro termo em (3.13) é a energia de Casimir usual do campo de Dirac, que contribui de modo essencial para a energia total de Casimir (3.5). Sendo independente de B , ela é irrelevante na lagrangeana efetiva (3.13) e pode ser simplesmente ignorada. O terceiro termo em (3.13), dado por (3.15), fornece correções não lineares à lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg, e pode ser expandida no regime de campo magnético fraco de acordo com:

$$\mathcal{L}_{HEC}^{(1)'}(a, B) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{8\pi^2} \frac{2^{2k} |B_{2k}| m^4}{2k(2k-1)(2k-2)} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} (amn)^{2k-2} K_{2k-2}(2amn) \right] \frac{B^{2k}}{B_{cr}^{2k}} . \quad (3.16)$$

Tal expansão deve ser comparada com (3.11). O termo mais importante em (3.13) é o segundo, que é quadrático no campo magnético e portanto nos dá uma constante de

permeabilidade (3.14) para o vácuo de Dirac devido à condição de contorno. Esse efeito linear de magnetização não aparece na lagrangeana de Euler-Heisenberg. Note que a permeabilidade (3.14) reduz-se a 1 quando a condição de contorno é eliminada ($a \rightarrow \infty$). Para valores de a fisicamente significativos, *i.e.*, maiores do que o comprimento de Compton do elétron $1/m$, a permeabilidade magnética é paramagnética, o que reforça a idéia geralmente aceita de que o vácuo fermiônico deve comportar-se como um meio paramagnético. Por outro lado, para a abaixo de um valor crítico γ_{cr} , determinado pela expressão (3.14), a permeabilidade torna-se diamagnética. Dado que γ_{cr} é imensamente menor do que $1/m$ essa mudança intrigante deve ser aceita com reservas. Ainda assim é interessante notar que ela não contraria uma visão intuitiva do magnetismo, que favorece a idéia de que em um meio intensamente comprimido ($a \ll \gamma_{cr}$) o diamagnetismo deve predominar. Entretanto, essa mesma visão levaria ao resultado de que em um vácuo bosônico, que presumivelmente deve comportar-se como um meio diamagnético, uma transição análoga para o paramagnetismo não deve ocorrer. Tal hipótese só pode ser verificada se for realizado um cálculo no caso bosônico que seja análogo ao fermiônico desta seção; isso será feito na seção 3.4.

3.2 O efeito Casimir do campo escalar carregado em campo magnético externo

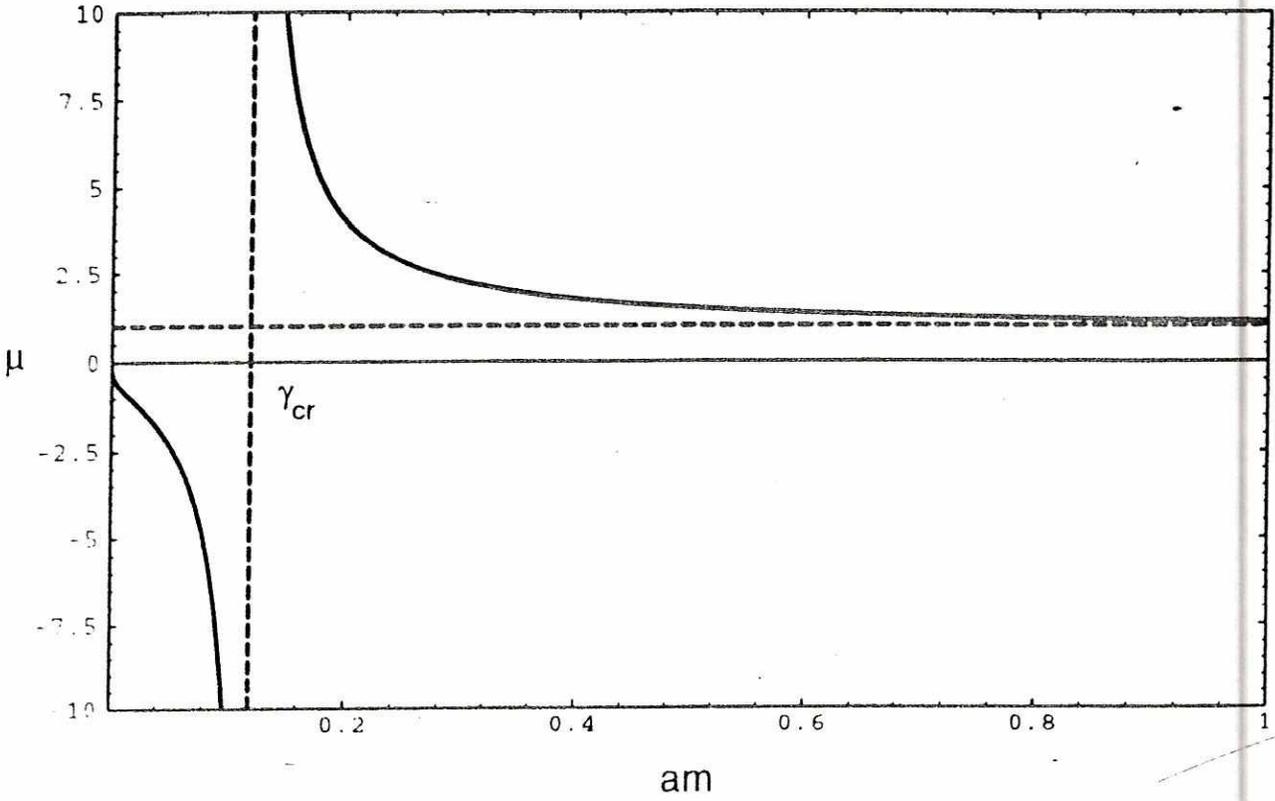


Figura 3.2: Permeabilidade magnética do vácuo do campo de Dirac sob condição de contorno antiperiódica.

Nesta seção, será tratado o problema da influência de um campo magnético externo no efeito Casimir do campo escalar carregado da EDQ escalar. Já foi feito um comentário sobre a utilidade de estudar a EDQ escalar, por ser útil na investigação dos campos vetoriais fundamentais e proporcionar um modelo simples para investigar questões fundamentais. No problema desta seção há mais um exemplo dessa utilidade. Enquanto que na seção anterior a condição de contorno para o campo de Dirac foi escolhida como sendo a antiperiódica, para evitar complexidades do formalismo espinorial que obscureceriam o formalismo, aqui pode-se escolher a condição de contorno mais interessante que descreve confinamento entre placas.

Considere então um campo escalar massivo e carregado, confinado entre duas placas paralelas de lado ℓ e separação a ($a \ll \ell$), sob a influência de um campo magnético externo uniforme e constante, \mathbf{B} , com direção perpendicular às placas. Vale enfatizar as características deste sistema que permitirão a simplificação do formalismo que exibirá o efeito que se quer investigar. O campo escalar carregado permite ignorar complexidades cinemáticas que não são relevantes para uma aproximação inicial a este problema. A escolha de um campo magnético puro exclui a possibilidade de criação de pares para qualquer intensidade do campo magnético. O confinamento entre as placas paralelas infinitas é descrito por uma forma simples da condição de contorno de Dirichlet e a direção do campo magnético perpendicular às placas foi, obviamente, uma escolha feita com o objetivo de simplificar o problema. Sob tais suposições, veremos que o formalismo mostrará claramente o efeito físico do campo externo no efeito Casimir bosônico, que é a questão fundamental que desejamos investigar nesta seção. Uma vez que o efeito do

campo externo seja compreendido em suas características essenciais, o caminho estará aberto para compreender problemas com geometria e campos externos mais complicados assim como o vácuo de outros campos quânticos. Vale notar que a situação considerada é aquela em que as condições de contorno são impostas sobre o campo escalar carregado, ficando o campo eletromagnético externo isento de qualquer condição. Desta forma, a influência do campo externo no vácuo carregado aparece em nível de um laço, no qual os cálculos desta tese foram feitos. Em contraste, há no efeito Scharnhorst [46, 47, 48, 49, 50], o fato de que as condições de contorno num par de placas paralelas são impostas no campo do fóton, mas não no campo carregado dos elétrons e pósitrons. Como resultado, há uma mudança na velocidade de propagação de uma onda eletromagnética na região entre as placas. O efeito Scharnhorst envolve diagramas de dois laços porque a dependência com as condições de contorno (distância entre as placas) nesse caso provém do propagador fotônico e mesmo os diagramas contendo apenas um propagador fotônico, já são de dois laços.

A energia de Casimir do campo escalar carregado em um campo magnético constante externo será calculada utilizando o método de Schwinger explicado na seção (2.3). Lembrando, a fórmula de Schwinger (2.51) para a ação efetiva da EDQ escalar é dada por:

$$\mathcal{W} = -\frac{i}{2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-isH}, \quad (3.17)$$

onde a hamiltoniana de tempo próprio é agora dada por:

$$H = (p - eA)^2 + m^2, \quad (3.18)$$

e é a carga do campo escalar, m é a sua massa e o potencial A é dado por

$$A_\mu = Bx^1\delta_\mu^2 \quad (3.19)$$

para representar o campo magnético perpendicular ao plano x^1x^2 das placas. O eixo x^3 ao longo de \mathbf{B} é como de costume orientado de forma a deixar eB positivo. A condição de contorno de Dirichlet, que faz com que o campo seja nulo nas placas, dá para a componente do momento perpendicular às mesmas os autovalores $n\pi/a$ ($n \in \mathbb{N}$). As outras componentes espaciais do momento estão restritas nos níveis de Landau criados pelo campo magnético \mathbf{B} [63], exatamente como na seção 2.4. O traço na ação efetiva (3.17) é dado por:

$$\text{Tr}e^{-isH} = 2e^{-ism^2} \sum_{n' \in \mathbb{N}} \frac{\ell^2 eB}{2\pi} e^{-iseB(2n'+1)} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-is(n\pi/a)^2} \int \frac{dt d\omega}{2\pi} e^{is\omega^2}, \quad (3.20)$$

onde o fator 2 deve-se à multiplicidade de carga, a primeira soma é sobre os níveis de Landau com o correspondente fator de multiplicidade devido à degenerescência; a segunda soma é sobre os autovalores obtidos a partir da condição de contorno de Dirichlet e a integral varre o tempo de medida T e o contínuo de autovalores ω do operador p^0 . O tempo de medida T é tomado grande o suficiente para que, segundo o princípio da incerteza, a energia de Casimir seja bem definida. Seguindo a prescrição de regularização de Schwinger [54], a segunda soma em (3.20) é reescrita com o auxílio da fórmula de Poisson, (2.55), na forma:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-is(n\pi/a)^2} = \frac{a}{\sqrt{i\pi s}} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{i(an)^2/s} + \frac{a}{2\sqrt{i\pi s}} - \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

A soma dos níveis de Landau é direta e fornece:

$$\sum_{n' \in \mathbb{N}} \frac{eB\ell^2}{2\pi} e^{-iseB(2n'+1)} = \frac{eB\ell^2}{4\pi} \text{csch}(iseB). \quad (3.22)$$

Utilizando a (3.21) e a (3.22) na (3.20), obtém-se a seguinte expressão para o traço:

$$\begin{aligned} \text{Tre}^{-isH} &= \frac{a\ell^2 T e^{-ism^2}}{4\pi^2} \frac{1}{is} [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)] \times \\ &\times \left[\frac{1}{2\sqrt{i\pi s}} + \frac{1}{\sqrt{i\pi s}} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{i(an)^2/s} - \frac{1}{2a} \right] \sqrt{\frac{\pi}{-is}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$\mathcal{M}(\xi) = \text{csch}\xi - \xi^{-1}. \quad (3.24)$$

A função \mathcal{M} desempenha no caso bosônico, o mesmo papel que a função de Langevin (3.4) no caso fermiônico [11, 45]. Ela é uma função bem comportada e vai ajudar a tornar o formalismo mais simples, além de facilitar as comparações relevantes entre os casos fermiônico e bosônico. A figura 3.3 mostra os gráficos das funções L e \mathcal{M} .

