



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Princípios Variacionais Aplicados ao Problema do Equilíbrio Hidrostático em Relatividade Geral

Yara de Souza Mello da Silva

Tese de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Takeshi Kodama

Coorientador: Carlos Zarro

Rio de Janeiro

Agosto de 2017

**Princípio Variacional Aplicado ao Problema do Equilíbrio
Hidrostático em Relatividade Geral**

Yara de Souza Mello da Silva

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física,
Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte
dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

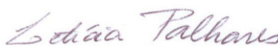
Aprovada por:



Takeshi Kodama
(Presidente e Orientador)



Carlos Augusto Domingues Zarro
(Co-Orientador)



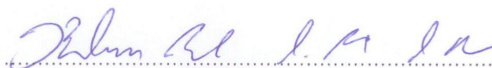
Letícia Faria Domingues Palhares



Marcelo Chiapparini



Eduardo Souza Fraga



Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

- S586p Silva, Yara de Souza Mello da
 Princípios Variacionais Aplicados ao Problema do
Equilíbrio Hidrostático em Relatividade Geral / Yara de Souza Mello
da Silva - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2017.
 xiv, 109f.
 Orientador: Takeshi Kodama
 Coorientador: Carlos Zarro
 Tese (mestrado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa
de Pós-graduação em Física, 2017.
 Referências Bibliográficas: f. 93-97.
 1. Relatividade geral. 2. Princípios variacionais. 3.
Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. 4. Soluções numéricas. 5.
Configurações em equilíbrio hidrostático. I. Kodama, Takeshi, orient.
II. Zarro, Carlos A. D., coorient. III. Universidade Federal do Rio de
Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física.
IV. Princípios Variacionais Aplicados ao Problema do Equilíbrio Hi-
drostático em Relatividade Geral.

Resumo

Princípios Variacionais Aplicados ao Problema do Equilíbrio Hidrostático em Relatividade Geral

Yara de Souza Mello da Silva

Orientador: Takeshi Kodama

Coorientador: Carlos Zarro

Resumo da Tese de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Neste trabalho apresentamos a solução numérica para o equilíbrio hidrostático de uma estrela compacta relativística por dois métodos diferentes. O primeiro método consiste na solução usual, *i.e.*, resolvendo-se numericamente a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Obtemos assim as configurações em equilíbrio hidrostático. O segundo método, cuja apresentação é o resultado original desta dissertação, consiste na minimização, via princípio variacional, da energia do sistema, primeiramente discretizando-o em camadas, e utilizando hipóteses físicas convenientes, conseguimos obter uma solução de equilíbrio diferentemente de resolver diretamente a equação de TOV.

A vantagem do método variacional apresentado nesta dissertação é que temos maior controle físico dos resultados, uma vez que a condição inicial do problema é a quantidade de bárions contida na configuração, contrastando com o método usual (solução da equação TOV), em que o número de bárions surge como um produto de sua solução. Ou seja, via princípio variacional temos a possibilidade de escolher exatamente a estrela que desejamos

estudar, enquanto resolvendo a equação TOV, não há correlação direta entre a condição inicial e a configuração final.

Ainda, apresentamos uma discussão sobre colapso gravitacional, determinado pelas equações de Misner e Sharp, assim como um breve resumo das técnicas de relatividade geral, termodinâmica e hidrodinâmica relativísticas necessárias para o desenvolvimento dos resultados desta dissertação. No fim, comparamos os nossos dois métodos, mostrando que os dois métodos, como esperado, levam a resultados compatíveis.

Palavras-chave: Equilíbrio hidrostático, métodos variacionais, equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

Abstract

Variational Principles in the problem of Hydrostatic Equilibrium in General Relativity

Yara de Souza Mello da Silva

Orientador: Takeshi Kodama

Coorientador: Carlos Zarro

Abstract da Tese de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In this thesis, we investigate some numerical solutions to obtain hydrostatic equilibrium configurations of a compact relativistic star by means of two different methods. The first method consists in the direct numerical solution of the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equation, which solutions give the hydrostatic equilibrium configurations of a star. The second approach, which is the original result presented in this thesis, is based on solving the optimization problem for the energy of the star via a variational principle. In the presented variational approach, one must discretize the stars in shells. Demanding suitable physical principles in each shell, we obtain a hydrostatic equilibrium solution for a star analogous to the TOV equation hydrostatic equilibrium solution.

The main advantage of the variational approach presented in this thesis consists in the fact that we have more control of the physical variables since the only initial condition is the total number of barions of the star, rather than the central density of the TOV equation in which the barion number is a byproduct of its solution. The variational

approach allows us to know beforehand what type of star is formed, in contrast to solving the TOV equation, where the initial condition (central density) and the final configuration are correlated in a very non-predictable way.

Moreover, in this thesis, a discussion about gravitational collapse, described by the so-called Misner and Sharp equations are presented along with some additional topics such as relativistic hydrodynamics and thermodynamics which are used in the results presented in this thesis. Finally, we also compare the results obtained using the variational principal method and solving numerically the TOV equation.

Keywords: Hydrostatic equilibrium, variational methods, Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation.

Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado contou com importantes apoios e incentivos sem o quais não teria se tornado uma realidade e aos quais estarei eternamente grata.

Ao meu co-orientador Carlos Zarro, que me acompanha desde a graduação e esteve sempre disposto a me ajudar, por seu apoio e amizade. Agradeço a orientação e disponibilidade, mesmo em períodos difíceis, à competência e especial atenção nas revisões e sugestões, fatores fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador Kodama pela infinita paciência e dedicação. Agradeço pela luz todas as vezes que parecia que não haveria resultados, por toda a confiança no trabalho e na minha capacidade de realizá-lo e pela total colaboração no solucionar de dúvidas e problemas que foram surgindo durante a realização desta tese.

