

Efeito Casimir e Polarização do Vácuo
do Campo de Dirac

Leonardo Bernardino de Carvalho

Orientador: Marcus Venícius Cougo Pinto

**EFEITO CASIMIR E POLARIZAÇÃO DO VÁCUO
DO CAMPO DE DIRAC**

LEONARDO BERNARDINO DE CARVALHO

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Marcus Venícius Cougo Pinto

**Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro**

Rio de Janeiro

Julho de 2006

Carvalho, Leonardo Bernardino de.

C331 Efeito Casimir e Polarização do Vácuo do Campo de Dirac/
Leonardo Bernardino de Carvalho. - Rio de Janeiro: UFRJ/
IF, 2006.

xi, 145f.:il.; 29,7cm.

Orientador: Marcus Venícius Cougo Pinto

Tese (Doutorado) - UFRJ/ IF/ Programa de Pós-graduação
em Física, 2006.

Referências Bibliográficas: f. 146-152.

1. Criação de pares 2. Lagrangiana efetiva. 3. Energia de
Casimir. 3. Permeabilidade magnética I. Cougo-Pinto, Marcus
Venícius, II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto
de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Efeito
Casimir e Polarização do Vácuo do Campo de Dirac.

Resumo

Efeito Casimir e Polarização do Vácuo do Campo de Dirac

Leonardo Bernardino de Carvalho

Orientador: Marcus Venícius Cougo Pinto

Resumo da tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Neste trabalho estudamos efeitos de vácuo do campo de Dirac, mais especificamente, o efeito Casimir e os efeitos de polarização do vácuo por campo eletromagnético externo. O efeito Casimir considerado é com condição de contorno MIT imposta em dois planos paralelos e sob a influência de um campo magnético externo perpendicular aos planos. Mostramos que o campo externo amplifica o efeito Casimir, mas não ao ponto de trazê-lo para valores experimentalmente observáveis. O primeiro efeito de polarização que consideramos é o da magnetização do vácuo de Dirac, tal como descrita pela lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg, mas agora sob a condição de contorno MIT citada anteriormente. Obtivemos as modificações induzidas nas propriedades não-lineares descritas pela lagrangiana de Euler-Heisenberg e, além disso, uma nova contribuição ausente nessa lagrangiana. Tal contribuição é dada por uma constante de permeabilidade que depende da separação entre os planos da condição de contorno e que assume valores observáveis para separações da ordem de micrômetros ou nanômetros. Finalmente obtemos a

estatística de criação de pares sob ação de um campo elétrico aplicado, resultado que apresentamos também com o campo de Dirac sujeito à condição de contorno antiperiódica ao longo de uma dimensão espacial.

Palavras-chave: criação de pares, lagrangiana efetiva, energia de Casimir, permeabilidade magnética

Rio de Janeiro

Julho de 2006

Abstract

Casimir Effect and Vacuum Polarization of the Dirac Field

Leonardo Bernardino de Carvalho

Advisor: Marcus Venícius Cougo Pinto

Abstract da tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

In this work we study the vacuum effects of the Dirac field, more specifically, the Casimir effect and the vacuum polarization effects due to external electromagnetic field. We consider the Casimir effect with MIT boundary condition imposed on two parallel planes and under the influence of an external magnetic field perpendicular to the planes. We show that the external field amplify the Casimir effect, but not enough to bring it to observable experimentally values. The first effect of polarization that we consider is the Dirac vacuum magnetization, as described by the Euler-Heisenberg Effective Lagrangian, but now under the MIT boundary condition mentioned above. We obtain the modifications induced on the non-linear properties described by the Euler-Heisenberg Lagrangian and, furthermore, a new contribution absent in this Lagrangian. This contribution is given by a permeability constant which depends on the separation between the boundary condition planes and assumes observable values for separations of the order of micrometers OR nanometers. Finally, we obtain the statistics of the pair creation under the action

of an applied electric field, result that we also present with a Dirac field subjected to antiperiodic boundary condition along a spatial dimension.

Key-words: pair creation, effective Lagrangian, Casimir energy, magnetic permeability

Rio de Janeiro

Julho de 2006

A minha esposa Renata

Agradecimentos

Agradeço muito à minha esposa Renata, que me acompanhou por todo o meu doutorado e que foi muito importante na elaboração da minha tese, através de suas sugestões e críticas.

Agradeço muito ao meu orientador Dr. Marcus Venícius, que não apenas direcionou e criticou meu trabalho de tese, como também se empenhou muito na elaboração do nosso artigo. Além disso, Marcus me ajudou muito na parte burocrática e sempre me lembrou de todos os prazos.

Agraceço ao professor Dr. Carlos Farina pelas longas discussões e idéias que forneceu à minha tese. Não posso esquecer de comentar da sua ajuda, assim como da do Dr. Ricardo Moritz, no desenvolvimento do nosso artigo.

Agradeço muito aos meus familiares por todo o incentivo, amizade e apoio financeiro, fornecendo meios para que minha esposa e eu pudéssemos desenvolver nossos trabalhos de doutorado.

Agradeço ao grupo de Efeito Casimir pelo companheirismo, discussões teóricas e por toda a ajuda que me forneceram.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Energia de Casimir	8
2.1	Introdução ao efeito Casimir	8
2.2	Energia de ponto zero eletromagnética	14
2.3	Energia de Casimir eletromagnética	17
2.4	Cálculo da energia de Casimir eletromagnética	20
2.5	Energia de ponto zero fermiônica	24
2.6	Campo fermiônico sob condição MIT	26
2.7	Cálculo da energia de Casimir fermiônica	32
2.7.1	Campo fermiônico não-massivo	33
2.7.2	Campo fermiônico massivo	34
3	Influência de campo externo na energia de Casimir	39
3.1	Introdução	39
3.2	Espectro de energia do campo fermiônico sob campo magnético externo	41
3.3	Espectro de energia do campo fermiônico sob condição de contorno MIT e campo magnético externo	50
3.4	Energia de Casimir sob campo magnético	53
4	Lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg	58

4.1	Introdução	58
4.2	Lagrangiana efetiva	63
4.3	Lagrangiana efetiva a campo elétrico nulo	65
4.4	Lagrangiana efetiva para o campo de Dirac confinado	69
4.5	Permeabilidade magnética do vácuo confinado	73
5	Criação de pares pela ação de um campo elétrico sobre o vácuo	78
5.1	Introdução	78
5.2	Campo fermiônico na presença de um campo elétrico uniforme	80
5.3	Dinâmica da criação de pares	89
5.4	Estatística da criação de pares	102
5.5	Funções de estado	108
5.6	Condições de contorno na criação de pares	110
6	Conclusões e Perspectivas	115
A	Autofunções do campo fermiônico confinado	119
B	Cálculo da integral de contorno (2.99)	127
C	Dedução da equação (3.58)	135
D	Altura do patamar da distribuição espectral	137
E	Evolução do estado de vácuo	140
F	Dedução da equação (5.110)	143

Capítulo 1

Introdução

A idéia clássica de vácuo é de uma região do espaço completamente vazia. Nela não há qualquer matéria ou radiação, é completamente inativa, não age sobre corpo algum, e completamente inerte, não reage a nenhuma ação. Esse vazio completo não apresenta nenhuma característica física, e suas únicas propriedades são geométricas — homogeneidade, isotropia e dimensionalidade. Desde a antiguidade, os pensadores se dividiram quanto à existência ou não do vácuo clássico. Dentro da Física, ora se favorecia a existência desse vácuo, como no arcabouço mecanicista newtoniano, ora se recusava, como no eletromagnetismo de Maxwell, em que se postula a existência de uma matéria sutil, o éter, preenchendo todo o espaço. Com o surgimento da relatividade restrita, a idéia de éter foi abandonada da física e substituída pelo vácuo clássico. Finalmente, com o surgimento da mecânica quântica, mais especificamente, da teoria quântica de campos, o vácuo clássico foi relegado a mera aproximação do vácuo real, que chamamos vácuo quântico.

Em teoria quântica de campos, matéria e radiação são considerados como excitações do campo que, em estados assintóticos, são identificadas como as partículas do campo. Em uma região em que não há matéria ou radiação o campo encontra-se

em seu estado fundamental, que chamamos vácuo do campo. Postula-se que a energia, o momento linear e demais observáveis desse campo são nulas nesse estado, o que não é contrariado por qualquer observação. No entanto, pelo próprio princípio da incerteza, o valor nulo desses observáveis é um valor médio, em torno do qual ocorrem flutuações incessantes. Sendo reais tais flutuações, elas podem sofrer influências externas, por exemplo, de corpos macroscópicos ou de campos aplicados, e reagir a tais influências de maneira, a princípio, observável. Essa idéia deu origem em teoria quântica de campos a explicações de diversos fenômenos por meio da influência das flutuações do vácuo. São o que chamamos efeitos do vácuo quântico. Nesta tese, estamos interessados em dois desses efeitos, o efeito Casimir e a polarização do vácuo.

O efeito Casimir, previsto por H. B. G. Casimir em 1948 [1], consiste na atração de duas placas metálicas neutras no vácuo; as placas são consideradas planas, paralelas e separadas por uma distância pequena comparada com suas dimensões. A força de atração é inversamente proporcional à quarta potência da separação e sua grandeza é de cerca de 13 milésimos de dina por centímetro quadrado de placa a uma separação de 1 micrômetro. Em uma publicação de 1958 [2] Sparnaay anunciou que os resultados de seu experimento não estavam em contradição com a expressão da força atrativa prevista por Casimir, embora não tivessem precisão para confirmar a previsão de Casimir. Isso foi feito em um experimento de alta precisão realizado por Lamoreaux e publicado em 1997 [3].

Embora a atração entre corpos neutros já fosse explicada na época, por meio de forças de van der Waals entre as moléculas neutras dos corpos [4], Casimir explicou e calculou a força de atração sem mencionar os átomos das placas condutoras neutras, usando apenas a condição de contorno que elas impõem ao vácuo quântico do campo eletromagnético. Com isso, a atração entre as placas condutoras é atribuída à reação das flutuações do vácuo eletromagnético à presença dessas placas. Naturalmente,

as descrições de interações como forças exercidas diretamente entre as partículas, ou como forças propagadas pelos campos entre elas, são equivalentes nas situações estáticas, como a do efeito Casimir original. Contudo, as generalizações do efeito Casimir indicam, como nas demais partes da física moderna, que as explicações em termos de campos são mais fundamentais.

O resultado de Casimir se baseia na modificação que as placas condutoras provocam no espectro de frequências de oscilação do campo entre as placas. Essas, sendo de material condutor (supostamente perfeito), impedem a passagem do campo eletromagnético e também de suas flutuações. Com isso, as flutuações de vácuo ficam confinadas entre as placas e somente podem oscilar com números de onda que respeitem esse confinamento. Na verdade, eles são dados por múltiplos inteiros de um certo número de onda fundamental que depende da separação entre as placas; as frequências de oscilação permitidas são determinadas por esses números de ondas por meio da relação de dispersão do campo eletromagnético. No trabalho de Casimir fica claro que a força de atração pode ser atribuída a uma pressão das flutuações do vácuo eletromagnético causada, no formalismo, pela imposição da condição de contorno. Com isso, o vácuo eletromagnético passa a ser visto como se fosse um fluido que, uma vez confinado pelas placas condutoras, passa a ter uma pressão (negativa) que causa a atração entre as placas. Pelo que vimos, para o cálculo dessa pressão basta considerar a influência que as condições de contorno, que simulam a interação entre o campo confinado e as placas (matéria), têm sobre os modos normais do campo. Desse modo, somos levados à idéia de que o vácuo quântico de outros campos sob condições de contorno devem apresentar uma pressão similar. Surge então, naturalmente, a questão do efeito Casimir do campo eletrônico.

Ao tratar a questão do efeito Casimir do campo eletrônico, somos confrontados por três dificuldades. Em primeiro lugar, devemos discutir que tipo de material é opaco às flutuações do campo eletrônico. Em coerência com a teoria do

efeito Casimir do campo eletromagnético, podemos supor que placas isolantes, isto é, dielétricas, devem ser opacas aos elétrons e às flutuações do campo eletrônico. É claro que devemos recorrer a experimentos para confirmar ou rejeitar uma tal hipótese. Supondo que dispomos de dielétricos apropriados, sabemos que a presença das placas deve ser descrita teoricamente pelo anulamento dos observáveis do campo eletrônico na região que elas ocupam. Tais observáveis são, necessariamente, bilineares no campo eletrônico e basta garantir que seja nula a componente normal da corrente eletrônica em cada ponto das superfícies das placas. No entanto, essa condição de contorno precisa ser traduzida em termos das variáveis dinâmicas da teoria, isto é, dos campos de Dirac do elétron e do pósitron. Nesse ponto surge a segunda dificuldade: a proposta natural de supor nulo o campo de Dirac nas superfícies das placas é inaceitável. Uma vez que o campo de Dirac satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem, ao impor que seja nulo nas superfícies de duas placas, segue-se que a única solução possível da equação é a identicamente nula. Essa dificuldade foi resolvida em 1974, com o aparecimento do modelo de sacola MIT [5, 6, 7]. Nesse modelo foi proposta uma condição de contorno para o campo de Dirac sobre uma superfície qualquer, a qual garante o valor nulo para a componente normal da corrente de Dirac nessa superfície. Essa condição sobre o campo de Dirac e a consequente condição sobre a corrente são chamadas condições de contorno MIT. Note-se que no modelo de sacola MIT as condições de contorno são impostas ao campo de Dirac dos quarks, e não ao do elétron, que motivou nossa presente discussão. Aplicando a condição de contorno MIT ao elétron surge a terceira dificuldade, os números de onda permitidos ao campo eletrônico entre as placas são dados como raízes de uma equação transcendental. Esse problema pode ser resolvido por teoremas de variáveis complexas como, por exemplo, a integral de Cauchy [8], mas está longe de ser trivial em formalismos complicados como é o caso das teorias quânticas de campos. As dificuldades de cálculo do efeito Casimir para o

campo de Dirac foram suplantadas e a força atrativa entre as placas pôde ser obtida no caso de massa nula em 1975 [9] e no caso massivo em 1976 [10] e em 1980 [11]. Uma característica essencial dos resultados encontrados é que a força de Casimir é exponencialmente inibida pela massa do campo de Dirac em consideração. No caso de massa nula, a expressão da força é exatamente igual a $7/4$ da expressão da força no caso eletromagnético. Mas nesse caso temos os quarks leves, aos quais o confinamento impede qualquer acesso direto, e os neutrinos, que não podem ser confinados por nenhum tipo de placa. No caso massivo, temos o elétron, ao qual temos acesso direto mas cuja força de Casimir é praticamente nula, devido ao valor da massa do elétron, nas separações entre placas experimentalmente acessíveis (micrômetros e nanômetros). Esses fatos mantêm o efeito Casimir do campo de Dirac fora das possibilidades de verificação experimental direta, restando apenas as possíveis confirmações indiretas provenientes do comportamento de campos de quarks confinados no interior de hádrons.

O campo de Dirac, ao contrário do eletromagnético, possui carga elétrica, de modo que suas flutuações de vácuo, os pares virtuais de elétrons e pósitrons, apresentam as características de dipolos e espiras de correntes microscópicas. Pode-se pensar que agentes externos também podem afetar essas flutuações, que reagiriam com efeitos observáveis. Essa idéia, já presente na teoria do mar de Dirac [12], leva a fenômenos de polarização do vácuo de Dirac, descritos por meio de lagrangianas efetivas de um campo eletromagnético clássico no vácuo de Dirac, propostas em 1935 e 1936 por Heisenberg, Euler e Kockel [13, 14, 15]. Um outro fenômeno notável do vácuo de Dirac é a criação de pares pela ação de um campo elétrico aplicado, chamado mecanismo de Schwinger [16]. Como tais fenômenos exigem campos aplicados muito intensos para serem observados, apenas neste ano [17] foram divulgados experimentos que descrevem propriedades óticas do vácuo de Dirac descritas pelas lagrangianas efetivas. Já o mecanismo de Schwinger ainda aguarda uma verificação

experimental direta.

Nessa breve discussão mostramos que o campo de Dirac apresenta efeitos de vácuo interessantes, como o efeito Casimir e os efeitos de polarização descritos por lagrangianas efetivas. Também mencionamos as dificuldades inerentes aos cálculos com o campo de Dirac. Por esses motivos esses efeitos de vácuo do campo de Dirac merecem cálculos cuidadosos e detalhados, que tentamos fazer nesta tese. No próximo capítulo apresentamos uma breve introdução ao efeito Casimir do campo eletromagnético e do campo de Dirac; revemos em mais detalhes e com cálculos pertinentes as idéias esboçadas sobre esses assuntos nesta introdução. Nos capítulos seguintes, o terceiro, o quarto e o quinto, estudamos o efeito conjunto sobre o vácuo de Dirac das duas influências mencionadas nesta introdução, a de condições de contorno e campos externos aplicados [18, 19]. No terceiro capítulo consideramos como um campo magnético aplicado afeta a energia de Casimir do campo de Dirac sob condição de contorno MIT e obtemos resultados de acordo com os anteriormente obtidos por Elizalde, Santos e Tort [20, 21]. No quarto capítulo, começamos por uma revisão do formalismo que descreve os fenômenos de polarização do vácuo, novamente estendendo as idéias já mencionadas nesta introdução. Depois tratamos o problema dual ao do capítulo anterior, qual seja, de como condições de contorno MIT afetam a lagrangiana efetiva de um campo magnético aplicado ao vácuo de Dirac [22]. Nesse estudo, obtemos um resultado novo e interessante, uma constante de permeabilidade magnética para o vácuo de Dirac confinado entre placas paralelas; o valor da constante é acessível a medições para separação entre as placas da ordem de micrômetros ou nanômetros. No quinto capítulo fazemos um estudo detalhado da estatística de criação de pares no vácuo de Dirac sob a ação de um campo elétrico aplicado. Os resultados do mesmo estudo são recalculados com o campo de Dirac sujeito a condição de contorno antiperiódica ao longo de uma dimensão espacial. O sexto e último capítulo é reservado às conclusões e perspectivas. Em anexo aos

capítulos, seguem-se seis apêndices nos quais explicitamos detalhes de cálculos cuja ausência no texto principal julgamos não afetar sua clareza.

Capítulo 2

Energia de Casimir

2.1 Introdução ao efeito Casimir

Em sua forma mais simples e intuitiva, o conceito de vácuo refere-se apenas a um espaço completamente vazio. Mesmo em teorias como a Mecânica Clássica e o eletromagnetismo de Maxwell, esse conceito permanece válido, já que o vácuo é descrito como o espaço livre de matéria e radiação. Há apenas uma extensão do conceito no sentido de que, assim como um meio material é o substrato para a propagação de ondas mecânicas, o vácuo é agora um meio no qual as ondas eletromagnéticas se propagam. Ainda assim o vácuo é um meio inerte e incapaz de responder a qualquer estímulo externo. Já na Eletrodinâmica Quântica, que descreve a interação de fótons, elétrons e pósitrons, o vácuo é definido como o estado quântico de mais baixa energia, estado este que flutua continuamente por meio da criação e aniquilação de partículas virtuais. Essas partículas vivem numa escala de espaço e tempo muito pequena compatível com o princípio de incerteza de Heisenberg e, durante suas efêmeras existências, podem interagir entre si. Por exemplo, elétrons e pósitrons virtuais podem absorver e emitir fótons virtuais, fótons virtu-

ais podem se aniquilar em pares elétron-pósitron virtuais e pares elétron-pósitron virtuais podem se aniquilar em fótons virtuais. Essas flutuações de ponto zero enriquecem o vácuo quântico tornando-o um meio ativo e complexo bem distinto do vazio completo descrito pela Mecânica Clássica.

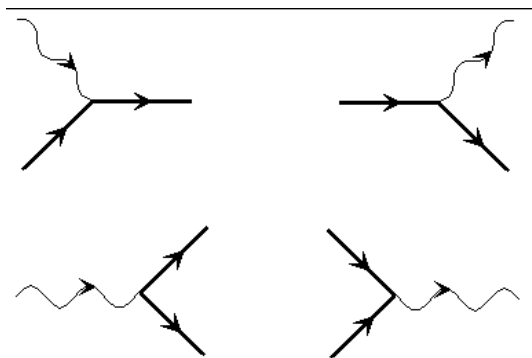


Figura 2.1: Interações básicas entre partículas virtuais, onde os segmentos retilíneos representam elétrons ou pósitrons virtuais e os segmentos ondulados representam fótons virtuais.

Essa riqueza de propriedades do vácuo quântico não se limita à eletrodinâmica quântica. Todas as teorias quânticas relativísticas têm os seus respectivos vácuos quânticos com propriedades não-triviais e, em princípio, observáveis.

Além de interagir entre si, as partículas virtuais podem sofrer a ação de agentes externos como, por exemplo, campos eletromagnéticos e corpos macroscópicos. Estaremos interessados nas situações em que a presença e a influência dos corpos macroscópicos é descrita por condições de contorno, de modo que, por abuso de linguagem, estaremos nos referindo à influência das condições de contorno no vácuo e à reação do vácuo às condições de contorno. Além disso, em muitos casos não é claro que corpos e agentes externos poderiam, na realidade, impor as condições de contorno consideradas em um dado problema teórico.

As partículas virtuais que sofrem a ação de agentes externos também podem responder a esses agentes. Assim, o vácuo descrito pela Eletrodinâmica Quântica comporta-se como um meio material capaz de se polarizar e magnetizar e até mesmo

de se desestabilizar, decaindo em pares de partículas reais carregadas. Dessa forma, o vácuo quântico pode apresentar propriedades lineares de permissividade elétrica e permeabilidade magnética [23, 24, 25, 26, 27, 18, 28], além de propriedades não lineares [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 17] (para uma revisão sobre propriedades lineares e não lineares que afetam a velocidade de propagação da luz em um meio, veja [41] e referências aí contidas). Podemos atribuir ao vácuo quântico a existência de vários fenômenos físicos importantes como a emissão espontânea dos átomos, o momento magnético anômalo do elétron, o deslocamento Lamb [42, 43, 44, 45, 46], as forças de van der Waals dispersivas [4] e, o objeto de nosso maior interesse, o efeito Casimir (para uma discussão conjunta sobre desses tópicos ver, por exemplo, a referência [47]).

Para entendermos o efeito Casimir, consideremos o sistema formado por duas placas neutras, constituídas de material perfeitamente condutor e localizadas numa região onde previamente foi feito vácuo. Consideremos ainda que as placas estejam paralelas e separadas por uma distância a muito menor que suas dimensões, conforme mostra a figura 2.2. Não esperamos medir forças sobre as placas já que não há

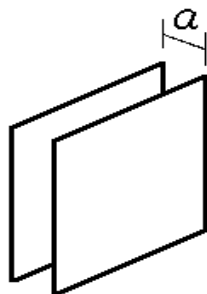


Figura 2.2: Placas paralelas e perfeitamente condutoras.

interação eletrostática entre elas e, além disso, o vácuo clássico é um meio incapaz de exercer forças de pressão. Contudo, ao considerarmos a natureza quântica do vácuo, esse fato pode mudar. De fato, a simples presença das placas pode afetar as flutuações de ponto zero do vácuo do campo eletromagnético e, dessa forma,

podemos esperar uma reação desse vácuo às placas. Baseado nisso, em 1948 Casimir previu que, ao contrário do esperado classicamente, tais placas sofreriam uma força de atração [1]. Esse é então um fenômeno intrinsecamente quântico e denomina-se, em homenagem ao seu descobridor, efeito Casimir.

O cálculo dessa força, denominada força de Casimir, pode ser feito utilizando o conceito de energia de ponto zero do campo eletromagnético. Esta grandeza representa a energia do estado de vácuo desse campo, a qual inclui as flutuações de ponto zero provenientes apenas de fótons virtuais. Essa energia é uma quantidade infinita e, na ausência de campos externos e condições de contorno, constitui-se apenas de um termo espúrio, o qual pode ser eliminado redefinindo-se a escala de energia. Isso não ocorre na presença das placas condutoras. De fato, as condições de contorno impostas pelas placas afetam a energia do vácuo do campo eletromagnético fazendo com que ela adquira uma dependência com a distância a entre as placas. Assim as energias de duas configurações distintas, $a = a_1$ e $a = a_2$, serão diferentes, de forma que a energia de ponto zero não pode ser simplesmente descartada por redefinição da escala de energia. Usando-se o conceito de regularização, pode-se mostrar que, apesar das energias das duas configurações serem infinitas, a diferença entre elas é uma quantidade finita. Essa variação de energia está obviamente associada ao trabalho de uma força ao deslocarmos as placas entre as duas configurações. Essa força é, por definição, a força de Casimir e é dada por

$$F_C(a) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{A}{a^4}, \quad (2.1)$$

onde A é a área das placas e a é a distância entre elas. O sinal negativo expressa o fato de que a força entre as placas é atrativa. Algumas observações podem ser feitas a respeito dessa expressão: primeiramente, $F_C(a)$ é proporcional à constante de Planck \hbar e à velocidade da luz c , indicando que a força de Casimir é um efeito quântico e relativístico. Além disso, essa expressão não depende de outras constantes

da Eletrodinâmica Quântica como a carga e a massa do elétron. Isso ocorre pois o cálculo da força desconsidera a existência do campo fermiônico, considerando apenas a influência de condições de contorno sobre o campo eletromagnético livre. No entanto, as condições de contorno utilizadas nesse cálculo são as de um condutor ideal, o que é uma simplificação muito forte para simular a interação entre o campo eletromagnético e placas condutoras reais. Dessa forma, se utilizássemos um modelo mais realista para descrever as placas, como um modelo de plasma de elétrons, por exemplo, obteríamos uma dependência da força de Casimir com as constantes constitutivas do material das placas e com a massa e a carga do elétron (a expressão (2.1) reproduziria apenas um caso limite da expressão real quando, por exemplo, tomássemos a condutividade das placas como infinita).

A novidade introduzida pelo efeito Casimir não era o fato de dois corpos neutros sofrerem atração. De fato, em 1930, London [4] explicou por meio da Mecânica Quântica as forças de van der Waals dispersivas (não-retardadas), isto é, a força de atração entre duas moléculas neutras, porém polarizáveis. O trabalho de Casimir foi inovador porque explicou a força entre corpos neutros a partir das flutuações quânticas do estado de vácuo do campo eletromagnético no qual estão imersos, e não a partir das flutuações quânticas dipolares das cargas dos próprios corpos neutros. Como sabemos por analogia com o caso clássico, as duas visões do fenômeno são equivalentes nas situações estáticas, mas em situações gerais a explicação em termos do campo é mais abrangente do que em termos de cargas interagentes. Como consequência da nova visão do fenômeno, Casimir empregou uma técnica totalmente nova para o cálculo da interação entre corpos neutros, na qual, por meio de técnicas de regularização e renormalização, foi possível extrair uma quantidade finita, a força, de outra infinita, a energia de ponto zero do campo eletromagnético.

Para se ter uma idéia quantitativa, se A for dada em cm^2 e a em μm , a força em

dina ($= 10^{-5}$ N) será dada por

$$|F_C(a)|/\text{dyn} = 0,013 \frac{A/\text{cm}^2}{(a/\mu\text{m})^4}, \quad (2.2)$$

isto é, para placas de 1cm^2 de área distantes de $1\mu\text{m}$, a força de atração entre as placas é de $0,013\text{dyn}$, o que equivale a aproximadamente o peso de um mosquito macho. Por exigir distâncias tão pequenas, sua verificação experimental não é trivial. O primeiro experimento realizado com o intuito de medir a força de Casimir foi feito por M.J. Sparnaay em 1958 [2]. Contudo, devido à pouca precisão experimental, esse experimento não foi capaz de comprovar o efeito Casimir. O experimento apenas comprovou a existência de uma força e que os resultados não eram incompatíveis com o resultado teórico de Casimir, equação (2.1). Muitos outros experimentos foram realizados posteriormente [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 3, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64], contudo exigiram fórmulas teóricas que considerassem efeitos de curvatura e rugosidade das placas, condutividade finita dos metais e efeitos de temperatura. Os resultados mais precisos, com acordo de cerca de 1%, exigiram técnicas modernas como microscopia de força atômica.

Em teoria, o efeito Casimir não está restrito somente ao campo eletromagnético. O efeito pode ocorrer para qualquer campo quântico relativístico, como o campo escalar e o fermiônico, sob condições de contorno [9, 10, 11]. Por exemplo, o modelo de sacola MIT [9, 5, 6, 7, 65], desenvolvido nos anos 70, simulava o confinamento de quarks em hádrons por meio de um campo fermiônico sujeito a condições de contorno confinantes em uma esfera com o tamanho do hádron. Esse modelo previa que a energia de Casimir, isto é, a energia associada ao confinamento, correspondia a aproximadamente 9% da massa do hádron. Apesar da generalização do efeito Casimir para outros campos, apenas o caso eletromagnético possui verificação experimental direta. Uma revisão abrangente sobre o efeito Casimir pode ser encontrada em [47, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73].

De forma geral qualquer sistema físico encontra-se circundado por superfícies

metálicas, dielétricas, permeáveis e outras. Dessa forma é de se esperar que o efeito Casimir tenha relevância em vários sistemas. De fato, apesar de ter se originado em Eletrodinâmica Quântica, o efeito Casimir tem aplicação em diversas outras áreas. Em matéria condensada, na interação entre fronteiras muito próximas, propriedades de filmes finos, cálculos de tensão superficial e calor latente. Em cosmologia, desempenha papel fundamental em modelos inflacionários do universo. Em física matemática, proporcionou o desenvolvimento de técnicas de regularização e renormalização, como por exemplo, o método da função zeta. Em teoria quântica de campos, o efeito Casimir é usado na explicação da compactificação espontânea de dimensões espaciais extras em modelos de Kaluza-Klein e no deslocamento espectral de níveis atômicos em cavidades de alta qualidade. Em nanotecnologia, já se menciona a necessidade de levá-lo em conta nos projetos de nanodispositivos eletromecânicos. A referência [68] contém maiores detalhes sobre essas aplicações.

2.2 Energia de ponto zero eletromagnética

Para entendermos o efeito Casimir devemos primeiramente definir alguns conceitos como o estado de vácuo quântico e a energia de ponto zero do campo eletromagnético, os quais são derivados da quantização desse campo. Consideremos então as equações de Maxwell na ausência de matéria, isto é, na ausência de cargas e correntes ($c = 1$),

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \hat{E}(\vec{r}, t) = 0 & \quad , & \quad \vec{\nabla} \times \hat{B}(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \hat{E}(\vec{r}, t) = 0 , \\ \vec{\nabla} \cdot \hat{B}(\vec{r}, t) = 0 & \quad , & \quad \vec{\nabla} \times \hat{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \hat{B}(\vec{r}, t) = 0 . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nesse caso os campos elétrico e magnético podem ser derivados a partir de um único

campo, o potencial vetor $\hat{A}(\vec{r}, t)$,

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(\vec{r}, t) \quad , \quad \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \hat{A}(\vec{r}, t), \quad (2.4)$$

que satisfaça à equação de onda no calibre de Coulomb,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)\hat{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \hat{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.5)$$

A quantização do campo eletromagnético [74] é feita considerando-se que o potencial vetor é um operador hermitiano sobre o espaço de estados, $\hat{A}(\vec{r}, t)^\dagger = \hat{A}(\vec{r}, t)$, que satisfaz às relações canônicas de comutação a tempos iguais

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}(\vec{r}, t)_i, \hat{A}(\vec{r}', t)_j\right] &= 0, \\ \left[\hat{A}(\vec{r}, t)_i, \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(\vec{r}', t)_j\right] &= i\delta_{i,j}\delta(\vec{r} - \vec{r}')\hat{1} + i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)\hat{1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A solução geral das equações (2.5) pode ser dada como uma expansão em soluções estacionárias,

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(\hat{a}_n \vec{\chi}_n(\vec{r}) e^{-i\omega_n t} + \hat{a}_n^\dagger \vec{\chi}_n(\vec{r})^* e^{i\omega_n t}), \quad (2.7)$$

onde os modos normais $\chi_n(\vec{r})$ devem satisfazer as equações

$$(\vec{\nabla}^2 + \omega_n^2)\vec{\chi}_n(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\chi}_n(\vec{r}) = 0, \quad (2.8)$$

e devem formar uma base ortonormal de funções,

$$\int d^3r \vec{\chi}_n(\vec{r})^* \cdot \vec{\chi}_{n'}(\vec{r}) = \delta_{n,n'}. \quad (2.9)$$

Para que o potencial vetor (2.7) obedeça às regras de quantização (2.6), é necessário que o conjunto dos modos normais possua completeza,

$$\sum_n \chi_n(\vec{r})_i \chi_n(\vec{r}')_j^* = \delta_{i,j}\delta(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}\right), \quad (2.10)$$

e que os coeficientes \hat{a}_n sejam operadores de campo que satisfaçam as relações de comutação

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}] = 0 \quad , \quad [\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] = \delta_{n,n'} \hat{1}. \quad (2.11)$$

Nessas expressões n representa o conjunto de números quânticos discretos ou contínuos que caracterizam cada modo normal do campo eletromagnético. Assim a notação \sum_n pode representar um produto de somatórios e de integrais e a notação $\delta_{n,n'}$ pode significar um produto de deltas de Kronecker e de Dirac.

A hamiltoniana do campo eletromagnético, definida a partir dos campos elétrico e magnético como

$$\hat{H} = \int d^3r \frac{\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t)^2 + \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t)^2}{2}, \quad (2.12)$$

pode ser reescrita em função dos operadores de campo,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger). \quad (2.13)$$

Usando as relações de comutação (2.11) e a propriedade $\delta_{n,n} = \delta_{0,0}$, podemos escrever a expressão acima na forma

$$\hat{H} = \sum_n \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + E_0 \hat{1}, \quad (2.14)$$

onde

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n \delta_{0,0}. \quad (2.15)$$

No caso no qual o conjunto de números quânticos é discreto, temos que $\delta_{0,0} = 1$ e portanto podemos escrever ¹

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n. \quad (2.16)$$

O vácuo do campo eletromagnético quantizado é definido como o estado quântico de mais baixa energia, isto é, o autoestado da hamiltoniana (2.14) de mais baixo

¹No caso de espectro contínuo a igualdade $\delta_{0,0} = 1$ não é válida já que temos o aparecimento de deltas de Dirac de argumento nulo. Portanto a expressão (2.16) não é válida em geral.

autovalor, $|0\rangle$. Esse estado deve ser normalizado, $\langle 0|0\rangle = 1$, e possuir a propriedade $\hat{a}_n|0\rangle = 0$. A expressão (2.14) mostra então que E_0 é a energia do estado de vácuo, $\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle$. A partir do estado fundamental podemos obter estados excitados utilizando os operadores \hat{a}_n^\dagger . Esses estados são da forma $\hat{a}_n^\dagger|0\rangle$, $\hat{a}_{n'}^\dagger\hat{a}_n^\dagger|0\rangle/\sqrt{2!}$, $\hat{a}_{n''}^\dagger\hat{a}_{n'}^\dagger\hat{a}_n^\dagger|0\rangle/\sqrt{3!}$, \dots , e possuem energias $\omega_n + E_0$, $\omega_n + \omega_{n'} + E_0$, $\omega_n + \omega_{n'} + \omega_{n''} + E_0$, \dots . Essas excitações do campo eletromagnético correspondem a 1 fóton no modo n , 2 fótons nos modos n e n' , 3 fótons nos modos n , n' e n'' , \dots , respectivamente. Assim, vemos da equação (2.16) que a energia de ponto zero do campo eletromagnético é dada pela soma em todos os modos da metade das frequências ω_n de cada modo.

2.3 Energia de Casimir eletromagnética

Queremos analisar a energia de ponto zero do campo eletromagnético confinado entre duas placas paralelas distantes de a entre si e determinar a diferença de energias de duas configurações distintas, $a = a_1$ e $a = a_2$. Conforme a equação (2.16), a energia de ponto zero do campo eletromagnético é formalmente obtida somando-se, sobre todos os modos, metade das frequências de cada modo. Contudo, vemos que essa expressão não é bem definida já que o somatório é fortemente divergente. Isso ocorre porque somamos sobre um número infinito de modos e o espectro de energia é positivo e ilimitado. Assim, para que possamos manipular tal expressão e extrair alguma quantidade física, é necessário regularizar o somatório. O processo de regularização de uma expressão divergente consiste em torná-la artificialmente finita porém dependente de um parâmetro regularizador ϵ que, em um certo limite (muitas vezes, no limite $\epsilon \rightarrow 0$), coincida com a expressão divergente original. Há vários esquemas de regularização, por exemplo, o método do corte e o método da função Zeta. Utilizaremos aqui a regularização da energia de ponto zero da região entre as placas inserindo no somatório um fator de corte exponencial com parâmetro

regularizador positivo ϵ ,

$$E_0(\epsilon; a) = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n(a) e^{-\epsilon \omega_n(a)}, \quad (2.17)$$

onde n representa apenas os modos internos às placas e $\omega_n(a)$ as frequências desses modos. Ocorre porém que, quando alteramos a posição das placas, alteramos não só a energia dos modos internos como também a dos modos externos. Para quantificarmos a contribuição dos modos externos, tornaremos o universo artificialmente finito introduzindo uma terceira placa paralela às demais a uma distância $\ell \gg a$, conforme mostra a figura 2.3. Por simplicidade, supomos que apenas a placa do meio possa se mover.

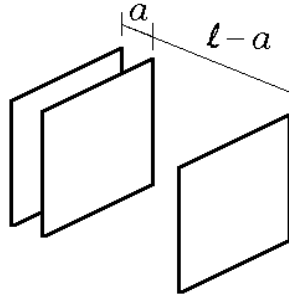


Figura 2.3: Modelo para o universo, constituído de duas placas paralelas e infinitas, separadas por uma distância a , e uma terceira placa a uma distância $\ell \gg a$.

Então, a energia de ponto zero associada aos modos externos será dada simplesmente por $E_0(\epsilon; \ell - a)$, de modo que a energia regularizada do universo será

$$U(\epsilon, \ell; a) = E_0(\epsilon; a) + E_0(\epsilon; \ell - a). \quad (2.18)$$

Geralmente, podemos sempre desenvolver a expressão (2.17) e decompô-la na forma

$$E_0(\epsilon; a) = aAF(\epsilon) + AG(\epsilon) + AH(\epsilon; a), \quad (2.19)$$

onde A é a área das placas e $H(\epsilon; a)$ é uma função que se anula quando separamos infinitamente as placas,

$$H(\epsilon; a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0, \quad (2.20)$$

e que se mantém finita ao retirarmos o parâmetro regularizador,

$$H(\epsilon; a) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} H(0; a). \quad (2.21)$$

As funções $F(\epsilon)$ e $G(\epsilon)$ divergem ao retirarmos o parâmetro regularizador, o que é consistente com o que ocorre com a energia de ponto zero. Na verdade a decomposição (2.19) é possível qualquer que seja a regularização da energia de ponto zero, porém as funções $F(\epsilon)$, $G(\epsilon)$ e $H(\epsilon; a)$ dependem explicitamente do tipo de corte adotado. A energia regularizada do universo será então dada por

$$U(\epsilon, \ell; a) = \ell AF(\epsilon) + 2AG(\epsilon) + AH(\epsilon; a) + AH(\epsilon; \ell - a). \quad (2.22)$$

A diferença de energia do universo na configuração $a = a_2$ e na configuração $a = a_1$ é obtida então retirando os parâmetros de regularização, $\epsilon \rightarrow 0$ e $\ell \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\ell \rightarrow \infty} (U(\epsilon, \ell; a_2) - U(\epsilon, \ell; a_1)) = AH(0; a_2) - AH(0; a_1). \quad (2.23)$$

Isso mostra que, apesar de ambas as configurações terem energias infinitas, a diferença entre elas é finita. Cabe também ressaltar que a função $H(0; a)$ não depende do tipo de regularização adotado. A equação (2.23) introduz então uma quantidade física que mede a energia de uma dada configuração das placas, a qual denominaremos energia de Casimir,

$$E_C(a) := AH(0; a). \quad (2.24)$$

Assim, para a obtenção da energia de Casimir do campo eletromagnético confinado entre duas placas devemos, primeiramente, desenvolver a energia de ponto zero regularizada e decompô-la na forma (2.19). Em seguida devemos eliminar os termos proporcionais à área das placas, $AG(\epsilon)$, e ao volume da região entre elas, $aAF(\epsilon)$. Por fim devemos retirar a regularização, fazendo $\epsilon = 0$.