Substituindo agora a expressão do traço (3.23) na ação efetiva (2.51) temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= -T a\ell^2 \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)] + \\ &- T \ell^2 \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^2} e^{-ism^2} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)] + \\ &- T \frac{a\ell^2}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{i(an)^2/s} \right] [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O primeiro termo dessa expressão é proporcional ao volume entre as placas, pois a integral que ele multiplica não depende da separação a . Portanto ele representa uma densidade uniforme de energia do vácuo que deve ser descartada no cálculo da energia de Casimir. Essa integral leva à lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger, após renormalizações

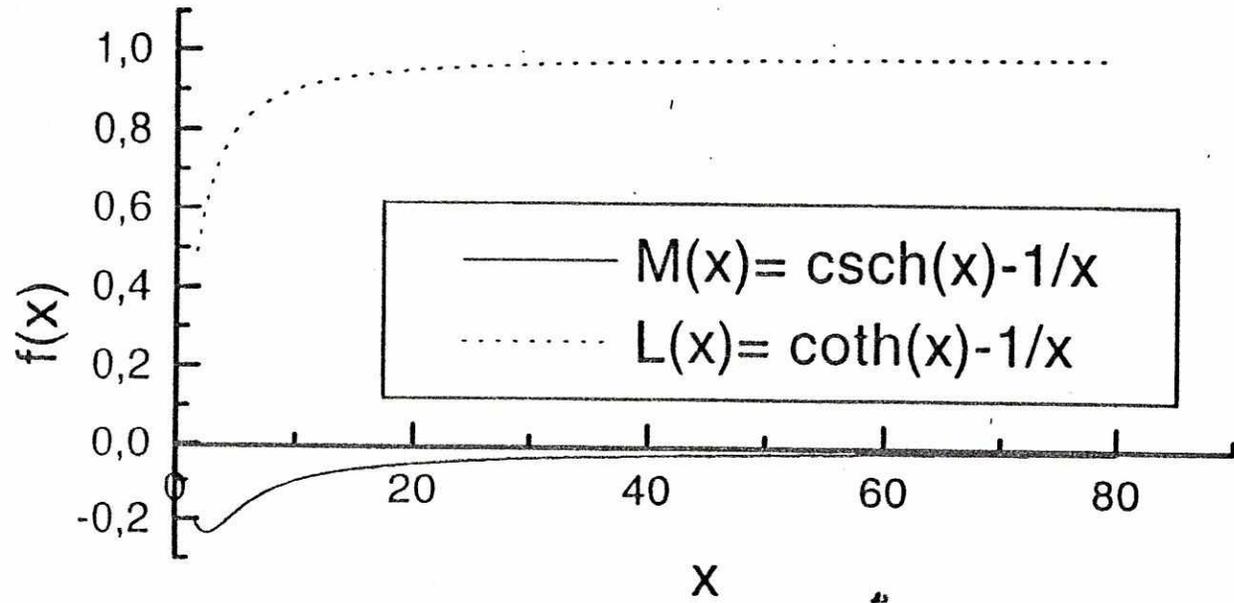


Figura 3.3: Função $\mathcal{M}(\xi) = \text{csch}(\xi) - \xi^{-1}$ e Função de Langevin: $L(\xi) = \text{coth}(\xi) - \xi^{-1}$.

apropriadas, mas sua independência da posição das placas a torna irrelevante no presente contexto. O segundo termo é proporcional à área das placas e pode ser associado à auto-energia das placas confinantes, mas não à energia de Casimir. Desse modo foram encontrados nesse sistema dois termos espúrios exatamente como no cálculo da energia de Casimir feito por Schwinger [54] e usando os mesmos argumentos que ele, é possível subtrair esses termos para que a ação (3.26) fique reduzida ao seu último termo. Substituindo essa ação livre de termos espúrios em (2.8) a energia é obtida:

$$\mathcal{E}(a, B) = \frac{al^2}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{i(an)^2/s} \right] [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)]. \quad (3.26)$$

Uma rotação no sentido horário de $\pi/2$ no eixo de integração s torna tal expressão manifestamente real e convergente e pode-se tomar o limite $s_0 \rightarrow 0$. Para seguir mais de perto

o método de Schwinger pode-se também trocar a variável de integração para a^2/σ após a rotação do eixo de integração. Por fim, a (3.26) é reescrita na seguinte forma:

$$\mathcal{E}(a, B) = -\frac{a\ell^2}{8\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^\infty d\sigma \sigma e^{-(am)^2/\sigma - n^2\sigma} \left[1 + (eBa^2/\sigma) \mathcal{M}(eBa^2/\sigma) \right]. \quad (3.27)$$

Na expressão resultante (3.27), há um termo que independe do campo magnético externo \mathbf{B} . Ele fornece o valor da energia de Casimir que existe na ausência desse campo e pode ser escrito em termos da função de Bessel modificada K_2 (fórmula 3471.9 em [62]) de modo que (3.27) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}(a, B)}{a\ell^2} &= -\frac{(am)^2}{4\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} K_2(2amn) + \\ &- \frac{1}{8\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^\infty d\sigma \sigma e^{-(am)^2/\sigma - n^2\sigma} (eBa^2/\sigma) \mathcal{M}(eBa^2/\sigma). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Quando não há campo magnético externo \mathbf{B} , a energia de Casimir é dada pelo primeiro termo do membro direito dessa equação, *i.e.*, por:

$$\frac{\mathcal{E}(a, 0)}{a\ell^2} = -\frac{(am)^2}{4\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} K_2(2amn), \quad (3.29)$$

que é um resultado já conhecido na literatura [9, 12]; no limite em que $m \rightarrow 0$ este resultado se reduz à energia de Casimir (2.61) do campo sem massa, como era de se esperar. O interesse primordial está no segundo termo do lado direito da (3.28), que mede a influência do campo magnético externo na energia de Casimir:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}(a, B)}{\ell^2} = -\frac{1}{8\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^\infty d\sigma \sigma e^{-(am)^2/\sigma - n^2\sigma} (eBa^2/\sigma) \mathcal{M}(eBa^2/\sigma). \quad (3.30)$$

Devido ao comportamento simples da função \mathcal{M} definida em (3.24) é possível determinar os aspectos principais dessa influência. A função $-\xi \mathcal{M}(\xi)$ (ver fig(3.4)) cresce monotonicamente de zero ao valor assintótico 1 quando ξ vai de 0 a ∞ .

Dessa forma, obtém-se na expressão (3.27) que o campo magnético externo sem-

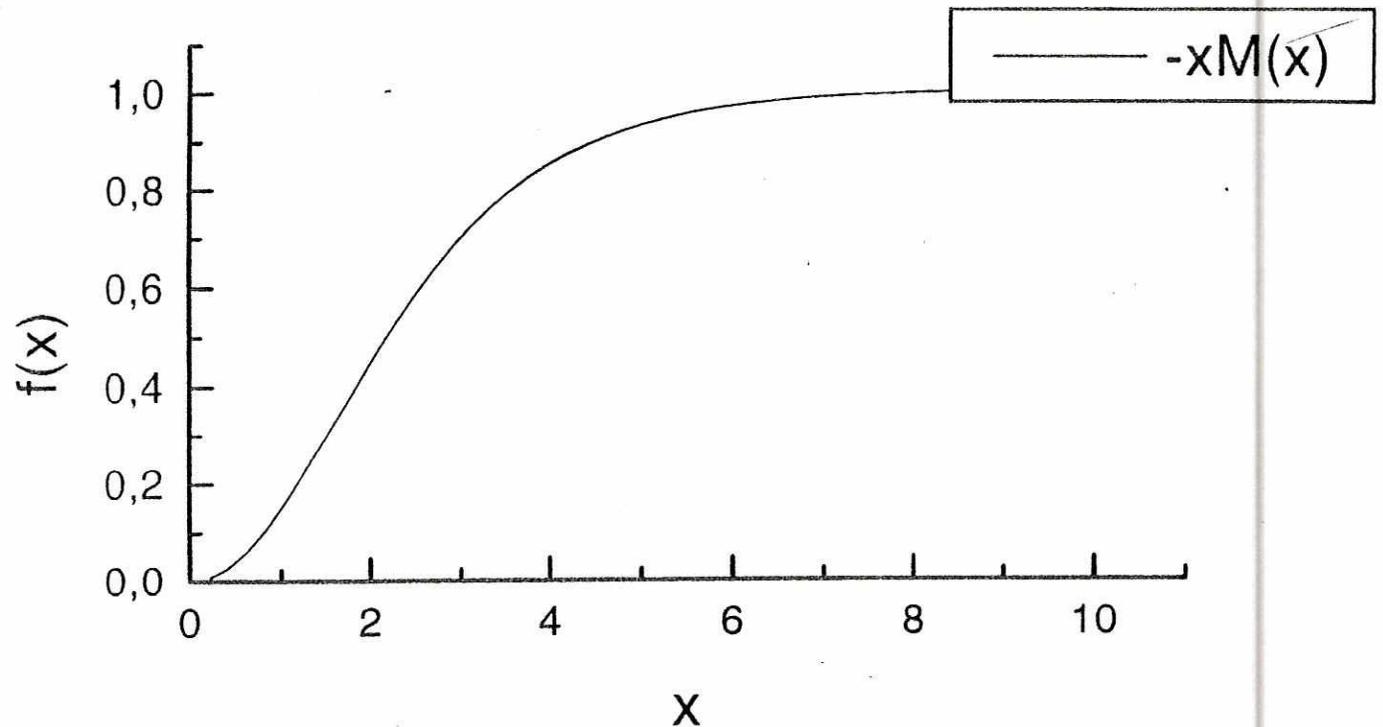


Figura 3.4: Função $-\xi\mathcal{M}(\xi)$.

pre inibe a energia de Casimir do campo escalar e o suprime completamente no limite $B \rightarrow \infty$ (o domínio infinito da variável de integração σ não impede de tomar tal limite, como será explicado a seguir). Esse é o resultado que responde a pergunta sobre o efeito Casimir do campo escalar carregado num campo magnético externo uniforme e constante. Este resultado contrasta com o resultado para o efeito Casimir do campo de Dirac que é sempre intensificado pelo campo magnético [45]. É muito interessante que o vácuo do campo fermiônico e o do campo escalar carregado apresentem comportamentos tão claros e opostos na presença de um campo magnético externo. Não foi possível encontrar nesse trabalho uma explicação intuitiva para tais comportamentos mas é possível que eles estejam relacionados com o caráter paramagnético do vácuo fermiônico e diamagnético

do vácuo bosônico. É importante levar em consideração esse comportamento oposto dos vácuos dos campos fermiônico e bosônico na presença de um campo externo, porque os vácuos de tais campos existem em conjunto na presença de campos externos e podem também estar confinados por condições de contorno. Vale lembrar também que o deslocamento na energia de ponto zero causada pelo campo externo, depende da massa do campo tanto no caso bosônico (3.30) como no caso fermiônico [45], e um possível cancelamento de energias de ponto zero dos vácuos desses campos, depende de relações específicas entre as suas massas.