À Beatriz Siffert sem a qual o desenvolvimento do programa não teria sido possível. Agradeço a disponibilidade, dedicação e todo o auxílio prestado. Suas críticas e orientações com respeito ao Mathematica foram essenciais para a elaboração do programa e a obtenção dos resultados.

À Dr. Ana por ter sido um poço de apoio e por toda a ajuda na preparação psicológica para a apresentação este trabalho.

Às amigas que desenvolvi na faculdade, em especial à Patty, Foster e Arouca que estiveram sempre presentes e dispostos a ajudar apesar das correrias da vida.

Agradeço também a secretaria da pós pela muito necessitada extensão do prazo de entrega deste trabalho. E finalmente ao apoio financeiro proporcionado pela Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior.

Sumário

Sumário	ix
Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Um Breve Resumo da Evolução Estelar	1
1.2 Estrelas Relativísticas	6
1.3 Colapso Gravitacional	9
1.4 Organização da Dissertação	10
2 Relatividade Geral	13
2.1 Princípio da Covariância	13
2.2 Princípio da Equivalência	16
2.3 Equação de Einstein	18
2.4 Solução de Schwarzschild	19
3 Revisão de Hidrodinâmica e Termodinâmica Relativísticas e Equações de Estado	23
3.1 Hidrodinâmica Relativística	24
3.2 Termodinâmica Relativística	26
3.3 Equações de Estado para a Matéria	28

3.3.1	Gás de Fermi	30
4	Princípios Variacionais aplicados à Relatividade Geral: Caso Contínuo	34
4.1	Ação Gravitacional com Matéria em Relatividade Geral	35
4.2	Equilíbrio Hidrostático em Relatividade Geral	38
4.3	Colapso Gravitacional em Relatividade Geral	45
4.3.1	No Interior do Raio de Schwarzschild	46
4.3.2	Colapso de Poeira	50
4.3.3	Colapso com Pressão	54
5	Princípios Variacionais aplicados à Relatividade Geral: Caso Discreto	60
5.1	Equilíbrio Hidrostático em Relatividade Geral	61
5.1.1	Solução Numérica	62
5.1.2	Unidades	64
5.1.3	Algoritmo	66
5.1.4	Aproximação Newtoniana para $N = 1$	68
5.2	Resultados e Conclusões	70
5.2.1	Solução de TOV	70
5.2.2	Solução Discreta	72
6	Conclusões e Perspectivas	77
	Referências Bibliográficas	79
A	Dimensões de uma Estrela de Nêutrons Típica	84
B	Gás Ideal	86
B.1	Estatística de Fermi-Dirac	86
B.2	Pressão Exercida por um Gás Ideal	88

C Sistema de Coordenadas no Caso do Colapso	92
C.1 Teorema de Birkhoff	92
C.2 Coordenadas Comóveis	94
C.3 Métrica para o Caso do Colapso Gravitacional	95

Lista de Figuras

1.1	Tempo de duração da queima de Hidrogênio no núcleo da estrela em função de sua massa [1]	2
1.2	Representação da evolução estelar do nascimento à morte da estrela.	4
1.3	Diagram de Hertzsprung-Russel. Retirada da página https://en.wikipedia.org/wiki/Hertzsprung%E2%80%93Russell_diagram#/media/File:Hertzsprung-Russell_StarData.png	6
1.4	Massas de estrelas de nêutrons observadas até Abril de 2016. Retirada da página https://stellarcollapse.org/nsmasses	12
4.1	Massa em função da densidade central.	39
4.2	O colapso em um buraco negro de Schwarzschild descrito por dois referenciais. Em verde, um observador distante - coordenada de Schwarzschild; e em azul, um observador comóvel à matéria em queda livre - tempo próprio	48
5.1	Modelo de camadas.	60
5.2	Relação entre S_i e S_i^0	67
5.3	Aproximação Nextoniana para uma camada.	69
5.4	Número de bárions contidos na estrela em função da densidade central desta.	71
5.5	Distribuição de matéria no interior da estrela para as condições iniciais que geram configurações de equilíbrio com (a) $0,2N_{\odot}$ e (b) $0,5N_{\odot}$ via equações diferenciais de TOV.	72

5.6	Distribuição de matéria no interior da estrela de (a) $B = 0,2 N_{\odot}$ e (b) $B = 0,5N_{\odot}$ para diferentes número de camadas via minimização da energia.	73
5.7	Superposição da distribuição de matéria no interior da estrela de (a) $B = 0,2 N_{\odot}$ e (b) $B = 0,5N_{\odot}$ por ambos os métodos.	74
5.8	Superposição da distribuição de matéria em função do raio para estrelas de $0,65, 0,70$ e $0,73N_{\odot}$, com $N = 500$ via minimização da energia e via TOV.	74
5.9	Massa otimizada em função do raio para uma estrela de $0,5N_{\odot}$ e $N = 1$ via minimização da energia.	75
5.10	Comparação entre os potenciais nos limites relativístico e newtoniano para a estrela citada anteriormente via minimização da energia.	76
B.1	Distribuição de Fermi-Dirac plotada para $T = 0$ e $T \ll T_F$	88
B.2	Colisão de uma molécula com uma parede.	89
C.1	Linhas de mundo das partículas do elemento de volume dV . Coordenadas Eulerianas - sistema de referencial fixo. Coordenadas Lagrangeanas - sistema de referencial comóvel a um elemento de fluido.	94

Lista de Tabelas

1.1	Massa, raio e densidade média típicos de alguns objetos comuns.	7
5.1	Equivalência entre as condições iniciais de ambos os métodos.	71

Capítulo 1

Introdução

1.1 Um Breve Resumo da Evolução Estelar

A formação de uma estrela se dá quando uma perturbação (onda de choque, por exemplo) induz instabilidade em nuvens de gás (consistindo basicamente de Hidrogênio molecular e poeira) cuja massa é maior do que uma massa crítica. A formação uma protoestrela é discutida em detalhe no Cap. 27 da Ref. [1].

