

TESE DE DOUTORAMENTO

TRÊS IMPRESSÕES SOBRE O VÁCUO QUÂNTICO

Filadelfo Cardoso Santos

Orientador: Dr. Carlos Farina de Souza
Co-orientador: Dr. Alexandre Carlos Tort



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Novembro de 2000

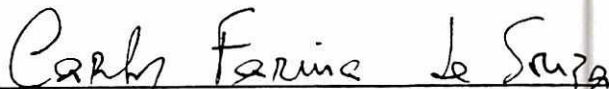
TESE
5237t

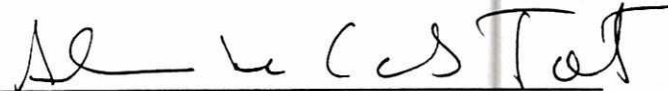
TRÊS IMPRESSÕES SOBRE O VÁCUO QUÂNTICO

Filadelfo Cardoso Santos

Tese submetida à banca examinadora indicada pela coordenação de pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor.

Aprovada por:

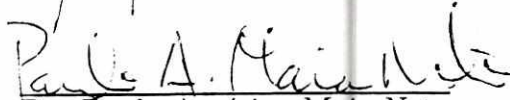

Dr. Carlos Farina de Souza (Presidente e orientador)

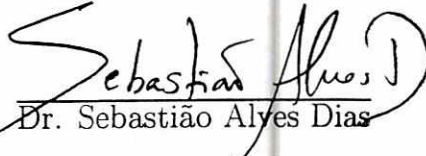

Dr. Alexandre Carlos Tort (Co-orientador)


Dr. Luiz Agostinho Ferreira


Dr. Nami Fux Svaiter


Dr. Eduardo Cantera Marino


Dr. Paulo Américo Maia Neto


Dr. Sebastião Alyes Dias

Rio de Janeiro, RJ — Brasil
Janeiro de 2000

Ficha catalográfica

S237t Santos, Filadelfo Cardoso
Três impressões sobre o vácuo quântico/ Filadelfo Cardoso
Santos. - Rio de Janeiro: IF - UFRJ, 2000.
xii, 110p.;30cm.
Orientador: Carlos Farina de Souza; Co-orientador: Alexandre Carlos Tort
1. O efeito Casimir 2. O efeito Scharnohrst 3. Teoria quântica de campos I. Tese: Doutor em Ciências Físicas. II. Título.

Dedico a

Severina.
Juliana
e
Lucas

Agradecimentos

Quero inicialmente agradecer aos meus orientadores, o professor Carlos Farina de Souza e o professor Alexandre Carlos Tort, não somente pela competência e entusiasmo que tiveram durante a elaboração da tese, mas máxime pelo companherismo e encorajamento que foram imprescindíveis para a conclusão deste trabalho. Agradeço ao professor Ildu de Castro Moreira, com quem venho trabalhando há muitos anos, pelo seu constante apoio e pela amizade. Ao professor Marcus Venicius Cougo-Pinto que além de fazer parte do nosso grupo de pesquisa e ter tido participação direta no trabalho desenvolvido foi também para mim um grande incentivador.

Agradeço, também, ao professor Marco Pedra Martins por suas palavras de apoio e por ter permitido, em diversas oportunidades, o uso de seu computador; ao professor Stenio Wulk de Melo por sua prestimosa ajuda na preparação de imagens e figuras para a apresentação da tese; os professores Danilo Teixeira Alves da Universidade Federal do Pará e Franz Peter Alves Farias da Universidade de Feira de Santana que gentilmente me ajudaram em diversos problemas de edição de texto.

Finalmente agradeço a todos meus colegas professores do Departamento de Física Teórica e a nossa secretária, srta. Márcia Moraes. Aos funcionários da secretaria de pós-graduação, sr. Carlos José Borges Delgado e srta. Rosângela da Silva Leonardo, um agradecimento especial, pela eficiência e gentileza. Estes agradecimentos são extensivos a todos os professores e funcionários do nosso instituto.

Resumo

Discutimos propriedades do vácuo quântico que de algum modo estão relacionadas ao efeito Casimir. Na introdução fizemos uma rápida revisão da história do conceito de vácuo, destacando somente os pontos que julgamos importantes, com o único objetivo de apreciar a evolução deste conceito e imaginar que futuro podemos esperar para esta idéia. O primeiro capítulo é dedicado ao estudo das forças de van der Waals dispersivas. Calculamos a força entre duas moléculas, no regime não-retardado, com polarizabilidades elétrica e magnética. Esta força só era conhecida no regime retardado. O segundo capítulo é dedicado ao estudo do efeito Casimir a temperatura não-nula. Calculamos a força de Casimir para placas de Boyer e a energia de Casimir para uma caixa retangular e mostramos como é possível definir uma simetria de temperatura nestes sistemas. Começamos o terceiro capítulo discutindo ações efetivas e determinamos a lagrangiana de Euler-Heisenberg usando o método da função zeta generalizada. Em seguida analisamos o efeito Scharnhorst para as placas de Boyer e mostramos que a velocidade da luz na direção perpendicular às placas é menor do que c . Por último, consideramos o efeito Scharnhorst no contexto da eletrodinâmica escalar.

Abstract

In this work we discuss properties of the quantum vacuum that are somehow related to the Casimir effect. In the Introduction we present a brief overview of the vacuum concept, stressing only those points that we deem important having in mind the evolution of the concept only and imagining its future. The first chapter is devoted to the study of the van der Waals dispersion forces. We evaluate the force between two molecules one of them electrically polarizable and the other one magnetically polarizable in the non-retarded regime. The explicit form of this force was known only in the retarded regime. The second chapter is devoted to the analysis of the Casimir effect at finite temperature. We evaluate the Casimir free energy and Casimir pressure at finite temperature for two infinite parallel plates, one of them perfectly conducting and the other perfectly permeable. This arrangement is also known as Boyer's plates and is the simplest example where we can find a repulsive Casimir force. We show also how it is possible to consider temperature inversion symmetry in this case. We show also how it is possible to consider temperature inversion symmetry in this case. We also evaluate the free energy associated with perfectly conducting rectangular box and show that we can extend the concept of temperature inversion symmetry for this case. The third and last chapter we focus our attention on effective actions and derive the Euler-Heisenberg lagrangian density through generalized zeta function methods. Next we discuss the Scharnhorst effect for Boyer's plates and the Scharnhorst effect for scalar quantum electrodynamics. In the latter case we consider light propagation between conducting and Boyer's plates. In the Conclusion we sketch some of the directions that the present work may lead us into.

Índex

1	Forças de van der Waals	13
1.1	Introdução	13
1.2	Forças dispersivas não-retardadas	15
1.3	A não-aditividade das forças de van der Waals dispersivas	18
1.4	Forças não-retardadas entre átomos com polarizabilidades elétrica e magnética	22
1.5	A eletrodinâmica quântica e o cálculo completo da força de van der Waals	26
1.6	A força de van der Waals no caso geral	27
2	O efeito Casimir	41
2.1	O efeito Casimir a temperatura zero	43
2.1.1	O efeito Casimir com placas metálicas	45
2.1.2	O efeito Casimir com placas de Boyer	49
2.1.3	A energia de Casimir para uma caixa retangular	52
2.2	O efeito Casimir a temperatura não-nula	55
2.2.1	A energia livre	55
2.2.2	A pressão	60
2.2.3	A simetria de inversão de temperatura	62
2.2.4	A caixa retangular a temperatura finita	67
2.2.5	A inversão de temperatura	70
3	Ações efetivas da eletrodinâmica quântica e o efeito Scharnhorst	74
3.1	A ação efetiva	74
3.2	Expansão em laços	76
3.3	A lagrangiana de Euler-Heisenberg	80
3.3.1	A função zeta e o cálculo da ação restrita de Euler-Heisenberg	82
3.3.2	A lagrangiana restrita para a eletrodinâmica escalar	87
3.4	O efeito Scharnhorst	89

3.5	O vácuo eletromagnético entre placas de Boyer	89
3.6	O efeito Casimir repulsivo e os limites de uma única placa	94
3.7	O efeito Scharnhorst	95
3.8	O efeito Scharnhorst na eletrodinâmica quântica escalar	100

Introdução

O conceito de vácuo apresenta desde sua origem, na antiguidade, acepções diferentes, ora mais abrangentes ora menos, e algumas até mesmo conflitantes. Não havia nos primórdios do pensamento filosófico grego uma clara distinção entre os conceitos de vácuo e de espaço. De fato, essas palavras eram sinônimas e não era incomum representá-las com o mesmo vocábulo τὸ κενόν (tò kevòn). Além disso, o conceito de vácuo também está, desde a sua origem, associada à idéia de vazio, do nada, da não-existência. Por exemplo, para Parmênides (século VI - século V a.C., de Eléa no sul da Itália) o vácuo é a não-existência e a não-existência não existe. Para Demócrito (século V a.C. de Abdera no norte da Grécia) o vácuo era uma coisa tão real quanto os átomos e sinônimo de espaço no sentido de espaço livre. Contudo, foi Zenão, discípulo de Parmênides, quem pela primeira vez distinguiu claramente os dois conceitos vácuo-espaço, introduzindo a noção de localização no espaço. Tal ponto de vista foi também defendido por Epicuro (341-270 a.C., de Samos no norte da Grécia) e Lucrécio (98-55 a.C.) para quem o mundo era feito de corpos físicos e do vácuo no qual esses corpos estavam localizados e através do qual eles se movem. Por outro lado, Aristóteles (384-322 a.C.), ao contrário de Demócrito, negou a existência do espaço porque os conceitos de movimento e velocidade são incompatíveis. Aristóteles ponderou que, no vácuo, qualquer objeto deveria se mover com velocidade infinita. Isto sendo um absurdo ele concluiu que o vácuo não existe.

Essa origem comum fez com que esses dois conceitos mantivessem uma estreita relação em alguns sistemas filosóficos, mas não impediu que eles se diferenciasssem em outras correntes filosóficas [1, 2].

O nascimento da física newtoniana introduziu novos elementos à questão do vácuo. O ponto crucial é a existência de um sistema de referência absoluto, o espaço absoluto, em relação ao qual o movimento de uma partícula livre é uniforme. É fundamental, portanto, que o espaço absoluto possa ser concebido como um vazio cuja existência é independente da matéria. Por outro lado, Newton não foi capaz de identificar o espaço absoluto, visto que para qualquer sistema de referência em movimento uniforme em relação ao espaço absoluto as leis de Newton são igualmente válidas. Entretanto, Newton pôde afirmar que

alguns movimentos eram certamente movimentos em relação ao espaço absoluto. O balde girante de Newton, o pêndulo de Foucault são manifestações experimentais da aceleração em relação ao espaço absoluto, roborando o conceito de espaço absoluto. A velocidade absoluta, entretanto, não pode ser medida por meio de qualquer experimento mecânico; ela não tem caráter absoluto porque todos os sistemas inerciais são equivalentes. Podemos então afirmar que movimentos uniformes em relação ao espaço absoluto não podem ser detectados, mas movimentos não-uniformes são certamente movimentos em relação ao espaço absoluto.

Ao lado das concepções newtonianas surgiram outras concepções que também evoluíram, gerando polêmica ainda no âmbito da mecânica clássica. Trata-se das idéias do bispo de Berkeley (1685-1753) que substituiu o relativismo newtoniano: -todo movimento uniforme é relativo- por um novo relativismo: -todo movimento é relativo-. O físico e filósofo E. Mach (1838-1916) desenvolveu esse relativismo e propôs uma interpretação da inércia dos corpos baseada na presença da matéria existente no Universo. Conseqüentemente o espaço, na concepção de Mach, não pode ser vazio, pois um Universo sem massa não produziria inércia.

A física moderna, física relativística e física quântica, alterou radicalmente a descrição newtoniana do espaço e do tempo absolutos. A teoria especial da relatividade teve a tarefa de detonar a concepção que vinha se formando e ganhando força sobre a possibilidade de detectar o espaço absoluto por meio dos fenômenos eletromagnéticos. Em particular, supunha-se que deveria existir um éter miraculoso dotado de propriedades físicas fantásticas que serviria de meio para a propagação da luz. Dessa forma, ao negar a existência do éter que serviria como referencial absoluto, a teoria da relatividade não trouxe mudanças importantes para essa questão, ela substituiu o espaço e tempo absolutos por um espaço-tempo absoluto sem conspurcar o relativismo newtoniano, ou seja, estendeu o princípio da relatividade para abranger também a teoria eletromagnética. Em um certo sentido, conspirativo, a teoria da relatividade resgatou a dificuldade newtoniana: a impossibilidade de se detectar o espaço absoluto.

A teoria geral da relatividade ou teoria da gravitação de Einstein trouxe uma idéia revolucionária: o espaço-tempo atuante. A matéria determina a dinâmica do espaço-tempo e vice-versa. Embora as conseqüências dessa interdependência sejam controvertidas, vemos que essa idéia abre enormes possibilidades para os conceitos de espaço e vácuo. A equivalência entre todos os sistemas de referência formulado como o princípio da relatividade geral e a idéia machiana de que a origem da massa inercial seria uma conseqüência da gravitação pareciam uma guinada em direção ao relativismo de Berkeley. Entretanto, isto não se confirmou e o conceito de espaço-tempo na teoria da gravitação permaneceu obscuro e impreciso.

A teoria especial da relatividade isoladamente é como vimos conservadora no que diz respeito ao caráter absoluto do espaço-tempo, mas quando fundida à teoria quântica,

produzindo a teoria quântica de campos, leva a uma nova revolução no conceito de vácuo, reforçando seu papel dinâmico. O vácuo tornou-se uma entidade cujas propriedades físicas podem ser modificadas e que podem influenciar as propriedades dos corpos físicos. A teoria quântica de campos mais efetivamente que qualquer outra teoria dotou o vácuo de uma estrutura dinâmica. Focalizaremos nossa atenção na eletrodinâmica quântica, isto é, a teoria quântica da interação da matéria com o campo eletromagnético. Considerando somente o campo eletromagnético livre quantizado, conceituamos um estado quântico arbitrário como um estado que possui n quanta, ou seja, fótons. Os postulados da teoria, contudo, prevêm que o estado de mais baixa energia é um estado não-nulo sem fótons. Este estado, que denominamos de vácuo, não é meramente um artifício matemático para dar consistência à teoria e pode se manifestar de forma surpreendente em vários fenômenos observáveis, alguns inclusive macroscópicos.

A atividade do vácuo vem do fato que, mesmo não havendo quanta reais os campos não podem se anular devido à não-comutatividade dos operadores que descrevem a teoria, no caso da eletrodinâmica quântica os operadores de campo elétrico e campo magnético dão origem a flutuações cujas médias são nulas, mas que quando acoplados às partículas reais podem produzir as mais diversas correlações. Essas flutuações do vácuo, além de adquirirem uma importância tão grande na teoria, ainda permitem interpretá-lo como um mar de partículas virtuais de modo que o vácuo passa a ser visto como um meio material dotado de várias propriedades interessantes, de intensa atividade e que pode responder aos estímulos externos também das mais variadas maneiras, algumas já comprovadas e outras ainda no domínio de hipóteses ousadas.

O deslocamento Lamb [3], o deslocamento dos níveis de energia do átomo devido à interação dos elétrons com o campo de radiação de ponto zero do vácuo, é um fenômeno que pode ser interpretado como um efeito das flutuações do vácuo [4]. Em um átomo de hidrogênio, por exemplo, o deslocamento Lamb pode ser medido com grande precisão experimental e também pode ser calculado com grande número de casas decimais, o que permite eficazmente comparar a teoria com a experiência.

A origem da massa inercial também pode estar no vácuo [5]. Esta idéia ao mesmo tempo interessante e especulativa decorre do fato que as flutuações de ponto zero dos campos elétrico e magnético podem interagir com as partículas carregadas que constituem a matéria. Quando um corpo move-se com velocidade constante em relação a um sistema inercial de referência as forças que atuam nele se anulam o que equivale a afirmar a lei da inércia, mas quando o corpo é submetido a uma aceleração essas mesmas flutuações geram uma resistência cuja medida é sua massa. É claro que quanto maior for o número de partículas do corpo maior será a sua interação com o vácuo, isto é, maior será sua inércia. Nesta interpretação, o vácuo teria um papel especial e seria visto como um sistema de referência absoluto. Mais interessante ainda é pensar na interação gravitacional como um efeito residual no vácuo. Segundo A. Sakharov, que foi o primeiro a propor esta idéia [6],

a gravidade poderia ser compreendida como um efeito induzido pelas variações da energia de ponto zero devido à presença da matéria. Isto é possível graças ao fato de que o campo do vácuo provoca em uma partícula nele imersa uma espécie de movimento caótico onde a partícula é empurrada de um lado para outro a talante das ondinas do mar virtual. Entretanto, o vácuo não é indiferente à presença da partícula e se amolda de modo a permitir que ambos, partícula e flutuações coexistam harmoniosamente. Uma segunda partícula, portanto, estará imersa em um vácuo distorcido pela presença da primeira cujos efeitos se descrevem por meio de uma interação gravitacional, permitindo deste modo que a gravitação seja entendida como uma espécie de força de Casimir de longo alcance. Neste sentido, a concepção de um vácuo quântico produziria uma teoria da gravitação *ab initio* unificada.

A diversidade de efeitos que o vácuo da eletrodinâmica quântica apresenta e a complexidade inevitável da teoria nos obrigou a limitar nossos esforços a apenas alguns temas relacionados ao vácuo ou mais precisamente ao efeito Casimir. Dessa forma, estaremos interessados nesta tese nas três questões seguintes: forças de van der Waals, o efeito Casimir a temperatura não-nula e o efeito Scharnhorst. Além disso, consideramos somente a eletrodinâmica quântica e o conceito de vácuo que ela introduz, ou seja, nada falamos sobre outras teorias ou interpretações como a eletrodinâmica estocástica, ou a teoria das fontes de Schwinger ou a reação do campo de radiação.

O primeiro capítulo é dedicado às forças de van der Waals dispersivas. Átomos ou moléculas são polarizáveis eletricamente e magneticamente e, em consequência, se atraem mutuamente com uma força de natureza quântica. São as chamadas forças dispersivas que podem ser calculadas em dois regimes extremos: não-retardado e retardado. Em 1930 London [7], obteve a força de van der Waals para pequenas distâncias e Casimir e Polder [8] calcularam-na para grandes distâncias. O próximo passo foi considerar também a polarizabilidade magnética das moléculas. Feinberg e Sucher [9], [10] foram os primeiros a obter a força entre tais partículas. Contudo eles analisaram somente o caso retardado. Esse mesmo problema foi estudado mais tarde por Boyer [11] que confirmou o resultado anterior. A interação entre uma molécula polarizável eletricamente e outra polarizável magneticamente não tinha sido determinada no regime não-retardado. Podemos resumir o primeiro capítulo da seguinte forma: usamos um modelo simples de dipolos flutuantes e mostramos que a não-aditividade das forças de van der Waals dispersivas entre moléculas polarizáveis eletricamente pode ser facilmente obtida [12], em seguida usamos o mesmo modelo para obter um resultado novo que envolve uma molécula polarizável eletricamente e outra polarizável magneticamente no regime não-retardado [13] e por último obtivemos resultados gerais, usando a eletrodinâmica quântica [14] que confirmaram o resultado obtido antes.

No segundo capítulo estudamos o efeito Casimir [15] a temperatura não-nula. Inicialmente deduzimos o efeito Casimir padrão com placas metálicas perfeitamente condutoras

a temperatura zero, o efeito Casimir entre uma placa metálica perfeitamente condutora e outra infinitamente permeável e o efeito Casimir em uma caixa retangular. Embora sejam resultados conhecidos vale a pena chamar atenção para o fato de que o cálculo da energia de Casimir para a caixa foi obtido pela primeira vez com a técnica de regularização da função zeta. Na segunda parte deste capítulo estudamos o efeito da temperatura não-nula. Nos últimos anos a influência da temperatura na energia de Casimir vem ganhando mais importância devido à possibilidade de verificação experimental. As medidas recentes já adquiriram grau suficiente de precisão para exigir da teoria um refinamento dos modelos. As correções térmicas para o efeito Casimir padrão foram determinadas por Brown e MacLay [16] que também mostraram que existe uma interessante simetria de inversão de temperatura para estes sistemas. No nosso trabalho calculamos, pela primeira vez na literatura as correções para o efeito Casimir com as placas de Boyer [17] e para a caixa retangular de paredes perfeitamente condutoras [18], destacando como esta simetria pode ser estendida para outros sistemas.

No último capítulo discutimos, inicialmente as ações efetivas da eletrodinâmica quântica e obtivemos, usando o método da função zeta, a lagrangiana de Euler-Heisenberg [19] [20] para baixas energias. Também obtivemos a lagrangiana para a eletrodinâmica escalar. Mas nosso interesse neste capítulo está no efeito Scharnhorst [21], que consiste em uma variação da velocidade da luz na região entre as placas. Originalmente Scharnhorst obteve este efeito para a região confinada entre placas de Casimir e chegou à conclusão que a velocidade da luz na direção perpendicular às placas é maior do que c enquanto que permanece inalterada na direção paralela às placas. No nosso trabalho consideramos este efeito para a eletrodinâmica spinorial na região entre placas de Boyer e mostramos que a velocidade da luz na direção perpendicular às placas agora diminui [22, 23]. Também mostramos que estes efeitos ocorrem com a eletrodinâmica escalar [24].

Para finalizar, chamemos a atenção para o fato de que o vácuo na física moderna foi dotado de propriedades físicas que podem ser estudadas e que são fundamentais para a compreensão de vários pontos importantes que sempre intrigaram a mente dos físicos e dos filósofos desde a antiguidade. Talvez venhamos a considerar, no futuro, que o vácuo e suas partículas virtuais constituam a verdadeira realidade e as partículas que hoje chamamos de reais sejam efêmeras e mereçam o nome de virtuais. E Assim seríamos levados a abandonar a máxima aristotélica: *Natura abhorret vacuum*.

Capítulo 1

Forças de van der Waals

1.1 Introdução

A equação de estado do gás ideal pode ser deduzida de um conjunto de hipóteses razoavelmente simples e intuitivas sobre suas partículas microscópicas constituintes. Para um mol de gás ideal essa equação se escreve na forma $PV = RT$, onde P é a pressão do gás, V é o volume ocupado, T é a temperatura e R é a constante universal dos gases. Destacamos, nesse modelo, a suposição que as partículas são desprovidas de estrutura interna e não interagem entre si, a não ser durante as ocasionais e breves colisões elásticas. Entretanto, em 1873, J. D. van der Waals [25] estabeleceu empiricamente uma equação de estado para os gases reais. Para um mol de gás esta equação se escreve na forma $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$. As constantes a e b , denominadas de constantes de van der Waals, podem ser determinadas experimentalmente e evidenciam a insuficiência do modelo do gás ideal. Van der Waals interpretou a diminuição do volume V como uma exclusão de volume causada pelo tamanho finito de cada átomo ou molécula do gás real. A constante a reflete a existência de uma força atrativa entre os átomos ou moléculas do gás. Esse efeito pode ser entendido da seguinte maneira: quando uma partícula se move entre as demais ela sofre a ação de forças atrativas em todas as direções e o resultado líquido dessas forças é nulo. Todavia, quando uma molécula se aproxima de uma parede ela sofre a ação de outras moléculas que estão todas de um mesmo lado. Em consequência da força resultante aplicada na molécula incidente na parede ser diferente de zero e orientada para o interior do gás, há uma redução da pressão em relação ao gás ideal cujas partículas não perderiam energia cinética durante o processo de aproximação à parede.

Nosso interesse está precisamente nessas forças intermoleculares de origem elétrica que, devido ao seu longo alcance, não podem ser associadas à superposição dos orbitais eletrônicos. É natural conjecturar, em virtude da carga total da molécula ser nula, que essa interação tenha origem nos dipolos ou quadrupolos elétricos que porventura essas

moléculas tenham. Vejamos as possibilidades que se apresentam. A primeira ocorre quando as moléculas do gás têm efetivamente dipolos permanentes, i.e., são moléculas polares. Nesse caso a força entre os dipolos depende de sua orientação relativa, podendo ser atrativa ou repulsiva. Entretanto, as orientações que produzem forças atrativas são estatisticamente privilegiadas e, desse modo, a força média sobre cada molécula, denominada de força de orientação, é atrativa. Para este caso Keason [26] obteve o potencial $V(r) = -p_1^2 p_2^2 / 3kTr^6$, onde p_1 e p_2 são os módulos dos dipolos permanentes das moléculas, k é a constante de Boltzmann, T é a temperatura e r é a distância entre as moléculas. A dependência com a temperatura é intuitiva e, como se confirma na fórmula acima, diminui à medida que a temperatura aumenta. Esse comportamento das forças de orientação as inviabiliza como justificativa geral para os coeficientes de van der Waals, visto que estes não se anulam em altas temperaturas. A segunda possibilidade surge quando a primeira molécula possui dipolo ou quadrupolo permanente e a segunda molécula, apesar de não ter dipolo permanente adquire um dipolo induzido, gerando uma força atrativa entre as moléculas independente da temperatura, mas com a mesma dependência na distância r das forças de orientação [27]. Essas forças, chamadas de forças de indução também não servem como justificativa geral para os coeficientes de van der Waals porque dependem da existência de moléculas com dipolos permanentes. A terceira possibilidade é a força de van der Waals que surge mesmo em átomos (moléculas) com alto grau de simetria e sem nenhum momento de multipolo como por exemplo os que constituem os gases nobres. Essa possibilidade sutilíssima só foi aventada com o advento da teoria quântica. Em 1930, London [7] calculou, usando a teoria de perturbação na mecânica quântica não-relativística até segunda ordem, o potencial de interação para esse caso. O resultado obtido foi:

$$V(r) = \frac{e^4}{r^6} \sum_{n_1 n_2} \frac{|\langle 00 | \hat{p} | n_1, n_2 \rangle|^2}{E_{00} - E_{n_1 n_2}}, \quad (1.1)$$

onde $\hat{p}$ é o operador de dipolo associado aos dois átomos (moléculas), $|n_1, n_2\rangle$ representam os autoestados não-perturbados de energia com autoenergias $E_{n_1 n_2}$. Observemos que esse potencial é atrativo, visto que $E_{00} < E_{n_1 n_2}$. O resultado final obtido por Eisenschitz e London [28] para o átomo de hidrogênio é $V(r) = -6,47e^2/r^6$. Porquanto essas forças dependem da polarizabilidade que, por sua vez, está relacionada ao índice de refração e à dispersão da luz elas são chamadas de forças de van der Waals dispersivas.

Neste capítulo estamos interessados na força dispersiva, em primeiro lugar, porque a pressão de Casimir pode ser calculada a partir desta força, levando em conta a sua não-aditividade e os efeitos do retardamento na propagação da interação eletromagnética; em segundo lugar, porque mais adiante vamos obter um resultado novo para o caso de átomos (moléculas) com polarizabilidade magnética não-nula.

1.2 Forças dispersivas não-retardadas

As forças dispersivas de van der Waals podem ser consideradas em dois regimes extremos: retardado e não-retardado. No primeiro caso, a distância entre as moléculas (átomos) é demasiadamente grande, fazendo com que os campos aplicados nas moléculas sofram as consequências da finitude da velocidade de propagação da interação; no segundo caso, a distância intermolecular é relativamente pequena e os campos aplicados nas moléculas, por não sofrerem os efeitos da propagação, são calculados como se fossem estáticos. Os efeitos causados pelo retardamento devem alterar o comportamento de força dispersiva, fazendo com que haja uma mudança na lei da força quando transitamos de uma região para outra. Essa mudança de comportamento na força de van der Waals foi sugerida, pela primeira vez, por Verwey e Overbeek [29] a partir de dados experimentais envolvendo a atração entre aglomerados macroscópicos em suspensões coloidais. Eles também sugeriram que o enfraquecimento da força seria causado pelo retardamento e propuseram que a lei de força deveria ser do tipo $F \propto 1/r^8$. Essa evidência experimental, o enfraquecimento das forças de van der Waals em uma escala atômica, é uma exclusividade das forças dispersivas. A força determinada por London vale no regime de curtas distâncias e a força para grandes distâncias foi determinada teoricamente por Casimir e Polder [8] que de fato confirmaram as conjecturas de Verwey e Overbeek. A verificação experimental direta da mudança na lei de potência $1/r^7 \rightarrow 1/r^8$ foi feita somente em 1968/69 [?] [30]

Nesta seção discutiremos um modelo simples para a força de van der Waals dispersiva não-retardada, proposto por London e também desenvolvido no livro de Miloni [4]. Inicialmente vamos discutir que tipo de restrição devemos considerar para que tenhamos esse caso. Para desprezarmos os efeitos do retardamento é necessário que o tempo que a luz gasta para percorrer toda a distância que separa os dois átomos, r/c , seja muito menor que o tempo característico da transição dominante do elétron $T = 2\pi/\omega_o$, onde $\omega_o = (E_1 - E_o)/\hbar \approx (mc^2/\hbar)\alpha^2$ é a frequência dominante. Aqui α representa a constante de estrutura fina cujo valor é $1/137$. A condição de não-retardamento $T \ll r/c$ se escreve como $r \ll 137a_o$, onde $a_o = \hbar c/\alpha mc^2$ é o raio de Bohr.

Esse modelo, proposto para átomos que inclusive não possuem dipolos permanentes, consiste em simular o dipolo flutuante por meio do movimento harmônico simples de um elétron com frequência angular igual a frequência dominante do átomo, levando em conta, é claro, somente o campo de dipolo produzido por esta carga em movimento. Para entendermos o modelo de London notemos, inicialmente, que a condição de não-retardamento permite imaginar que os osciladores executem oscilações rápidas, mantendo suas direções praticamente constantes em cada oscilação; deste modo calculamos a energia de interação entre os dipolos supondo direções fixas e em seguida fazemos a média em todas as direções espaciais. Para simular o dipolo oscilante do átomo (molécula), vamos

considerar o movimento de um elétron em relação à sua posição de equilíbrio. Denotando por $x_i(t)$ o deslocamento do elétron do átomo (molécula) i a partir de sua posição de equilíbrio e supondo que $|x_i(t)| \ll r$, podemos considerar que o campo elétrico gerado pelo átomo (molécula) i em um ponto qualquer do espaço é o campo do dipolo oscilante $\mathbf{p}_i(t) = ex_i(t) \hat{\boldsymbol{\mu}}_i$, onde $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i$ é o vetor unitário na direção fixa, embora arbitrária, do dipolo i . O campo de um dipolo oscilante $\vec{p}(t)$ no ponto P é dado por [31]:

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = p \left(t - \frac{r}{c} \right) \left\{ [3 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}) \hat{\mathbf{r}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) + \frac{k^2 (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\mu}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r} \right\}, \quad (1.2)$$

onde $k = \omega/c$ e $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário na direção do vetor $\mathbf{r}$ que une o dipolo ao ponto P . Desde que estamos interessados apenas no caso não-retardado, vamos reter na equação (1.2) somente o termo dominante proporcional a $1/r^3$. Além disso, vamos ignorar também o efeito do retardamento, de modo que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r^3 \epsilon_0} p(t) [3 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}) \hat{\mathbf{r}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}]. \quad (1.3)$$

Embora estejamos considerando somente dois dipolos, notemos que a análise a seguir vale para um número arbitrário de dipolos. O movimento do primeiro elétron é determinado pelo campo elétrico produzido nesse dipolo pelo segundo dipolo oscilante. Além disso, observemos que somente a componente da força na direção fixa do movimento é relevante. Obtemos então as componentes das forças aplicadas nos elétrons 1 e 2 respectivamente:

$$e\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1, t) \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 = \frac{e}{r^3} p_2(t) [3 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_1) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_2) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_2] \quad (1.4)$$

e

$$e\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2, t) \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 = \frac{e}{r^3} p_1(t) [3 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_1) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_2) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_2], \quad (1.5)$$

onde $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ é a distância entre os dois átomos.