É instrutivo usar a definição:

$$m_B = \sqrt{m^2 + eB} \quad (3.31)$$

e escrever a energia de Casimir completa (3.28) como:

$$\frac{\mathcal{E}(a, B)}{\ell^2} = -\frac{1}{8\pi^2 a^3} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-s(am_B)^2 - n^2/s} \frac{2s eBa^2}{1 - e^{-2s eBa^2}}. \quad (3.32)$$

Comparando essa expressão com seu limite quando $B \rightarrow 0$ pode-se dizer que o efeito do campo magnético externo na energia de Casimir usual é dado no integrando em (3.32) pela fração dependente de B e pela constante m_B que aparece na exponencial. Quando $B \rightarrow 0$ a fração tende a 1 e $m_B \rightarrow m$. Para um campo magnético forte, a exponencial é o fator dominante no integrando e o efeito do campo magnético na energia de Casimir aparece grosseiramente como a substituição de m por m_B ; certamente a fração dependente de B deve ainda afetar a influência precisa do campo magnético na energia de Casimir.

Uma situação interessante para analisar a energia de Casimir é quando o campo magnético externo B é forte. Nesse limite as mudanças no vácuo carregado ocorrem

com mais facilidade [65]. Supondo-se então estar nesse regime é possível substituir no integrando de (3.28) a função $\mathcal{M}(\xi)$ por sua expansão truncada $2e^{-\xi} - \xi^{-1}$. Note que essa substituição só é permissível porque a integral (3.28) tem seu integrando dominado por função exponencial em forma de seno, cujo máximo é e^{-2amn} e ocorre em $\sigma = am/n$. Nos limites em que $am \ll 1$ e $am \gg 1$, a condição de campo magnético forte é dada, respectivamente por $B \gg \phi_0/a^2$ e $B \gg (\phi_0/a^2)(a/\lambda_c)$, onde ϕ_0 é o fluxo fundamental $1/e$ e λ_c é o comprimento de onda Compton $1/m$. Então, no regime de campo forte, o segundo termo em (3.28) pode ser expresso também em termos de uma função de Bessel modificada (fórmula 3471,9 em [62]), e a energia de Casimir na presença de um campo externo forte é dada por:

$$\frac{\mathcal{E}(a, B)}{\ell^2} = -\frac{eBa^2}{2\pi^2a^3} \sqrt{(am)^2 + eBa^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} K_1(2n\sqrt{(am)^2 + eBa^2}). \quad (3.33)$$

Note que o sinal na raiz já era esperado visto que um sinal negativo implicaria em uma parte imaginária nessa expressão, indicando criação de pares, o que não pode acontecer quando se trabalha com um campo magnético constante. Pode-se também utilizar a (3.31) para reescrever a (3.33) na seguinte forma:

$$\frac{\mathcal{E}(a, B)}{a\ell^2} = -eB \frac{(am_B)}{2\pi^2a^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} K_1(2am_B n) \quad (3.34)$$

que é uma forma muito conveniente de se escrever essa energia para compará-la com a energia de Casimir (3.29) na ausência de campo externo.

No limite de campo magnético externo forte temos a condição $eBa^2 \gg am$ e portanto, independentemente do valor de am , tem-se um valor grande para o argumento da função de Bessel K_1 , que nesse caso tem um rápido decaimento exponencial. É possível nesse

limite de campo forte escrever a (3.34) na forma ainda mais simplificada (fórmula 8446 em [62]):

$$\frac{\mathcal{E}(a, B)}{a\ell^2} = -\frac{eBm_B^{1/2}}{4\pi^{3/2}a^{3/2}}e^{-2am_B}. \quad (3.35)$$

Para o caso da energia de Casimir na ausência do campo magnético, (3.29), a discussão sobre os limites de am torna-se relevante. Para $am \gg 1$, a (3.29) pode ser escrita como:

$$\frac{\mathcal{E}(a, 0)}{a\ell^2} = -\frac{(am)^{3/2}}{8\pi^{3/2}a^4}e^{-2am} \quad (am \gg 1), \quad (3.36)$$

e no caso de $am \ll 1$:

$$\frac{\mathcal{E}(a, 0)}{a\ell^2} = -\frac{\pi^2}{720a^4} \quad (am \ll 1). \quad (3.37)$$

Tomando a razão entre as equações (3.35) e (3.36) é possível comparar a intensidade do efeito do campo externo forte na energia de Casimir do campo escalar carregado no limite de massas grandes:

$$\frac{\mathcal{E}(a, B)}{\mathcal{E}(a, 0)} = 2eBa\sqrt{\frac{m_B}{m^3}}e^{-2a(m+m_B)} \quad (am \gg 1). \quad (3.38)$$

Tomando agora a razão entre as eq.(3.35) e (3.37), é possível ver a influência desse mesmo campo externo no efeito Casimir para massas pequenas:

$$\frac{\mathcal{E}(a, B)}{\mathcal{E}(a, 0)} = \frac{180}{\pi^{7/2}}eBa^{5/2}m_B^{1/2}e^{-2am_B} \quad (am \ll 1). \quad (3.39)$$

Como é possível observar, um campo magnético forte suprime fortemente o efeito Casimir do campo escalar, tanto para massas grandes como pequenas.

A outra possibilidade a ser considerada é o limite de massa nula. Nesse limite é necessário voltar à (3.27) para obter, a seguinte energia de Casimir na presença de um

campo magnético externo:

$$\mathcal{E} = -\frac{a\ell^2}{8\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^\infty d\sigma \sigma e^{-n^2 \sigma} \left[1 + \frac{eBa^2}{\sigma} \mathcal{M}\left(\frac{eBa^2}{\sigma}\right) \right]. \quad (3.40)$$

Utilizando a expansão para a $\text{csch}(\xi)$ para ξ arbitrário (fórmula 1217,2 em [62]):

$$1 + \xi \mathcal{M}(\xi) = \xi \text{csch}(\xi) = 1 + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k \xi}{\xi^2 + (\pi k)^2} \quad (3.41)$$

em (3.40) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}(a, B)}{a\ell^2} &= -\frac{1}{8\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^\infty d\sigma \sigma e^{-n^2 \sigma} + \\ &- \frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^\infty d\sigma \sigma^2 e^{-n^2 \sigma} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k eBa^2}{(eBa^2)^2 + (\pi k \sigma)^2}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Na (3.42), o primeiro termo do membro direito não depende do campo magnético \mathbf{B} e fornece o valor da energia de Casimir (2.61) para o caso não massivo na ausência de campo aplicado. O interesse aqui concentra-se no segundo termo, que dá a influência do campo magnético externo no efeito Casimir não massivo; ele é dado por:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}(a, B)}{a\ell^2} = -\frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_{n, k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{eBa^2}{(\pi k)^2} \int_0^\infty d\sigma \sigma^2 e^{-n^2 \sigma} \frac{1}{\left(\frac{eBa^2}{\pi k}\right)^2 + \sigma^2}. \quad (3.43)$$

Essa expressão pode ser escrita em termos de uma série dupla em senos, cosenos e funções si e ci (fórmula 3354 em [62]):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}(a, B)}{a\ell^2} &= -\frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_{n, k \in \mathbb{N}} (-1)^k \left\{ \frac{(eBa^2)^2}{(\pi k)^3} \left[ci\left(\frac{eBa^2 n^2}{\pi k}\right) \cos\left(\frac{eBa^2 n^2}{\pi k}\right) + \right. \right. \\ &- \left. \left. si\left(\frac{eBa^2 n^2}{\pi k}\right) \text{sen}\left(\frac{eBa^2 n^2}{\pi k}\right) \right] + \frac{1}{n^2} \frac{eBa^2}{(\pi k)^2} \text{sen}\left(\frac{eBa^2 n^2}{\pi k}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para o caso em que a massa é nula, $m_B^2|_{m=0} = eB$ e é possível escrever (3.44) na forma algo artificial:

$$\frac{\Delta \mathcal{E}(a, B)}{a\ell^2} = -\frac{(am_B)^4}{4\pi^2 a^3} \sum_{n, k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(\pi k)^2} \left\{ \frac{1}{\pi k} \left[ci\left(\frac{am_B n}{\pi k}\right) \right]^2 \cos\left(\frac{am_B n}{\pi k}\right)^2 + \right.$$

$$- \left. \operatorname{si}\left(\frac{am_B n}{\pi k}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{am_B n}{\pi k}\right) \right] + \frac{\operatorname{sen}[2(am_B n)^2/\pi k]}{(am_B n)^2/\pi k} \left. \right\}, \quad (3.45)$$

que, no entanto, serve para reforçar a interpretação do campo magnético como provedor de uma massa efetiva para o campo sem massa.

Resumindo os resultados obtidos até agora, a equação (3.28) dá a expressão exata para a influência do campo magnético na energia de Casimir. A equação (3.33) particulariza o resultado de (3.28) para o regime de campo forte e (3.35) fornece uma expressão mais simplificada para esse regime. As aproximações para massas pequenas e grandes são dadas pelas equações (3.38) e (3.39). Essas equações estão prontas para serem utilizadas em estimativas de magnitude. A equação (3.45) fornece o valor da energia de Casimir para o limite de massa nula.

A expressão (3.34) fornece a seguinte pressão de Casimir do campo escalar carregado na presença de um campo magnético forte:

$$p(a, B) = -eB \frac{(am_B)}{2\pi^2 a^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \left(K_1(2am_B n) + (2am_B n) K_0(2am_B n) \right). \quad (3.46)$$

É interessante comparar essa pressão com a pressão na ausência do campo magnético, que tem a seguinte expressão obtida de (3.29):

$$p(a, 0) = -\frac{3(am)^2}{4\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} \left(K_2(2amn) + \frac{1}{3}(2amn) K_1(2amn) \right). \quad (3.47)$$

A figura (3.5) mostra a curva da pressão na presença e na ausência do campo externo B . Pelo gráfico fica bastante claro que o campo externo forte inibe fortemente o efeito Casimir do campo escalar carregado. Essa figura deve ser comparada com a figura 3.1.