Devido a esta instabilidade uma quantidade do gás é atraída para o centro da nuvem pela força gravitacional e, a compressão do gás converte a energia gravitacional em calor aumentando a temperatura da protoestrela. A densidade do gás aumenta durante esta compressão, até que a pressão térmica se torne significativa o suficiente para contrabalançar a atração gravitacional estabelecendo um equilíbrio *quasi hidroestático*.

A perda de energia por radiação na superfície da protoestrela causa uma desaceleração na contração e na taxa de aquecimento. Isto ocorre até que a temperatura do núcleo atinja o ponto de ignição para fusão de Hidrogênio em Hélio ($T \approx 10^7 K$ [2]). Então a fusão nuclear se torna a fonte de energia dominante, e as pressões térmica e de radiação contrabalançarão a gravidade por milhões de anos [1].

A estrela passa a maior parte de sua vida luminosa neste estado, ou seja, como uma estrela de sequência principal [3] (classificação evolucionária proposta por H. N. Russell) no diagrama Hertzsprung-Russel (HR). Neste estágio, a energia lentamente irradiada pela

superfície da estrela é compensada pela queima de suas reservas de Hidrogênio. Esta reserva sustenta a estrela na sequência principal durante a maior parte da sua vida luminosa. O tempo τ_H que a estrela passa na sequência principal queimando suas reservas de Hidrogênio depende de sua massa M como pode ser visto na figura (1.1).

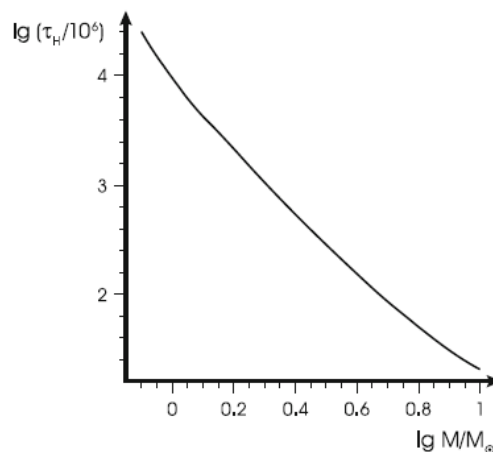
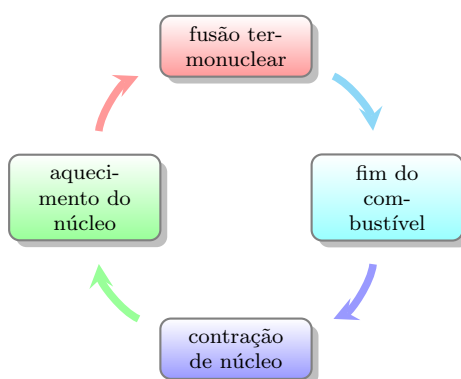


Figura 1.1: Tempo de duração da queima de Hidrogênio no núcleo da estrela em função de sua massa [1]

Apesar dos valores absolutos serem incertos o comportamento geral é claro, quanto maior a massa da estrela mais tempo esta permanecerá na sequência principal.

No curso da evolução, a temperatura no centro aumenta enquanto a abundância de Hidrogênio cai. Quando o Hidrogênio do centro é completamente esgotado o núcleo é contraído e como consequência a temperatura aumenta o suficiente para dar início à queima de Hélio.

Esta fase dura aproximadamente $1,6 \times 10^7$ anos (20% da duração da fase da sequência principal [1]) e a estrela se encontra na região de gigante vermelha no diagrama HR. A queima de Hélio no núcleo termina quando ${}^4\text{He}$ é completamente processado em ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$ e ${}^{20}\text{Ne}$ (em diversas proporções dependendo das temperaturas e massas da protoestrela). A região central da estrela passa novamente pelo esquema a seguir:



Este ciclo se repete durante os vários estágios da combustão – Hélio, Carbono, Neônio, Oxigênio, Magnésio e Silício [1, 3]. No término da queima de cada elemento, o núcleo estelar se contrai aumentando a temperatura até que atinja o ponto de ignição, necessário para a queima do próximo elemento na cadeia. A fusão do novo elemento ocorrerá no núcleo da estrela enquanto a queima do elemento anterior continua produzindo energia nas camadas estelares externas. Desta forma, conforme os elementos são queimados, são formadas camadas concêntricas de elementos que serão ejetados para o meio interestelar e servirão de matéria prima para novas gerações de estrelas quando a pressão não puder mais sustentar a força gravitacional e a estrela colapsar.

A fusão termina quando todos os elementos sofrem fusão nuclear, e, no fim, é formado Ferro, além do qual, a fusão deixa de ser exotérmica e não é mais uma fonte de combustível energeticamente favorável. O Ferro é o ponto final da produção de matéria pela fusão, pois o núcleo com a maior energia de ligação por núcleon. O fim da fusão marca o fim da vida luminosa da estrela. A duração da fusão, assim como seu estado final depende de sua massa.

A figura (1.2) é uma representação da evolução das estrelas desde o nascimento até a formação de *objetos compactos*.