Obtemos as equações de movimento para as cargas oscilantes simplesmente aplicando as leis de Newton e fazendo as projeções das forças e das acelerações de cada elétron nas direções fixas dos movimentos $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{\mu}}_2$:

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_o^2 x_1(t) = K_{12} x_2(t), \quad (1.6)$$

e

$$\ddot{x}_2(t) + \omega_o^2 x_2(t) = K_{12} x_1(t), \quad (1.7)$$

onde os termos que contêm os quadrados das freqüências nas equações acima correspondem às forças restauradoras que mantêm o elétron ligado ao átomo e introduzimos ainda a grandeza K_{12} , definida por:

$$K_{12} = \frac{Q_{12}}{4\pi r^3} \left(\frac{e^2}{m} \right), \quad (1.8)$$

com o fator espacial de orientação Q_{12} definido por

$$Q_{12} = [3 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_1) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_2) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_2], \quad (1.9)$$

onde m é a massa e e é a carga do elétron. O sistema de equações (1.6) e (1.7) descreve o movimento de dois osciladores acoplados e pode ser resolvido com a introdução das coordenadas normais,

$$\eta_+(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (1.10)$$

$$\eta_-(t) = x_1(t) - x_2(t). \quad (1.11)$$

As equações de movimento para essas variáveis normais se desacoplam e são escritas na forma:

$$\ddot{\eta}_+ + \omega_+^2 \eta_+ = 0 \quad (1.12)$$

$$\ddot{\eta}_- + \omega_-^2 \eta_- = 0, \quad (1.13)$$

onde as freqüências normais são dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \sqrt{\omega_o^2 \mp K_{12}} \\ &= \omega_o \left[1 \mp \frac{K_{12}}{2\omega_o^2} - \frac{K_{12}^2}{8\omega_o^4} \pm \frac{K_{12}^3}{16\omega_o^6} - \frac{5K_{12}^4}{128\omega_o^8} + O\left(\frac{K_{12}^5}{\omega_o^{10}}\right) \right], \end{aligned} \quad (1.14)$$

desde que supusemos $K_{12} \ll \omega_o^2$. A quantização deste sistema de osciladores é imediata, visto que ele é formado por dois osciladores independentes de freqüências ω_+ e ω_- . A energia do estado fundamental é então dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\hbar}{2} (\omega_+ + \omega_-) \\ &= \hbar\omega_o \left[1 - \frac{K_{12}}{2\omega_o^2} - \frac{5K_{12}^4}{128\omega_o^8} + O\left(\frac{K_{12}^6}{\omega_o^{12}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Substituindo a equação (1.8) na equação (1.15) e identificando o potencial $U(r)$ com os termos dependentes de r de ordem mais baixa em potência de K_{12}/ω_o^2 obtemos:

$$\mathcal{U}(r) = \mathcal{E} - 2 \times \frac{1}{2} \hbar\omega_o = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \right)^2 \frac{Q_{12}^2 \hbar\omega_o \alpha^2}{8r^6}, \quad (1.16)$$

onde na equação anterior identificamos $e^2/m\omega_0^2$ com a polarizabilidade estática α do átomo. Dessa forma, vemos que a energia de interação de van der Waals entre dois átomos neutros, porém, polarizáveis corresponde ao deslocamento da energia de ponto zero causada pela interação coulombiana entre os átomos. Esse potencial determina uma força atrativa proporcional a $1/r^7$ entre dois átomos eletricamente polarizáveis. A presença da constante $\hbar$ revela a natureza quântica dessa força. Esse resultado para o potencial de interação torna-se mais expressivo se fizermos algumas identificações para permitir uma comparação com o resultado de London. Se Q_{12}^2 for substituído pelo fator quântico de orientação espacial e ω_0 for interpretado como a frequência da transição dominante, então a equação (1.16) coincidirá com o resultado de London.

1.3 A não-aditividade das forças de van der Waals dispersivas

É usual considerar que a energia de interação de um sistema de N partículas pode ser calculada a partir da energia dos pares, ou seja $E = \sum E_{ij}$, onde E é a energia total e E_{ij} é a energia do par de partículas ij . A aditividade das energias aos pares implica também na aditividade aos pares das forças que atuam sobre cada partícula. A força de van der Waals não satisfaz essa propriedade, isto é, a introdução de uma terceira partícula em um sistema que contém duas partículas faz com que a energia total do sistema tenha a contribuição das três partículas em conjunto. Referir-nos-emos a esta propriedade como a não-aditividade. Ela é geralmente discutida de um modo

relativamente complicado. Pode-se encontrar uma discussão detalhada dessa propriedade no livro de Langbein[32]. Também é possível estudar as propriedades da não-aditividade a partir do campo eletromagnético do vácuo quantizado [4]. Para discutir a não-aditividade das forças de van der Waals, Milonni calculou a energia de interação do dipolo induzido oscilante $\mathbf{p}$ com o campo eletromagnético livre quantizado. A energia média de um oscilador, digamos o i -ésimo dipolo, é dada por $\langle \mathcal{E}_i \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t) \rangle$. Os termos de terceira ordem são contribuições de três corpos, associadas ao tripleto i, j, l e representam os termos dominantes da não-aditividade das forças de van der Waals. Estes termos têm a forma

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle \propto \frac{\alpha^3}{r_{ij}^3 r_{il}^3 r_{jl}^3}, \quad (1.17)$$

onde α é a polarizabilidade estática dos átomos considerados idênticos.

Nesta seção, vamos generalizar o modelo desenvolvido no início da seção anterior para deduzir de um modo bem mais simples o resultado escrito acima (1.17)[12, 33]

Por simplicidade, vamos considerar apenas três átomos (moléculas) e calcular, como antes, a energia do estado fundamental. A parte dependente das distâncias $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ representará o potencial de interação. Além da energia oriunda das contribuições dos pares surgirá um termo associado à tríade de partículas. A introdução de um terceiro dipolo faz com que tenhamos mais uma equação e, em cada equação, mais um campo elétrico aplicado. As equações de movimento dos elétrons agora serão:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1(t) + \omega_o^2 x_1(t) &= K_{12}x_2(t) + K_{13}x_3(t) \\ \ddot{x}_2(t) + \omega_o^2 x_2(t) &= K_{12}x_1(t) + K_{23}x_3(t) \\ \ddot{x}_3(t) + \omega_o^2 x_3(t) &= K_{13}x_1(t) + K_{23}x_2(t),\end{aligned}\tag{1.18}$$

onde os coeficientes simétricos K_{ij} definem constantes de acoplamento entre os três osciladores carregados e são dados por:

$$K_{ij} = \frac{Q_{ij}}{4\pi\epsilon_o r_{ij}^3} \left(\frac{e^2}{m} \right),\tag{1.19}$$

onde $Q_{ij} = [3(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_i)(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_j) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}}_j]$. As equações (1.18) formam um sistema de equações acopladas e podem ser desacopladas com as coordenadas normais. Entretanto, para quantizarmos esse sistema, precisamos determinar somente as frequências dos modos normais de vibração. Com este fito, vamos substituir em (1.18) $x_i(t) = C_i \exp(i\omega t)$, $i = 1, 2, 3$. Representando o sistema na forma matricial obtemos

$$\begin{pmatrix} \omega_o^2 - \omega^2 & -K_{12} & -K_{13} \\ -K_{12} & \omega_o^2 - \omega^2 & -K_{23} \\ -K_{13} & -K_{23} & \omega_o^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{1.20}$$

Para que o sistema tenha soluções não-triviais é necessário que o determinante do sistema seja nulo. Definindo, por conveniência, $\beta = \omega_o^2 - \omega^2$ obtemos a seguinte equação algébrica:

$$\beta^3 - (K_{12}^2 + K_{23}^2 + K_{13}^2)\beta + 2K_{12}K_{13}K_{23} = 0.\tag{1.21}$$

Analogamente ao caso de dois átomos, após o desacoplamento, a energia do estado fundamental dos dipolos flutuantes é dada por:

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3),\tag{1.22}$$

onde as autofrequências ω_1, ω_2 e ω_3 são as raízes positivas da equação de autovalores. Em termos das raízes β_1, β_2 e β_3 da equação (1.21) essa energia pode ser rescrita na forma:

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega_o}{2} \left[\left(1 - \frac{\beta_1}{\omega_o^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\beta_2}{\omega_o^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{\beta_3}{\omega_o^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right].\tag{1.23}$$

Note que o termo entre colchetes na equação (1.23) é uma função simétrica das raízes β_1, β_2 e β_3 da equação (1.21) e, de acordo com o teorema das funções simétricas da teoria das equações algébricas [34], pode ser rescrita em termos só dos coeficientes da equação (1.21). Com esse intuito, consideremos a função

$$S = \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_3}, \quad (1.24)$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação do terceiro grau $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. Da teoria das equações algébricas sabemos que essas raízes satisfazem às seguintes identidades [34]:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1 \quad (1.25)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_2 \quad (1.26)$$

$$x_1x_2x_3 = -a_3. \quad (1.27)$$

Elevando (1.24) ao quadrado e usando a propriedade dada pela equação (1.25) obtemos, após reagrupar os termos:

$$\frac{1}{2}(S^2 - 3 - a_1) = \sqrt{(1-x_1)}\sqrt{(1-x_2)} + \sqrt{(1-x_1)}\sqrt{(1-x_3)} + \sqrt{(1-x_2)}\sqrt{(1-x_3)}. \quad (1.28)$$

Elevando então a última equação ao quadrado, usando as duas últimas propriedades dadas pelas equações (1.26), (1.27) e reagrupando os termos, obtemos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} (S^2 - 3 - a_1)^2 - 3 - 2a_1 - a_2 \right) = \sqrt{1 + a_1 + a_2 + a_3} S. \quad (1.29)$$

A equação acima é do quarto grau e as suas quatro raízes dependem somente dos coeficientes conhecidos de uma equação do terceiro grau. Façamos então duas observações: a primeira é que a equação (1.29) pode ser resolvida exatamente por meio de radicais e a segunda é que somente nos interessa uma das raízes; as outras três raízes são estranhas e foram introduzidas durante a dedução da equação acima. Quando os coeficientes a_1, a_2 e a_3 são nulos a equação (1.29) se reduz à $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} (S^2 - 3)^2 - 3 \right) = S$ cujas raízes são 3 e -1, sendo esta última uma raiz de multiplicidade igual a 3. Nesse ponto, vamos lembrar que não precisamos da solução completa da equação (1.29), mas somente da solução para pequenos valores de x_1, x_2 e x_3 , de modo que podemos escrever $S = 3 + \mu$ com μ sendo a única raiz simples, portanto próxima a zero, da equação abaixo:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} ((3 + \mu)^2 - 3 - a_1)^2 - 3 - 2a_1 - a_2 \right) = \sqrt{1 + a_1 + a_2 + a_3} (3 + \mu) \quad (1.30)$$

Para determinarmos a solução aproximada da equação (1.30) que nos interessa, notemos que é necessário reter todos os termos até a terceira ordem em relação às raízes x_1, x_2 e x_3 e que de acordo com as propriedades (1.25) os coeficientes a_1, a_2 e a_3 são respectivamente de primeira, segunda e terceira ordens em relação às mesmas raízes x_1, x_2 e x_3 :

$$S = 3 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{3}{16}a_3 - \frac{1}{8}a_1^2 - \frac{3}{16}a_1a_2 + \frac{1}{16}a_1^3 \quad (1.31)$$

Comparando as equações (1.23) e (1.24) podemos fazer as identificações:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\mathcal{E}}{\frac{\hbar\omega_o}{2}}, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= -\frac{1}{\omega_o^4} (K_{12}^2 + K_{23}^2 + K_{13}^2) \\ a_3 &= \frac{2}{\omega_o^6} K_{12}K_{13}K_{23} \end{aligned} \quad (1.32)$$

obtemos,

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega_o}{2} \left[3 - \frac{1}{4\omega_o^4} (K_{12}^2 + K_{23}^2 + K_{13}^2) - \frac{3}{8\omega_o^6} K_{12}K_{13}K_{23} \right], \quad (1.33)$$

de modo que a energia de interação é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(r_{12}, r_{13}, r_{23}) &= \mathcal{E} - \frac{3}{2}\hbar\omega_o \\ &\approx -\frac{\hbar\omega_o}{8} \left[\left(\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_o} \right)^2 \left(\frac{Q_{12}^2}{r_{12}^6} + \frac{Q_{13}^2}{r_{13}^6} + \frac{Q_{23}^2}{r_{23}^6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_o} \right)^3 \frac{Q_{12}^2 Q_{13}^2 Q_{23}^2}{r_{12}^3 r_{13}^3 r_{23}^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Os três primeiros termos do lado direito da equação (1.34) representam as contribuições aditivas dos pares de osciladores. O último termo do lado direito é uma contribuição de três corpos à interação e por isso elimina a exclusividade da aditividade dos pares. O modelo dos dipolos flutuantes pode ser estendido facilmente para um sistema com N dipolos. Nesse caso devemos esperar que contribuições de N -corpos também estejam

presentes na energia total do sistema. De fato, procedendo analogamente ao caso $N = 3$ obteremos, em vez do sistema de equações (1.18), um sistema de N equações em que os segundos membros de cada equação contêm $N - 1$ termos. Determinado como antes as frequências normais, poderemos mostrar que a energia do estado fundamental dependerá de uma função S análoga a que foi definida pela equação (1.24), contendo N radicais. No caso geral, não é imediato determinar a função S em termos dos coeficientes da equação de autovalores e em seguida resolvê-la. Entretanto, podemos nos beneficiar do fato de que as raízes da equação de autovalores são pequenas e, antes de mais nada, expandir os radicais em série de potências.

$$S = N - \frac{1}{2} \sum x_i - \frac{1}{8} \sum x_i^2 - \frac{1}{16} \sum x_i^3 + \dots \quad (1.35)$$

Esses somatórios são as funções simétricas fundamentais e podem ser calculadas com a ajuda das fórmulas de Newton[34]. Agora é fácil perceber que teremos contribuições de N -corpos à energia do estado fundamental. Em geral, para um sistema de N partículas, a interação pode ser descrita como a superposição de pares mais a superposição das tríades e dipolos, etc. Para complementar notemos que as contribuições de ordem N são da forma $(\alpha/4\pi\epsilon_0 r^3)^N$.

1.4 Forças não-retardadas entre átomos com polarizabilidades elétrica e magnética

Vimos nas seções anteriores que as forças de van der Waals dispersivas não-retardadas entre átomos (moléculas) eletricamente polarizáveis podem ser estudadas no âmbito da mecânica quântica não-relativística ou mesmo em uma abordagem semi-clássica por meio de dipolos flutuantes. Tais forças se caracterizam por uma dependência do tipo $1/r^7$, onde r é a distância entre os dois átomos. Os efeitos do retardamento, entretanto, tornam-se importantes para distâncias entre átomos ainda no domínio molecular, podendo manifestar-se em uma escala macroscópica. Como já foi mencionado, a influência do retardamento nas forças dispersivas foi obtida pela primeira vez em 1948 por Casimir e Polder [8]. Basicamente eles mostraram que a força atrativa entre os átomos passa a ser proporcional a $1/r^8$. A força dispersiva entre corpos macroscópicos deve ser calculada com a força retardada (para uma discussão detalhada veja por exemplo Langbein[32]). Para o caso de dois corpos rarefeitos, a força entre estes pode ser determinada por uma integração direta da força entre os pares de átomos. Para corpos densos, no entanto, devemos considerar o efeito da não-aditividade. Apesar dos coeficientes numéricos dependerem desses efeitos

a integração dos pares fornece a dependência correta com a geometria [35]. Por exemplo, a força retardada por unidade de área entre duas regiões semi-infinitas preenchidas com materiais polarizáveis com faces paralelas e separadas por uma distância d é proporcional a $1/d^4$, consideremos ou não a não-aditividade das forças dispersivas. Os efeitos do retardamento e da não-aditividade são automaticamente levados em conta quando a energia de interação é calculada com o método da energia do ponto zero, introduzido em 1948 por Casimir [15]. Efetivamente, a força de Casimir padrão entre corpos macroscópicos nada mais é que a resultante das forças de van der Waals retardadas quando a não-aditividade é levada em conta.

A interação retardada entre átomos (moléculas) com polarizabilidades elétrica e magnética simultaneamente foi investigada inicialmente por Feinberg e Sucher [9] [10]. Eles consideraram relações de dispersão e determinaram a energia de interação para esse par de átomos. Denotando por α_i e β_i as polarizabilidades estáticas elétrica e magnética do átomo i , a energia de interação $U(r)$ é dada por:

$$U(r) = [-23(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + 7(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)] \frac{\hbar c}{4\pi r^7}. \quad (1.36)$$

Este resultado foi deduzido também por Boyer em 1974 [36], usando o método da energia do ponto zero. A interação entre átomos com as duas polarizabilidades só é conhecida, portanto, para grandes distâncias, isto é, no regime em que o efeito do retardamento é importante. Vamos estudar a energia de interação entre dois átomos com polarizabilidades de natureza diferente (elétrica e magnética) para distâncias pequenas, na mesma região válida para a interação dipolo-dipolo elétricos, equação (1.16). Nesta seção, vamos determinar a força de van der Waals dispersiva não-retardada entre um átomo eletricamente polarizável e um magneticamente polarizável, usando o modelo semi-clássico dos dipolos flutuantes. Deixamos o estudo mais rigoroso com a eletrodinâmica quântica para última seção deste capítulo.

No método dos dipolos flutuantes, já discutido na seção 1.3, simulamos o átomo polarizável eletricamente por uma carga elétrica e de massa m_e que oscila ao longo de uma direção fixa, porém arbitrária, definida pelo vetor unitário $\hat{u}_e$, de modo que o átomo é descrito pelo dipolo elétrico $\mathbf{p}(t) = ex_e(t)\hat{u}_e$, onde x_e representa a posição da carga ao longo do eixo a partir de sua posição de equilíbrio. O átomo polarizável magneticamente será representado por uma carga magnética g de massa m_g , oscilando em uma direção fixa, mas também arbitrária, definida pelo vetor unitário $\hat{u}_g$. Assim, esse átomo será representado por um dipolo magnético $\mathbf{m}(t) = gx_g(t)\hat{u}_g$. Cada dipolo gera campos elétricos e magnéticos em todo o espaço e também cada dipolo sofre a ação do campo elétrico ou magnético gerado pelo outro.

Os campos elétrico e magnético gerados por um dipolo elétrico oscilante em um ponto

do espaço são dados por [31]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & [3(\mathbf{p}(t^*) \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}(t^*)] \frac{1}{r^3} + [3(\dot{\mathbf{p}}(t^*) \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{p}}(t^*)] \frac{1}{cr^2} \\ & + [(\ddot{\mathbf{p}}(t^*) \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{p}}(t^*)] \frac{1}{c^2 r} \end{aligned} \quad (1.37)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{1}{cr^2} \dot{\mathbf{p}}(t^*) + \frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{p}}(t^*) \right] \times \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.38)$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição do ponto de observação em relação ao dipolo, $r = |\mathbf{r}|$ e $t^* = t - r/c$ é o tempo retardado. Os campos gerados por um dipolo magnético oscilante podem ser obtidos por meio das substituições $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ [31]. A força de Lorentz que age sobre o dipolo elétrico em um dado instante é dada por:

$$\mathbf{F}_e(\mathbf{r}_e, t) = e\mathbf{E}_g(\mathbf{r}_e, t) + \frac{e}{c} \mathbf{v}_e(t) \times \mathbf{B}_g(\mathbf{r}_e, t). \quad (1.39)$$

Do mesmo modo a força de Lorentz sobre o dipolo magnético é dada por

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{r}_g, t) = e\mathbf{B}_e(\mathbf{r}_g, t) - \frac{e}{c} \mathbf{v}_g(t) \times \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_g, t). \quad (1.40)$$

Agora projetamos as forças $\mathbf{F}_e$ e $\mathbf{F}_g$ nas direções fixas determinadas por $\hat{\mathbf{u}}_e$ e $\hat{\mathbf{u}}_g$. Lembremos ainda que o movimento oscilatório é caracterizado por forças restauradoras que geram frequências naturais ω_e e ω_g nos dipolos elétrico e magnético respectivamente. Desprezando os efeitos do retardamento obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\ddot{x}_e(t) + \omega_e^2 x_e(t) = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_g(\mathbf{r}_e, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e + \frac{e}{m_e c} \mathbf{v}_e(t) \times \mathbf{B}_g(\mathbf{r}_e, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e \quad (1.41)$$

$$\ddot{x}_g(t) + \omega_g^2 x_g(t) = \frac{g}{m_g} \mathbf{B}_e(\mathbf{r}_g, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_g + \frac{g}{m_g c} \mathbf{v}_g(t) \times \mathbf{E}_e(\mathbf{r}_g, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_g. \quad (1.42)$$

Retendo somente os termos dominantes nos campos elétrico e magnético para pequenas distâncias, podemos reescrever as equações acima na forma:

$$\ddot{x}_e(t) + \omega_e^2 x_e(t) = F(r) \dot{x}_g(t) \quad (1.43)$$

$$\ddot{x}_g(t) + \omega_g^2 x_g(t) = H(r) \dot{x}_e(t), \quad (1.44)$$

onde $F(r) = eg/(m_e cr^2) (\hat{\mathbf{u}}_g \times \hat{\mathbf{r}}_{eg}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e$ e $H(r) = eg/m_g cr^2 (\hat{\mathbf{u}}_e \times \hat{\mathbf{r}}_{eg}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_g$. As equações (1.43) e (1.44) formam um sistema acoplado de equações diferenciais. As frequências

normais para esse sistema podem ser determinadas do modo usual, procurando-se as soluções da forma $x_i(t) = C_i \exp(-i\omega t)$, onde C_i é uma constante complexa com $i = e, g$. Obtemos a seguinte equação algébrica:

$$\Omega^2 - [\omega_e^2 + \omega_g^2 - F(r)H(r)]\Omega + \omega_e^2\omega_g^2 = 0, \quad (1.45)$$

onde $\Omega = \omega^2$. As raízes Ω_1 e Ω_2 da equação acima satisfazem às relações:

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \omega_e^2 + \omega_g^2 - F(r)H(r) \quad (1.46)$$

e

$$\Omega_1\Omega_2 = \omega_e^2\omega_g^2. \quad (1.47)$$

Por conveniência vamos introduzir a quantidade auxiliar

$$S = (\omega_1 + \omega_2)^2 - (\omega_e + \omega_g)^2, \quad (1.48)$$

onde ω_1 e ω_2 são as raízes reais e positivas da equação (1.45) do quarto grau em ω . Usando as propriedades (1.46) e (??) obtemos:

$$S = -F(r)H(r) \quad (1.49)$$

e da equação (1.48) obtemos,

$$\omega_1 + \omega_2 = (\omega_e + \omega_g) \sqrt{1 + \frac{S}{(\omega_e + \omega_g)^2}}. \quad (1.50)$$

Agora, quantizando o sistema de osciladores desacoplados, podemos determinar a energia do estado fundamental, supondo também que $|S| \ll (\omega_e + \omega_g)^2$:

$$E_o = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2) \approx \frac{\hbar}{2}(\omega_e + \omega_g) + \frac{\hbar e^2 g^2}{4(\omega_e + \omega_g) m_e m_g c^2} \frac{Q_{eg}^2}{r^4} \quad (1.51)$$

$$+ \frac{\hbar}{2}(\omega_e + \omega_g) + \frac{\hbar}{4} \left(\frac{\omega_e \omega_g}{c^2} \right) \left(\frac{\omega_e \omega_g}{\omega_e + \omega_g} \right) \frac{\alpha \beta Q_{eg}^2}{r^4},$$

onde reescrevemos o último termo da equação acima, que representa a energia potencial da interação, em termos das polarizabilidades elétrica $\alpha = e^2/(m_e \omega_e^2)$ e magnética $\beta = g/(m_g \omega_g^2)$. A quantidade $Q_{eg}^2 = (\hat{\mathbf{u}}_g \times \hat{\mathbf{r}}_{eg}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_e$ é o fator de orientação cuja média deve ser convenientemente calculada. A força entre dois átomos (moléculas) polarizáveis, um

eletricamente e o outro magneticamente, é repulsiva e varia com a quinta potência do inverso da distância

$$\mathbf{F}(r) = \hbar \left(\frac{\omega_e \omega_g}{c^2} \right) \left(\frac{\omega_e \omega_g}{\omega_e + \omega_g} \right) \frac{\alpha \beta Q_{eg}^2}{r^5} \hat{\mathbf{r}}_{eg}. \quad (1.52)$$

O resultado acima destoa dos resultados familiares que envolvem o efeito do retardamento no comportamento das forças entre átomos ou entre átomos e uma parede. Em geral o expoente da lei de potência que caracteriza tais forças aumenta uma unidade, e.g., London determinou que a força entre moléculas polarizáveis eletricamente é proporcional a $1/r^7$ para pequenas distâncias e Casimir e Polder, para as mesmas moléculas e grandes distâncias determinaram uma força proporcional a $1/r^8$. Para as moléculas que estamos discutindo aqui a situação é bem diferente: a variação no expoente é igual a 3, revelando uma transição bem mais acentuada e que pode ser entendida no modelo a partir da observação que o campo elétrico (magnético) criado pelo dipolo oscilante magnético (elétrico) não contém a parte estática. Nosso resultado exige, para ser mais contundente, um cálculo baseado na eletrodinâmica quântica.

1.5 A eletrodinâmica quântica e o cálculo completo da força de van der Waals

Como vimos anteriormente, átomos (moléculas) eletricamente polarizáveis geram uma força de van der Waals dispersiva. Essa força, para pequenas distâncias não é influenciada pelo retardamento da propagação e pode ser estudada com a mecânica quântica não-relativística ou mesmo com um modelo semiclássico, como foi feito na seção anterior. Para grandes distâncias, entretanto, o retardamento torna-se importante. Todos esses aspectos, incluindo a transição que ocorre na lei de força, são devidamente justificados quando considerados sob o ponto de vista da eletrodinâmica quântica.

Nesta seção queremos estudar a força dispersiva de van der Waals entre um átomo (molécula) polarizável eletricamente e outro polarizável magneticamente na região de pequenas distâncias, sob o ponto de vista da eletrodinâmica quântica, bem como determinar o comportamento dessa força na região de transição. No nosso trabalho [14] fizemos o cálculo considerando uma molécula polarizável eletricamente e outra polarizável magneticamente. Este procedimento nos levou rapidamente à força que era importante determinar, por ser o único caso que ainda não havia sido investigado, entre as duas moléculas em questão. No entanto, na seção seguinte adotaremos um ponto de vista mais geral e consideraremos átomos (moléculas) que simultaneamente sejam polarizáveis elétrica e magneticamente. É claro que no final do cálculo destacaremos nosso resultado para este caso de força de van der Waals.

1.6 A força de van der Waals no caso geral

Consideremos um conjunto de átomos (moléculas) com polarizabilidades elétrica e magnética dependentes da frequência angular ω respectivamente iguais a $\alpha_j(\omega)$ e $\beta_j(\omega)$, localizados nos pontos $\mathbf{r}_j$, onde $j = 1, \dots, N$. Os átomos (moléculas) são neutros e não possuem momento de dipolo (ou quadrupolo) elétrico ou magnético permanentes. O campo eletromagnético quantizado, mesmo na ausência de quaisquer partículas, ou seja, no vácuo, não é nulo. Nesta situação, no entanto, o campo do vácuo é tediosamente indolente. A presença de partículas polarizáveis, porém, muda radicalmente esse quadro: elas distorcem o vácuo. Como veremos a seguir, são as correlações $\langle 0 | \mathbf{E}_{0k\lambda}(\mathbf{r}_A, t) \mathbf{E}_{0k\lambda}(\mathbf{r}_B, t) | 0 \rangle$ e $\langle 0 | \mathbf{E}_{0k\lambda}(\mathbf{r}_A, t) \mathbf{B}_{0k\lambda}(\mathbf{r}_B, t) | 0 \rangle$ não-nulas entre os operadores de campo elétrico e magnético em pontos diferentes do vácuo distorcido que geram as forças dispersivas de van der Waals. Essas distorções surgem como uma resposta aos dipolos elétricos e magnéticos induzidos nas partículas pelo próprio campo. Para calcularmos o valor esperado no vácuo da energia de uma dessas partículas é necessário decompor os campos elétrico e magnético em série de Fourier, visto que as polarizabilidades dependem da frequência $\omega = |\mathbf{k}|c$. Faremos essa decomposição no calibre de Coulomb definido por $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, escolhendo também, devido à ausência de cargas, $\varphi = 0$ para o potencial escalar. Nesse calibre, usando o sistema gaussiano de unidades, os campos elétrico e magnético são escritos na forma

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.53)$$

e

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.54)$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ é o potencial vetorial que satisfaz à equação da onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.55)$$

As soluções reais monocromáticas de vetor de onda $\mathbf{k}$ e frequência $\omega = |\mathbf{k}|c$ são dadas por:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \alpha(0)e^{-i\omega t} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \alpha^*(0)e^{i\omega t} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \quad (1.56)$$

onde a função $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ satisfaz à equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \mathbf{k}^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.57)$$

O campo elétrico quantizado do vácuo tem a forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} (2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}\lambda})^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k},\lambda}t} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) + c.h. \quad (1.58)$$

e o magnético:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k},\lambda}} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k},\lambda}t} \nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{r}) + c.h. \quad (1.59)$$

onde $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r})$ são as funções modais, o índice $\lambda = 1, 2$ representa a polarização e $c.h.$ significa o conjugado complexo do primeiro termo. Além disso, as funções modais satisfazem à seguinte relação de ortornormalidade:

$$\int \mathbf{A}_{\mathbf{k}'\lambda'}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{k} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(3)} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (1.60)$$

Uma situação simples, mas que será importante mais adiante, é o caso do vácuo sem partículas cuja solução $\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(o)}$ é dada por:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(o)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.61)$$

onde V é o volume de quantização e $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ é o vetor unitário de polarização.