Podemos entender porque os termos de área e de volume não contribuem para a diferença de energias das configurações. O termo de volume $aAF(\epsilon)$ possui densidade de energia independente da distância entre as placas, $F(\epsilon)$, o que indica que esse termo não é afetado pelas condições de contorno. Ele representa a parcela da energia do vácuo desconfinado correspondente à região entre as placas e portanto não corresponde a qualquer contribuição da condição de contorno à energia de ponto zero. Já o termo de área, $AG(\epsilon)$, este independe da distância entre as placas, de forma que permanece inalterado mesmo se afastarmos infinitamente as placas. Esse termo parece então estar armazenado nas placas, correspondendo a uma auto-energia delas, e será eliminado na diferença de quaisquer duas configurações.

Obviamente a variação de energia das duas configurações está associada ao trabalho de uma força,

$$E_C(a_2) - E_C(a_1) = - \int_{a_1}^{a_2} da F_C(a), \quad (2.25)$$

a qual denominamos força de Casimir. Essa força será então dada por

$$F_C(a) = - \frac{d}{da} E_C(a), \quad (2.26)$$

e fisicamente corresponderá a uma força de interação efetiva entre as placas. Na verdade, ela corresponde a uma força de pressão exercida pelo vácuo quântico em resposta às condições de contorno imposta pelas placas.

2.4 Cálculo da energia de Casimir eletromagnética

Fronteiras perfeitamente condutoras geram condições de contorno sobre o campo eletromagnético, de forma que, na superfície condutora S , o campo elétrico deve estar orientado na direção da normal da superfície, \vec{n} , enquanto que o campo magnético

deve estar orientado em uma direção paralela,

$$\vec{n} \times \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t)|_S = 0 \quad \text{e} \quad \vec{n} \cdot \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t)|_S = 0. \quad (2.27)$$

No caso em questão, as fronteiras condutoras constituem-se de placas paralelas, cada uma de área A , e distantes de a entre si, as quais localizaremos nos planos $z = 0$ e $z = a$. Por simplicidade supomos as placas quadradas e, como já dito, a pequenas separações ($a \ll \sqrt{A}$), para evitar efeitos de borda. Então, de acordo com as expressões acima, o campo eletromagnético deve satisfazer as condições de contorno

$$\begin{cases} \hat{z} \times \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t)|_{z=0} = 0, \\ \hat{z} \cdot \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t)|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \hat{z} \times \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t)|_{z=a} = 0, \\ \hat{z} \cdot \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t)|_{z=a} = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Estas condições de contorno sobre os campos elétrico e magnético serão satisfeitas se o potencial vetor satisfizer as condições

$$\hat{z} \times \hat{\vec{A}}(\vec{r}, t)|_{z=0} = 0 \quad , \quad \hat{z} \times \hat{\vec{A}}(\vec{r}, t)|_{z=a} = 0, \quad (2.29)$$

as quais se refletirão sobre os modos normais do campo eletromagnético,

$$\hat{z} \times \vec{\chi}_n(\vec{r})|_{z=0} = 0 \quad , \quad \hat{z} \times \vec{\chi}_n(\vec{r})|_{z=a} = 0. \quad (2.30)$$

O conjunto dos modos normais desse caso, isto é, as soluções das equações (2.8) que são normalizadas conforme a equação (2.9) é completo, conforme a equação (2.10).

Os modos se dividem nos modos transverso elétrico,

$$\vec{\chi}_l^{\text{TE}}(\vec{k}; z, \vec{\rho}) = \frac{\hat{z} \times \vec{k}}{|\vec{k}|} \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}(q_l z) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}, \quad (2.31)$$

e transverso magnético,

$$\vec{\chi}_l^{\text{TM}}(\vec{k}; z, \vec{\rho}) = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{\omega_l(\vec{k})} \left[\hat{z} |\vec{k}| \cos(q_l z) - iq_l \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \text{sen}(q_l z) \right] \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}. \quad (2.32)$$

Nessas expressões $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$ representa a componente paralela às placas do vetor posição. O número quântico $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$ representa a componente paralela

às placas do vetor de onda do campo eletromagnético e possui espectro contínuo. Quanto ao número quântico q_l , este representa a projeção perpendicular às placas do vetor de onda do campo. Esse número quântico é afetado pelas condições de contorno, de forma que seu espectro fica discretizado, $q_l = l\pi/a$, onde $l = 1, 2, 3, \dots$ para os modos TE e $l = 0, 1, 2, \dots$ para os modos TM. $\omega_l(\vec{k})$ são as frequências de cada modo e são dadas por

$$\omega_l(\vec{k}) = \sqrt{q_l^2 + \vec{k}^2}. \quad (2.33)$$

De posse dessas frequências e do conjunto completo de números quânticos que caracterizam cada modo do campo eletromagnético, podemos determinar a energia de ponto zero do sistema. Conforme a equação (2.15), devemos somar sobre todo o espectro discreto de números quânticos e integrar sobre todo o espectro contínuo metade das frequências de cada modo. Assim devemos somar sobre $s = \text{TE, TM}$, sobre l e integrar em \vec{k} ,

$$E_0(a) = \frac{1}{2} \sum_s \sum_{l=(0)}^{\infty} \int d^2k \omega_l(\vec{k}) \delta(\vec{0}). \quad (2.34)$$

A notação $l = (0)$ indica que o termo $l = 0$ deve ser multiplicado pelo fator $1/2$ a fim de corrigir, para esse termo, a degenerescência incorreta devida a soma em s . Já a notação $\delta(\vec{0})$, esta representa a função delta de Dirac de \vec{k} avaliada em $\vec{k} = 0$, $\delta(\vec{0}) = \delta(\vec{k})|_{\vec{k}=0}$. Este fator corresponde à contribuição do espectro contínuo à $\delta_{0,0}$ da equação (2.15). A expansão de Fourier dessa delta de Dirac, $\delta(\vec{k}) = (2\pi)^{-2} \int d^2\rho e^{i\vec{k}\cdot\vec{\rho}}$, mostra que $\delta(\vec{0})$ é proporcional à área das placas $A = \int d^2\rho$, isto é, $\delta(\vec{0}) = A/(2\pi)^2$. Assim a energia de ponto zero do campo eletromagnético pode ser reescrita na forma

$$E_0(\epsilon; a) = A \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sum_{l=(0)}^{\infty} \sqrt{q_l^2 + \vec{k}^2} e^{-\epsilon\sqrt{q_l^2 + \vec{k}^2}}, \quad (2.35)$$

onde $q_l = l\pi/a$. Note que, conforme a equação (2.17), inserimos um fator de corte exponencial regularizador. Integrando a parte angular de \vec{k} e fazendo a mudança de

variável de integração $u = \sqrt{q_l^2 + |\vec{k}|^2}$, obteremos

$$\begin{aligned} E_0(\epsilon; a) &= \frac{A}{2\pi} \sum_{l=(0)}^{\infty} \int_{q_l}^{\infty} du u^2 e^{-\epsilon u} \\ &= \frac{A}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \sum_{l=(0)}^{\infty} \int_{q_l}^{\infty} du e^{-\epsilon u} = \frac{A}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \sum_{l=(0)}^{\infty} e^{-\epsilon q_l} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

O somatório em l é facilmente calculado como o somatório de uma série geométrica,

$$\sum_{l=(0)}^{\infty} e^{-\epsilon q_l} = \frac{1}{2} \operatorname{cotgh} \left(\frac{\epsilon \pi}{2a} \right). \quad (2.37)$$

Assim, a energia de ponto zero regularizada toma a forma

$$E_0(\epsilon; a) = \frac{A}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left[\frac{1}{\epsilon} \operatorname{cotgh} \left(\frac{\epsilon \pi}{2a} \right) \right]. \quad (2.38)$$

Usando a expansão

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \mathcal{O}(x^5), \quad (2.39)$$

é fácil decompor a energia de ponto zero conforme a equação (2.19),

$$E_0(\epsilon; a) = \frac{3aA}{\pi^2} \frac{1}{\epsilon^4} - \frac{\pi^2}{720} \frac{A}{a^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.40)$$

Eliminando então o termo de volume (o de área é nulo nesse caso) e retirando o parâmetro regularizador teremos a energia de Casimir desse problema,

$$E_C(a) = - \frac{\pi^2}{720} \frac{A}{a^3}. \quad (2.41)$$

De acordo então com a equação (2.26), a força de Casimir será dada por

$$F_C(a) = - \frac{\pi^2}{240} \frac{A}{a^4}. \quad (2.42)$$

Com uma simples análise dimensional é fácil inserir nessa equação as constantes \hbar e c , que normalmente usamos em unidades naturais, e assim obtermos a equação (2.1).

2.5 Energia de ponto zero fermiônica

A dinâmica da matéria, ou mais precisamente a dinâmica de elétrons e pósitrons, é descrita pelo campo fermiônico $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$. A evolução do campo de matéria livre, isto é, do campo fermiônico sem interação eletromagnética, é regida pela equação de Dirac ($\hbar = c = 1$) [75],

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{r}, t) = \mathcal{H}_D \hat{\psi}(\vec{r}, t), \quad (2.43)$$

onde \mathcal{H}_D é o operador de Dirac,

$$\mathcal{H}_D = -i \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} + m\beta, \quad (2.44)$$

sendo m a massa do elétron. $\vec{\alpha}$ e β são as matrizes de Dirac,

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

sendo $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$ as matrizes identidade e nula 2×2 , respectivamente, e $\vec{\sigma}$, a matriz de spin de Pauli,

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{z} & \hat{x} - i\hat{y} \\ \hat{x} + i\hat{y} & -\hat{z} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

O campo fermiônico quantizado é um operador sobre o espaço de estados que satisfaz às relações canônicas de anticomutação a tempos iguais [74],

$$\{\hat{\psi}(\vec{r}, t)_\alpha, \hat{\psi}(\vec{r}', t)_\beta\} = 0, \quad \{\hat{\psi}(\vec{r}, t)_\alpha, \hat{\psi}(\vec{r}', t)_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha,\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{1}, \quad (2.47)$$

onde os índices α e β denotam as componentes espinoriais (matriciais) de $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$.

Sendo o operador de Dirac independente do tempo, o campo fermiônico pode ser expandido em soluções estacionárias,

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_n \left[\hat{c}_n \Psi_n^+(\vec{r}) e^{-i\omega_n t} + \hat{d}_n^\dagger \Psi_n^-(\vec{r}) e^{i\omega_n t} \right], \quad (2.48)$$

onde as funções de onda $\Psi_n^\pm(\vec{r})$ devem então ser autofunções do operador de Dirac,

$$\mathcal{H}_D \Psi_n^\pm(\vec{r}) = \pm \omega_n \Psi_n^\pm(\vec{r}), \quad (2.49)$$

e devem satisfazer às mesmas condições de contorno impostas sobre o campo. Essas funções de onda devem também ser devidamente normalizadas,

$$\int d^3r \Psi_n^\epsilon(\vec{r})^\dagger \Psi_{n'}^{\epsilon'}(\vec{r}) = \delta_{\epsilon, \epsilon'} \delta_{n, n'}, \quad (2.50)$$

e devem formar um conjunto completo,

$$\sum_{\epsilon=\pm} \sum_n \Psi_n^\epsilon(\vec{r}) \Psi_n^\epsilon(\vec{r}')^\dagger = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \mathbb{1}, \quad (2.51)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 4×4 . Nessas expressões n representa o conjunto de números quânticos que caracterizam cada modo normal do campo.

As relações de anticomutação (2.47) implicam que \hat{c}_n e \hat{d}_n são operadores de campo, os quais devem satisfazer as relações de anticomutação,

$$\{\hat{c}_n, \hat{c}_{n'}^\dagger\} = \delta_{n, n'} \hat{1} \quad , \quad \{\hat{d}_n, \hat{d}_{n'}^\dagger\} = \delta_{n, n'} \hat{1}, \quad (2.52)$$

enquanto as demais relações são identicamente nulas. O vácuo do campo fermiônico é definido como o estado normalizado que é aniquilado pelos operadores \hat{c}_n e \hat{d}_n ,

$$\hat{c}_n|0\rangle = 0 \quad , \quad \hat{d}_n|0\rangle = 0 \quad , \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (2.53)$$

Fisicamente os operadores de campo \hat{c}_n^\dagger e \hat{d}_n^\dagger representam respectivamente operadores de criação de um elétron e de um pósitron no modo n .

A hamiltoniana de Dirac é uma constante de movimento definida a partir do campo fermiônico como

$$\hat{H} = \frac{i}{4} \sum_{\alpha=1}^4 \int d^3r \left\{ \left[\hat{\psi}(\vec{r}, t)_\alpha^\dagger, \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{r}, t)_\alpha \right] - \left[\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{r}, t)_\alpha^\dagger, \hat{\psi}(\vec{r}, t)_\alpha \right] \right\}, \quad (2.54)$$

e pode ser reescrita a partir dos operadores de campo como

$$\hat{H} = \sum_n \omega_n (\hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n + \hat{d}_n^\dagger \hat{d}_n) + E_0 \hat{1}, \quad (2.55)$$

onde

$$E_0 = - \sum_n \omega_n. \quad (2.56)$$

A equação (2.55) indica então que ω_n representa a energia do modo n e que E_0 é a energia de ponto zero, isto é, a energia do estado de vácuo,

$$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle. \quad (2.57)$$

A equação (2.56) mostra que a energia de ponto zero é dada, a menos de um sinal, pela soma em todos os modos das energias de cada modo. Portanto, para o cálculo da energia de ponto zero é necessário determinar o espectro de energia e o conjunto completo de números quânticos sobre o qual a soma é feita.

2.6 Campo fermiônico sob condição MIT

Consideremos o confinamento do campo fermiônico numa região limitada por uma superfície S implementado via condição de contorno. Ingenuamente, poderia parecer natural propor o anulamento do campo na superfície, $\hat{\psi}(\vec{r}, t)|_S = 0$, isto é, que ele estivesse sob uma condição de contorno de Dirichlet. Contudo, sendo a equação de Dirac de primeira ordem nas derivadas espaciais, isso implicaria no anulamento do campo em todo o espaço, de forma que essa condição deve ser descartada. De fato, a condição de contorno que descreve o confinamento deve garantir que não haja fluxo do campo através da superfície S . Assim, ela deve implicar não no anulamento do campo, mas sim no da corrente de Dirac,

$$\hat{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}[\hat{\psi}(\vec{r}, t)^\dagger_\alpha, \hat{\psi}(\vec{r}, t)_\beta]\vec{\alpha}_{\alpha,\beta}, \quad (2.58)$$

ou seja, $\vec{n} \cdot \hat{j}(\vec{r}, t)|_S = 0$, onde \vec{n} é a normal externa à superfície, conforme a figura 2.4. Nesse sentido, a condição de contorno proposta que melhor simula o confinamento é a do modelo de sacola MIT [9, 5, 6, 7, 65] já que, de fato, essa condição garante o anulamento da corrente e não do campo. A condição MIT impõe que em fronteiras impenetráveis o campo de Dirac obedeça à equação

$$(\mathbb{1} + i\vec{n} \cdot \vec{\gamma})\hat{\psi}(\vec{r}, t)|_S = 0, \quad (2.59)$$

onde \vec{n} é a normal externa da região e $\mathbb{1}$ e $\vec{\gamma}$ são as matrizes

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

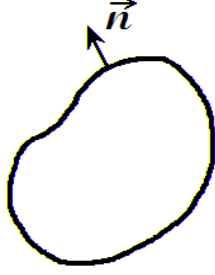


Figura 2.4: Região de confinamento do campo fermiônico: região limitada pela superfície S , onde \vec{n} é a normal externa da região.

A imposição de condições de contorno sobre um campo se reflete sobre suas funções de onda, de forma que a condição MIT (2.59) deverá ser imposta sobre as autofunções do operador de Dirac,

$$(\mathbb{1} + i\vec{n} \cdot \vec{\gamma}) \Psi_n^\pm(\vec{r})|_S = 0. \quad (2.61)$$

Nesse trabalho queremos analisar o campo de Dirac confinado entre duas placas paralelas distantes de a entre si. Dessa forma tomaremos as placas em $z = 0$ e em $z = a$, conforme ilustrado na figura 2.5. Na primeira fronteira, $z = 0$ ($\vec{n} = -\hat{z}$), a equação (2.61) nos dará

$$(\mathbb{1} - i\gamma_z) \Psi_n^\pm(\vec{r})|_{z=0} = 0, \quad (2.62)$$

enquanto que na segunda, $z = a$ ($\vec{n} = \hat{z}$),

$$(\mathbb{1} + i\gamma_z) \Psi_n^\pm(\vec{r})|_{z=a} = 0. \quad (2.63)$$

Queremos estudar o problema do campo fermiônico confinado entre duas placas paralelas distantes de a entre si, isto é, queremos analisar o espectro de energia e o conjunto completo de números quânticos que caracterizam cada modo normal do

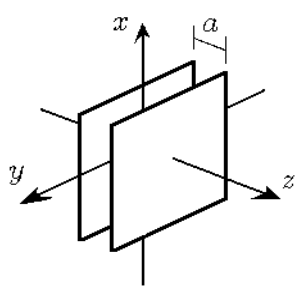


Figura 2.5: Região de confinamento do campo fermiônico, entre os planos $z = 0$ e $z = a$.

campo confinado. Para isso devemos então diagonalizar o operador de Dirac (2.44), isto é, encontrar seus autovalores e autofunções sob as condições de contorno MIT (2.62) e (2.63). Conforme o Apêndice A, as autofunções de frequência positiva têm a forma

$$\begin{aligned} \Psi_s^+(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) &= \frac{m_s(p_l, \vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} \begin{pmatrix} (\omega(p_l, \vec{k}) + m)u_s(\vec{k}) \\ (p_l \hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{ip_l z} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi} \\ &- \frac{m_s(-p_l, \vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} \begin{pmatrix} (\omega(p_l, \vec{k}) + m)u_s(\vec{k}) \\ (-p_l \hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{-ip_l z} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

enquanto que as de frequência negativa têm a forma

$$\begin{aligned} \Psi_s^-(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) &= \frac{m_s(p_l, \vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} \begin{pmatrix} -(p_l \hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) \\ (\omega(p_l, \vec{k}) + m)u_s(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{ip_l z} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi} \\ &- \frac{m_s(-p_l, \vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} \begin{pmatrix} -(-p_l \hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) \\ (\omega(p_l, \vec{k}) + m)u_s(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{-ip_l z} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Nessas expressões, os números quânticos p_l , $l = 1, 2, 3, \dots$, indicam a l -ésima solução positiva em ordem crescente da equação transcendental

$$ma \sin p_l a + p_l a \cos p_l a = 0, \quad (2.66)$$

e os biespinores $u_s(\vec{k})$ com $s = \pm$ possuem a forma

$$u_+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \begin{pmatrix} |\vec{k}| \\ ik_+ \end{pmatrix}, \quad u_-(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \begin{pmatrix} ik_- \\ |\vec{k}| \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

onde $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$. Além disso, as funções $\omega(p_l, \vec{k})$, $m_s(p_l, \vec{k})$ e $n_s(p_l, \vec{k})$ são dadas, respectivamente, por

$$\omega(p_l, \vec{k}) = \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2 + m^2}, \quad (2.68)$$

$$m_s(p_l, \vec{k}) := \omega(p_l, \vec{k}) + m + ip_l + s |\vec{k}|, \quad (2.69)$$

e

$$\begin{aligned} n_s(p_l, \vec{k}) &:= 2a [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 + p_l^2 + \vec{k}^2] m_s(p_l, \vec{k}) m_s(-p_l, \vec{k}) \\ &- \frac{\text{sen } p_l a}{p_l} e^{ip_l a} [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 - p_l^2 + \vec{k}^2 - i2 s p_l |\vec{k}|] m_s^2(p_l, \vec{k}) \\ &- \frac{\text{sen } p_l a}{p_l} e^{-ip_l a} [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 - p_l^2 + \vec{k}^2 + i2 s p_l |\vec{k}|] m_s^2(-p_l, \vec{k}). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Após tudo isso, vemos que as funções de onda são caracterizadas por uma série de números quânticos, os quais relacionaremos a autovalores de operadores hermitianos. Assim o autovalor p_l é explicitado pelo quadrado da componente z do operador momento,

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = p_l^2 \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}). \quad (2.71)$$

As condições de contorno afetam esse número quântico de forma que seu espectro é dado por (2.66). Vemos que os valores de p_l são raízes de uma equação transcendental e não podem ser explicitados. Contudo, pode-se mostrar que todas são reais e possuem multiplicidade unitária. As raízes de (2.66) também são raízes de

$$\text{tg } p_l a = -p_l a / m a, \quad (2.72)$$

o que facilita a visualização gráfica delas, conforme a figura 2.6. A função (2.66) é ímpar em p_l de forma que, sendo p_l uma raiz, $-p_l$ será também uma raiz. Assim não é necessário estender o gráfico anterior para a visualização das raízes negativas, pois estas serão as simétricas das positivas. Contudo a antissimetria da função de

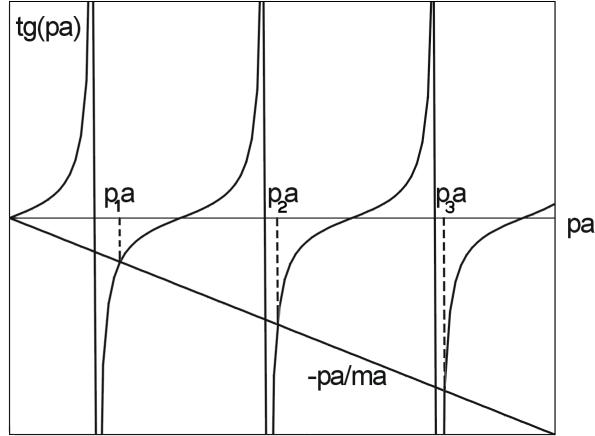


Figura 2.6: Gráfico da equação transcendental 2.72.

onda nesse índice,

$$\Psi_s^\epsilon(-p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = -\Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}), \quad (2.73)$$

implica que autovalores negativos geram funções de onda linearmente dependentes das de autovalor positivo e que a função de onda com autovalor nulo é identicamente nula. Dessa forma podemos caracterizar os estados quânticos apenas pelos autovalores positivos.

O autovalor \vec{k} é explicitado pela componente do operador momento paralela às placas,

$$-i\vec{\nabla}_\rho \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = \vec{k} \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}), \quad (2.74)$$

onde

$$\vec{\nabla}_\rho = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.75)$$

Quanto ao índice $\epsilon = \pm$, este é explicitado pelo operador de Dirac representando o sinal de seu autovalor,

$$\mathcal{H}_D \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = \epsilon \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2 + m^2} \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}). \quad (2.76)$$

Temos, também, um operador não trivial que explicita o índice $s = \pm 1$,

$$-i\hat{z} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = \epsilon s |\vec{k}| \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}), \quad (2.77)$$

onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Sendo essas funções de onda autofunções de operadores hermitianos com autovalores distintos, podemos afirmar que são ortogonais entre si. Então, pelo fato de serem normalizadas, podemos garantir que formam uma base ortonormal de funções,

$$\int_0^a dz \int d^2\rho \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho})^\dagger \Psi_{s'}^{\epsilon'}(p_{l'}, \vec{k}'; z, \vec{\rho}) = \delta_{\epsilon, \epsilon'} \delta_{s, s'} \delta_{l, l'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.79)$$

Pode-se também mostrar que essas funções de onda formam uma base completa,

$$\sum_{\epsilon=\pm} \sum_{s=\pm} \sum_{l=1}^{\infty} \int d^2\vec{k} \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) \Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z', \vec{\rho}')^\dagger = \delta(z - z') \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \mathbf{1}. \quad (2.80)$$

Após tudo isso, concluímos que o espectro de energia depende dos números quânticos p_l e \vec{k} , enquanto que s é um índice de degenerescência. Como vemos na equação (2.48), o índice $\epsilon = \pm$ não caracteriza os modos do campo, ele apenas diferencia estados de frequência positiva, associados a elétrons, e de frequência negativa, associados a pósitrons.

Notemos que o cálculo das autofunções para o caso de um campo fermiônico não-massivo é quase tão trabalhoso quanto o do campo massivo. A única simplificação aparece no fato de que o número quântico p_l tem agora solução explícita em função de l , já que a equação (2.66) se reduz a, simplesmente, $p_l a \cos p_l a = 0$. Pelos mesmos motivos do caso massivo, só nos interessam as raízes positivas,

$$p_l = \left(l - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (2.81)$$

Assim, as autofunções do caso não-massivo são facilmente obtidas a partir das do caso massivo tomando $m = 0$.

2.7 Cálculo da energia de Casimir fermiônica

Conforme a equação (2.48), o campo fermiônico sob condição de contorno MIT pode ser expresso em função das soluções estacionárias,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t) = \sum_{s=\pm} \sum_{l=1}^{\infty} \int d^2k \left(\hat{c}_{s,l}(\vec{k}) \Psi_s^+(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) e^{-i\omega(p_l, \vec{k})t} \right. \\ \left. + \hat{d}_{s,l}(-\vec{k})^\dagger \Psi_s^-(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) e^{i\omega(p_l, \vec{k})t} \right), \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde $\Psi_s^\epsilon(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho})$ são dadas em (2.64) e (2.65) e $\omega(p_l, \vec{k}) = \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2 + m^2}$. Os operadores de campo obedecem às relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_{s,l}(\vec{k}), \hat{c}_{s',l'}(\vec{k}')^\dagger\} &= \delta_{s,s'} \delta_{l,l'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \hat{1}, \\ \{\hat{d}_{s,l}(\vec{k}), \hat{d}_{s',l'}(\vec{k}')^\dagger\} &= \delta_{s,s'} \delta_{l,l'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \hat{1}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

enquanto as demais relações são identicamente nulas. A hamiltoniana de Dirac, obtida a partir do campo conforme a equação (2.54), é então dada por

$$\hat{H} = \sum_{s=\pm} \sum_{l=1}^{\infty} \int d^2k \omega(p_l, \vec{k}) \left(\hat{c}_{s,l}(\vec{k})^\dagger \hat{c}_{s,l}(\vec{k}) + \hat{d}_{s,l}(\vec{k})^\dagger \hat{d}_{s,l}(\vec{k}) \right) + E_0(a) \hat{1}, \quad (2.84)$$

onde

$$E_0(a) = - \sum_{s=\pm} \sum_{l=1}^{\infty} \int d^2k \omega(p_l, \vec{k}) \delta(\vec{0}) \quad (2.85)$$

é a energia de ponto zero. A notação $\delta(\vec{0})$ indica a função $\delta(\vec{k})$ avaliada em $\vec{k} = 0$, a qual é proporcional à área das placas $A = \int d^2\rho$, $\delta(\vec{0}) = \int d^2\rho / (2\pi)^2$. A energia de ponto zero será então dada por

$$E_0(\epsilon; a) = - 2A \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2 + m^2} e^{-\epsilon \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2 + m^2}}, \quad \epsilon > 0, \quad (2.86)$$

onde inserimos um corte exponencial a fim de evitar divergências ultravioleta. Como já observamos no caso de campo massivo, o número quântico p_l não pode ser explicitado em função de l e, assim, o somatório em l não pode ser computado diretamente.

Já no caso não-massivo esse problema não ocorre, o que torna o cálculo mais simples. Na próxima seção calcularemos a energia de Casimir para o caso de um campo fermiônico não-massivo confinado entre duas placas e, na seção seguinte, faremos o cálculo para o caso de massa não-nula.

2.7.1 Campo fermiônico não-massivo

No caso não-massivo a energia de ponto zero do campo fermiônico (2.86) torna-se

$$E_0(\epsilon; a) = -2A \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2} e^{-\epsilon \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2}}, \quad \epsilon > 0, \quad (2.87)$$

onde p_l é dado na equação (2.81). Integrando a parte angular de \vec{k} e fazendo a mudança de variável de integração $q = \sqrt{p_l^2 + |\vec{k}|^2}$, obteremos

$$\begin{aligned} E_0(\epsilon; a) &= -\frac{A}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{p_l}^{\infty} dq q^2 e^{-\epsilon q} \\ &= -\frac{A}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{p_l}^{\infty} dq e^{-\epsilon q} = -\frac{A}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\epsilon p_l} \right). \end{aligned} \quad (2.88)$$

O número quântico p_l é agora dado explicitamente em função de l , e o somatório em l é facilmente calculado como o somatório de uma série geométrica,

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\epsilon p_l} = \frac{1}{2} \operatorname{cossech} \left(\frac{\epsilon \pi}{2a} \right). \quad (2.89)$$

Assim, a energia de ponto zero regularizada toma a forma

$$E_0(\epsilon; a) = -\frac{A}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left[\frac{1}{\epsilon} \operatorname{cossech} \left(\frac{\epsilon \pi}{2a} \right) \right]. \quad (2.90)$$

Usando a expansão

$$\operatorname{cossech} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{360} x^3 + \mathcal{O}(x^5), \quad (2.91)$$

é fácil decompor a energia de ponto zero conforme a equação (2.19),

$$E_0(\epsilon; a) = -\frac{6aA}{\pi^2} \frac{1}{\epsilon^4} - \frac{7}{4} \frac{\pi^2}{720} \frac{A}{a^3} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.92)$$

Eliminando então o termo de volume (o de área é nulo nesse caso) e retirando o parâmetro regularizador, teremos a energia de Casimir desse problema,

$$E_C(a) = -\frac{7}{4} \frac{\pi^2}{720} \frac{A}{a^3}, \quad (2.93)$$

o que coincide com o resultado encontrado em [9]. Vemos que a energia de Casimir para o caso de um campo fermiônico não-massivo difere da do campo eletromagnético (2.16) apenas pelo fator 7/4, de forma que as forças de Casimir diferirão também por esse fator.

2.7.2 Campo fermiônico massivo

A energia de ponto zero para o caso do campo fermiônico massivo confinado entre duas placas paralelas distantes de a é dada, conforme a equação (2.86), por

$$E_0(\lambda; a) = -2A \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2 + m^2} e^{-(\lambda/m) \sqrt{p_l^2 + \vec{k}^2 + m^2}}, \quad (2.94)$$

onde trocamos o parâmetro regularizador ϵ para $\lambda = m\epsilon$. Integrando a parte angular de \vec{k} e fazendo a mudança de variável de integração $u = m^{-1} (|\vec{k}|^2 + m^2)^{1/2}$, teremos

$$E_0(\lambda; a) = -\frac{m^3 A}{\pi} \int_1^{\infty} du u \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2} e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}}. \quad (2.95)$$

O somatório na equação (2.95) pode ser obtido de um outro mais simples,

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2} e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} = -\frac{d}{d\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}}. \quad (2.96)$$

Ainda assim o somatório em l no lado direito da equação (2.96) não é simples pois, como visto, p_l não é dado explicitamente em função de l . Para calcular tal somatório, devemos então recorrer ao teorema do argumento do cálculo de variáveis complexas [8]: dada uma função $\phi(z)$, analítica no interior de um contorno fechado C e sobre C , e uma função $\chi(z)$ que, exceto por um número finito de pólos no interior

de C , é analítica no interior e sobre C , sendo z_l seus zeros com multiplicidade $m(z_l)$ e w_l seus pólos com multiplicidade $m(w_l)$, então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \phi(z) \frac{d}{dz} \ln \chi(z) = \sum_{z_l} m(z_l) \phi(z_l) - \sum_{w_l} m(w_l) \phi(w_l), \quad (2.97)$$

onde as somas incluem apenas os zeros e os pólos internos ao contorno C . Aplicaremos o teorema para determinar o somatório do lado direito da equação (2.96). Identificaremos então z_l como p_l/m onde p_l são as raízes da função de (2.66)

$$f(pa) = ma \operatorname{sen} pa + pa \operatorname{cos} pa. \quad (2.98)$$

Essa função não possui pólos, o que elimina o último termo de (2.97) e, além disso todas as suas raízes são reais e possuem multiplicidade unitária, $m(z_l) = 1$, simplificando ainda mais o teorema. Como o contorno é fechado, teremos em princípio de trabalhar com um número finito de raízes, N . Assim, com um contorno C que contenha as raízes do eixo real positivo p_l , $l = 1, 2, \dots, N$, o teorema fornece

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz e^{-\lambda \sqrt{z^2 + u^2}} \frac{d}{dz} \ln(ma \operatorname{sen}(maz) + maz \operatorname{cos}(maz)). \end{aligned} \quad (2.99)$$

A escolha do contorno C e o cálculo da integral de linha dessa última equação são feitos no Apêndice B e obtemos, no limite $N \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} = -\frac{e^{-\lambda u}}{2} \\ & + \frac{1}{\pi} \int_u^{\infty} dy \operatorname{sen}(\lambda \sqrt{y^2 - u^2}) \frac{d}{dy} \ln(\operatorname{sen}(may) + y \operatorname{cosh}(may)). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Derivando essa expressão em relação a λ e usando a identidade

$$\frac{d}{dy} \ln(\operatorname{sen}(may) + y \operatorname{cosh}(may)) = ma + \frac{1}{y+1} + \frac{d}{dy} \ln \left(1 + \frac{y-1}{y+1} e^{-2may} \right), \quad (2.101)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2} e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} = -u \frac{e^{-\lambda u}}{2} \\
& -\frac{ma}{\pi} \int_u^{\infty} dy \sqrt{y^2 - u^2} \cos(\lambda \sqrt{y^2 - u^2}) \\
& -\frac{1}{\pi} \int_u^{\infty} dy \frac{1}{y+1} \sqrt{y^2 - u^2} \cos(\lambda \sqrt{y^2 - u^2}) \\
& -\frac{1}{\pi} \int_u^{\infty} dy \sqrt{y^2 - u^2} \cos(\lambda \sqrt{y^2 - u^2}) \frac{d}{dy} \ln \left(1 + \frac{y-1}{y+1} e^{-2may} \right). \quad (2.102)
\end{aligned}$$

Substituindo essa expressão na equação (2.95) e realizando a mudança de ordem de integração

$$\int_1^{\infty} du \int_u^{\infty} dy = \int_1^{\infty} dy \int_1^y du, \quad (2.103)$$

teremos

$$\begin{aligned}
E_0(\lambda; a) &= \frac{m^4 a A}{\pi^2} \int_1^{\infty} dy I(\lambda; y) \\
&+ \frac{m^3 A}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \right) + \frac{m^3 A}{\pi^2} \int_1^{\infty} dy \frac{I(\lambda; y)}{y+1} \\
&+ \frac{m^3 A}{\pi^2} \int_1^{\infty} dy I(\lambda; y) \frac{d}{dy} \ln \left(1 + \frac{y-1}{y+1} e^{-2may} \right), \quad (2.104)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I(\lambda; y) &= \int_1^y du u \sqrt{y^2 - u^2} \cos(\lambda \sqrt{y^2 - u^2}) = -\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \int_1^y du \frac{u \cos(\lambda \sqrt{y^2 - u^2})}{\sqrt{y^2 - u^2}} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}(\lambda \sqrt{y^2 - u^2}) \Big|_{u=1}^{u=y} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}(\lambda \sqrt{y^2 - 1}) \right). \quad (2.105)
\end{aligned}$$

É fácil então ver que

$$I(0; y) = \frac{1}{3} (y^2 - 1)^{3/2}. \quad (2.106)$$

Eliminando então os termos de área e de volume na equação (2.104) e retirando o parâmetro regularizador teremos, após uma integração por partes,

$$E_C(a) = -\frac{m^3 A}{\pi^2} \int_1^\infty dy y \sqrt{y^2 - 1} \ln \left(1 + \frac{y-1}{y+1} e^{-2may} \right), \quad (2.107)$$

o que coincide com o resultado obtido em [10, 11, 20]. A força de Casimir, isto é, a força de interação entre as placas será então dada por

$$F_C(a) = -\frac{d}{da} E_C(a) = -\frac{2m^4 A}{\pi^2} \int_1^\infty dx \frac{x^2 (x-1) \sqrt{x^2 - 1}}{(x-1) + (x+1)e^{2max}}, \quad (2.108)$$

onde o sinal negativo indica uma atração entre as placas. A pressão de Casimir ao qual cada placa estará sujeita será então

$$p_C(a) = \frac{F_C(a)}{A} = -\frac{2m^4}{\pi^2} \int_1^\infty dx \frac{x^2 (x-1) \sqrt{x^2 - 1}}{(x-1) + (x+1)e^{2max}}. \quad (2.109)$$

A fim de recuperar o limite não-massivo fazemos a mudança de variável de integração $x = 2may$ na equação (2.107),

$$E_C(a) = -\frac{A}{8\pi^2 a^3} \int_{2ma}^\infty dx x \sqrt{x^2 - (2ma)^2} \ln \left(1 + \frac{x-2ma}{x+2ma} e^{-x} \right). \quad (2.110)$$

Tomando $m = 0$ nessa expressão e usando a identidade

$$\int_0^\infty dx x^2 \ln(1 + e^{-x}) = \frac{7\pi^4}{360}, \quad (2.111)$$

recuperamos a energia de Casimir para um campo fermiônico não-massivo, equação (2.93). É interessante notar que o limite de pequenas distâncias também reproduz esse resultado,

$$E_C(a) \xrightarrow{ma \rightarrow 0} -\frac{7}{8} \frac{\pi^2}{360} \frac{A}{a^3}, \quad (2.112)$$

uma vez que a energia de Casimir (2.107) é função do parâmetro ma . Este parâmetro representa a distância entre as placas em unidades do comprimento de onda Compton do elétron, $\lambda = 1/m = 3,86 \times 10^{-13}$ m. Então, se quisermos determinar o valor dessa expressão para uma distância da ordem de μ m ou mesmo de nm, teremos

$ma \sim 10^6$ e 10^3 , respectivamente. Contudo, para $ma \gg 1$, a energia de Casimir (2.107) tem por forma assintótica

$$E_C(a) \xrightarrow{ma \rightarrow \infty} - \frac{3m^3 A}{32\pi^{3/2}} \frac{e^{-2ma}}{(ma)^{5/2}}, \quad (2.113)$$

o que nos diz que a energia de Casimir é demasiadamente pequena a essas distâncias. Obviamente tanto a força quanto a pressão de Casimir são desprezíveis na escala de nm, ou seja, mesmo em nanocavidades não é possível observar o efeito Casimir fermiônico. Vemos então que as flutuações de ponto zero de um campo massivo tornam-se relevantes apenas quando as dimensões de confinamento do campo são da ordem do comprimento de onda Compton desse campo, $a \sim 1/m$.