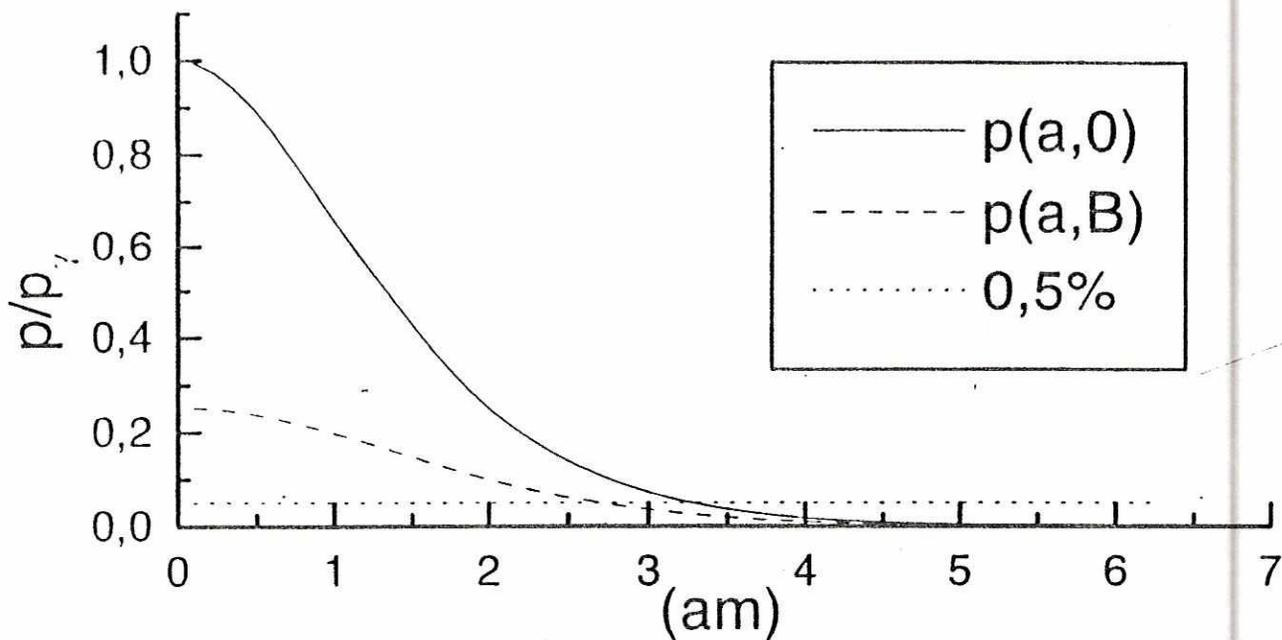


Figura 3.5: Pressão de Casimir para o campo escalar carregado em campo magnético externo constante e uniforme; a pressão foi normalizada pela pressão de Casimir eletromagnética.

3.3 A lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger sob condições de contorno

Nesta seção o efeito de condições de contorno sobre as propriedades magnéticas do vácuo quântico do campo escalar carregado será investigado. As propriedades magnéticas desse vácuo na ausência de condições de contorno são dadas pela lagrangeana de Weisskopf-Schwinger para campo externo puramente magnético, $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(\mathbf{B})$. Portanto, o trabalho aqui consistirá em encontrar os termos que se adicionam a $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(\mathbf{B})$ devido às condições de contorno. Esse é o problema que é chamado de complementar ao da seção anterior. O problema análogo para o caso do vácuo quântico do campo de Dirac [11] já foi tratado na primeira seção deste capítulo e resultou nas contribuições que se adicionam à lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg, $\mathcal{L}_{EH}^{(1)}(\mathbf{B})$, devido a condições de contorno. Nesse caso foi encontrado que a condição de contorno gera uma constante de permeabilidade magnética diferente de 1 para o vácuo fermiônico, que não existe na lagrangeana de Euler-Heisenberg. Além disso foi verificada uma mudança de permeabilidade, de paramagnética para diamagnética, que supostamente não deve ocorrer no caso bosônico, no qual as propriedades devem ser puramente diamagnéticas. O campo escalar carregado a ser investigado será apropriado para verificar essas suposições. Além disso, no caso do campo escalar pode-se, como na seção anterior, usar a condição de contorno de placas confinantes, que é fisicamente mais atraente. Tal condição de contorno pode ser encarada intuitivamente como gerando uma pressão das placas sobre o vácuo quântico contido entre elas (que é a reação

à pressão de Casimir exercida nas placas). Nesse caso, é natural esperar novos efeitos interessantes provenientes das condições de contorno, pois é sabido que a pressão modifica as relações constitutivas dos materiais. Em ótica, por exemplo, há um exemplo ilustrativo desse tipo de modificação no efeito fotoelástico [26], no qual um material apresenta a chamada birrefringência de tensão quando submetido a pressão ou tração.

É visível também aqui a utilidade da EDQ escalar para bem compreender problemas originários de outras teorias.

Considere, então, as flutuações do vácuo do campo escalar de massa m e carga e , confinado entre duas placas paralelas de lado ℓ e separação a ($a \ll \ell$), na presença de um campo magnético externo \mathbf{B} uniforme e constante, com direção perpendicular às placas. O confinamento é descrito pela condição de contorno de Dirichlet que faz os campos se anularem nas placas. Como na seção anterior o eixo \mathcal{OZ} é escolhido de modo que \mathbf{B} só tenha a componente B nesse eixo e eB seja positivo.

O ponto de partida é novamente a fórmula de Schwinger (2.51) para a ação efetiva:

$$\mathcal{W} = -\frac{i}{2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-isH} \quad (3.48)$$

na qual tem-se a hamiltoniana de tempo próprio do campo escalar carregado na presença de um campo externo, (3.18):

$$H = (p - eA)^2 + m^2 \quad (3.49)$$

onde o potencial A é dado por $A_\mu = Bx^1\delta_\mu^2$ para o campo magnético em consideração.

O cálculo da ação efetiva é feito exatamente como na seção anterior, mas com a resposta

final (3.26) agora escrita na forma:

$$\mathcal{W} = [\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B) + \mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B)]T a l^2, \quad (3.50)$$

onde o primeiro termo no membro direito dá a esperada lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger:

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} [1 + (iseB)\mathcal{M}(iseB)]. \quad (3.51)$$

O segundo termo no membro direito de (3.50), oriundo do confinamento entre as placas, será chamado de lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger-Casimir e é dado por:

$$\mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{i(an)^2/s} + \frac{s}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \right] [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)]. \quad (3.52)$$

As contribuições dadas pelas equações (3.51) e (3.52) ainda estão não renormalizadas e sua renormalização é necessária antes da remoção do corte s_0 . Tal renormalização será feita da maneira usual [2], como em seções anteriores. Uma expansão de $1 + \mathcal{M}(iseB)$ em potências de s mostra que o primeiro termo em $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B)$ é uma constante que pode ser subtraída da lagrangeana; no limite em que $s_0 \rightarrow 0$ esta constante tende a $m^4\Gamma(-2)/16\pi^2$, onde Γ é a função gama de Euler. O segundo termo é proporcional à lagrangeana de Maxwell

$$\mathcal{L}^{(0)}(B) = -\frac{1}{2}B^2, \quad (3.53)$$

com uma constante de proporcionalidade que tende a $q^2\Gamma(0)/48\pi^2$ no limite em que $s_0 \rightarrow 0$. Esta constante será escrita como $Z_3^{-1} - 1$ e será absorvida na lagrangeana de Maxwell por renormalização de B . O campo renormalizado será definido como $B_R = BZ_3^{-1/2}$ e a carga renormalizada como $e_R = eZ_3^{-1/2}$. Após subtrações e conversões para quantidades

renormalizadas, $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}$ na (3.51) fica livre de termos espúrios e bem definida no limite em que $s_0 \rightarrow 0$ enquanto que na lagrangeana de Maxwell (3.53) o campo nu é substituído por B_R . A lagrangeana $\mathcal{L}_{WSC}^{(1)}$ na equação (3.52) depende de e e B somente através do produto eB , que é igual a $e_R B_R$. A sua renormalização consiste apenas em substituir eB por $e_R B_R$ e sua forma funcional em nada é alterada. Essas são as renormalizações necessárias para tornar bem definida a ação (3.50). Estando claro que todas as quantidades estão devidamente renormalizadas, o sub-índice R será de agora em diante omitido. Então, a lagrangeana efetiva completa é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[iseB \mathcal{M}(iseB) + \frac{(iseB)^2}{6} \right] + \\ & - \frac{1}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{i(an)^2/s} + \frac{s}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \right] [1 + iseB \mathcal{M}(iseB)]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

A expressão (3.54) pode ser posta em uma forma manifestamente real e convergente por meio de uma rotação do eixo s de integração, de $\pi/2$ no sentido horário. Com essa rotação a lagrangeana completa (3.54) assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a, B) = & -\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left[seB \mathcal{M}(seB) + \frac{(seB)^2}{6} \right] + \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-(an)^2/s} + \frac{\sqrt{\pi s}}{2a} \right] [1 + (seB) \mathcal{M}(seB)], \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde o corte s_0 foi finalmente removido. Há três contribuições distintas na lagrangeana total dada por (3.55). A primeira é a lagrangeana renormalizada de Maxwell $\mathcal{L}^{(0)}(B)$, dada pelo termo quadrático $-B^2/2$. A segunda é a lagrangeana renormalizada de Weisskopf-Schwinger:

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} \left[(seB) \mathcal{M}(seB) + \frac{(seB)^2}{6} \right]. \quad (3.56)$$

Para B pequeno comparado ao campo crítico $B_{cr} = m^2/e$ esta lagrangeana pode ser expandida em potências de B/B_{cr} para fornecer:

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-m^4}{16\pi^2} \frac{2^{2k-1} - 1}{k(2k-1)(2k-2)} \left(\frac{B}{B_{cr}}\right)^{2k} B_{2k}, \quad (3.57)$$

onde B_{2k} é o $2k$ -ésimo número de Bernoulli. Esta expressão mostra que a contribuição de mais baixa ordem da lagrangeana de Weisskopf-Schwinger à lagrangeana de Maxwell é um termo em B^4 . Finalmente, a terceira contribuição à lagrangeana completa (3.55) é dada pela versão renormalizada da lagrangeana $\mathcal{L}_{WSC}^{(1)}$ definida em (3.52), que pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B) = \frac{(am)^2}{4\pi^2 a^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} K_2(2amn) + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\mu(am)} \right] B^2 + \mathcal{L}_{WSC}^{(1)'}(a, B), \quad (3.58)$$

onde

$$\frac{1}{\mu(am)} = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} K_0(2amn) + \frac{e^2}{48\pi am} \quad (3.59)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WSC}^{(1)'}(a, B) &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (an)^2/s} \left[seB\mathcal{M}(seB) + \frac{(seB)^2}{6} \right] + \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{16\pi^2 a} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} \left[seB\mathcal{M}(seB) + \frac{(seB)^2}{6} \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

O primeiro termo no membro direito de (3.58) é menos a densidade de energia de Casimir para o campo bosônico massivo [9, 12]. Ele representa uma quantidade observável mas não contribui para a lagrangeana efetiva porque é independente de B . O termo $\mathcal{L}_{WSC}^{(1)'}(a, B)$ em (3.58), que é dado por (3.60), é a correção não linear à magnetização proveniente

do confinamento à lagrangeana de Weisskopf-Schwinger $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B)$. Para B pequeno comparado ao campo crítico $B_{cr} = m^2/e$ também essa lagrangeana pode ser expandida em potências de B/B_{cr} (fórmula 3.471,9 em [62]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WSC}^{(1)'}(a, B) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-m^4 (2^{2k-1} - 1)}{2\pi^2 (2k)!} B_{2k} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} (amn)^{2k-2} K_{2k-2}(2amn) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{4am} \Gamma(2k - 3/2) \right] \left(\frac{B}{B_{cr}} \right)^{2k}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Essa expressão fornece uma correção termo a termo à expansão da lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger, (3.57) em potências de B^2 .