O operador $\hat{a}_{\beta}(0)$ e seu conjugado hermitiano $\hat{a}_{\beta}^{\dagger}(0)$ têm os seguintes valores esperados no vácuo

$$\langle \hat{a}_{\beta}(0) \hat{a}_{\beta'}(0) \rangle = \langle \hat{a}_{\beta}^{\dagger}(0) \hat{a}_{\beta'}(0) \rangle = 0, \quad (1.62)$$

$$\langle \hat{a}_{\beta}(0) \hat{a}_{\beta}^{\dagger}(0) \rangle = \delta_{\beta\beta'}, \quad (1.63)$$

onde o índice β simboliza os índices $\mathbf{k}$ e λ .

A energia de um desses átomos é dada por:

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \langle \mathbf{p}_{i,\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}_i, t) \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \langle \mathbf{m}_{i,\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}_i, t) \rangle, \quad (1.64)$$

onde

$$\mathbf{p}_{i,k\lambda} = \alpha_i(\omega_k) \mathbf{E}_{k\lambda}(\mathbf{r}_i, t), \quad (1.65)$$

$$\mathbf{m}_{i,k\lambda} = \beta_i(\omega_k) \mathbf{B}_{k\lambda}(\mathbf{r}_i, t), \quad (1.66)$$

são os momentos de dipolos elétrico e magnético, respectivamente, induzidos no ponto $\mathbf{r}_i$. Substituindo os momentos de dipolos em (1.64), obtemos

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{k,\lambda} \langle \alpha(\omega) |\mathbf{E}_{k\lambda}(\mathbf{r}_i, t)|^2 \rangle - \frac{1}{2} \sum_{k,\lambda} \langle \beta(\omega) |\mathbf{B}_{k\lambda}(\mathbf{r}_i, t)|^2 \rangle \quad (1.67)$$

Posto que os valores esperados dos operadores de campo elétrico e magnético sejam nulos, os valores esperados dos seus quadrados não se anulam e conseqüentemente o valor esperado da energia também é diferente de zero. Substituindo as expansões dadas pelas equações (1.58) e (1.59) dos campos e usando as propriedades dadas pelas equações (1.62) e (1.63) obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_i \rangle = & -\frac{1}{2} \sum_{k\lambda} (2\pi\hbar\omega_{k\lambda}) \alpha(\omega_{k\lambda}) |\mathbf{A}_{k\lambda}(\mathbf{r}_i)|^2 \\ & -\frac{1}{2} \sum_{k\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{k\lambda}} \right) \beta(\omega_{k\lambda}) |\nabla \times \mathbf{A}_{k\lambda}(\mathbf{r}_i)|^2. \end{aligned} \quad (1.68)$$

As modificações devido à presença dos átomos podem ser obtidas a partir do princípio de superposição. O campo que induz dipolos nos átomos contém, além do campo do vácuo, os campos elétricos e magnéticos gerados por esses mesmos dipolos. Substituindo os campos (1.58) e (1.59) nas equações (1.65) e (1.66) acima obtemos os dipolos elétrico e magnético induzidos no átomo j :

$$\mathbf{p}_j = i \sum_{k\lambda} (2\pi\hbar\omega_{k\lambda})^{1/2} [\alpha(\omega_{k\lambda}) \hat{a}_{k\lambda}(0) e^{-i\omega_{k\lambda}t} \mathbf{A}_{k\lambda}(\mathbf{r}_j) + c.h.] \quad (1.69)$$

e

$$\mathbf{m}_j = i \sum_{k\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{k\lambda}} \right)^{1/2} [\beta(\omega_{k\lambda}) \hat{a}_{k\lambda}(0) e^{-i\omega_{k\lambda}t} \nabla \times \mathbf{A}_{k\lambda}(\mathbf{r}_j) + c.h.] \quad (1.70)$$

O j -ésimo dipolo elétrico oscilante gera campos da forma[37]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad (1.71)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \nabla \times \left[\frac{\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right]. \quad (1.72)$$

Analogamente, j-ésimo o dipolo magnético oscilante gera campos da forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \nabla \times \left[\frac{\mathbf{m} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right]. \quad (1.73)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{m} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.74)$$

Tendo em vista a equação (1.53), o campo elétrico total no ponto $\mathbf{r}$ é dado por

$$\begin{aligned} & i \sum_{\mathbf{k}\lambda} (2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) + c.h \\ = & i \sum_{\mathbf{k}\lambda} (2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{(o)}(\mathbf{r}) + c.h \\ & + i \sum_{\mathbf{k}\lambda} (2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{(p)}(\mathbf{r}) + c.h \\ & + i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{(m)}(\mathbf{r}) + c.h. \right], \end{aligned} \quad (1.75)$$

onde $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r})$ é o campo total, $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{(p)}(\mathbf{r})$ é o campo produzido pelos dipolos elétricos e $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{(m)}(\mathbf{r})$ é o campo produzido pelo dipolos magnéticos. Ao usarmos o princípio da superposição levamos em conta uma propriedade muito importante: na ausência de partículas as funções modais do campo do vácuo devem se reduzir à forma dada pela equação (1.61). Calculando os campos dos dipolos com a ajuda das equações (1.71) e (1.73) e substituindo na equação (1.75), podemos mostrar que as funções modais devem satisfazer às seguintes equações

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}_i) = & \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j \neq i} \alpha(\omega_{\mathbf{k}\lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \\ & + \beta(\omega_{\mathbf{k}\lambda}) \nabla_i \times \left(\frac{\nabla_j \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Esta equação pode ser resolvida iterativamente. Na ordem de aproximação mais baixa simplesmente considerando $\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda} \approx \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(o)}$ obtemos a energia em primeira ordem:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle^1 = & -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} (2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \alpha(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \left| \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(o)}(\mathbf{r}) \right|^2 \\ & -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k},\lambda}} \right) \beta(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \left| \nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(o)}(\mathbf{r}) \right|^2 \end{aligned} \quad (1.77)$$

Nesta ordem de aproximação a energia calculada não contém termos que dependam da distância entre os átomos e, portanto, não produzem uma interação entre eles. Entretanto, esses termos têm conseqüências físicas importantes: eles implicam em uma correção dos níveis atômicos do átomo causado pelo vácuo. Este efeito, quando relacionado ao campo elétrico do vácuo, é conhecido como deslocamento de Lamb. Entretanto, é importante chamar atenção para o correspondente efeito relacionado ao campo magnético do vácuo, ou seja, o deslocamento Lamb magnético.

Para calcularmos a energia em uma ordem superior, precisamos determinar as funções modais de ordem um. Para isso, vamos substituir no segundo membro da equação (1.76) a função $\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}(\mathbf{r})$ por seu valor no vácuo dado pela equação (1.61).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(1)}(\mathbf{r}_i) = & \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j \neq i} \left\{ \alpha(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{\mathbf{r}_{ij}} \right. \\ & \left. + \beta(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \nabla_i \times \left(\frac{\nabla_j \times \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{\mathbf{r}_{ij}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Agora vamos calcular a energia da i - ésimas partícula em segunda ordem

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} 2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}} \alpha(\omega_{\mathbf{k}}) \left| \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(1)}(\mathbf{r}_i) \right|^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k},\lambda}} \right) \beta(\omega_{\mathbf{k}}) \left| \nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k},\lambda}^{(1)}(\mathbf{r}_i) \right|^2. \quad (1.79)$$

observando em primeiro lugar que só estamos interessados na parte que depende de

$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Substituindo a equação (1.78) na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_i \rangle^{(2)} = & -\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} 2\pi \hbar \omega_k \alpha(\omega_k) \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(0)}(\mathbf{r}_i)^* \left[\sum_{j \neq i} \alpha(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right. \\
& \left. + \beta(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \left(\frac{\nabla_j \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) \right] \\
& - \text{Re} i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi \hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}, \lambda}} \right) \beta(\omega_k) \mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(0)}(\mathbf{r}_i)^* \left[\sum_{j \neq i} \alpha(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right. \\
& \left. + \beta(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \left(\frac{\nabla_j \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) \right] + \\
& \text{termos de ordem igual ou superior} \\
& \text{a três nas polarizabilidades}
\end{aligned} \tag{1.80}$$

ou, usando as equações de Maxwell podemos mostrar que os rotacionais triplos das funções modais podem ser simplificados. Fazendo isto obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_i \rangle^{(2)} = & -\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} 2\pi \hbar \omega_k \alpha(\omega_k) \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_i)^* \left[\sum_{j \neq i} \alpha(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(r) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right. \\
& \left. + \beta(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \left(\frac{\nabla_j \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) \right] \\
& - \text{Re} i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} 2\pi \hbar \omega_k \beta(\omega_k) \mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_i)^* \cdot \left[\sum_{j \neq i} \alpha(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(r) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{k^2} \beta(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \left(\frac{\nabla_j \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j) e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Substituindo as expressões para $\mathbf{A}_{\mathbf{k}, \lambda}^{(o)}(\mathbf{r}_j)$, na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle E_i \rangle^{(2)} = & -\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{2\pi \hbar \omega_k \alpha(\omega_k)}{V} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[\sum_{j \neq i} \alpha(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \left(\frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \right) \right. \\
& \left. + i\beta(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \left(\frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \right) \right] \\
& - \text{Re} i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{2\pi \hbar \omega_k \beta(\omega_k)}{V} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \left[\sum_{j \neq i} \alpha(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \left(\frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \right) \right. \\
& \left. - \frac{i}{k^2} \beta(\omega_{\mathbf{k}, \lambda}) \nabla_i \times \nabla_i \times \left(\frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \right) \right]. \quad (1.82)
\end{aligned}$$

Para fazer o desenvolvimento dos rotacionais na equação (1.82) vamos introduzir a identidade vetorial abaixo que pode ser facilmente demonstrada:

$$\nabla \times \left[\frac{\partial F(r)}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}} \right] = \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{e}}] + \frac{\partial F(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}} - \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} (\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{r}}), \quad (1.83)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário radial e $\hat{\mathbf{e}}$ é um vetor unitário arbitrário que consideraremos como os vetores unitários $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}$. Então podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \nabla_i \times \nabla_i \times (F(r_{ij}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}) = \\
\frac{\partial^2 F(r_{ij})}{\partial r_{ij}^2} [(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})^2 - 1] - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial F(r_{ij})}{\partial r_{ij}} [1 + (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})^2]. \quad (1.84)
\end{aligned}$$

Substituindo as fórmulas escritas acima em (1.82) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_i \rangle^{(2)} = & -\text{Re} \sum_{j \neq i} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{2\pi\hbar\omega_k \alpha_i(\omega_k)}{V} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij}} \left[\alpha_j(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_{ij}^2} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) [(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})^2 - 1] \right. \right. \\
& - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) [1 + (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})^2] \Big\} \\
& + i\beta_j(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda}) \Big] \\
& - \text{Re} i \sum_{j \neq i} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \frac{2\pi\hbar\omega_k \beta_i(\omega_k)}{V} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij}} \left[\alpha_j(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda} \right. \\
& - \frac{i}{k^2} \beta_j(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_{ij}^2} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) [(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})^2 - 1] \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) [1 + (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}\lambda})^2] \right\} \right]. \tag{1.85}
\end{aligned}$$

Vamos usar mais algumas identidades para fazer a soma sobre as polarizações:

$$\sum_{\lambda} (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda})^2 = \sum_{\lambda} (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda})^2 = 1 - (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2,$$

e

$$\sum_{\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot [\hat{\mathbf{r}}_{ij} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda})] = -2(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{k}).$$

Substituindo na equação (1.85) temos que:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_i \rangle^{(2)} = & -\text{Re} \sum_{j \neq i} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\pi\hbar\omega_k (\alpha_i(\omega_k) \alpha_j(\omega_k) + \beta_i(\omega_k) \beta_j(\omega_k))}{V} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij}} \\
& \left[\left\{ - \left(1 + (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial r_{ij}^2} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) \left[3 - (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right] \right\} \right] \\
& - 2 \text{Re} \sum_{j \neq i} \sum_{\mathbf{k}} i \frac{2\pi\hbar\omega_k (\alpha_i(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \beta_j(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) + \alpha_i(\omega_{\mathbf{k},\lambda}) \beta_j(\omega_{\mathbf{k},\lambda}))}{V} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij}} \\
& \left[2(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \left(\frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} \right) \right]. \tag{1.86}
\end{aligned}$$

Expandindo as derivadas e rearrumando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_i \rangle^{(2)} = & -\frac{2\pi\hbar}{V} \text{Re} \sum_{j \neq i} \sum_{\mathbf{k}} k^3 \omega_k (\alpha_i(\omega_k) \alpha_j(\omega_k) + \beta_i(\omega_k) \beta_j(\omega_k)) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} \\
& \left(1 + (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right) \left(\frac{1}{kr_{ij}} \right) + \left(\frac{i}{(kr_{ij})^2} - \frac{1}{(kr_{ij})^3} \right) \left(3 (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 - 1 \right) \\
& -2 \text{Re} \sum_{j \neq i} \sum_{\mathbf{k}} ik^3 \omega_k (\alpha_i(\omega_{k,\lambda}) \beta_j(\omega_{k,\lambda}) + \alpha_i(\omega_{k,\lambda}) \beta_j(\omega_{k,\lambda})) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} \\
& \left[(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \left(\frac{i}{kr_{ij}} - \frac{1}{(kr_{ij})^2} \right) \right]. \tag{1.87}
\end{aligned}$$

Devemos lembrar que faremos o volume V tender a infinito e que nesse limite o somatório em $\mathbf{k}$ pode ser escrito na forma $\sum_{\mathbf{k}} = (V/8\pi^3) \int dk k^2 d\Omega_k$. Assim sendo, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle E_i \rangle^{(2)} = & -\frac{2\pi\hbar}{V} \frac{V}{8\pi^3} \text{Re} \sum_{j \neq i} \int_0^\infty dk \oint d\Omega_k k^5 \omega_k (\alpha_i(\omega_k) \alpha_j(\omega_k) + \beta_i(\omega_k) \beta_j(\omega_k)) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} \\
& \left(1 + (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right) \left(\frac{1}{kr_{ij}} \right) + \left(\frac{i}{(kr_{ij})^2} - \frac{1}{(kr_{ij})^3} \right) \left(3 (\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 - 1 \right) \\
& -2 \text{Re} i \sum_{j \neq i} \int dk d\Omega_k k^5 \omega_k (\alpha_i(\omega_{k,\lambda}) \beta_j(\omega_{k,\lambda}) + \alpha_i(\omega_{k,\lambda}) \beta_j(\omega_{k,\lambda})) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ij}} \\
& \left[(\hat{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \left(\frac{i}{kr_{ij}} - \frac{1}{(kr_{ij})^2} \right) \right]. \tag{1.88}
\end{aligned}$$

Efetutando as integrações angulares, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle E_i \rangle^{(2)} = & -\frac{\hbar}{\pi c^6} \sum_{j \neq i} \int_0^\infty d\omega \omega^6 \left[(\alpha_i(\omega) \alpha_j(\omega) + \beta_i(\omega) \beta_j(\omega)) G\left(\frac{\omega r_{ij}}{c}\right) \right. \\
& \left. - (\alpha_i(\omega) \beta_j(\omega) + \alpha_i(\omega) \beta_j(\omega)) H\left(\frac{\omega r_{ij}}{c}\right) \right] \tag{1.89}
\end{aligned}$$

onde definimos as funções

$$G(x) = \frac{\sin 2x}{x^2} + \frac{2 \cos 2x}{x^3} - \frac{5 \sin 2x}{x^4} - \frac{6 \cos 2x}{x^5} + \frac{3 \sin 2x}{x^6} \tag{1.90}$$

e

$$H(x) = \frac{\sin 2x}{x^2} + \frac{2 \cos 2x}{x^3} - \frac{\sin 2x}{x^4}. \quad (1.91)$$

Vamos por conveniência expressar nossos resultados em termos da variável adimensional $x = \omega r/c$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_i \rangle^{(2)} = & -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \sum_{j \neq i} \int_0^\infty dx x^6 \left[\left(\alpha_i \left(\frac{cx}{r} \right) \alpha_j \left(\frac{cx}{r} \right) + \beta_i \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j \left(\frac{cx}{r} \right) \right) G(x) \right. \\ & \left. - \left(\alpha_i \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j \left(\frac{cx}{r} \right) + \alpha_i \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j \left(\frac{cx}{r} \right) \right) H(x) \right] \end{aligned} \quad (1.92)$$

Nessa forma já podemos antecipar que a dependência em r do potencial no caso retardado é $1/r^7$, pois nesse regime, devido à interferência destrutiva dos comprimentos de onda pequenos, ou seja das altas frequências, só as frequências pequenas contribuem. Então podemos considerar $x = 0$ nas polarizabilidades, fazendo com que o integrando não dependa mais de r .

A energia dada pela equação (1.92) representa potencial de interação para moléculas na situação mais geral, a saber aquela em que ambas possuem polarizabilidades elétrica e magnética. Vamos, agora, separar os limites retardado e não-retardado desse potencial. Para isso é necessário considerar um modelo que identifique as funções $\alpha(\omega)$ e $\beta(\omega)$. Usaremos a fórmula de Kramers-Heisenberg para o nível n da polarizabilidade elétrica [38]

$$\alpha_n(\omega) = \frac{2}{3\hbar} \sum_m \frac{\omega_{mn} |\mathbf{d}_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \quad (1.93)$$

e para a polarizabilidade magnética uma expressão análoga

$$\beta_n(\omega) = \frac{2}{3\hbar} \sum_m \frac{\omega_{mn} |\mathbf{m}_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \quad (1.94)$$

onde $\mathbf{p}_{mn}$ e $\mathbf{m}_{mn}$ representam os elementos de matriz dos operadores de momentos de dipolos elétrico e magnético do átomo entre os estados de energia m e n . As polarizabilidades apresentam pólos no eixo real, trazendo conseqüentemente divergências para a integração. Notemos, entretanto, que se considerarmos as larguras de linha devemos deslocar os pólos para baixo. Dessa forma, vemos que as integrais são de fato bem definidas. Para obtermos uma expressão mais fácil de ser analisada vamos girar o caminho de integração para o eixo imaginário. Usaremos as identidades abaixo:

$$x^6 G(x) = \Im \left((x^4 + 2ix^3 - 5x^2 - 6ix + 3) e^{2ix} \right) \quad (1.95)$$

$$x^6 H(x) = \Im \left((x^4 + 2ix^3 - x^2) e^{2ix} \right), \quad (1.96)$$

onde o símbolo $\Im$ significa que devemos tomar a parte imaginária, para rescrever a equação (1.92) em uma forma mais conveniente para os cálculos. Deste modo obtemos:

$$\begin{aligned} V(r) = & -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \sum_{j \neq i} \Im \int_0^\infty dx \left[\left(\alpha_i \left(\frac{cx}{r} \right) \alpha_j \left(\frac{cx}{r} \right) + \beta_i \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j \left(\frac{cx}{r} \right) \right) \right. \\ & (x^4 + 2ix^3 - 5x^2 - 6ix + 3) e^{2ix} \\ & \left. - \left(\alpha_i \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j \left(\frac{cx}{r} \right) + \alpha_i \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j \left(\frac{cx}{r} \right) \right) (x^4 + 2ix^3 - x^2) e^{2ix} \right] \quad (1.97) \end{aligned}$$

Fazendo a rotação para o eixo imaginário, onde escolhemos o caminho de integração no primeiro quadrante, obtemos:

$$\begin{aligned} V(r) = & -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \sum_{j \neq i} \int_0^\infty dx \left[\left(\alpha_i^R \left(\frac{cx}{r} \right) \alpha_j^R \left(\frac{cx}{r} \right) + \beta_i^R \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j^R \left(\frac{cx}{r} \right) \right) \right. \\ & (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) e^{-2x} \\ & \left. - \left(\alpha_i^R \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j^R \left(\frac{cx}{r} \right) + \alpha_i^R \left(\frac{cx}{r} \right) \beta_j^R \left(\frac{cx}{r} \right) \right) (x^4 + 2x^3 + x^2) e^{-2x} \right] \quad (1.98) \end{aligned}$$

onde as funções $\alpha_i^R(\omega)$ e $\beta_j^R(\omega)$ são dadas por:

$$\alpha_n^R(\omega) = \alpha_n(i\omega) = \frac{2}{3\hbar} \sum_m \frac{\omega_{mn} |\mathbf{d}_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 + \omega^2} \quad (1.99)$$

$$\beta_n^R(\omega) = \beta_n(i\omega) = \frac{2}{3\hbar} \sum_m \frac{\omega_{mn} |\mathbf{m}_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 + \omega^2} \quad (1.100)$$

Para distâncias grandes, caso em que os efeitos do retardamento não podem ser desprezados, observamos que as funções $\alpha_i^R(\omega)$ e $\beta_j^R(\omega)$ permanecem com seus valores praticamente iguais a $\alpha_i^R(0)$ e $\beta_j^R(0)$ respectivamente. Notemos que quando a variável x aumenta, fazendo com que essas funções se afastem de seus valores próximos à origem

a exponencial dada pela equação (1.98) torna-se muito pequena. O limite retardado pode ser determinado facilmente considerando que nesse caso as polarizabilidades podem ser calculadas em $\omega = 0$. Obtemos:

$$V(r) = -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \sum_{j \neq i} \left[(\alpha_i^R(0) \alpha_j^R(0) + \beta_i^R(0) \beta_j^R(0)) \int_0^\infty dx (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) e^{-2x} \right. \\ \left. - (\alpha_i^R(0) \beta_j^R(0) + \alpha_i^R(0) \beta_j^R(0)) \int_0^\infty dx (x^4 + 2x^3 + x^2) e^{-2x} \right] \quad (1.101)$$

As integrais na equação acima podem ser facilmente calculadas. A primeira vale $23/4$ e a segunda $7/4$. Substituindo esses resultados na equação (1.101) obtemos:

$$V(r) = -\frac{\hbar c}{4\pi r^7} \sum_{j \neq i} [23 (\alpha_i^R(0) \alpha_j^R(0) + \beta_i^R(0) \beta_j^R(0)) - 7 (\alpha_i^R(0) \beta_j^R(0) + \alpha_i^R(0) \beta_j^R(0))], \quad (1.102)$$

que coincide com o resultado de Feinberg e Sucher e Boyer[9], [10] e [39].

A obtenção do limite não-retardado requer uma pequena consideração, visto que temos contribuições de ordens diferentes em r . Por isso vamos separar os termos que contêm polarizabilidades do mesmo tipo dos termos que contêm polarizabilidades de tipos diferentes, escrevendo:

$$V_I(r) = -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \left(\frac{2}{3\hbar} \right)^2 \sum_{j \neq i} \int_0^\infty dx \left[\left(\sum_m \frac{\omega_{mn} |\mathbf{d}_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2} \sum_m \frac{\omega_{mn} |\mathbf{d}_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_m \frac{\omega_{mn} |\mathbf{m}_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 + \omega^2} \sum_m \frac{\omega_{mn} |\mathbf{m}_{mn}|^2}{\omega_{mn}^2 + \omega^2} \right) \right. \\ \left. (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 3) e^{-2x} \right] \quad (1.103)$$

e

$$V_{II}(r) = -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \left(\frac{2}{3\hbar} \right)^2 \sum_{j \neq i} \int_0^\infty dx \left(\sum_m \frac{\omega_{i,mn} |\mathbf{d}_{i,mn}|^2}{\omega_{mn}^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2} \sum_n \frac{\omega_{j,mn} |\mathbf{m}_{j,mn}|^2}{\omega_{mn}^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2} \right. \\ \left. + \sum_m \frac{\omega_{i,mn} |\mathbf{d}_{i,mn}|^2}{\omega_{i,mn}^2 + \omega^2} \sum_m \frac{\omega_{j,mn} |\mathbf{m}_{j,mn}|^2}{\omega_{j,mn}^2 + \omega^2} \right) \\ (x^4 + 2x^3 + x^2) e^{-2x} \quad (1.104)$$

No limite não-retardado só os termos de menor ordem em x contribuem para a integral, ou seja, os termos proporcionais a $\exp(-2x)$ em (1.103) e a $x^2 \exp(-2x^2)$ em (1.104), ou seja:

$$V_I(r) = -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \left(\frac{2}{3\hbar}\right)^2 \sum_{j \neq i} \int_0^\infty dx \left(\sum_m \frac{\omega_{i,mn} |\mathbf{d}_{i,mn}|^2}{\omega_{i,mn}^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2} \sum_m \frac{\omega_{j,mn} |\mathbf{d}_{j,mn}|^2}{\omega_{j,mn}^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2} + \sum_m \frac{\omega_{i,mn} |\mathbf{m}_{i,mn}|^2}{\omega_{i,mn}^2 + \omega^2} \sum_m \frac{\omega_{j,mn} |\mathbf{m}_{j,mn}|^2}{\omega_{j,mn}^2 + \omega^2} \right) 3e^{-2x} \quad (1.105)$$

e

$$V_{II}(r) = -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \left(\frac{2}{3\hbar}\right)^2 \sum_{j \neq i} \int_0^\infty dx \left(\sum_m \frac{\omega_{i,mn} |\mathbf{d}_{i,mn}|^2}{\omega_{i,mn}^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2} \sum_m \frac{\omega_{j,mn} |\mathbf{m}_{j,mn}|^2}{\omega_{j,mn}^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2} + \sum_m \frac{\omega_{i,mn} |\mathbf{m}_{i,mn}|^2}{\omega_{i,mn}^2 + \omega^2} \sum_m \frac{\omega_{j,mn} |\mathbf{d}_{j,mn}|^2}{\omega_{j,mn}^2 + \omega^2} \right) x^2 e^{-2x}. \quad (1.106)$$

Como o potencial de interação é uma soma de contribuições de pares e também uma soma nas frequências é significativo calcularmos o potencial para somente um par de moléculas e para uma dada frequência de transição. Temos então:

$$V_I(r) = -\frac{\hbar c}{\pi r^7} \left(\frac{2}{3\hbar}\right)^2 \omega_1 |\mathbf{d}_1|^2 \omega_2 |\mathbf{d}_2|^2 \int_0^\infty dx \frac{1}{\left(\omega_1^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2\right)} \frac{1}{\left(\omega_2^2 + \left(\frac{cx}{r}\right)^2\right)}. \quad (1.107)$$

Fazendo a integração e simplificando a expressão resultante obtemos:

$$\begin{aligned} V_I(r) &= -\frac{\hbar c}{r^6} \left(\frac{2}{3\hbar}\right)^2 |\mathbf{d}_1|^2 |\mathbf{d}_2|^2 \frac{1}{2c\omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2)} \\ &= -\frac{3\hbar}{r^6} \frac{\omega_1\omega_2\alpha_1\alpha_2}{2(\omega_1 + \omega_2)}, \end{aligned} \quad (1.108)$$

onde α_1 e α_2 são as polarizabilidades estáticas definidas por

$$\alpha_i = \frac{1}{\omega_i} \left(\frac{2}{3\hbar}\right) |\mathbf{d}_i|^2, \quad i = 1, 2.$$

e representamos as frequências ω_{mn} das moléculas por ω_1 e ω_2 . Para duas moléculas idênticas e supondo que existe uma transição dominante de frequência ω obtemos o potencial determinado por London:

$$V_I(r) = -\frac{3\hbar\omega\alpha^2}{4r^6}. \quad (1.109)$$

O segundo termo V_{II} para o caso não-retardado pode ser escrito na como:

$$V_{II}(r) = -\frac{\hbar}{r^4} \left(\frac{2}{3\hbar}\right)^2 \omega_1 |\mathbf{p}_1|^2 \omega_2 |\mathbf{m}_2|^2 \frac{1}{2c^2(\omega_1 + \omega_2)} \quad (1.110)$$

$$V_{II}(r) = -\frac{\hbar}{r^4} \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \alpha_1 \beta_2}{2c^2(\omega_1 + \omega_2)} \quad (1.111)$$

onde a polarizabilidade magnética é definida por:

$$\beta_i = \frac{1}{\omega} \left(\frac{2}{3\hbar}\right) |\mathbf{m}_i|^2 \quad (1.112)$$

O potencial acima descreve a interação entre duas moléculas polarizáveis uma eletricamente e outra magneticamente. Reproduzimos com a eletrodinâmica quântica a dependência em $1/r^4$ obtida com o modelo semiclássico dos dipolo flutuantes. A despeito da baixa intensidade da força obtida, acreditamos que seja possível sua verificação experimental. Além disso, notamos dois aspectos que podem ser relevantes nessa questão. O primeiro é a transição mais marcante do regime não-retardado para o regime retardado: Na mesma escala em que a força entre moléculas polarizáveis eletricamente cai por um fator $1/r$ na lei de potência a força entre moléculas de tipos diferentes cai por um fator $1/r^2$ mas alcançando a mesma intensidade da primeira. O segundo aspecto é a dependência com o cubo da frequência.