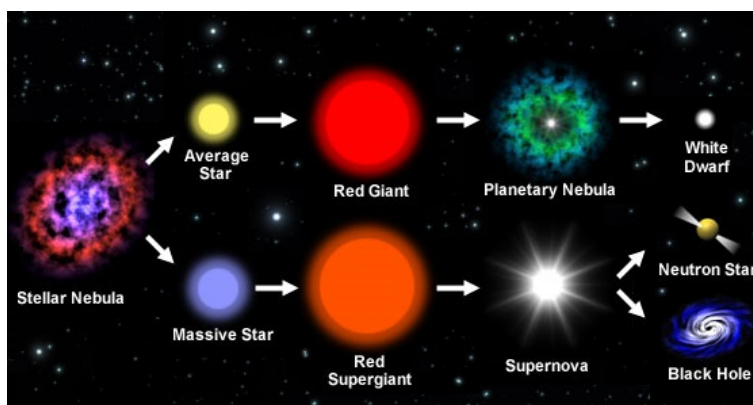


Figura 1.2: Representação da evolução estelar do nascimento à morte da estrela.

Para estrelas com massa até $8 M_{\odot}$, ramo superior da Fig. (1.2), a fusão é lenta e incompleta, não ocorrendo até a formação de Ferro. A atração gravitacional não é forte o suficiente para que a estrela alcance a densidade e temperatura necessária para dar início à fusão de elementos mais pesados. Conforme a temperatura aumenta, Hidrogênio começa a ser queimado nas camadas externas e o envelope da estrela se expande de forma que esta se torna uma gigante vermelha enquanto o núcleo continua a colapsar-se.

Quando o combustível acaba, o envelope da estrela é ejetado para formar uma nebulosa planetária. Com a perda do envelope a combustão não pode mais ser sustentada e o núcleo colapsa. A estrela que resta é uma anã branca cuja atração gravitacional é sustentada pela pressão de elétrons degenerados que contrabalaceia o colapso gravitacional [6].

Protoestrelas com massa menor que $0.08M_{\odot}$ nunca atingem a temperatura necessária para a ignição de Hidrogênio e, conseqüentemente nunca entram na sequência principal. Estas são classificadas como anãs marrons [1].

Já estrelas com massa maior que $8 M_{\odot}$ (ramo inferior da Fig. (1.2)) evoluem mais rapidamente que as progenitoras de anãs brancas. A fusão termonuclear procede até a formação de Ferro e a estrela aquece até se expandir em uma super gigante vermelha.

Com o fim do combustível nuclear, a pressão térmica e de radiação não podem mais sustentar as camadas mais externas e a estrela entra em colapso. Com o aumento da

densidade a pressão de elétrons degenerados começa a aumentar. Em contraste com estrelas com até $8 M_{\odot}$ a massa do núcleo ultrapassa o limite de Chandrasekhar [6, 8] – limite de massa em que não é mais possível a estrela manter-se em equilíbrio pela pressão dos elétrons degenerados. O núcleo está tão comprimido que os elétrons se tornam ultra relativísticos e a pressão atinge um ponto em que não pode mais equilibrar a atração gravitacional. Assim, o estado de anã branca não é mais estável o que marca o início da formação de estrelas de nêutrons.

Ocorre então a captura dos elétrons por prótons formando nêutrons e neutrinos – decaimento beta inverso. Os neutrinos são irradiados pela estrela e o subproduto é que a estrela passa a ter cada vez mais nêutrons em sua composição. A este processo dá-se o nome de neutronização.

O núcleo de Ferro inicia um rápido processo de implosão se tornando extremamente quente. Enquanto as camadas externas da estrela, intumescidas de neutrinos energéticos liberados no decaimento beta inverso durante a neutronização, são ejetadas liberando uma enorme quantidade de energia (10^{53}ergs [2]) em uma explosão de supernova.

Devido à implosão (colapso estelar), a densidade a estrela cada vez mais rica em nêutrons aumenta até que a pressão de nêutrons degenerados se torna suficiente para contrabalancear a atração gravitacional estabelecendo uma nova configuração de equilíbrio como estrelas de nêutrons [2]. A não ser que a massa exceda o limite o qual a pressão de nêutrons degenerados possa suportar, o que leva ao colapso em um buraco negro.

Os estágios da evolução estelar de uma estrela encontram-se na figura abaixo, mais conhecida como diagrama de Hertzsprung-Russel (HR). O diagrama de HR é um gráfico que relaciona a luminosidade e a temperatura superficial, de cada estrela. Para uma exposição, no nível desta seção, sugerimos as Refs. [3, 4, 5]