Assim, vemos que, no caso de um campo fermiônico não-massivo, as diferenças entre esse campo e um campo eletromagnético não afetam a energia de Casimir, uma vez que elas diferem apenas por um fator $7/4$. Este fator, que é aproximadamente 2, talvez possa ser entendido pelo fato de que o campo fermiônico possui quatro graus de liberdade, associados a elétrons e pósitrons e ao spin $\pm 1/2$, frente aos dois graus de liberdade do campo eletromagnético, associados às polarizações dos fótons. No caso de um campo fermiônico massivo, a energia de Casimir desses dois campos difere fortemente, já que a presença da massa suprime o efeito Casimir do campo fermiônico para distâncias de confinamento maiores que o comprimento de onda Compton do elétron.

Capítulo 3

Influência de campo externo na energia de Casimir

3.1 Introdução

Na seção 2.7.1 determinamos a energia de Casimir para o caso de um campo fermiônico sem massa confinado entre duas placas paralelas. De fato existem na natureza partículas fermiônicas de massa nula (ou pelo menos muitíssimo menor que a do elétron), os neutrinos, contudo não existe material que possa confinar essas partículas. Dessa forma esse cálculo é muito pouco realista. Na seção 2.7.2 calculamos então a energia de Casimir para o caso do campo fermiônico massivo porém, como visto, essa grandeza é demasiadamente pequena na escala de μm ou nm frente ao caso de um campo não-massivo, devido ao fator exponencial e^{-2ma} , onde m é a massa do elétron. Essa atenuação provocada pela massa é tão forte que impossibilita qualquer verificação experimental nessa escala. Isso não ocorre numa escala menor ou da ordem do comprimento de onda Compton do campo, o que pode ser interessante na análise do confinamento de quarks em hádrons ou mésons. De

fato, a dimensão de um hádron é da ordem de fm ($= 10^{-15}\text{m}$), o que é menor que o comprimento de onda Compton dos quarks. Poderíamos, então, extrapolar nossos resultados para estimar a energia de Casimir devida ao confinamento de quarks em hádrons ou mésons, tendo em mente a diferença entre o campo fermiônico para elétrons e para quarks (além de possuir carga elétrica, o campo dos quarks possui carga de cor responsável pelas interações fortes) e a diferença de geometrias (um hádron ou um méson deve apresentar geometria esférica). Dessa forma vemos que, se ainda estivermos interessados em analisar o efeito Casimir no caso de placas paralelas, é então necessário acrescentar algum ingrediente externo a fim de amplificar a energia de Casimir.

Campos quânticos carregados não são afetados somente por condições de contorno, eles podem também interagir com campos eletromagnéticos externos. De fato, um campo externo afeta tanto a dinâmica das excitações do campo quântico, as partículas reais, como suas flutuações de ponto zero, partículas virtuais. Dessa forma, a ação de um campo eletromagnético pode também ressaltar efeitos de ponto zero em um campo carregado. Nesse sentido um campo eletromagnético poderia ser o ingrediente necessário para amplificar a energia de Casimir.

Neste capítulo estudaremos o efeito de um campo magnético uniforme no problema do capítulo 2, ou seja, determinaremos a energia de Casimir de um campo fermiônico massivo confinado entre duas placas e sujeito a ação do campo magnético. A influência de um campo magnético sobre o efeito Casimir já havia sido estudada no caso do campo escalar carregado [76, 77] e no caso do campo de Dirac submetido a condição de contorno antiperiódica [18]. Nosso interesse é tratar o caso do campo de Dirac sob condição de contorno MIT (na presença do campo magnético). Esse problema foi resolvido anteriormente por Elizalde, Santos e Tort [21] e aqui chegaremos aos mesmos resultados por diferente método. Por simplicidade, adotaremos o campo magnético ortogonal às placas. Assim devemos obter o espectro de autoval-

ores do operador de Dirac sujeito ao campo externo e condições de contorno, efetuar a soma de modos e extrair a energia de Casimir. Contudo na primeira seção analisaremos um problema mais simples, o de um campo fermiônico desconfinado sob a ação do campo magnético, já que esse problema elucidada todas as características próprias do campo fermiônico na presença do campo externo. Contudo, a presença apenas de campo externo não define energia de Casimir já que, em não havendo fronteira, não é possível definir uma tensão. Assim, embora não utilizemos diretamente os resultados dessa seção no cálculo da energia de Casimir, a primeira seção é um preâmbulo para a segunda onde obteremos o espectro sob condição de contorno e campo magnético. Além disso os resultados da primeira seção serão úteis ao terceiro capítulo. Na terceira seção, por fim, calcularemos a energia de Casimir do problema.

3.2 Espectro de energia do campo fermiônico sob campo magnético externo

Queremos agora estudar o problema do campo fermiônico sob a ação de um campo magnético uniforme. Tomaremos o campo magnético na direção z , $\vec{B} = B\hat{z}$. O acoplamento com um campo magnético externo é feito substituindo-se o operador momento $-i\vec{\nabla}$ pelo operador

$$\vec{\Pi} = -i\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}), \quad (3.1)$$

onde $-e$ é a carga do elétron e $\vec{A}(\vec{r})$ é potencial vetor do campo magnético, $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}$. Escolheremos o calibre

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2}. \quad (3.2)$$

Assim a equação de Dirac é ainda da forma (2.43), porém agora o operador de Dirac

é dado por

$$\mathcal{H}_D = \vec{\Pi} \cdot \vec{\alpha} + m\beta. \quad (3.3)$$

Utilizando a forma explícita das matrizes $\vec{\alpha}$ e β de Dirac, equação (2.45), podemos reescrevê-lo como

$$\mathcal{H}_D = \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & \vec{\Pi} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{\Pi} \cdot \vec{\sigma} & -m\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Com a forma explícita de $\vec{\sigma}$, equação (2.46), teremos

$$\vec{\Pi} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \Pi_z & \Pi_- \\ \Pi_+ & -\Pi_z \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde os operadores Π_{\pm} e Π_z são dados por

$$\Pi_{\pm} = (\hat{x} \pm i\hat{y}) \cdot \vec{\Pi} \quad , \quad \Pi_z = \hat{z} \cdot \vec{\Pi}. \quad (3.6)$$

A expressão (3.1) indica que $\vec{\Pi}$ é um operador hermitiano, $\vec{\Pi}^\dagger = \vec{\Pi}$, de forma que

$$\Pi_{\pm}^\dagger = \Pi_{\mp}. \quad (3.7)$$

Utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad , \quad \vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.8)$$

onde

$$\hat{\rho} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \quad , \quad \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}, \quad (3.9)$$

podemos reescrever o potencial vetor como

$$\vec{A}(\rho, \varphi) = \frac{B}{2} \rho \hat{\varphi}. \quad (3.10)$$

Assim, usando que $(\hat{x} \pm i\hat{y}) \cdot \hat{\rho} = e^{\pm i\varphi}$ e $(\hat{x} \pm i\hat{y}) \cdot \hat{\varphi} = \pm i e^{\pm i\varphi}$, obtemos

$$\Pi_{\pm} = \pm i e^{\pm i\varphi} \left(\frac{eB}{2} \rho \mp \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad , \quad \Pi_z = -i \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.11)$$

Definindo as variáveis complexas

$$s_{\pm} := \sqrt{\frac{eB}{2}} \rho e^{\pm i\varphi}, \quad (3.12)$$

podemos reescrever Π_{\pm} como

$$\Pi_+ = i\sqrt{2eB}\left(\frac{s_+}{2} - \frac{\partial}{\partial s_-}\right) \quad , \quad \Pi_- = -i\sqrt{2eB}\left(\frac{s_-}{2} + \frac{\partial}{\partial s_+}\right). \quad (3.13)$$

A propriedade (3.7) mostra que os operadores entre parênteses são conjugados hermitianos, isto é¹,

$$a = \frac{s_-}{2} + \frac{\partial}{\partial s_+} \quad \Rightarrow \quad a^\dagger = \frac{s_+}{2} - \frac{\partial}{\partial s_-}. \quad (3.14)$$

Com essa forma fica fácil então mostrar que esses operadores satisfazem a relação de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3.15)$$

Devido à simplicidade da equação (3.15) torna-se conveniente expressar os operadores Π_{\pm} em termos dos operadores a e a^\dagger ,

$$\Pi_+ = i\sqrt{2eB}a^\dagger \quad , \quad \Pi_- = -i\sqrt{2eB}a. \quad (3.16)$$

Introduziremos agora um operador que se demonstrará útil no cálculo das autofunções do problema, o operador de Landau

$$\vec{\Xi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A}(\vec{r}). \quad (3.17)$$

De forma análoga, suas componentes $+$, $-$ e z serão dadas por

$$\Xi_+ = -i\sqrt{2eB}b \quad , \quad \Xi_- = i\sqrt{2eB}b^\dagger \quad , \quad \Xi_z = -i\frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.18)$$

onde

$$b = \frac{s_+}{2} + \frac{\partial}{\partial s_-} \quad , \quad b^\dagger = \frac{s_-}{2} - \frac{\partial}{\partial s_+}. \quad (3.19)$$

Não é difícil mostrar que

$$[b, b^\dagger] = 1 \quad , \quad [a, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0, \quad (3.20)$$

¹Os operadores a e a^\dagger , bem como outros sem o circunflexo, são operadores diferenciais; o circunflexo é reservado apenas para operadores sobre os espaços de estados quânticos.

indicando que a e b formam uma álgebra de dois osciladores harmônicos desacoplados. Essa álgebra nos diz que podemos achar autofunções simultâneas de $a^\dagger a$ e $b^\dagger b$,

$$\begin{aligned} a^\dagger a \phi_{n,q}(s_+, s_-) &= n \phi_{n,q}(s_+, s_-), \\ b^\dagger b \phi_{n,q}(s_+, s_-) &= q \phi_{n,q}(s_+, s_-), \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde os autovalores são inteiros não negativos, $n, q = 0, 1, 2, \dots$. Temos também equações de abaixamento e levantamento,

$$\begin{aligned} a \phi_{n,q}(s_+, s_-) &= \sqrt{n} \phi_{n-1,q}(s_+, s_-), \\ a^\dagger \phi_{n-1,q}(s_+, s_-) &= \sqrt{n} \phi_{n,q}(s_+, s_-), \\ b \phi_{n,q}(s_+, s_-) &= \sqrt{q} \phi_{n,q-1}(s_+, s_-), \\ b^\dagger \phi_{n,q-1}(s_+, s_-) &= \sqrt{q} \phi_{n,q}(s_+, s_-). \end{aligned} \quad (3.22)$$

A autofunção $\phi_{0,0}(s_+, s_-)$ deve então obedecer às equações

$$\begin{aligned} a \phi_{0,0}(s_+, s_-) &= 0, \\ b \phi_{0,0}(s_+, s_-) &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Usando a forma explícita de a e b , (3.14) e (3.19), obteremos essa autofunção a menos de um fator de normalização,

$$\phi_{0,0}(s_+, s_-) = N e^{-s_+ s_- / 2}. \quad (3.24)$$

Normalizaremos essa autofunção por meio da equação

$$\int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi |\phi_{0,0}(\rho, \varphi)|^2 = 1, \quad (3.25)$$

o que nos fornece $N = \sqrt{eB/2\pi}$. As demais autofunções são então obtidas por levantamento,

$$\phi_{n,q}(s_+, s_-) = \frac{(b^\dagger)^q (a^\dagger)^n}{\sqrt{q!} \sqrt{n!}} \phi_{0,0}(s_+, s_-). \quad (3.26)$$

A forma explícita dessas autofunções será então

$$\phi_{n,q}(s_+, s_-) = \begin{cases} N \sqrt{\frac{q!}{n!}} s_+^{n-q} L_q^{n-q}(s_+ s_-) e^{-s_+ s_- / 2} & , n \geq q, \\ N \sqrt{\frac{n!}{q!}} s_-^{q-n} L_n^{q-n}(s_+ s_-) e^{-s_+ s_- / 2} & , n \leq q, \end{cases} \quad (3.27)$$

onde $L_p^q(x)$ são os polinômios associados de Laguerre,

$$L_p^q(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \frac{(p+q)!}{(p-k)!(q+k)! k!} x^k. \quad (3.28)$$

Usando as definições das variáveis s_{\pm} , equação (3.12), essas autofunções podem então ser reescritas em função de ρ e φ ,

$$\phi_{n,q}(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{eB}{2}} S_{n,q} \left(\sqrt{\frac{eB}{2}} \rho \right) \frac{e^{i(n-q)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.29)$$

sendo

$$S_{n,q}(s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2q!}{n!}} s^{n-q} L_q^{n-q}(s^2) e^{-s^2/2} & , n \geq q, \\ \sqrt{\frac{2n!}{q!}} s^{q-n} L_n^{q-n}(s^2) e^{-s^2/2} & , n \leq q. \end{cases} \quad (3.30)$$

As autofunções $\phi_{n,q}(\rho, \varphi)$ formam uma base ortonormal de funções,

$$\int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \phi_{n,q}(\rho, \varphi)^* \phi_{n',q'}(\rho, \varphi) = \delta_{n,n'} \delta_{q,q'}, \quad (3.31)$$

e possuem completeza,

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty \phi_{n,q}(\rho, \varphi) \phi_{n,q}(\rho', \varphi')^* = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(\varphi - \varphi'). \quad (3.32)$$

Com essa base de funções, podemos procurar as autofunções do operador de Dirac.

Definindo, então, para $n = 1, 2, 3, \dots$ a matriz 2×2

$$u_{n,q}(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \phi_{n-1,q}(\rho, \varphi) & 0 \\ 0 & \phi_{n,q}(\rho, \varphi) \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

e usando as equações (3.5), (3.16) e (3.22), pode-se mostrar a propriedade

$$\vec{\Pi} \cdot \vec{\sigma} u_{n,q}(\rho, \varphi) e^{ipz} = u_{n,q}(\rho, \varphi) (p\hat{z} + k_n\hat{y}) \cdot \vec{\sigma} e^{ipz}, \quad (3.34)$$

onde $k_n = \sqrt{2eBn}$. Proponhamos então a seguinte forma para os autoestados do operador de Dirac:

$$\Psi_{n,q}(p; \rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} u_{n,q}(\rho, \varphi)A \\ u_{n,q}(\rho, \varphi)B \end{pmatrix} e^{ipz}. \quad (3.35)$$

Usando as equações (3.4) e (3.34), teremos que (3.35) será autoestado de \mathcal{H}_D ,

$$\mathcal{H}_D \Psi_{n,q}(p; \rho, \varphi, z) = \omega \Psi_{n,q}(p; \rho, \varphi, z), \quad (3.36)$$

se A e B satisfizerem a equação

$$\begin{pmatrix} m\mathbf{1} & (p\hat{z} + k_n\hat{y}) \cdot \vec{\sigma} \\ (p\hat{z} + k_n\hat{y}) \cdot \vec{\sigma} & -m\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Analisemos apenas as soluções de autovalor positivo pois as de autovalor negativo serão semelhantes. A equação (3.37) será satisfeita se

$$\begin{cases} A = (\omega_n(p) + m)C \\ B = (p\hat{z} + k_n\hat{y}) \cdot \vec{\sigma} C \end{cases} \quad \text{e} \quad \omega = \omega_n(p), \quad (3.38)$$

onde $\omega_n(p) = \sqrt{p^2 + k_n^2 + m^2}$ e C é um biespinor arbitrário. Substituindo esse resultado na equação (3.35) e impondo a normalização

$$\int dz \int d^2\rho \Psi_{n,q}^+(p; \rho, \varphi, z)^\dagger \Psi_{n,q}^+(p'; \rho, \varphi, z) = \delta(p - p'), \quad (3.39)$$

temos que o biespinor C deve satisfazer a equação $4\pi\omega_n(p)(\omega_n(p) + m)C^\dagger C = 1$. Escolhendo C proporcional aos biespinores

$$\chi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}, \quad s = \pm, \quad (3.40)$$

teremos finalmente os autoestados do operador de Dirac com autovalor positivo para $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\Psi_{n,q,s}^+(p; \rho, \varphi, z) = N_n(p) \begin{pmatrix} u_{n,q}(\rho, \varphi)(\omega_n(p) + m)\chi_s \\ u_{n,q}(\rho, \varphi)(p\hat{z} + k_n\hat{y}) \cdot \vec{\sigma}\chi_s \end{pmatrix} \frac{e^{ipz}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.41)$$

onde

$$N_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_n(p)(\omega_n(p) + m)}}. \quad (3.42)$$

As autofunções de autovalor negativo com $n = 1, 2, 3, \dots$ podem ser obtidas de forma semelhante e serão da forma

$$\Psi_{n,q,s}^-(p; \rho, \varphi, z) = N_n(p) \begin{pmatrix} -u_{n,q}(\rho, \varphi)(p\hat{z} + k_n\hat{y}) \cdot \vec{\sigma}\chi_s \\ u_{n,q}(\rho, \varphi)(\omega_n(p) + m)\chi_s \end{pmatrix} \frac{e^{ipz}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.43)$$

Devemos lembrar que a definição (3.33) não pode ser feita para $n = 0$ devido à presença da função $\phi_{n-1,q}(\rho, \varphi)$, o que significa que a solução (3.41) não aceita esse valor para n . Para esse caso podemos notar que

$$\vec{\Pi} \cdot \vec{\sigma} \phi_{0,q}(\rho, \varphi) \xi e^{ipz} = p \sigma_z \phi_{0,q}(\rho, \varphi) \xi e^{ipz} \quad \text{onde} \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Assim, proporemos para autoestado de \mathcal{H}_D com $n = 0$

$$\Psi_{0,q}(p; \rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} c \psi_{0,q}(\rho, \varphi) \xi \\ d \psi_{0,q}(\rho, \varphi) \xi \end{pmatrix} e^{ipz}, \quad (3.45)$$

onde c e d são números complexos. Seguindo o procedimento anterior, vemos que os autoestados de autovalor positivo com $n = 0$ são dados por

$$\Psi_{0,q}^+(p; \rho, \varphi, z) = N_0(p) \begin{pmatrix} \phi_{0,q}(\rho, \varphi)(\omega_0(p) + m)\xi \\ -\phi_{0,q}(\rho, \varphi) p \xi \end{pmatrix} \frac{e^{ipz}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.46)$$

e as de autovalor negativo, por

$$\Psi_{0,q}^-(p; \rho, \varphi, z) = N_0(p) \begin{pmatrix} \phi_{0,q}(\rho, \varphi) p \xi \\ \phi_{0,q}(\rho, \varphi)(\omega_0(p) + m)\xi \end{pmatrix} \frac{e^{ipz}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.47)$$

Como no capítulo anterior, as funções de onda podem ser caracterizadas por uma série de números quânticos. Assim o autovalor p é explicitado pela componente z do operador momento,

$$-i \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi) = p \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi), \quad (3.48)$$

e assume qualquer valor real, $-\infty < p < \infty$.

Temos o índice $n = 0, 1, 2, \dots$, o qual está associado à equação

$$(\vec{\Pi}_\rho^2 \mathbb{1} + 2eBS_z) \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi) = 2eBn \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi), \quad (3.49)$$

onde $\vec{\Pi}_\rho = \vec{\Pi} - \hat{z}\Pi_z$ é a componente perpendicular ao campo magnético do operador $\vec{\Pi}$, dado na equação (3.1), e S_z é a componente z da matriz de spin

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Quanto ao índice $\epsilon = \pm$, este é explicitado pelo operador de Dirac representando o sinal de seu autovalor,

$$\mathcal{H}_D \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi) = \epsilon \sqrt{p^2 + 2eBn + m^2} \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi). \quad (3.51)$$

Semelhantemente temos uma equação que explicita o índice $q = 0, 1, 2, \dots$,

$$\vec{\Xi}_\rho^2 \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi) = 2eBq \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi), \quad (3.52)$$

onde $\vec{\Xi}_\rho = \vec{\Xi} - \hat{z}\Xi_z$ é a componente perpendicular ao campo magnético do operador de Landau $\vec{\Xi}$, dado na equação (3.17).

Temos também um operador não trivial que explicita o índice $s = \pm 1$,

$$-i\hat{z} \times \vec{\Pi} \cdot \vec{\Sigma} \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi) = \epsilon s \sqrt{2eBn} \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi), \quad (3.53)$$

onde $\vec{\Sigma}$ é dado em (2.78). Contudo para o caso $n = 0$ não é possível definir o autovalor s e, ao invés de dois ($s = \pm 1$), associa-se apenas um autoestado.

Um outro número quântico bem definido é a componente z do momento angular total, porém esse pode ser expresso em função dos índices n e q ,

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbb{1} + S_z\right)\Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi) = (n - q - 1/2)\Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi). \quad (3.54)$$

Cabe também ressaltar que as funções de onda formam uma base ortonormal de funções,

$$\int dz \int d^2\rho \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi)^\dagger \Psi_{n',q',s'}^{\epsilon'}(p'; z, \rho, \varphi) = \delta_{\epsilon,\epsilon'} \delta_{n,n'} \delta_{q,q'} \delta_{s,s'} \delta(p - p'), \quad (3.55)$$

que possui completeza,

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{n=0}^{\infty'} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int dp \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; \rho, \varphi, z) \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; \rho', \varphi', z')^\dagger \\ = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z') \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Deve-se notar que o somatório em s deixa de existir para $n = 0$, o que fica indicado pela presença de $(')$ no somatório em n .

Após tudo isso, concluímos que o espectro de energia depende apenas dos números quânticos n e p , de forma que q e s medem apenas degenerescências. Para cada energia com $n > 0$ os dois valores de s geram uma degenerescência 2, porém para $n = 0$ temos apenas um estado associado, de forma que aí a degenerescência é unitária. Já a degenerescência em q é infinita, devido ao fato de ser ilimitado,

$$\sum_{q=0}^{\infty} 1 = \infty. \quad (3.57)$$

Tentemos então contornar tal problema. De acordo com o Apêndice C, pode-se deduzir a equação

$$\sum_{q=0}^{\infty} \phi_{n,q}(\rho, \varphi)^* \phi_{n,q}(\rho, \varphi) = \frac{eB}{2\pi}. \quad (3.58)$$

Usando essa propriedade e a forma explícita das funções $\Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; \rho, \varphi, z)$ pode-se concluir que

$$\sum_{q=0}^{\infty} \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; \rho, \varphi, z)^\dagger \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; \rho, \varphi, z) = \frac{eB}{(2\pi)^2}. \quad (3.59)$$

Por outro lado, usando a equação (3.31) e a forma explícita das funções $\Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; \rho, \varphi, z)$, podemos deduzir a identidade

$$\int d^2\rho \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi)^\dagger \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; z, \rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.60)$$

Integrando a equação (3.59) em ρ e φ e usando a equação (3.60), teremos

$$\sum_{q=0}^{\infty} 1 = \frac{eBA}{2\pi}, \quad (3.61)$$

onde $A = \int d^2\rho$ é a área de um plano ortogonal ao campo magnético da região sob a ação desse campo. Isso mostra que, apesar da degenerescência em q ser infinita, essa degenerescência por unidade de área é finita.

Mostramos então, nesta seção, que todos os estados quânticos do problema encontram-se caracterizados por autovalores de operadores hermitianos, ou seja, as funções de onda do problema ficam especificadas por uma série de números quânticos que determinam não só os autovalores do operador de Dirac como também suas degenerescências.

3.3 Espectro de energia do campo fermiônico sob condição de contorno MIT e campo magnético externo

Queremos agora estudar o problema do campo fermiônico confinado entre duas placas paralelas distantes de a entre si e sob a ação de um campo magnético uniforme ortogonal a elas. Tomaremos então o campo magnético na direção z , $\vec{B} = B\hat{z}$, e as placas em $z = 0$ e $z = a$. O cálculo das autofunções do operador de Dirac que satisfazem as condições de contorno (2.62) e (2.63) e que se encontram devidamente normalizadas é bem semelhante ao feito na seção 3.2 e, portanto, será omitido aqui. Verificamos que a única modificação no espectro de números quânticos ocorre no

autovalor da componente z do operador momento. Como ocorria na presença exclusiva de confinamento (seção 2.6), as funções de onda são autofunções do quadrado desse operador,

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; z, \rho, \varphi) = p_l^2 \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; z, \rho, \varphi), \quad (3.62)$$

e o autovalor p_l possui seu espectro discretizado conforme a equação (2.66),

$$ma \sin p_l a + p_l a \cos p_l a = 0. \quad (3.63)$$

Novamente, a função de onda é antissimétrica nesse autovalor,

$$\Psi_{n,q,s}^\epsilon(-p_l; z, \rho, \varphi) = -\Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; z, \rho, \varphi), \quad (3.64)$$

implicando que autovalores negativos geram funções de onda linearmente dependentes das de autovalor positivo e que a função de onda com autovalor nulo é identicamente nula. Essa modificação no número quântico p_l obviamente se reflete nos autovalores do operador de Dirac,

$$\mathcal{H}_D \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; z, \rho, \varphi) = \epsilon \sqrt{p_l^2 + 2eBn + m^2} \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; z, \rho, \varphi), \quad (3.65)$$

onde $\epsilon = \pm$. Os demais números quânticos, $n = 0, 1, 2, \dots$, $q = 0, 1, 2, \dots$ e $s = \pm 1$, permanecem inalterados, sendo explicitados em equações de autovalor idênticas às da seção 3.2.

Novamente as funções de onda formam uma base ortonormal de funções,

$$\int_0^a dz \int d^2 \rho \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; z, \rho, \varphi)^\dagger \Psi_{n',q',s'}^{\epsilon'}(p'_l; z, \rho, \varphi) = \delta_{\epsilon,\epsilon'} \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{q,q'} \delta_{s,s'}, \quad (3.66)$$

e possuem completeza,

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; \rho, \varphi, z) \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; \rho', \varphi', z')^\dagger \\ = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z') \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

A notação (') no somatório em n indica que o somatório em s deixa de existir para $n = 0$.

Para o caso $n = 1, 2, 3, \dots$ temos que as autofunções do operador de Dirac com autovalor positivo são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_{n,q,s}^+(p_l; \rho, \varphi, z) &= \frac{m_s(p_l, k_n \hat{y})}{\sqrt{n_s(p_l, k_n \hat{y})}} \begin{pmatrix} u_n^q(\rho, \varphi)(\omega_n(p_l) + m)\chi_s \\ u_n^q(\rho, \varphi)(p_l \hat{z} + k_n \hat{y}) \cdot \vec{\sigma} \chi_s \end{pmatrix} e^{ip_l z} \\ &\quad - \frac{m_s(-p_l, k_n \hat{y})}{\sqrt{n_s(p_l, k_n \hat{y})}} \begin{pmatrix} u_n^q(\rho, \varphi)(\omega_n(p_l) + m)\chi_s \\ u_n^q(\rho, \varphi)(-p_l \hat{z} + k_n \hat{y}) \cdot \vec{\sigma} \chi_s \end{pmatrix} e^{-ip_l z} \end{aligned} \quad (3.68)$$

e as de autovalor negativo são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_{n,q,s}^-(p_l; \rho, \varphi, z) &= \frac{m_s(p_l, k_n \hat{y})}{\sqrt{n_s(p_l, k_n \hat{y})}} \begin{pmatrix} -u_n^q(\rho, \varphi)(p_l \hat{z} + k_n \hat{y}) \cdot \vec{\sigma} \chi_s \\ u_n^q(\rho, \varphi)(\omega_n(p_l) + m)\chi_s \end{pmatrix} e^{ip_l z} \\ &\quad - \frac{m_s(-p_l, k_n \hat{y})}{\sqrt{n_s(p_l, k_n \hat{y})}} \begin{pmatrix} -u_n^q(\rho, \varphi)(-p_l \hat{z} + k_n \hat{y}) \cdot \vec{\sigma} \chi_s \\ u_n^q(\rho, \varphi)(\omega_n(p_l) + m)\chi_s \end{pmatrix} e^{-ip_l z} \end{aligned} \quad , \quad (3.69)$$

onde $\omega_n(p_l) = \sqrt{p_l^2 + 2eBn + m^2}$ e $k_n = \sqrt{2eBn}$. A matriz $u_n^q(\rho, \varphi)$ e o biespinor χ_s são dados em (3.33) e (3.40) e os fatores de normalização $m_s(p_l, k_n \hat{y})$ e $n_s(p_l, k_n \hat{y})$ são dados em (2.69) e (2.70). Para o caso $n = 0$, as funções de onda de autovalor positivo são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_{0,q}^+(p_l; \rho, \varphi, z) &= \frac{m_+(p_l, 0)}{\sqrt{n_+(p_l, 0)}} \begin{pmatrix} \phi_{0,q}(\rho, \varphi)(\omega_0(p_l) + m)\xi \\ -\phi_{0,q}(\rho, \varphi) p_l \xi \end{pmatrix} e^{ip_l z} \\ &\quad - \frac{m_+(-p_l, 0)}{\sqrt{n_+(p_l, 0)}} \begin{pmatrix} \phi_{0,q}(\rho, \varphi)(\omega_0(p_l) + m)\xi \\ \phi_{0,q}(\rho, \varphi) p_l \xi \end{pmatrix} e^{-ip_l z} \end{aligned} \quad (3.70)$$

e as de autovalor negativo, por

$$\begin{aligned} \Psi_{0,q}^-(p_l; \rho, \varphi, z) &= \frac{m_+(p_l, 0)}{\sqrt{n_+(p_l, 0)}} \begin{pmatrix} \phi_{0,q}(\rho, \varphi) p_l \xi \\ \phi_{0,q}(\rho, \varphi)(\omega_0(p_l) + m)\xi \end{pmatrix} e^{ip_l z} \\ &\quad - \frac{m_+(-p_l, 0)}{\sqrt{n_+(p_l, 0)}} \begin{pmatrix} -\phi_{0,q}(\rho, \varphi) p_l \xi \\ \phi_{0,q}(\rho, \varphi)(\omega_0(p_l) + m)\xi \end{pmatrix} e^{-ip_l z} \end{aligned} \quad , \quad (3.71)$$

onde ξ é dado em (3.44) e as funções $\phi_{n,q}(\rho, \varphi)$ são dadas por (3.29).

Após tudo isso concluímos que o espectro de energia depende apenas dos índices n e l , de forma que q e s medem apenas degenerescências. Para cada energia com $n > 0$ os dois valores de s geram uma degenerescência 2, porém para $n = 0$ temos apenas um estado associado, de forma que aí a degenerescência é unitária. Para o cálculo da degenerescência em q , utilizamos a equação (3.58) e a forma explícita das funções de onda acima, obtendo com isso

$$\sum_{q=0}^{\infty} \int_0^a dz \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; \rho, \varphi, z)^\dagger \Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; \rho, \varphi, z) = \frac{eB}{2\pi}. \quad (3.72)$$

Integrando a expressão acima em ρ e φ e usando a equação de normalização (3.66), teremos novamente

$$\sum_{q=0}^{\infty} 1 = \frac{eBA}{2\pi}, \quad (3.73)$$

onde $A = \int d^2\rho$ é a área das placas. Então, novamente, a degenerescência em q é infinita, mas essa degenerescência por unidade de área das placas é finita.

3.4 Energia de Casimir sob campo magnético

Como visto na figura (2.6), a condição de contorno MIT nos diz que o menor valor que o autovalor p_l pode assumir é $p_l = p_1 > \pi/2a$. Vemos então da equação (3.65) que o espectro do autovalor do operador de Dirac na presença do campo magnético uniforme é discreto e a diferença entre o menor autovalor positivo e o maior autovalor negativo é $2\sqrt{p_1^2 + m^2}$. Essa diferença tem o mesmo valor da lacuna que ocorre na ausência do campo magnético. Vemos então uma clara distinção entre funções de onda de frequência positiva e de frequência negativa, de forma que, mesmo na presença do campo magnético, podemos associar estados de frequência positiva a elétrons e os de frequência negativa a pósitrons. Assim, a expansão do

campo fermiônico em soluções estacionárias deve ser feita conforme (2.48),

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(z, \rho, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty'} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \\ &\times (\hat{c}_{n,q,s,l} \Psi_{n,q,s}^+(p_l; \rho, \varphi, z) e^{-i\omega_n(p_l)t} + \hat{d}_{n,q,s,l}^\dagger \Psi_{n,q,s}^-(p_l; \rho, \varphi, z) e^{i\omega_n(p_l)t}), \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde $\Psi_{n,q,s}^\epsilon(p_l; \rho, \varphi, z)$ são dadas em (3.68) e (3.69) e $\omega_n(p_l) = \sqrt{p_l^2 + 2eBn + m^2}$. Os operadores de campo obedecem às relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_{n,q,s,l}, \hat{c}_{n',q',s',l'}^\dagger\} &= \delta_{n,n'} \delta_{q,q'} \delta_{s,s'} \delta_{l,l'} \hat{1}, \\ \{\hat{d}_{n,q,s,l}, \hat{d}_{n',q',s',l'}^\dagger\} &= \delta_{n,n'} \delta_{q,q'} \delta_{s,s'} \delta_{l,l'} \hat{1}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

enquanto as demais relações são identicamente nulas.

Mesmo na presença de campo externo a hamiltoniana de Dirac é ainda definida por (2.54), portanto será expressa conforme (2.55),

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty'} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \omega_n(p_l) (\hat{c}_{n,q,s,l}^\dagger \hat{c}_{n,q,s,l} + \hat{d}_{n,q,s,l}^\dagger \hat{d}_{n,q,s,l}) + E_0(a, B) \hat{1}, \quad (3.76)$$

onde $E_0(a, B)$ é a energia de ponto zero,

$$E_0(a, B) = - \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=(0)}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n(p_l). \quad (3.77)$$

A notação $n = (0)$ indica que o termo $n = 0$ deve ser multiplicado por um fator $1/2$, a fim de compensar a degenerescência incorreta dada pelo somatório em s pois, como visto anteriormente, esse termo possui degenerescência unitária nesse índice.

Nesta seção determinaremos a energia de Casimir para o problema do campo fermiônico confinado entre duas placas paralelas distantes de a entre si e sujeitas a um campo magnético ortogonal a elas. Usando a equação (3.73), a energia de ponto zero fica reescrita como

$$E_0(\lambda; a, B) = -2 \sum_{n=(0)}^{\infty} \frac{eBA}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{p_l^2 + 2eBn + m^2} e^{-(\lambda/m)} \sqrt{p_l^2 + 2eBn + m^2}, \quad (3.78)$$

onde usou-se um corte exponencial a fim de evitar divergência para grandes frequências.

Essa expressão pode então ser reescrita numa forma mais conveniente,

$$E_0(\lambda; a, B) = -\frac{m^3 b A}{\pi} \sum_{n=(0)}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{p_l^2/m^2 + 2bn + 1} e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + 2bn + 1}}, \quad (3.79)$$

onde $b = eB/m^2$ é o campo magnético em unidades do campo crítico $B_{\text{cr}} = m^2/e$. O somatório em l nessa expressão pode ser efetuado utilizando a equação (2.102) com $u = \sqrt{2bn + 1}$. Substituindo esse resultado na equação (3.79) e fazendo a mudança de variável de integração $x = \sqrt{y^2 - 2bn - 1}$, teremos

$$\begin{aligned} E_0(\lambda; B, a) &= \frac{m^4 b a A}{\pi^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 \cos \lambda x}{\sqrt{x^2 + 2bn + 1}} \quad (3.80) \\ &+ \frac{m^3 b A}{\pi^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \sqrt{2bn + 1} e^{-\lambda \sqrt{2bn + 1}} + \frac{m^3 b A}{\pi^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2 \cos \lambda x}{x^2 + 2bn + 1 + \sqrt{x^2 + 2bn + 1}} \\ &+ \frac{m^3 b A}{\pi^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x \cos \lambda x \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2bn + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 2bn + 1} + 1} e^{-2ma\sqrt{x^2 + 2bn + 1}} \right). \end{aligned}$$

Eliminando os termos de volume e de área, retirando o parâmetro regularizador e realizando uma integração por partes, teremos a energia de Casimir,

$$\begin{aligned} E_C(a, B) &= -\frac{m^3 b A}{\pi^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \ln \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2bn + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 2bn + 1} + 1} e^{-2ma\sqrt{x^2 + 2bn + 1}} \right). \quad (3.81) \end{aligned}$$

Esse é o nosso resultado final para a energia de Casimir na presença de campo magnético externo e coincide com o resultado obtido anteriormente por Elizalde, Santos e Tort [21].

Podemos estudar o comportamento da expressão (3.81) no caso de campo fraco, $B \ll B_{\text{cr}}$, e analisar se um pequeno campo é capaz de amplificar a energia de Casimir. Para isso devemos expandir a equação (3.81) em série de potências em

B , ou equivalentemente em b , o que pode ser feito por meio da fórmula de Euler-MacLaurin [78]

$$\sum_{n=(0)}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} dz f(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^{(2k-1)} f(\xi) \Big|_{\xi=0}, \quad (3.82)$$

onde B_n são os números de Bernoulli. A integral da equação (3.82) pode ser calculada por meio da mudança de variável de integração $y = \sqrt{x^2 + 2bz + 1}$, resultando em um termo independente de b ,

$$\begin{aligned} & - \frac{m^3 b A}{\pi^2} \int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} dx \ln \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2bz + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 2bz + 1} + 1} e^{-2ma\sqrt{x^2 + 2bz + 1}} \right) \\ & = - \frac{m^3 A}{\pi^2} \int_1^{\infty} dy y \sqrt{y^2 - 1} \ln \left(1 + \frac{y - 1}{y + 1} e^{-2may} \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Como vemos, esse termo corresponde à energia de Casimir na ausência de campo magnético, equação (2.107). Quanto aos demais termos da equação (3.82), cada derivada do argumento do somatório em (3.81) contribui com uma potência em b , de forma que o k -ésimo termo da série de derivadas da equação (3.82) será proporcional a b^{2k} (note a presença do fator b multiplicando o somatório da expressão (3.81)). Essa expansão mostra que a energia de Casimir (3.81) se constitui de uma série de potências em b^2 , ou equivalentemente em B^2 . Em primeira ordem em B^2 , a energia de Casimir toma a forma

$$\begin{aligned} E_C(a, B) & = - \frac{m^3 A}{\pi^2} \int_1^{\infty} dy y \sqrt{y^2 - 1} \ln \left(1 + \frac{y - 1}{y + 1} e^{-2may} \right) \\ & + \frac{e^2 B^2 A}{12\pi^2 m} \int_1^{\infty} dy \frac{y}{(y^2 - 1)^{3/2}} \ln \left(1 + \frac{y - 1}{y + 1} e^{-2may} \right) + \mathcal{O}(B^4). \end{aligned} \quad (3.84)$$

A diferença de sinal entre os dois primeiros termos mostra que, no limite de campo fraco, o campo magnético reduz a intensidade da energia de Casimir, ou seja, um campo magnético fraco não é capaz de intensificar a energia de Casimir. Analisemos então o limite de campo forte, $B \gg B_{\text{cr}} = m^2/e$ ($b \gg 1$), o que corresponde a campos muito maiores que os alcançados atualmente, $B_{\text{cr}} \approx 10^9 \text{T}$. Pode-se mostrar

que, nesse limite, a energia de Casimir (3.81) toma a forma

$$E_C(a, B) \xrightarrow{eB/m^2 \rightarrow \infty} - \frac{meBA}{2\pi^2} \int_1^\infty dy \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \ln \left(1 + \frac{y-1}{y+1} e^{-2may} \right). \quad (3.85)$$

Seguindo nossa motivação original, queremos verificar se a presença do campo magnético pode tornar a energia de Casimir mensurável na escala de μm ou nm . Dessa forma devemos analisar o comportamento da expressão acima para grandes distâncias, $ma \gg 1$. Infelizmente a expressão (3.81) ainda nos fornece um fator exponencial nesse limite²,

$$E_C(a, B) \xrightarrow[\substack{eB/m^2 \rightarrow \infty \\ ma \rightarrow \infty}]{} - \frac{meBA}{32\pi^{3/2}} \frac{e^{-2ma}}{(ma)^{3/2}}, \quad (3.86)$$

mostrando que, para um campo magnético muito intenso, a energia de Casimir será intensificada mas permanecerá não mensurável a essas escalas.