O segundo termo na (3.58), que é quadrático no campo B , fornece uma contribuição à lagrangeana efetiva que está totalmente ausente na lagrangeana de Weisskopf-Schwinger $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}$. Essa contribuição ocasiona uma mudança na constante de permeabilidade do vácuo devido ao confinamento, que é dada por (3.59). Para ressaltar sua importância considere-se um regime de campo fraco onde somente os termos quadráticos em B não são desprezíveis. Nesta situação, nem a lagrangeana de Weisskopf-Schwinger (3.56), nem as suas correções (3.60), fornecem contribuições à lagrangeana efetiva do campo B , visto que a ordem mais baixa destas contribuições é B^4 . A única contribuição que permanece é a quadrática que vem da (3.58), e leva à seguinte lagrangeana efetiva completa (3.53):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu(am)}. \quad (3.62)$$

A permeabilidade $\mu(am)$ do vácuo confinado do campo escalar carregado (3.59) reduz-se a 1 quando o confinamento desaparece ($a \rightarrow \infty$). Das propriedades das funções de Bessel [62], é fácil ver que a série em (3.59) decai rapidamente do infinito ao zero quando am

crece de zero a infinito; seu efeito então é uma redução na permeabilidade magnética do vácuo. O termo $e^2/48\pi am$ em (3.59) fornece uma contribuição à permeabilidade que também decai do infinito ao zero quando am cresce de zero a infinito. Deste modo há na expressão para $\mu(am)$ em (3.59) propriedades de uma permeabilidade magnética diamagnética. Na figura 3.6 há um gráfico de $\mu(am)$, que é instrutivo comparar com a figura 3.2. A característica diamagnética de $\mu(am)$ para valores arbitrários de am esclarece a questão da transição entre paramagnetismo e diamagnetismo que ocorre no caso fermiônico [11], discutida no final da primeira seção e início desta.

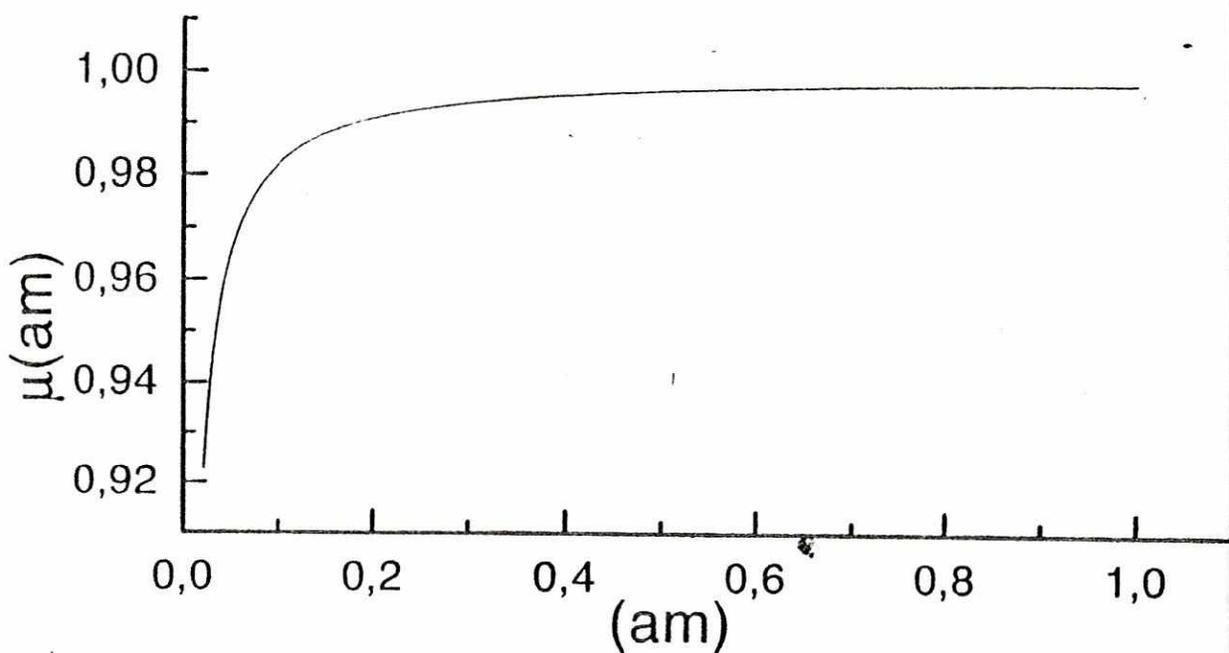


Figura 3.6: Permeabilidade magnética do vácuo do campo escalar carregado massivo confinado entre placas paralelas e submetido a um campo magnético externo uniforme e constante.

Capítulo 4

Vácuo confinado da EDQ escalar em campo magnético externo em temperatura finita

A importância de se desenvolver uma teoria quântica de campos em temperatura finita (TQCTF) deve-se não apenas ao fato de que a consideração de efeitos térmicos dá uma dimensão mais realística aos sistemas físicos em questão, como também porque resultados experimentais têm sido obtidos com precisões cada vez maiores. É interessante lembrar que, em última análise, os experimentos reais nunca são feitos no zero absoluto, sendo necessário, portanto, levar em conta as contribuições térmicas. No entanto, o estudo de TQCTF transcende, e muito, as paredes de um laboratório de física: é possível afirmar sem dúvida alguma que uma das maiores motivações para este estudo vem dos

problemas de cosmologia. Qualquer modelo cosmológico razoável prevê que no estágio inicial do Universo havia uma grande densidade de matéria e radiação em altas temperaturas. Não há motivo algum pelo qual se deva esperar que as simetrias de tal sistema sejam exatamente as mesmas observadas no Universo no estágio atual, após ter-se resfriado por um período tão longo. Transições de fase certamente ocorreram e é a existência delas que constitui-se em grande motivação para o estudo de TQCTF. Uma vez que a escala de massa introduzida pelas teorias de grande unificação é inacessível, as diferentes previsões cosmológicas, que presumivelmente envolvem efeitos térmicos, estabelecidas por diferentes teorias, podem ser decisivas na escolha da teoria que melhor descreve a Natureza. Obviamente, há outras áreas da física onde efeitos térmicos são importantes, como por exemplo, em colisões de íons pesados ou astrofísica e todas essas considerações sobre a importância de efeitos térmicos em teoria quântica de campos visam dar o contexto onde se inserem os cálculos que apresentaremos a seguir. Este capítulo ficará restrito, porém, somente à obtenção das contribuições térmicas aos dois resultados obtidos no capítulo anterior, a saber: no efeito Casimir do campo escalar carregado em campo magnético externo e na lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger-Casimir para campo puramente magnético.

Na seção 1 deste capítulo, o efeito conjunto da temperatura e do campo magnético externo sobre o efeito Casimir será apresentado. Note que efeito Casimir em temperatura finita é um tópico já abordado em diversos trabalhos [12]. O cálculo das lagrangeanas efetivas de Euler-Heisenberg e de Weisskopf-Schwinger em temperatura finita, mas sem que qualquer condição de contorno, já foi realizado por Dittrich [66]. O trabalho que será

apresentado na seção 2 generaliza o resultado obtido por Dittrich para a lagrangeana de Weisskopf-Schwinger pela incorporação ao problema de condições de contorno de Dirichlet. Como uma aplicação deste resultado serão obtidas as contribuições devido a efeitos de temperatura finita na expressão da permeabilidade magnética do vácuo bosônico obtido no capítulo anterior.

Há diversos formalismos para tratar TQCTF, a saber: o formalismo de tempo imaginário, o formalismo de Keldish-Schwinger e o formalismo de dinâmica de termocampos (do inglês: *thermofield-dynamics*) e a escolha de qual formalismo deve ser utilizado depende fortemente do problema a ser tratado. No formalismo de tempo imaginário, ou formalismo de Matsubara [67, 68], podem ser feitos cálculos perturbativos muito semelhantes aos feitos em temperatura zero. Nesse formalismo, que é bastante conveniente para analisar as propriedades de sistemas em equilíbrio térmico a função de partição é obtida a partir da amplitude de persistência no vácuo $\langle 0 t_2 | 0 t_1 \rangle$. Nessa amplitude é feita inicialmente uma rotação de Wick, que consiste em girar no plano complexo o eixo temporal no sentido horário de $\pi/2$. A parte imaginária resultante é então compactificada em um círculo de perímetro β , sendo β , por definição, o inverso da temperatura. A amplitude desse modo modificada é a função de partição \mathcal{Z} . Usando então a relação (2.6) entre ação efetiva e amplitude de persistência no vácuo, obtem-se no caso de temperatura finita:

$$i\mathcal{W} = \log \mathcal{Z}(\beta). \quad (4.1)$$

Usando nessa equação a representação de tempo próprio (2.51) para a ação efetiva a um

laço chega-se à fórmula que será utilizada para obter os resultados dessa tese:

$$\log \mathcal{Z}(\beta) = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Tr} e^{-isH}. \quad (4.2)$$

4.1 O Efeito Casimir do campo escalar carregado em campo externo e temperatura finita

Para calcular o efeito Casimir em temperatura finita o membro direito da equação (4.2) é desenvolvido utilizando o método de Schwinger, já explicado e usado diversas vezes nesta tese. Em consequência do formalismo do tempo imaginário tem-se agora que os autovalores de p^0 na hamiltoniana de tempo próprio (3.18) são discretizados e dados pelas frequências de Matsubara: $2i\pi n/\beta$ ($n \in \mathbf{Z}$). Assim, o traço em (4.2) fica:

$$\text{Tr} e^{-isH} = 2e^{-ism^2} \sum_{n' \in \mathbf{N}} \frac{eB\ell^2}{2\pi} e^{-iseB(2n'+1)} \sum_{n_1 \in \mathbf{N}} e^{-is(\pi n_1/a)^2} \sum_{n_2 \in \mathbf{Z}} e^{-is(2\pi n_2/\beta)^2}, \quad (4.3)$$

onde o fator 2 é devido à multiplicidade de carga, a primeira soma é sobre os níveis de Landau com o fator de degenerescência correspondente, a segunda soma é sobre os autovalores gerados pela condição de confinamento entre as placas e a terceira soma é sobre as frequências de Matsubara. A soma sobre os níveis de Landau é direta e dada pela equação (3.22) e as outras duas somas podem ser reescritas utilizando-se a fórmula de Poisson (2.55). Com isso o traço fica sendo dado por:

$$\text{Tr} e^{-isH} = -\beta \frac{a\ell^2}{4\pi^2} \frac{e^{-ism^2}}{s^2} [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)] \left[\frac{1}{i\pi s} \sum_{n_1 \in \mathbf{N}} e^{i(an_1)^2/s} - \frac{1}{2\sqrt{i\pi s}} - \frac{1}{2a} \right] \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left[1 + 2 \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} e^{i(\beta n_2)^2/4s} \right], \quad (4.4)$$

onde a função \mathcal{M} já foi definida em (3.24). Usando essa expressão do traço na equação (4.2) e fazendo a habitual rotação do eixo de integração de s para $-is$, obtem-se:

$$\begin{aligned} \log \mathcal{Z}(a, B, \beta) &= \frac{a\ell^2\beta}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] e^{-sm^2} + \\ &+ \frac{\beta\ell^2}{16(\pi)^{3/2}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] e^{-sm^2} + \\ &+ \frac{a\ell^2\beta}{8\pi^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] e^{-sm^2 - (an_1)^2/s} + \\ &+ \frac{a\ell^2\beta}{8\pi^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] e^{-sm^2 - (n_2\beta/2)^2/s} + \\ &+ \frac{\ell^2\beta}{8\pi^{3/2}} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] e^{-sm^2 - (n_2\beta/2)^2/s} + \\ &+ \frac{a\ell^2\beta}{4\pi^2} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] e^{-sm^2 - [(an_1)^2 + (n_2\beta/2)^2]/s}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Substituindo esse resultado na expressão para a energia livre

$$F(a, B, \beta) = -\beta^{-1} \log Z(a, B, \beta), \quad (4.6)$$

que aqui será chamada de energia livre de Casimir, chega-se a:

$$\begin{aligned} F(a, B, \beta) &= -a\ell^2 \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] + \right. \\ &- \left. 2 \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (\beta n_2/2)^2/s} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] \right\} + \\ &- \ell^2 \left\{ \frac{1}{16(\pi)^{3/2}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} e^{-sm^2} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] + \right. \\ &- \left. 2 \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \frac{1}{16(\pi)^{3/2}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} e^{-sm^2 - (\beta n_2/2)^2/s} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{a\ell^2}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (an_1)^2/s} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] + \right. \\
 & \left. - 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{a\ell^2}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - [(an_1)^2 + (\beta n_2/2)^2]/s} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] \right\}. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