Capítulo 2

O efeito Casimir

As teorias quânticas de campo descrevem as propriedades das partículas elementares por meio de estados especiais. As partículas são entendidas como os *quanta* do campo e todas as grandezas fisicamente relevantes, como por exemplo a seção de choque de espalhamento, a taxa de produção de partículas, podem ser calculadas a partir dos operadores de campo e das equações dinâmicas válidas para esse campo. Ao mesmo tempo, nos deparamos com a idéia de um estado não-trivial onde não há nenhum *quantum* do campo, isto é, um estado sem partículas reais. Tal estado é o vácuo. Não seria absurdo esperar que esse estado fosse irrelevante para a interpretação dos resultados da teoria. O desenvolvimento da física, entretanto, mostrou exatamente o contrário e as propriedades do vácuo quântico passaram a ser estudadas com uma perspectiva mais realista. Somente quando o campo está definido em todo o espaço de Minkowski sem nenhuma partícula real presente ou qualquer outra perturbação é que podemos ignorar os efeitos macroscópicos de sua existência. Nesse caso o vácuo é estável e a amplitude de persistência no vácuo é exatamente igual a um. É claro que isto significa considerar que a energia do vácuo nessa situação é zero. Diagramaticamente, isto equivale a desconsiderar todas as bolhas de vácuo, ou seja, os diagramas onde não há linhas externas de modo que esses processos virtuais não têm nenhum efeito. Essa tranqüilidade desaparece quando campos externos são acoplados aos campos quânticos, ou quando há uma distorção do espaço de Minkowski, ou ainda quando há fronteiras materiais que impõem condições de contorno aos campos quantizados etc. Usaremos o índice superior A para especificar que uma determinada grandeza foi definida ou calculada nessas condições. Nesse caso a amplitude de persistência do vácuo deixa de ser igual a um. Representando o estado de vácuo por $|0\rangle$, podemos definir a amplitude de persistência no vácuo ou a amplitude de transição vácuo-vácuo da seguinte maneira: consideremos o estado inicial, em $t = -\infty$ como sendo o estado $|0\rangle$ então a probabilidade do sistema permanecer no estado fundamental em $t = +\infty$ é $\langle 0, t = +\infty | 0, t = -\infty \rangle^A = \langle 0_+ | 0_- \rangle^A$. Duas possibilidades podem

ocorrer: (i) o módulo dessa amplitude é igual a um, neste caso o sistema permanece no vácuo, mas a fase dessa amplitude reflete o fato de que sua energia é diferente de zero, (ii) o módulo da amplitude é menor do que um. Nesse caso há uma probabilidade não-nula de ocorrer uma transição do estado de vácuo para um estado contendo partículas reais. Podemos definir o funcional $W[A]$ por meio da relação [40]:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^A = e^{iW[A]}. \quad (2.1)$$

Alguns autores referem-se a esse funcional como a ação efetiva, entretanto, entendemos que esta denominação não é apropriada pois confunde-se com uma outra definição de ação efetiva que será considerada no capítulo 3 dessa tese. Adotaremos aqui o nome ação do vácuo na presença de condições externas ou simplesmente ação do vácuo para esse funcional.

Neste capítulo estamos interessados apenas no efeito Casimir, por isso, vamos considerar que os acoplamentos externos se restringem somente a condições de contorno impostas pela presença de corpos materiais ao campo eletromagnético. Escreveremos a amplitude de permanência no vácuo na forma:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^c = e^{iW[c]}, \quad (2.2)$$

onde na notação acima o índice c enfatiza o fato de que não há, neste caso, campo externo aplicado, mas somente condições de contorno. Em geral podemos representar essa amplitude por meio de uma integral funcional [40]

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^c = e^{iW[c]} = \int_{\mathcal{F}_c} D[\phi] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) d^4x \right] \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de lagrangiana do campo eletromagnético e $\mathcal{F}_c$ representa o espaço das funções que satisfazem às condições de contorno. Em geral, as condições de contorno exigem um tratamento baseado na própria densidade de lagrangiana do campo. Mas para simplificar a discussão consideraremos condições de contorno que permitem fazer uma equivalência com o campo escalar sem massa. Mais adiante, quando estudarmos a caixa retangular, veremos que é imediato tratar o caso mais geral. A integral funcional que aparece na equação (2.3) pode ser convenientemente calculada no espaço euclidiano, fazendo uma rotação para o eixo imaginário. Obtemos então:

$$e^{iW[c]} = \int_{\mathcal{F}_c} D[\phi] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int \phi (-\square_E) \phi d^4x \right], \quad (2.4)$$

onde definimos o operador $\square_E = \partial_\tau^2 + \nabla^2$ ou, tomando o logaritmo,

$$W[c] = \ln \int_{\mathcal{F}_c} D\phi e^{-\frac{1}{2} \int d\tau d\mathbf{x} \phi (-\square_E) \phi} \quad (2.5)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \det (-\square_E | F_c) \quad (2.6)$$

a energia do vácuo confinado é então dada por:

$$\begin{aligned} E[c] &= -\frac{1}{2} \frac{W[c]}{T_E} \\ &= \frac{1}{T_E} \ln \det (-\square_E | F_c), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde T_E , o tempo euclidiano, deve ser considerado no limite de tempo infinito no final dos cálculos.

A integração funcional nos leva, para o caso de um campo escalar sem massa, rapidamente ao cálculo do determinante do operador $-\square_E$. Na próxima seção veremos como este determinante é calculado com o método da função zeta. Albuquerque [41], levando em conta a regularização que obrigatoriamente é feita nos dois casos, demonstrou que esse método é equivalente ao método da soma de modos usado por Casimir em 1948.

A seguir vamos calcular o efeito Casimir para os três casos mencionados acima e que serão importante para nós.

2.1 O efeito Casimir a temperatura zero

O efeito Casimir se manifesta quando condições de contorno confinam parte do campo eletromagnético em uma região do espaço. É natural supor que os fenômenos físicos que ocorrem nessa região não sejam capazes de gerar partículas reais e por isso correspondam ao caso em que a amplitude de permanência no vácuo tem módulo um e equivale, portanto, a dizer que $W[A]$ é real.

O efeito Casimir será analisado nesta e na próxima seção para o campo eletromagnético, por isso vamos apresentar as equações do campo e discutir em termos gerais o processo de construção do espaço de funções, essencial para o cálculo da integração funcional. O campo eletromagnético em uma região do espaço, finita ou infinita, onde não há cargas

livres deve satisfazer às equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (2.11)$$

onde estamos usando o sistema gaussiano de unidades.

É mais conveniente introduzirmos o potencial vetor $\mathbf{A}$ por meio da relação

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.12)$$

e o potencial escalar ϕ definido por

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (2.13)$$

Substituindo os campos elétrico e magnético na equação (2.10) e desenvolvendo os termos obtemos

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.14)$$

Esta equação adquire uma forma extremamente simples se adotarmos o calibre de Coulomb definido por $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Além disto, podemos também fazer $\phi = 0$, o que é sempre possível na ausência cargas. Obtemos, após a substituição dessas condições em (2.14), a equação

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.15)$$

de modo que os campos elétrico e magnético estarão bem determinados pelas equações (2.12) e (2.13) se o potencial vetor, satisfazendo à equação (2.15), for determinado. Separando as variáveis $\mathbf{r}$ e t , podemos procurar soluções de (2.15) na forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \alpha(t) \mathbf{A}_o(\mathbf{r}). \quad (2.16)$$

Substituindo em 2.15 podemos mostrar que $\mathbf{A}_o$ satisfaz à equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_o(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}_o(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.17)$$

e $\alpha(t)$ satisfaz

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2 \alpha(t) = 0 \quad (2.18)$$

com $k = \omega/c$

A solução geral para os campos elétrico e magnético é portanto

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum \frac{1}{c} [\dot{\alpha}(t) \mathbf{A}_o(\mathbf{r}) + \dot{\alpha}^*(t) \mathbf{A}_o^*(\mathbf{r})], \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum \alpha(t) \nabla \times \mathbf{A}_o(\mathbf{r}) + \alpha^*(t) \nabla \times \mathbf{A}_o^*(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

onde usamos o princípio da superposição e somamos o complexo conjugado para obtermos soluções reais.

As condições de contorno impostas ao campo eletromagnético quando corpos materiais estão presentes afetam a parte espacial da solução, isto é, são transmitidas para a função $\mathbf{A}_o(\mathbf{r})$. Destarte, a solução dada pelas equações (2.19) e (2.20) só será efetivamente geral se as condições de contorno forem também homogêneas, permitindo a superposição de soluções. Casimir, em seu trabalho pioneiro de 1948 [15], considerou o campo eletromagnético confinado por placas metálicas neutras e paralelas e separadas por uma distância d . Esse foi o ponto de partida para inúmeros outros trabalhos sobre esse efeito. Nessa tese vamos destacar o trabalho de Boyer [39] que considerou o campo eletromagnético confinado entre uma placa perfeitamente condutora e uma outra infinitamente permeável e Lukozs [42] que considerou o campo eletromagnético confinado em uma caixa retangular. Em todos estes problemas devemos, em primeiro lugar especificar as condições de contorno que devem ser impostas ao campo eletromagnético na presença de placas perfeitamente condutoras ou infinitamente permeáveis.

2.1.1 O efeito Casimir com placas metálicas

Consideremos placas metálicas infinitas e perfeitamente condutoras separadas por uma distância d . O campo eletromagnético deve satisfazer a condições de contorno sobre as placas perfeitamente condutoras, a saber:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{nas\ placas} = 0 \quad (2.21)$$

e

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{nas\ placas} = 0. \quad (2.22)$$

Lembrando que o potencial escalar ϕ foi igualado a zero e o potencial vetor para uma componente monocromática foi escrito na forma (2.16) e usando equação (2.13) podemos determinar as condições de contorno para o vetor $\mathbf{A}_o$.

$$\mathbf{A}_o \times \mathbf{n}|_{nas\ placas} = 0 \quad (2.23)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{A}_o \cdot \mathbf{n}|_{nas\ placas} = 0. \quad (2.24)$$

Escolhendo eixos cartesianos tais que o eixo OZ seja perpendicular às duas placas com uma em $z = 0$ e a outra em $z = d$, a condição de contorno (2.23) é reescrita na seguinte forma: as componentes tangenciais do campo $\mathbf{A}_o$ se anulam em $z = 0$ e $z = d$. A segunda condição de contorno não precisa ser considerada explicitamente porque ela é automaticamente satisfeita. Isto permite substituir o campo eletromagnético por um campo escalar sem massa que satisfaz às seguintes condições de contorno: $\phi(0) = \phi(d) = 0$. Finalmente fazemos a passagem para o espaço-tempo euclidiano onde deveremos determinar as autofunções do operador $-\square_E = -\partial_\tau^2 - \nabla^2$ que satisfazem às seguintes condições de contorno:

$$\phi(\tau, x, y, 0) = \phi(\tau, x, y, d) = 0. \quad (2.25)$$

A energia do vácuo eletromagnético confinado é dada então pela equação (2.7):

$$E(d) = 2 \lim_{T_E \rightarrow \infty} \frac{1}{T_E} \ln \det(-\square_E | F_c), \quad (2.26)$$

onde introduzimos o fator dois para levar em conta os dois estados de polarização do campo eletromagnético.

Assim, no espaço-tempo euclidiano temos de calcular um determinante de um operador elíptico. Há vários métodos para se calcular o determinante de operadores diferenciáveis. Uma excelente introdução pode ser encontrada em Leite [43] e uma discussão mais abrangente em Elizalde et al [44]. Aqui, vamos escolher o chamado método da função zeta generalizada introduzido na física por [45] e largamente utilizado em teoria quântica de campos [46, 47]. Para uma discussão interessante sobre a regularização analítica veja [48].

O método da função zeta generalizada consiste dos seguintes três passos: primeiro calculamos os autovalores do operador $\mathfrak{D}$ correspondentes às autofunções que satisfazem às condições de contorno apropriadas e escrevemos $\zeta(s; \mathfrak{D}) = \text{Tr}(\mathfrak{D})^{-s}$, segundo fazemos a continuação analítica de $\zeta(s; \mathfrak{D})$ a uma função meromórfica a todo o plano complexo s e finalmente calculamos o determinante $\det(\mathfrak{D} | \mathcal{F}_d) = \exp(-\partial \zeta(s=0; \mathfrak{D})/\partial s)$, ou

$$\ln \det(\mathfrak{D} | \mathcal{F}_d) = -\frac{\partial \zeta}{\partial s}(s=0; \mathfrak{D}). \quad (2.27)$$

E finalmente podemos escrever a energia do vácuo, explicitando o operador que nos interessa, em uma forma que exprime toda a força do método de regularização da função zeta:

$$E(d) = -2 \lim_{T_E \rightarrow \infty} \frac{1}{T_E} \frac{\partial \zeta}{\partial s}(s=0; -\square_E) \quad (2.28)$$

Não é difícil obter os autovalores do operador $-\square_E$ com as condições de contorno dadas pela equação (2.25):

$$\left\{ k_o^2 + k_1^2 + k_2^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \mid k_o, k_1, k_2 \in \mathbb{R}; n = 1, 2, \dots \right\}. \quad (2.29)$$

A função zeta associada a este operador e com os autovalores dados em (2.29) é então:

$$\begin{aligned} \xi(s; -\square_E) &= T_E L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{dk_o dk_1 dk_2}{(2\pi)^3} \left[k_o^2 + k_1^2 + k_2^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \right]^{-s} \\ &= \frac{T_E L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int K^2 dK \left[K^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \right]^{-s}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde L^2 é a área das placas e a integral tripla foi reduzida a uma integral simples após a introdução de coordenadas esféricas definidas por $K^2 = k_o^2 + k_1^2 + k_2^2$ que permite a integração imediata da parte angular. Em seguida, usando a representação integral da função beta de Euler:

$$\int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} (x^2 + a^2)^{\nu-1} = \frac{1}{2} a^{\mu+2\nu-2} B\left(\frac{\mu}{2}, 1 - \nu - \frac{\mu}{2}\right), \quad (2.31)$$

válida para $\text{Re}(\nu + \frac{\mu}{2}) < 1$ e $\text{Re} \mu > 0$ e lembrando que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ obtemos:

$$\xi(s; -\square_E) = \frac{T_E L^2}{4\pi^2} \left(\frac{\pi}{d}\right)^{3-2s} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \zeta_R(2s-3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-3}} \quad (2.32)$$

$$= \frac{T_E L^2}{8\pi^{3/2}} \left(\frac{\pi}{d}\right)^{3-2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \zeta_R(2s-3), \quad (2.33)$$

onde substituímos $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e identificamos a função zeta de Riemann. Lembrando que próximo à origem podemos escrever $\Gamma(s) = 1/s$ é fácil mostrar que $\left. \frac{d}{ds} \frac{G(s)}{\Gamma(s)} \right|_{s=0} = G(0)$, de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s}(s=0; -\square_E) &= \frac{T_E L^2}{8\pi^{3/2}} \left(\frac{\pi}{d}\right)^3 \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \zeta_R(-3) \\ &= \frac{T_E L^2 \pi^2}{720} \frac{1}{d^3}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde substituímos os valores da função gama e da função zeta $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ e $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$.

Das equações (2.28) e (2.34), concluímos que a energia de Casimir por unidade de área é dada por:

$$\frac{E(d)}{L^2} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{1}{d^3}. \quad (2.35)$$

Restaurando as constantes universais $\hbar$ e c , concluímos também que a pressão de Casimir é dada por:

$$\frac{F(d)}{L^2} = -\frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{E(d)}{L^2} \right) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{1}{d^4}. \quad (2.36)$$

A presença da constante de Planck neste resultado revela sua natureza quântica. Um outro aspecto marcante é ausência da constante de estrutura fina, mas isto não significa que o efeito Casimir existiria mesmo que o campo eletrônico não existisse ou se, mesmo existindo esse campo, estivéssemos em uma era onde o acoplamento fosse nulo. Não nos esqueçamos que sem o acoplamento com a matéria não poderíamos considerar as condições de contorno (2.21) e (2.22) ou qualquer outra. A constante de acoplamento, entretanto, se manifesta quando calculamos as correções radiativas ao efeito Casimir. Além disso, a força é atrativa. Poderíamos afirmar, açodadamente, que este comportamento da força é uma consequência da distribuição dos modos nas regiões fora e entre as placas. Os modos entre as placas são discretos enquanto que fora das placas os modos formam um contínuo; assim há mais modos fora do que entre as placas, fazendo com que surja uma pressão para dentro. Apesar de ser uma explicação verossímil e bastante intuitiva veremos que ela não é correta. Hushwater [49] mostrou que o caráter atrativo ou repulsivo está associado à redistribuição dos modos entre as placas.

Encerraremos esta seção, discutindo a pressão de Casimir dada pela equação (2.36) do ponto de vista da sua verificação experimental. Antes de mais nada substituímos os valores das constantes fundamentais $\hbar$ e c por seus respectivos valores numéricos e expressemos a distância d em unidades de μm . Obtemos a seguinte expressão para a pressão de Casimir:

$$\mathcal{P}_C = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{1}{d^4} = -\frac{0,013 \text{ dina}}{a^4 \text{ cm}^2}. \quad (2.37)$$

Esta força é muito pequena, mas pode ser medida experimentalmente. Sparnaay [50] em 1958 fez as primeiras medições desta força e concluiu que a previsão teórica de Casimir não estava em desacordo com seus resultados experimentais. As experiências diretas com condutores são difíceis de serem realizadas em laboratório e somente em 1997 Lamoreaux

[51] realizou a segunda experiência com condutores; Mohideen e Roy [52, 53] fizeram mais experiências com condutores e conseguiram melhorar ainda mais a precisão das medidas sobre a força de Casimir. Novas experiências estão sendo realizadas e já é possível verificar diversos efeitos que interferem na força de Casimir.

2.1.2 O efeito Casimir com placas de Boyer

Nesta secção vamos considerar o campo eletromagnético confinado entre uma placa perfeitamente condutora ($\epsilon \rightarrow \infty$) e outra infinitamente permeável ($\mu \rightarrow \infty$). Boyer estudou este sistema pela primeira vez e determinou a energia por unidade de área usando o formalismo da eletrodinâmica estocástica [39]. Por este motivo chamaremos este sistema de placas de Boyer. Apresentaremos a solução desse problema seguindo o método de regularização da função zeta usado por M V Cougo-Pinto et al [22]. O ponto de partida para as placas de Boyer é idêntico ao da secção anterior, isto é, vamos analisar a amplitude de transição vácuo-vácuo. Para a placa condutora usamos as condições de contorno (2.21) e (2.22). A diferença importante nesse caso está nas condições de contorno que serão impostas ao campo eletromagnético na placa infinitamente permeável. A componente tangencial à placa do campo magnético $\mathbf{B}$ e a componente perpendicular à placa do campo elétrico devem se anular [31]:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{n}|_{na\ placa} = 0 \quad (2.38)$$

e

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}|_{na\ placa} = 0 \quad (2.39)$$

Com as condições de contorno especificadas acima, ainda é possível tratar o campo eletromagnético como se fosse um campo escalar φ , satisfazendo à equação da onda e às seguintes condições de contorno, mas multiplicando o resultado final por dois para levar em conta as duas polarizações:

$$\phi(\tau, x, y, 0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial}{\partial z} \phi(\tau, x, y, 0) = 0, \quad (2.40)$$

onde consideramos a placa perfeitamente condutora em $z = 0$ e a placa infinitamente permeável em $z = d$. Os autovalores do operador $-\square_E$ associados ao nosso problema de contorno são portanto:

$$\left\{ k_o^2 + k_1^2 + k_2^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{d^2} \mid k_o, k_1, k_2 \in \mathbb{R}; n = 0, 1, 2, \dots \right\}, \quad (2.41)$$

e a função zeta é então dada por:

$$\begin{aligned} \xi(s; -\square_E) &= T_E L^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dk_o dk_1 dk_2}{(2\pi)^3} \left[k_o^2 + k_1^2 + k_2^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{d^2} \right]^{-s} \\ &= \frac{T_E L^2}{2\pi^2} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \int K^2 dK \left[K^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4d^2} \right]^{-s}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde L^2 é a área das placas, $K^2 = k_o^2 + k_1^2 + k_2^2$ e a integração na parte angular já foi feita. Usando a representação integral da função beta de Euler, equação (2.31), obtemos:

$$\xi(s; -\square_E) = \frac{T_E L^2}{4\pi^2} \left(\frac{\pi}{2d}\right)^{3-2s} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{n=\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-3}}. \quad (2.43)$$

Para expressar a soma do lado direito da equação acima em termos da função zeta de Riemman, vamos somar e subtrair a soma correspondente aos termos pares

$$\begin{aligned} \sum_{n=\text{impar}} \frac{1}{n^z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=\text{par}} \frac{1}{n^z} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta_R(z). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Substituindo a equação (2.44) na equação (2.43) e usando o fato que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, obtemos

$$\zeta(s; -\square_E) = \frac{T_E L^2}{8\pi^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2d}\right)^{3-2s} \frac{\Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)} \left(1 - \frac{2^3}{2^{2s}}\right) \zeta_R(2s-3). \quad (2.45)$$

Aplicando o mesmo artifício que foi usado na secção anterior obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial s}(s=0; -\square_E) &= \frac{T_E L^2}{8\pi^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2d}\right)^3 \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) (-7) \zeta_R(-3) \\ &= -\frac{7 T_E L^2 \pi^2}{8 \cdot 720} \left(\frac{1}{d^3}\right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

A energia por unidade de área é simplesmente dada pela equação (2.28):

$$\frac{E(d)}{L^2} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{720} \frac{1}{d^3} \quad (2.47)$$

Derivando e recuperando as constantes fundamentais $\hbar$ e c obtemos a pressão de Casimir:

$$\frac{F(d)}{L^2} = -\frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{E(d)}{L^2} \right) = \frac{7}{8} \frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{1}{d^4}. \quad (2.48)$$

A pressão de Casimir para as placas de Boyer é, ao invés da pressão atrativa nas placas de Casimir, repulsiva. Esse resultado torna-se mais interessante se lembrarmos que ele elimina a possibilidade da explicação simples e intuitiva, dada anteriormente, para o caráter atrativo da força entre as placas de Casimir baseada na contagem dos modos na região entre as placas e a região fora das placas.

Podemos ainda interpretar o resultado da equação (2.47) à luz do cálculo direto da energia de ponto zero. A energia de Casimir para as placas de Boyer $E_B(d)/L^2$ pode ser obtida a partir da energia de Casimir para as placas de Casimir $E_C(d)/L^2$. A energia do vácuo confinado entre placas de Boyer é dada por:

$$\mathcal{E}(\lambda) = \sum_{\substack{k,\sigma \\ \text{com c.c.}}}^{\infty} \frac{\hbar \omega_k}{2} \quad (2.49)$$

As frequências ω_k determinadas pelas condições de contorno (2.40) também aparecem nas frequências determinadas pelas condições (2.25) se a distância entre as placas for igual a $2d$, as frequências adicionais correspondem às frequências associadas às condições de contorno (2.25) com a distância igual a d . Podemos então escrever

$$\sum_{\substack{k,\sigma \\ \text{com c.c.} N}}^{\infty} \frac{\hbar \omega_k(d)}{2} = \sum_{\substack{k,\sigma \\ \text{com c.c.} D}}^{\infty} \frac{\hbar \omega_k(2d)}{2} - \sum_{\substack{k,\sigma \\ \text{com c.c.} D}}^{\infty} \frac{\hbar \omega_k(d)}{2} \quad (2.50)$$

onde o índice k no primeiro somatório é determinado pelas condições de contorno impostas ao campo e σ representa as polarizações do campo. Para calcularmos a energia de Casimir é necessário subtrair a energia que o vácuo teria nessas regiões sem as condições de contorno. Notemos que a subtração destas energias nos dois membros da equação (2.50) não interfere em sua validade. E assim poderíamos ter antecipado o resultado dado pela equação (2.47). De fato, levando em conta somente o fator numérico temos $-1/2^3 - (-1) = 7/8$ que reproduz inclusive o sinal correto. Portanto há uma equivalência entre placas de Boyer e dois conjuntos de placas de Casimir. Essa equivalência será verificada mais adiante neste capítulo e também no próximo.

2.1.3 A energia de Casimir para uma caixa retangular

Estudaremos agora o campo eletromagnético confinado em uma caixa perfeitamente condutora de lados a , b e c . Lukosz [42] resolveu este problema para o caso em que as faces da caixa são formadas por condutores perfeitos, a partir da soma de modos. Ruggiero et al [54] determinaram a energia de Casimir de uma caixa com faces perfeitamente condutoras, regularizando a soma de modos por meio da função zeta. Ferreira [55] determinou a energia de Casimir para a caixa retangular com algumas faces condutoras e outras infinitamente permeáveis. Os resultados obtidos são bem conhecidos, mas o cálculo do determinante com a técnica de regularização por meio da função zeta que nós utilizamos é original.

Neste caso já não podemos usar a equivalência entre o campo eletromagnético e um campo escalar. O vetor potencial que satisfaz às condições de contorno dadas pelas equações (2.21) e (2.22) nos lados da caixa é dado por

$$\begin{aligned} A_x(\vec{r}) &= \left(\frac{8}{V}\right)^{1/2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) a_x \\ A_y(\vec{r}) &= \left(\frac{8}{V}\right)^{1/2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) a_y \\ A_z(\vec{r}) &= \left(\frac{8}{V}\right)^{1/2} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) a_z \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde a_x , a_y , e a_z são os cossenos diretores da direção do vetor de onda $\mathbf{k}$, satisfazendo à condição $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$, $V = abc$ é o volume da caixa e

$$k_x = \frac{l\pi}{a}, \quad k_y = \frac{m\pi}{b}, \quad k_z = \frac{n\pi}{c}, \quad l, m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.52)$$

As autofreqüências associadas são

$$\omega_{lmn}^2 = \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2. \quad (2.53)$$

Podemos verificar diretamente que a função vetorial dada por (2.51) é a solução das equações de campo que satisfaz às condições (2.21) e (2.22). Para $l, m, n \neq 0$ há dois estados possíveis de polarização e para $l = 0$ ou $m = 0$ ou $n = 0$ há somente um estado de polarização. Estas restrições são conseqüências da condição de transversalidade impostas aos modos normais. Agora podemos determinar o espectro do operador euclidiano $-\square_E/F_{abc}$, onde o símbolo F_{abc} representa o conjunto de funções que satisfazem às condições de contorno.

$$k_o^2 + \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 \quad (2.54)$$

onde $k_o \in \mathfrak{R}$. A função zeta generalizada é então dada por:

$$\begin{aligned} \zeta(s, -\square_E) = & \frac{T_E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \left\{ 2 \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \left[k_o^2 + \left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \right]^{-s} \right\} \\ & + \frac{T_E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \left\{ 2 \sum_{l,m=1}^{\infty} \left[k_o^2 + \left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{-s} \right\} \\ & + \frac{T_E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \left\{ 2 \sum_{l,n=1}^{\infty} \left[k_o^2 + \left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \right]^{-s} \right\} \\ & + \frac{T_E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_o \left\{ 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[k_o^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \right]^{-s} \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Usando a representação da função beta de Euler (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} \zeta(s, -\square_E) = & \frac{T_E}{2\pi} \left\{ 2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \right]^{s - \frac{1}{2}}} \right\} \\ & + \frac{T_E}{2\pi} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{l,m=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{s - \frac{1}{2}}} \right\} \\ & + \frac{T_E}{2\pi} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{l,n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \right]^{s - \frac{1}{2}}} \right\} \\ & + \frac{T_E}{2\pi} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \right]^{s - \frac{1}{2}}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

ou introduzindo as funções de Epstein multidimensionais homogêneas que são definidas por

$$E_N(z; a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=1}^{\infty} (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_N n_N^2)^{-z}, \quad (2.57)$$

para $\text{Re } z > N/2$ e $a_1, a_2, \dots, a_N > 0$, podemos reescrever a função zeta dada pela equação

(2.56) na forma

$$\zeta(s) = \frac{T_E}{2\pi^{2s}} 2^{-\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}} \left[\left[2E_3\left(s-\frac{1}{2}; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right) + E_2\left(s-\frac{1}{2}; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right) \right] \right. \\ \left. E_2\left(s-\frac{1}{2}; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{c^2}\right) + E_2\left(s-\frac{1}{2}; \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right) \right] \quad (2.58)$$

As funções de Epstein homogêneas podem ser escritas em termos das funções de Epstein ampliadas que são definidas por

$$A_N(z; a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N = -\infty}^{\infty} (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_N n_N^2)^{-z} \quad (2.59)$$

também para $\text{Re } z > N/2$ e $a_1, a_2, \dots, a_N > 0$. A linha no somatório da equação acima significa que a combinação $n_1 = 0, n_2 = 0, \dots, n_N = 0$ não contribui para o somatório. As funções de Epstein ampliadas podem ser facilmente expressas em termos das funções de Epstein. Para $N = 3$ temos explicitamente

$$A_3(z; a_1, a_2, a_3) = 2^3 E_3(z; a_1, a_2, a_3) + 2^2 E_2(z; a_1, a_2) + 2^2 E_2(z; a_1, a_3) \\ + 2^2 E_2(z; a_2, a_3) + 2E_1(z; a_1) + 2E_1(z; a_2) + 2E_1(z; a_3). \quad (2.60)$$

Então podemos escrever a equação (2.58) como:

$$\zeta(s) = \frac{T_E}{2^3 \pi^{2s}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \left[\left[A_3\left(s-\frac{1}{2}; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right) - 2E_1\left(s-\frac{1}{2}; \frac{1}{a^2}\right) \right] \right. \\ \left. - 2E_1\left(s-\frac{1}{2}; \frac{1}{b^2}\right) - 2E_1\left(s-\frac{1}{2}; \frac{1}{c^2}\right) \right]. \quad (2.61)$$

Agora vamos usar uma fórmula de reflexão para as funções de Epstein ampliadas [44]. Notemos que a aplicação destas fórmulas equivale a fazer a continuação analítica das funções de Epstein.

$$A_N(z; a_1, a_2, \dots, a_N) = \frac{\pi^{-\frac{N}{2}+2s}\Gamma(\frac{N}{2}-s)}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_N} \Gamma(s)} A_N\left(\frac{N}{2}-z; a_1, a_2, \dots, a_N\right). \quad (2.62)$$

Então, a equação (2.61) pode ser reescrita na forma:

$$\zeta(s) = \frac{T_E}{2^3 \pi^{2s}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \left[\pi^{-\frac{5}{2}+2s} \Gamma(2-s) abc A_3(2-s; a^2, b^2, c^2) \right. \\ - \pi^{-\frac{3}{2}+2s} \Gamma(1-s) 2a E_1(1-s; a^2) \\ - \pi^{-\frac{3}{2}+2s} \Gamma(1-s) 2b E_1(1-s; b^2) \\ \left. - \pi^{-\frac{3}{2}+2s} \Gamma(1-s) 2c E_1(1-s; c^2) \right]. \quad (2.63)$$

A energia de Casimir é portanto:

$$W = \frac{1}{16} \left[\frac{abc}{\pi^2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(la^2 + mb^2 + nc^2)^2} - \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right]. \quad (2.64)$$

O resultado acima é a energia total de Casimir que coincide com o resultado obtido por Lukosz [42]. Podemos recuperar a energia e a pressão para as placas de Casimir se fizermos duas dimensões da caixa, por exemplo b e c tenderem para infinito. Nesse caso o último termo tende para zero e o único termo que tem limite finito no somatório é obtido com $m = n = 0$. Também notamos que é possível haver uma mudança de sinal se variarmos os lados a, b e c . Quando a caixa é simétrica, ou seja, para um cubo, a pressão de Casimir é repulsiva, e nesse sentido tem um comportamento análogo ao da esfera [56]. É intrigante pensarmos como as forças de van der Waals podem gerar nesses casos tais forças repulsivas.