Analisemos então o limite de campo magnético intenso e de pequenas distâncias. Nesse limite a energia de Casimir toma a forma

$$E_C(a, B) \xrightarrow[\substack{eB/m^2 \rightarrow \infty \\ ma \rightarrow 0}]{} - \frac{eBA}{48a}, \quad (3.87)$$

mostrando que, se o campo magnético for suficientemente intenso ($eBa^2 > 7\pi^2/60 \cong 1$), a energia de Casimir será intensificada. No entanto o limite de pequenas distâncias não é físico, uma vez que não é possível aproximar placas a uma distância menor que o comprimento de onda Compton do elétron (a própria rugosidade das placas é muito maior que essas distâncias).

Dessa forma verificamos que, para campo magnético suficientemente intenso, a energia de Casimir pode ser amplificada mas, ao contrário do que desejávamos, não é possível torná-la mensurável.

²Embora essa expressão tenha sido obtida tomando-se sucessivamente os limites $eB/m^2 \gg 1$ e $ma \gg 1$, ela é válida no limite $ma \gg 1$ para qualquer valor do campo magnético.

Capítulo 4

Lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg

4.1 Introdução

Os vácuos dos campos quânticos possuem estrutura e, por isso, influenciam a própria dinâmica desses campos. Por exemplo, por ser carregado, o vácuo fermiônico sofre ação do campo eletromagnético e, por processos virtuais de criação e aniquilação de pares elétron-pósitron, cria, de forma semelhante a de um meio material, efeitos de polarização e magnetização. Estes efeitos, por sua vez, geram novos campos eletromagnéticos que se superpõem ao campo original e, dessa forma, o campo eletromagnético tem sua dinâmica afetada pelo vácuo fermiônico. Alguns processos previstos pela Eletrodinâmica Quântica são exemplos desse efeito, como o espalhamento fóton-fóton, o espalhamento Delbrück [29, 30, 31, 32] e a divisão de um fóton [33]. O espalhamento fóton-fóton, como o próprio nome sugere, consiste no espalhamento de dois fótons, com troca de energia e modificação de suas direções de propagação, o qual é de difícil observação por ser um processo de quarta ordem na expansão perturbativa. O espalhamento Delbrück consiste no espalhamento de

um fóton nas proximidades de um núcleo pesado, devido ao campo eletrostático muito intenso desse núcleo. A divisão de um fóton ocorre também para fótons que atingem a proximidade de um núcleo pesado e, como o nome sugere, consiste na conversão do fóton original em dois novos fótons. Esses processos não podem ser explicados pela Eletrodinâmica Clássica uma vez que claramente violam o princípio de superposição do campo eletromagnético. A figura (4.1) ilustra esses processos, onde podemos visualizar como a presença de elétrons e pósitrons virtuais afetam a dinâmica do campo eletromagnético. As setas marcadas com o símbolo \otimes são utilizadas para representar campos clássicos, no caso o campo eletrostático gerado pelo núcleo pesado.

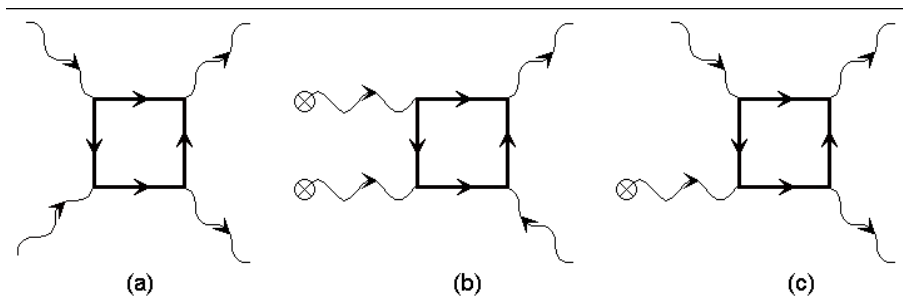


Figura 4.1: Processos não-clássicos devidos às flutuações do vácuo fermiônico: (a) espalhamento fóton-fóton; (b) espalhamento Delbrück e (c) divisão de um fóton.

O vácuo quântico pode também apresentar outros efeitos interessantes, como os fenômenos de birrefringência [34, 35, 36, 37, 38] e dicroísmo [39, 40, 17], se sujeito a campos suficientemente intensos. Esses fenômenos ocorrem em meios que apresentam anisotropia em suas propriedades constitutivas, de forma que a propagação da luz no meio depende das direções de propagação e polarização. Em um meio que apresenta birrefringência, um feixe de luz apresenta diferentes velocidades de propagação de acordo com o seu estado de polarização, caracterizando índices de refração distintos para cada direção de polarização. Já em um meio que apresenta dicroísmo, o feixe apresenta diferentes coeficientes de absorção para cada direção

de polarização. No caso do vácuo, esses efeitos podem ocorrer se aplicarmos, ao vácuo, um campo elétrico ou magnético suficientemente intenso e, simultaneamente, fizermos propagar um feixe de luz. Esses fenômenos se devem ao fato de que, novamente, o princípio da superposição de campos eletromagnéticos é violado. A interação campo eletromagnético-vácuo fermiônico causa uma interação efetiva entre os campos eletromagnéticos intensos e do feixe luminoso, gerando um termo de interferência entre eles. Essa interferência se traduz, então, em coeficientes constitutivos efetivos para o vácuo, que dependem do campo forte aplicado e que afetam o campo propagante.

Porém não apenas campos externos afetam as flutuações de ponto zero, a imposição de confinamento a um campo também afeta suas flutuações quânticas. De fato, como vimos nos capítulos anteriores, o confinamento do vácuo dos campos eletromagnético e fermiônico produzem tensões nas fronteiras que aprisionam esses campos, que é precisamente o efeito Casimir. Mas este não é o único efeito gerado no confinamento, já que, ao limitarmos as flutuações de ponto zero, podemos pronunciar no vácuo efeitos similares ao de um meio material. Por exemplo, ao limitar o campo eletromagnético entre duas placas metálicas estando o campo fermiônico livre, temos o aparecimento de permissividade elétrica e permeabilidade magnética anisotrópicas que contribuem para uma birrefringência do vácuo. Esse é um processo a dois laços e é conhecido como efeito Scharnhorst [23, 24, 25] (no caso em que uma placa é perfeitamente condutora e a outra é infinitamente permeável, veja as referências [26, 27]). Este efeito novamente se deve à interferência de campos eletromagnéticos: um campo de luz propagante na região entre as placas interage, via flutuações do vácuo fermiônico, com o campo eletromagnético confinado nessa região, de forma que a onda propagante experimenta, efetivamente, constantes constitutivas modificadas. Por outro lado, se mantivermos o campo de Maxwell livre e o de matéria confinado, afetaremos também essas constantes constitutivas. No en-

tanto, a interação entre o campo confinado e o campo propagante, nesse caso, é direta, de forma que o efeito ocorrerá a um laço. Trabalhos nesse sentido foram realizados em eletrodinâmica escalar e espinorial [18, 28], no entanto, no segundo caso, as condições de contorno que limitavam esse campo eram periódicas ou anti-periódicas.

Vemos, dessa forma, que o vácuo do campo fermiônico toma papel fundamental em diversos processos que envolvem campos eletromagnéticos, na medida em que não é possível descrevê-los somente por meio da lagrangiana de Maxwell. Isso porque, mesmo estando o campo fermiônico em seu estado mais simples, sua interação com o campo eletromagnético não pode ser desprezada. No entanto, por envolver apenas férmions virtuais, esses processos não envolvem estados assintóticos de partículas massivas, ou seja, os estados inicial e final do sistema envolvem apenas o campo eletromagnético. Seria então interessante resolver parcialmente as equações de movimento da Eletrodinâmica Quântica e eliminar os graus de liberdade do campo fermiônico, fornecendo, assim, uma teoria efetiva somente para o campo eletromagnético. Esta teoria seria então capaz de descrever todos os complicados processos do campo eletromagnético que envolvem o vácuo do campo de matéria, sem, no entanto, exigir a manipulação dos graus de liberdade deste último campo. Trabalhos nesse sentido foram inicialmente desenvolvidos por Heisenberg [13], Euler [14, 15], Weisskopf [79] e Schwinger [16], onde as flutuações quânticas do vácuo do campo massivo foram resumidas na forma de uma lagrangiana efetiva a ser adicionada à de Maxwell. Notemos que essa lagrangiana considera apenas as flutuações de ponto zero do vácuo fermiônico, desprezando as flutuações quânticas do próprio campo eletromagnético (o campo eletromagnético é tratado apenas como um campo externo). Dessa forma, ela corresponde à expansão a um laço da lagrangiana completa, que considera também essas flutuações do campo eletromagnético. Estaremos tratando sempre de lagrangianas efetivas a um laço. De posse da lagrangiana efetiva,

Barton [24] rederivou os resultados obtidos por Scharnhorst [23] de uma forma bem mais simples, uma vez que, enquanto Scharnhorst necessitou resolver equações para o campo de matéria, Barton se utilizou apenas do campo eletromagnético descrito pela lagrangiana efetiva a um laço.

Existem vários métodos para a determinação dessa quantidade. Por exemplo, a técnica empregada por Weisskopf [79] na obtenção da lagrangiana efetiva utilizava o método de soma de modos porém, mais recentemente, Schwinger [16] adotou o elegante método de tempo próprio enquanto que Dittrich e Reuter [80] se utilizaram extensivamente do método da função Zeta. Neste capítulo seguiremos a técnica de Weisskopf de soma de modos na obtenção das lagrangianas efetivas.

O cálculo da lagrangiana efetiva do campo eletromagnético deve considerar, em princípio, campos eletromagnéticos com dependências espacial e temporal arbitrárias, porém o cálculo dessa lagrangiana para campos arbitrários é por demais complexo. Contudo, pelo princípio de incerteza, os pares elétron-pósitron virtuais responsáveis pela dinâmica do vácuo fermiônico vivem em intervalos de espaço-tempo muito curtos ($\Delta t \sim \hbar/mc^2$ e $\Delta x \sim \hbar/mc$, onde m é a massa do elétron), de forma que podemos considerar que o campo de Maxwell varia lentamente na escala dessas partículas (desde que a frequência do campo não seja muito grande, $\omega \ll mc^2/\hbar$, e que seu comprimento de onda não seja muito pequeno, $\lambda \gg \hbar/mc$). O resultado pioneiro desse cálculo foi a lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg onde, para efeitos de cálculo, os campos elétrico e magnético foram tomados como uniformes.

Neste capítulo desejamos investigar a influência do confinamento do vácuo fermiônico na lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg, impondo agora não uma condição de contorno antiperiódica, como feito na referência [28], mas uma condição de contorno mais realista para esse problema, a do modelo de sacola MIT. Por simplicidade de cálculo, desconsideraremos a ação do campo elétrico e limitaremos o campo de Dirac entre duas placas paralelas entre si e ortogonais ao campo

magnético. Embora essa lagrangiana efetiva descreva também processos não lineares do campo eletromagnético, dos resultados obtidos, nos reteremos apenas nas propriedades lineares do vácuo devido ao confinamento do campo fermiônico. Assim, apesar de obtermos a lagrangiana para qualquer valor do campo magnético, analisaremos apenas o limite de campo fraco, donde extrairemos a componente da permeabilidade magnética do vácuo perpendicular às placas (μ_{zz}). Como veremos, como consequência desse tratamento mais realista, seremos agraciados com um aumento significativo da permeabilidade magnética em relação ao caso de condição de contorno antiperiódica.

4.2 Lagrangiana efetiva

Sob a ação de um campo eletromagnético externo, a evolução do campo fermiônico é regida pela equação de Dirac (2.43), onde o operador de Dirac é dado por

$$\mathcal{H}_D = (-i\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}, t)) \cdot \vec{\alpha} + m\beta - e\varphi(\vec{r}, t)\mathbb{1}, \quad (4.1)$$

sendo $-e$ a carga do elétron e m sua massa. $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 4×4 , $\vec{\alpha}$ e β são as matrizes de Dirac (2.45) e $\varphi(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}(\vec{r}, t)$ são os potenciais correspondentes ao campo eletromagnético externo,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (4.2)$$

De modo geral a hamiltoniana de Dirac (2.54) pode ser dependente do tempo. O operador de evolução temporal que evolui o campo do instante t_0 ao instante t ,

$$\hat{U}(t, t_0)^\dagger \hat{\psi}(\vec{r}, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \hat{\psi}(\vec{r}, t), \quad (4.3)$$

deve obedecer à equação de Schrödinger,

$$i\frac{d}{dt}\hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t)\hat{U}(t, t_0), \quad (4.4)$$

e deve ser normalizado, $\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{1}$.

A lagrangiana efetiva é um termo que deve ser adicionado à lagrangiana de Maxwell a fim de incorporar à dinâmica do campo eletromagnético os efeitos das flutuações de vácuo do campo fermiônico. Essa quantidade pode ser definida por meio da amplitude de persistência vácuo-vácuo, isto é, a amplitude de probabilidade de observar o sistema no estado de vácuo $|0\rangle$ no instante t , se é certo que ele se encontrava nesse estado no instante t_0 ,

$$\langle 0|\hat{U}(t, t_0)|0\rangle = \exp\left(i \int_{t_0}^t dt' L_{\text{eff}}(t')\right). \quad (4.5)$$

Em princípio, esse cálculo deve ser feito para campo eletromagnético arbitrário, contudo, como mencionado anteriormente, faremos o cálculo da lagrangiana para o caso de campo elétrico nulo, $\vec{E}(\vec{r}, t) = 0$, e campo magnético uniforme, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}$. Escolhendo, então, o calibre (3.2), temos que a hamiltoniana desse problema é independente do tempo e é dada na equação (3.76). Então o operador de evolução temporal será simplesmente

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t - t_0)}. \quad (4.6)$$

Sabemos da equação (2.57) que o estado de vácuo é autoestado da hamiltoniana,

$$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle. \quad (4.7)$$

Então, das equações (4.5), (4.6) e (4.7), temos que a lagrangiana efetiva será, a menos de um sinal, igual à energia de ponto zero,

$$L_{\text{eff}} = -E_0. \quad (4.8)$$

Então, de acordo com (2.56), teremos que a lagrangiana efetiva será dada pela soma de modos

$$L_{\text{eff}} = \sum_n \omega_n. \quad (4.9)$$

Notemos que, apesar de tanto a energia de Casimir como a lagrangiana efetiva serem obtidas a partir da energia de ponto zero, existe uma clara distinção entre essas duas quantidades. De fato, a energia de Casimir é a resposta do vácuo (no caso o vácuo fermiônico) a condições de contorno enquanto que a lagrangiana efetiva é a resposta do vácuo fermiônico a campos eletromagnéticos. Então não é possível definir energia de Casimir na presença exclusiva de campo eletromagnético, assim como não é possível definir lagrangiana efetiva na presença exclusiva de condição de contorno. Mesmo no caso no qual os dois efeitos estão presentes essas quantidades são distinguíveis pelo seus significados e são efetivamente diferentes após distintos processos de renormalização.

Como mencionamos, desejamos determinar a influência de condições de contorno confinantes na lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg. Na próxima seção, no entanto, resolveremos o problema mais simples onde as condições de contorno não estão presentes, isto é, determinaremos a lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg devida somente a um campo magnético uniforme. Na seção seguinte procederemos, então, ao cálculo da lagrangiana efetiva sob as condições de contorno confinantes.

4.3 Lagrangiana efetiva a campo elétrico nulo

O campo de Dirac sob a ação de um campo magnético uniforme é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(z, \rho, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty'} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int dp & (4.10) \\ &\times (\hat{c}_{n,q,s}(p) \Psi_{n,q,s}^+(p; \rho, \varphi, z) e^{-i\omega_n(p)t} + \hat{d}_{n,q,s}(-p)^\dagger \Psi_{n,q,s}^-(p; \rho, \varphi, z) e^{i\omega_n(p)t}), \end{aligned}$$

onde $\Psi_{n,q,s}^\epsilon(p; \rho, \varphi, z)$ são as soluções estacionárias dadas em (3.41) e (3.44) e $\omega_n(p) = \sqrt{p^2 + 2eBn + m^2}$. Os operadores de campo obedecem às relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_{n,q,s}(p), \hat{c}_{n',q',s'}(p')^\dagger\} &= \delta_{n,n'} \delta_{q,q'} \delta_{s,s'} \delta(p-p') \hat{1}, \\ \{\hat{d}_{n,q,s}(p), \hat{d}_{n',q',s'}(p')^\dagger\} &= \delta_{n,n'} \delta_{q,q'} \delta_{s,s'} \delta(p-p') \hat{1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

enquanto as demais relações são nulas. Mesmo sob campo externo, a hamiltoniana de Dirac é definida conforme a equação (2.54), de modo que pode ser reexpressa a partir dos operadores de campo como

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty'} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int dp \omega_n(p) (\hat{c}_{n,q,s}(p)^\dagger \hat{c}_{n,q,s}(p) + \hat{d}_{n,q,s}(-p)^\dagger \hat{d}_{n,q,s}(-p)) + E_0(B) \hat{1}, \quad (4.12)$$

onde $E_0(B)$ é a energia de ponto zero,

$$E_0(B) = - \sum_{n=(0)}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int dp \omega_n(p) \delta(0). \quad (4.13)$$

A notação $n = (0)$ indica que o termo $n = 0$ deve ser multiplicado por um fator $1/2$ e $\delta(0)$ indica a função $\delta(p)$ em $p = 0$, a qual é proporcional ao comprimento, na direção do campo magnético, da região do espaço sob a ação desse campo $\ell = \int dz$, isto é, $\delta(0) = \int dz / (2\pi)$. Como visto em (4.8), a lagrangiana efetiva é menos a energia de ponto zero, $L_{\text{eff}}(B) = -E_0(B)$. Usando (3.61), teremos

$$L_{\text{eff}}(\lambda; B) = 2 \sum_{n=(0)}^{\infty} \frac{eBA}{2\pi} \ell \int \frac{dp}{2\pi} \sqrt{p^2 + 2eBn + m^2} e^{-(\lambda/m)} \sqrt{p^2 + 2eBn + m^2}, \quad (4.14)$$

onde inserimos um fator de corte regularizador. Podemos definir então a densidade lagrangiana média dividindo a expressão acima pelo volume do espaço sob a ação do campo magnético, $\mathcal{L}_{\text{EH}}^{(1)}(\lambda; B) = L_{\text{eff}}(\lambda; B) / \ell A$. Teremos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EH}}^{(1)}(\lambda; B) &= \frac{m^3 b}{2\pi^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int dp \sqrt{p^2/m^2 + 2bn + 1} e^{-\lambda \sqrt{p^2/m^2 + 2bn + 1}} \\ &= - \frac{m^3 b}{2\pi^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int dp e^{-\lambda \sqrt{p^2/m^2 + 2bn + 1}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde $b = eB/m^2$ é o campo magnético em unidades do campo crítico $B_{\text{cr}} = m^2/e$.

Usando as identidades

$$\int_0^\infty ds s^{\nu-1} e^{-\gamma s} - \beta/s = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\nu/2} K_{|\nu|}(2\sqrt{\beta\gamma}) \quad \text{e} \quad K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad (4.16)$$

podemos escrever

$$e^{-\lambda\sqrt{p^2/m^2 + 2bn + 1}} = \frac{\lambda}{2\pi^{1/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} e^{-s(p^2/m^2 + 2bn + 1) - \lambda^2/4s}. \quad (4.17)$$

Substituindo essa expressão na equação (4.15) e usando as identidades

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-s2bn} = \frac{1}{2} \operatorname{cotgh}(bs) \quad \text{e} \quad \int dp e^{-sp^2/m^2} = m\sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad (4.18)$$

chegamos na expressão para a lagrangiana efetiva não renormalizada,

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}^{(1)}(\lambda; B) = -\frac{m^4 b}{8\pi^3} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2s}\right) e^{-s - \lambda^2/4s} \operatorname{cotgh}(bs). \quad (4.19)$$

Para realizarmos os processos de renormalização, devemos usar a expansão

$$\operatorname{cotgh}(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \mathcal{O}(x^3). \quad (4.20)$$

A expressão (4.19) pode então ser expandida em potências do campo magnético,

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}^{(1)}(\lambda; B) = f_0(\lambda) + f_1(\lambda) B^2 + \mathcal{O}(B^4), \quad (4.21)$$

onde

$$f_0(\lambda) = -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2s}\right) e^{-s - \lambda^2/4s} = -\frac{m^4}{\pi^2} \left(\frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} - \frac{K_3(\lambda)}{\lambda}\right) \quad (4.22)$$

e

$$f_1(\lambda) = -\frac{e^2}{24\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2s}\right) e^{-s - \lambda^2/4s} = -\frac{e^2}{12\pi^2} (K_0(\lambda) - \lambda K_1(\lambda)). \quad (4.23)$$

Como mencionado na introdução deste capítulo, a lagrangiana efetiva $\mathcal{L}_{\text{EH}}^{(1)}(\lambda; B)$ deve ser adicionada à lagrangiana de Maxwell, $\mathcal{L}^{(0)}(B) = -B^2/2$, porém a expansão (4.21) contém um termo que independe do campo magnético, $f_0(\lambda)$. Este termo não contribui para a dinâmica do campo magnético e será, portanto, descartado. Quanto ao termo $f_1(\lambda)B^2$, este constitui uma contribuição quadrática em B que não pode ser subtraída. Essa contribuição quadrática deve então ser renormalizada

multiplicativamente, de forma que a lagrangiana total, constituída pela soma da lagrangiana de Maxwell com a lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg, reproduza, no limite de campo fraco, a lagrangiana de Maxwell com o campo renormalizado B_r ,

$$-\frac{B^2}{2} + f_1(\lambda)B^2 = -\frac{B_r^2}{2}. \quad (4.24)$$

O processo de renormalização deve garantir, no entanto, que o produto carga-campo permaneça inalterado,

$$e_r B_r = eB. \quad (4.25)$$

Assim o campo e carga renormalizados, B_r e e_r , relacionam-se com o campo e carga nus, B e e , por meio de fatores multiplicativos,

$$B_r = Z_3(\lambda)^{-1/2}B \quad , \quad e_r = Z_3(\lambda)^{1/2}e, \quad (4.26)$$

onde

$$Z_3(\lambda) = (1 - 2f_1(\lambda))^{-1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \ln(\lambda/2)\right)^{-1}. \quad (4.27)$$

Tendo sido o primeiro termo eliminado por subtração e o segundo absorvido na renormalização, eliminamos todas as contribuições da lagrangiana desconfiada que divergem ao retirarmos o parâmetro regularizador λ . A lagrangiana efetiva torna-se então

$$\mathcal{L}_{EH}^{(1)}(B) = -\frac{m^4}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s} \left[bs \operatorname{cotgh}(bs) - 1 - \frac{(bs)^2}{3} \right], \quad (4.28)$$

onde suprimimos o índice r das quantidades renormalizadas. Essa expressão é a já conhecida lagrangiana de Euler-Heisenberg no limite de campo elétrico nulo [15].

Para obtermos o limite de campo fraco, $eB/m^2 \ll 1$, devemos expandir essa expressão em potências do campo magnético, donde vemos que, em mais baixa ordem, a lagrangiana efetiva contribui com um termo em B^4 ,

$$\mathcal{L}_{EH}^{(1)}(B) = \frac{1}{360\pi^2} \frac{e^4}{m^4} B^4 + \mathcal{O}(B^6). \quad (4.29)$$

De fato, a lagrangiana efetiva não poderia apresentar termos independentes do campo magnético ou dependentes de B^2 , suprimidos nos processos de renormalização devido à ausência de propriedades constitutivas no vácuo totalmente livre de influências externas.

Para termos uma idéia do quanto a lagrangiana efetiva corrige a lagrangiana de Maxwell, podemos analisar a razão entre essas duas quantidades, $\mathcal{L}_{EH}^{(1)}(B)/(B^2/2)$. No limite de campo fraco, a razão entre o primeiro termo da equação (4.29) e a lagrangiana de Maxwell se demonstra uma quantidade muito pequena, indicando que, como esperado, a lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg corrige fracamente a de Maxwell nesse limite. Investiguemos então o limite de campo forte, $eB/m^2 \gg 1$. Conforme a referência [80], a lagrangiana efetiva tem, nesse limite, a forma assintótica

$$\mathcal{L}_{EH}^{(1)}(B) \xrightarrow{eB/m^2 \rightarrow \infty} \frac{e^2 B^2}{24\pi^2} \left[\ln \left(\frac{eB}{\pi m^2} \right) - \gamma + \frac{6}{\pi^2} \zeta'(2) \right], \quad (4.30)$$

onde $\zeta'(2)$ é a derivada da função Zeta de Riemann, avaliada no ponto $x = 2$, e γ é a constante de Euler ($\gamma \cong 0,577$). Mesmo nesse limite a razão entre as lagrangianas se demonstra uma quantidade pequena (para que a razão atingisse a unidade o campo magnético deveria assumir um valor absurdamente grande, $B \cong (m^2/e) \exp(12\pi^2/e^2) \sim 10^{560} B_{\text{cr}}$, onde $B_{\text{cr}} \approx 10^9 T$ para o elétron). Desse modo vemos que, em qualquer limite, as flutuações do vácuo fermiônico representam sempre correções pequenas à dinâmica do campo eletromagnético.

4.4 Lagrangiana efetiva para o campo de Dirac confinado

Nessa seção determinaremos a lagrangiana efetiva no caso em que o campo de Dirac encontra-se confinado entre duas placas paralelas distantes de a entre si [22]. Por simplicidade adotaremos o limite de campo elétrico nulo e campo magnético

uniforme e ortogonal às placas. Como visto na seção 3.4, $E_0(a, B)$ teve que ser regularizada pois continha divergências ultravioleta. Dessa forma redefiniremos a lagrangiana efetiva como a energia de ponto zero regularizada (3.78),

$$L_{\text{eff}}(\lambda; B, a) = -E_0(\lambda; a, B). \quad (4.31)$$

Assim, usando a equação (3.80), a densidade lagrangiana média $\mathcal{L}^{(1)}(\lambda; B, a) = L_{\text{eff}}(\lambda; B, a)/aA$ será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}(\lambda; B, a) &= \frac{m^4 b}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{\cos \lambda x}{\sqrt{x^2 + 2bn + 1}} \\ &+ \frac{m^3 b}{\pi^2 a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{n=(0)}^{\infty} e^{-\lambda \sqrt{2bn + 1}} + \frac{m^3 b}{\pi^2 a} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{\cos \lambda x}{x^2 + 2bn + 1 + \sqrt{x^2 + 2bn + 1}} \\ &- \frac{m^3 b}{\pi^2 a} \sum_{n=(0)}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x \cos \lambda x \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2bn + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 2bn + 1} + 1} e^{-2ma\sqrt{x^2 + 2bn + 1}} \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Podemos escrever as equações

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2bn + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{1/2}} e^{-s(x^2 + 2bn + 1)}, \\ \frac{1}{x^2 + 2bn + 1 + \sqrt{x^2 + 2bn + 1}} &= \int_0^{\infty} ds \operatorname{erfc}(\sqrt{s}) e^{-s(x^2 + 2bn)}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

se substituirmos $z = x^2 + 2bn + 1$ nas identidades

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{z}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{1/2}} e^{-sz}, \\ \frac{1}{z + \sqrt{z}} &= \int_0^{\infty} ds \operatorname{erfc}(\sqrt{s}) e^{-s(z - 1)}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde $\operatorname{erfc}(x)$ é a função erro complementar,

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} d\xi e^{-\xi^2}. \quad (4.35)$$

Munidos das equações (4.33) e da equação (4.17) com $p = 0$, podemos reescrever a equação (4.32) como

$$\mathcal{L}^{(1)}(\lambda; B, a) = \mathcal{L}_{\text{EH}}^{(1)}(\lambda; B) + \mathcal{L}_{\text{CEH}}^{(1)}(\lambda; B, a), \quad (4.36)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}^{(1)}(\lambda; B) = -\frac{m^4 b}{8\pi^3} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2s}\right) e^{-s - \lambda^2/4s} \text{cotgh}(bs) \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CEH}}^{(1)}(\lambda; B, a) &= \frac{m^3 b}{8\pi^{3/2} a} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2s}\right) e^{-\lambda^2/4s} (e^{-s} - \text{erfc}(\sqrt{s})) \text{cotgh}(bs) \\ &- \frac{m^3 b}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty dx x \cos \lambda x \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 2bn + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 2bn + 1} + 1} e^{-2ma\sqrt{x^2 + 2bn + 1}}\right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

sendo $b = eB/m^2$. Vemos da equação (4.19) que o termo (4.37) é exatamente a lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg não renormalizada na ausência de condição de contorno. Assim, após os processos de renormalização realizados na seção anterior, esse termo tomará a forma dada na equação (4.28). O termo $\mathcal{L}_{\text{CEH}}^{(1)}(\lambda; B, a)$ representa então a contribuição do confinamento à lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg. Sendo assim denotaremos este termo por termo de Casimir-Euler-Heisenberg, o que fica indicado pelas letras CEH. Para renormalizá-lo, devemos expandi-lo em potências do campo magnético, o que é feito usando a expansão da função $\text{cotgh}(x)$, equação (4.20), e a fórmula de Euler-MacLaurin (3.82). Com isso temos a expansão

$$\mathcal{L}_{\text{CEH}}^{(1)}(\lambda; B, a) = g_0(\lambda, a) + g_1(\lambda, a) B^2 + \mathcal{O}(B^4), \quad (4.39)$$

onde

$$\begin{aligned} g_0(\lambda, a) &= \frac{m^3}{8\pi^{3/2} a} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2s}\right) e^{-\lambda^2/4s} (e^{-s} - \text{erfc}(\sqrt{s})) \\ &+ \frac{m^3}{\pi^2 a} \int_1^\infty dx x \sqrt{x^2 - 1} \cos(\lambda \sqrt{x^2 - 1}) \ln \left(1 + \frac{x - 1}{x + 1} e^{-2max}\right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

e

$$g_1(\lambda, a) = \frac{e^2}{24\pi^{3/2}ma} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1/2}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2s}\right) e^{-\lambda^2/4s} (e^{-s} - \operatorname{erfc}(\sqrt{s}))$$

$$- \frac{e^2}{12\pi^2ma} \int_1^\infty dx \left(\frac{\cos(\lambda\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} - \lambda \operatorname{sen}(\lambda\sqrt{x^2-1}) \right) \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{x-1}{x+1} e^{-2max} \right). \quad (4.41)$$

Novamente devemos subtrair o termo independente de B , $g_0(\lambda, a)$, contudo o termo $g_1(\lambda, a)$, por depender do parâmetro a , não pode ser renormalizado. De fato, um processo de renormalização envolvendo esse termo acarretaria numa dependência da carga elétrica renormalizada com a distância entre as placas, fato claramente não físico. Eliminado então o termo divergente em $\lambda = 0$, o restante torna-se, nesse limite,

$$\mathcal{L}_{CEH}^{(1)}(B, a) = \frac{m^3}{8\pi^{3/2}a} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{5/2}} (e^{-s} - 2\operatorname{erfc}(\sqrt{s})) \left[bs \operatorname{cotgh}(bs) - 1 \right]$$

$$+ \frac{m^3b}{\pi^2a} \sum_{n=(0)}^\infty \int_0^\infty dx \ln \left(1 + \frac{\sqrt{x^2+2bn+1}-1}{\sqrt{x^2+2bn+1}+1} e^{-2ma\sqrt{x^2+2bn+1}} \right)$$

$$- \frac{m^3}{\pi^2a} \int_1^\infty dx x\sqrt{x^2-1} \ln \left(1 + \frac{x-1}{x+1} e^{-2max} \right). \quad (4.42)$$

Essa é a expressão final para a correção à lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg devida ao confinamento do vácuo fermiônico. A lagrangiana de Euler-Heisenberg sob confinamento é então dada pela soma desse termo com a lagrangiana na ausência de confinamento,

$$\mathcal{L}^{(1)}(B, a) = \mathcal{L}_{EH}^{(1)}(B) + \mathcal{L}_{CEH}^{(1)}(B, a), \quad (4.43)$$

e a lagrangiana completa, que descreve a dinâmica do campo magnético afetado pelo confinamento do vácuo fermiônico, é dada simplesmente pela soma dessa última expressão com a lagrangiana de Maxwell, $-B^2/2 + \mathcal{L}^{(1)}(B, a)$. Embora a lagrangiana completa contemple todas as potências do campo magnético, permitindo descrever

efeitos não lineares nesse campo, estamos particularmente interessados nas propriedades lineares que essa quantidade nos fornece, pois essas estão completamente ausentes na lagrangiana de Euler-Heisenberg e, assim, constituem-se no principal resultado decorrente das condições de contorno. Dessa forma estudaremos, na próxima seção, o comportamento da lagrangiana completa no limite de campo fraco.

4.5 Permeabilidade magnética do vácuo confinado

Para analisar a lagrangiana $\mathcal{L}_{CEH}^{(1)}(B, a)$ no regime de campo fraco, ($eB \ll m^2$), devemos novamente utilizar a expansão da função $\text{cotgh}(x)$, equação (4.20), e a fórmula de Euler MacLaurin, equação (3.82), que nos fornecem

$$\mathcal{L}_{CEH}^{(1)}(B, a) = \left(1 - \frac{1}{\mu(a)}\right) \frac{B^2}{2} + \mathcal{O}(B^4), \quad (4.44)$$

onde

$$\frac{1}{\mu(a)} = 1 - \frac{\pi - 2}{12\pi^2} \frac{e^2}{ma} + \frac{1}{6\pi^2} \frac{e^2}{ma} \int_1^\infty dx \frac{x}{(x^2 - 1)^{3/2}} \ln\left(1 + \frac{x - 1}{x + 1} e^{-2max}\right). \quad (4.45)$$

No entanto, enquanto que a lagrangiana desconfiada $\mathcal{L}_{EH}^{(1)}(B)$ apresenta, em ordem mais baixa no campo magnético, uma dependência em B^4 , equação (4.29), a contribuição $\mathcal{L}_{CEH}^{(1)}(B, a)$ possui um termo quadrático no campo magnético, que se constitui de uma contribuição linear na dinâmica do campo magnético devida ao confinamento do vácuo fermiônico. Dessa forma a lagrangiana completa comporta-se, no limite de campo fraco, como

$$-\frac{B^2}{2} + \mathcal{L}^{(1)}(B, a) = -\frac{B^2}{2\mu(a)} + \mathcal{O}(B^4). \quad (4.46)$$

Essa forma de densidade lagrangiana é a mesma daquela de um meio com permeabilidade magnética $\mu(a)$, mostrando que a permeabilidade magnética do vácuo confinado é distinta da permeabilidade $\mu = 1$ do vácuo desconfinado. Isso mostra

que o vácuo quântico funciona como um meio material, no que diz respeito a propriedades constitutivas. No caso considerado, exibindo uma constante de permeabilidade magnética em resposta ao confinamento. É importante lembrar que, como adotamos o campo magnético ortogonal às placas confinantes, essa permeabilidade mede apenas a componente $\mu_{zz}(a)$ do tensor de permeabilidade do vácuo (para obter outras componentes desse tensor devemos adotar outras configurações do campo em relação às placas). A figura 4.2 mostra o comportamento dessa constante constitutiva como função da distância a entre as placas em unidades do comprimento de onda Compton do elétron, ma . Vemos, claramente, que essa permeabilidade é

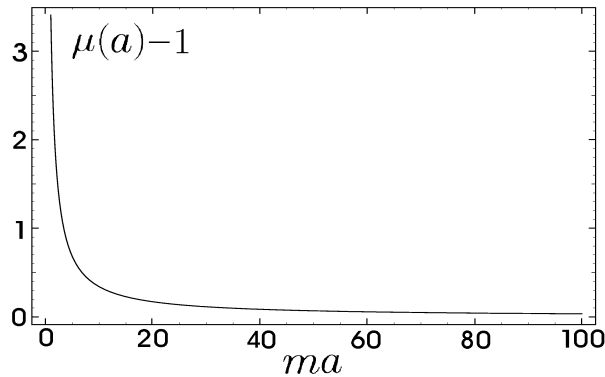


Figura 4.2: Permeabilidade magnética do vácuo fermiônico confinado como função da distância entre as placas confinantes em unidades do comprimento de onda Compton do elétron, ma .

maior que a do vácuo desconfinado, mostrando que o vácuo fermiônico comporta-se como um meio paramagnético sob processos de confinamento. O comportamento paramagnético deve-se, obviamente, ao caráter espinorial do campo fermiônico. Essa mesma figura mostra um crescimento significativo da permeabilidade para distâncias muito menores que o comprimento de onda Compton do elétron. De fato, para distâncias muito pequenas, $ma \ll 1$, essa quantidade tem por forma assintótica

$$\frac{1}{\mu(a)} \xrightarrow{ma \rightarrow 0} 1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \ln \left(\frac{\pi e^{-\gamma}}{2ma} \right), \quad (4.47)$$

mostrando que, se possível alcançar distâncias suficientemente pequenas, podemos crescer essa quantidade indefinidamente. Obviamente, não é possível alcançar fisicamente tais distâncias, uma vez que a rugosidade das placas é muito maior que o comprimento de onda Compton do elétron. Poderíamos tentar, então, extrapolar nossos resultados para estimar a permeabilidade magnética devida ao confinamento de quarks em hádrons, já que a dimensão de um hádron, da ordem de fm ($= 10^{-15}\text{m}$), é menor que o comprimento de onda Compton dos quarks. Embora a condição de contorno seja apropriada, o campo fermiônico para elétrons é muito distinto do campo fermiônico para quarks que, além de possuir carga elétrica, possui carga de cor responsável pelas interações fortes. Fora isso, a geometria plana não é adequada para simular tal confinamento, uma vez que, intuitivamente, um hádron deve apresentar geometria esférica. No entanto, essas considerações simplificam o formalismo, permitindo que nos concentremos nos efeitos físicos relevantes. Uma vez que as características básicas do sistema são entendidas, podemos considerar as complicações do problema mais realista. Então, tomando para a o valor do raio do hádron, $a \sim 1\text{fm}$, temos $\mu(a) - 1 \sim 10^{-3}$, o que daria, para um campo aplicado de 20T, um momento magnético da ordem de 10^{-14} magnetons nucleares. Mesmo para campos tão intensos, o momento magnético está abaixo da precisão experimental atual, da ordem de 10^{-9} magnetons nucleares. É um efeito muito pequeno comparado com a magnetização permanente dos bárions, mas pode se mostrar significativo para mésons, que possuem magnetização permanente nula.

Um comportamento interessante ocorre se reduzirmos continuamente a dimensão de confinamento, uma vez que a equação (4.47) demonstra uma transição de fase da permeabilidade do vácuo confinado, quando este passa a ter um comportamento diamagnético, conforme a figura 4.3. Tal transição já aparecera no caso de condição de contorno antiperiódica [18]. No entanto essa transição ocorre numa escala de distância não-física, correspondente ao pólo de Landau, $ma_{\text{cr}} = (\pi e^{-\gamma}/2m)e^{-6\pi^2/e^2} \sim$

10^{-280} , de modo que não procuraremos extrair qualquer significado físico desse limite.