O termo proporcional ao volume $a\ell^2$ vem de uma densidade de energia uniforme por todo o espaço. Esta densidade não depende da posição das placas e não contribui para a energia livre de Casimir. O termo proporcional à área ℓ^2 de cada placa isoladamente é independente da posição das mesmas e também não contribui para a energia livre de Casimir. Esses dois termos são infinitos quando o corte s_0 é eliminado e necessitam da renormalização padrão na energia [54], na carga e e campo magnético \mathbf{B} [2], exatamente como já foi feito no capítulo anterior. Os outros termos na energia livre (4.7) são finitos e não têm sua forma funcional afetada por essas renormalizações. Tomando $s_0 = 0$, a seguinte expressão é obtida para a energia livre de Casimir com todas as grandezas devidamente renormalizadas:

$$\begin{aligned}
 F(a, B, \beta) &= -\frac{a\ell^2}{8\pi^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \left\{ \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (an_1)^2/s} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] - \right. \\
 & \left. - 2 \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - [(an_1)^2 + (\beta n_2/2a)^2]/s} [1 + seB\mathcal{M}(seB)] \right\}. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Na equação (4.8), os termos que não dependem do campo magnético podem ser reescritos em termos de funções de Bessel (fórmula 3.471,9 em [62]) e a (4.8) torna-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{F(a, B, \beta)}{a\ell^2} &= -\frac{(am)^2}{4\pi^2 a^4} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \frac{1}{n_1^2} K_2(2amn_1) + \\
 & - \frac{2(am)^4}{\pi^2 a^4} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} \frac{K_2\left(\sqrt{(2amn_1)^2 + (\beta mn_2)^2}\right)}{(2amn_1)^2 + (\beta mn_2)^2} - \\
 & - \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \left\{ \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (an_1)^2/s} seB\mathcal{M}(seB) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - [(an_1)^2 + (\beta n_2/2)^2]/s} seB \mathcal{M}(seB) \Big\}. \quad (4.9)$$

É útil lembrar agora que a função $-\xi \mathcal{M}(\xi)$ é estritamente positiva para ξ real positivo e cresce monotonamente de 0 a 1 quando ξ vai de 0 a ∞ , como mostra a figura 3.4, e que as funções de Bessel são também estritamente positivas nesse intervalo. Com isso vê-se que o campo magnético externo que aparece na equação (4.8) através da função \mathcal{M} tem o efeito de diminuir a energia livre de Casimir, como fazia no caso de temperatura zero. Esta diminuição do efeito é mais pronunciada no regime de campo forte, que vai ser considerado agora. As integrais na equação (4.8) são dominadas pela função exponencial em forma de sino, cujo máximo é em $\sqrt{n^2 + (\beta n_2/2a)^2}/am$ (obviamente, com $\beta = 0$ no caso da primeira integral). Assim, o regime de campo magnético forte é definido por $eBa^2 \gg am$ ou, se preferirmos, por $B \gg (\phi_0/a^2)(a/\lambda)$, onde ϕ_0 é o fluxo fundamental $1/q$ e λ é o comprimento de onda Compton $1/m$. Nesse regime de campo forte, $1 + \xi \mathcal{M}(\xi)$ pode ser substituída por $2\xi e^{-\xi}$ e a equação (4.9) pode ser aproximada por (fórmula 3.471,9 em [62]):

$$\begin{aligned} \frac{F(a, B, \beta)}{a\ell^2} &= -\frac{eB}{2\pi^2 a} m_B \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n_1} K_1(2n_1 am_B) + \\ &- \frac{2eB m_B}{\pi^2} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} \frac{K_1\left(m_B \sqrt{(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2}\right)}{\sqrt{(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde está sendo usado a grandeza m_B definida em (3.31). Usando essa expressão na fórmula para a pressão, $p(a, B, \beta) = \ell^{-2} \partial F(a, B, \beta) / \partial a$, tem-se que (fórmula 8.472,3 em [62]):

$$p(a, B, \beta) = -eB \frac{m_B^2}{\pi^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \left[K_0(2am_B n_1) + \frac{K_1(2am_B n_1)}{2am_B n_1} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2eB \frac{m_B^2}{\pi^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \left[\frac{K_1(m_B \sqrt{(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2})}{m_B \sqrt{(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2}} + \right. \\
 & + 4(an_1)^2 \frac{K_0(m_B \sqrt{(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2})}{(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2} + \\
 & \left. - 2(2an_1)^2 \frac{K_1(m_B \sqrt{(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2})}{m_B [(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2]^{3/2}} \right]. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Nessa expressão o primeiro somatório dá a contribuição do campo magnético forte à pressão e o somatório duplo dá o efeito combinado do campo magnético forte e da temperatura finita.

No limite em que $\beta \rightarrow \infty$, ou seja, $T = 0$, a (4.11) reduz-se a:

$$p(a, B, \beta = \infty) = -eB \frac{(am_B)}{2\pi^2 a^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \frac{1}{n_1} \left\{ K_1(2am_B n_1) + (2am_B n_1) K_0(2am_B n_1) \right\}, \quad (4.12)$$

que coincide com a pressão obtida em (3.46).

4.2 A lagrangeana efetiva da EDQ escalar em campo externo e temperatura finita

Como já foi visto no capítulo anterior, o confinamento provoca uma alteração importante na lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger e, em particular, na permeabilidade do vácuo do campo escalar carregado. Nesta seção serão calculadas as alterações na lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger devido às contribuições conjuntas do confinamento e da temperatura finita. Para isso a ação efetiva em temperatura finita será calculada, dada em termos da função de partição por (4.1). Como a função de partição

já foi calculada na seção anterior, basta substituir a sua expressão obtida em (4.5) na equação (4.1) e reagrupar os termos para conveniência da presente análise. Assim:

$$-i \frac{\mathcal{W}^{(1)}}{a l^2 \beta} = \mathcal{L}_{WS}(B) + \mathcal{L}_{WSC}(a, B) + \mathcal{L}(B, \beta) + \mathcal{L}_{WSC}(a, B, \beta), \quad (4.13)$$

onde as contribuições em forma ainda não renormalizadas são dadas por:

$$\mathcal{L}_{WS}(B) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} [1 + (iseB)\mathcal{M}(iseB)], \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WSC}(a, B) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{i(an)^2/s} + \frac{s}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \right] \times \\ &\times [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}_{WS}(B, \beta) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2 + i(\beta n_2/2)^2/s} [1 + (iseB)\mathcal{M}(iseB)] \quad (4.16)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WSC}(a, B, \beta) &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-ism^2 + i(\beta n_2/2)^2/s} \left[\frac{s}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} + \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} e^{i(an_1)^2/s} \right] \times \\ &\times [1 + iseB\mathcal{M}(iseB)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Antes de remover o corte s_0 nessas expressões é necessário renormalizá-las. O método de renormalização é exatamente o mesmo usado em seções anteriores e bastará aqui descrevê-lo brevemente. A primeira contribuição no membro direito de (4.13), dada em (4.14), tem duas divergências que são eliminadas por uma simples subtração e pela renormalização da carga e do campo magnético. As demais contribuições ficam expressas em termos dessas grandezas renormalizadas e são todas finitas. Na função $[1 + iseB\mathcal{M}(iseB)]$ que aparece nos integrandos de (4.15), (4.16) e (4.17) o termo 1 dá contribuições finitas mas

independentes do campo magnético. Essas expressões são na verdade diversas energias de Casimir que já foram analisadas na seção anterior. Sendo independentes do campo magnético são termos irrelevantes na ação efetiva, que serão também subtraídos do membro direito de (4.13). Após todas essas renormalizações e subtrações é possível tomar o limite $s_o \rightarrow 0$ em todos os termos de (4.13) e, como de costume fazer a rotação do eixo de s para $-is$ para que um resultado manifestamente real seja obtido. Esse resultado será adicionado à lagrangeana de Maxwell para que a seguinte lagrangeana efetiva completa e renormalizada seja obtida:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}B^2 + \mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B) + \mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B) + \mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B, \beta) + \mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B, \beta), \quad (4.18)$$

onde

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2} [seB\mathcal{M}(seB) + \frac{1}{6}(seB)^2] \quad (4.19)$$

é a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger,

$$\mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \left[e^{-sm^2 - (an_1)^2/s} + \frac{\sqrt{\pi s}}{2a} \right] seB\mathcal{M}(seB) \quad (4.20)$$

é a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger-Casimir obtida na seção 3.3,

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B, \beta) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (\beta n_2/2)^2/s} seB\mathcal{M}(seB) \quad (4.21)$$

é a lagrangeana efetiva que inclui as correções térmicas na lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger [66] e

$$\mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B, \beta) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (\beta n_2/2)^2/s} \left[\frac{\sqrt{\pi s}}{2a} + \sum_{n_1=1}^\infty e^{-(an_1)^2/s} \right] seB\mathcal{M}(seB), \quad (4.22)$$

é a contribuição de interesse no momento, que inclui as correções térmicas na lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger-Casimir. Pode-se dizer que (4.20) descreve as contribuições que a condição de contorno traz a $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B)$, (4.21) descreve as contribuições que a temperatura finita traz a $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B)$ e (4.22) descreve as contribuições que condição de contorno e temperatura finita trazem conjuntamente à lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger.