2.2 O efeito Casimir a temperatura não-nula

Sabemos que em uma teoria quântica de campo há inevitavelmente partículas virtuais que são criadas e em seguida aniquiladas em um processo infundável. Essas partículas constituem o mar de partículas virtuais que apesar de não ser diretamente observável pode interagir com partículas reais e deixar suas impressões digitais no mundo macroscópico. Uma destas manifestações é o efeito Casimir[15] e que pode ser interpretado, em termos gerais, como o resultado das distorções no mar de partículas virtuais (vácuo) [57]. Neste capítulo estamos interessados nas distorções causadas por fronteiras quando a temperatura é diferente de zero. As intempéries causadas pelo aumento da temperatura fazem com que o mar de partículas virtuais, antes intáctil, crie vagas de partículas reais que interferem de uma maneira não-trivial nas manifestações do vácuo. As experiências atuais sobre o efeito Casimir permitem medidas com tal grau de precisão que é imprescindível obter diversas correções tais como: rugosidades, penetrabilidade no metal, temperatura não-nula [58], [59] [16], [60] para termos concordância com os dados experimentais.

2.2.1 A energia livre

Em uma teoria de campo a temperatura finita devemos considerar os modos do campo, que correspondem às partículas virtuais do mar e às partículas reais termalizadas. Para tratarmos tal sistema usaremos o formalismo de tempo imaginário [61, 62], bastante conveniente para sistemas em equilíbrio térmico. Pode-se usar também o formalismo de tempo real de Keldish-Schwinger [63, 62] ou o formalismo denominado de dinâmica dos campos

térmicos [64, 65]. Mas, para nossos propósitos o formalismo de tempo imaginário é o mais simples e o mais direto. A função de partição $\mathcal{Z}$ para uma teoria bosônica é dada por [61]:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int_{\text{periódico}} [D\phi] \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} \right), \quad (2.65)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de langrangiana da teoria, $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização infinita, mas sem conseqüências físicas, e periódico significa que a integral funcional deve ser calculada no domínio das funções que satisfazem à condição de periodicidade no tempo imaginário:

$$\phi(x, \vec{y}, z; 0) = \phi(x, y, z; \beta), \quad (2.66)$$

onde $\beta = T^{-1}$, o inverso da temperatura, é o comprimento periódico no eixo do tempo euclidiano. A energia livre de Helmholtz $F(\beta)$ relaciona-se à função de partição por meio da relação $F(\beta) = -\beta^{-1} \ln \mathcal{Z}(\beta)$. Além da condição de contorno periódica dada pela equação (2.66) devemos considerar condições de contorno que são determinadas pela geometria, pela natureza dos campos físicos e pelas propriedades das fronteiras inseridas no vácuo. Para as placas de Boyer podemos, em conseqüência de sua geometria plana, representar o campo eletromagnético por um campo escalar com condições de contorno que espelham as condições de contorno impostas ao campo eletromagnético. Escolhendo, como antes, coordenadas cartesianas de modo que o eixo OZ seja perpendicular às placas, com a placa perfeitamente condutora em $z = 0$ e a perfeitamente permeável em $z = d$, as condições de contorno para as oscilações do campo eletromagnético são dadas pelas equações (2.21) e (2.22) para $z = 0$ e (2.38) e (2.39) para $z = d$. Neste caso podemos utilizar a equivalência entre o campo eletromagnético e um campo escalar ϕ com condições de contorno convenientes, multiplicando o resultado final por dois para levar em conta as duas polarizações do campo. As condições de contorno formuladas acima para o campo escalar se escrevem como:

$$\phi(\tau, x, y, z = 0) = 0, \quad \frac{\partial \phi(\tau, x, y, z = d)}{\partial z} = 0 \quad (2.67)$$

onde τ é o tempo euclidiano. Assim escrevemos $\ln \mathcal{Z}(\beta)$ na forma:

$$\ln \mathcal{Z}(\beta) = \left(-\frac{1}{2} \right) \ln \det(-\partial_E | \mathcal{F}_d), \quad (2.68)$$

onde $\partial_E = \partial^2 / \partial \tau^2 + \nabla^2$ e o símbolo $\mathcal{F}_d$ representa as funções que satisfazem às condições (2.67). O cálculo do determinante que aparece na energia livre pode ser feito usando-se

mais uma vez o método da função zeta generalizada. Combinando a equação (2.27) com a definição de energia livre obtemos:

$$F(\beta) = -\beta^{-1} \frac{\partial \zeta(s=0; -\partial_E)}{\partial s}. \quad (2.69)$$

Os autovalores do operador $-\partial_E$ cujas autofunções satisfazem (2.66) e (2.67) são:

$$\left\{ k_x^2 + k_y^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{d^2} + \frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} \right\}^{-s}, \quad (2.70)$$

onde $k_x, k_y \in \mathbb{R}$, $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. A função zeta generalizada é então dada por:

$$\zeta(s, -\partial_E) = L^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \left[k_x^2 + k_y^2 + (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4d^2} + \frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} \right]^{-s}, \quad (2.71)$$

onde L^2 é a área das placas. Rearrmando os termos no último somatório, trocando as variáveis contínuas para coordenadas polares e integrando a parte angular, podemos reescrever a última equação como:

$$\zeta(s, -\partial_E) = \frac{L^2}{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty'} \int dk \, k \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4d^2} \right)^{-s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty'} \sum_{m=1}^{\infty} \int dk \, k \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4d^2} + \frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} \right)^{-s} \right], \quad (2.72)$$

onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ e a linha no somatório nos indica que o índice n do somatório toma somente valores ímpares. Usando a seguinte representação da função beta de Euler, fórmula 3.251.2 [66]:

$$\int_0^{\infty} dx \, x^{\mu-1} (x^2 + a^2)^{\nu-1} = \frac{1}{2} \mathcal{B}\left(\frac{\mu}{2}, 1 - \nu - \frac{\mu}{2}\right) a^{\mu+2\nu-2},$$

onde:

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

que é válida para $\Re(\nu + \mu/2) < 1$ e $\Re\mu > 0$, obtemos:

$$\zeta(s, -\partial_E) = \frac{L^2}{4\pi} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} \left[\left(\frac{\pi}{2d}\right)^{2-2s} \sum_{n=1}^{\infty'} n^{2-2s} + 2\pi^{2-2s} \sum_{n=1}^{\infty'} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{4d^2} + \frac{4m^2}{\beta^2}\right)^{1-s} \right]. \quad (2.73)$$

O somatório simples no lado direito da equação acima pode ser ligado diretamente à função zeta de Riemann ζ_R por meio de:

$$\sum_{n=1}^{\infty'} n^{2-2s} = (1 - 2^{2-2s}) \zeta_R(2s - 2). \quad (2.74)$$

A soma dupla na equação (2.73) pode ser expressa em termos de funções de Epstein que são definidas por [67, 68, 69]:

$$E_N^{M^2}(z; a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \dots \sum_{n_N=1}^{\infty} \frac{1}{(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_N n_N^2 + M^2)^2}, \quad (2.75)$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_N$ e $M^2 > 0$. Escrevendo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty'} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{4d^2} + \frac{4m^2}{\beta^2} \right)^{1-s} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{4d^2} + \frac{4m^2}{\beta^2} \right)^{1-s} - \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)^2}{4d^2} + \frac{4m^2}{\beta^2} \right)^{1-s}, \quad (2.76)$$

a equação (2.73) toma a forma:

$$\begin{aligned} \zeta(s, -\partial_E) &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} \frac{\pi^{2-2s}}{\pi^{2-2s}} \left(\frac{1}{2d} \right)^{2-2s} (1 - 2^{2-2s}) \times \zeta_R(2s-2) \\ &+ 2E_2 \left(s-1; \frac{1}{4d^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) - 2E_2 \left(s-1; \frac{1}{2d^2}, \frac{4}{\beta^2} \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

As funções de Epstein podem ser continuadas analiticamente a todo o plano complexo (veja por exemplo [69]). Para $N = 2$ e $M^2 = 0$ a continuação analítica é dada por

$$\begin{aligned} E_2(z; a_1, a_2) &= -\frac{a^{-z}}{2} \zeta_R(2z) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a_2}} \frac{\Gamma(z-1/2)}{\Gamma(z)} \times E_1 \left(z - \frac{1}{2}; a_1 \right) \\ &+ \frac{2\pi^2}{\Gamma(z) a_2^{z/2+1/4}} \times \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{m^{z-1/2}}{(a_1 n^2)^{(z-1/2)/2}} K_{1/2-z} \left(\frac{2\pi m}{\sqrt{a_2}} \sqrt{a_1 n^2} \right), \end{aligned}$$

onde $K_\nu(z)$ é uma função de Macdonald que é definida em todo o plano complexo. Fazendo as substituições apropriadas para z , a_1 e a_2 e usando o fato que a derivada da função $G(s)/\Gamma(s)$ em $s = 0$ é simplesmente $G(0)$ se a função G for analítica na origem, obtemos:

$$\zeta'(s=0, -\partial_E) = -\frac{7}{8} \times \frac{\pi^2 \beta L^2}{720d^3} + \frac{L^2 \sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \times \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{md}{n}\right)^{-3/2} \times \left[2^{-3/2} K_{3/2} \left(\frac{\beta \pi n m}{2d} \right) - K_{3/2} \left(\frac{2\beta \pi n m}{2d} \right) \right]. \quad (2.78)$$

A energia livre de Helmholtz por unidade de área é dada por:

$$\frac{F}{L^2} = \frac{7}{8} \times \frac{\pi^2}{720d^3} - \frac{\sqrt{2}}{\beta^{3/2}} \times \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{md}{n}\right)^{-3/2} \left[2^{-3/2} K_{3/2} \left(\frac{\beta \pi n m}{2d} \right) - K_{3/2} \left(\frac{2\beta \pi n m}{2d} \right) \right]. \quad (2.79)$$

O primeiro termo da equação (2.79) representa a energia de Casimir regularizada a temperatura nula obtida por Boyer (cite:Boyer74). Observe que este termo é $-7/8$ da energia de Casimir com condições de Dirichlet a temperatura nula. O segundo termo na equação (2.79) contém a contribuição dos efeitos térmicos e pode ser modificada em uma forma mais conveniente.

As funções de Macdonald $K_\nu(z)$ de índice semi-inteiro são dadas por (c.f., fórmula 8.468 em [66]):

$$K_{n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k! (n-k)! (2z)^k}. \quad (2.80)$$

Definindo a variável adimensional $\xi = d/\pi\beta = Td/\pi$ e usando da equação (2.80) podemos escrever a equação (2.79) na forma

$$\frac{F(\beta)}{L^2} = \frac{7}{8} \times \frac{\pi^2}{720d^3} - \frac{1}{\pi\beta^3} f(\xi), \quad (2.81)$$

onde $f(\xi)$ é uma função adimensional definida pela soma dupla:

$$f(\xi) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{m^3} + \frac{n}{2\xi m^2} \right) e^{-\frac{nm}{2\xi}} - \left(\frac{1}{m^3} + \frac{n}{\xi m^2} \right) e^{-\frac{nm}{\xi}} \right]. \quad (2.82)$$

A soma em n pode ser reduzida a uma série geométrica e pode ser facilmente calculada

$$f(\xi) = \frac{1}{4\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2\xi/n + \coth(n/2\xi)]}{n^2 \sinh(n/2\xi)}. \quad (2.83)$$

A equação anterior contém toda a informação termodinâmica sobre as excitações bosônicas confinadas entre as duas placas. Da equação (2.83) podemos obter facilmente o regime de baixa temperatura da energia livre. É suficiente fazer

$$\coth\left(\frac{n}{2\xi}\right) \approx 1, \quad \sinh\left(\frac{n}{2\xi}\right) \approx \frac{1}{2} \exp(n/2\xi), \quad (2.84)$$

e manter somente o termo correspondente a $n = 1$:

$$f(\xi \ll 1) \approx \left(1 + \frac{1}{2\xi}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\xi}\right).$$

O limite de baixa temperatura é portanto:

$$\frac{F(\beta)}{L^2} = \frac{7}{8} \times \frac{\pi^2}{720d^3} - \left(\frac{1}{\pi\beta^3} + \frac{1}{2d\beta^2}\right) e^{-\pi\beta/2d}. \quad (2.85)$$

No limite de baixa temperatura a energia livre de Helmholtz para o conjunto de placas de Casimir é dada por, ver e.g. Brown e Maclay[16]:

$$\frac{F(\beta)}{L^2} = -\frac{7}{8} \times \frac{\pi^2}{720d^3} - \frac{\zeta(3)}{2\pi\beta^3} - \left(\frac{1}{\pi\beta^3} + \frac{1}{d\beta^2}\right) e^{-\pi\beta/d}. \quad (2.86)$$

A ausência do termo proporcional a $1/\beta^3$ no caso das placas de Boyer é um aspecto curioso. A razão para isto ficará mais clara quando discutirmos a simetria de inversão de temperatura. O limite de altas temperaturas também pode ser obtido facilmente.

2.2.2 A pressão

A função adimensional $f(\xi)$ que aparece na composição da energia livre foi definida pela soma dupla (2.82). Cada uma dessas somas pode se reescrita na forma:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{m^3} + \frac{bn}{m^2}\right) e^{-nm/c} = -a\beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\kappa}^{\infty} d\omega \, \omega \ln(1 - e^{-\beta\omega}),$$

onde a , b , e c são constantes que satisfazem às seguintes condições $a = bc$ e $\kappa = 1/\beta c$. A energia livre pode ser escrita na forma

$$f(\xi) = -\beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\kappa_1}^{\infty} d\omega \, \omega \ln(1 - e^{-\beta\omega}) + \beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\kappa_2}^{\infty} d\omega \, \omega \ln(1 - e^{-\beta\omega}), \quad (2.87)$$

onde $\kappa_1 = \pi/2d$ e $\kappa_2 = \pi/d$. O primeiro termo na equação (2.87) corresponde às correções térmicas para duas placas infinitas, paralelas, perfeitamente condutoras e separadas por uma distância $2d$. O segundo termo corresponde às correções térmicas do mesmo arranjo, mas com as placas separadas por uma distância d . Desse modo, podemos verificar que as correções térmicas às placas de Boyer que estamos considerando é a diferença entre os dois conjuntos de placas de Casimir considerados acima. Lembrando que o termo correspondente à temperatura nula pode ser obtido com o mesmo procedimento, concluímos que essa equivalência continua sendo válida mesmo a temperatura não-nula.

A pressão nas placas é dada por menos a derivada da energia livre em relação à distância d entre as placas e pode, portanto, ser separada em uma contribuição de temperatura zero e correções térmicas, ou seja,

$$\mathcal{P}_{liq} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{240d^4} + \frac{1}{\pi^2\beta^4} \frac{df(\xi)}{d\xi}, \quad (2.88)$$

A contribuição térmica é então :

$$\mathcal{P}_{térmico} = -\frac{1}{\pi^2\beta^4\xi^3} \left[\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln(1 - e^{-n/2\xi}) - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln(1 - e^{-n/\xi}) \right]. \quad (2.89)$$

Agora vamos usar uma das várias versões da fórmula de Poisson. A versão que nos interessa em particular é [70]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} G(n) = -\frac{G(0)}{2} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dx G(x) \cos(2\pi lx). \quad (2.90)$$

Usando a identidade (2.90) na equação (2.89) e acrescentando o termo correspondente à contribuição de temperatura zero, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{liq} = & \frac{\pi^2}{45\beta^4} - \frac{1}{32\pi^4\beta^4} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \frac{1}{\xi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\coth(4\pi^2 m\xi)}{m^3} \\ & + \frac{1}{8\pi^4\beta^4} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \frac{1}{\xi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\coth(2\pi^2 m\xi)}{m^3} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Este resultado vale para qualquer temperatura. Note que o termo associado a temperatura zero está aparentemente ausente no resultado final. Isto acontece porque após a aplicação da fórmula de soma de Poisson, obtemos além do termo de Stefan-Boltzmann e dos dois somatórios, um termo com sinal oposto ao do termo de temperatura zero que se cancelam exatamente. Um cancelamento similar também ocorre no caso de férmions

sem massa confinados a temperatura finita e no limite de alta temperatura para o efeito Casimir usual. Entretanto pode-se mostrar sem dificuldade que, tomando a temperatura igual a zero, podemos reproduzir o termo de temperatura nula. O limite de alta temperatura pode ser facilmente obtido da equação (2.91). Aproximando convenientemente a cotangente hiperbólica nas somas e calculando as derivadas parciais segundas e mantendo somente os termos dominantes obtemos:

$$\mathcal{P}_{liq} = \frac{\pi^2}{45\beta^4} + \frac{3\zeta(3)}{16d^3\beta} + \frac{1}{2\pi d^3\beta} e^{-4\pi d/\beta} \times \left(1 + \frac{4\pi d}{\beta} + \frac{8\pi^2 d^2}{\beta^2}\right). \quad (2.92)$$

Uma simples integração da equação (2.91) nos dá uma outra representação da energia livre de Helmholtz, a saber:

$$\frac{F(\beta)}{L^2} = -\frac{\pi^2 d}{45\beta^4} + \frac{1}{32\pi^3\beta^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\coth(4\pi^2 m \xi)}{m^3} - \frac{1}{8\pi^3\beta^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\coth(2\pi^2 m \xi)}{m^3},$$

onde a constante de integração é determinada exigindo-se que no limite de altíssima temperatura obtenhamos o termo de Stefan-Boltzmann. Note que também podemos determinar essa constante de integração analisando o limite de baixa temperatura. O limite de alta temperatura da equação (2.91) é dado por:

$$\frac{F(\beta)}{L^2} \approx -\frac{\pi^2 d}{45\beta^4} + \frac{3\zeta(3)}{32\pi d^2\beta} + \left(\frac{1}{4\pi d^2\beta} + \frac{1}{d\beta^2}\right) e^{-4\pi d/\beta}. \quad (2.93)$$

A menos de sinais e fatores importantes, esses resultados são semelhantes àqueles obtidos para o caso atrativo nesse mesmo limite. Brown e Maclay [16] obtiveram a seguinte expressão para a energia livre por unidade de área no caso de placas infinitas, paralelas e condutoras:

$$\frac{F(\beta)}{L^2} \approx -\frac{\pi^2 d}{45\beta^4} - \frac{\zeta(3)}{8\pi d^2\beta} - \left(\frac{1}{4\pi d^2\beta} + \frac{1}{d\beta^2}\right) e^{-4\pi d/\beta}. \quad (2.94)$$

Em ambos os casos o termo dominante no limite de altíssima temperatura é o termo de Stefan-Boltzmann.

2.2.3 A simetria de inversão de temperatura

A simetria de inversão de temperatura é uma simetria que ocorre com a energia livre associada ao efeito Casimir a temperatura finita e depende da natureza das condições de

contorno impostas às oscilações quânticas do campo nas placas. De fato, Ravndal e Tollefssen [71] mostraram que a simetria de inversão de temperatura para um campo escalar sem massa depende de condições simétricas e que para um campo fermiônico sem massa depende de condições de contorno anti-simétricas. Um aspecto importante da simetria de inversão de temperatura é a possibilidade de relacionar o termo de Stefan-Boltzmann, correspondente a temperatura muito alta, com a energia de Casimir, correspondente a temperatura zero. A simetria de inversão de temperatura apareceu pela primeira vez no trabalho de Brown e Maclay [16] durante seu cálculo do efeito Casimir padrão a temperatura finita. Brown e Maclay foram capazes de mostrar que a energia livre pode ser escrita como a soma de três termos: uma contribuição à temperatura zero, i.e., a energia de Casimir a temperatura zero, uma contribuição de Stefan-Boltzmann proporcional à quarta potência da temperatura e uma contribuição não-trivial. Este termo não-trivial é dado por:

$$f_{\text{não-trivial}} = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2\pi\xi)^4}{[m^2 + (2\pi n\xi)^2]^2}, \quad (2.95)$$

onde ξ é uma variável adimensional definida por $\xi = d/\pi\beta = Td/\pi$. Esta função tem a seguinte propriedade:

$$(2\pi\xi)^4 f(1/4\pi\xi) = f(\xi), \quad (2.96)$$

que é a formulação matemática da propriedade de inversão de temperatura. As três contribuições podem ser fundidas em uma única soma dupla que se lê:

$$\tilde{f}(\xi) = -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(2\pi\xi)^4}{[m^2 + (2\pi n\xi)^2]^2}, \quad (2.97)$$

onde nessa soma dupla devemos excluir o termo correspondente a $n = m = 0$. Se fizermos $n = 0$ e somarmos em m com $m \neq 0$ obtemos o termo de Stefan-Boltzmann $-\pi^6\xi^4/45$. Por outro lado, se fizermos $m = 0$ e somarmos em n com $n \neq 0$ obtemos o termo de Casimir a temperatura zero $-\pi^2/720$. Como foi demonstrado por Ravndal e Tollefessen, a equação (2.97) obedece a mesma simetria sobre a inversão de temperatura que a original obtida por Brown e Maclay. Foi mostrado, também, por Gundersen e Ravndal que a energia livre redefinida associada a um campo fermiônico sem massa a temperatura finita submetido às condições de contorno do MIT satisfaz à relação (2.96) e por isso exibem a mesma simetria de inversão de temperatura. Tadaki e Takagi [72] calcularam a energia livre para um campo escalar sem massa satisfazendo condições de contorno de Neumann ou Dirichlet em ambas as placas e encontraram a mesma simetria. Entretanto, se o campo escalar obedece condições mistas perde-se a simetria. No caso de um campo escalar sem

massa a temperatura finita submetido a condições periódicas pode-se mostrar que a função de partição e, conseqüentemente a energia livre, podem ser escritas em uma forma simples de modo que a simetria de inversão de temperatura torna-se evidente [73].

No caso repulsivo que estamos tratando temos condições de contorno não-simétricas e esperaríamos que essa simetria não se manifestasse. No entanto, vamos mostrar que é possível estabelecer uma versão mais geral da simetria de inversão de temperatura que permite fazer a conexão entre os limites de baixa e alta temperatura [17]. Mostraremos ainda que a equivalência entre as placas de Boyer e dois conjuntos de placas de Casimir justifica intuitivamente essa conexão.

Nosso ponto de partida é a equação que define a função adimensional $f(\xi)$ e a identidade:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m^2 + b^2)^2} = \frac{\pi^2 [1/\pi b + \coth(\pi b)]}{2b^2 \sinh(\pi b)}, \quad (2.98)$$

onde faremos $b = n/2\pi\xi$. Usando a identidade acima podemos reescrever a equação (2.83) na forma:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{8\pi^4 \xi^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m (2\pi\xi)^4}{[n^2 + (2\pi\xi m)^2]^2} \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^4 \xi^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m (2\pi\xi)^4}{[n^2 + (2\pi\xi m)^2]^2} \right] - \frac{1}{16\pi^4 \xi^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^4}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde no somatório duplo o termo correspondente a $m = n = 0$ e o termo correspondente a $m = 0$ no somatório simples devem ser excluídos. Substituindo a expressão acima na equação (2.81) poderemos escrever a energia livre por unidade de área na forma:

$$\frac{F}{L^2} = -\frac{1}{16\pi^2 d^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m (2\pi\xi)^4}{[n^2 + (2\pi\xi m)^2]^2} \right]. \quad (2.100)$$

Agora fazendo a soma em m = par e m = ímpar, podemos separar a energia livre por unidade de área em duas partes

$$\frac{F}{L^2} = \frac{F_1}{L^2} - \frac{F_2}{L^2}, \quad (2.101)$$

onde F_1 e F_2 são dadas por:

$$\frac{F_1}{L^2} = -\frac{1}{128\pi^2 d^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(4\pi\xi)^4}{[n^2 + (4\pi\xi m)^2]^2} \right] \quad (2.102)$$

e

$$\frac{F_2}{L^2} = -\frac{1}{16\pi^2 d^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(2\pi\xi)^4}{[n^2 + (2\pi\xi m)^2]^2} \right]. \quad (2.103)$$

É possível então verificar diretamente que as energias livres F_1 e F_2 satisfazem às seguintes relações:

$$(4\pi\xi)^4 F_1 \left(\frac{1}{16\pi^2 \xi} \right) = F_1(\xi) \quad (2.104)$$

e

$$(2\pi\xi)^4 F_2 \left(\frac{1}{4\pi^2 \xi} \right) = F_2(\xi). \quad (2.105)$$

A equação (2.101) pode ser interpretada da seguinte maneira: Em primeiro lugar notamos que F_1/L^2 e F_2/L^2 podem ser interpretadas como as energias livres por unidade de área associadas a dois conjuntos de placas paralelas infinitas e condutoras uma separada por uma distância $2d$ e o outro separada por uma distância d . Deste modo podemos dizer que as simetrias dadas pelas equações (2.104) e (2.105) são induzidas por esta correspondência, conciliando também o resultado de Ravndal e Tollefsen [71] com o nosso, no sentido que as placas de Casimir exigem condições de contorno simétricas.

Observe que usando a identidade:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b^2 + l^2)^2} = \frac{\pi}{2b^2} \coth(\pi b) + \frac{\pi^2}{2b} \frac{1}{\sinh(\pi b)} \quad (2.106)$$

podemos escrever F_1 e F_2 como somas simples:

$$\frac{F_1}{L^2} = -\frac{\pi^2}{16d^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{4\xi^3}{n^3} \coth \frac{n}{4\xi} + \frac{\xi^2}{n^2} \frac{1}{\sinh^2(n/4\xi)} \right]. \quad (2.107)$$

e

$$\frac{F_2}{L^2} = -\frac{\pi^2}{16d^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{4\xi^3}{n^3} \coth \frac{n}{2\xi} + \frac{2\xi^2}{n^2} \frac{1}{\sinh^2(n/2\xi)} \right] \quad (2.108)$$

Como primeira aplicação vamos relacionar o termo de Stefan-Boltzmann, que é dominante no limite de altíssima temperatura e a energia de Casimir a temperatura nula. Para cada conjunto de placas de Casimir e no limite de altíssima temperatura podemos escrever

$$\frac{F_1(\infty)}{L^2} = -\frac{2}{45\beta^4}\pi^2 d \quad (2.109)$$

e

$$\frac{F_2(\infty)}{L^2} = -\frac{1}{45\beta^4}\pi^2 d. \quad (2.110)$$

e usando as equações de simetria (2.104) e (2.105) podemos escrever

$$\frac{F_1(0)}{L^2} = -\frac{\pi^2}{4^3 \times 90d^3} \quad (2.111)$$

e

$$\frac{F_2(0)}{L^2} = -\frac{\pi^2}{2^3 \times 90d^3}. \quad (2.112)$$

Usando então a equação (2.101) obtemos

$$\frac{F(0)}{L^2} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{720d^3}, \quad (2.113)$$

que é exatamente a energia de Casimir a temperatura zero associada ao nosso original conjunto de placas.

Como segunda aplicação de simetria de inversão de temperatura vamos agora estabelecer a relação entre as regiões de alta temperatura e baixa temperatura. Na região de alta temperatura as energias livres de Helmholtz F_1 e F_2 correspondentes a cada um dos conjuntos de placas de Casimir formadas por placas paralelas e condutoras separadas por distâncias $2d$ e d , são

$$\frac{F_1}{L^2} \simeq -\frac{2\pi^6\xi^4}{45d^3} - \frac{\zeta(3)\xi}{32d^3} - \left(\frac{\xi}{16d^3} + \frac{\pi^2\xi^2}{2d^3} \right) e^{-8\pi^2\xi} \quad (2.114)$$

e

$$\frac{F_2}{L^2} \simeq -\frac{\pi^6\xi^4}{45d^3} - \frac{\zeta(3)\xi}{8d^3} - \left(\frac{\xi}{4d^3} + \frac{\pi^2\xi^2}{d^3} \right) e^{-4\pi^2\xi}, \quad (2.115)$$

onde usamos os resultados obtidos por Brown e Maclay para o efeito Casimir padrão na região de alta temperatura. Note que, de acordo com a equação (2.101), se subtrairmos

a equação (2.114) da equação (2.115) obteríamos a energia livre de Helmholtz correspondente ao nosso conjunto de placas de Boyer. Usando as equações (2.104) e (2.105) obtemos

$$\frac{F_1}{L^2} = -\frac{\pi^2}{5750d^3} - \frac{\zeta(3)\pi^2\xi^3}{2d^3} - \left(\frac{\pi^2\xi^3}{d^3} + \frac{\pi^2\xi^2}{2d^3}\right)e^{-1/2\xi} \quad (2.116)$$

e

$$\frac{F_2}{L^2} = -\frac{\pi^2}{720d^3} - \frac{\zeta(3)\pi^2\xi^3}{2d^3} - \left(\frac{\pi^2\xi^3}{d^3} + \frac{\pi^2\xi^2}{d^3}\right)e^{-1/\xi}. \quad (2.117)$$

Finalmente, usando a equação (2.101), obtemos

$$\frac{F}{L^2} = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{720d^3} - \left(\frac{\pi^2\xi^3}{d^3} + \frac{\pi^2\xi^2}{2d^3}\right)e^{-1/2\xi}, \quad (2.118)$$

que é a aproximação de baixa temperatura para a energia livre para as placas de Boyer.

2.2.4 A caixa retangular a temperatura finita

A energia livre de Helmholtz para o campo de Maxwell dentro de uma caixa de paredes perfeitamente condutoras pode ser calculada com a técnica da função zeta generalizada [74]. A função zeta global para este problema é:

$$\mu^{2s}\zeta(s) = \mu^{2s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi p}{\beta}\right)^2 + \omega_{lmn}^2 \right], \quad (2.119)$$

onde as autofrequências ω_{lmn}^2 associadas aos modos normais permitidos no interior de uma caixa retangular de paredes perfeitamente condutoras de dimensões a , b , e c são dadas por:

$$\omega_{lmn}^2 = \left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2,$$

onde $l, m, n \in \{1, 2, \dots\}$. Para $l, m, n \neq 0$ há duas polarizações independentes e para $l = 0$ ou $m = 0$ ou $n = 0$ há somente um estado de polarização possível. As autofrequências para as quais dois entre os três inteiros l, m, n são simultaneamente nulos não são permitidas.