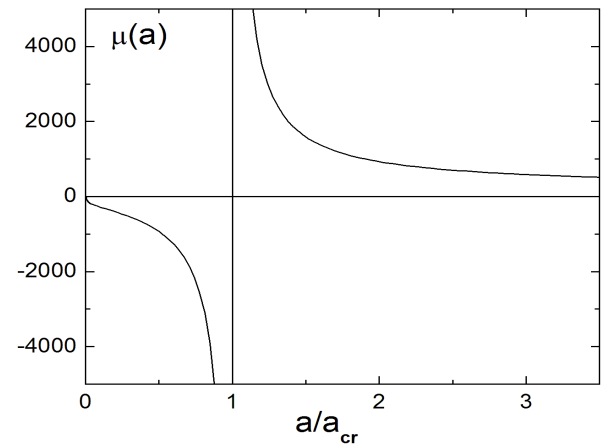


Figura 4.3: Permeabilidade magnética do vácuo fermiônico confinado como função da distância de confinamento a em unidades da distância crítica a_{cr} .

Podemos verificar também da figura 4.2 que, quando a distância entre as placas aumenta, a permeabilidade magnética tem seu valor reduzido, tendendo a unidade quando separamos infinitamente as placas. De fato, para grandes distâncias, $ma \gg 1$, a permeabilidade magnética tem por forma assintótica

$$\frac{1}{\mu(a)} \xrightarrow{ma \rightarrow \infty} 1 - \frac{\pi - 2}{12\pi^2} \frac{e^2}{ma}. \quad (4.48)$$

Essa expressão indica um comportamento tipo potência para a variação da permeabilidade devida às condições de contorno MIT, $\mu(a) - 1 \sim (ma)^{-1}$, o qual demonstra um decaimento muito mais lento do que aquele devido às condições de contorno antiperiódicas. De fato, temos que, neste último caso, o decaimento é exponencial, $\mu(a) - 1 \sim e^{-2ma}$ [18]. Fato semelhante ocorre com o campo escalar confinado [28], onde o confinamento desse campo por condições tipo Dirichlet gera uma permeabilidade com decaimento $(ma)^{-1}$, enquanto que o confinamento por condições de contorno periódicas ou antiperiódicas gera uma permeabilidade com decaimento

e^{-2ma} .

A figura 4.4 mostra o comportamento da permeabilidade magnética para distâncias de nm até décimo de μm , onde a forma assintótica (4.48) é bem estabelecida. Para

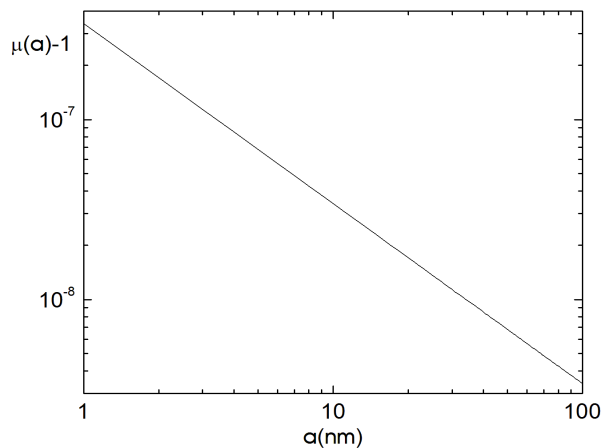


Figura 4.4: Permeabilidade magnética do vácuo fermiônico confinado como função da distância a entre as placas confinantes, para distâncias de nm até décimo de μm .

separações da ordem de nm temos $\mu(a) - 1 \sim 10^{-7}$, enquanto que para separações de μm , temos $\mu(a) - 1 \sim 10^{-9}$. Esses valores são comparáveis com aqueles do hidrogênio ou nitrogênio a pressão atmosférica e temperatura ambiente, $\Delta\mu \sim 10^{-9}$. Dessa forma uma verificação experimental desse efeito não parece inalcançável. Poder-se-ia medir, por exemplo, a mudança na velocidade da luz em nanocavidades, quando esta se propaga perpendicularmente às placas. No entanto, isso exigiria, além da permeabilidade magnética, o cálculo da permissividade elétrica do vácuo confinado.

Capítulo 5

Criação de pares pela ação de um campo elétrico sobre o vácuo

5.1 Introdução

Como vimos nos capítulos anteriores, a Eletrodinâmica Quântica descreve o vácuo como um meio nada trivial, que possui estrutura e que demonstra propriedades físicas surpreendentes. Talvez uma das propriedades mais impressionantes já previstas seja a possibilidade de formação de pares elétron-pósitron pela ação de um campo elétrico sobre o vácuo quântico, fenômeno discutido primeiramente por Schwinger [16]. De fato, a formação de matéria a partir do vácuo pela simples presença de um campo elétrico constitui, por si só, um fenômeno físico notável. Dessa forma, não é estranho o fato de o fenômeno da criação de pares ser tão amplamente mencionado na literatura [81, 82, 83, 84, 80, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97].

Para entendermos a criação de pares devemos considerar o que ocorre quando aplicamos um campo elétrico intenso a um meio dielétrico como, por exemplo, o

ar. No caso no qual o campo é forte o suficiente para romper a rigidez dielétrica do meio, os constituintes normalmente estáveis do meio, os átomos, tornam-se instáveis e decaem em pares elétron-cátion. Então, considerando que o vácuo do campo fermiônico é constituído de pares elétron-pósitron virtuais, os quais surgem e se aniquilam continuamente, podemos compreender o mecanismo da formação de pares: um campo elétrico suficientemente intenso pode tornar os pares elétron-pósitron virtuais instáveis, fazendo-os decair em pares elétron-pósitron reais. Podemos estimar a intensidade do campo elétrico necessário para a ocorrência do fenômeno da criação de pares: pelo princípio de incerteza, elétrons e pósitrons virtuais podem, após serem criados, se distanciar, antes de se aniquilarem, até uma distância da ordem do comprimento de onda Compton do elétron, $\Delta x \sim \hbar/mc$, adquirindo uma diferença de potencial $eE\Delta x \sim eE\hbar/mc$ na presença de um campo elétrico externo. Para que haja a criação de um par elétron-pósitron real, o par virtual deve adquirir energia suficiente para se tornar um par real, de forma que essa diferença de potencial deve ser da ordem da energia de repouso do par $eE\Delta x \sim 2mc^2$. Dessa forma devemos ter um campo elétrico com intensidade da ordem de $E \sim m^2c^3/\hbar e \approx 10^{18}\text{V/m}$. Esse processo é ilustrado na figura 5.1. Em outras palavras, na presença de um campo

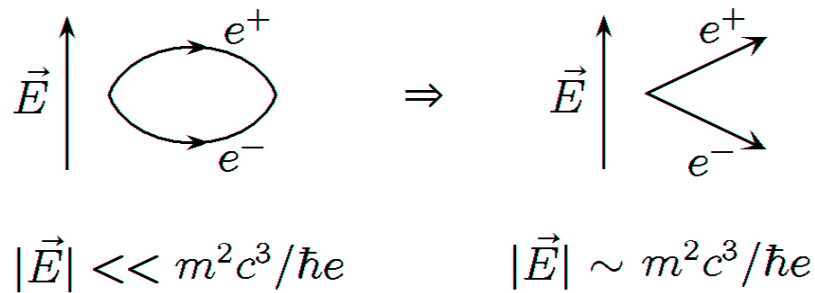


Figura 5.1: Criação de um par elétron pósitron real a partir de um par virtual devido à ação de um campo elétrico suficientemente intenso.

elétrico muito intenso o estado de vácuo do campo que não contém partículas reais pode se tornar instável, ou seja, torna-se energeticamente favorável que o vácuo

decaia em estados que contém partículas reais. Nesse caso, o vácuo deixa de ser um meio isolante e passa a se comportar como um meio condutor.

No entanto, apesar de tão amplamente discutida na literatura, a criação de pares é constatada e analisada praticamente sob um único enfoque, a probabilidade do vácuo persistir no vácuo. Calcula-se essa probabilidade e conclui-se, caso ela seja menor do que 1, que haverá obrigatoriamente uma criação de partículas. Nessa abordagem muita informação é perdida como, por exemplo: (a) as distribuições espaciais dessas partículas, caracterizadas pelas densidades e fluxos de elétrons e de pósitrons; (b) suas distribuições de momento; (c) a estatística da criação de pares, fornecendo a probabilidade de criação de um número n qualquer de pares, o estado que descreve o sistema e os estados nos quais o sistema colapsa após uma medida do número de pares e (d) as funções de estado desse sistema. Portanto, seria interessante um estudo mais detalhado do fenômeno. Sendo assim, reservaremos este capítulo para esse estudo do fenômeno da criação de pares sob seus diversos aspectos, procurando responder a cada uma das questões acima. Contudo, para que possamos estudar a criação de pares, necessitamos primeiramente determinar uma quantidade fundamental do sistema, o campo fermiônico sujeito a um campo elétrico prescrito.

5.2 Campo fermiônico na presença de um campo elétrico uniforme

Queremos, nesta seção, determinar o campo fermiônico na presença de um campo elétrico externo e uniforme. Para isso iremos primeiramente determinar as autofunções do operador de Dirac e posteriormente obter o campo fermiônico, por meio da expansão na base dessas autofunções.

Como vimos na seção 4.2, a interação do campo fermiônico com um campo eletromagnético externo se faz, no operador de Dirac, por meio de acoplamentos com

os potenciais eletromagnéticos, conforme a equação (4.1). No caso de um campo elétrico uniforme, se utilizarmos o calibre $\varphi(\vec{r}, t) = -\vec{E} \cdot \vec{r}$ e $\vec{A}(\vec{r}, t) = 0$, teremos

$$\mathcal{H}_D = -i\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} + m\beta + e\vec{E} \cdot \vec{r} \mathbb{1}. \quad (5.1)$$

Como, nesse calibre, o operador de Dirac independe do tempo, o campo fermiônico pode ser expandido em soluções estacionárias por meio dos autoestados desse operador. Adotando que o campo elétrico esteja na direção z , $\vec{E} = E\hat{z}$, teremos que, nas direções transversas, o campo fermiônico não sofrerá ação alguma. Assim podemos propor que os autoestados sejam constituídos de ondas planas nas direções x e y , $e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}$, onde $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$ e $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$. Denominando $\Psi(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})$ o autoestado de autovalor ω , estes serão determinados a partir da equação

$$\mathcal{H}_D \Psi(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = \omega \Psi(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}). \quad (5.2)$$

Utilizando a expansão de Fourier de $\Psi(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})$ na variável z ,

$$\Psi(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = \int dp \tilde{\Psi}(\omega, p, \vec{k}) \frac{e^{ipz}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}, \quad (5.3)$$

teremos que sua transformada $\tilde{\Psi}(\omega, p, \vec{k})$ obedecerá à equação

$$\left(p\alpha_z + \vec{k} \cdot \vec{\alpha} + m\beta + ieE \frac{\partial}{\partial p} \mathbb{1} \right) \tilde{\Psi}(\omega, p, \vec{k}) = \omega \tilde{\Psi}(\omega, p, \vec{k}). \quad (5.4)$$

A equação acima pode ser simplificada por meio das transformações

$$\tilde{\Psi}(\omega, p, \vec{k}) = S(\vec{k}) \chi(p, \vec{k}) \frac{e^{-i\omega p/eE}}{\sqrt{2\pi eE}}, \quad (5.5)$$

onde a matriz $S(\vec{k})$ é dada por

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \sigma_z \Sigma(\vec{k}) \\ \sigma_z & -\Sigma(\vec{k}) \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

com

$$\Sigma(\vec{k}) = \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma} - m\sigma_z}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}. \quad (5.7)$$

Essa matriz foi escolhida de forma a ser unitária, $S(\vec{k})^{-1} = S(\vec{k})^\dagger$, diagonalizar a matriz α_z e simplificar a matriz $\vec{k} \cdot \vec{\alpha} + m\beta$,

$$S(\vec{k})^\dagger \alpha_z S(\vec{k}) = \beta \quad , \quad S(\vec{k})^\dagger (\vec{k} \cdot \vec{\alpha} + m\beta) S(\vec{k}) = -\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \gamma^5 \quad , \quad (5.8)$$

onde

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} . \quad (5.9)$$

Já a transformação $e^{-i\omega p/eE}$, esta foi feita com a finalidade de eliminar o autovalor ω da equação (5.4), que agora toma a forma

$$\left(p\beta + ieE \frac{\partial}{\partial p} \mathbf{1} \right) \chi(p, \vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \gamma^5 \chi(p, \vec{k}) . \quad (5.10)$$

A eliminação de ω indica que não há qualquer relação de dispersão entre esse autovalor e os demais números quânticos, como \vec{k} por exemplo. Podemos apenas afirmar que ω é real devido ao fato de ser o autovalor de um operador hermitiano, \mathcal{H}_D . Dessa forma, devemos supor que o espectro desse número quântico é real e sem lacuna, ou seja, ω pode assumir qualquer valor de $-\infty$ a $+\infty$.

Pode-se mostrar da equação (5.10) que a norma de $\chi(p, \vec{k})$ independe de p , isto é,

$$\frac{\partial}{\partial p} (\chi(p, \vec{k})^\dagger \chi(p, \vec{k})) = 0 \quad , \quad (5.11)$$

de forma que podemos fixá-la como a identidade,

$$\chi(p, \vec{k})^\dagger \chi(p, \vec{k}) = 1 . \quad (5.12)$$

É possível então mostrar que o autoestado $\Psi(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})$ é normalizado de forma consistente com o espectro contínuo dos números quânticos ω e \vec{k} ,

$$\int dz \int d^2\rho \Psi(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})^\dagger \Psi(\omega', \vec{k}'; z, \vec{\rho}) = \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (5.13)$$

Dividindo a equação (5.10) por \sqrt{eE} e definindo as variáveis

$$\eta = \frac{p}{\sqrt{eE}} \quad , \quad \nu = \sqrt{\frac{\vec{k}^2 + m^2}{eE}} \quad , \quad (5.14)$$

teremos a equação

$$\left(\eta\beta + i\frac{\partial}{\partial\eta}\mathbb{1}\right)\chi(p, \vec{k}) = \nu\gamma^5\chi(p, \vec{k}). \quad (5.15)$$

A fim de resolver a equação acima repartiremos o quadriespinor $\chi(p, \vec{k})$ em biespinores,

$$\chi_s(p, \vec{k}) = \begin{pmatrix} u_s f(\eta, \nu) \\ u_s g(\eta, \nu) \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

onde $f(\eta, \nu)$ e $g(\eta, \nu)$ são funções e u_s são os biespinores

$$u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

A equação (5.15) transforma-se então no sistema acoplado de equações

$$\begin{aligned} \left(\eta + i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)f(\eta, \nu) &= \nu g(\eta, \nu), \\ \left(-\eta + i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)g(\eta, \nu) &= \nu f(\eta, \nu), \end{aligned} \quad (5.18)$$

e a equação de normalização (5.12) transforma-se em

$$|f(\eta, \nu)|^2 + |g(\eta, \nu)|^2 = 1. \quad (5.19)$$

Para solucionar esse sistema podemos iterar as equações de forma a obter uma única equação diferencial de segunda ordem para uma das funções, por exemplo $f(\eta, \nu)$.

Para cada uma das soluções dessa equação de segunda ordem podemos determinar a outra função a partir de uma das equações do sistema, por exemplo, a função $g(\eta, \nu)$ pode ser obtida da primeira equação de (5.18)¹. A normalização dessas funções é

¹Para efetuar todos esses cálculos, devemos utilizar algumas propriedades da série confluyente:

$$\frac{d}{dz} {}_1F_1(a, c; z) = \frac{a}{c} {}_1F_1(a+1, c+1; z), \quad \frac{d}{dz}(z^c {}_1F_1(a, c+1; z)) = cz^{c-1} {}_1F_1(a, c; z) \quad \text{e}$$

$${}_1F_1(a, c; z) = {}_1F_1(c-a, c; -z) e^z.$$

facilmente obtida utilizando-se a equação (5.19) em $\eta = 0$. Assim podemos ter como solução os pares de funções

$$\begin{aligned} f_+(\eta, \nu) &= {}_1F_1\left(-\frac{i\nu^2}{4}, \frac{1}{2}; -i\eta^2\right) e^{i\eta^2/2}, \\ g_+(\eta, \nu) &= -i\nu\eta {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \frac{i\nu^2}{4}, \frac{3}{2}; i\eta^2\right) e^{-i\eta^2/2}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

e

$$\begin{aligned} f_-(\eta, \nu) &= -i\nu\eta {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{i\nu^2}{4}, \frac{3}{2}; -i\eta^2\right) e^{i\eta^2/2}, \\ g_-(\eta, \nu) &= {}_1F_1\left(\frac{i\nu^2}{4}, \frac{1}{2}; i\eta^2\right) e^{-i\eta^2/2}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde ${}_1F_1(a, c; z)$ é a série confluyente

$${}_1F_1(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (5.22)$$

Com isso determinamos a forma completa das autofunções $\Psi_{\epsilon, s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})$. Elas são da forma

$$\Psi_{\epsilon, s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = S(\vec{k}) \int dp \chi_{\epsilon, s}(p, \vec{k}) \frac{e^{-i\omega p/eE}}{\sqrt{2\pi eE}} \frac{e^{ipz}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}, \quad (5.23)$$

onde $S(\vec{k})$ é dado na equação (5.6) e

$$\chi_{\epsilon, s}(p, \vec{k}) = \begin{pmatrix} u_s f_{\epsilon}(\eta, \nu) \\ u_s g_{\epsilon}(\eta, \nu) \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

com η e ν sendo dados na equação (5.14).

Resumindo as principais propriedades de $\Psi_{\epsilon, s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})$, estas são autofunções do operador de Dirac com autovalor ω ,

$$\mathcal{H}_D \Psi_{\epsilon, s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = \omega \Psi_{\epsilon, s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}), \quad (5.25)$$

e formam uma base ortonormal de funções,

$$\int dz \int d^2\rho \Psi_{\epsilon, s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})^\dagger \Psi_{\epsilon', s'}(\omega', \vec{k}'; z, \vec{\rho}) = \delta_{\epsilon, \epsilon'} \delta_{s, s'} \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (5.26)$$

que possui completeza,

$$\sum_{\epsilon=\pm} \sum_{s=\pm} \int d\omega \int d^2k \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}) \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}; z', \vec{\rho}')^\dagger = \delta(z - z') \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \mathbb{1}. \quad (5.27)$$

Queremos determinar o campo fermiônico, o qual obedece à equação de Dirac,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_E(z, \vec{\rho}, t) = \mathcal{H}_D \hat{\psi}_E(z, \vec{\rho}, t). \quad (5.28)$$

É então conveniente expandir o campo fermiônico nas autofunções $\Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})$,

$$\hat{\psi}_E(z, \vec{\rho}, t) = \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{s=\pm} \int d\omega \int d^2k \hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}) e^{-i\omega t}, \quad (5.29)$$

o que é possível pelo fato dessas funções formarem uma base completa.

A quantização do campo fermiônico se faz por meio das relações de anticomutação

$$\{\hat{\psi}_E(z, \vec{\rho}, t)_\alpha, \hat{\psi}_E(z', \vec{\rho}', t)_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha,\beta} \delta(z - z') \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \hat{1}, \quad (5.30)$$

o que se reflete nos operadores de campo $\hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k})$,

$$\{\hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}), \hat{a}_{\epsilon',s'}(\omega', \vec{k}')^\dagger\} = \delta_{\epsilon,\epsilon'} \delta_{s,s'} \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k} - \vec{k}') \hat{1}. \quad (5.31)$$

Portanto, conseguimos determinar o campo fermiônico, devidamente quantizado, na presença de um campo elétrico uniforme externo. No entanto, diferentemente do caso livre, esse campo apresentou espectro contínuo e sem lacuna, o que impede a distinção nítida entre elétrons e pósitrons. Então, parece forçoso convencionar elétrons como sendo os modos com energia positiva, $\omega > 0$, e pósitrons como os de energia negativa, $\omega < 0$. De fato, o valor zero de energia depende da escolha do zero do potencial e, no caso de um campo elétrico uniforme, essa escolha é arbitrária (podemos escolher o zero do potencial em $z = z_0$ bastando, para isso, utilizar o potencial $eE(z - z_0)$ ao invés de eEz). Dessa forma vemos que o zero de energia é arbitrário, tornando não físico distinguir elétrons e pósitrons (os quais não são arbitrários) pelo sinal da energia. Assim não é evidente o significado dos operadores $\hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k})$ em termos de partículas e antipartículas, ou melhor, como

esses operadores relacionam-se com os operadores de elétrons \hat{c} e de pósitrons \hat{d} . De qualquer modo, não devemos esperar que as amplitudes operatoriais das ondas de frequência positiva e negativa tenham a mesma interpretação com e sem o campo elétrico aplicado. Notemos, também, que a interpretação dessas amplitudes não é necessária para prosseguirmos em nosso formalismo.

Para que possamos relacionar os operadores na presença do campo elétrico com os operadores sem o campo elétrico, utilizaremos o artifício habitual, qual seja, considerar que não haja campo elétrico até o instante $t = 0$, quando então é ligado, isto é, $\vec{E}(t) = \Theta(t)E\hat{z}$, onde $\Theta(t)$ é a função de Heaviside. O campo de Dirac associado a esse campo externo deve, então, obedecer à seguinte equação de Dirac

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t) = (-i\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} + m\beta + \Theta(t)eEz\mathbb{1})\hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t). \quad (5.32)$$

Assim, antes do campo elétrico ser ligado, temos um campo fermiônico livre,

$$\hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t) = \hat{\psi}_0(z, \vec{\rho}, t) \quad , \quad t < 0, \quad (5.33)$$

e um campo fermiônico na presença de um campo eletrostático após este ser ligado,

$$\hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t) = \hat{\psi}_E(z, \vec{\rho}, t) \quad , \quad t > 0, \quad (5.34)$$

ou seja,

$$\hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t) = \Theta(-t)\hat{\psi}_0(z, \vec{\rho}, t) + \Theta(t)\hat{\psi}_E(z, \vec{\rho}, t). \quad (5.35)$$

O campo livre pode ser decomposto na forma

$$\hat{\psi}_0(z, \vec{\rho}, t) = \hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, t) + \hat{\psi}_0^-(z, \vec{\rho}, t), \quad (5.36)$$

onde $\hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, t)$ representa a componente de frequências positivas, associada a elétrons,

$$\hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, t) = \sum_{r=\pm} \int dp \int d^2q \hat{c}_r(p, \vec{q}) \Phi_r^+(p, \vec{q}; z, \vec{\rho}) e^{-i\omega(p, \vec{q})t}, \quad (5.37)$$

enquanto que $\hat{\psi}_0^-(z, \vec{\rho}, t)$ representa a componente de frequências negativas, associada a pósitrons,

$$\hat{\psi}_0^-(z, \vec{\rho}, t) = \sum_{r=\pm} \int dp \int d^2q \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger \Phi_r^-(p, \vec{q}; z, \vec{\rho}) e^{i\omega(p, \vec{q})t}. \quad (5.38)$$

Quanto às funções de onda do campo livre, $\Phi_r^\pm(p, \vec{q}; z, \vec{\rho})$, estas podem ser convenientemente escritas na forma

$$\Phi_r^\pm(p, \vec{q}; z, \vec{\rho}) = S(\vec{q}) \phi_r^\pm(p, \vec{q}) \frac{e^{ipz}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}, \quad (5.39)$$

onde $\omega(p, \vec{q}) = \sqrt{p^2 + \vec{q}^2 + m^2}$ representa a energia das partículas livres e $S(\vec{k})$ é dado na equação (5.6). Os espinores $\phi_r^\pm(p, \vec{q})$ devem obedecer à equação

$$(p\beta - \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}\gamma^5) \phi_r^\pm(p, \vec{q}) = \pm \omega(p, \vec{q}) \phi_r^\pm(p, \vec{q}) \quad (5.40)$$

e devem ser devidamente normalizados. Desse modo escolhemos convenientemente a forma desses espinores como

$$\phi_r^+(p, \vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(p, \vec{q})(\omega(p, \vec{q}) + p)}} \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{q}) + p) u_r \\ -\sqrt{\vec{q}^2 + m^2} u_r \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

e

$$\phi_r^-(p, \vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(p, \vec{q})(\omega(p, \vec{q}) + p)}} \begin{pmatrix} \sqrt{\vec{q}^2 + m^2} u_r \\ (\omega(p, \vec{q}) + p) u_r \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Já os operadores $\hat{c}_r(p, \vec{q})$ e $\hat{d}_r(p, \vec{q})$, estes devem obedecer às relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_r(p, \vec{q}), \hat{c}_{r'}(p', \vec{q}')^\dagger\} &= \delta_{r,r'} \delta(p - p') \delta(\vec{q} - \vec{q}') \hat{1}, \\ \{\hat{d}_r(p, \vec{q}), \hat{d}_{r'}(p', \vec{q}')^\dagger\} &= \delta_{r,r'} \delta(p - p') \delta(\vec{q} - \vec{q}') \hat{1}, \\ \{\hat{c}_r(p, \vec{q}), \hat{d}_{r'}(p', \vec{q}')^\dagger\} &= 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

e são os operadores de aniquilação de um elétron e de um pósitron de momento $p\hat{z} + \vec{q}$, respectivamente.

Na Eletrodinâmica Quântica, elétrons e pósitrons consistem de excitações do campo de Dirac, definidas apenas no caso em que o campo encontra-se livre de interações com o campo eletromagnético. Da mesma forma o estado de vácuo, isto é, o estado que não contém elétrons e pósitrons, é definido apenas no caso de campo livre, onde deve obedecer às equações

$$\hat{c}_r(p, \vec{q})|0\rangle = 0 \quad , \quad \hat{d}_r(p, \vec{q})|0\rangle = 0 \quad , \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (5.44)$$

O fato de o campo elétrico ser acionado em $t = 0$ permite-nos então obter um campo fermiônico livre para $t < 0$, onde podemos definir o estado de vácuo do campo, assim como os operadores de criação e aniquilação de elétrons e de pósitrons. Além disso, sendo a equação de Dirac de primeira ordem na derivada temporal, podemos garantir, apesar da descontinuidade da hamiltoniana, a continuidade do campo em $t = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t). \quad (5.45)$$

Isso nos permite relacionar o campo fermiônico imediatamente após o acionamento do campo elétrico com o campo fermiônico imediatamente antes do acionamento,

$$\hat{\psi}_E(z, \vec{\rho}, 0) = \hat{\psi}_0(z, \vec{\rho}, 0). \quad (5.46)$$

A equação (5.46) permite-nos então relacionar os operadores de campo. Por exemplo, realizando o produto escalar com as autofunções livres $\Phi_r^\pm(p, \vec{q}; z, \vec{\rho})$ em ambos os lados dessa equação, obteremos

$$\begin{aligned} \hat{c}_r(p, \vec{q}) &= \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{s=\pm} \int d\omega \int d^2k \langle \Phi_r^+(p, \vec{q}) | \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) \rangle \hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}), \\ \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger &= \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{s=\pm} \int d\omega \int d^2k \langle \Phi_r^-(p, \vec{q}) | \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) \rangle \hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}), \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde a notação $\langle \Phi_r^\pm(p, \vec{q}) | \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) \rangle$ indica o produto escalar entre funções de onda,

$$\langle \Phi_r^\pm(p, \vec{q}) | \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) \rangle = \int dz \int d^2\rho \Phi_r^\pm(p, \vec{q}; z, \vec{\rho})^\dagger \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho}). \quad (5.48)$$

Da mesma forma podemos obter a relação

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) &= \sum_{r=\pm} \int dp \int d^2q [\langle \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) | \Phi_r^+(p, \vec{q}) \rangle \hat{c}_r(p, \vec{q}) \\ &\quad + \langle \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) | \Phi_r^-(p, \vec{q}) \rangle \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger], \end{aligned} \quad (5.49)$$

se realizarmos o produto escalar com a função $\Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}; z, \vec{\rho})$. Essa última equação mostra que os operadores de campo na presença do campo elétrico externo, $\hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k})$,

não representam operadores de elétrons ou pósitrons separadamente, mas constituem-se de uma combinação de operadores de aniquilação de elétrons, $\hat{c}_r(p, \vec{q})$, e criação de pósitrons, $\hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger$. É importante notar que as relações (5.47) e (5.49) são consistentes com as relações de anticomutação (5.31) e (5.43).

5.3 Dinâmica da criação de pares

Para que possamos obter o comportamento de grandezas no tempo, necessitamos do operador de evolução temporal. Esse, por sua vez, é definido por meio da hamiltoniana do campo fermiônico, que a qualquer tempo é dada por

$$\hat{H}(t) = \int dz \int d^2\rho \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 \left\{ \left[\hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t)^\dagger_\alpha, i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t)_\alpha \right] - \left[i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t)^\dagger_\alpha, \hat{\psi}(z, \vec{\rho}, t)_\alpha \right] \right\}. \quad (5.50)$$

É possível então, com algum cálculo, mostrar que a hamiltoniana é constante no tempo exceto em $t = 0$,

$$\hat{H}(t) = \Theta(-t) \hat{H}_0 + \Theta(t) \hat{H}_E, \quad (5.51)$$

onde \hat{H}_0 é a hamiltoniana do campo fermiônico livre,

$$\hat{H}_0 = \sum_{r=\pm} \int dp \int d^2q \omega(p, \vec{q}) (\hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{c}_r(p, \vec{q}) + \hat{d}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{d}_r(p, \vec{q})) + \mathcal{E}_0 \hat{1}, \quad (5.52)$$

sendo \mathcal{E}_0 a energia de ponto zero,

$$\mathcal{E}_0 = - \frac{V}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \omega(p, \vec{q}), \quad (5.53)$$

e \hat{H}_E é a hamiltoniana do campo fermiônico na presença do campo elétrico externo,

$$\hat{H}_E = \frac{1}{2} \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{s=\pm} \int d\omega \int d^2k \omega [\hat{a}_{\epsilon,s}^\dagger, \hat{a}_{\epsilon,s}]. \quad (5.54)$$

O operador de evolução temporal $\hat{U}(t)$ relaciona-se com a hamiltoniana do sistema por meio da equação de Schrödinger,

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{H}(t) \hat{U}(t), \quad (5.55)$$

e será normalizado tal que $\hat{U}(0) = \hat{1}$. É fácil mostrar que esse operador tem a forma

$$\hat{U}(t) = \Theta(-t) e^{-i\hat{H}_0 t} + \Theta(t) e^{-i\hat{H}_E t}, \quad (5.56)$$

de maneira que, para $t > 0$, teremos $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}_E t}$. Usando então a equação de evolução do operador $\hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k})$,

$$e^{i\hat{H}_E t} \hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) e^{-i\hat{H}_E t} = \hat{a}_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t}, \quad (5.57)$$

e as relações (5.47) e (5.49), obtemos a equação de evolução do operador $\hat{c}_r(p, \vec{q})$,

$$\begin{aligned} e^{i\hat{H}_E t} \hat{c}_r(p, \vec{q}) e^{-i\hat{H}_E t} &= \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{s=\pm} \int d\omega \int d^2k \langle \Phi_r^+(p, \vec{q}) | \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) \rangle e^{-i\omega t} \\ &\times \sum_{r'=\pm} \int dp' \int d^2q' [\langle \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) | \Phi_{r'}^+(p', \vec{q}') \rangle \hat{c}_{r'}(p', \vec{q}') \\ &\quad + \langle \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) | \Phi_{r'}^-(p', \vec{q}') \rangle \hat{d}_{r'}(-p', -\vec{q}')^\dagger]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Os produtos escalares presentes na equação acima têm a forma

$$\begin{aligned} \langle \Phi_r^\pm(p, \vec{q}) | \Psi_{\epsilon,s}(\omega, \vec{k}) \rangle &= \delta_{r,s} \delta(\vec{k} - \vec{q}) \\ &\times \phi^\pm \left(\frac{p}{\sqrt{eE}}, \sqrt{\frac{\vec{q}^2 + m^2}{eE}} \right)^\dagger \chi_\epsilon \left(\frac{p}{\sqrt{eE}}, \sqrt{\frac{\vec{q}^2 + m^2}{eE}} \right) \frac{e^{-i\omega p/eE}}{2\pi eE}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde $\phi^\pm(\eta, \nu)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \phi^+(\eta, \nu) &= \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\eta^2 + \nu^2}(\sqrt{\eta^2 + \nu^2} + \eta)}} \begin{pmatrix} \sqrt{\eta^2 + \nu^2} + \eta \\ -\nu \end{pmatrix}, \\ \phi^-(\eta, \nu) &= \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\eta^2 + \nu^2}(\sqrt{\eta^2 + \nu^2} + \eta)}} \begin{pmatrix} \nu \\ \sqrt{\eta^2 + \nu^2} + \eta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

e $\chi_\epsilon(\eta, \nu)$ é dada por

$$\chi_\epsilon(\eta, \nu) = \begin{pmatrix} f_\epsilon(\eta, \nu) \\ g_\epsilon(\eta, \nu) \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Usando então a forma do produto escalar (5.59) e a identidade

$$\int \frac{d\omega}{2\pi eE} e^{-i\omega(p - p' + eEt)/eE} = \delta(p - p' + eEt), \quad (5.62)$$

podemos reescrever (5.58) na forma

$$\begin{aligned} e^{i\hat{H}_{Et}} \hat{c}_r(p, \vec{q}) e^{-i\hat{H}_{Et}} &= \Delta^{++}(p, \vec{q}, t) \hat{c}_r(p + eEt, \vec{q}) \\ &+ \Delta^{+-}(p, \vec{q}, t) \hat{d}_r(-p - eEt, -\vec{q})^\dagger, \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \Delta^{\lambda, \lambda'}(p, \vec{q}, t) &= \sum_{\epsilon=\pm} \phi^\lambda\left(\frac{p}{\sqrt{eE}}, \sqrt{\frac{\vec{q}^2 + m^2}{eE}}\right)^\dagger \chi_\epsilon\left(\frac{p}{\sqrt{eE}}, \sqrt{\frac{\vec{q}^2 + m^2}{eE}}\right) \\ &\times \chi_\epsilon\left(\frac{p + eEt}{\sqrt{eE}}, \sqrt{\frac{\vec{q}^2 + m^2}{eE}}\right)^\dagger \phi^{\lambda'}\left(\frac{p + eEt}{\sqrt{eE}}, \sqrt{\frac{\vec{q}^2 + m^2}{eE}}\right). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Analogamente podemos obter a equação de evolução para o operador $\hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger$,

$$\begin{aligned} e^{i\hat{H}_{Et}} \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger e^{-i\hat{H}_{Et}} &= \Delta^{-+}(p, \vec{q}, t) \hat{c}_r(p + eEt, \vec{q}) \\ &+ \Delta^{--}(p, \vec{q}, t) \hat{d}_r(-p - eEt, -\vec{q})^\dagger. \end{aligned} \quad (5.65)$$

De posse dessas expressões somos capazes de obter a dinâmica de todas as grandezas de nosso interesse. A primeira grandeza relevante é o valor esperado no vácuo da densidade de elétrons, $n_e(z, \vec{\rho}, t)$. Para definir esta quantidade, devemos primeiramente considerar o operador número de elétrons, definido por

$$\hat{N}_e = \int dz \int d^2\rho \sum_{\alpha=1}^4 \hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, 0)_\alpha^\dagger \hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, 0)_\alpha. \quad (5.66)$$

O operador densidade de elétrons será então definido pelo argumento da integral acima e, portanto, a quantidade desejada será dada por

$$n_e(z, \vec{\rho}, t) = \langle 0 | \hat{U}(t)^\dagger \sum_{\alpha=1}^4 \hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, 0)_\alpha^\dagger \hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, 0)_\alpha \hat{U}(t) | 0 \rangle. \quad (5.67)$$

A integração dessa quantidade no espaço fornecerá, obviamente, o valor esperado no vácuo do número de elétrons. A expressão acima pode ser compreendida tanto no quadro de Heisenberg, onde somente o operador encontra-se evoluído, quanto no quadro de Schrödinger, onde somente o estado sofre evolução. Outra grandeza relevante é o valor esperado no vácuo da densidade de corrente de elétrons,

$$\vec{j}_e(z, \vec{\rho}, t) = \langle 0 | \hat{U}(t)^\dagger \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, 0)_\alpha^\dagger \hat{\psi}_0^+(z, \vec{\rho}, 0)_\beta \vec{\alpha}_{\alpha, \beta} \hat{U}(t) | 0 \rangle. \quad (5.68)$$

A taxa de criação de elétrons por unidade de volume, $w_e(z, \vec{\rho}, t)$, é definida como o termo fonte na equação de continuidade para elétrons,

$$w_e(z, \vec{\rho}, t) = \frac{\partial}{\partial t} n_e(z, \vec{\rho}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e(z, \vec{\rho}, t). \quad (5.69)$$

Temos ainda a distribuição espectral de elétrons no espaço de momentos, $\Lambda_e(p, \vec{q}, t)$. A fim de definir tal quantidade, devemos notar que o operador número de elétrons (5.66) pode ser escrito na forma

$$\hat{N}_e = \int dp \int d^2q \sum_{r=\pm} \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{c}_r(p, \vec{q}). \quad (5.70)$$

A distribuição espectral será então definida por

$$\Lambda_e(p, \vec{q}, t) = \langle 0 | \hat{U}(t)^\dagger \sum_{r=\pm} \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{c}_r(p, \vec{q}) \hat{U}(t) | 0 \rangle, \quad (5.71)$$

de forma que a integração dessa quantidade no espaço de momentos fornecerá o valor esperado no vácuo do número de elétrons.

Essas grandezas podem também ser definidas para pósitrons. O valor esperado no vácuo da densidade de pósitrons será dado por

$$n_p(z, \vec{\rho}, t) = \langle 0 | \hat{U}(t)^\dagger \sum_{\alpha=1}^4 \hat{\psi}_0^-(z, \vec{\rho}, t)_\alpha \hat{\psi}_0^-(z, \vec{\rho}, t)_\alpha^\dagger \hat{U}(t) | 0 \rangle, \quad (5.72)$$

enquanto que o valor esperado da corrente de pósitrons, por

$$\vec{j}_p(z, \vec{\rho}, t) = \langle 0 | \hat{U}(t)^\dagger \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 \hat{\psi}_0^-(z, \vec{\rho}, t)_\alpha \hat{\psi}_0^-(z, \vec{\rho}, t)_\beta^\dagger \vec{\alpha}_{\alpha,\beta} \hat{U}(t) | 0 \rangle. \quad (5.73)$$

A taxa de criação de pósitrons por unidade de volume será analogamente definida por

$$w_p(z, \vec{\rho}, t) = \frac{\partial}{\partial t} n_p(z, \vec{\rho}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_p(z, \vec{\rho}, t), \quad (5.74)$$

e a distribuição espectral, por

$$\Lambda_p(p, \vec{q}, t) = \langle 0 | \hat{U}(t)^\dagger \sum_{r=\pm} \hat{d}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{d}_r(p, \vec{q}) \hat{U}(t) | 0 \rangle. \quad (5.75)$$

Para $t < 0$, ou seja, na ausência de campo elétrico, o cálculo dessas quantidades é obtido por meio do operador de evolução $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}_0 t}$, e dessa forma todas as grandezas acima são nulas. Contudo, na presença de campo elétrico, $t > 0$, essas grandezas assumem valores não nulos. Para obtê-las devemos utilizar o operador de evolução $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}_E t}$ e as equações (5.63) e (5.65). Por exemplo, utilizando (5.37) podemos reescrever (5.67) como

$$\begin{aligned} n_e(z, \vec{\rho}, t) &= \sum_{r=\pm} \int dp \int d^2q \sum_{r'=\pm} \int dp' \int d^2q' \Phi_r^+(p, \vec{q}; z, \vec{\rho})^\dagger \Phi_{r'}^+(p', \vec{q}'; z, \vec{\rho}) \\ &\times \langle 0 | e^{i\hat{H}_E t} \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{c}_{r'}(p', \vec{q}') e^{-i\hat{H}_E t} | 0 \rangle \quad , \quad t > 0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

O cálculo do valor esperado nessa equação é feito inserindo a identidade $e^{-i\hat{H}_E t} e^{i\hat{H}_E t} = \hat{1}$ e substituindo as expressões (5.63),

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{i\hat{H}_E t} \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{c}_{r'}(p', \vec{q}') e^{-i\hat{H}_E t} | 0 \rangle \\ = \Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)^* \Delta^{+-}(p', \vec{q}', t) \\ \times \langle 0 | \hat{d}_r(-p - eEt, -\vec{q}) \hat{d}_{r'}(-p' - eEt, -\vec{q}')^\dagger | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (5.77)$$

o qual é simplificado devido à relação

$$\langle 0 | \hat{d}_r(-p - eEt, -\vec{q}) \hat{d}_{r'}(-p' - eEt, -\vec{q}')^\dagger | 0 \rangle = \delta_{r,r'} \delta(p - p') \delta(\vec{q} - \vec{q}'). \quad (5.78)$$

Substituindo esses resultados em (5.76) e usando a identidade

$$\Phi_r^+(p, \vec{q}; z, \vec{\rho})^\dagger \Phi_r^+(p, \vec{q}; z, \vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^3}, \quad (5.79)$$

obtemos que o valor esperado no vácuo da densidade de elétrons devido ao campo elétrico é uma quantidade uniforme, isto é, independente da posição,

$$n_e(z, \vec{\rho}, t) = n(t), \quad (5.80)$$

onde

$$n(t) = \frac{1}{4\pi^3} \int dp \int d^2q |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2. \quad (5.81)$$

Esse fato se deve, obviamente, a homogeneidade do campo elétrico aplicado.