As contribuições da condição de contorno descritas por $\mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B)$ em (4.20) podem ser divididas na contribuição quadrática em B , que leva à constante de permeabilidade (3.59), e na contribuição de ordem superior (3.60); essa última tem a expansão (3.61) no regime de campo fraco. De modo análogo pode-se dividir $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B, \beta)$ dada em (4.21) em um termo quadrático em B e em uma contribuição de ordem superior:

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B, \beta) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} K_0(\beta m n_2) B^2 + \mathcal{L}_{WS}^{(1)'}(B, \beta) \quad (4.23)$$

onde

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)'}(B, \beta) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (\beta n_2/2)^2/s} \left[seB \mathcal{M}(seB) + \frac{1}{6}(seB)^2 \right]. \quad (4.24)$$

Essa contribuição tem a seguinte expansão no regime de campo fraco:

$$\mathcal{L}_{WS}^{(1)'}(B, \beta) = -\frac{2m^2}{(\pi\beta)^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \sum_{k=2}^\infty \frac{(2^{2k-1} - 1) B_{2k}}{(2k)!} (\beta m n_2)^{2k} K_{2k-2}(\beta m n_2) \left(\frac{B}{B_{cr}} \right)^{2k}. \quad (4.25)$$

Finalmente o mesmo será feito com a expressão (4.22) de $\mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B, \beta)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WSC}^{(1)}(a, B, \beta) &= - \left[\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} K_0(\sqrt{(2am n_1)^2 + (\beta m n_2)^2}) + \frac{e^2}{48\pi a m} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} e^{-\beta m n_2} \right] B^2 + \\ &+ \mathcal{L}_{WSC}^{(1)'}(a, B, \beta) \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde:

$$\mathcal{L}_{WSC}^{(1)'}(a, B, \beta) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-sm^2 - (\beta n_2/2)^2/s} \left[\frac{\sqrt{\pi s}}{2a} + \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} e^{-(an_1)^2/s} \right] \times$$

$$\times \left[seB\mathcal{M}(seB) + \frac{1}{3}(seB)^2 \right], \quad (4.27)$$

que tem a seguinte expansão no regime de campo fraco (fórmula 3.471,9 em [62]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WSC}^{(1)'}(a, B, \beta) &= -\frac{m^4}{\pi^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{N}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2^{2k-1} - 1)}{2^{2k-2}\pi^{2k}} \zeta(2k)(eB)^{2k} \times \\ &\times \left[\frac{(2an_1)^2 + (\beta n_2)^2}{(2m)^2} \right]^{k-1} K_{2k-2}(\sqrt{(2amn_1)^2 + (\beta mn_2)^2}) + \\ &+ \frac{1}{4\pi^{3/2}a} \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2^{2k-1} - 1)}{2^{2k-2}\pi^{2k}} \zeta(2k)(eB)^{2k} \left(\frac{\beta n_2}{2m} \right)^{2k-3/2} \times \\ &\times K_{2k-3/2}(\beta mn_2), \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde aparece a função zeta de Riemann $\zeta(2k)$. Coletando em (3.58), (4.23) e (4.26) os coeficientes de B^2 as contribuições à permeabilidade magnética do vácuo do campo escalar carregado são obtidas e dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(am, \beta m)} &= 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\sum_{n_1 \in \mathbb{N}} K_0(2amn_1) + \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} K_0(\beta mn_2) + \right. \\ &+ \left. \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} K_0(\sqrt{(2amn_1)^2 + (\beta mn_2)^2}) \right] + \\ &+ \frac{e^2}{48\pi am} \left[1 + \sum_{n_2 \in \mathbb{N}} e^{-\beta mn_2} \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Essa expressão para a permeabilidade deve-se à influência conjunta do confinamento e da temperatura. Levando-se em conta as propriedades das funções de Bessel [62] em (4.29) é possível descrever as características mais gerais dessa permeabilidade. No limite de temperatura zero ($\beta \rightarrow \infty$) ela reduz-se à permeabilidade (3.59) encontrada no capítulo anterior. Na ausência de confinamento ($a \rightarrow \infty$) (4.29) dá a contribuição térmica à permeabilidade magnética. Tomando-se os dois limites anteriores simultaneamente a permeabilidade vai a 1, que é seu valor no vácuo trivial. Note que no limite de altas temperaturas ($\beta \rightarrow 0$) a

constante de permeabilidade vai a zero, que é o mesmo limite que atinge quando a distância entre as placas vai a zero. Note também que o último termo em (4.29), inversamente proporcional a a , pode ser escrito como $e^2/48\pi am[1 - \exp(-\beta m)]$.

No caso de um campo magnético muito fraco, em que as contribuições de ordem mais alta (3.60), (4.24) e (4.27) são totalmente desprezíveis, a lagrangeana efetiva total (4.18) reduz-se a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu(am, \beta m)}, \quad (4.30)$$

que generaliza (3.62) para temperatura arbitrária.

Capítulo 5

Considerações finais

Nessa tese foi estudado o efeito conjunto de confinamento entre placas paralelas e campo externo magnético, constante e uniforme, sobre o vácuo de um campo escalar carregado, *i.e.*, os efeitos correspondentes a diagramas com um único laço, que esses agentes exercem sobre o vácuo da EDQ escalar. Esse efeito conjunto foi estudado sob dois pontos de vista complementares. Em um deles foi considerado o efeito do campo magnético sobre a energia de Casimir decorrente do vácuo estar confinado entre as placas. No outro foi considerado o efeito do confinamento sobre a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger para o campo magnético externo, que descreve as propriedades magnéticas do vácuo escalar carregado.

Pouco se conhece sobre o efeito Casimir em campo externo. No entanto, esse tipo de estudo é relevante, pois partículas massivas cujo efeito Casimir é desprezível podem, se carregadas, ter esse efeito reforçado por um campo externo. Esse reforço foi verificado no

caso do efeito Casimir fermiônico e mostrou-se necessário verificar sua ocorrência ou não no caso bosônico. Esse estudo sobre a influência do campo externo no efeito Casimir do campo escalar carregado levou ao resultado de que o campo magnético externo diminui esse efeito Casimir bosônico. A medida que o campo magnético vai aumentando de valor, a energia de Casimir vai diminuindo a um modo determinado pela função \mathcal{M} , definida em (3.24) e com gráfico dado na figura 3.3. Para campo magnético B intenso, a energia de Casimir cai com a exponencial de \sqrt{eB} , como indica a equação (3.35), e no limite de campo infinito a energia de Casimir é totalmente suprimida pelo campo externo. Esse é, sem dúvida, um fato intrigante, para o qual não foi possível encontrar uma explicação intuitiva. Compare-se essa influência do campo magnético sobre a energia de Casimir escalar com a influência do mesmo campo sobre o efeito Casimir do campo de Dirac. No caso do campo de Dirac, a energia de Casimir é reforçada pelo campo magnético e cresce linearmente com esse campo magnético quando ele é intenso como mostra a equação (3.7). Embora seja natural esperar comportamentos distintos de bósons e férmions diante de uma mesma situação, é notável obter essa oposição tão marcante, na qual uma energia, a do férmion, é levada ao infinito e a outra, a do bóson, é levada a zero, pelo mesmo limite $B \rightarrow \infty$. É possível conjecturar que esse resultado seja de relevância em teorias, como as supersimétricas, nas quais férmions e bósons aparecem sempre em pares. Em uma situação na qual haja condições de contorno, que descrevam confinamento ou compactificação de dimensões, por exemplo, as energias de Casimir dos parceiros presentes podem estar ajustadas por algum tipo de sintonia fina entre massas e dimensões de compactificação. Nesse caso, os resultados aqui apresentados, podem determinar as transformações a partir

desse ajuste causadas por um campo externo. Esse é um tipo de problema interessante para ser investigado como continuação do presente trabalho. Um resultado interessante obtido é que, em diversas expressões para a energia de Casimir, o campo magnético age como provedor de uma massa efetiva $m_B = \sqrt{m^2 + eB}$ para o campo escalar carregado.

Os resultados da EDQ escalar não podem ser verificados experimentalmente de modo direto porque não se conhecem partículas fundamentais que sejam escalares carregados. São resultados úteis para aplicações em teorias mais realistas (e complicadas), como exemplificado no parágrafo anterior. Desse modo, nem o efeito Casimir usual, nem o efeito Casimir em campo magnético externo, estudado aqui, têm verificação experimental direta. Entretanto, há situações em que objetos compostos escalares, como píons em regime de baixa energia, ou diquarks [69] em regime de alta energia, podem ser tratados como fundamentais dentro de certas aproximações. Os resultados apresentados aqui podem, em princípio, ser úteis no estudo desses objetos.

O estudo sobre a influência do confinamento na lagrangeana de Weisskopf-Schwinger $\mathcal{L}_{WS}^{(1)}(B)$ levou em primeiro lugar às esperadas correções $\mathcal{L}_{WSC}^{(1)'}(a, B)$ à lagrangeana de Weisskopf-Schwinger. Tais correções devem-se ao confinamento entre as placas e descrevem, como a própria lagrangeana de Weisskopf-Schwinger, fenômenos não lineares. Expandindo-as em potências do campo magnético só são obtidos termos de ordem quártica para cima. No entanto esse estudo, como o anterior no caso fermiônico, levou a uma nova contribuição, que determina uma nova constante de permeabilidade magnética $\mu(am)$. Tal constante de permeabilidade depende do confinamento, por meio da separação a , e possui todas as propriedades essenciais que poderiam ser esperadas intuitivamente da

física da situação. Em primeiro lugar é uma constante de permeabilidade diamagnética para qualquer valor de a , como era de se esperar de um vácuo bosônico. Esse resultado responde à questão motivada pelo anterior estudo no caso fermiônico e é formulada no final da seção 3.1. Em segundo lugar, no limite em que o confinamento desaparece ($a \rightarrow \infty$), tem-se que $\mu(am)$ tende a 1; esse resultado deve, naturalmente, não somente ser esperado como exigido. Finalmente, tem-se que a função que governa o diamagnetismo \mathcal{M} do caso bosônico tem valores pequenos diante da função de Langevin que governa o paramagnetismo do caso fermiônico. É notável que os vácuos da EDQ escalar e espinorial reproduzam com tal detalhe as propriedades usuais do magnetismo dos meios materiais. Serão exploradas em mais detalhes as permeabilidades desses vácuos em um formalismo de temperatura finita. Embora o campo externo tenha sido deliberadamente considerado como puramente magnético, para evitar a ocorrência de criação de pares, os cálculos deste trabalho, apontam o caminho para considerar o caso de um campo externo elétrico. Nesse caso seriam obtidas as correções devido ao confinamento para o resultado de Schwinger que dá a taxa de criação de pares em campo elétrico externo. Esse é um resultado inexistente na literatura e uma maior dedicação a ele será uma das continuações do presente trabalho.

Também foi incorporada temperatura finita aos resultados descritos acima. Foi obtida a energia de Casimir do campo escalar carregado em campo magnético externo e temperatura finita e a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger com confinamento e temperatura finita. Esse último resultado generaliza, com a inclusão das placas confinantes, o resultado de Dittrich [66], que por sua vez foi a primeira generalização da lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger, pela inclusão de temperatura finita. Tais resultados pro-

porcionam os dados necessários para que qualquer fenômeno térmico ligado à energia de Casimir e à lagrangeana efetiva seja estudado. Um outro objetivo futuro é estudar em particular as propriedades termodinâmicas da permeabilidade diamagnética do vácuo da EDQ escalar.

Apêndice: Convenções

Foram utilizadas as abreviações EDQ para eletrodinâmica quântica e (no capítulo 4) TQCTF para teoria quântica de campos em temperatura finita.

Como é usual em teoria quântica de campos as funções numéricas são complexas, ficando esse fato subentendido. Para os outros conjuntos numéricos foi utilizada a simbologia padrão: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ designa o conjunto dos naturais, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ o conjunto dos inteiros e \mathbb{R} o conjunto dos reais. $[a, b]$ é um intervalo real fechado de a a b . \mathbb{R}^2 é o plano real e \mathbb{R}^3 é o espaço tridimensional. O círculo é designado por S^1 .