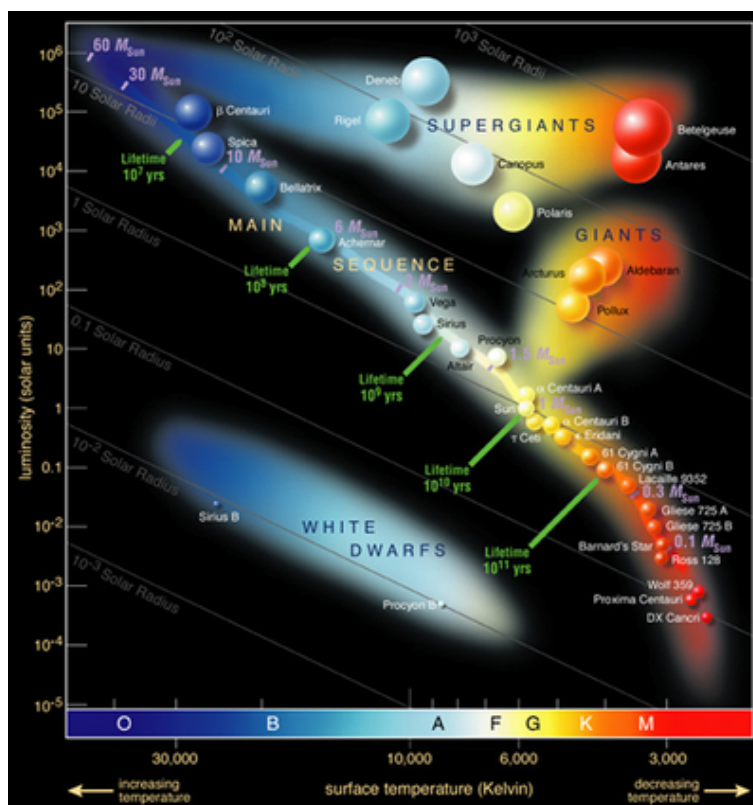


Figura 1.3: Diagrama de Hertzsprung-Russell. Retirada da página https://en.wikipedia.org/wiki/Hertzsprung%E2%80%93Russell_diagram#/media/File:Hertzsprung-Russell_StarData.png.

1.2 Estrelas Relativísticas

Para a maioria das estrelas eventualmente chega um ponto em que a fusão termonuclear, fonte de energia da estrela, cessa, e a pressão não pode mais sustentar a força de atração gravitacional [1, 5].

Quando isso ocorre, o núcleo contendo os elementos mais pesados colapsa e uma enorme quantidade de energia (energia gravitacional convertida em neutrinos) é liberada na explosão (morte da estrela - fim da vida luminosa). Em alguns casos a estrela explode completamente. Contudo, frequentemente somente o envelope exterior é ejetado deixando um núcleo compacto resultando na formação de um objeto compacto.

Há três tipos de objetos compactos: anãs brancas, estrelas de nêutrons e buracos ne-

gros [7]. Estes são caracterizados por raios pequenos, altíssimas densidades e gravidade superficial forte. Diferentemente das estrelas na sequência principal, em objetos compactos não há produção de energia interna, todo o combustível já foi extinguido nos processos termonucleares.

Na tabela (1.1) podemos observar a massa, raio e densidade média típicos de objetos compactos como anãs brancas (A.B.) e estrelas de nêutrons (E.N.) em comparação com a Terra e Sol.

Objeto	M/M_{\odot}	$R(km)$	$\bar{\rho}(g/cm^3)$
E.N.	2	10	5×10^{14}
A.B.	1	5400	3×10^6
Sol	1	7×10^5	1.4
Terra	3×10^{-6}	6000	5.5

Tabela 1.1: Massa, raio e densidade média típicos de alguns objetos comuns.

Campos gravitacionais são tão fracos que na maioria dos casos, os efeitos da relatividade geral podem ser ignorados. No caso de anãs brancas por exemplo, onde $GM/Rc^2 \approx 10^{-4}$ (sendo G a constante gravitacional, M e R a massa e raio da estrela e c a velocidade da luz no vácuo), é suficiente resolver as equações Newtonianas. No entanto, trataremos nesta tese de estrelas relativísticas que, devido as intensa concentração de matéria em seu interior a razão $GM/(Rc^2)$ não pode mais ser desprezada (ou seja, o raio da estrela é próximo ao seu raio de Schwarzschild), e estas só podem ser descritas por relatividade geral, como é o caso em estrelas de nêutrons.

Tendo percorrido todo o processo de combustão até a formação de Ferro a estrela não possui fontes de energia restante para excitar os férmions. Esta é sustentada contra a gravidade somente pela pressão de fermi (diferentemente de estrelas na sequência principal que são sustentadas pela pressão térmica [1]) e pela repulsão de curto alcance da força nuclear.

Estrelas de nêutrons são caracterizadas por períodos de rotação de alguns milésimos de segundos (de 1 a 1000 Hz) e altíssimos campos magnéticos (de 10^9 a 10^{15} G), um

milhão de vezes maior que o da Terra [1]. Porém estes efeitos não serão considerados neste trabalho uma vez que estamos interessados na construção do método alternatido via princípio variacional, e não na descrição mais realista possível da estrela (ou no estudo da consequência de tais efeitos).

Com a suposição de uma estrela gasosa isolada sem rotação ou campo magnético, as únicas forças atuando na estrela são exercidas pela gravidade e pelo gradiente de pressão, sendo assim estas compensam uma a outra em um estado de *equilíbrio hidroestático*.

A estrutura interior destas estrelas é descrita pelas equações de Einstein que podem ser reduzidas em um par de equações diferenciais acopladas chamadas equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [2, 9, 10]; derivadas no Cap. 4.

Para estrelas relativísticas compactas (com densidade central maior que a densidade nuclear) existe uma massa máxima, análoga ao limite de Chandrasekhar para anãs brancas, acima da qual a atração gravitacional excede a força exercida pelo gradiente de pressão e não há mais possibilidade de configuração de equilíbrio, isto é, a pressão se torna incapaz de sustentar a estrela contra o colapso gravitacional.

Em relatividade geral a mesma pressão que sustenta a estrela contra a atração gravitacional garante o colapso da mesma, tenha esta, massa acima de um certo limite [2]. Esta 'dualidade' da pressão é intrínseca a estrutura da teoria de Einstein. A pressão, que em estrelas Newtonianas impede o colapso, em relatividade geral o torna inevitável uma vez que aparece, na equação de TOV, juntamente com a densidade de energia como uma fonte de atração gravitacional [11].

O valor exato do limite de massa onde o colapso será inevitável para estrelas de nêutrons depende da escolha da equação de estado descrevendo a matéria que forma a estrela.