O cálculo do valor esperado da densidade de pósitrons é feito de forma análoga e fornece

$$n_p(z, \vec{\rho}, t) = \frac{1}{4\pi^3} \int dp \int d^2q |\Delta^{-+}(-p, -\vec{q}, t)|^2. \quad (5.82)$$

Fazendo as mudanças de variável de integração $p \rightarrow -p$ e $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$ e usando a identidade (E.5) do Apêndice E, teremos que o valor da densidade de pósitrons será idêntico ao da de elétrons,

$$n_p(z, \vec{\rho}, t) = n(t). \quad (5.83)$$

O cálculo de $\vec{j}_e(z, \vec{\rho}, t)$ é bem semelhante ao cálculo de $n_e(z, \vec{\rho}, t)$, porém devemos utilizar a identidade

$$\Phi_r^+(p, \vec{q}; z, \vec{\rho})^\dagger \vec{\alpha} \Phi_r^+(p, \vec{q}; z, \vec{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{p\hat{z} + \vec{q}}{\omega(p, \vec{q})}. \quad (5.84)$$

As equações (5.64) e $\omega(p, \vec{q}) = \sqrt{p^2 + \vec{q}^2 + m^2}$ garantem que $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$ e $\omega(p, \vec{q})$ dependem apenas de \vec{q}^2 . Assim, além de uniforme, $\vec{j}_e(z, \vec{\rho}, t)$ tem componente não nula apenas na direção do campo elétrico,

$$\vec{j}_e(z, \vec{\rho}, t) = -j(t)\hat{z}, \quad (5.85)$$

onde²

$$j(t) = -\frac{1}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \frac{p}{\omega(p, \vec{q})} |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2. \quad (5.86)$$

A corrente de pósitrons é semelhante a de elétrons, porém oposta,

$$\vec{j}_p(z, \vec{\rho}, t) = j(t)\hat{z}, \quad (5.87)$$

devido à ação oposta do campo elétrico sobre elétrons e pósitrons. Esses resultados permitem-nos concluir que os valores esperados das taxas de criação de elétrons e de pósitrons na presença do campo elétrico, além de uniformes, são idênticos,

$$w_e(z, \vec{\rho}, t) = w_p(z, \vec{\rho}, t) = w(t), \quad (5.88)$$

²A escolha do sinal “-” foi feita para que a grandeza $j(t)$ fosse positiva.

onde

$$w(t) = \frac{d}{dt}n(t). \quad (5.89)$$

Esse fato mostra que elétrons e pósitrons são criados aos pares de forma a garantir a conservação da carga elétrica e, dessa forma, $w(t)$ representa a taxa de criação desses pares. Por fim temos que as distribuições espectrais são dadas por

$$\Lambda_e(p, \vec{q}, t) = \frac{V}{4\pi^3} |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 \quad (5.90)$$

e

$$\Lambda_p(p, \vec{q}, t) = \frac{V}{4\pi^3} |\Delta^{+-}(-p, \vec{q}, t)|^2, \quad (5.91)$$

onde $V = \int dz \int d^2\rho$ é o volume da região sob a ação do campo elétrico. Como vemos, a distribuição de pósitrons pode ser obtida da de elétrons por meio da relação $\Lambda_p(p, \vec{q}, t) = \Lambda_e(-p, -\vec{q}, t)$, o que novamente reflete o efeito contrário do campo elétrico sobre essas partículas. Devido a essa propriedade, é necessário analisar apenas a distribuição de elétrons. Esta distribuição é dada, a menos do fator $V/4\pi^3$, pela função $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$, de forma que podemos dizer que essa função representa a distribuição espectral. A forma genérica de $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$ como função da componente do momento paralela ao campo, p , para momento transverso \vec{q} e tempo fixos, é ilustrada na figura 5.2.

Nota-se um degrau em torno de $p = 0$, isto é, uma variação abrupta dessa função desde valores muito pequenos em $p > 0$ até um patamar em $p < 0$, o qual se estende sobre todo o intervalo $-eEt < p < 0$. Pode-se mostrar que essa função é par em relação ao ponto $p = -eEt/2$, o que significa que sua forma em pontos à esquerda do eixo $p = -eEt/2$ é o reflexo de sua forma à direita. Com isso o comportamento da função em torno do ponto $p = -eEt$ é simétrico ao do ponto $p = 0$, o que se comprova graficamente.

A figura (5.3) ilustra a mesma função, porém para dois instantes distintos.

Observa-se que o degrau em torno do ponto $p = -eEt$ desloca-se para a esquerda quando t aumenta, obviamente, contudo o degrau em torno do ponto $p = 0$ e a

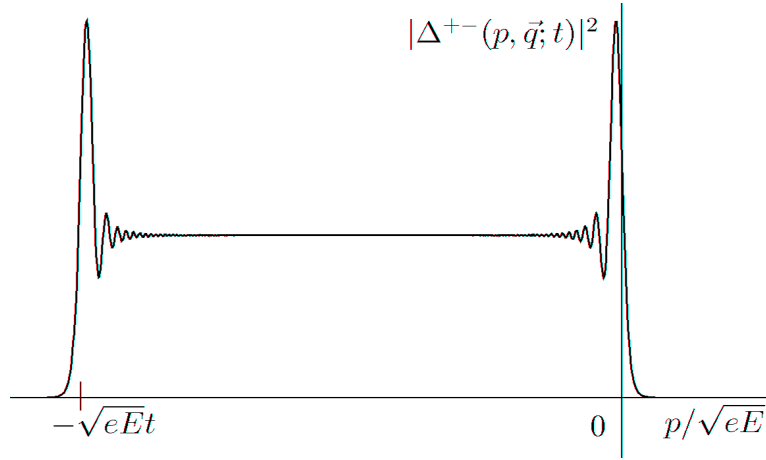


Figura 5.2: Distribuição espectral de elétrons na presença de um campo elétrico, $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$, como função da componente do momento paralela ao campo p/\sqrt{eE} , para momento transversal \vec{q} e tempo fixos.

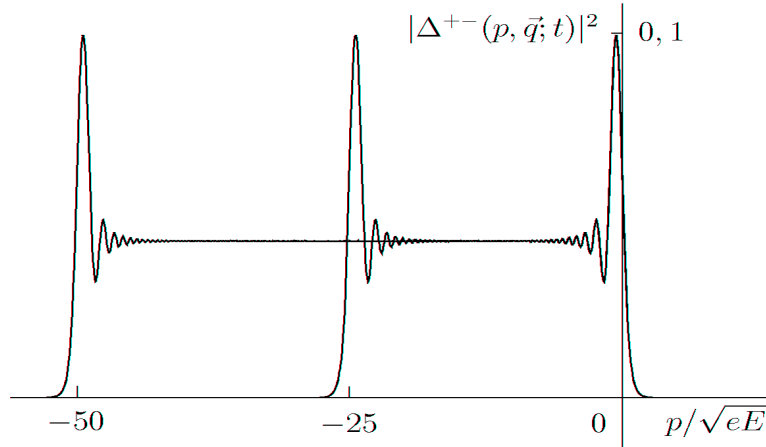


Figura 5.3: Distribuição espectral de elétrons na presença de um campo elétrico, $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$, como função da componente do momento paralela ao campo p/\sqrt{eE} , nos instantes $\sqrt{eEt} = 25$ e 50 , quando $\sqrt{(\vec{q}^2 + m^2)}/eE = 1$.

altura do patamar permanecem inalterados. Isso mostra apenas um alargamento do patamar com o tempo sem alteração das demais características da distribuição.

A expressão da distribuição para $t = \infty$, $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, \infty)|^2$, pode ser obtida da

equação (D.9) do Apêndice D³. Conforme esperado pela análise do gráfico anterior, a distribuição nesse regime apresenta apenas um degrau em torno de $p = 0$ com um patamar que se estende de $p < 0$ até $p = -\infty$. Dessa forma restringiremos seu gráfico, ilustrado na figura 5.4, apenas à região não trivial correspondente ao transiente do degrau.

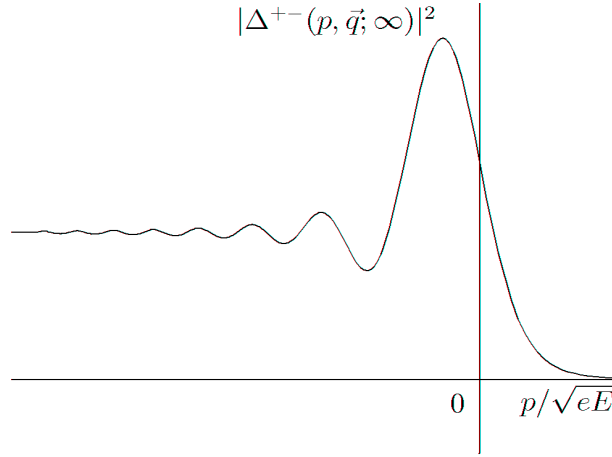


Figura 5.4: Distribuição espectral de elétrons na presença de um campo elétrico, $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$, como função da componente do momento paralela ao campo p/\sqrt{eE} , quando $t = \infty$ e $\sqrt{(\vec{q}^2 + m^2)/eE} = 1$.

A altura do patamar é definida como a função $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, \infty)|^2$ avaliada em $p = -\infty$, resultando em (Apêndice D)

$$|\Delta^{+-}(-\infty, \vec{q}, \infty)|^2 = e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE}. \quad (5.92)$$

Interessante notar que, a todo instante, a distribuição $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$ possui um valor não nulo na região $p > 0$, o que significa que sempre é possível encontrar elétrons movendo-se a favor do campo elétrico. Esse fato se torna notável quando

³Para isso devemos utilizar a forma assintótica da série confluyente presente nas funções $f_{\pm}(\eta, \nu)$ e $g_{\pm}(\eta, \nu)$,

$${}_1F_1(a, c; z) \Big|_{|z| \rightarrow \infty} \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a},$$

sendo que, nesse caso, apenas o segundo termo contribui.

investigamos a distribuição em instantes próximos a $t = 0$ já que, nesse regime, observa-se um pico simétrico em torno de $p \cong 0$, como mostra a figura 5.5.

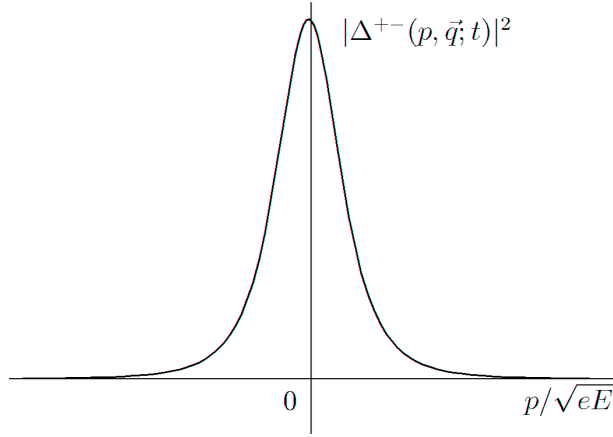


Figura 5.5: Distribuição espectral de elétrons na presença de um campo elétrico, $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$, como função da componente do momento paralela ao campo p/\sqrt{eE} , quando $t \rightarrow 0$ e $\sqrt{(\vec{q}^2 + m^2)}/eE = 1$.

Isso mostra que, assim que o campo elétrico é ligado, elétrons propagantes contra e a favor do campo são criados em quantidades aproximadamente iguais. Esse é um resultado contra-intuitivo, a menos que lancemos mão da idéia de que os pares criados provenham de pares virtuais que já possuem seus momentos lineares flutuantes independentes do campo elétrico aplicado; se todo momento linear dos pares criados tivesse origem no campo aplicado, seria paradoxal obter elétrons propagantes a favor do campo ou pósitrons contra.

De forma geral, o comportamento da distribuição espectral de elétrons no instante t pode então ser entendido da seguinte forma: elétrons são criados continuamente do instante $t' = 0$ até o instante $t' = t$ com momento aproximadamente nulo, e ganham o impulso $-eE(t - t')\hat{z}$ pela ação do campo elétrico. Essa contínua criação de elétrons, responsável pela formação de um pico em torno de $p = 0$, e esse contínuo impulso fornecido pelo campo elétrico, responsável pelo deslocamento desse pico para a esquerda de $eE(t - t')$, geram uma superposição de picos que formam o

patamar. Assim o degrau em $p = 0$ corresponde a elétrons criados em $t' = t$, e que portanto não sofreram impulso, enquanto que o degrau em $p = -eEt$ corresponde a elétrons criados em $t' = 0$, que sofreram o impulso $-eEt$.

Como vimos na equação (5.81), a densidade de elétrons $n(t)$ é obtida pela integração da distribuição espectral $(4\pi^3)^{-1}|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$ no espaço de momentos. Desse modo, $n(t)$ depende de $(4\pi^3)^{-1}|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$ apenas de forma global, isto é, detalhes locais da distribuição espectral como pequenas oscilações não contribuirão significativamente para a densidade de elétrons. Em contrapartida, como pode ser visto na figura (5.2), o comportamento global da distribuição no limite $t \rightarrow \infty$ indica um patamar, de altura $e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE}$, que se estende sobre toda a região $-eEt < p < 0$ e um valor nulo fora dessa região,

$$|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 \cong \Theta(p)\Theta(p + eEt) e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE}. \quad (5.93)$$

Esta equação tem significado mais preciso quando sob o sinal de integral,

$$\int dp |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} eEt e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE}, \quad (5.94)$$

ou mais genericamente,

$$\int dp F(|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} eEt F(e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE}), \quad (5.95)$$

onde $F(x)$ é qualquer função que se anula quando seu argumento é nulo, $F(0) = 0$. Assim, usando a expressão (5.94) na equação (5.81), obtemos que a forma assintótica da densidade de elétrons é dada por

$$n(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{eEt}{4\pi^3} \int d^2q e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE}, \quad (5.96)$$

a qual é facilmente reduzida em

$$n(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} t \frac{(eE)^2}{4\pi^3} e^{-\pi m^2/eE}. \quad (5.97)$$

A taxa de criação de elétrons, dada pela derivada temporal da densidade de elétrons, equação (5.89), tem então a forma assintótica

$$w(\infty) = \frac{(eE)^2}{4\pi^3} e^{-\pi m^2/eE}, \quad (5.98)$$

a qual coincide com o resultado obtido na referência [92]. Podemos fazer algumas observações a respeito dessa expressão: primeiramente vemos que, devido ao fator exponencial, a taxa de criação só possui valor apreciável para campo elétrico com intensidade da ordem do campo crítico $E_{\text{cr}} = m^2/e$ ($\hbar = c = 1$), assumindo rapidamente valores desprezíveis para campos menos intensos. Como vimos no início do capítulo, esse valor para o campo crítico é justamente aquele estimado de acordo com o princípio de incerteza. Além disso, essa expressão indica claramente que a taxa de criação de pares é um resultado não perturbativo, isto é, não é possível obter, para essa expressão, uma expansão em série de potências do campo elétrico. Dessa forma seu cálculo exige sempre métodos não perturbativos.

Por exemplo, pode-se utilizar o modelo do mar de Dirac da Mecânica Quântica Relativística, o qual se constituiu no primeiro modelo para o vácuo do campo fermiônico. Na Mecânica Quântica Relativística, o operador de Dirac \mathcal{H}_D (dado na equação (4.1)) era interpretado como a hamiltoniana do campo fermiônico, de forma que seus autoestados de autovalores negativos eram interpretados como modos de elétrons de energias negativas. Como esses elétrons não são observáveis, Dirac postulou que todos esses modos de energia negativa estariam populados com elétrons, formando um “mar de elétrons” que constituiriam o vácuo nessa teoria. A partir do espectro de energia de elétrons livres, $\pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, onde \vec{p} é o momento do elétron e m a sua massa, concluía-se que existia uma lacuna de energia $2m$ entre os elétrons do mar e os elétrons reais (de energia positiva). Assim, se fosse fornecida uma energia maior ou igual a $2m$ a um elétron do mar, este poderia se tornar um elétron real, deixando um buraco no mar, que seria interpretado como um pósitron. Assim, ao fornecer ao vácuo uma energia maior que a massa de repouso de um par elétron-

pósitron, poderíamos ter a formação de um par real dessas partículas. A taxa de criação de pares devida a aplicação de um campo elétrico muito intenso sobre o vácuo poderia então ser entendida da seguinte forma: sob a ação do campo elétrico, elétrons do mar adquirem energia $\omega = -\sqrt{p(z)^2 + \vec{q}^2 + m^2} + eEz$, a qual pode assumir qualquer valor real, $-\infty < \omega < \infty$. Com isso, esses elétrons podem tunelar a região de lacuna e alcançar estados de energia positiva, tornando-se elétrons reais e deixando um buraco no mar, de forma a gerar um par elétron-pósitron. Esse cálculo é feito por Holstein [92], tanto resolvendo a equação relativística de Dirac como por meio do método de aproximação semiclássica WKB, resultando exatamente na taxa de criação de pares (5.98).

À primeira vista esse resultado não coincide com os da literatura, que garantem que a taxa de criação de pares tem por forma assintótica

$$w_0(\infty) = \frac{(eE)^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n\pi m^2/eE}. \quad (5.99)$$

Ocorre que a taxa de criação de pares amplamente calculada na literatura não corresponde, conforme (5.69), ao número de pares elétron-pósitron criados por unidade de volume e tempo, mas relaciona-se à probabilidade do vácuo persistir no vácuo na presença do campo elétrico, conforme a equação

$$|\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2 = \exp\left[-V \int_0^t dt' w_0(t')\right], \quad (5.100)$$

onde V é o volume da região sob a ação do campo elétrico. Com isso, ambas as taxas possuem definições distintas e, dessa forma, $w(t)$ não precisa coincidir com o resultado (5.99). A fim de esclarecer essa diferença, faremos, na próxima seção, um estudo detalhado da estatística da criação de pares com o intuito de reproduzir ambos os resultados.

Note que a amplitude $\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle$ permite definir a lagrangiana efetiva nesse caso, $\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle = \exp(iV \int_0^t dt' \mathcal{L}_{\text{eff}}(t'))$, de forma que a taxa de criação de pares $w_0(t)$ seria definida por meio da parte imaginária da lagrangiana, $w_0(t) =$

$-2 \operatorname{Im} \mathcal{L}_{\text{eff}}(t)$. No entanto, iremos realizar apenas o cálculo da probabilidade de persistência do vácuo, $|\langle 0|e^{-i\hat{H}_{Et}}|0\rangle|^2$, sem contudo determinar a fase dessa quantidade, $\langle 0|e^{-i\hat{H}_{Et}}|0\rangle/|\langle 0|e^{-i\hat{H}_{Et}}|0\rangle|$. Com isso não iremos determinar a parte real da lagrangiana efetiva, responsável pela dinâmica do campo elétrico afetada pelo vácuo fermiônico, mas determinaremos apenas a parte imaginária, que consiste da taxa de criação de pares.

Para concluir nossos resultados vimos que, na presença de um campo elétrico uniforme aplicado ao vácuo do campo fermiônico, temos a criação de elétrons e pósitrons aos pares. Obtivemos expressões para várias grandezas que caracterizam o sistema, como as densidades de elétrons e pósitrons, suas correntes, taxas de criação e distribuição espectral, todas em função da distribuição $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2$. Uma análise cuidadosa dessa quantidade possibilitou uma compreensão da dinâmica do sistema como também permitiu a obtenção da forma estacionária da taxa de criação de pares.

5.4 Estatística da criação de pares

Nesta seção estudaremos a estatística da criação de pares, isto é, determinaremos as probabilidades de serem criados $n = 0, 1, 2, \dots$ pares elétron-pósitron pela presença de um campo elétrico aplicado ao vácuo. De posse dessa estatística determinaremos tanto o número médio de pares criados, donde extrairemos a taxa de criação $w(t)$ definida por (5.69), como a probabilidade de nenhum par ser criado, donde extrairemos a taxa $w_0(t)$ definida por (5.100). Mostraremos então que essas taxas reproduzem os resultados (5.98) e (5.99), de forma que constituem quantidades distintas e, portanto, não contraditórias.

Para estudarmos a estatística da criação de pares, analisaremos o estado do sistema no quadro de Schrödinger, o qual contém toda a informação pertinente ao sistema. Conforme o Apêndice E, esse estado, dado pela evolução do estado de

vácuo na presença do campo elétrico, pode ser reescrito na forma

$$e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle = \langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle e^{\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle, \quad (5.101)$$

onde $\hat{S}(t)^\dagger$ é o operador de criação de um par elétron-pósitron

$$\hat{S}(t)^\dagger = \sum_{r=\pm} \int dp \int d^2q \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger. \quad (5.102)$$

Desenvolvendo a exponencial $e^{\hat{S}(t)^\dagger}$ em série de potências, podemos reescrever a equação (5.101) na forma

$$e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle = \langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sqrt{\langle 0|\hat{S}(t)^n \hat{S}(t)^\dagger{}^n|0\rangle} |\psi_n(t)\rangle, \quad (5.103)$$

onde definimos os estados normalizados

$$|\psi_n(t)\rangle = \frac{\hat{S}(t)^\dagger{}^n|0\rangle}{\sqrt{\langle 0|\hat{S}(t)^n \hat{S}(t)^\dagger{}^n|0\rangle}}. \quad (5.104)$$

É fácil verificar que os estados $|\psi_n(t)\rangle$ são autoestados dos operadores número de elétrons e de pósitrons com autovalor n , de forma que eles correspondem ao estado do sistema após uma medida do número de elétrons ou de pósitrons. Sendo então autoestados normalizados de operadores hermitianos com autovalores distintos, podemos garantir que os estados $|\psi_n(t)\rangle$ formam uma base ortonormal,

$$\langle \psi_m(t)|\psi_n(t)\rangle = \delta_{m,n}. \quad (5.105)$$

As equações (5.103) e (5.120) mostram então que, na evolução do vácuo na presença de um campo elétrico, podemos ter a criação de $n = 0, 1, 2, \dots$ pares elétron-pósitrons. A probabilidade de medirmos n pares é então obtida do produto escalar entre os estados do sistema antes e depois da medida,

$$P_n(t) = |\langle \psi_n(t)|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2, \quad (5.106)$$

a qual, utilizando a equação (5.103), toma a forma

$$P_n(t) = \frac{1}{n!^2} |\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2 \langle 0|\hat{S}(t)^n \hat{S}(t)^\dagger{}^n|0\rangle. \quad (5.107)$$

Para o cálculo das probabilidades utilizaremos a expressão

$$\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2} \langle 0|\hat{S}(t)^n\hat{S}(t)^\dagger{}^n|0\rangle, \quad (5.108)$$

a qual é obtida desenvolvendo as exponenciais em série de potências e utilizando a definição e ortonormalidade dos estados $|\psi_n(t)\rangle$. Multiplicando então ambos os lados dessa equação pelo fator $|\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2$ e utilizando a equação (5.107), obtemos a função geradora das probabilidades

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} P_n(t) = |\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2 \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle. \quad (5.109)$$

No Apêndice F deduzimos a equação

$$\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle = \exp \left[\frac{V}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \ln \left(1 + x^2 \frac{|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2}{1 - |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2} \right) \right], \quad (5.110)$$

porém, para o cálculo da função geradora, necessitamos ainda determinar a probabilidade do vácuo persistir no vácuo, $|\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2$. Para o cálculo deste fator, utilizaremos a equação

$$|\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2 \langle 0|e^{\hat{S}(t)}e^{\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle = 1, \quad (5.111)$$

a qual é obtida da equação (5.101) usando o fato de que o estado $e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle$ é normalizado. Com isso a probabilidade de persistência vácuo-vácuo é obtida substituindo na equação acima a expressão (5.110) com $x = 1$,

$$|\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2 = \exp \left[\frac{V}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \ln \left(1 - |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 \right) \right]. \quad (5.112)$$

Substituindo as expressões (5.110) e (5.112) na equação (5.109), obtemos a função geradora das probabilidades $P_n(t)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(t) = \exp \left[\frac{V}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \ln \left(1 + (\xi - 1) |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 \right) \right]. \quad (5.113)$$

As probabilidades são, portanto, dadas pelos coeficientes da expansão da expressão acima em série de potências em ξ ,

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \exp \left[\frac{V}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \ln \left(1 + (\xi - 1) |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 \right) \right] \Big|_{\xi=0}. \quad (5.114)$$

Por exemplo, a probabilidade de não medirmos qualquer par é obviamente dada pela probabilidade de persistência vácuo-vácuo (5.112), $P_0(t) = |\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|^2$, enquanto que a probabilidade de medirmos um par é dada por

$$P_1(t) = P_0(t) \frac{V}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \frac{|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2}{1 - |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2}. \quad (5.115)$$

A forma explícita das probabilidades torna-se mais complicada conforme n aumenta. Contudo, a expressão (5.113), como é próprio de funções geradoras, permite-nos obter resultados interessantes independentemente dessa forma explícita. Por exemplo, tomando $\xi = 1$ nessa expressão verificamos que a soma das probabilidades é a unidade,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1. \quad (5.116)$$

Por outro lado, se derivarmos a expressão (5.113) em relação a ξ e tomarmos $\xi = 1$, obteremos o número médio de pares formados,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) = n(t) V, \quad (5.117)$$

onde $n(t)$ é a densidade de pares que, consistentemente, reproduz a equação (5.81),

$$n(t) = \frac{1}{4\pi^3} \int dp \int d^2q |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2. \quad (5.118)$$

É interessante notar que a equação (5.107) permite-nos obter os fatores de normalização dos estados $|\psi_n(t)\rangle$,

$$\frac{1}{\sqrt{\langle 0|\hat{S}(t)^n \hat{S}(t)^\dagger{}^n|0\rangle}} = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{P_0(t)}{P_n(t)}}, \quad (5.119)$$

de forma que os estados $|\psi_n(t)\rangle$ podem ser reescritos na forma

$$|\psi_n(t)\rangle = \sqrt{\frac{P_0(t)}{P_n(t)}} \frac{\hat{S}(t)^\dagger{}^n}{n!} |0\rangle. \quad (5.120)$$

Dessa forma, conseguimos analisar a estatística da criação de pares, determinando tanto as probabilidades de formação de n pares, equação (5.114), quanto o estado

do sistema após a medida dos n pares, equações (5.120) e (5.119). Por outro lado, utilizando a equação (5.107), podemos reescrever a equação (5.103) na forma

$$e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle = \frac{\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle}{|\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{P_n(t)} |\psi_n(t)\rangle. \quad (5.121)$$

Portanto, obtivemos o estado do sistema a menos do fator de fase, $\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle/|\langle 0|e^{-i\hat{H}_E t}|0\rangle|$.

Agora, podemos determinar as taxas de criação de pares $w(t)$ e $w_0(t)$. A taxa $w(t)$, definida por (5.69), corresponde ao número de pares elétron-pósitron criados por unidade de volume e tempo e, portanto, relaciona-se à densidade de pares $n(t)$ por meio da equação (5.89). Já a taxa da literatura, $w_0(t)$, esta é obtida ao reescrevermos a probabilidade de persistência vácuo-vácuo (5.112) na forma (5.100), donde identificamos

$$\int_0^t dt' w_0(t') = -\frac{1}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \ln \left(1 - |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 \right). \quad (5.122)$$

A forma assintótica de $\int_0^t dt' w_0(t')$ pode então ser obtida da equação (5.95), o que resulta em

$$\int_0^t dt' w_0(t') \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{eEt}{4\pi^3} \int d^2q \ln \left(1 - e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE} \right). \quad (5.123)$$

Com isso é fácil verificar que a taxa $w_0(t)$ tem a forma assintótica

$$w_0(\infty) = -\frac{eE}{4\pi^3} \int d^2q \ln \left(1 - e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE} \right), \quad (5.124)$$

a qual, após integração, resulta em

$$w_0(\infty) = \frac{(eE)^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n\pi m^2/eE}. \quad (5.125)$$

Esse é o celebrado resultado de Schwinger [16] para a taxa de criação de pares em campo elétrico aplicado. Obtê-lo assim é uma indicação da consistência do nosso formalismo e de seu acordo com os formalismos existentes.

É interessante notar que, no regime $t \rightarrow \infty$, podemos determinar exatamente a função geradora das probabilidades de criação de pares. De fato, utilizando a equação (5.95), podemos converter a expressão (5.113) em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \exp \left[Vt \frac{eE}{4\pi^3} \int d^2q \ln \left(1 + (\xi - 1) e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE} \right) \right]. \quad (5.126)$$

Resolvendo a integral em \vec{q} obtemos a forma assintótica da função geradora,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \exp \left[Vt \frac{(eE)^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\xi - 1)^n}{n^2} e^{-n\pi m^2/eE} \right]. \quad (5.127)$$

É importante analisar o regime de campo fraco, $E \ll m^2/e$, uma vez que o campo crítico $E_{\text{cr}} = m^2/e$ possui um valor demasiadamente alto ($E_{\text{cr}} \sim 10^{18}$ V/m). Nesse caso teremos $e^{-\pi m^2/eE} \ll 1$, de forma que a expressão anterior pode ser simplificada,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n P_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{(\xi - 1)wVt}, \quad (5.128)$$

onde

$$w = \frac{(eE)^2}{4\pi^3} e^{-\pi m^2/eE}. \quad (5.129)$$

Nesse regime não há distinção entre as taxas de criação de pares $w(t)$ e $w_0(t)$ (ambas são dadas por (5.129)), e as probabilidades de criação de n pares, obtidas da equação (5.128), obedecem a uma distribuição de Poisson com o número médio de pares wVt ,

$$P_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{(wVt)^n}{n!} e^{-wVt}. \quad (5.130)$$

A figura 5.6 mostra o comportamento dessa distribuição no tempo.

Em $t = 0$, quando o campo elétrico é ligado, não temos a criação de nenhum par, de forma que $P_0(0) = 1$. À medida que t aumenta, temos uma probabilidade não nula de criar pares, de forma que a probabilidade de nenhum par ser criado, $P_0(t)$, diminui no tempo. Já a probabilidade de criarmos apenas um par, $P_1(t)$, esta é nula em $t = 0$ e cresce inicialmente no tempo. Conforme t aumenta, temos a probabilidade de serem criados mais de um par, de forma que $P_1(t)$ passa a decrescer no tempo.

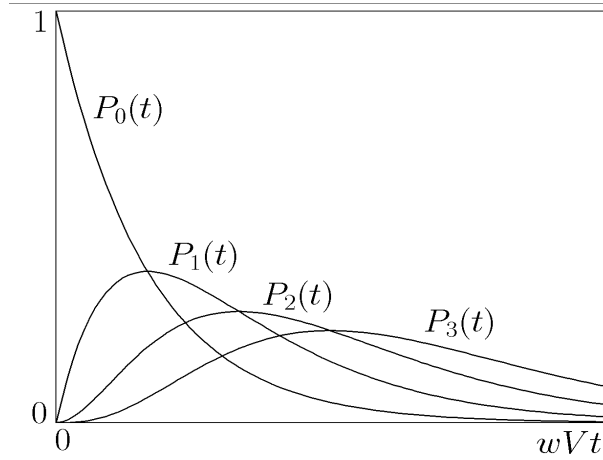


Figura 5.6: Probabilidades de criação de $n = 0, 1, 2, 3$ pares elétron-pósitron, $P_n(t)$, como função do número médio de pares wVt .

5.5 Funções de estado

Como vimos nas seções anteriores, na presença de um campo elétrico, o vácuo evolui para um estado no qual podemos medir $n = 0, 1, 2, \dots$ pares elétron-pósitron, equação (5.121). De posse desse estado, foi possível determinar diversas grandezas que permitem analisar o sistema. Para isso utilizamos o formalismo canônico que exige que lidemos com operadores e suas relações de comutação-anticomutação. No entanto, a manipulação de operadores pode, em determinados casos, ser difícil e trabalhosa. Seria então interessante obter meios de evitar essa manipulação algébrica e extrair, na forma de funções, toda a informação útil do sistema. Dessa forma iremos, nesta seção, obter as quantidades que permitem uma descrição do sistema na forma de funções: as funções de estado⁴ do sistema.

A definição dessas quantidades é feita a partir dos estados de n pares livres,

$$\begin{aligned}
 & |p_1, \vec{q}_1, r_1; p'_1, \vec{q}'_1, r'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n, r_n; p'_n, \vec{q}'_n, r'_n\rangle \\
 & := \frac{1}{n!} \hat{d}_{r'_n}(p'_n, \vec{q}'_n)^\dagger \hat{c}_{r_n}(p_n, \vec{q}_n)^\dagger \dots \hat{d}_{r'_1}(p'_1, \vec{q}'_1)^\dagger \hat{c}_{r_1}(p_1, \vec{q}_1)^\dagger |0\rangle, \quad (5.131)
 \end{aligned}$$

⁴Adotamos a nomenclatura “funções de estado” ao invés de “funções de onda” para distinguir as primeiras das autofunções do operador de Dirac, como as que foram determinadas na seção 5.2.

uma vez que as funções de estado de n pares elétron-pósitron são dadas pelo produto escalar entre os estados acima e o estado do sistema,

$$\begin{aligned} & \phi_{r_1, r'_1, \dots, r_n, r'_n}^n(p_1, \vec{q}_1; p'_1, \vec{q}'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n; p'_n, \vec{q}'_n; t) \\ &= \langle p_1, \vec{q}_1, r_1; p'_1, \vec{q}'_1, r'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n, r_n; p'_n, \vec{q}'_n, r'_n | e^{-i\hat{H}_E t} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Substituindo a expressão (5.121) nessa equação e utilizando o fato de que apenas o estado $|\psi_{n'}(t)\rangle$ com $n' = n$ pares contribui no produto escalar, temos que a função de estado pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} & \phi_{r_1, r'_1, \dots, r_n, r'_n}^n(p_1, \vec{q}_1; p'_1, \vec{q}'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n; p'_n, \vec{q}'_n; t) \\ &= \frac{\langle 0 | e^{-i\hat{H}_E t} | 0 \rangle}{|\langle 0 | e^{-i\hat{H}_E t} | 0 \rangle|} \sqrt{P_n(t)} \psi_{r_1, r'_1, \dots, r_n, r'_n}^n(p_1, \vec{q}_1; p'_1, \vec{q}'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n; p'_n, \vec{q}'_n; t), \end{aligned} \quad (5.133)$$

onde

$$\begin{aligned} & \psi_{r_1, r'_1, \dots, r_n, r'_n}^n(p_1, \vec{q}_1; p'_1, \vec{q}'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n; p'_n, \vec{q}'_n; t) \\ &= \langle p_1, \vec{q}_1, r_1; p'_1, \vec{q}'_1, r'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n, r_n; p'_n, \vec{q}'_n, r'_n | \psi_n(t) \rangle. \end{aligned} \quad (5.134)$$

É possível mostrar que as funções auxiliares ψ^n são normalizadas para a unidade,

$$\begin{aligned} & \int dp_1 \int d^2q_1 \int dp'_1 \int d^2q'_1 \dots \int dp_n \int d^2q_n \int dp'_n \int d^2q'_n \sum_{r_1=\pm} \sum_{r'_1=\pm} \dots \sum_{r_n=\pm} \sum_{r'_n=\pm} \\ & \times |\psi_{r_1, r'_1, \dots, r_n, r'_n}^n(p_1, \vec{q}_1; p'_1, \vec{q}'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n; p'_n, \vec{q}'_n; t)|^2 = 1, \end{aligned} \quad (5.135)$$

de forma que, usando a equação (5.133), as funções de estado dos sistema serão normalizadas para as probabilidades $P_n(t)$,

$$\begin{aligned} & \int dp_1 \int d^2q_1 \int dp'_1 \int d^2q'_1 \dots \int dp_n \int d^2q_n \int dp'_n \int d^2q'_n \sum_{r_1=\pm} \sum_{r'_1=\pm} \dots \sum_{r_n=\pm} \sum_{r'_n=\pm} \\ & \times |\phi_{r_1, r'_1, \dots, r_n, r'_n}^n(p_1, \vec{q}_1; p'_1, \vec{q}'_1; \dots; p_n, \vec{q}_n; p'_n, \vec{q}'_n; t)|^2 = P_n(t). \end{aligned} \quad (5.136)$$

O fato de as funções de estado não serem normalizadas para a identidade reflete o fato de que não há uma conservação do número de pares no sistema: a norma das funções de estado podem variar na medida em que pares forem criados ou aniquilados.

Podemos vislumbrar a forma explícita da função de estado de $n = 0$ pares,

$$\phi^0(t) = \langle 0 | e^{-i\hat{H}_E t} | 0 \rangle, \quad (5.137)$$

a de $n = 1$ par,

$$\phi_{r,r'}^1(p, \vec{q}, p', \vec{q}'; t) = - \langle 0 | e^{-i\hat{H}_E t} | 0 \rangle \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}; t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}; t)} \delta_{r,r'} \delta(p + p') \delta(\vec{q} + \vec{q}'), \quad (5.138)$$

e a de $n = 2$ pares,

$$\begin{aligned} \phi_{r_1, r'_1; r_2, r'_2}^2(p_1, \vec{q}_1, p'_1, \vec{q}'_1; p_2, \vec{q}_2, p'_2, \vec{q}'_2; t) \\ = \langle 0 | e^{-i\hat{H}_E t} | 0 \rangle \frac{\Delta^{+-}(p_1, \vec{q}_1; t)}{\Delta^{--}(p_1, \vec{q}_1; t)} \frac{\Delta^{+-}(p_2, \vec{q}_2; t)}{\Delta^{--}(p_2, \vec{q}_2; t)} \\ \times [\delta_{r_1, r'_1} \delta(p_1 + p'_1) \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}'_1) \delta_{r_2, r'_2} \delta(p_2 + p'_2) \delta(\vec{q}_2 + \vec{q}'_2) \\ - \delta_{r_2, r'_1} \delta(p_2 + p'_1) \delta(\vec{q}_2 + \vec{q}'_1) \delta_{r_1, r'_2} \delta(p_1 + p'_2) \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}'_2)]. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Pela simples observação dessas funções, podemos obter informação sobre o sistema: por exemplo, as funções delta de Dirac na expressão (5.138) indicam claramente que o elétron e o pósitron do par possuem momentos opostos; a expressão (5.139) indica uma clara antissimetria na permutação de elétrons, $(p_1, \vec{q}_1, r_1) \leftrightarrow (p_2, \vec{q}_2, r_2)$, ou de pósitrons, $(p'_1, \vec{q}'_1, r'_1) \leftrightarrow (p'_2, \vec{q}'_2, r'_2)$, consistente com o fato de serem partículas idênticas e fermiônicas. Por outro lado, se quisermos informação sobre a distribuição de momentos de n pares incluindo todas as correlações entre partículas, isto é, a distribuição de probabilidades de n pares no espaço de momento, basta tomar o módulo quadrado da respectiva função de estado.