A função zeta generalizada para este problema é então:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) = & 2\mu^{2s} \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 + \left(\frac{2\pi p}{\beta} \right)^2 \right]^{-s} \\
& + 2\mu^{2s} \sum_{l,m=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{2\pi p}{\beta} \right)^2 \right]^{-s} \\
& + 2\mu^{2s} \sum_{l,n=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{l\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 + \left(\frac{2\pi p}{\beta} \right)^2 \right]^{-s} \\
& + 2\mu^{2s} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 + \left(\frac{2\pi p}{\beta} \right)^2 \right]^{-s} \quad (2.120)
\end{aligned}$$

O setor de temperatura zero pode ser separado fazendo-se $p = 0$

$$\begin{aligned}
2^2 \left(\frac{\pi}{\mu} \right)^{2s} \zeta(s) = & 2^4 E_4 \left(s; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) - 2^3 E_3 \left(s; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2} \right) \\
& + 2^3 E_3 \left(s; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) + 2^2 E_2 \left(s; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2} \right) \\
& + 2^3 E_3 \left(s; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) + 2^2 E_2 \left(s; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{c^2} \right) \\
& + 2^3 E_3 \left(s; \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) + 2^2 E_2 \left(s; \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2} \right). \quad (2.121)
\end{aligned}$$

Para regularizar essas somas é conveniente escrevê-las em termos das funções zeta ampliadas, definidas na equação (2.59). Obtemos então:

$$\begin{aligned}
2^2 \left(\frac{\pi}{\mu} \right)^{2s} \zeta(s) = & A_4 \left(s; \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) - A_2 \left(s; \frac{1}{a^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) \\
& - A_2 \left(s; \frac{1}{b^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) - A_2 \left(s; \frac{1}{c^2}, \frac{4}{\beta^2} \right) + 4E_1 \left(s; \frac{4}{\beta^2} \right). \quad (2.122)
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos regularizar a equação acima, usando a fórmula de reflexão (2.62) a

todos os termos com exceção do último que já está regularizado:

$$\begin{aligned}\zeta(s) = & \frac{\mu^{2s}abc\beta}{8\pi^2} \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(s)} A_4\left(2-s; a^2, b^2, c^2, \frac{\beta^2}{4}\right) - \frac{\mu^{2s}a\beta}{8\pi^2} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} A_2\left(1-s; a^2, \frac{\beta^2}{4}\right) \\ & - \frac{\mu^{2s}b\beta}{8\pi^2} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} A_2\left(1-s; b^2, \frac{\beta^2}{4}\right) - \frac{\mu^{2s}c\beta}{8\pi^2} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} A_2\left(1-s; c^2, \frac{\beta^2}{4}\right) \\ & + \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2s} \zeta_R(2s)\end{aligned}\quad (2.123)$$

onde $\zeta_R(2z)$ é a função zeta de Riemman e usamos o fato que $E_1(z; a) = a^{-s} \zeta_R(2z)$. Notemos que todos os termos do lado direito da equação (2.123) se anulam quando $s = 0$, com exceção do último, tendem a zero. Isto significa que $\zeta(0)$ é diferente de zero pois que $\zeta_R(0) = -(1/2) \ln(2\pi)$ e desse modo dando origem a um termo dependente de escala. A energia livre de Helmholtz para o campo eletromagnético confinado em uma caixa retangular é então dada por:

$$\begin{aligned}F(a, b, c, \beta) = & -\frac{abc}{16\pi^2} \sum_{l,m,n,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 + \frac{\beta^2p^2}{4}\right)^2} \\ & + \frac{a}{16\pi} \sum_{l,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(a^2l^2 + \frac{\beta^2p^2}{4}\right)^2} + \frac{b}{16\pi} \sum_{m,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(b^2m^2 + \frac{\beta^2p^2}{4}\right)^2} \\ & + \frac{c}{16\pi} \sum_{n,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(c^2n^2 + \frac{\beta^2p^2}{4}\right)^2} + \ln(\beta\mu).\end{aligned}\quad (2.124)$$

A presença de um termo de escala é um resíduo do processo de renormalização implementado pelo método da função zeta generalizada. Este termo, embora não crie dificuldades para o cálculo da pressão de Casimir por não depender das dimensões da caixa, pode ser eliminado se levarmos em conta que no limite de altíssima temperatura a densidade de energia livre deve ser exatamente igual ao termo de Stefan-Boltzmann. Assim a escolha correta para o fator de escala é $\mu = 1/\beta$. Finalmente podemos escrever a expressão da

energia livre

$$\begin{aligned}
 F(a, b, c, \beta) = & -\frac{abc}{16\pi^2} \sum_{l,m,n,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 + \frac{\beta^2 p^2}{4}\right)^2} \\
 & + \frac{a}{16\pi} \sum_{l,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(a^2 l^2 + \frac{\beta^2 p^2}{4}\right)^2} + \frac{b}{16\pi} \sum_{m,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(b^2 m^2 + \frac{\beta^2 p^2}{4}\right)^2} \\
 & + \frac{c}{16\pi} \sum_{n,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(c^2 n^2 + \frac{\beta^2 p^2}{4}\right)^2}. \tag{2.125}
 \end{aligned}$$

Vale apenas observar que esta expressão para a energia livre de Helmholtz reproduz corretamente todos os limites anteriormente estudados, a caixa a temperatura zero, placas de Casimir a temperatura nula e temperatura não-nula e o limite de altas temperaturas.

2.2.5 A inversão de temperatura

A determinação da simetria de inversão de temperatura para o sistema que estamos estudando é mais complicada do que no caso estudado anteriormente porque além do parâmetro β associado ao inverso da temperatura temos três parâmetros espaciais, a, b, c associados aos três lados da caixa retangular. A simetria de inversão de temperatura aparece claramente quando há somente um parâmetro espacial e, além disso, as condições de contorno impostas à dimensão espacial associada são simétricas em relação às condições de contorno impostas à dimensão da temperatura. Isto ocorre para condições de Dirichlet ou Neumann quando somente um parâmetro espacial está envolvido. Estendendo a idéia de simetria de inversão de temperatura, vamos mostrar que o sistema que estamos investigando possui esta simetria [18].

Inicialmente notemos que o denominador do primeiro termos da equação (2.125) pode ser reescrito como $a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 = k^2 (a^2 q^2 + b^2 r^2 + c^2 t^2)$ onde $\{q, r, t\}$ é uma seqüência de três inteiros primos entre si e k é o fator comum de $\{l, m, n\}$. Para a seqüência $\{q, r, t\}$ definimos um comprimento característico $d_{\{q,r,t\}}$ por $d_{\{q,r,t\}}^2 = a^2 q^2 + b^2 r^2 + c^2 t^2$. Também definimos a variável adimensional $\xi_{\{q,r,t\}} = 2d_{\{q,r,t\}}/\beta$. Os demais termos da equação (2.125) podem ser tratados de uma forma mais simples. Por exemplo, para o segundo termo definimos $\xi_a = 2a/\beta$. Podemos somar os termos da equação (2.125) fazendo o seguinte reordenamento: $\sum_{lmn=-\infty}^{\infty} \rightarrow \sum_{\{q,r,t\}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}$. A energia livre dada pela

equação (2.125) pode então ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{F(a, b, c)}{abc} = & -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{\{qrt\}} \sum_{k,p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{d_{\{q,r,t\}}^4} \frac{\xi_{\{q,r,t\}}^4}{(k^2 \xi_{\{q,r,t\}}^2 + p^2)^2} \\ & + \frac{1}{16\pi a^2 bc} \sum_{l,p=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_a^2}{(l^2 \xi_a^2 + p^2)} \\ & + \frac{1}{16\pi ab^2 c} \sum_{m,p=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_b^2}{(m^2 \xi_b^2 + p^2)} \\ & + \frac{1}{16\pi abc^2} \sum_{n,p=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_c^2}{(n^2 \xi_c^2 + p^2)}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

O limite de temperatura zero da equação (2.126) pode ser obtido facilmente notando que quando $\beta \rightarrow 0$ os parâmetros adimensionais $\xi_{\{q,r,t\}}$, ξ_a , ξ_b e ξ_c tendem a zero e conseqüentemente somente os termos correspondentes a $p = 0$ poderão contribuir. Em seguida voltamos ao conjunto inicial de índices para obtermos o resultado de Lukosz.

Agora podemos analisar a inversão de temperatura. Com esse objetivo, vamos definir as seguintes funções:

$$F_{\{qrst\}}(\xi_{\{q,r,t\}}) = -\frac{abc}{16\pi^2} \sum_{k,p=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_{\{q,r,t\}}^4}{(k^2 \xi_{\{q,r,t\}}^2 + p^2)^2}, \quad (2.127)$$

e

$$F_a(\xi_a) = \frac{1}{16\pi} \sum_{l,p=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_a^2}{(l^2 \xi_a^2 + p^2)}. \quad (2.128)$$

e expressões similares para $F_b(\xi_b)$ e $F_c(\xi_c)$. Em termos dessas funções a densidade de energia pode ser escrita na forma

$$\frac{F}{V} = \sum_{\{qrst\}} \frac{F_{\{qrst\}}(\xi_{\{q,r,t\}})}{d_{\{q,r,t\}}^4} + \frac{F_a(\xi_a)}{aV} + \frac{F_b(\xi_b)}{bV} + \frac{F_c(\xi_c)}{cV}, \quad (2.129)$$

onde $V = abc$ é o volume da caixa. Podemos finalmente verificar que as funções $F_{\{qrst\}}(\xi_{\{q,r,t\}})$ têm as seguintes propriedades:

$$\xi_{\{q,r,t\}}^4 F_{\{qrst\}}\left(\frac{1}{\xi_{\{q,r,t\}}}\right) = F_{\{qrst\}}(\xi_{\{q,r,t\}}) \quad (2.130)$$

e

$$\xi_a^2 F_a \left(\frac{1}{\xi_a} \right) = F_a (\xi_a). \quad (2.131)$$

As equações (2.130) e (2.131) mais as duas similares para $F_b (\xi_b)$ $F_c (\xi_c)$ descrevem a simetria de inversão de temperatura para nosso sistema, ou seja, todos os termos podem ser invertidos por meio dessas fórmulas.

No limite de alta temperatura esperamos que o termo dominante seja o termo de Stefan-Boltzmann $\pi^2 / (45\beta^4)$. As nossas transformações geram a partir de um único termo de Stefan-Boltzmann uma infinidade de termos a temperatura zero que então devem ser somados para se obter a densidade de energia a temperatura zero e, inversamente, cada termo a temperatura zero gera um único termo de Stefan-Boltzmann. Nessa forma, relacionada à densidade de energia, podemos aplicar a transformação de inversão de temperatura aos sistemas anteriormente estudados. A forma específica da transformação depende do sistema em consideração, mas o procedimento é o mesmo. Para a caixa retangular obtemos $F_{\{qrst\}} (0) = -\pi^2 / 720$ e $F_a (0) = F_b (0) = F_c (0) = \pi / 48$. Usando as equações (2.130) e (2.131) obtemos

$$\xi_{\{q,r,t\}}^4 F_{\{qrst\}} (\infty) = -\frac{\pi^2}{720} \quad (2.132)$$

e

$$\xi_a^2 F_a (\infty) = \xi_b^2 F_b (\infty) = \xi_c^2 F_c (\infty) = \pi / 48. \quad (2.133)$$

Levando estes resultados na equação (2.129)

$$F(a, b, c, \beta \rightarrow 0) = -\frac{abc\pi^2}{45\beta^4} + \frac{\pi}{12\beta^2} (a + b + c), \quad (2.134)$$

que está de acordo com a relação aos termos dominantes na aproximação de alta temperatura.

É conveniente reescrever a equação (2.125) ou sua forma equivalente (2.129), destacando os termos correspondentes a temperatura zero e Stefan-Boltzmann das correções

não-triviais de temperatura. Fazendo isto obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{F}{V} = & -\frac{\pi^2}{45\beta^4} + \frac{\pi}{12\beta^2} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \right) \\
& - \frac{1}{16\pi^2} \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2]} + \frac{\pi}{48abc} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\
& - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\{q,r,t\}} \sum_{k,p=1}^{\infty} \frac{1}{\left(k^2 d_{\{q,r,t\}}^2 + \beta^2 \right)^2} + \frac{1}{\pi bc} \sum_{l,p=1}^{\infty} \frac{1}{4a^2l^2 + \beta^2 p^2} \\
& + \frac{1}{\pi ac} \sum_{l,p=1}^{\infty} \frac{1}{4b^2l^2 + \beta^2 p^2} + \frac{1}{\pi ab} \sum_{l,p=1}^{\infty} \frac{1}{4c^2l^2 + \beta^2 p^2}. \tag{2.135}
\end{aligned}$$

As duas últimas linhas da equação (2.135) representam as correções não-triviais dependentes da temperatura. O primeiro termo na terceira linha é equivalente a um conjunto de placas condutoras onde cada par é caracterizado pela distância $d_{\{q,r,t\}}$. Assim podemos usar os resultados já conhecidos na literatura [16] para placas de Casimir.

Capítulo 3

Ações efetivas da eletrodinâmica quântica e o efeito Scharnhorst

A teoria quântica de campos foi desenvolvida a partir do processo de quantização canônica que postula as relações de comutação em tempos iguais. Entretanto, o uso da integração funcional na teoria quântica de campos tornou-se uma ferramenta importante na análise de algumas questões teóricas fundamentais e até mesmo imprescindível em numerosas outras. Neste capítulo vamos discutir, usando o formalismo da integração funcional, os conceitos de funcional gerador e de ação efetiva. No nosso caso, destacamos que a ação efetiva incorpora com simplicidade as simetrias e os vínculos impostos ao problema. Em seguida aplicaremos esses resultados para estudar a eletrodinâmica quântica em uma escala de energia baixa, obtendo a ação efetiva de Euler-Heisenberg[19], que será calculada por meio da função zeta generalizada. Finalmente aplicaremos esses resultados para estudar o efeito Scharnhorst [75] no vácuo confinado entre uma placa perfeitamente condutora e outra infinitamente permeável.

3.1 A ação efetiva

O formalismo funcional é um procedimento muito direto para a construção da teoria quântica de campos. Os valores esperados no vácuo do produto temporalmente ordenado dos operadores de campo $\langle 0 | T(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)...\hat{\varphi}(x_n)) | 0 \rangle$, ou como são conhecidos, as funções de Green de n pontos $G_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$, são obtidos nesse formalismo a partir do assim chamado funcional gerador por meio de derivadas funcionais. Definimos, em

primeiro lugar, o funcional $Z[J]$

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\phi] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx (\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) + J\phi)\right), \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização. Além disso, notemos que pode-se manter a generalidade da nossa análise simplesmente supondo que ϕ seja um campo de N componentes. No caso em que a teoria é construída no espaço de Minkowski, sem quaisquer vínculos ou condições externas, essa constante de normalização é determinada pela condição $Z[0] = 1$ e corresponde à eliminação das bolhas de vácuo (diagramas sem linhas externas) na análise dos fenômenos físicos. Entretanto, na presença de campos externos, vínculos sobre os campos quantizados ou qualquer outra distorção em relação ao espaço-tempo de Minkowski as bolhas de vácuo podem se acoplar a essas condições externas, fazendo com que o funcional gerador não satisfaça mais à condição $Z[0] = 1$. A constante de normalização, porém, permanece a mesma, idêntica à que foi determinada na ausência de campos externos.

Pode-se interpretar convenientemente o funcional $Z[J]$ como a amplitude de transição vácuo-vácuo $\langle 0|0\rangle^J$ na presença de uma fonte externa J . Levando em conta a condição de normalização e omitindo na notação possíveis campos externos, podemos escrever

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}[\phi] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx (\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) + J\phi)\right)}{\int \mathcal{D}[\phi] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx (\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}))\right)}. \quad (3.2)$$

Então, por meio da derivação funcional, podemos escrever a seguinte relação:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \left| \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}. \quad (3.3)$$

É claro que o fato de calcularmos as funções de Green, fazendo $J = 0$ significa que a fonte J é um mero artifício matemático e deve ser eliminada em todos os resultados fisicamente relevantes. As funções de Green definidas em (3.3) contêm todos os gráficos da teoria os quais podem ser classificados em conexos e desconexos. Os primeiros têm todas as suas partes conectadas por propagadores enquanto que os desconexos podem ser separados em subdiagramas que não estão conectados entre si por propagadores. Os gráficos desconexos, portanto, podem ser obtidos a partir dos gráficos conexos e por isso torna-se importante obter estes gráficos exclusivamente, ou seja, queremos definir um funcional que gere somente os gráficos conexos. Usando o método funcional é fácil introduzir tal gerador por meio da relação.

$$Z[J] = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} W[J]\right). \quad (3.4)$$

De fato, se tomarmos a derivada funcional de $W[J]$ em relação a J de ambos os termos da equação (3.4) e em seguida fizermos $J = 0$, obteremos no primeiro membro as funções de Green e no segundo combinações de funções de Green conexas. Os gráficos conexos, por sua vez, ainda podem ser simplificados, se considerarmos os gráficos que podem ser conectados a gráficos mais simples por meio de um propagador. Tais gráficos mais simples são denominados de gráficos irreduzíveis a uma partícula e têm a propriedade de permanecer atados mesmo após a supressão de uma linha interna de propagador. Esses gráficos irreduzíveis a uma partícula, portanto, são peças mais fundamentais da teoria, já que qualquer gráfico conexo é formado pela junção de subdiagramas irreduzíveis a uma partícula por meio de propagadores internos. Além disso, se soubermos tratar os infinitos presentes nos gráficos irreduzíveis a uma partícula, então estarão tratados todos os infinitos da teoria. É possível obter um funcional gerador para os gráficos irreduzíveis a uma partícula. Para isso vamos definir uma nova variável $\phi_c(x)$ por:

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (3.5)$$

Invertendo a relação (3.5) obtemos $J = J(x, \phi_c)$ e podemos, então, procurar o funcional que não dependa de $J(x)$. A transformação de Legendre usada em termodinâmica e mecânica analítica para eliminar uma variável substituindo-a por outra que dependa de uma relação análoga a (3.5) pode também ser executada aqui com igual sucesso:

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int dx J(x) \phi_c(x). \quad (3.6)$$

Notemos que a derivada funcional desse novo funcional satisfaz à condição

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta J} = 0,$$

o que comprova o fato do novo funcional, denominado de ação efetiva, não depender de J . Pode-se mostrar que as derivadas funcionais de $\Gamma[\phi_c]$ em relação a ϕ_c ,

$$\frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)}, \quad (3.7)$$

são as funções de Green irreduzíveis a uma partícula com as linhas externas amputadas, ou seja, $\Gamma[\phi_c]$ é o funcional gerador das funções de vértice[76][77].

3.2 Expansão em laços

O formalismo funcional para campos livres e sem auto-interação pode ser aplicado sem maiores problemas porque as integrais funcionais obtidas são, geralmente, gaussianas.

Para campos que interagem, entretanto, a situação não é tão simples. Podemos usar o formalismo funcional para estabelecer dois métodos de aproximação que são extremamente úteis para essas teorias mais gerais. Vamos separar na lagrangiana da teoria a parte correspondente à teoria livre $\mathcal{L}_o(\phi, \partial\phi)$ e a parte que descreve a interação $V(\phi)$. Temos então:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\phi] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx (\mathcal{L}_o(\phi, \partial\phi) + gV(\phi) + J\phi)\right), \quad (3.8)$$

onde introduzimos a constante de acoplamento g para que o processo de aproximação possa ser bem caracterizado. O funcional gerador dado na equação (3.8) pode ser escrito em uma forma bastante conveniente em função do funcional gerador $Z_o[J]$ da teoria livre se considerarmos a seguinte identidade:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x' (\mathcal{L}_o + J\phi)\right] = \frac{i}{\hbar} \phi(x) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x' (\mathcal{L}_o + J\phi)\right] \quad (3.9)$$

Usando esta identidade e supondo que o potencial $V(\phi)$ possa ser desenvolvido em série de Taylor, obtemos:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4x gV\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\phi] \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx (\mathcal{L}_o(\phi, \partial\phi) + J\phi)\right) \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\phi] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4x gV\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) Z_o[J], \end{aligned} \quad (3.10)$$

A presença das duas constantes g e $\hbar$ na equação (3.10) sugere dois tipos de aproximação: a primeira consiste em supor que a constante de acoplamento é pequena e desse modo geramos uma série de potências em g ; a segunda consiste em considerar que a constante de Planck é pequena e geramos, dessa vez, uma série de potência em $\hbar$. Intuitivamente as motivações para essas aproximações são evidentes: a expansão em g significa que à medida que a interação aumenta mais termos na série perturbativa devem ser considerados e a expansão em $\hbar$ está associada às correções quânticas incorporadas à teoria clássica completa.

Nosso interesse está justamente na expansão em $\hbar$ que é também denominada de expansão em laços. A ação na equação (3.1) depende de x e $J(x)$ e é dada por:

$$S[\phi, J(x)] = \int d^4x [\mathcal{L} + \hbar\phi(x) J(x)], \quad (3.11)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de Lagrangiana da teoria que, por conveniência, suporemos ser a correspondente a um campo escalar real da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + gV(\phi), \quad (3.12)$$

onde introduzimos a constante de acoplamento g . A solução clássica $\phi_o(x)$ satisfaz à equação de Euler-Lagrange:

$$\left. \frac{\delta S_o[\phi]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_o} = 0, \quad (3.13)$$

onde S_o é a ação clássica. Definiremos a função $\phi_1(x)$ exigindo que ela anule a derivada funcional em relação à $\phi(x)$ da ação dada pela equação (3.11), ou seja:

$$\left. \frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_1} = 0 \quad (3.14)$$

É claro que quando a fonte $J(x)$ tende a zero a função $\phi_1(x)$ tende para a função $\phi_o(x)$. A série em laços pode ser obtida se expandirmos os funcionais em torno dessa solução ϕ_1 . Começemos pela ação dada pela equação (3.11) cuja expansão é dada por.

$$\begin{aligned} S[\phi, J] &= S[\phi_1, J] + \int dx [\phi(x) - \phi_1(x)] \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dx dy [\phi(x) - \phi_1(x)] [\phi(y) - \phi_1(y)] \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_1} + \dots \\ &= S[\phi_1] + \frac{1}{2} \int dx dy [\phi(x) - \phi_1] \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_1} [\phi(y) - \phi_1] + \dots, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde usamos a equação (3.14). Fazendo a derivada funcional da ação dada pela equação (3.11) é fácil obter:

$$\left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_1} = - \left[\square + V''(\phi_1) \right] \delta(x - y). \quad (3.16)$$

Substituindo a equação (3.16) na equação (3.15) obtemos então:

$$S[\phi, J] = S[\phi_1] - \frac{1}{2} \int dx [\phi(x) - \phi_1(x)] \left[\square + V''(\phi_o) \right] [\phi(x) - \phi_1(x)] + \dots \quad (3.17)$$

A ação, em primeira aproximação, tem uma forma gaussiana e a integral funcional em (3.4) pode ser feita facilmente. Obtemos:

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{i}{\hbar} W \right) &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\phi_1, J] \right\} \times \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \int dx [\phi(x) - \phi_1(x)] \right. \\ &\quad \left. \left[\square + V''(\phi_1) \right] [\phi(x) - \phi_1(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora redefinimos a variável de integração de modo que $[\phi(x) - \phi_1(x)]$ seja transformado em $\hbar^{\frac{1}{2}}\phi$ e para calcularmos a integral que aparece no expoente passamos para o espaço euclidiano $\exp\left(\frac{i}{\hbar}W\right) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\phi_1, J]\right\} \left\{\det[\square + V''(\phi_1)]\right\}^{-\frac{1}{2}}$. Usando a fórmula geral

$$\det A = \exp(Tr \ln A),$$

vem que:

$$W[J] = S[\phi_1] + \hbar \int dx J(x) \phi_1(x) + \frac{i\hbar}{2} Tr \ln [\square + V''(\phi_1)]. \quad (3.19)$$

O campo clássico ϕ_c definido em (3.5) pode ser calculado a partir de (3.19), lembrando a definição de S e considerando que em primeira aproximação ϕ_1 é $\phi_o + O(\hbar^2)$.

$$\phi_c = \hbar\phi_1. \quad (3.20)$$

Agora podemos determinar a aproximação da ação efetiva a um laço usando a definição (3.6) e a condição (3.20) e desprezando os termos de ordem $O(\hbar^2)$

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_1] + \frac{i\hbar}{2} Tr \ln [\square + V''(\phi_o)]$$

Se restringirmos nossos cálculos a um laço, ou seja considerando somente termos da ordem de $\hbar$, podemos verificar que nesse limite teremos:

$$W[J] = \Gamma[\phi_c]. \quad (3.21)$$

Além disso, é interessante observar que embora o campo ϕ_c seja um campo clássico, sua origem é fundamentalmente quântica. De fato esse campo se anula no limite $\hbar \rightarrow 0$ e por esse motivo, não pode ser interpretado como uma correção ao campo da teoria clássica.

As teorias quânticas de campo são intratáveis quando consideradas na sua forma mais geral, mesmo os problemas aparentemente mais simples tornam-se extremamente complexos se forem abordados com a teoria completa. Na seção anterior apresentamos o formalismo geral da ação efetiva que pode ser aplicado para um campo multicomponente qualquer, inclusive com componentes fermiônicas, e permite, sem considerar nenhum tipo de aproximação, reinterpretar a teoria completa em termos de diagramas em árvore. Entretanto, os fenômenos físicos ocorrem em escalas características de energia que são em geral tão acentuadamente separadas que geram fenômenos qualitativamente diferentes em cada uma dessas escalas. A própria teoria completa adquire, em cada escala de energia,

uma forma específica e restrita capaz de descrever corretamente somente os fenômenos naquela faixa de energia. A teoria restrita e a teoria completa, entretanto, podem ser consideradas como teorias exatas que produzem os mesmos resultados na escala de energia apropriada, uma está para a outra assim como a mecânica newtoniana está para a mecânica relativística, visto que ambas geram os mesmos resultados quando aplicadas no domínio de baixas velocidades. Tais teorias, denominadas de teorias efetivas, são construídas a partir da teoria completa ou podem ser formuladas independentemente como teorias fenomenológicas. Nesse seção vamos inicialmente deduzir a ação efetiva a um laço de Euler-Heisenberg da teoria restrita correspondente à eletrodinâmica quântica em baixas energias. Em seguida vamos estudar o efeito Scharnhorst com as condições de contorno de Boyer. Também estudaremos esse efeito no contexto da eletrodinâmica quântica escalar.

3.3 A lagrangiana de Euler-Heisenberg

A eletrodinâmica quântica é a teoria completa de fótons e elétrons. Queremos, no entanto, construir uma teoria restrita para os fótons em baixa energia, isto é, vamos considerar fótons no estado inicial, mas com momento transferido muito menor que a massa do elétron. Neste caso os elétrons nunca aparecem e portanto não há porque mantê-los na formulação da teoria restrita. O campo eletromagnético é descrito por um tensor antissimétrico $F_{\mu\nu}$ e a lagrangiana de Maxwell para o campo eletromagnético é:

$$L_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

A lagrangiana para uma teoria restrita deve respeitar as simetrias que são exigidas por princípios gerais, tais como as transformações de Poincaré e as transformações de calibre. Além disso, fazendo uma análise dimensional podemos determinar a forma da lagrangiana efetiva para campos fracos

$$L_{ef} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{m_e^4} \left[a (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + b (F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 \right], \quad (3.23)$$

onde m_e é a massa do elétron e $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}$ é o dual de $F_{\mu\nu}$, considerando somente as correções de ordem mais baixa. As constantes a e b podem ser determinadas em um caso particular, por exemplo, um campo magnético constante. A presença desses termos na lagrangiana dá origem a não-linearidades nas equações de movimento do campo. Teorias clássicas não-lineares do eletromagnetismo foram construídas para resolver problemas específicos, como por exemplo a teoria de Born-Infeld [78], que foi proposta para eliminar as autoenergias infinitas. Tais teorias se caracterizam pela arbitrariedade da escolha dos

termos não-lineares e pela correspondente ausência de motivações experimentais. Entretanto, as correções geradas pela natureza quântica do vácuo têm suporte teórico e experimental. Nessas condições as propriedades eletromagnéticas do espaço podem ser descritas por polarizabilidades elétrica e magnética do vácuo que são dependentes dos campos e acarretam por exemplo na refração da luz em um campo elétrico ou no espalhamento da luz pela luz. Estas constantes foram obtidas pioneiramente por Euler e Kockel em 1935 [79] e Heisenberg e Euler [19]. Weisskoff [80] em 1936 calculou a lagrangiana de Euler-Heisenberg e Schwinger [20] em 1951 publicou um trabalho completo sobre a lagrangiana de Euler-Heisenberg, introduzindo a idéia de lagrangiana efetiva. Nesta seção vamos determinar a forma completa da lagrangiana de Euler-Heisenberg. Utilizaremos, contudo, o método da função zeta generalizada. Para isso voltemos ao funcional gerador de todas as funções de Green da teoria completa:

$$Z[j, \bar{\eta}, \eta] = C \int \mathcal{D}[A] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi] \exp i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + j_\mu A^\mu + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi}], \quad (3.24)$$

onde A^μ representa o campo eletromagnético, $\bar{\psi}$ e ψ representam os campos fermiônicos e C é uma constante de normalização. A densidade de lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ da teoria completa é dada por:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\hat{\partial} - m + e\hat{A})\Psi, \quad (3.25)$$

onde $\hat{\partial}$ e $\hat{A}$ representam os produtos escalares de ∂_μ e A_μ com as matrizes γ^μ .

Considerar fótons de baixa energia significa dizer que não devemos considerar as funções de Green com linhas externas de elétrons. Para isto é suficiente fazer $\bar{\eta} = \eta = 0$. O funcional gerador é então dado por:

$$Z[j] = C \int \mathcal{D}[A] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi] \exp i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + j_\mu A^\mu], \quad (3.26)$$

Podemos separar, no funcional acima, as integrações nos campos fermiônicos, obtendo

$$Z[j] = C \int \mathcal{D}[A] \exp \left(i \int d^4x j_\mu A^\mu \right) \int \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi] \exp i \int d^4x \mathcal{L}(x), \quad (3.27)$$

Agora vamos definir a ação $\mathcal{S}_{rest}$ e a lagrangiana $\mathcal{L}_{rest}(x)$ da teoria restrita por meio da equação abaixo

$$\exp \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{rest} = \exp \frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_{rest}(x) = \int \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi] \exp i \int d^4x \mathcal{L}(x), \quad (3.28)$$

A teoria com lagrangiana $\mathcal{L}_{rest}(x)$ pode ser entendida como uma teoria clássica, sendo desse modo uma eletrodinâmica não-linear gerada pelas correções do vácuo fermiônico.