Oppenheimer and Volkoff [12] foram os primeiros a investigar a estrutura de estrelas de nêutrons. Assumindo que a estrela é formada por um gás de nêutrons não interagentes e degenerados, descobriram um limite de massa de $\sim 0,72M_{\odot}$.

Tendo suposto que a pressão de Fermi dos nêutrons degenerados é a única força resistente ao colapso gravitacional, o resultado de Oppenheimer e Volkoff estabelece um limite inferior para a massa máxima de uma estrela de nêutrons. Contudo, para uma estrela real as forças nucleares proporcionam uma resistência adicional contra o colapso gravitacional. Portanto saber exatamente a estrutura da matéria que compõe as estrelas de nêutrons é um problema fundamental e é tópico atual de pesquisa. Se a repulsão entre os núcleons for considerada, a estimativa de massa limite é elevada, sendo aproximadamente 1,5 e 3,0 massas solares. Rhoades e Ruffini encontraram $\sim 3,2M_{\odot}$ [13] como a massa máxima para uma estrela de nêutrons sem rotação.

Apesar deste amplo limite para massas possíveis, estrelas de nêutrons observadas estão restringidas à região entre 1 e $2,74 M_{\odot}$ com a maioria concentrada em torno de $1,3 M_{\odot}$ como pode ser visto na Fig. (1.4).

Em contraste com a instabilidade de anãs brancas ocasionada pela captura de elétrons energéticos (neutronização) que leva a uma nova família de estrelas, o colapso gravitacional de uma estrela de nêutrons em um buraco negro (ou de qualquer estrela relativística com massa suficientemente alta) não pode ser evitado. Uma vez que a pressão da estrela é insuficiente para sustenta-la contra sua própria atração gravitacional, esta irá colapsar.

1.3 Colapso Gravitacional

A primeira tentativa de tratar um sistema em colapso foi realizada por Oppenheimer e Snyder em 1939 [14]— meses depois de Oppenheimer e Volkoff mostrarem que não há solução estática para as equações de campo em relatividade geral para uma distribuição esférica de “nêutrons frios” se a massa total dos nêutrons for maior que $\sim 0,7M_{\odot}$; esta descoberta inspirou a procura por soluções não estáticas — ou seja, soluções de colapso gravitacional. Os autores não tiveram sucesso em integrar as equações, exceto para o caso — não realístico — de uma distribuição esférica de nêutrons com pressão nula e densidade constante. Com isso, eles mostraram que no estado final, o colapso de uma nuvem de

poeira homogênia leva a formação de um buraco negro. Apesar desta solução tratar de um cenário extremamente idealizado, a solução é analítica e exata. Por isso é amplamente utilizada para testar e calibrar códigos numéricos. A solução de Oppenheimer–Snyder ilustra muitos aspectos genéricos do colapso gravitacional e formação de buracos negros proporcionando uma ótima indicação (previsão) de como os casos mais complicados devem se comportar.

Anos depois, em 1964, Misner e Sharp [15] generalizaram as equações de TOV de equilíbrio hidrostático de forma a incluir um termo de aceleração e uma contribuição da massa efetiva em uma camada de matéria devido a energia cinética. Dando início assim a um desenvolvimento mais realístico do colapso gravitacional do que aquele apresentado por Oppenheimer e Snyder. Assim como no caso de pressão nula, foram mantidas as suposições de gás ideal (sem fluxo de calor ou radiação), processo isentrópico (não há criação de entropia) e simetria esférica, porém foram introduzidas as forças exercidas pelos gradientes de pressão. O resultado encontrado na Ref. [15] é apresentado na Sec. 4.3.3 por um método alternativo ao original.

1.4 Organização da Dissertação

Nesta tese resolvemos numericamente as configurações de equilíbrio hidrostático de um estrela de nêutrons. Usaremos técnicas variacionais [16, 17] para compararmos nossos resultados com o método usual de resolver a equação TOV. No nosso caso, estas configurações de equilíbrio correspondem a situação de minimização da energia. Supondo a estrela formada por N camadas discretas, podemos também discretizar todas as quantidades físicas no interior da estrela de forma que cada camada pode ser pensada como um sistema fechado, uma vez que supomos que não haja transporte de matéria entre camadas. Desta maneira diminuimos consideravelmente o número de graus de liberdade em comparação com a solução de TOV. Uma vantagem do método variacional aplicado a problemas de astrofísica é que nossa condição inicial é o número total de bárions da estrela.

Isto permite-nos estimar a massa bariônica e o raio da estrela que estamos estudando, apesar de ser uma estimativa grosseira em que usamos apenas a relação $GM/(rc^2) \approx 0.1$ e ignoramos a equação de estado. Grosseiramente, no caso variacional já construímos uma estrela a partir da equação de estado, enquanto na solução da equação TOV em que a condição inicial é a densidade central de bárions, sabemos qual é a estrela obtida ao fim do processo.

No Cap. 2, revemos as ideias fundamentais de relatividade geral; no Cap. 3, uma revisão de hidrodinâmica, termodinâmica e equações de estado é apresentada; no Cap. 4, os princípios variacionais aplicados à relatividade geral são discutidos, obtendo as equações que descrevem o colapso gravitacional a equação de TOV. Finalmente, no Cap. 5, apresentaremos as soluções numéricas para o problema de equilíbrio hidrostático em relatividade geral. As conclusões e possíveis perspectivas são discutidas no Cap. 6. No Apêndice A discutimos as dimensões típicas das estrelas de nêutrons. Este apêndice segue a Ref. [2]. No apêndice B, um breve resumo de física estatística é apresentado. No Apêndice C, apresentamos o conceito de coordenadas Eulerianas e Lagrangeanas e há uma discussão sobre a métrica utilizada para descrição dos problemas de colapso gravitacional no formalismo da relatividade geral.