5.6 Condições de contorno na criação de pares

Como já mencionado, o processo de criação de pares elétron-pósitron pela ação de um campo elétrico pode ser entendido como uma desestabilização de pares virtuais de partículas causada pelo campo externo, fazendo com que os pares virtuais

decaíam em pares reais. Em contrapartida, vimos que condições de contorno impostas sobre o campo fermiônico afetam suas flutuações de ponto zero, na medida em que restringem a dinâmica de pares virtuais de partículas. Então é natural supor que, se confinarmos o campo fermiônico e, simultaneamente, aplicarmos um campo elétrico externo, as condições de contorno irão afetar o processo de criação de pares. Em particular, seria interessante amplificar o efeito de criação de pares.

Nesta seção, queremos estudar a influência de condições de contorno, impostas sobre campo fermiônico, no processo da criação de pares. Desejamos considerar um campo fermiônico confinado entre duas placas paralelas e sujeito a um campo elétrico uniforme paralelo a essas placas. Neste sentido, a condição de contorno mais realista para simular o confinamento seria a do modelo de sacola MIT, no entanto, nessa primeira abordagem do problema, adotaremos uma condição mais simples: a de antiperiodicidade do campo fermiônico na região entre placas. Considerando que as placas se localizem nos planos $y = 0$ e $y = a$, esta condição é expressa por

$$\psi(x, a, z, t) = -\psi(x, 0, z, t). \quad (5.140)$$

Quanto ao campo elétrico, este será ligado no instante $t = 0$, assumindo um valor constante na direção z para $t > 0$, $\vec{E} = E\hat{z}$. A condição de contorno, por outro lado, deverá estar presente a todo o instante, de forma que teremos um campo fermiônico somente sob condição de contorno para $t < 0$ e sob condição de contorno e campo externo para $t > 0$. Como a condição de contorno ocorre em uma direção ortogonal a do campo elétrico, ela afeta somente a componente de momento da direção y , que passa a ter espectro discreto: $q_y = (2n + 1)\pi/a$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Neste sentido, os cálculos na presença da condição de contorno são muito semelhantes aos cálculos na sua ausência, desde que façamos as adaptações necessárias para a passagem de espectro contínuo para espectro discreto. Assim, integrais na variável

q_y são substituídas por somatórios no índice n ,

$$\int dq_y f(q_y) \longrightarrow \frac{2\pi}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f((2n+1)\pi/a). \quad (5.141)$$

Com essas adaptações, podemos obter as diversas grandezas relacionadas à criação de pares na presença de condição de contorno. Iremos analisar apenas uma única grandeza, o valor assintótico da taxa de criação de pares definida pela equação (5.69). Então, aplicando a substituição acima na equação (5.96), obteremos a densidade de elétrons sob condição de contorno,

$$n(a, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{eEt}{4\pi^3} \int dq_x \frac{2\pi}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi[q_x^2 + (2n+1)^2\pi^2/a^2 + m^2]/eE}, \quad (5.142)$$

donde, diferenciando no tempo, podemos extrair a taxa de criação de pares sob condição de contorno,

$$w(a, \infty) = \frac{eE}{4\pi^3} \int dq_x \frac{2\pi}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi[q_x^2 + (2n+1)^2\pi^2/a^2 + m^2]/eE}. \quad (5.143)$$

Efetuada as integrais e somatórios, obtemos a forma final da taxa de criação de pares no caso de um campo fermiônico sob condição de contorno antiperiódica,

$$w(a, \infty) = \frac{(eE)^{3/2}}{2\pi^2 a} e^{-\pi m^2/eE} \theta_2(0, e^{-4\pi^3/eEa^2}), \quad (5.144)$$

onde $\theta_2(0, z)$ é a função de Jacobi,

$$\theta_2(0, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{(n+1/2)^2}. \quad (5.145)$$

Se afastarmos infinitamente as placas, $a \rightarrow \infty$, devemos obter o limite sem condição de contorno. Isso pode ser comprovado por meio da equação [98]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \theta_2(0, e^{-x}) = 1, \quad (5.146)$$

que mostra que, nesse limite, recuperamos a expressão (5.129),

$$w(\infty, \infty) = \frac{(eE)^2}{4\pi^3} e^{-\pi m^2/eE}. \quad (5.147)$$

Dessa forma, podemos ver que as condições de contorno impostas sobre o campo fermiônico corrigem a taxa de criação de pares pelo fator

$$\frac{w(a, \infty)}{w(\infty, \infty)} = \frac{2\pi}{\sqrt{eEa}} \theta_2(0, e^{-4\pi^3/eEa^2}), \quad (5.148)$$

o qual depende apenas do parâmetro \sqrt{eEa} . A figura 5.7 mostra esse fator como função da distância entre as placas. Podemos então verificar que essa quantidade é sempre menor que a unidade, aproximando-se de 1 quando retiramos a condição de contorno. Assim, diferentemente do que gostaríamos, o confinamento do campo apenas atenua a criação de pares.

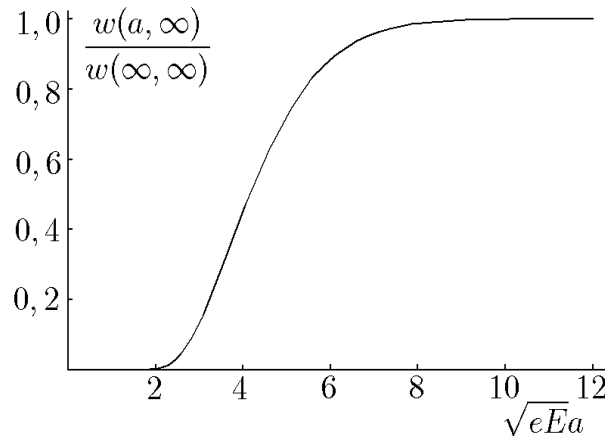


Figura 5.7: Razão entre os valores assintóticos no tempo das taxas de criação de pares com e sem condição de contorno como função da distância a entre as placas.

É interessante notar que a taxa de criação sob condição de contorno antiperiódica, equação (5.144), é uniforme na região entre placas, isto é, independe de z . Isto ocorre porque a condição de contorno antiperiódica não quebra a simetria de translação do espaço e, dessa forma, todas as grandezas desse sistema deverão ser uniformes no espaço. De fato, pode-se mostrar que um campo fermiônico que satisfaz a condição

de contorno (5.140) satisfaz também a equação

$$\hat{\psi}(x, y + a, z, t) = -\hat{\psi}(x, y, z, t), \quad (5.149)$$

de forma que o campo apresenta antiperiodicidade em quaisquer dois planos perpendiculares à direção y e distantes de a entre si. Essa simetria de translação significa que a condição de contorno antiperiódica não estabelece fronteiras físicas nos planos $y = 0$ e $y = a$, isto é, não simula verdadeiramente a presença de placas nesses planos, mas representa uma compactificação da dimensão y .

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Estudamos, neste trabalho, diversos fenômenos apresentados pelo vácuo do campo fermiônico como resposta a estímulos externos. De fato, devido às suas flutuações de ponto zero, o vácuo fermiônico apresenta uma estrutura capaz de responder a campos externos e condições de contorno. Nesse sentido exploramos o efeito Casimir fermiônico, que mede a resposta do campo fermiônico ao confinamento, a lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg, que resume os efeitos do vácuo fermiônico na dinâmica do campo eletromagnético, e o fenômeno da criação de pares elétron-pósitron, que representa uma instabilidade do vácuo fermiônico frente a campos eletromagnéticos muito intensos.

No capítulo 2 fazemos uma revisão sucinta sobre o efeito Casimir, que corresponde a uma tensão em fronteiras ocasionada pelo confinamento de um campo em uma região do espaço. Introduzimos primeiramente o efeito Casimir do campo eletromagnético e, posteriormente, discutimos o efeito Casimir do campo fermiônico. Estudamos apenas o caso de geometria plana, isto é, o confinamento do campo fermiônico entre duas placas paralelas, simulado pelas condições de contorno MIT, e determinamos a energia de Casimir por meio do método de soma de modos. Analisamos então como as diferenças entre esses dois campos se refletem na energia de

Casimir. Vimos que a maior diferença reside no fato de que, ao contrário do campo eletromagnético, o campo fermiônico possui massa. Nesse sentido verificamos que a presença da massa suprime o efeito Casimir fermiônico para distâncias de confinamento maiores que o comprimento de onda Compton do elétron. Constituindo-se apenas de uma revisão do efeito Casimir fermiônico, não apresentamos, nesse capítulo, nenhum resultado novo.

No capítulo 3, estudamos a influência de um campo eletromagnético externo na energia de Casimir fermiônica com o intuito de verificar se a ação do campo externo é capaz de intensificar o efeito Casimir. Para isso consideramos novamente o campo fermiônico confinado entre duas placas paralelas, via condição de contorno MIT, porém agora, sob a ação de um campo magnético uniforme e ortogonal às placas. Calculamos então, a partir do método de soma de modos, a energia de Casimir desse problema e mostramos que o campo magnético é capaz de amplificar o efeito Casimir, mas não a ponto de torná-lo mensurável. A expressão que obtivemos para a energia de Casimir sob campo eletromagnético está de acordo com o resultado anteriormente obtido Elizalde, Santos e Tort [21]. Poderíamos, como uma extensão desse trabalho, estudar o efeito de um campo magnético paralelo ou oblíquo às placas, ou mesmo a ação de um campo elétrico sobre as placas.

Já no capítulo 4, estudamos a influência de condições de contorno na lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg. Consideramos o mesmo sistema do capítulo anterior e, para a determinação da lagrangiana, utilizamos também o método de soma de modos. No entanto, mesmo que os cálculos dessa quantidade tenham muita semelhança com os realizados no capítulo anterior, a lagrangiana efetiva apresenta uma expressão distinta da energia de Casimir, uma vez que são quantidades distintas e, por isso, exigem processos de renormalização diferentes. A expressão final para essa lagrangiana efetiva também constitui um importante resultado nosso, uma vez que ela pode ser utilizada para descrever processos lineares e não-lineares no campo

magnético. No entanto, concentramo-nos apenas nos resultados lineares, dos quais extraímos a permeabilidade magnética (μ_{zz}) do vácuo confinado entre duas placas paralelas. Esse é um resultado interessante que apresenta um valor consideravelmente maior, na escala de nm e μm , do que aquele para condições de contorno antiperiódicas [27]. Extensões desse trabalho seriam as mesmas propostas no capítulo anterior, mas ao invés de determinarmos a energia de Casimir, determinaríamos as demais componentes do tensor de permeabilidade magnética e também as componentes do tensor de permissividade elétrica. Um outro seguimento interessante desse trabalho seria calcular a lagrangiana efetiva, que obtivemos pelo método da soma de modos, usando outros métodos de cálculo, como por exemplo o método de Schwinger, o método da função zeta ou o método da regularização analítica proposto por Elizalde, Santos e Tort para o cálculo do efeito Casimir [20, 21].

Por fim, estudamos, no capítulo 5, o fenômeno da criação de pares elétron-pósitron, a partir do vácuo fermiônico, pela presença de um campo elétrico suficientemente intenso. Diferentemente do exposto na literatura, abordamos o tema sob vários aspectos, determinando diversas grandezas que caracterizam esse sistema. Nesse capítulo apresentamos então diversos resultados novos: determinamos (a) as densidades de elétrons e de pósitrons originados a partir do vácuo, as quais se demonstraram grandezas homogêneas no espaço, devido à uniformidade do campo elétrico aplicado; (b) as correntes de elétrons e de pósitrons, as quais se demonstraram homogêneas, paralelas ao campo elétrico, porém opostas entre si, devido à ação contrária do campo; (c) as taxas de criação de elétrons e de pósitrons, as quais, além de homogêneas, apresentaram o mesmo valor, devido à conservação da carga; (d) as distribuições espectrais de elétrons e de pósitrons, cujo comportamento foi cuidadosamente analisado, e que se apresentaram simétricas, devido à ação contrária do campo; (e) as probabilidades de criação de n pares, as quais, em determinado regime, se aproximavam de uma distribuição poissoniana; (f) a taxa de

criação de pares relacionada à probabilidade do vácuo persistir como vácuo, a qual coincidiu, consistentemente, com os resultados da literatura; (g) os estados no qual o sistema colapsa após uma medida do número de elétrons ou de pósitrons; (h) o estado em que o vácuo se encontra durante a interação com o campo elétrico e, por fim, (i) as funções de estado que descrevem os n pares elétron-pósitron formados, que demonstram que elétrons e pósitrons são criados com momentos opostos, carregam a antissimetria devida à partículas fermiônicas idênticas e que contêm todas as correlações de momento entre as partículas formadas. Finalmente, analisamos a influência de condição de contorno na criação de pares, estudando de que forma uma condição de contorno antiperiódica no campo elétrico se reflete na taxa de criação de pares. Concluímos que, nesse caso, a condição de contorno reduz a taxa de criação. Como extensões desse trabalho, poderíamos estudar a influência de uma condição de contorno confinante, como a do modelo de sacola MIT, sobre a taxa de criação de pares. Além disso, mesmo na ausência de condição de contorno, seria interessante obter a parte real da lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg para campo elétrico uniforme e magnético nulo, a qual deriva da fase da amplitude de persistência do vácuo, e verificar que, no limite assintótico, essa quantidade reproduz os resultados da literatura. Seria também interessante determinar, na presença ou não de condição de contorno, funções de correlação do campo de matéria, isto é, o valor esperado no vácuo do produto de grandezas avaliadas em pontos distintos do espaço de posição ou de momento.

Apêndice A

Autofunções do campo fermiônico confinado

Queremos estudar o problema do campo fermiônico confinado entre duas placas paralelas distantes de a entre si, isto é, queremos analisar o espectro de energia e o conjunto completo de números quânticos que caracterizam cada modo normal do campo confinado. Para isso devemos então diagonalizar o operador de Dirac (2.44), isto é, encontrar seus autovalores e autofunções sob as condições de contorno MIT (2.62) e (2.63). A tentativa mais simples para essas autofunções são ondas planas,

$$\Psi(\vec{p}; \vec{r}) = \xi(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}. \quad (\text{A.1})$$

Para que (A.1) seja solução de (2.49), vemos que $\xi(\vec{p})$ deve satisfazer a equação espinorial

$$(\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + m\beta) \xi(\vec{p}) = \omega \xi(\vec{p}). \quad (\text{A.2})$$

O espinor $\xi(\vec{p})$ é uma matriz 4×1 ou um quadriespinor, que pode ser repartido em duas matrizes 2×1 ou biespinores, $\varphi(\vec{p})$ e $\chi(\vec{p})$,

$$\xi(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{p}) \\ \chi(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Com a forma explícita das matrizes de Dirac, equação (2.45), obtemos a equação de autovalores e autovetores

$$\begin{pmatrix} m\mathbf{1} & \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -m\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{p}) \\ \chi(\vec{p}) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \varphi(\vec{p}) \\ \chi(\vec{p}) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

O autovalor ω é obtido então da equação secular

$$\det \begin{pmatrix} (\omega - m)\mathbf{1} & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} & (\omega + m)\mathbf{1} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{A.5})$$

que se reduz a

$$(\omega^2 - m^2 - \vec{p}^2)^2 = 0. \quad (\text{A.6})$$

Assim os autovalores são simétricos e duplamente degenerados,

$$\omega = \pm \omega(\vec{p}), \quad (\text{A.7})$$

com

$$\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (\text{A.8})$$

Retornando (A.7) em (A.4) teremos a equação de autovetores

$$\begin{pmatrix} (\pm\omega(\vec{p}) - m)\mathbf{1} & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} & (\pm\omega(\vec{p}) + m)\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\pm}(\vec{p}) \\ \chi_{\pm}(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.9})$$

A matriz vetorial de Pauli possui a propriedade

$$\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \vec{b} \cdot \vec{\sigma} = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbf{1} + i \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{\sigma}. \quad (\text{A.10})$$

Fazendo $\vec{a} = \vec{b} = \vec{p}$ em (A.10), teremos

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2 \mathbf{1}. \quad (\text{A.11})$$

Multiplicando a equação biespinorial superior de (A.9) por $\vec{p} \cdot \vec{\sigma}$ e utilizando (A.11), obteremos a equação inferior de (A.9), mostrando que são linearmente dependentes.

Assim, para as soluções de autovalor positivo, $\omega = +\omega(\vec{p})$, utilizaremos apenas a inferior,

$$\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \varphi_+(\vec{p}) = (\omega(\vec{p}) + m) \chi_+(\vec{p}). \quad (\text{A.12})$$

Esta equação tem por solução geral

$$\begin{aligned} \varphi_+(\vec{p}) &= (\omega(\vec{p}) + m) C_+(\vec{p}), \\ \chi_+(\vec{p}) &= \vec{p} \cdot \vec{\sigma} C_+(\vec{p}), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde $C_+(\vec{p})$ é um biespinor arbitrário. Substituindo (A.13) em (A.3) e o resultado em (A.1), ficaremos com

$$\Psi^+(\vec{p}; \vec{r}) = \begin{pmatrix} (\omega(\vec{p}) + m) C_+(\vec{p}) \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} C_+(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}. \quad (\text{A.14})$$

As soluções de autovalor negativo, $\omega = -\omega(\vec{p})$, são obtidas semelhantemente,

$$\Psi^-(\vec{p}; \vec{r}) = \begin{pmatrix} -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} C_-(\vec{p}) \\ (\omega(\vec{p}) + m) C_-(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}. \quad (\text{A.15})$$

Assim (A.14) e (A.15) são autofunções do operador de Dirac com autovalores $\omega = +\omega(\vec{p})$ e $\omega = -\omega(\vec{p})$, respectivamente, porém não obedecem a nenhuma condição de contorno específica. Queremos impor as condições de contorno (2.62) e (2.63). Fazemos uma análise para as soluções de autovalor positivo pois as de autovalor negativo serão semelhantes. Tentemos impor (2.62) e (2.63) em (A.14). Com (2.62) e (2.60) em (A.14), teremos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} \\ i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\omega(\vec{p}) + m) C_+(\vec{p}) \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} C_+(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \Big|_{z=0} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Com (2.63) e (2.60) em (A.14) teremos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} \\ -i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\omega(\vec{p}) + m) C_+(\vec{p}) \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} C_+(\vec{p}) \end{pmatrix} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \Big|_{z=a} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Eliminando os fatores de fase em (A.16) e (A.17) e somando-as obtemos

$$\begin{pmatrix} (\omega(\vec{p}) + m)C_+(\vec{p}) \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma}C_+(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{A.18})$$

o que nos gera a solução trivial não desejada $\Psi^+(\vec{p}; \vec{r}) = 0$. Tentemos então uma superposição de duas soluções da forma (A.14), ou seja, de mesmo autovalor $\omega = +\omega(\vec{p})$, porém uma com momento linear $\vec{p} = p\hat{z} + \vec{k}$ e outra com $\vec{p} = -p\hat{z} + \vec{k}$, sendo \vec{k} a componente do momento paralela às placas, $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$. Repartindo também o vetor posição em componentes perpendicular e paralela às placas, $\vec{r} = z\hat{z} + \vec{\rho}$, com $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$, teremos

$$\begin{aligned} \Psi^+(p, \vec{k}; z, \vec{\rho}) &= \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{k}) + m)A(p, \vec{k}) \\ (p\hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}A(p, \vec{k}) \end{pmatrix} e^{i(pz + \vec{k} \cdot \vec{\rho})} \\ &+ \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{k}) + m)B(p, \vec{k}) \\ (-p\hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}B(p, \vec{k}) \end{pmatrix} e^{i(-pz + \vec{k} \cdot \vec{\rho})}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

onde

$$\omega(p, \vec{k}) = \sqrt{p^2 + \vec{k}^2 + m^2}. \quad (\text{A.20})$$

Vamos impor a condição (2.62) em (A.19),

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} \\ i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{k}) + m)A(p, \vec{k}) \\ (p\hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}A(p, \vec{k}) \end{pmatrix} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} \\ i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{k}) + m)B(p, \vec{k}) \\ (-p\hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}B(p, \vec{k}) \end{pmatrix} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A propriedade (A.10) fornece

$$(\hat{z} \cdot \vec{\sigma})^2 = \mathbf{1} \quad e \quad \hat{z} \cdot \vec{\sigma} \vec{k} \cdot \vec{\sigma} = i\hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma}. \quad (\text{A.22})$$

Semelhante ao ocorrido em (A.9), uma multiplicação por $\hat{z} \cdot \vec{\sigma}$ mostra que as equações superior e inferior de (A.21) são linearmente dependentes. Assim utilizando somente a superior, encontramos

$$M(-p, \vec{k})A(p, \vec{k}) + M(p, \vec{k})B(p, \vec{k}) = 0, \quad (\text{A.23})$$

onde

$$M(p, \vec{k}) = (\omega(p, \vec{k}) + m + ip)\mathbf{1} + \hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma}. \quad (\text{A.24})$$

Como $M(p, \vec{k})$ e $M(-p, \vec{k})$ comutam, a solução geral de (A.23) é dada por

$$\begin{aligned} A(p, \vec{k}) &= M(p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \\ B(p, \vec{k}) &= -M(-p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

onde $\phi(p, \vec{k})$ é um biespinor arbitrário. A substituição de (A.25) em (A.19) fornece

$$\begin{aligned} \Psi^+(p, \vec{k}; z, \vec{\rho}) &= \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{k}) + m)M(p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \\ (p\hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}M(p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \end{pmatrix} e^{ipz} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi} \\ &- \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{k}) + m)M(-p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \\ (-p\hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}M(-p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \end{pmatrix} e^{-ipz} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

onde inserimos o fator $(2\pi)^{-1}$ por conveniência. Impondo agora a condição (2.63) em (A.26), obteremos

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathbf{1} & i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} \\ -i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{k}) + m)M(p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \\ (p\hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}M(p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \end{pmatrix} e^{ipa} \\ &- \begin{pmatrix} \mathbf{1} & i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} \\ -i\hat{z} \cdot \vec{\sigma} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\omega(p, \vec{k}) + m)M(-p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \\ (-p\hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma}M(-p, \vec{k})\phi(p, \vec{k}) \end{pmatrix} e^{-ipa} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Novamente as equações superior e inferior de (A.27) são linearmente dependentes.

A superior nos dará

$$M(p, -\vec{k})M(p, \vec{k})\phi(p, \vec{k})e^{ipa} - M(-p, -\vec{k})M(-p, \vec{k})\phi(p, \vec{k})e^{-ipa} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Utilizando-se a propriedade (A.10) com $\vec{a} = \vec{b} = \hat{z} \times \vec{k}$, obteremos

$$(\hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = (\hat{z} \times \vec{k})^2 \mathbf{1} = \vec{k}^2 \mathbf{1}. \quad (\text{A.29})$$

Com isso (A.28) se reescreve como

$$\{ [(\omega(p, \vec{k}) + m + ip)^2 - \vec{k}^2] e^{ipa} - [(\omega(p, \vec{k}) + m - ip)^2 - \vec{k}^2] e^{-ipa} \} \phi(p, \vec{k}) = 0. \quad (\text{A.30})$$

A solução $\phi(p, \vec{k}) = 0$ gera apenas a solução trivial $\Psi^+(p, \vec{k}; z, \vec{\rho}) = 0$ e portanto deve ser descartada. Substituindo (A.20) em (A.30), ficamos com

$$(m + ip)e^{ipa} - (m - ip)e^{-ipa} = 0, \quad (\text{A.31})$$

ou ainda $m \sin pa + p \cos pa = 0$. As soluções dessa equação formam um espectro discreto de forma que ela fica melhor escrita como

$$ma \sin p_l a + p_l a \cos p_l a = 0, \quad (\text{A.32})$$

onde p_l , $l = 1, 2, 3, \dots$, indica a l -ésima raiz positiva em ordem crescente.

Voltemos agora ao problema de Dirac e resolvamos o último passo, a normalização da função de onda. Queremos impor que

$$\int d^2 \rho \int_0^a dz \Psi^+(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho})^\dagger \Psi^+(p_l, \vec{k}'; z, \vec{\rho}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.33})$$

Substituindo (A.26) em (A.33), usando a identidade

$$\int d^2 \rho \left(\frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi} \right)^* \frac{e^{i\vec{k}' \cdot \vec{\rho}}}{2\pi} = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{A.34})$$

e a propriedade $M^\dagger(p_l, \vec{k}) = M(-p_l, \vec{k})$, teremos após uma série de cálculos que o bispinor $\phi(p_l, \vec{k})$ deve satisfazer a equação

$$\phi^\dagger(p_l, \vec{k}) N(p_l, \vec{k}) \phi(p_l, \vec{k}) = 1, \quad (\text{A.35})$$

onde definimos

$$\begin{aligned} N(p_l, \vec{k}) &:= 2a [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 + p_l^2 + \vec{k}^2] M(p_l, \vec{k}) M(-p_l, \vec{k}) \\ &- \frac{\sin p_l a}{p_l} e^{ip_l a} \{ [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 - p_l^2 + \vec{k}^2] \mathbf{1} - i2p_l \hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \} M^2(p_l, \vec{k}) \\ &- \frac{\sin p_l a}{p_l} e^{-ip_l a} \{ [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 - p_l^2 + \vec{k}^2] \mathbf{1} + i2p_l \hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \} M^2(-p_l, \vec{k}). \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

A fim de resolver (A.35) procuremos os autovalores e autovetores de $N(p_l, \vec{k})$. Observando (A.24) e (A.36) vemos que o único operador distinto da identidade presente em $N(p_l, \vec{k})$ é $\hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma}$, de forma que os autovetores desse último operador serão também autovetores do primeiro. Definindo as componentes $k_{\pm} := (\hat{x} \pm i\hat{y}) \cdot \vec{k}$, podemos escrever

$$\hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -ik_- \\ ik_+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Resolvendo a equação de autovalores e autovetores para (A.37), teremos

$$\hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) = s |\vec{k}| u_s(\vec{k}) \quad , \quad s = \pm 1, \quad (\text{A.38})$$

onde $u_s(\vec{k})$ são os autovetores

$$u_+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \begin{pmatrix} |\vec{k}| \\ ik_+ \end{pmatrix} \quad , \quad u_-(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{k}|} \begin{pmatrix} ik_- \\ |\vec{k}| \end{pmatrix}, \quad (\text{A.39})$$

os quais são ortonormalizados,

$$u_s^\dagger(\vec{k}) u_{s'}(\vec{k}) = \delta_{s,s'}. \quad (\text{A.40})$$

Os autovalores de $N(p_l, \vec{k})$ serão então obtidos via (A.38), ou seja, trocando-se $\hat{z} \times \vec{k} \cdot \vec{\sigma}$ por seu autovalor $s |\vec{k}|$. Assim

$$N(p_l, \vec{k}) u_s(\vec{k}) = n_s(p_l, \vec{k}) u_s(\vec{k}), \quad (\text{A.41})$$

onde definimos

$$\begin{aligned} n_s(p_l, \vec{k}) &:= 2a [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 + p_l^2 + \vec{k}^2] m_s(p_l, \vec{k}) m_s(-p_l, \vec{k}) \\ &- \frac{\text{sen } p_l a}{p_l} e^{ip_l a} [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 - p_l^2 + \vec{k}^2 - i2 s p_l |\vec{k}|] m_s^2(p_l, \vec{k}) \\ &- \frac{\text{sen } p_l a}{p_l} e^{-ip_l a} [(\omega(p_l, \vec{k}) + m)^2 - p_l^2 + \vec{k}^2 + i2 s p_l |\vec{k}|] m_s^2(-p_l, \vec{k}). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$m_s(p_l, \vec{k})$ são os autovalores de $M(p_l, \vec{k})$,

$$M(p_l, \vec{k}) u_s(\vec{k}) = m_s(p_l, \vec{k}) u_s(\vec{k}), \quad (\text{A.43})$$

ou seja,

$$m_s(p_l, \vec{k}) := \omega(p_l, \vec{k}) + m + ip_l + s |\vec{k}|. \quad (\text{A.44})$$

Usando (A.40) e (A.41) concluimos que

$$\frac{u_s^\dagger(\vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} N(p_l, \vec{k}) \frac{u_{s'}(\vec{k})}{\sqrt{n_{s'}(p_l, \vec{k})}} = \delta_{s,s'}, \quad (\text{A.45})$$

de forma que para $s' = s$ temos soluções para (A.35),

$$\phi_s(p_l, \vec{k}) = \frac{u_s(\vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}}, \quad s = \pm 1. \quad (\text{A.46})$$

Substituindo (A.46) em (A.26) e usando (A.43), teremos as funções

$$\begin{aligned} \Psi_s^+(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) &= \frac{m_s(p_l, \vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} \begin{pmatrix} (\omega(p_l, \vec{k}) + m) u_s(\vec{k}) \\ (p_l \hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{ip_l z} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi} \\ &- \frac{m_s(-p_l, \vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} \begin{pmatrix} (\omega(p_l, \vec{k}) + m) u_s(\vec{k}) \\ (-p_l \hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{-ip_l z} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Analogamente podemos determinar as soluções de autovalor negativo. Elas serão da forma

$$\begin{aligned} \Psi_s^-(p_l, \vec{k}; z, \vec{\rho}) &= \frac{m_s(p_l, \vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} \begin{pmatrix} -(p_l \hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) \\ (\omega(p_l, \vec{k}) + m) u_s(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{ip_l z} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi} \\ &- \frac{m_s(-p_l, \vec{k})}{\sqrt{n_s(p_l, \vec{k})}} \begin{pmatrix} -(-p_l \hat{z} + \vec{k}) \cdot \vec{\sigma} u_s(\vec{k}) \\ (\omega(p_l, \vec{k}) + m) u_s(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{-ip_l z} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Apêndice B

Cálculo da integral de contorno

(2.99)

Na seção 2.7.2 nos deparamos com o problema de somar sobre o número quântico p_l , o qual não possui forma analítica. Dessa forma foi necessário recorrer ao teorema do argumento que transformava o somatório sobre p_l em uma integral no plano complexo,

$$\sum_{l=1}^N e^{-\lambda\sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz e^{-\lambda\sqrt{z^2 + u^2}} \frac{d}{dz} \ln f(maz), \quad (\text{B.1})$$

onde

$$f(maz) = ma \operatorname{sen}(maz) + (maz) \cos(maz). \quad (\text{B.2})$$

Várias considerações devem ser feitas a respeito da integral acima: primeiramente devemos estender analiticamente a função real $\sqrt{x^2 + u^2}$ sobre o plano complexo, a fim de obter a função complexa $\sqrt{z^2 + u^2}$, presente no lado direito da equação (B.1). Faremos isso adotando $\sqrt{z^2 + u^2}$ como a composta da extensão \sqrt{z} com $z^2 + u^2$. Para \sqrt{z} adotaremos a linha de ramificação como o eixo real negativo de seu argumento. Quanto ao ramo da função plurívoca \sqrt{z} , por se tratar de uma extensão analítica, somos obrigados a escolher aquele que tenha a mesma imagem

da função real \sqrt{x} para pontos do eixo real positivo. Dessa forma a extensão fica totalmente determinada por

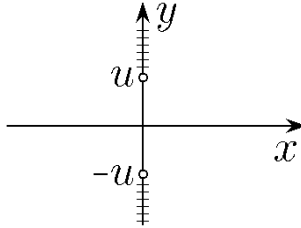
$$\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|z| + z}{\sqrt{|z| + \operatorname{Re}(z)}} \quad , \quad \operatorname{Re}(z) \neq -|z|. \quad (\text{B.3})$$

Na forma cartesiana a equação (B.3) escreve-se como

$$\sqrt{x + iy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}, \quad (\text{B.4})$$

onde nota-se sua indefinição em $y = 0$ e $x \leq 0$, como esperado pela ramificação. No caso da extensão $\sqrt{z^2 + u^2}$, por ser uma função composta, suas ramificações serão definidas quando o argumento da função raiz, $z^2 + u^2$, for um número real negativo,

$$\begin{cases} x = 0, \\ y \geq u, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y \leq -u. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$



Interessante também notar que, devido à equação (B.3), a extensão \sqrt{z} obedece à desigualdade

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2}} > 0. \quad (\text{B.6})$$

A equação (B.6) vale para todo o domínio de \sqrt{z} , isto é, em todo o plano complexo excluindo a ramificação. Assim a desigualdade também valerá na composta,

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z^2 + u^2}) > 0. \quad (\text{B.7})$$

Na expressão (B.1) há o aparecimento da função $e^{-\lambda\sqrt{z^2 + u^2}}$. Seu módulo será dado por

$$|e^{-\lambda\sqrt{z^2 + u^2}}| = e^{-\lambda\operatorname{Re}(\sqrt{z^2 + u^2})}. \quad (\text{B.8})$$

Das equações (B.7) e (B.8), temos

$$|e^{-\lambda\sqrt{z^2 + q^2}}| < 1. \quad (\text{B.9})$$

Novamente isso ocorrerá para todos os pontos do plano complexo excluindo as ramificações (B.5). Isso nos traz certo conforto na integração de (B.1), deixando-nos a preocupação apenas com a função

$$\frac{d}{dz} \ln f(maz) = ma \frac{f'(maz)}{f(maz)}. \quad (\text{B.10})$$

Vamos escolher o contorno C que evite as ramificações e os zeros indesejados, no caso p_l com $l = 0, -1, -2, \dots$. Restringiremos assim C ao semiplano $\text{Re}(z) > 0$. A fim de conter a primeira raiz, p_1 , que devido à (A1.56) encontra-se no intervalo $\pi/2a < p_1 < \pi/a$, C deve cortar o eixo real positivo em $z = \delta$ onde $0 < \delta < \pi/2a$. Para englobar N raízes, C deve novamente cortar o eixo real entre p_N e p_{N+1} . Como queremos muitas raízes, trabalharemos no regime $N \rightarrow \infty$ de forma que, usando (A1.57), teremos $p_N \cong (N - 1/2)\pi/a$ e $p_{N+1} \cong (N + 1/2)\pi/a$.

Cortar muito próximo a uma das raízes significa integrar muito próximo a um polo da função (A4.17). A fim de evitarmos isso, faremos a interseção de C com o eixo real ocorrer exatamente em $N\pi/a$, o que é aproximadamente a média das raízes p_N e p_{N+1} , visto (A4.19). Proponhamos então para C a forma dada na figura B.1.

Com isso (A4.3) escrever-se-á como

$$\sum_{l=1}^N e^{-\lambda\sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} = (I) + (II) + (III) + (IV), \quad (\text{B.11})$$

onde

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta}^{-\Delta} dy i e^{-\lambda\sqrt{(\delta + iy)^2 + u^2}} \frac{1}{i} \frac{d}{dy} \ln f(ma(\delta + iy)), \\ (II) &= \frac{ma}{2\pi i} \int_{\delta}^{N\pi/ma} dx e^{-\lambda\sqrt{(x - i\Delta)^2 + u^2}} \frac{f'(ma(x - i\Delta))}{f(ma(x - i\Delta))}, \\ (III) &= \frac{ma}{2\pi i} \int_{-\Delta}^{\Delta} dy i e^{-\lambda\sqrt{(N\pi/ma + iy)^2 + u^2}} \frac{f'(N\pi + imay)}{f(N\pi + imay)}, \\ (IV) &= \frac{ma}{2\pi i} \int_{N\pi/ma}^{\delta} dx e^{-\lambda\sqrt{(x + i\Delta)^2 + u^2}} \frac{f'(ma(x + i\Delta))}{f(ma(x + i\Delta))}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

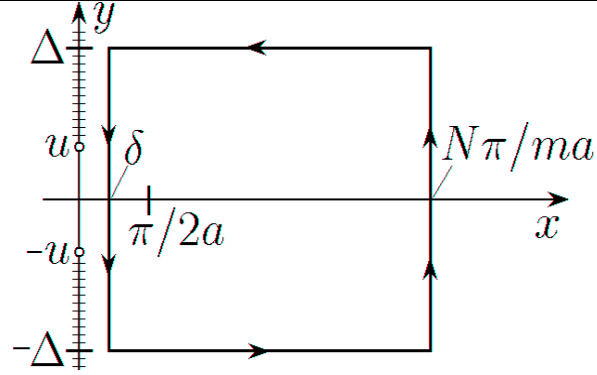


Figura B.1: Contorno C.