Tais correções incluem todos os laços fermiônicos simples. O funcional gerador dado pela equação (3.27) é então entendido como um método para a quantização dessa teoria do campo eletromagnético não-linear, gerando qualquer função de Green da teoria original desde que esta possua apenas linhas externas (em qualquer ordem de laço). Agora é preciso definir o funcional gerador das funções de Green conexas $W[j]$ por meio de,

$$\exp(-iW[j]) = Z[j]. \quad (3.29)$$

A ação efetiva correspondente à essa teoria é a grandeza que precisa ser determinada porque é ela que vai especificar a energia do vácuo. Para isso definimos o campo $\varphi_c = \delta W[j] / \delta j(x)$ e fazemos a transformada de Legendre:

$$\Gamma(\varphi_c) = W[j] - \int dx j_\mu(x) \varphi_c^\mu(x). \quad (3.30)$$

A primeira aproximação da ação efetiva coincide com $W[j]$.

3.3.1 A função zeta e o cálculo da ação restrita de Euler-Heisenberg

O funcional permite obter as correções à ação clássica a partir do cálculo do determinante do operador de Dirac. A técnica da função zeta para o cálculo desses determinantes, introduzida por Hawking, abriu novas perspectivas na investigação de ações efetivas. Nesse sentido, destaca-se o trabalho pioneiro de Blau et al [81] onde eles obtiveram uma forma analítica da ação efetiva de um campo eletromagnético uniforme para um número arbitrário de dimensões do espaço-tempo e para férmions com e sem massa. Nesta seção seguimos o trabalho de Soldati e Sorbo [82] para o cálculo da ação efetiva.

Substituindo a lagrangiana (3.25) da eletrodinâmica quântica na equação (3.28) e separando nas integrais os termos que não dependem dos campos fermiônicos obtemos:

$$\exp[iS_{rest}(x)] = \exp i \int d^4x L_M \int \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi] \exp i \int d^4x \bar{\Psi}(i\hat{\partial} - m + e\hat{A})\Psi \quad (3.31)$$

A integração funcional pode ser feita eficientemente no espaço euclidiano. Com esse objetivo fazemos uma rotação de Wick, transformando convenientemente os campos e somente no final do cálculo voltamos para o espaço-tempo de Minkowski. A integração nos campos fermiônicos, por sua vez, define o determinante do operador de Dirac. Temos então:

$$\exp i S_{rest}^E(x) = \exp i \int d^4x L_M^E \int \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi] \exp i \int d^4x \bar{\Psi}(i\hat{\partial} - m + e\hat{A})\Psi \quad (3.32)$$

onde,

$$L_M^E(E, B) = -L_M(E \rightarrow iE, B \rightarrow B), \quad (3.33)$$

e

$$L_M(E, B) = -L_M^E(E \rightarrow -iE, B \rightarrow B), \quad (3.34)$$

definem as transformações da lagrangiana e dos campos. Tomando os logaritmos dos dois membros da equação (3.32) obtemos:

$$\mathcal{S}_{rest}^E(x) = \mathcal{S}_M^E - \log \det(\hat{D}[A^\mu] + im), \quad (3.35)$$

onde a ação euclidiana de Maxwell e o operador euclidiano de Dirac são dados respectivamente por:

$$\mathcal{S}_{rest}^E = \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.36)$$

e

$$\hat{D}[A^\mu] = \gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \quad (3.37)$$

e m é a massa do elétron. Uma propriedade importante do operador de Dirac que será usada para simplificar o cálculo do determinante é:

$$\left| (\hat{D} + im) \right|^2 = \det(\hat{D}^\dagger \hat{D} + m^2), \quad (3.38)$$

de modo que a ação efetiva pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{S}_{rest}^E(x) = \mathcal{S}_M^E - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \zeta \left(s; \hat{D}^\dagger \hat{D} [A^\mu] + m^2 \right) \Big|_{s=0}. \quad (3.39)$$

O operador de Dirac $\hat{D}^\dagger \hat{D} = (\partial_\mu - ieA_\mu)^2 - eF_{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}/2$ onde $\Sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$ é um operador elíptico e o seu determinante pode ser calculado por meio da função zeta, como foi definido acima. Entretanto, o espectro desse operador só pode ser determinado explicitamente para o caso de campos constantes. Nessa situação podemos escolher um referencial onde os campos elétrico e magnético são paralelos de modo que $F_{03} = E$ e $F_{12} = B$ e as demais componentes independentes são nulas. Nesse caso os autovalores do operador de Dirac $D^\dagger D$ são dados por [82]:

$$\lambda_{n_E, n_B} = 2|eE|n_E + 2|eB|n_B \text{ onde } n_E, n_B = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

onde todos os estados são degenerados . A função zeta é dada então por

$$\zeta(s) = \frac{e^2 EB \Omega}{4\pi^2} \left[4 \sum_{n_E, n_B=1}^{\infty} \left(\frac{2|eE|n_E + 2|eB|n_B + m^2}{\mu^2} \right)^{-s} + \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right)^{-s} \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_E=1}^{\infty} \left(\frac{2|eE|n_E + m^2}{\mu^2} \right)^{-s} + 2 \sum_{n_B=1}^{\infty} \left(\frac{2|eB|n_B + m^2}{\mu^2} \right)^{-s} \right],$$

onde o fator $e^2 EB \Omega / 4\pi^2$ foi introduzido para levar em conta a degenerescência dos autovalores do operador de Dirac, Ω é o volume de normalização e μ é um fator de escala com dimensão de massa cuja finalidade é fazer com que a função zeta seja adimensional. Como estamos calculando a ação efetiva para baixas energias comparadas com a massa do elétron escolheremos no final do cálculo, se necessário, $\mu = m_e$. Definindo os parâmetros $a = \frac{2|eE|}{\mu^2}$, $b = \frac{2|eB|}{\mu^2}$ e $c = \frac{m^2}{\mu^2}$, podemos escrever a equação acima em uma forma mais simples:

$$\zeta(s) = \frac{ab}{16\pi^2} \Omega \mu^4 \left[4 \sum_{n_E, n_B=1}^{\infty} (an_E + bn_B + c)^{-s} + (c)^{-s} \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_E=1}^{\infty} (an_E + c)^{-s} + 2 \sum_{n_B=1}^{\infty} (bn_B + c)^{-s} \right]. \quad (3.41)$$

Da definição da função gama de Euler temos que:

$$\lambda^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-\lambda u} du. \quad (3.42)$$

Escolhendo convenientemente a constante λ podemos aplicar a identidade acima em cada somatório da equação (3.41). Em seguida, colocamos em evidência a exponencial e^{-cu} e a função $\Gamma(s)$ e teremos

$$\zeta(s) = \frac{ab}{16\pi^2} \Omega \mu^4 \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} du u^{s-1} e^{-cu} \left[4 \sum_{n_E, n_B=1}^{\infty} e^{-(an_E + bn_B)u} + 1 \right. \\ \left. + 2 \sum_{n_E=1}^{\infty} e^{-an_E u} + 2 \sum_{n_B=1}^{\infty} e^{-bn_B u} \right]. \quad (3.43)$$

Os somatórios que restam são séries geométricas que podem ser calculadas facilmente.

Escrevemos a função zeta na forma:

$$\zeta(s) = \frac{ab}{16\pi^2} \Omega \mu^4 \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty du u^{s-1} e^{-cu} \left[4 \frac{e^{-(a+b)u}}{(1-e^{-bu})(1-e^{-au})} + 1 + 2 \frac{e^{-au}}{1-e^{-au}} + 2 \frac{e^{-bu}}{1-e^{-bu}} \right] \quad (3.44)$$

e simplificando os termos entre os colchetes obtemos:

$$\zeta(s) = \frac{ab}{16\pi^2} \Omega \mu^4 \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty du u^{s-1} e^{-cu} \left[\frac{(1+e^{-bu})(1+e^{-au})}{(1-e^{-bu})(1-e^{-au})} \right], \quad (3.45)$$

que pode ser transformada facilmente em:

$$\zeta(s) = \frac{ab}{16\pi^2} \Omega \mu^4 \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty du u^{s-1} e^{-cu} \coth \frac{au}{2} \coth \frac{bu}{2}. \quad (3.46)$$

Agora vamos voltar aos campos elétrico e magnético eliminando os parâmetros a e b de acordo com as eqs. (??) e usando a eq. (3.39) temos finalmente a lagrangiana da teoria restrita,

$$\mathcal{L}_{res} = -\frac{e^2 EB}{8\pi^2} \int_0^\infty du u^{-1} e^{-\frac{m^2}{\mu^2}u} \coth \frac{|eE|}{\mu^2} u \coth \frac{|eB|}{\mu^2} u. \quad (3.47)$$

Estamos interessados agora em obter uma expressão válida para campos fracos. Para isso vamos fazer o desenvolvimento da função cotangente em série,

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad (3.48)$$

onde B_{2k} representam os números de Bernoulli. O desenvolvimento do produto das cotangentes que aparece no integrando de (3.47) até segunda ordem em u é então dado por:

$$\begin{aligned} \coth \frac{|eE|}{\mu^2} u \coth \frac{|eB|}{\mu^2} u &= \frac{1}{e^2} \frac{\mu^4}{EBu^2} + 2B_2 \left(\frac{E}{B} + \frac{B}{E} \right) \\ &+ \left(\frac{2B_4 e^2}{3\mu^4} \frac{E^3}{B} + \frac{4B_2^2 e^2}{\mu^4} EB + \frac{2B_4 e^2}{3\mu^4} \frac{B^3}{E} \right) u^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Substituindo a expressão acima em (3.47) e simplificando obtemos a lagrangiana restrita na forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{res} &= -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty du u^{-1} e^{-\frac{m^2}{\mu^2}u} \left[\frac{1}{e^2} \frac{\mu^4}{u^2} + 2B_2 (E^2 + B^2) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2B_4 e^2}{3\mu^4} E^4 + \frac{4B_2^2 e^2}{\mu^4} E^2 B^2 + \frac{2B_4 e^2}{3\mu^4} B^4 \right) u^2 \right] \\
&= \frac{2}{e^2} \frac{\mu^4}{u^2} + \frac{2}{3} B^2 + \frac{2}{3} E^2 \\
&\quad - \frac{2}{45} B^4 u^2 \frac{e^2}{\mu^4} + \frac{2}{9} E^2 B^2 u^2 \frac{e^2}{\mu^4} - \frac{2}{45} E^4 u^2 \frac{e^2}{\mu^4}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

O primeiro termo da integral, embora seja divergente, é independente dos campos e por isso pode ser ignorado; os termos quadráticos nos campos, também divergentes, dependem dos campos, porém podemos incorporá-los à lagrangiana livre, efetuando, assim, o processo de renormalização da teoria. Os termos seguintes, de ordem quatro nos campos vão produzir uma contribuição finita à lagrangiana de Maxwell. Esses termos estão multiplicados pela integral $\int_0^\infty du u e^{-\frac{m^2}{\mu^2}u}$ cujo valor, como se pode verificar facilmente, é μ^4/m^4 . A lagrangiana de Euler-Heisenberg é então:

$$L = -\frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^4}{45m^4} (B^4 - 5E^2 B^2 + E^4). \tag{3.51}$$

Notamos que o resultado final não depende do fator de escala μ . Finalmente podemos escrever a lagrangiana efetiva no espaço-tempo de Minkowski, usando a equação (3.33),

$$L = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) + \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^4}{45m^4} (B^4 + 5E^2 B^2 + E^4). \tag{3.52}$$

Os invariantes do campo $\mathcal{I} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ e $\mathcal{J} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ podem ser escritos em termos de E e B na forma:

$$\mathcal{I} = E^2 - B^2 \tag{3.53}$$

e

$$\mathcal{J} = EB. \tag{3.54}$$

Resolvendo o sistema de equações acima podemos expressar a lagrangiana efetiva em termos dos invariantes do campo

$$E^2 = \frac{\mathcal{I} + \sqrt{\mathcal{I}^2 + 4\mathcal{J}^2}}{2} \tag{3.55}$$

$$B^2 = \frac{-\mathcal{I} + \sqrt{\mathcal{I}^2 + 4\mathcal{J}^2}}{2}. \tag{3.56}$$

Substituindo em (3.52) vem que:

$$L = \frac{1}{8\pi} \mathcal{I} + \frac{e^4}{8\pi^2} \frac{e^2}{45m^4} (\mathcal{I}^2 + 7\mathcal{J}^2) \quad (3.57)$$

A lagrangiana de Euler-Heisenberg é uma correção à lagrangiana de Maxwell. É interessante observar que o campo de Maxwell pode ser visto como um campo clássico porque os fótons são bósons enquanto que o campo de Dirac não está associado a um campo clássico porque os elétrons são férmions. Entretanto, podemos interpretar o campo dado pela equação (3.57) como um campo clássico e a correção de Euler-Heisenberg como uma manifestação clássica do campo quantizado de Dirac. O campo fermiônico não tem limite clássico quando considerado isoladamente, no entanto, ele pode se manifestar como um campo clássico desde que esteja camuflado nas correções do limite clássico de um campo bosônico. Desse modo, quando uma onda eletromagnética se propaga, arrasta um pulso de elétrons virtuais no vácuo. Podemos imaginar que o acoplamento entre os dois pulsos determine, em uma teoria mais geral, inclusive a velocidade de propagação da luz no vácuo. Além disso, a lagrangiana de Euler-Heisenberg prevê um efeito não-perturbativo que produz pares reais de elétron-pósitron na presença de um campo elétrico. Tal produção, no entanto, só é significativa quando o campo elétrico é muito intenso.

3.3.2 A lagrangiana restrita para a eletrodinâmica escalar

A lagrangiana restrita para a eletrodinâmica escalar pode ser obtida facilmente se usarmos a função zeta. Em primeiro lugar notemos que o espectro de autovalores do operador é dado por:

$$\lambda = (2n_E + 1)eE + (2n_B + 1)eB + m^2. \quad (3.58)$$

A função zeta é então dada por:

$$\zeta(s) = \frac{e^2 EB}{2\pi^2} \Omega \sum_{n_E, n_B=0}^{\infty} \left(\frac{(2n_E + 1)eE + (2n_B + 1)eB + m^2}{\mu^2} \right)^{-s}, \quad (3.59)$$

onde o fator $e^2 EB \Omega / 4\pi^2$ corresponde à degenerescência dos níveis de energia. Definindo os parâmetros $a = eE/\mu^2$, $b = eB/\mu^2$, $c = m^2/\mu^2$, simplificaremos como antes as manipulações algébricas. e poderemos escrever a função zeta na forma:

$$\zeta(s) = \frac{e^2 EB}{2\pi^2} \Omega \sum_{n_E, n_B=0}^{\infty} [(2n_E + 1)a + (2n_B + 1)b + c]^{-s}. \quad (3.60)$$

Usando a identidade (3.42) podemos escrever:

$$\zeta(s) = \frac{e^2 EB}{2\pi^2} \Omega \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty du u^{s-1} e^{-cu} \sum_{n_E, n_B=0}^\infty e^{-[(2n_E+1)a + (2n_B+1)b]}. \quad (3.61)$$

A soma dupla na equação acima é uma série geométrica em cada índice e pode ser somada facilmente. Substituindo, em seguida, os parâmetros a , b e c obtemos

$$\zeta(s) = \frac{e^2 EB}{2\pi^2} \Omega \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty du u^{s-1} \frac{1}{4} e^{-\frac{m^2}{\mu^2} u} \operatorname{csch}\left(\frac{E}{\mu^2} u\right) \operatorname{csch}\left(\frac{B}{\mu^2} u\right) \quad (3.62)$$

A lagrangiana restrita finalmente pode ser obtida se aplicarmos a equação (3.39)

$$L = -\frac{e^2 EB}{16\pi^2} \int_0^\infty du u^{-1} e^{-\frac{m^2}{\mu^2} u} \operatorname{csch}\left(\frac{eE}{\mu^2} u\right) \operatorname{csch}\left(\frac{eB}{\mu^2} u\right). \quad (3.63)$$

O desenvolvimento da função $\operatorname{csch}(x)$ que aparece na equação acima é dado por:

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^\infty \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad (3.64)$$

onde B_{2k} são os números de Bernoulli. Expandindo o produto das cossecantes até segunda ordem em u obtemos, analogamente ao caso da eletrodinâmica spinorial, termos de ordem $1/u^3$ que são divergentes mas não dependem do campo, termos de ordem $1/u$ que são proporcionais à lagrangiana livre e podem ser renormalizados e o termo de ordem u que dá uma contribuição finita que é a lagrangiana restrita da teoria:

$$L = -\frac{e^4}{16\pi^2 \mu^4} \int_0^\infty du u e^{-\frac{m^2}{\mu^2} u} \left(-\frac{7B_4}{12} E^4 - \frac{7B_4}{12} B^4 + B_2^2 E^2 B^2 \right). \quad (3.65)$$

Efetuada a integral, substituindo os números de Bernoulli $B_2 = 1/6$ e $B_4 = -1/30$ e voltando aos campos no espaço de Minkowski obtemos a lagrangiana da eletrodinâmica escalar com sua primeira correção não-trivial. Em seguida usaremos as eqs. (3.55,3.56) para expressar os campos E e B em função de seus invariantes.

$$L = L_M^E - \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{1}{360 m^4} [7E^4 + 7B^4 + 10E^2 B^2] \quad (3.66)$$

$$L = \frac{1}{8\pi} \mathcal{I} + \frac{1}{16\pi^2} \frac{e^4}{90 m^4} \left(\frac{7}{4} \mathcal{I}^2 + \mathcal{J}^2 \right) \quad (3.67)$$

Embora a interação entre férmions carregados de spin $1/2$ com eles mesmos e com campos eletromagnéticos seja descrita muito bem pela eletrodinâmica quântica spinorial ainda assim é útil estudar teorias diferentes que envolvam partículas carregadas. Tais teorias fictícias servem de laboratório teórico para testarmos os princípios gerais da física em modelos mais simples ou mesmo solúveis.

3.4 O efeito Scharnhorst

A eletrodinâmica quântica no espaço-tempo livre sem condições de contorno ou campo externos aplicados permite todos os modos do campo. Nesta situação redefinimos a energia do vácuo e a fazemos nula. A eletrodinâmica quântica em cavidades se caracteriza pelo fato de que as condições de contorno restringem as frequências permitidas para as vibrações do campo quantizado. É razoável, portanto, que a densidade de energia associado ao vácuo nessas condições não seja mais zero. As consequências físicas desse desvio de energia podem ser surpreendentes. Por exemplo, a taxa de emissão espontânea de um átomo pode ser afetada por esse desvio e tornar-se dependente da posição, os níveis de energia do átomo são modificados, o momento anômalo do elétron, etc.

A propagação da luz também é influenciada por essa densidade de energia não-nula do vácuo. Scharnhorst estudou esse efeito na região entre placas de Casimir e mostrou que a velocidade da luz aumenta nessa região; é o chamado efeito Scharnhorst. Nesta seção vamos estudar esse efeito em uma região limitada por placas de Boyer e consideraremos ainda esse efeito no contexto da eletrodinâmica escalar tanto para placas de Casimir quanto para de Boyer.

3.5 O vácuo eletromagnético entre placas de Boyer

Vamos considerar novamente as placas de Boyer já discutidas no capítulo anterior formadas por um plano perfeitamente condutor ($\epsilon \rightarrow \infty$) e outro infinitamente permeável ($\mu \rightarrow \infty$). Escolhemos, como no capítulo 2, eixos cartesianos de tal modo que o eixo OZ seja perpendicular às duas superfícies. E consideramos, também como antes, a placa perfeitamente condutora em $z = 0$ e a placa infinitamente permeável em $z = L$. As condições de contorno impostas às oscilações do campo eletromagnético confinado no vácuo em $z = 0$ são:

$$A_x(x, y, 0, t) = 0; \quad A_y(x, y, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} A_z(x, y, 0, t) = 0, \quad (3.68)$$

Por outro lado, em $z = L$ temos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x(x, y, L, t) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} A_y(x, y, L, t) = 0, \quad A_z(x, y, L, t) = 0 \quad (3.69)$$

Pode-se mostrar que o campo do fóton é dado nessas coordenadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}}{\sqrt[2]{\omega}} \left\{ a^{(1)}(\boldsymbol{\kappa}, n) \hat{\boldsymbol{\kappa}} \times \hat{\mathbf{z}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] \right. \\ & + a^{(2)}(\boldsymbol{\kappa}, n) \left[\hat{\boldsymbol{\kappa}} \frac{i \left(n + \frac{1}{2} \right)}{\omega L} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] - \hat{\mathbf{z}} \frac{\kappa}{\omega} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] \right\} e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t)} \\ & + \text{Conjugado hermitiano}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ e $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor posição no plano XY . As frequências normais são dadas por:

$$\omega = \sqrt{\boldsymbol{\kappa}^2 + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}}. \quad (3.71)$$

Os coeficientes de Fourier a_α são operadores que agem sobre o espaço de estados do fóton e satisfazem as relações de comutação

$$\left[a^{(\lambda)}(\boldsymbol{\kappa}, n), a^{(\lambda')}(\boldsymbol{\kappa}', n') \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'). \quad (3.72)$$

É conveniente escrever o potencial vetorial na forma geral:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(0) A_{\alpha}(r) e^{-i\omega_{\alpha} t} + c.h., \quad (3.73)$$

onde $\mathbf{A}_{\alpha}(r)$ denota as funções modais do campo. Essas funções para cada estado de polarização obedece as equações de Helmholtz e devem satisfazer às condições de contorno especificadas acima. Em nosso caso as funções modais são dadas por:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\kappa}, n}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[2]{\omega}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}} \hat{\boldsymbol{\kappa}} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.74)$$

e

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\kappa}, n}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[2]{\omega}} \left[\hat{\boldsymbol{\kappa}} \frac{i n \pi}{\omega L} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] - \hat{\mathbf{z}} \frac{\kappa}{\omega} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] \right] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}}. \quad (3.75)$$

Podemos calcular as expressões para os modos do campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ para cada uma das polarizações

$$\mathbf{E}_{i\boldsymbol{\kappa}n}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\pi} \left(\frac{\pi}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}} \hat{\boldsymbol{\kappa}} \times \hat{\mathbf{z}}_i, \quad (3.76)$$

e

$$\mathbf{E}_{i\kappa n}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[\hat{\kappa}_i \frac{in\pi}{\omega L} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] - \hat{\mathbf{z}}_i \frac{\kappa}{\omega} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] \right] e^{-i\kappa \cdot \rho} \quad (3.77)$$

Notando que $a_\alpha |0\rangle = 0$ e $\langle 0| a_\alpha^\dagger = 0$, podemos expressar os correlatores $\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o$ na forma geral:

$$\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o = \sum_{\alpha} E_{i\alpha}(\mathbf{r}) E_{j\alpha}^*(\mathbf{r}) \quad (3.78)$$

Substituímos os campos elétricos dados pelas equações (3.76) e (3.77) na equação (3.78), escrevemos as componentes dos vetores na forma $\hat{\kappa}_i = \cos \phi \delta_{ix} + \sin \phi \delta_{iy}$, $\hat{\mathbf{z}}_i = \delta_{iz}$ e $(\hat{\kappa} \times \hat{\mathbf{z}})_i = \cos \phi \delta_{ix} - \sin \phi \delta_{iy}$, onde ϕ é o ângulo azimutal no plano xy e calculamos as integrais angulares. Deste modo obtemos:

$$\begin{aligned} \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o &= \frac{2\pi}{L} \frac{\delta_{ij}^{\parallel}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] \int_0^{\infty} d\kappa \kappa \omega(\kappa, n) \\ &+ \frac{2\pi}{L} \frac{\pi^2}{L} \frac{\delta_{ij}^{\parallel}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] \int_0^{\infty} d\kappa \kappa \omega^{-1}(\kappa, n) \\ &+ \frac{2\pi}{L} \delta_{ij}^{\perp} \sum_{n=0}^{\infty} \cos^2 \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{L} \right] \int_0^{\infty} d\kappa \kappa \omega^{-3}(\kappa, n), \quad (3.79) \end{aligned}$$

onde $\delta_{ij}^{\parallel} = \delta_{ix} \delta_{jx} + \delta_{iy} \delta_{jy}$ e $\delta_{ij}^{\perp} = \delta_{iz} \delta_{jz}$. As manipulações são formais no sentido que as somas e as integrais são divergentes. As integrais divergentes podem ser regularizadas com a ajuda da seguinte representação da função beta de Euler:

$$\int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} (x^2 + a^2)^{\nu-1} = B\left(\frac{\mu}{2}, 1 - \nu - \frac{\mu}{2}\right) a^{\mu+2\nu-2},$$

onde:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Em primeiro lugar escrevemos as frequências normais nos integrando de (3.79) como potências de uma variável complexa $-s$. Em seguida, fazemos as extensões analíticas e calculamos as integrais no limite $s \rightarrow 0$. O resultado é então

$$\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o = \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{2}{3\pi} (-\delta_{ij}^{\parallel} + \delta_{ij}^{\perp}) \zeta\left(-3, \frac{1}{2}\right) + \delta_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^3 \cos \left[(2n+1) \frac{\pi z}{L} \right] \quad (3.80)$$

A função zeta de Hurwitz $\zeta(-p, q)$, se p for um número não-negativo e q um número real, é dada por [44]:

$$\zeta(-p, q) = -\frac{\mathcal{B}_{p+1}(q)}{p+1},$$

onde $\mathcal{B}_{p+1}(q)$ é um polinômio de Bernoulli. Em particular

$$\mathcal{B}_4(q) = q^4 - 2q^3 + q^2 - 1/30. \quad (3.81)$$

Segue-se então que $\zeta(-3, 1/2) = -(7/8) \times (1/120)$. Levando este resultado em (3.80) obtemos

$$\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2}{3\pi} \left[\left(-\frac{7}{8}\right) (-\delta^{\parallel} + \delta^{\perp})_{ij} \left(\frac{1}{120}\right) + \delta_{ij} G(\xi) \right] \quad (3.82)$$

e procedendo da mesma forma podemos calcular o correlator

$$\langle B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2}{3\pi} \left[\left(-\frac{7}{8}\right) (-\delta^{\parallel} + \delta^{\perp})_{ij} \left(\frac{1}{120}\right) - \delta_{ij} G(\xi) \right], \quad (3.83)$$

onde definimos $\xi = \pi z/L$ e a função $G(\xi)$

$$G(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 \cos \left[(2n+1) \frac{\pi z}{L}\right]. \quad (3.84)$$

Esta soma pode ser facilmente regularizada se a escrevermos na forma:

$$G(\xi) = -\frac{1}{8} \times \frac{1}{2i} \times \frac{d^3}{d\xi^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(2n+1)\xi} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(2n+1)\xi} \right). \quad (3.85)$$

Agora podemos girar convenientemente cada termo na equação acima e calcular a série geométrica convergente. Desfazendo a rotação obtemos:

$$\begin{aligned} G(\xi) &= -\frac{1}{8} \times \frac{d^3}{d\xi^3} \left(\frac{1}{2 \sin \xi} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(3 \frac{\cos^3(\xi)}{\sin^4(\xi)} + \frac{5 \cos(\xi)}{2 \sin^2(\xi)} \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

As equações (3.82) e (3.83) com a função $G(\xi)$ dada pela equação (3.86) são os resultados finais regularizados. Um cálculo direto ou o uso da simetria de inversão temporal permite mostrar que os correlatores da forma $\langle E_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o$ são nulos.

Mais uma vez, a correspondência entre placas de Casimir e dois conjuntos de placas de Boyer. Agora vamos calcular os correlatores dos campos para as placas de Boyer a partir dos correlatores dos campos nas placas de Casimir que são dados por [83]:

$$\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2}{3\pi} \left[(-\delta^{||} + \delta^\perp)_{ij} \left(\frac{1}{120}\right) + \delta_{ij} F\left(\frac{\pi z}{L}\right) \right], \quad (3.87)$$

e

$$\langle B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2}{3\pi} \left[(-\delta^{||} + \delta^\perp)_{ij} \left(\frac{1}{120}\right) - \delta_{ij} F\left(\frac{\pi z}{L}\right) \right], \quad (3.88)$$

onde a função $F(\xi)$ é dada por

$$F(\xi) = -\frac{1}{8} \times \frac{d^3}{d\xi^3} \left(\frac{1}{2} \cot \xi \right). \quad (3.89)$$

Em primeiro lugar, notemos que as grandezas $L \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o$ e $L \langle B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o$ podem ser subtraídas da seguinte forma:

$$L \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_{o,L}^B = 2L \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_{o,2L}^C - L \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_{o,L}^C, \quad (3.90)$$

e

$$L \langle B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o^B = 2L \langle B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) \rangle_{o,2L}^C - L \langle B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) \rangle_{o,L}^C, \quad (3.91)$$

onde o índice superior C e B referem-se às placas de Casimir e Boyer respectivamente. Os índices inferiores $2L$ e L significam que a distância entre as placas é $2L$ e L . Usando a eq(3.87) podemos escrever:

$$L \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle_o^C = \pi^4 \frac{2}{3\pi} \frac{1}{L^3} \left[(-\delta^{||} + \delta^\perp)_{ij} \left(\frac{1}{120}\right) + \delta_{ij} F\left(\frac{\pi z}{L}\right) \right]. \quad (3.92)$$

O fator $-7/8$ surge imediatamente da subtração $1/2^3 - 1$ e a função $G(\xi)$ é dada por:

$$G(\xi) = \frac{1}{2^3} F\left(\frac{\xi}{2}\right) - F(\xi). \quad (3.93)$$

Desenvolvendo esses resultados obtemos facilmente as equações (3.86) e (3.82). O correlator para o campo magnético pode ser calculado analogamente, fornecendo o resultado da equação (3.88)

3.6 O efeito Casimir repulsivo e os limites de uma única placa

Verificaremos que os correlatores obtidos acima reproduzem alguns resultados conhecidos. Começamos pela energia de Casimir. A densidade de energia entre as duas placas é dada por:

$$\rho = \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \rangle_o. \quad (3.94)$$

Usando as equações (3.82) e (3.83) obtemos os correlatores em função da posição:

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle_o = \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{2}{3\pi} \left[\left(\frac{7}{8 \times 120} \right) + 3G(\xi) \right] \quad (3.95)$$

e

$$\langle \mathbf{B}^2 \rangle_o = \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{2}{3\pi} \left[\left(\frac{7}{8 \times 120} \right) - 3G(\xi) \right]. \quad (3.96)$$

Somando estas duas equações os termos dependentes da distância cancelam-se e substituindo na equação (3.94) obtemos:

$$\rho_o = \frac{7}{8} \times \frac{\pi^2}{760L^4}, \quad (3.97)$$

que é precisamente a energia de Casimir para o caso das placas de Boyer e resulta em uma força repulsiva entre as placas, como pode se verificar facilmente.