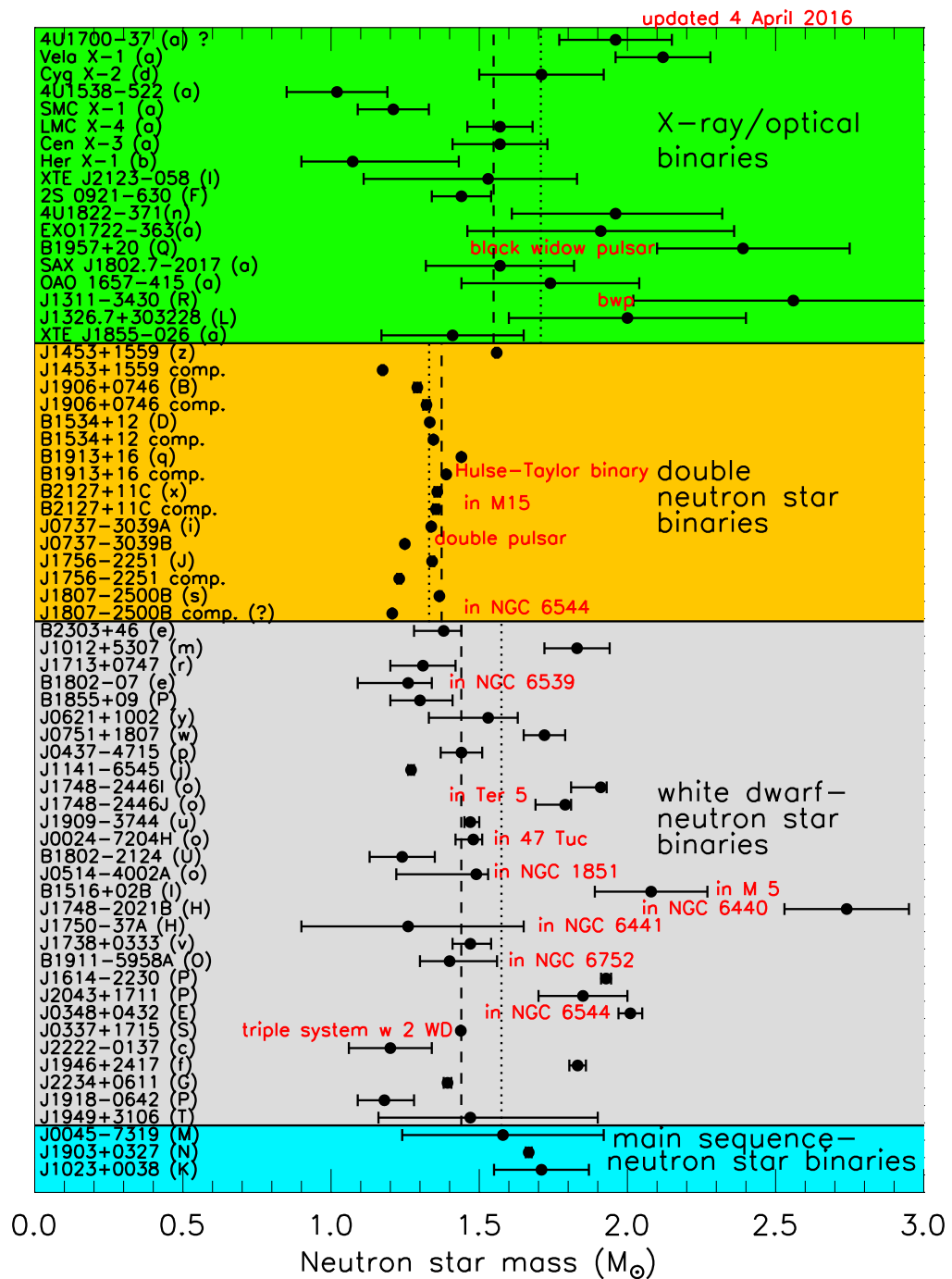


Figura 1.4: Massas de estrelas de nêutrons observadas até Abril de 2016. Retirada da página <https://stellarcollapse.org/nsmasses>.

Capítulo 2

Relatividade Geral

Publicada em 1915, Albert Einstein generalizou a Teoria da gravitação de Newton (para que fosse consistente com o princípio da relatividade restrita – as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais [18, 19]). Considerando as ideias propostas na relatividade restrita (1905) sobre o espaço e o tempo e adicionando a presença de campos gravitacionais, a relatividade geral descreve a interação gravitação como um efeito na geometria do espaço-tempo, isto é a matéria (energia) curva o espaço e tempo à sua volta.

Para a descrição desta generalização, Einstein se guiou pelos seguintes postulados e com isso construiu uma mecânica que completamente independe de relações absolutas.

2.1 Princípio da Covariância

Todos os observadores, inerciais ou não, devem ser capazes de descrever qualquer sistema usando as leis da física. Com isso, Einstein propôs que todos os observadores são equivalentes (princípio da relatividade – não há referenciais preferenciais).

O Princípio da Covariância afirma então que as leis da física válidas na ausência de um campo gravitacional, serão igualmente válidas sob a ação de um campo gravitacional e, sua forma é invariante perante transformações de coordenadas [18, 20]. Este princípio é fundamental na relatividade geral pois implica que, não havendo referenciais preferenciais, não há movimento absoluto.

O uso da formulação tensorial em relatividade geral garante a covariância de expressões, visto que as equações tensoriais podem sempre ser escritas de forma covariante, ou seja de forma que não mudem perante transformações de coordenadas.