Foram utilizadas as unidades naturais, nas quais $\hbar = 1$, $c = 1$ e $k_B = 1$, exceto em algumas equações copiadas diretamente de referências originais antigas ou para indicar alguns valores numéricos específicos; por exemplo, para o campo elétrico crítico foi escrito:

$$E_{cr} = \frac{m^2}{e} = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 1,7 \times 10^{16} \text{ Volt/cm}$$

As equações do campo eletromagnético estão nas unidades de Heaviside-Lorentz (com $c=1$).

Vetores no espaço tridimensional são denotados por letras em negrito; por exemplo: o

vetor de posição \mathbf{x} e o campo magnético \mathbf{B} . As componentes são numeradas da maneira usual: $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$. No caso do vetor de posição foi utilizado indiscriminadamente $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ou $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Os quadrivetores e quadritensores são denotados por letras itálicas; o contexto não permitirá confusão entre o quadrivetor x e a primeira componente de \mathbf{x} . Por exemplo o quadrivetor espaço-temporal x , o quadripotencial eletromagnético A e o campo eletromagnético F . As componentes são numeradas por meio de índices em letras gregas que correm de 0 a 3: A^μ e $F_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). A métrica usada é dada por $g = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, *i.e.*:

$$-x_0 = x^0 = t, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2, \quad x_3 = x^3.$$

Foi seguida a notação de Dirac e Schwinger de usar um apóstrofo na letra que representa operador para indicar seu autovalor. Assim, H' é autovalor de H , p'_z é autovalor do operador $p_z = -i\partial/\partial z$ e assim por diante. Também foram utilizadas outras letras para indicar autovalores, por exemplo: ω é autovalor de p^0 . $[A, B]$ e $\{A, B\}$ designam respectivamente o comutador e o anticomutador de dois operadores A e B .

Muitas quantidades representadas por uma mesma letra foram diferenciadas pelas grandezas das quais dependem. Por exemplo, a energia de Casimir na ausência de campo externo foi representada por $\mathcal{E}(a)$ e a energia de Casimir em campo externo B por $\mathcal{E}(a, B)$; $\mathcal{L}_{WS}(a, B)$ é a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger em temperatura zero e $\mathcal{L}_{WS}(a, B, \beta)$ é a lagrangeana efetiva de Weisskopf-Schwinger em temperatura $1/\beta$.

Foram utilizados praticamente os mesmos símbolos para designar grandezas associadas aos dois campos carregados da EDQ escalar e espinorial, respectivamente o escalar e o

de Dirac. Para esses dois campos foram utilizados m para representar a massa, e para representar a carga, H para representar a hamiltoniana de tempo próprio. Em todas as fórmulas em que esses símbolos são usados o contexto é sempre claro para não permitir qualquer confusão. Há uma única equação em que aparecem simultaneamente o campo escalar e o de Dirac: a equação (2.52); nela os sinais \pm distinguem as grandezas associadas ao campo de Dirac e ao campo escalar, respectivamente.

Referências

- [1] M . V. Cougo-Pinto, C. Farina e A. C. Tort, *Cadernos de Divulgação e Educação Científica do Instituto de Física da UFRJ* n^o 5 (1998).
- [2] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
- [3] H. B. G. Casimir and D. Polder, *Phys. Rev.* **73** (1948) 360.
- [4] P. W. Milonni e M.-L. Shih, *Contemporary Physics* **33** (1992) 313.
- [5] H. B. G. Casimir. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51** (1948) 793.
- [6] M. J. Sparnaay, *Physica* **34** (1958) 751.
- [7] S. K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 5.
- [8] U. Mohideen e A. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4549.
- [9] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov *The Casimir effect and its applications* (Clarendon Press, Oxford, 1997).
- [10] L. H. Ford, *Phys. Rev.* (1980) **D21** 933.
- [11] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, J. Rafelski e A. C. Tort, *Phys. Lett.* **B434** (1998) 388.

- [12] G. Plunien, B. Muller and W. Greiner, *Phys. Rep.* **134** (1986) 89.
- [13] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy - Invited Lectures at the 17th Symposium on Theoretical Physics, Seoul National University, Korea, June 29-July 1, 1998*. (O autor remete dessa revisão para um livro de sua autoria com mesmo título a ser publicado pela World Scientific.)
- [14] Thomas Appelquist, Alan Chodos and Peter G. O. Freund (editors) *Modern Kaluza-Klein Theories* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Menlo Park, California, 1987).
- [15] E. M. Lifshitz, *Sov. Phys. JEPT* **2** (1956) 73.
- [16] I. I. Abrikosova and B. V. Deriagin, *Dokl. Akad. Nauk. USSR* **90** (1953) 1055; B. V. Deriagin and I. I. Abrikosova, *Discuss. Faraday Soc.* **18** (1954) 33; Deriagin and Abrikosova, *Sov. Phys. JEPT* **3** (1957) 819.
- [17] J. A. Kitchener and A. P. Prosser, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **242** (1957) 403.
- [18] D. Tabor and R. H. S. Winterton, *Nature* **219** (1968) 1120-1121.
- [19] E. S. Sabiski and C. H. Anderson, *Phys. Rev.* **A7** (1973) 790.
- [20] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum* (Academic Press, Inc., Boston, 1994).
- [21] I. J. R. Aitchison, *Nothing's plenty - the vacuum in modern quantum field theory em: Contemp. Phys.* **26** (1985) 333.
- [22] H. Euler e B. Kockel, *Naturwissensch.* **23** (1935) 246.

- [23] H. Euler *Ann. d. Phys.* **26** (1935) 398.
- [24] H. Euler e W. Heisenberg, *Z. Phys.* **38** (1936) 714.
- [25] V. S. Weisskopf, *K. Danske Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **14** (1936) 3. (Reimpresso no original alemão em J. Schwinger, *Quantum electrodynamics* (Dover, New York, 1958); há uma tradução para o inglês em: A. I. Miller, *Early Quantum Electrodynamics - A Source Book* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).)
- [26] R. D. Guenther, *Modern Optics* (John Wiley & Sons, New York, 1990).
- [27] M. Born e L. Infeld, *Proc. Roy. Soc.* **A144** (1934) 425.
- [28] M. Delbrück, *Z. Physik* **84** (1933) 144.
P. Papatzakos e K. Mork, *Phys. Rep.* **21** (1975) 81.
- [29] S. Kahane e R. Moreh, *Phys. Lett.* **B47** (1973) 351.
P. Rullhusen *et al*, *Phys. Rev.* **C27** (1983) 559.
- [30] G. Jarlskog *et al*, *Phys. Rev.* **D8** (1973) 3813.
- [31] L. Landau, *Théorie Quantique Relativiste - Deuxième Partie* (Moscou: Editions Mir, Moscou, 1973).
- [32] D. L. Burke *et al*, *Phys. Rev. Lett* **79** (1997) 1626.
- [33] A. Melissinos, *Proceedings of the 15th Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop on Quantum Aspects of Beam Physics, Monterrey, California* (1998).

- [34] E. Iacopini e E. Zavattini, *Phys. Lett* **B85** (1979) 151.
- [35] G. Cantatore, F. Della Valle, E. Milotti, L. Dabrowski e C. Rizzo, *Phys. Lett.* **B265** (1991) 418.
- [36] D. Bakalov, F. Brandi, G. Cantatore, G. Carugno, S. Carusotto, F. Della Valle, A. M. De Riva, U. Gastaldi, Iacopini E, Micossi P, Milotti E, Onofrio R, Pengo R, Perrone F, G. Petrucci, E. Polacco, C. Rizzo, G. Ruoso, E. Zavattini e G. Zavattini (PVLAS Collaboration: Experimental method to detect the magnetic birefringence of vacuum) *Quantum and Semiclassical Optics - Journal of the European Optical Society B* in press (1997).
- [37] J. Kuijpers, *Physica* **B211** (1995) 306.
- [38] T. H. Boyer, *Phys. Rev.* **174** (1968) 1764.
- [39] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn e V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3471; A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, *ibid.* **D10** (1974) 2559; T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, J. Kiskis, *ibid.* **D12** (1975) 2060; J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, *ibid.* **D12** (1975) 2875.
- [40] K. Johnson, *Acta Phys. Polonica* **B6** (1975) 865.
- [41] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, M. R. Negrão e A. C. Tort, *Bosonic Casimir effect in external magnetic field* (submetido para publicação no Journal of Physics A) (1998).
- [42] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, M. R. Negrão e A. C. Tort, *Magnetic permeability of*

- constrained scalar QED vacuum* (submetido para publicação no Journal of Physics A) (1999).
- [43] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, M. R. Negrão e A. C. Tort, *Casimir effect at finite temperature of charged scalar field*, **hep-th/9810033**.
- [44] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, M. R. Negrão e A. C. Tort, *Magnetic properties of confined bosonic vacuum at finite temperature*, **hep-th/9811095**.
- [45] M. V. Cougo-Pinto, Farina C e A. C. Tort, *Fermionic Casimir effect in external magnetic field* **hep-th/9809215**
- [46] K. Scharnhorst, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 354.
- [47] G. Barton, *Phys. Lett.* **B237** (1990) 559.
- [48] G. Barton e K. Sharnhorst, *J. Phys.* **A26** (1993) 2037.
- [49] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, *The speed of light in confined QED vacuum: Faster or slower than c ?* to be published in *Phys. Lett.* **B**
- [50] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, *QED vacuum between an unusual pair of plates* **hep-th/9811062**.
- [51] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 914
J. Schwinger, *Phys. Rev.* **91** (1953) 713.
- [52] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).

- [53] W. Dittrich and M. Reuter, *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics - Lectures Notes in Physics 220* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [54] J. Schwinger, *Lett. Math. Phys.* **24** (1992) 59.
- [55] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina e A. J. Ségui-Santonja, *Lett. Math. Phys.* **30** (1994) 169 e **31** (1994) 309.
- [56] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina e A. C. Tort, *Lett. Math. Phys.* **37** (1996) 159 e **38** (1996) 337.
- [57] M. V. Cougo-Pinto e C. Farina, *Phys. Lett.* **B391** (1997) 67.
- [58] J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields* (Adison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1970).
- [59] J. Schwinger *Lett. Math. Phys.* **1** (1975) 43.
- [60] J. Schwinger *Lett. Math. Phys.* **24** (1992) 227.
- [61] S. D. Poisson, *Journal de l'Ecole Polytechnique XII* (cahier XIX)(1823) 420.
- [62] I. S. Gradshtejn e I. M. Ryzik, *Tables of integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1965).
- [63] L. Landau, *Théorie Quantique Relativiste - Première Partie* (Mir, Moscou,1972).
- [64] W. Dittrich, *J. Phys.* **A9** (1976) 1171.

- [65] W. Greiner, B. Müller e J. Rafelski *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Springer-Verlag, Alemanha, 1985).
P. Papatzakos e K. Mork, *Phys. Rep.* **21** (1975) 81.
- [66] W. Dittrich, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 2385.
- [67] T. Matsubara, *Progress of Theoretical Physics*, **14** (1955) 351.
- [68] A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1997).
- [69] M. Szczekowski, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **4** (1989) 3985; *Proceedings of the Workshop on Diquarks*, Torino, Itália (1989); M. Anselmino, E. Predazzi, S. Ekelin, S. Fredriksson e D. B. Lichtenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65** (1993) 1190.