Também é conveniente analisar o comportamento dos correlatores na presença de uma única placa fazendo $(L \rightarrow \infty)$. Para isto primeiro expandimos $G(\xi)$ próximo a $\xi = 0$ ($z \ll L$). O resultado é:

$$G(\xi) \approx \frac{1}{8} \times \frac{3}{\xi^4}.$$

Por outro lado, se expandirmos em torno de $\xi = \pi$ ($z \approx L$) obtemos

$$G(\xi) \approx -\frac{1}{8} \times \frac{3}{(\xi - L)^4}.$$

Estas aproximações mostram que $G(\xi)$ é uma função rapidamente divergente próximo a cada espelho. Com estes resultados é fácil obter o comportamento de $\langle \mathbf{E}^2 \rangle_o$ e $\langle \mathbf{B}^2 \rangle_o$ próximo às placas. Próximo à placa perfeitamente condutora em $z = 0$ obtemos:

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle_o \approx +\frac{3}{4\pi z^4}, \quad (3.98)$$

e

$$\langle \mathbf{B}^2 \rangle_o \approx -\frac{3}{4\pi z^4} \quad (3.99)$$

A divergência $\sim 1/z^4$ está em acordo com o previsto por Deutsch e Candelas, para a função de Green. Notemos ainda que o valor finito para a energia de Casimir depende de um delicado cancelamento desses infinitos e esta particularidade só deve ocorrer para algumas geometrias. Em geral, há divergências do tipo $1/R^4$, onde R é o raio de curvatura local. Por outro lado, próximo ao espelho permeável em $z = L$ obtemos:

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle_o \approx -\frac{3}{4\pi (z - L)^4} \quad (3.100)$$

e

$$\langle \mathbf{B}^2 \rangle_o \approx +\frac{3}{4\pi (z - L)^4}. \quad (3.101)$$

As equações (3.98) e (3.99) estão de acordo com os resultados obtidos para uma única placa condutora. As equações (3.100) e (3.101) são resultados novos. Investigaremos agora uma propriedade mais intrigante do vácuo: sua anisotropia.

3.7 O efeito Scharnhorst

A velocidade da luz na teoria especial da relatividade é uma constante universal c . Tal universalidade está associada ao fato de considerarmos a propagação da luz no vácuo cuja natureza inerte e imutável, própria da física clássica, não teria como intervir nos processos que influenciam a velocidade da luz. Por outro lado, sabemos que é possível construir a teoria especial da relatividade sem mencionar a propagação da luz, desfazendo a identificação entre a constante universal da teoria especial da relatividade e a velocidade da luz. A propagação da luz em meios materiais, contudo, adquire propriedades dependentes do meio tais como: a birrefringência, a anisotropia, a dispersão, etc. Esses fenômenos são descritos por meio do índice de refração $n(\omega)$ do meio. E ainda mais, passamos a ter várias

velocidades que respondem a questões diferentes. Por exemplo, citemos a velocidade de fase, a velocidade de grupo, a velocidade da frente de onda dadas respectivamente por:

$$v_{fase} = \frac{c}{n(\omega)}, \quad (3.102)$$

$$v_g = \frac{c}{n_g(\omega)}, \quad n_g(\omega) = n(\omega) + \frac{dn(\omega)}{d\omega} \quad (3.103)$$

$$v_{fr} = \frac{c}{n(\infty)}. \quad (3.104)$$

Na eletrodinâmica quântica, como em todas teorias de campo, o vácuo tem uma estrutura que pode reagir aos estímulos externos. O vácuo passa a ser um meio material com uma densidade de energia, polarizável, não-uniforme, com todas as propriedades de um meio dispersivo. Assim, a propagação da luz passa a depender dessas propriedades e a velocidade da luz perde o seu significado absoluto, universal. A eletrodinâmica quântica, por sua vez, permite calcular o índice de refração do vácuo nessas condições. A birrefringência do vácuo foi estudada por Adler [84] que mostrou como um campo magnético externo pode criar propriedades que dependem da polarização do fóton. A presença de campos gravitacionais também podem alterar a velocidade da luz.

A anisotropia do vácuo não-confinado da eletrodinâmica quântica quando exposto a campos eletromagnéticos externos foi discutido em 1952 por Toll [85] e mais recentemente em [86], [87] [88], [89]. Nosso objetivo aqui é rediscutir a anisotropia do vácuo quando a energia de Casimir associada é positiva e comparar nossos resultados com o efeito Scharnhorst original.

Foi mostrado por Scharnhorst há algum tempo atrás que o vácuo confinado entre duas placas perfeitamente condutoras paralelas também é anisotrópico. Em condições convenientes um sinal luminoso pode propagar-se na direção perpendicular às placas com uma velocidade $c'_\perp > c$. Nenhuma alteração na velocidade é prevista se a luz se propaga em uma direção paralela à superfície do espelho, ou seja $c'_\parallel = c$. A predição de Scharnhorst foi obtida pela análise do efeito Casimir a partir da abordagem da teoria quântica de campos com condições de contorno feita por Bordag, Robaschik e Wieczorek [90]. O propagador do fóton com condições de contorno obtido na referência [90] é o propagador usual mais as correções que dependem explicitamente das condições de contorno. O objetivo de Scharnhorst foi então calcular as correções proporcionais a um laço às equações da eletrodinâmica clássica induzidas pelas condições de contorno às flutuações do campo quantizado de fótons. Isto equivale a determinar as correções radiativas quadráticas nos campos eletromagnéticos à ação de Euler-Heisenberg. Tais correções levam em conta a contribuição de diagramas a dois laços fermiônicos ao tensor de polarização do fóton com o propagador interno do fóton modificado de modo a satisfazer às condições de contorno de Dirichlet nas placas. Nenhuma condição de contorno é imposta ao campo fermiônico.

Os coeficientes dos termos quadráticos aos campos na ação efetiva podem ser facilmente identificados e definem os tensores permitividade e permeabilidade do vácuo. O resultado final de Scharnhorst é:

$$c'_{\perp} = \left(1 + \frac{11}{2^6 \times 45^2} \frac{e^4}{(ma)^4}\right) c, \quad (3.105)$$

onde $c_{\perp}$ é a velocidade da luz na direção perpendicular às placas. Expressando a em metros podemos verificar que a variação relativa é extremamente pequena sendo dada por:

$$\frac{\Delta c}{c} \sim 1,6 \times 10^{-60} a^{-4}. \quad (3.106)$$

Mais tarde o mesmo resultado foi rededuzido por Barton [91] de um modo muito mais simples. O ponto de partida de Barton é a adição à densidade de lagrangiana do campo eletromagnético de um termo de correção representado pela lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg, de modo que a densidade de lagrangiana total é:

$$L = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} \quad (3.107)$$

$$= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + g \left[(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \quad (3.108)$$

onde $g = \alpha^2/2^3 \cdot 3^2 \cdot \pi^2 m^4$. A densidade de lagrangiana representada por (3.107) descreve campos lentamente variáveis para os quais vale a condição $\omega \ll m$. Aqui ω e m são respectivamente a freqüência angular do campo e a massa do elétron. Podemos usar a Lagrangiana de Euler-Heisenberg para levar em conta de um modo clássico os efeitos do vácuo fermiônico. Pode-se mostrar que nestas circunstâncias ainda podemos usar formalmente as equações de Maxwell se propriedades elétricas e magnéticas forem atribuídas ao vácuo. Estas propriedades são representadas por uma polarização $\mathbf{P}$ e uma magnetização $\mathbf{M}$ do vácuo dadas por:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathbf{E}} = 4g (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{E} + 14g (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}, \quad (3.109)$$

e

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathbf{B}} = -4g (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{B} + 14g (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E}. \quad (3.110)$$

Agora dividimos os campos em duas partes, uma descrevendo os campos quantizados e a outra descrevendo o campo clássico, ou seja, escrevemos:

$$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_c \quad (3.111)$$

e

$$\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}_q + \mathbf{B}_c \quad (3.112)$$

e substituímos nas equações (3.109) e (3.109). Este procedimento é suficiente para acoplar os campos externos aos campos quantizados por meio de ação intermediária de um laço fermiônico. Mantendo os termos lineares nos campos clássicos somente obtemos as seguinte expressões para a permissividade elétrica e a suscetibilidade magnética do vácuo:

$$\chi_{ij}^{(e)} = 4g [\langle \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \rangle_o \delta_{ij} + 2 \langle E_i E_j \rangle_o] + 14g \langle B_i B_j \rangle_o, \quad (3.113)$$

e

$$\chi_{ij}^{(m)} = 4g [-\langle \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \rangle_o \delta_{ij} + 2 \langle B_i B_j \rangle_o] + 14g \langle E_i E_j \rangle_o. \quad (3.114)$$

Os tensores permissividade do vácuo são:

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi \chi_{ij}^{(e)} = \delta_{ij} + \Delta \epsilon_{ij}, \quad (3.115)$$

e

$$\mu_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi \chi_{ij}^{(m)} = \delta_{ij} + \Delta \mu_{ij}. \quad (3.116)$$

Os valores esperados em (3.113) e (3.114) podem ser facilmente calculados com ajuda dos correlatores dados em (3.82) e (3.83). Fazendo isto obtemos os resultados:

$$\Delta \epsilon_{ij} = g \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{16}{3} \left[\left(-\frac{7}{8} \right) (-\delta^{\parallel} + \delta^{\perp})_{ij} \left(\frac{11}{120} \right) + 9\delta_{ij} G(\xi) \right] \quad (3.117)$$

e

$$\Delta \mu_{ij} = g \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{16}{3} \left[\left(-\frac{7}{8} \right) (-\delta^{\parallel} + \delta^{\perp})_{ij} \left(\frac{11}{120} \right) - 9\delta_{ij} G(\xi) \right]. \quad (3.118)$$

Podemos também obter os limites de $\Delta \epsilon_{ij}$ e $\Delta \mu_{ij}$ para um único espelho. Fazendo as aproximações para a função $G(\xi)$ nos limites $\xi \longrightarrow 0$ e $\xi \longrightarrow \pi$ temos próximo à placa condutora:

$$\Delta \epsilon_{ij} = -\Delta \mu_{ij} = 18g \frac{\delta_{ij}}{z^4}, \quad (3.119)$$

e próximo à placa perfeitamente permeável em $z = L$:

$$\Delta \epsilon_{ij} = -\Delta \mu_{ij} = -18g \frac{\delta_{ij}}{(z - L)^4}. \quad (3.120)$$

Agora estamos interessados no índice de refração $n = \sqrt[3]{\epsilon\mu}$ e na sua variação de primeira ordem:

$$\Delta n = \frac{1}{2} (\Delta\epsilon + \Delta\mu), \quad (3.121)$$

para direções de propagação definidas por eixos cartesianos. Vamos considerar em primeiro lugar uma onda plana propagando-se na direção OX com o campo elétrico vibrando na direção OZ. Então $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_{33}$ e $\Delta\mu = \Delta\mu_{22}$ e de 3.121 podemos facilmente verificar que $\Delta n = \frac{1}{2} (\Delta\epsilon_{33} + \Delta\mu_{22}) = 0$. Obtemos o mesmo resultado em todos os casos em que a propagação for paralela à placa. Em consequência a velocidade da luz permanece invariável para a propagação paralela às placas. Agora consideramos a propagação da luz na direção perpendicular à placa, ao longo do eixo OZ. Considere a onda polarizada na direção OX, por exemplo. Então $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_{11}$ e $\Delta\mu = \Delta\mu_{22}$ e das equações (3.117) (3.118) e (3.121) obtemos agora:

$$\begin{aligned} \Delta n_{\perp} &= \frac{1}{2} (\Delta\epsilon_{11} + \Delta\mu_{22}) \\ &= +\frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{(mL)^4} \frac{11\pi^2}{2^3 \times 3^4 \times 5^2} \end{aligned} \quad (3.122)$$

que é o resultado obtido por Scharnorst e reobtido por Barton multiplicado pelo fator $-\frac{7}{8}$. A velocidade da luz nessa direção é então :

$$v_{\perp} \approx 1 - \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{(mL)^4} \frac{11\pi^2}{2^3 \times 3^4 \times 5^2} < 1. \quad (3.123)$$

A velocidade média da luz em todas as direções e polarizações para as placas de Boyer também satisfaz a fórmula de Latorre et al. [92], que para o caso da eletrodinâmica quântica espinorial é

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{1}{4\pi} \oint v(\theta) d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint \left(1 - \frac{7}{8} \frac{\alpha^2}{(mL)^4} \frac{11\pi^2}{2^3 \times 3^4 \times 5^2} \cos^2 \theta \right) 2\pi \sin \theta d\theta \\ &= 1 - \frac{44\alpha^2}{135m_e^4} \varrho_o, \end{aligned} \quad (3.124)$$

onde θ na última equação é o ângulo entre a direção de propagação da onda e o eixo OZ e a densidade de energia do vácuo ϱ_o é dada pela equação (3.97). Pode-se mostrar que esta fórmula pode ser obtida no limite fraco do formalismo geral devido a Gies e Dittrich em sua análise do vácuo não-trivial [93].

3.8 O efeito Scharnhorst na eletrodinâmica quântica escalar

A eletrodinâmica quântica spinorial, por exemplo, pode ser comparada com eletrodinâmica quântica escalar, como faremos a seguir ao analisar o efeito Scharnhorst nesse contexto. A Lagrangiana restrita para a eletrodinâmica quântica escalar, análoga à lagrangiana de Euler-Heisenberg é [20]:

$$L_o^{(1)} = g_o \left[\frac{7}{4} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right], \quad (3.125)$$

com $g_o = \alpha^2 / (5 \times 3^2 \times 2^5 \times \pi^2 \times m_o^4)$ e onde m_o é a massa do hipotético bóson carregado associado à eletrodinâmica quântica escalar a um laço. Como antes a polarização e a magnetização são definidas por (??) e também, como antes, fazemos as substituições $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_c$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_q + \mathbf{B}_c$ e mantemos somente os termos lineares nos campos clássicos para obter as correções $\Delta\epsilon_{ij}$ e $\Delta\mu_{ij}$ aos tensores dielétrico e permitividade do vácuo da eletrodinâmica quântica escalar. Os resultados são:

$$\Delta\epsilon_{ij} = 28\pi g_o \langle \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \rangle_o \delta_{ij} + 56\pi g_o \langle E_i E_j \rangle_o + 8\pi g_o \langle B_i B_j \rangle_o \quad (3.126)$$

e,

$$\Delta\mu_{ij} = -28\pi g_o \langle \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \rangle_o \delta_{ij} + 56\pi g_o \langle B_i B_j \rangle_o + 8\pi g_o \langle E_i E_j \rangle_o. \quad (3.127)$$

Agora podemos usar estes resultados para analisar a velocidade da luz no vácuo confinado da eletrodinâmica quântica escalar. Como o efeito Scharnhorst está sendo estudado na eletrodinâmica quântica escalar pela primeira vez, consideraremos placas de Casimir e placas de Boyer.

Placas de Casimir. Consideremos o sistema já descrito no capítulo 2 e que convençamos chamar de placas de Casimir. As expressões para os correlatores do campo para estas placas são dadas pelas equações (3.87) e (3.88). Substituímos nas equações (3.128) e (3.129) e após algumas manipulações obtemos:

$$\Delta\epsilon_{ij} = \frac{16}{3} g_o \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{16}{3} \left[(-\delta^{||} + \delta^\perp)_{ij} \left(\frac{1}{15} \right) + 27\delta_{ij} F(\xi) \right]. \quad (3.128)$$

e

$$\Delta\mu_{ij} = \frac{16}{3} g_o \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left[(-\delta^{||} + \delta^\perp)_{ij} \left(\frac{1}{15} \right) - 27\delta_{ij} F(\xi) \right] \quad (3.129)$$

Com estes resultados podemos calcular a correção de ordem um ao índice de refração Δn e, conseqüentemente, a correção à velocidade da luz entre as placas de Casimir na

eletrodinâmica quântica escalar. Analogamente ao caso da eletrodinâmica quântica spinorial, mostramos que a velocidade da luz permanece inalterada na direção paralela às placas e na direção perpendicular às placas torna-se maior que c , sofrendo um acréscimo dado por

$$\Delta_{\perp} v = -\Delta n = +\frac{16}{45} g_o \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 > 0 \quad (3.130)$$

É interessante comparar este resultado com o efeito análogo que ocorre com a eletrodinâmica quântica spinorial. Supondo que as partículas bosônicas e fermiônicas tenham a mesma carga, podemos ver que a razão entre os desvios a teoria escalar e a teoria spinorial é

$$\frac{\Delta_{\perp}^b v}{\Delta_{\perp} v} = 8 \times \left(\frac{m}{m_o} \right)^4 \quad (3.131)$$

Placas de Boyer. Agora vamos repetir este resultado para o par de placas de Boyer. Os correlatores que nós precisamos são dados por (3.82) e (3.83) Substituindo em (3.128) e (3.129) obtemos:

$$\Delta \epsilon_{ij} = g_o \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{16}{3} \left[\left(-\frac{7}{8} \right) (-\delta^{ii} + \delta^{\perp})_{ij} \left(\frac{1}{15} \right) + 27 \delta_{ij} G(\xi) \right] \quad (3.132)$$

e

$$\Delta \mu_{ij} = g_o \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \frac{16}{3} \left[\left(-\frac{7}{8} \right) (-\delta^{ii} + \delta^{\perp})_{ij} \left(\frac{1}{15} \right) + 27 \delta_{ij} G(\xi) \right] \quad (3.133)$$

A velocidade da luz entre as placas de Boyer na direção perpendicular às placas é modificada por:

$$\Delta_{\perp} v = -\Delta n = -\frac{7}{8} \times \frac{16}{45} g_o \left(\frac{\pi}{L^4} \right) < 0 \quad (3.134)$$

Os resultados dados pelas equações (3.130) e (3.134) podem ser unificados se fizermos uma média sobre todas as direções de propagação. Para placas de Casimir obtemos

$$v(\theta) = 1 - \frac{16}{45} g_o \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \cos^2(\theta) \quad (3.135)$$

onde θ é o ângulo entre a direção de propagação e o eixo OZ. Em seguida determinamos a média sobre todas as direções. O resultado é

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int v(\theta) d\Omega = 1 + \frac{8\alpha^2}{135m_o^4} \left(\frac{\pi^2}{720L^4} \right) \\ &= 1 - \frac{8\alpha^2}{135m_o^4} \rho_o \end{aligned} \quad (3.136)$$

A equação (3.136) é versão para a eletrodinâmica escalar da fórmula unificada de Latorre *et al* e corresponde ao limite de campo fraco de um procedimento mais geral, baseado na ação efetiva, desenvolvido por Dittrich e Gies. A variação na velocidade da luz em todos estes casos é extremamente pequena. Substituindo os valores numéricos para as constantes que aparecem nas equações e considerando que a distância entre as placas é $1\mu m$ (3.124) e (3.136), podemos verificar que as correções são da ordem de 10^{-36} . A verificação experimental desse efeito está, portanto, fora de questão, a menos que possamos calcular o índice de refração para frequências altas [94]. O cálculo em ordem mais alta não melhora nossa situação e só o cálculo não-perturbativo permite a solução completa do problema. A violação da causalidade também depende do conhecimento do comportamento das correções em altas frequências. De qualquer modo, esta questão é controvertida e há na literatura diversas soluções para o problema.

Conclusões

Os fatos da física, quer teóricos quer experimentais, podem ser vistos sob diferentes pontos de vista. Alguns são mais convincentes e outros, mais desejáveis. Algumas idéias vão e voltam cada vez mais enriquecidas com o desenvolvimento global do conhecimento. Entretanto, alguns conceitos se tornam tão importantes que passam a ser considerados como uma espécie de pedra fundamental na construção da teoria física. Um desses conceitos é o vácuo, ao menos nesta dissertação o consideramos assim. Esta última ascensão do conceito de vácuo subsume a teoria quântica de campos e por isto suas propriedades puderam ser inquiridas, pela primeira vez na história da física, a partir de uma teoria. É claro que há outras interpretações que podem substituir o conceito de vácuo, mas nada falamos sobre estas alternativas apesar de serem igualmente interessantes.

O vácuo que se origina da teoria quântica de campos é dotado de uma estrutura fisicamente muito rica. O nosso trabalho foi desenvolvido com a presunção de contribuir, mesmo que de forma comedida, à compreensão de suas propriedades mais fundamentais. Nos limitamos, por força da complexidade, aos três seguintes temas: as forças de van der Waals, o efeito Casimir a temperatura não-nula e o efeito Scharnorst.

As forças de van der Waals, estudadas no primeiro capítulo, constituem um tema de pesquisa muito ativo. A ação do vácuo na estrutura de cada átomo ou molécula causa efeitos variados os quais exigem modelos cada vez mais sofisticados para reproduzirem os resultados experimentais com a mesma precisão. A força de van der Waals dispersiva é um destes efeitos e foi calculada, por London, para moléculas polarizáveis eletricamente e para pequenas distâncias. Mais tarde, Casimir e Polder calcularam a força entre tais moléculas para grandes distâncias, levando em conta o retardamento da interação. Para moléculas que têm as duas polarizações, magnética e elétrica, também já se conhecia a força de interação para grandes distâncias. A força entre uma molécula polarizável eletricamente e outra magneticamente para pequenas distâncias, entretanto, não havia sido determinada. Acreditamos que tenhamos preenchido esta lacuna que havia na literatura a respeito da força de van der Waals. Nosso resultado é surpreendente porque introduz uma lei de potência inesperada para esta força, a saber $F \propto 1/r^4$. Esperamos dar continuidade a esta linha de pesquisa visto que muitas questões já foram colocadas. Em particular estamos interessados em investigar a interação entre uma molécula e uma parede em

condições que ainda não foram consideradas na literatura. Também já iniciamos, nessa mesma linha de pesquisa, o estudo do efeito da temperatura sobre as forças de van der Waals. Embora não seja nosso interesse imediato, temos também planos para trabalhar com um grupo experimental com o objetivo de analisar a transição mais abrupta que ocorre com a força de van der Waals entre moléculas de natureza distinta.

No segundo capítulo, estudamos o efeito Casimir propriamente dito. Este tema despertou muito interesse porque efetivamente revelou à física muitos outros fenômenos e questões fundamentais. Não seria exagero dizer que o efeito Casimir é o tema que unifica todas as linhas de pesquisa dentro do nosso grupo. Nossos esforços, entretanto, se concentraram no estudo da influência da temperatura ao efeito Casimir. Embora nosso trabalho tenha tido uma motivação teórica, sabemos que há a necessidade de se determinar as correções térmicas a este efeito porque as medidas experimentais já são suficientes para detectá-las. Dois sistemas foram estudados em detalhes: as placas de Boyer, formadas por uma placa perfeitamente condutora e outra infinitamente permeável e a caixa retangular de paredes condutoras. Para o primeiro sistema calculamos a pressão de Casimir com as correções térmicas e demonstramos que esse sistema é equivalente a dois conjuntos de placas de Casimir e para o segundo determinamos a energia de Casimir. Conseguimos estender a idéia de inversão de temperatura a esses dois sistemas, eludindo as afirmações que sugeriam a necessidade de condições simétricas para que tal simetria existisse. Esta linha de pesquisa é promissora e já temos alguns projetos em andamento que dependem do cálculo de correções térmicas.

O terceiro tema da tese refere-se à variação da velocidade da luz em uma região onde a densidade de energia do vácuo é diferente de zero, o assim chamado efeito Scharnorst. Originalmente Scharnorst demonstrou que a velocidade da luz entre placas de Casimir na direção perpendicular às placas é maior do que c . A densidade de energia entre as placas de Casimir é negativa e Barton especulou que o sinal da variação da velocidade da luz poderia depender da densidade de energia do vácuo. Nossos trabalhos, citados nesse capítulo, mostraram que esta conjectura está correta e calculamos a variação da velocidade da luz entre placas de Boyer. Complementamos a discussão com o cálculo do efeito Scharnorst usando a eletrodinâmica escalar e calculamos as variações da velocidade da luz na direção perpendicular às placas, considerando placas de Casimir e placas de Boyer. Esse campo de pesquisa é bastante cativante, pois estas variações na velocidade da luz têm implicações teóricas profundas. Mas questões como a quebra de causalidade devida à velocidade superluminal estão longe de serem resolvidas e certamente teremos que compreender muito mais a respeito do vácuo submetido a condições externas e da propagação da luz nestes meios antes de obtermos respostas, ainda que limitadas, a estes problemas.

Referências Bibliográficas

- [1] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina e A. C. Tort, O efeito Casimir, Cadernos de Divulgação Científica do IF/UFRJ (1998).
- [2] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina e A. C. Tort, Ciência Hoje **25**, 26 (1999).
- [3] W. E. L. e R C Rutherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [4] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum: An introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, New York, 1994.
- [5] H. E. Puthoff, Phys. Rev. **40**, 4857 (1989).
- [6] A. D. Sakharov, Sov. Phys. Dokl. **12**, 1040 (1968).
- [7] F. London, Z. Phys. **63**, 245 (1930).
- [8] H. B. G. Casimir e D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
- [9] G. Feinberg e J. Sucher, J. Chem. Phys. **48**, 3333 (1968).
- [10] G. Feinberg e J. Sucher, Phys. Rev. A **2**, 2395 (1970).
- [11] T. H. Boyer, Ann. Phys. **56**, 474 (1970).
- [12] C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, Am. J. Phys. **67**, 344 (1999).
- [13] C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, Submetido ao Am. J. Phys. (2000).
- [14] C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, hep-th/0007190 , 1 (2000).
- [15] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [16] L. S. Brown e G. J. Maclay, Phys. Rev. **184**, 1272 (1969).
- [17] F. C. Santos e A. C. Tort, Phys. Rev. D **60**, 1 (1999).

- [18] F. C. Santos e A. C. Tort, Phys. Lett. B **482**, 323 (2000).
- [19] W. Heisenberg e H. Euler, Z. f. Phys. **98**, 714 (1936).
- [20] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [21] K. Scharnorst, Phys. Lett. B **236**, 354 (1990).
- [22] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, Proceedings of the Fourth Workshop on Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions , 260 (1999).
- [23] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, J. Phys. A **32**, 4463 (1999).
- [24] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, Phys. Lett. B **446**, 170 (1999).
- [25] J. D. V. der Waals, *Over de Continuïteit Van Den Gas Vloeistoestand*, Tese de doutorado, 1873.
- [26] W. H. Keeson, Z. Physik **22**, 129 (1921).
- [27] P. Debye, Phys. Z. **21**, 178 (1920).
- [28] R. Eisenschitz e F. London, Z. Phys. **60**, 491 (1930).
- [29] E. J. W. Verwey e J. T. G. Overbeek, *Theory of the Stability of Lyophobic Colloids*, 1948.
- [30] D. Tabor e R. H. S. Winterton, Proc. Roy. Soc. Lond. **A312**, 435 (1969).
- [31] J. D. Jackson, *Classical Eletrodynamics*, Wiley, 1998.
- [32] D. Langbein, *Theory of Van der Waals Attraction*, volume 72 of *Springer Tracts in Modern Phys.*, Springer-Verlag, 1974.
- [33] A. C. Tort, *Alguns Aspectos Do Efeito Casimir*, Tese de doutorado, IF/UFRJ, 1997.
- [34] A. Madureira, *Lições de Álgebra Superior e Geometria Analítica*, Porto Editora, 1948.
- [35] V. M. Mostepanenko e N. N. Trunov, *The Casimir Effect and its Applications*, Claredon, Oxford, 1997.
- [36] T. H. Boyer, Phys. Rev. **180**, 19 (1969).

- [37] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge, sixth edition, 1980.
- [38] A. S. Davidov, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [39] T. H. Boyer, Phys. Rev. **9**, 2078 (1974).
- [40] W. Dittrich e M. Reuter, *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics*, volume 220, Springer-Verlag, 1984.
- [41] L. C. Albuquerque, C. Farina, S. Rabello e A. Vaidya, Lett. Math. Phys. **34**, 373 (1995).
- [42] W. Lukosz, Physica **56**, 109 (1971).
- [43] A. T. Leite, MÉTODO DA FUNÇÃO ZETA GENERALIZADA e APLICAÇÕES, Tese de mestrado, UFRJ, 1997.
- [44] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo e A. A. Bytsenko, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [45] J. S. Dowker e R. Critchley, Phys. Rev. **13**, 3224 (1976).
- [46] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).
- [47] G. W. Gibbons, Phys. Lett. A **60**, 385 (1977).
- [48] B. F. Svaiter e N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **35**, 1840 (1994).
- [49] V. Hushwater, Am. J. Phys. **65**, 381 (1997).
- [50] M. J. Sparnaay, Physica **24**, 751 (1958).
- [51] S. K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [52] U. Mohideen e A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
- [53] A. Roy e U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).
- [54] R. Ruggiero, A. H. Zimerman e A. Villani, Rev. Bras. Fis. **7**, 663 (1977).
- [55] L. A. Ferreira, SOBRE a ENERGIA DE PONTO ZERO DO CAMPO ELETRO-MAGNÉTICO NA PRESENÇA DE CORPOS MATERIAIS, Tese de mestrado, IFT, 1980.
- [56] T. H. Boyer, Phys. Rev. **174**, 1764 (1968).

- [57] A. A. Actor, J. Phys. A:Math. Gen. **28**, 5737 (1995).
- [58] M. Fierz, Helv.Phys. Acta **33**, 855 (1960).
- [59] J. Mehra, Physica (Amsterdam) **37**, 145 (1967).
- [60] N. F. Svaiter, Il Nuovo Cimento **105A**, 959 (1992).
- [61] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [62] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
- [63] L. V. Keldish, Sov. Phys, JETP **20**, 1018 (1965).
- [64] R. J. Kubo, Phys. Soc. Japan **12**, 570 (1957).
- [65] P. C. Martin e J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
- [66] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, London, 1965.
- [67] P. Epstein, Math. Ann. **56**, 615 (1903).
- [68] P. Epstein, Math. Ann. **63**, 205 (1907).
- [69] E. Elizalde e A. Romeo, J. Math. Phys. **30**, 1133 (1989).
- [70] S. D. Poisson, J. L'école polytechnique **XII**, Cahier XIX, 420 (1823).
- [71] F. Ravndal e D. Tollefsen, Phys. Rev. D **40**, 4191 (1989).
- [72] S. Tadaki e S. Takagi, Prog.Theor. Phys. **75**, 262 (1986).
- [73] C. Wotzasek, J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 1627 (1990).
- [74] A. A. Actor, Fortschr. Phys. **43**, 141 (1995).
- [75] K. Scharnhorst, hep-th/9810221 v2 , 1 (1998).
- [76] C. Itzykson e J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [77] R. J. Rivers, *Path Integral in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [78] M. Born e L. Infeld, Proc. Roy. Soc. A **144**, 425 (1934).