Analisemos

$$\frac{f'(maz)}{f(maz)} = \frac{-maz \operatorname{sen}(maz) + (ma + 1) \cos(maz)}{ma \operatorname{sen}(maz) + maz \cos(maz)}, \quad (\text{B.13})$$

nas integrais (II) e (IV). Substituindo-se $z = x \pm i\Delta$ nessa expressão, usando as identidades

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x \pm iy) &= \operatorname{sen} x \cosh y \pm i \cos x \operatorname{senh} y, \\ \cos(x \pm iy) &= \cos x \cosh y \mp i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

e dividindo-se numerador e denominador por $ma(x \pm i\Delta) \operatorname{cosh}(ma\Delta)$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{f'(ma(x \pm i\Delta))}{f(ma(x \pm i\Delta))} &= \\ \frac{\frac{ma + 1}{ma} \frac{\cos(max) \mp i \operatorname{sen}(max) \operatorname{tgh}(ma\Delta)}{x + i\Delta} - \operatorname{sen}(max) \mp i \cos(max) \operatorname{tgh}(ma\Delta)}{\frac{\operatorname{sen}(max) \pm i \cos(max) \operatorname{tgh}(ma\Delta)}{x + i\Delta} + \cos(max) \mp i \operatorname{sen}(max) \operatorname{tgh}(ma\Delta)}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

No limite $\Delta \rightarrow \infty$ teremos

$$\frac{f'(ma(x \pm i\Delta))}{f(ma(x \pm i\Delta))} \rightarrow \mp i \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{ma\sqrt{x^2 + \Delta^2}}\right) \right), \quad (\text{B.16})$$

de forma que nesse caso a função (A4.17) tem comportamento assintótico constante. Analisemos agora o comportamento da função $\sqrt{z^2 + u^2}$. Para $|z| \gg u$ e $Re(z) > 0$ podemos expandi-la como

$$\sqrt{z^2 + u^2} = z + \mathcal{O}\left(\frac{u^2}{|z|}\right). \quad (\text{B.17})$$

Para as integrais (II) e (IV) temos que $(\Delta \rightarrow \infty) |x \pm i\Delta| \gg u$ e portanto, usando (A4.25), ficamos com

$$\sqrt{(x \pm i\Delta)^2 + u^2} = x \pm i\Delta + \mathcal{O}\left(\frac{u^2}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}}\right), \quad (\text{B.18})$$

e por conseqüência

$$e^{-\lambda\sqrt{(x \pm i\Delta)^2 + u^2}} = e^{\mp i\lambda\Delta} e^{-\lambda x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda u^2}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}}\right)\right). \quad (\text{B.19})$$

(A4.24) aliado à (A4.27) permite-nos escrever

$$\begin{aligned} & \frac{ma}{2\pi i} \int_{\delta}^{N\pi/ma} dx e^{-\lambda\sqrt{(x \pm i\Delta)^2 + u^2}} \frac{f'(ma(x \pm i\Delta))}{f(ma(x \pm i\Delta))} \\ &= \mp \frac{ma}{2\pi} e^{\mp i\lambda\Delta} \int_{\delta}^{N\pi/ma} dx e^{-\lambda x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1/ma + \lambda u^2}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Com (A4.28) em (II) e (IV) de (A4.20) chegamos à conclusão que

$$(II) + (IV) = \frac{ma}{\pi} \cos(\lambda\Delta) \int_{\delta}^{N\pi/ma} dx e^{-\lambda x} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1/ma + \lambda u^2}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}}\right)\right). \quad (\text{B.21})$$

Podemos fazer $\Delta = (M + 1/2)\pi\lambda$ onde M é um inteiro tal que $M \rightarrow \infty$, de forma que $\cos(\lambda\Delta) = 0$ e assim nos livramos da contribuição (II) + (IV). Vamos proceder agora ao cálculo de (III). Usando (A4.21), (A4.22) e o fato de que $\sin(N\pi) = 0$, temos, dividindo numerador e denominador por $(N\pi + imay) \cosh(may)$, e tomando $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{f'(N\pi + imay)}{f(N\pi + imay)} &= \frac{-i \operatorname{tgh}(may) + (ma + 1)/(N\pi + imay)}{1 + i \operatorname{tgh}(may) ma/(N\pi + imay)} \\ &= -i \operatorname{tgh}(may) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N^2\pi^2 + m^2 a^2 y^2}}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

(A4.25) nos fornece que

$$\sqrt{(N\pi/ma + iy)^2 + u^2} = N\pi/ma + iy + \mathcal{O}\left(\frac{mau^2}{\sqrt{N^2\pi^2 + m^2a^2y^2}}\right), \quad (\text{B.23})$$

de forma que

$$e^{-\lambda\sqrt{(N\pi/ma + iy)^2 + u^2}} = e^{-\lambda N\pi/ma} e^{-i\lambda y} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda mau^2}{\sqrt{N^2\pi^2 + m^2a^2y^2}}\right)\right). \quad (\text{B.24})$$

(III) de (A4.20), (A4.32) e (A4.34) permitem-nos escrever, no limite $\Delta \rightarrow \infty$

$$(III) = -\frac{ima}{2\pi} e^{-\lambda N\pi/ma} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\lambda y} \operatorname{tgh}(may) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N^2\pi^2 + m^2a^2y^2}}\right)\right). \quad (\text{B.25})$$

Pode-se mostrar que a integral em y é finita de forma que a exponencial $e^{-\lambda N\pi/ma}$ deve anular, no limite $N \rightarrow \infty$, a contribuição (III).

De (A4.31) e (A4.36) concluímos que (A4.20) reduz-se, nos limites $\Delta \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$, à

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} = -\frac{1}{2\pi i} \int dy e^{-\lambda\sqrt{(\delta + iy)^2 + u^2}} \frac{d}{dy} \ln f(ma(\delta + iy)). \quad (\text{B.26})$$

Ou seja, resumimos C ao contorno aberto

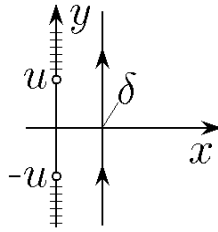


Figura B.2: Contorno simplificado.

Para o cálculo de (A4.37) podemos expandir

$$\frac{d}{dy} \ln f(ma(\delta + iy)) = \frac{d}{dy} \ln f(imay) + \mathcal{O}(\delta ma). \quad (\text{B.27})$$

Definindo a função

$$g(may) := -if(imay) = ma \sinh(may) + may \cosh(may), \quad (\text{B.28})$$

podemos escrever

$$\frac{d}{dy} \ln f(imay) = \frac{d}{dy} \ln g(may). \quad (\text{B.29})$$

Queremos agora analisar o comportamento, no limite $\delta \rightarrow 0$, de

$$\sqrt{(\delta + iy)^2 + u^2} = \sqrt{u^2 - y^2 + \delta^2 + i2\delta y}. \quad (\text{B.30})$$

Vemos que o radicando tem parte imaginária da ordem de δ e portanto muito menor que a parte real. Via (A4.7) teremos nesse limite

$$\sqrt{x + iy} \cong \begin{cases} \sqrt{x} + \mathcal{O}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) & , x > 0, \\ is(y)\sqrt{|x|} + \mathcal{O}\left(\frac{y}{\sqrt{|x|}}\right) & , x < 0, \end{cases} \quad , |x| \gg |y|, \quad (\text{B.31})$$

onde $s(y)$ é a função sinal de y . Com (A4.41) em (A4.42) ficamos com

$$\sqrt{(\delta + iy)^2 + u^2} \cong \begin{cases} \sqrt{u^2 - y^2} + \mathcal{O}(\delta) & , -u < y < u, \\ is(y)\sqrt{y^2 - u^2} + \mathcal{O}(\delta) & , y > u \text{ ou } y < -u. \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

Dividindo a integral de (A4.37) nas três regiões de (A4.43)

$$\int dy = \int_{-u}^u dy + \int_u^\infty dy + \int_{-\infty}^{-u} dy \quad (\text{B.33})$$

e adotando (A4.38) e (A4.40), teremos, quando $\delta \rightarrow 0$,

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} = -\frac{1}{2} e^{-\lambda u} + (i) + (ii) + (iii), \quad (\text{B.34})$$

onde

$$\begin{aligned} (i) &= -\frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-u}^u dy e^{-\lambda \sqrt{u^2 - y^2}} \frac{d}{dy} \ln g(may), \\ (ii) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_u^\infty dy e^{-i\lambda \sqrt{y^2 - u^2}} \frac{d}{dy} \ln g(may), \\ (iii) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-u} dy e^{+i\lambda \sqrt{y^2 - u^2}} \frac{d}{dy} \ln g(may). \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

\mathcal{P} significa o valor principal em $y = 0$ e o primeiro termo provém do semiresíduo nesse pólo.

De (A4.39) vemos que $g(may)$ é uma função ímpar, $g(-may) = -g(may)$, logo sua derivada será função par, $g'(-may) = g'(may)$. Dessa forma a função do integrando

$$\frac{d}{dy} \ln g(may) = ma \frac{g'(may)}{g(may)} \quad (\text{B.36})$$

será, de acordo com (A4.46) e (A.47), ímpar,

$$\frac{d}{dy} \ln g(may) \Big|_{y \rightarrow -y} = ma \frac{g'(-may)}{g(-may)} = -ma \frac{g'(may)}{g(may)} = - \frac{d}{dy} \ln g(may). \quad (\text{B.37})$$

Os integrandos em (i), (ii) e (iii) de (A4.45) serão então funções ímpar em y . Juntando isso ao fato de que os limites em (i) são simétricos, este termo torna-se nulo, $(i) = 0$.

A mudança de variável de integração em (iii), $y \rightarrow -y$, juntamente com sua paridade, fornece-nos

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\lambda \sqrt{p_l^2/m^2 + u^2}} = -\frac{1}{2} e^{-\lambda u} + \frac{1}{\pi} \int_u^{\infty} dy \operatorname{sen}(\lambda \sqrt{y^2 - u^2}) \frac{d}{dy} \ln g(may). \quad (\text{B.38})$$

Apêndice C

Dedução da equação (3.58)

Neste apêndice queremos deduzir a equação (3.58). Para isso substituiremos (3.14) na primeira equação de (3.22) e faremos a permutação de índices $n \rightarrow q$,

$$\left(\frac{s_-}{2} + \frac{\partial}{\partial s_+}\right) \phi_{q,n}(s_+, s_-) = \sqrt{q} \phi_{q-1,n}(s_+, s_-). \quad (\text{C.1})$$

Por outro lado, se substituirmos (3.19) na terceira equação de (3.22) e fizermos a troca de índice $q \rightarrow q + 1$, teremos

$$\left(\frac{s_-}{2} - \frac{\partial}{\partial s_+}\right) \phi_{n,q}(s_+, s_-) = \sqrt{q+1} \phi_{n,q+1}(s_+, s_-). \quad (\text{C.2})$$

Multiplicando (C.1) por $\phi_{n,q}(s_+, s_-)$, (C.2) por $\phi_{q,n}(s_+, s_-)$, e subtraindo os resultados, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_+}(\phi_{q,n}(s_+, s_-) \phi_{n,q}(s_+, s_-)) &= \sqrt{q} \phi_{q-1,n}(s_+, s_-) \phi_{n,q}(s_+, s_-) \\ &- \sqrt{q+1} \phi_{q,n}(s_+, s_-) \phi_{n,q+1}(s_+, s_-). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Somando no índice $q = 0, 1, 2, \dots$ e utilizando a propriedade

$$\phi_{q,n}(s_+, s_-) = \phi_{n,q}(s_+, s_-)^*, \quad (\text{C.4})$$

teremos

$$\frac{\partial}{\partial s_+} \sum_{q=0}^{\infty} \phi_{n,q}(s_+, s_-)^* \phi_{n,q}(s_+, s_-)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q=0}^{\infty} \sqrt{q} \phi_{q-1,n}(s_+, s_-) \phi_{n,q}(s_+, s_-) \\
&\quad - \sum_{q=0}^{\infty} \sqrt{q+1} \phi_{q,n}(s_+, s_-) \phi_{n,q+1}(s_+, s_-). \quad (\text{C.5})
\end{aligned}$$

Realizando a troca de índice $q \rightarrow q - 1$ no último somatório, é fácil verificar que os somatórios do lado direito são idênticos e portanto se cancelam,

$$\frac{\partial}{\partial s_+} \sum_{q=0}^{\infty} \phi_{n,q}(s_+, s_-)^* \phi_{n,q}(s_+, s_-) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Analogamente podemos obter a equação

$$\frac{\partial}{\partial s_-} \sum_{q=0}^{\infty} \phi_{n,q}(s_+, s_-)^* \phi_{n,q}(s_+, s_-) = 0. \quad (\text{C.7})$$

As equações (C.6) e (C.7) mostram que o somatório não depende de s_+ e s_- , portanto pode ser avaliado em $s_+ = s_- = 0$,

$$\sum_{q=0}^{\infty} \phi_{n,q}(s_+, s_-)^* \phi_{n,q}(s_+, s_-) = \sum_{q=0}^{\infty} \phi_{n,q}(0, 0)^* \phi_{n,q}(0, 0). \quad (\text{C.8})$$

Se utilizarmos o valor da função $\phi_{n,q}(s_+, s_-)$ nesse ponto,

$$\phi_{n,q}(0, 0) = (-1)^n \delta_{n,q} \sqrt{\frac{eB}{2\pi}}, \quad (\text{C.9})$$

será fácil concluir a identidade (3.58),

$$\sum_{q=0}^{\infty} \phi_{n,q}(s_+, s_-)^* \phi_{n,q}(s_+, s_-) = \frac{eB}{2\pi}. \quad (\text{C.10})$$

Apêndice D

Altura do patamar da distribuição espectral

Queremos obter a expressão para a altura do patamar da distribuição espectral. Para isso utilizaremos a expressão

$$\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t) = \sum_{\epsilon=\pm} \phi^+(\eta, \nu)^\dagger \chi_\epsilon(\eta, \nu) \chi_\epsilon(\eta + \tau, \nu)^\dagger \phi^-(\eta + \tau, \nu), \quad (\text{D.1})$$

obtida da equação (5.64), onde

$$\eta = \frac{p}{\sqrt{eE}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\vec{q}^2 + m^2}{eE}}, \quad \tau = \sqrt{eE} t. \quad (\text{D.2})$$

Tomando o módulo quadrado dessa expressão e usando a identidade $(\phi^\dagger \chi)^* = \chi^\dagger \phi$ e a propriedade

$$\phi^\pm(\eta, \nu) \phi^\pm(\eta, \nu)^\dagger = \frac{\mathbf{1}}{2} \pm \frac{\eta \sigma_z - \nu \sigma_x}{2\sqrt{\eta^2 + \nu^2}}, \quad (\text{D.3})$$

onde

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

obteremos

$$|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\epsilon=\pm} \sum_{\epsilon'=\pm} \chi_\epsilon(\eta, \nu)^\dagger \left(\mathbf{1} + \frac{\eta \sigma_z - \nu \sigma_x}{\sqrt{\eta^2 + \nu^2}} \right) \chi_{\epsilon'}(\eta, \nu)$$

$$\times \chi_{\epsilon'}(\eta + \tau, \nu)^\dagger \left(\mathbf{1} - \frac{(\eta + \tau)\sigma_z - \nu\sigma_x}{\sqrt{(\eta + \tau)^2 + \nu^2}} \right) \chi_{\epsilon}(\eta + \tau, \nu). \quad (\text{D.5})$$

Essa expressão pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 &= \frac{1}{4} \text{tr} \left[D(\eta, \nu)^\dagger \left(\mathbf{1} + \frac{\eta\sigma_z - \nu\sigma_x}{\sqrt{\eta^2 + \nu^2}} \right) D(\eta, \nu) \right. \\ &\times \left. D(\eta + \tau, \nu)^\dagger \left(\mathbf{1} - \frac{(\eta + \tau)\sigma_z - \nu\sigma_x}{\sqrt{(\eta + \tau)^2 + \nu^2}} \right) D(\eta + \tau, \nu) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

onde

$$D(\eta, \nu) = \begin{pmatrix} f_+(\eta, \nu) & f_-(\eta, \nu) \\ g_+(\eta, \nu) & g_-(\eta, \nu) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

Usando o fato de que $D(\eta, \nu)$ é uma matriz unitária,

$$D(\eta, \nu)^\dagger D(\eta, \nu) = D(\eta, \nu) D(\eta, \nu)^\dagger = \mathbf{1}, \quad (\text{D.8})$$

é fácil concluir que

$$|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 = \frac{1}{4} [2 - \text{tr}(J(\eta, \nu)J(\eta + \tau, \nu))], \quad (\text{D.9})$$

onde

$$J(\eta, \nu) = D(\eta, \nu)^\dagger \frac{\eta\sigma_z - \nu\sigma_x}{\sqrt{\eta^2 + \nu^2}} D(\eta, \nu). \quad (\text{D.10})$$

Para determinarmos a altura do patamar, devemos primeiramente tomar o limite $t \rightarrow \infty$ na expressão (D.9), obtendo a distribuição $|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, \infty)|^2$, e posteriormente tomar o limite $p \rightarrow -\infty$, que nos conduzirá à expressão

$$|\Delta^{+-}(-\infty, \vec{q}, \infty)|^2 = \frac{1}{4} [2 - \text{tr}(J(-\infty, \nu)J(\infty, \nu))]. \quad (\text{D.11})$$

Devemos então obter, primeiramente, a forma assintótica das funções presentes na equação (D.7) quando $\eta \rightarrow \pm\infty$. Isso é feito por meio da forma assintótica da série confluyente,

$${}_1F_1(a, c; z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}, \quad (\text{D.12})$$

que nos fornece

$$\begin{aligned}
f_+(\eta, \nu) &\xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} A(\nu) e^{i\eta^2/2 + i\nu^2/2 \ln |\eta|}, \\
g_+(\eta, \nu) &\xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} \pm B(\nu) e^{-i\eta^2/2 - i\nu^2/2 \ln |\eta|}, \\
f_-(\eta, \nu) &\xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} \mp B(\nu)^* e^{i\eta^2/2 + i\nu^2/2 \ln |\eta|}, \\
g_-(\eta, \nu) &\xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} A(\nu)^* e^{-i\eta^2/2 - i\nu^2/2 \ln |\eta|},
\end{aligned} \tag{D.13}$$

onde

$$A(\nu) = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\pi\nu^2/8}}{\Gamma(1/2 + i\nu^2/4)}, \quad B(\nu) = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}\nu e^{-\pi\nu^2/8}}{2\Gamma(1 - i\nu^2/4)}. \tag{D.14}$$

Não é difícil obter, então, a forma assintótica de $J(\eta, \nu)$,

$$J(\pm\infty, \nu) = \begin{pmatrix} \pm(|A(\nu)|^2 - |B(\nu)|^2) & -2A(\nu)^*B(\nu)^* \\ -2A(\nu)B(\nu) & \mp(|A(\nu)|^2 - |B(\nu)|^2) \end{pmatrix}. \tag{D.15}$$

Substituindo essa expressão na equação (D.11), vemos que a altura do patamar depende apenas dos parâmetros $|A(\nu)|^2$ e de $|B(\nu)|^2$,

$$|\Delta^{+-}(-\infty, \vec{q}, \infty)|^2 = \frac{1 + (|A(\nu)|^2 - |B(\nu)|^2)^2 - 4|A(\nu)|^2|B(\nu)|^2}{2}. \tag{D.16}$$

Esses parâmetros podem ser facilmente determinados com o uso das as identidades

$$|\Gamma(1 - iy)|^2 = \frac{\pi y}{\sinh \pi y}, \quad |\Gamma(1/2 + iy)|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi y}, \tag{D.17}$$

resultando em

$$|A(\nu)|^2 = \frac{1 + e^{-\pi\nu^2/2}}{2}, \quad |B(\nu)|^2 = \frac{1 - e^{-\pi\nu^2/2}}{2}. \tag{D.18}$$

Com isso torna-se fácil verificar a expressão

$$|\Delta^{+-}(-\infty, \vec{q}, \infty)|^2 = e^{-\pi\nu^2}, \tag{D.19}$$

que, com a substituição da expressão (D.2), torna-se

$$|\Delta^{+-}(-\infty, \vec{q}, \infty)|^2 = e^{-\pi(\vec{q}^2 + m^2)/eE}. \tag{D.20}$$

Apêndice E

Evolução do estado de vácuo

Queremos, neste apêndice, deduzir a equação (5.101). Para isso devemos utilizar a equação

$$\{e^{i\hat{H}t}\hat{c}_r(p, \vec{q})e^{-i\hat{H}t}, e^{i\hat{H}t}\hat{c}_{r'}(p', \vec{q}')^\dagger e^{-i\hat{H}t}\} = \delta_{r,r'}\delta(p-p')\delta(\vec{q}-\vec{q}')\hat{1}, \quad (\text{E.1})$$

obtida pela inserção de exponenciais na primeira equação de (5.43). Então, substituindo a equação (5.63) e sua hermiteana conjugada nessa última expressão, obtemos

$$|\Delta^{++}(p, \vec{q}, t)|^2 + |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 = 1. \quad (\text{E.2})$$

De forma análoga, inserindo exponenciais na segunda e terceira equações de (5.43) e usando as equações (5.63) e (5.65), teremos

$$|\Delta^{-+}(p, \vec{q}, t)|^2 + |\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)|^2 = 1 \quad (\text{E.3})$$

e

$$\Delta^{-+}(p, \vec{q}, t)^* \Delta^{-+}(p, \vec{q}, t) + \Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)^* \Delta^{--}(p, \vec{q}, t) = 0. \quad (\text{E.4})$$

As equações (E.2), (E.3) e (E.4) permitem-nos então obter as equações

$$|\Delta^{-+}(p, \vec{q}, t)|^2 = |\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2, \quad (\text{E.5})$$

$$|\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)|^2 + |\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)|^2 = 1 \quad (\text{E.6})$$

e

$$\Delta^{++}(p, \vec{q}, t)^* \Delta^{+-}(p, \vec{q}, t) + \Delta^{-+}(p, \vec{q}, t)^* \Delta^{--}(p, \vec{q}, t) = 0. \quad (\text{E.7})$$

Com isso, combinando o hermitiano das equações (5.63) e (5.65) e usando as equações (E.7) e (E.6), obtemos a expressão

$$e^{i\hat{H}t} \left(\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t) \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger + \Delta^{--}(p, \vec{q}, t) \hat{d}_r(-p, -\vec{q}) \right) e^{-i\hat{H}t} = \hat{d}_r(-p - eEt, -\vec{q}). \quad (\text{E.8})$$

Multiplicando essa expressão por $|0\rangle$ à direita e por $e^{-i\hat{H}t}$ à esquerda, temos

$$\left(\hat{d}_r(-p, -\vec{q}) + \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger \right) e^{-i\hat{H}t} |0\rangle = 0. \quad (\text{E.9})$$

Por outro lado, combinando as equações (5.63) e (5.65), obtemos

$$\begin{aligned} & e^{i\hat{H}t} \left(\Delta^{--}(p, \vec{q}, t) \hat{c}_r(p, \vec{q}) - \Delta^{+-}(p, \vec{q}, t) \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger \right) e^{-i\hat{H}t} \\ &= \left(\Delta^{--}(p, \vec{q}, t) \Delta^{++}(p, \vec{q}, t) - \Delta^{+-}(p, \vec{q}, t) \Delta^{-+}(p, \vec{q}, t) \right) \hat{c}_r(p, \vec{q}), \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

donde podemos deduzir a equação

$$\left(\hat{c}_r(p, \vec{q}) - \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger \right) e^{-i\hat{H}t} |0\rangle = 0. \quad (\text{E.11})$$

Se então definirmos o operador

$$\hat{S}(t)^\dagger := \sum_{r=\pm} \int dp \int d^2q \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger, \quad (\text{E.12})$$

podemos reescrever os operadores entre parênteses das equações (E.9) e (E.11) na forma

$$\hat{c}_r(p, \vec{q}) - \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \hat{d}_r(-p, -\vec{q})^\dagger = e^{\hat{S}(t)^\dagger} \hat{c}_r(p, \vec{q}) e^{-\hat{S}(t)^\dagger}, \quad (\text{E.13})$$

$$\hat{d}_r(-p, -\vec{q}) + \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \hat{c}_r(p, \vec{q})^\dagger = e^{\hat{S}(t)^\dagger} \hat{d}_r(-p, -\vec{q}) e^{-\hat{S}(t)^\dagger}. \quad (\text{E.14})$$

Substituindo essas expressões nas devidas equações e multiplicando-as por $e^{-\hat{S}(t)^\dagger}$, teremos

$$\hat{c}_r(p, \vec{q}) e^{-\hat{S}(t)^\dagger} e^{-i\hat{H}t} |0\rangle = 0, \quad (\text{E.15})$$

$$\hat{d}_r(-p, -\vec{q})e^{-\hat{S}(t)^\dagger}e^{-i\hat{H}t}|0\rangle = 0. \quad (\text{E.16})$$

Essas expressões mostram que o estado $e^{-\hat{S}(t)^\dagger}e^{-i\hat{H}t}|0\rangle$ é aniquilado pelos operadores $\hat{c}_r(p, \vec{q})$ e $\hat{d}_r(-p, -\vec{q})$, de forma que esse estado deve ser proporcional ao estado de vácuo,

$$e^{-\hat{S}(t)^\dagger}e^{-i\hat{H}t}|0\rangle = N(t)|0\rangle. \quad (\text{E.17})$$

Para determinação do fator de proporcionalidade devemos utilizar o fato de que o superoperador $\hat{S}(t)^\dagger$ aniquila o estado de vácuo à esquerda,

$$\langle 0|\hat{S}(t)^\dagger = 0, \quad (\text{E.18})$$

o que nos permite deduzir a equação

$$\langle 0|e^{-\hat{S}(t)^\dagger} = \langle 0|. \quad (\text{E.19})$$

Então, se multiplicarmos a equação (E.17) por $\langle 0|$, obteremos

$$N(t) = \langle 0|e^{-i\hat{H}t}|0\rangle. \quad (\text{E.20})$$

Substituindo esse resultado na equação (E.17) e multiplicando-a por $e^{\hat{S}(t)^\dagger}$, obtemos

$$e^{-i\hat{H}t}|0\rangle = \langle 0|e^{-i\hat{H}t}|0\rangle e^{\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle. \quad (\text{E.21})$$

Apêndice F

Dedução da equação (5.110)

Queremos, neste apêndice, demonstrar a equação (5.110) do texto. Para isso devemos primeiramente derivar o termo $\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle &= \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{S}(t)e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle \\ &+ \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{S}(t)^\dagger e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Desenvolveremos apenas o primeiro termo do lado direito da expressão acima, já que o segundo termo é o seu complexo conjugado. Assim, substituindo o hermitiano conjugado do operador (5.102) nesse primeiro termo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{S}(t)e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle &= \sum_{r=\pm} \int dp \int d^2q \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)^*}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)^*} \\ &\times \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{d}_r(-p, -\vec{q})\hat{c}_r(p, \vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Para desenvolver esse termo, devemos inserir identidades da forma $e^{x\hat{S}(t)}e^{-x\hat{S}(t)} = \hat{1}$,

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{d}_r(-p, -\vec{q})\hat{c}_r(p, \vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle &= \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}(e^{-x\hat{S}(t)^\dagger}\hat{d}_r(-p, -\vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger}) \\ &\times (e^{-x\hat{S}(t)^\dagger}\hat{c}_r(p, \vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger})|0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

O cálculo dos termos entre parênteses é análogo àquele utilizado nas equações (5.63) e (5.65), resultando em

$$\begin{aligned} e^{-x\hat{S}(t)^\dagger}\hat{c}_r(p,\vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger} &= \hat{c}_r(p,\vec{q}) + x\frac{\Delta^{+-}(p,\vec{q},t)}{\Delta^{--}(p,\vec{q},t)}\hat{d}_r(-p,-\vec{q})^\dagger, \\ e^{-x\hat{S}(t)^\dagger}\hat{d}_r(-p,-\vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger} &= \hat{d}_r(-p,-\vec{q}) - x\frac{\Delta^{+-}(p,\vec{q},t)}{\Delta^{--}(p,\vec{q},t)}\hat{c}_r(p,\vec{q})^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Ao substituírmos essas expressões na equação anterior, devemos utilizar a equação

$$\hat{d}_r(-p,-\vec{q})\hat{d}_r(-p,-\vec{q})^\dagger|0\rangle = \delta(0)\delta(\vec{0})|0\rangle, \quad (\text{F.5})$$

onde $\delta(0)$ e $\delta(\vec{0})$ representam funções delta de Dirac de argumento nulo, $\delta(0) = \delta(p)|_{p=0}$, $\delta(\vec{0}) = \delta(\vec{q})|_{\vec{q}=\vec{0}}$. A representação em integral de Fourier da função delta fornece as expressões $\delta(0) = (2\pi)^{-1} \int dz$, $\delta(\vec{0}) = (2\pi)^{-2} \int d^2\rho$, de forma que podemos escrever $\delta(0)\delta(\vec{0}) = V/(2\pi)^3$, onde $V = \int dz \int d^2\rho$ é o volume do espaço sob a ação do campo elétrico. Com isso a expressão (F.3) adquire a forma

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{d}_r(-p,-\vec{q})\hat{c}_r(p,\vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle \\ = \frac{V}{(2\pi)^3}x\frac{\Delta^{+-}(p,\vec{q},t)}{\Delta^{--}(p,\vec{q},t)}\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle \\ - x^2\left(\frac{\Delta^{+-}(p,\vec{q},t)}{\Delta^{--}(p,\vec{q},t)}\right)^2\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{c}_r(p,\vec{q})^\dagger\hat{d}_r(-p,-\vec{q})^\dagger e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Tomando o complexo conjugado dessa equação, teremos

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{c}_r(p,\vec{q})^\dagger\hat{d}_r(-p,-\vec{q})^\dagger e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle \\ = \frac{V}{(2\pi)^3}x\frac{\Delta^{+-}(p,\vec{q},t)^*}{\Delta^{--}(p,\vec{q},t)^*}\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle \\ - x^2\left(\frac{\Delta^{+-}(p,\vec{q},t)^*}{\Delta^{--}(p,\vec{q},t)^*}\right)^2\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{d}_r(-p,-\vec{q})\hat{c}_r(p,\vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

As duas últimas equações permitem-nos escrever

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{x\hat{S}(t)}\hat{d}_r(-p,-\vec{q})\hat{c}_r(p,\vec{q})e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle \\ = \frac{V}{(2\pi)^3}x\frac{\Delta^{+-}(p,\vec{q},t)}{\Delta^{--}(p,\vec{q},t)}\frac{1}{1+x^2\left|\frac{\Delta^{+-}(p,\vec{q},t)}{\Delta^{--}(p,\vec{q},t)}\right|^2}\langle 0|e^{x\hat{S}(t)}e^{x\hat{S}(t)^\dagger}|0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

donde podemos deduzir a equação

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | e^{x\hat{S}(t)} \hat{S}(t) e^{x\hat{S}(t)^\dagger} | 0 \rangle \\
&= \frac{V}{(2\pi)^3} \int dp \int d^2q x \left| \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \right|^2 \frac{1}{1 + x^2 \left| \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \right|^2} \\
&\times \langle 0 | e^{x\hat{S}(t)} e^{x\hat{S}(t)^\dagger} | 0 \rangle. \tag{F.9}
\end{aligned}$$

Como o lado direito dessa equação é real, podemos concluir

$$\langle 0 | e^{x\hat{S}(t)} \hat{S}(t)^\dagger e^{x\hat{S}(t)^\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | e^{x\hat{S}(t)} \hat{S}(t) e^{x\hat{S}(t)^\dagger} | 0 \rangle. \tag{F.10}$$

Utilizando os dois últimos resultados na equação (F.1), nos deparamos com a equação diferencial

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \langle 0 | e^{x\hat{S}(t)} e^{x\hat{S}(t)^\dagger} | 0 \rangle \\
&= \frac{V}{2\pi^3} \int dp \int d^2q x \left| \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \right|^2 \frac{1}{1 + x^2 \left| \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \right|^2} \\
&\times \langle 0 | e^{x\hat{S}(t)} e^{x\hat{S}(t)^\dagger} | 0 \rangle, \tag{F.11}
\end{aligned}$$

a qual tem como solução a expressão

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | e^{x\hat{S}(t)} e^{x\hat{S}(t)^\dagger} | 0 \rangle \\
&= \exp \left[\frac{V}{4\pi^3} \int dp \int d^2q \ln \left(1 + x^2 \left| \frac{\Delta^{+-}(p, \vec{q}, t)}{\Delta^{--}(p, \vec{q}, t)} \right|^2 \right) \right]. \tag{F.12}
\end{aligned}$$

Utilizando então a equação (E.6), obtemos a equação (5.110) do texto.

Bibliografia

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. **51**, 793 (1948).
- [2] M. Y. Sparnaay, Physica **24**, 751 (1958).
- [3] S. K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [4] F. London, Z. Phys. **63**, 245 (1930).
- [5] A. Chodos e C. B. Thorn, Phys. Lett. B **53**, 359 (1974).
- [6] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn e V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974).
- [7] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson e C. B. Thorn, Phys. Rev. **D10**, 2599 (1974).
- [8] E. T. Whittaker e G. W. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (1963).
- [9] K. Johnson, Acta Phys. Pol. **B6**, 865 (1975).
- [10] C. M. Bender and P. Hays, Phys. Rev. D **14**, 2622 (1976).
- [11] S. G. Mamaev and N. N. Trunov, Sov. Phys. J **23**, 551 (1980).
- [12] P. A. M. Dirac, Theorie du Positron (Rapport du 7^e Conseil Solvay de Physique, Structure et Proprietés des Noyaux Atomiques), p. 203 (1934).

- [13] W. Heisenberg, Z. Phys. **90**, 209 (1935).
- [14] H. Euler e B. Kockel, Naturwissensch **23**, 246 (1935).
- [15] W. Heisenberg e H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
- [16] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [17] E. Zavattini *et all*, Phys. Rev. Lett. **96**, 110406 (2006).
- [18] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, A. C. Tort e J. Rafelski, Phys. Lett. B **434**, 388 (1998).
- [19] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina and A. C. Tort, Braz. J. Phys. **31**, 84 (2001).
- [20] E. Elizalde, F. C. Santos, and A. C. Tort, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 1761 (2003).
- [21] E. Elizalde, F. C. Santos, and A. C. Tort, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 7403 (2002).
- [22] L. Carvalho, R. M. Cavalcanti, M. V. Cougo-Pinto e C. Farina, J. Phys. A **39**, 10923 (2006).
- [23] K. Scharnhorst, Phys. Lett. B **236**, 354 (1990).
- [24] G. Barton, Phys. Lett. B **237**, 559 (1990).
- [25] G. Barton e K. Scharnhorst, J. Phys. A **26**, 2037 (1993).
- [26] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, Phys. Lett. B **446**, 170 (1998).
- [27] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. C. Santos e A. C. Tort, J. Phys. A **32**, 4463 (1998).

- [28] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, M. R. Negrão e A. C. Tort, Phys. Lett. B **483**, 144 (2000).
- [29] M. Delbrück, Z. Physik **84**, 144 (1933).
- [30] P. Papatzacos e K. Mork, Phys. Rep. **21**, 81 (1975).
- [31] S. Kahane e R. Moreh, Phys. Lett. **47B**, 351 (1973).
- [32] P. Rullhusen *et all*, Phys. Rev. **C27**, 559 (1983).
- [33] G. Jarlskog *et all*, Phys. Rev. **D8**, 3813 (1973).
- [34] J. S. Toll, *The Dispersion Relation for Light and its Application to Problems Involving Electron Pairs*, Ph.D. Thesis, Princeton (1952).
- [35] Z. Bialynicki-Birula e I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. D **2**, 2341 (1970).
- [36] S. L. Adler, Ann. Phys. (NY) **67**, 599 (1971).
- [37] E. Brezin e C. Itzykson, Phys. Rev. D **3**, 618 (1971).
- [38] J. S. Heyl e L. Hernquist, J. Phys. A **30**, 6485 (1997).
- [39] G. Cantatore, F. Della Valle, E. Milotti, L. Dabrowski e C. Rizzo, Phys. Lett. B **265**, 418 (1991).
- [40] D. Bakalov, F. Brandi, G. Cantatore *et all*, Quantum Semicl. Opt. **10**, 239 (1998).
- [41] K. Scharnhorst, *The Velocities of Lights in Modified QED Vacua*, hep-th/9810221 (1998).
- [42] W. E. Lamb, Jr. e R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [43] W. E. Lamb, Jr. e R. C. Retherford, Phys. Rev. **86**, 1014 (1952).

- [44] H. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
- [45] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press (1998).
- [46] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc., New York (1980).
- [47] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, New York (1994).
- [48] B. V. Deriagin and I. I. Abrikosova, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 993 (1956); **31**, 3 (1956). [English transl.: Sov. Phys. J **3**, 819 (1957).
- [49] A. Kitchener and A. P. Prosser, Proc. Roy. Soc. (London) A **242**, 403 (1957).
- [50] W. Black, J. G. V. de Jongh, J. T. G. Overbeck, and M. J. Sparnaay, Trans. Faraday Soc. **56**, 1597 (1960).
- [51] A. van Silfhout, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B **69**, 501 (1966).
- [52] D. Tabor and R. H. S. Winterton, Nature **219**, 1120 (1968).
- [53] B. V. Deriagin, Y. Abrikosova, and E. M. Lifshitz, Quart. Rev. **10**, 295 (1968).
- [54] D. Tabor and R. H. S. Winterton, Proc. Roy. Soc. (London) A **312**, 435 (1969).
- [55] R. H. S. Winterton, Contemp. Phys. **11**, 559 (1970).
- [56] J. N. Israelachvili and D. Tabor, Proc. Roy. Soc. (London) A **331**, 19 (1972).
- [57] U. Mohideen e A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1999).
- [58] A. Roy e U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).
- [59] A. Roy, C. Y. Lin e U. Mohideen, Phys. Rev. D **60**, 111101(R) (1999).

- [60] B. W. Harris, F. Chen e U. Mohideen, Phys. Rev. A **62**, 052109 (2000).
- [61] T. Ederth, Phys. Rev. A **62**, 062104 (2000).
- [62] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop e F. Capasso, Science **291**, 1941 (2001).
- [63] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop e F. Capasso, Phys. Rev. Lett. **87**, 211801 (2001).
- [64] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio e G. Ruoso, Phys. Rev. Lett. **88**, 041804 (2002).
- [65] K. Johnson, Sci. Am. **241**, 112 (1979).
- [66] G. Plunien, B. Müller e W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 89 (1986).
- [67] V. M. Mostepanenko e N. N. Trunov, *The Casimir effect and its applications*, Clarendon Press, Oxford (1997).
- [68] M. Bordag, U. Mohideen e V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
- [69] E. Elizalde e A. Romeo, Am. J. Phys. **59**, 711 (1991).
- [70] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bitsenko e S. Zerbini, *Zeta Regularization Technics with Applications*, World Scientific, Singapore (1994).
- [71] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina e A. C. Tort, Revista Brasileira de Física **22**, n^0 1 Março, 122 (2000).
- [72] P. W. Milonni e M. -L. Shih, Cont. Phys. **33**, 313 (1992).
- [73] K. Kirsten, *Spectral Functions in Mathematics and Physics*, Chapman & Hall, Dordrecht - Netherlands (2001).

- [74] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, Berlin (1996).
- [75] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics - wave equations*, Springer, Berlin (1997).
- [76] M. R. Negrão, *Vácuo confinado da eletrodinâmica quântica em campo magnético externo* (Tese de doutorado, UFRJ, 1999)
- [77] M. V. Cougo-Pinto, C. Farina, M. R. Negrão e A. C. Tort, J. Phys. A **32**, 4457 (1999)
- [78] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York (1970).
- [79] V. S. Weisskopf, K. Dan Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd. **14**, 166 (1936); reeditado J. Schwinger (Ed.), *Quantum Electrodynamics*, Dover, New York (1958).
- [80] W. Dittrich e M. Reuter, *Effective Lagrangian in Quantum Electrodynamics*, Springer, Berlin (1985).
- [81] J. Schwinger, Phys. Rev. **93**, 615 (1954).
- [82] N. Narozhnyĭ e A. Nikichov, Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 596 (1970).
- [83] M. Stone, Phys. Rev. D **14**, 3568 (1976).
- [84] A. I. Nikishov, Proc. P. N. Lebedev Phys. Inst. **111**, 153 (1979).
- [85] A. Balantekin, S. Fricke e P. Hatchell, Phys. Rev. D **38**, 935 (1988).
- [86] J. Cornwall e G. Tiktopoulos, Phys. Rev. D **39**, 334 (1989).
- [87] A. Balantekin, J. Seger e S. Fricke, Int. J. Mod. Phys. A **6**, 695 (1991).

- [88] E. S. Fradkin, D. M. Gitman e S. M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*, Springer, Berlin (1991).
- [89] A. Chodos, *Proceedings of the Gürsey Memorial Conference on Strings and Symmetries*, Istanbul, 1994, editado por G. Aktas *e t all*, Lecture Notes in Physics **447**, Springer (1995).
- [90] S. P. Gavrilov e D. M. Gitman, Phys. Rev. D **53**, 7162 (1996).
- [91] G. Dunne e T. Hall, Phys. Rev. D **58**, 105022 (1998).
- [92] B. R. Holstein, Am. J. Phys. **67**, 499 (1999).
- [93] E. Brezin e C. Itzykson, Phys. Rev. D **2**, 1191 (1970).
- [94] A. I. Nikishov, Sov. Phys. J **30**, 660 (1970).
- [95] I. V. Krive e S. M. Latinskiĭ, Phys. Rev. D **3**, 618 (1971).
- [96] W. Greiner, B. Müller e J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer, Berlin (1985).
- [97] W. Greiner e J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Springer, Berlin (1992).
- [98] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Books on Advanced Mathematics (1965).