Definimos o elemento de linha, contendo a geometria do espaço-tempo do sistema de coordenadas:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

O intervalo escrito na forma acima é válido para qualquer sistema de coordenadas. Em (2.1) temos que $g_{\mu\nu}$ é o tensor de métrica. (Usamos a convenção de soma de Einstein e índices gregos representam as componentes 0, 1, 2, 3, enquanto índices latinos representam 1, 2, 3).

Em relatividade geral o tensor $g_{\mu\nu}$ faz o papel que o potencial gravitacional Φ fazia na gravitação Newtoniana.

Para obedecer o princípio da covariância precisamos de um tipo de derivada - derivada covariante - que, na ausência de campo gravitacional, se reduza a derivada tradicional e, que mantenha sua forma sob quaisquer transformações de coordenadas, ou seja, sob ação de um campo gravitacional arbitrário.

Em coordenadas curvilíneas, diferentemente de coordenada galileana, o diferencial dA_μ de um vetor A_μ não é um vetor, e as derivadas $\partial A_\mu / \partial x^\kappa$ não formam um tensor. Isto é devido ao fato de dA_μ ser a diferença de vetores localizados em dois pontos diferentes do espaço (separados por uma diferença infinitesimal) [22]. Um vetor covariante se transforma de acordo com:

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} A'_\kappa, \quad (2.2)$$

logo,

$$dA_\mu = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} dA'_\kappa + A'_\kappa \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} dx^\sigma, \quad (2.3)$$

ou seja, dA_μ não se transforma como um vetor (o mesmo vale para um vetor contravariante).

Em coordenadas curvilineas para obtermos um diferencial de um vetor que se comporte como vetor é necessário que os dois vetores subtraídos estejam localizados no mesmo ponto do espaço. Para isso precisamos “transladar” um dos vetores para o ponto em que o outro está localizado de forma que em coordenadas galileanas a operação coincida com o diferencial dA_μ . A esta operação dá-se o nome de “transporte paralelo” [9, 10].

Consideramos um vetor arbitrário contravariante cujo valor no ponto x^μ é A^μ . Desta forma, seu valor no ponto $x^\mu + dx^\mu$ é $A^\mu + dA^\mu$. A mudança devida ao do descocamento infinitesimal do vetor A^μ para o ponto $x^\mu + dx^\mu$ é denotada por δA^μ e a diferença entre os vetores, agora no mesmo ponto, é $DA^\mu = A^\mu + dA^\mu - (A^\mu + \delta A^\mu) = dA^\mu - \delta A^\mu$.

Como a mudança δA^μ nas componentes de um vetor depende somente das próprias coordenadas e devem ser lineares, δA^μ deve ter a seguinte forma:

$$\delta A^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda dx^\nu, \quad (2.4)$$

onde $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu$ é uma função das coordenadas e é chamada de “conexão” ou *simbolo de Christoffel* [21,22]. Com isto, podemos definir a derivada covariante de um tensor, representada por “;”, cujo resultado continua sendo um tensor:

$$A_{\mu;\sigma}^\nu = A_{\mu,\sigma}^\nu - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha A_\alpha^\nu + \Gamma_{\alpha\sigma}^\nu A_\mu^\alpha. \quad (2.5)$$

onde a virgula representa a derivada $A_{\mu,\sigma}^\nu = \partial A_\mu^\nu / \partial x^\sigma$.

O simbolo de Christoffel pode ser escrito em termos do tensor da métrica. Primeiramente fazemos:

$$A_{\mu;\sigma} = (g_{\mu\nu}A^\nu)_{;\sigma} = g_{\mu\nu}A^\nu_{;\sigma} + g_{\mu\nu;\sigma}A^\nu. \quad (2.6)$$

Como $A_{\mu;\sigma} = g_{\mu\nu}A^\nu_{;\sigma}$, temos que a derivada covariante da métrica deve ser sempre nula. Permutando os índices da equação $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$ e tomando cada equação, multiplicada por $1/2$, obtemos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\delta}(g_{\mu\delta,\nu} + g_{\nu\delta,\mu} - g_{\mu\nu,\delta}), \quad (2.7)$$

2.2 Princípio da Equivalência

Pela relação entre a força exercida pela atração gravitacional (de um corpo de massa M a uma distância R em um objeto) e a aceleração transmitida a este na teoria Newtoniana (válida para campos fracos e pequenas velocidades), temos a seguinte relação entre massa inercial m_I e massa gravitacional m_G [18, 21]:

$$m_I a = \frac{m_G M G}{R}. \quad (2.8)$$

Einstein concluiu que o fato dessas duas propriedades diferentes terem valores tão próximos deve ser mais que uma mera coincidência e, massas gravitacionais e inerciais devem ser exatamente iguais.

Uma vez estabelecido que a massa inercial e gravitacional são iguais para todo e qualquer corpo, segue que todos os corpos sentem exatamente a mesma aceleração em um campo gravitacional [19, 21]. Ou seja, o movimento dos corpos não está relacionado à natureza destes, e sim à natureza geométrica do espaço-tempo.

Essa convicção levou a formulação do princípio da equivalência [9]. Isto é, a correspondência entre o movimento de um corpo na presença de um campo gravitacional para um observador estacionário e o movimento de um corpo para um observador não inercial na ausência de um campo gravitacional.

O princípio afirma que as leis que regem um corpo em queda livre na presença de um campo gravitacional estacionário local são as mesmas para todos os corpos que, não estando sujeitos à presença de um campo gravitacional, se apresentam em um sistema de referencial não-inercial.

Como consequência, não há nenhum experimento que possa diferenciar um objeto em queda livre devido à atração gravitacional de um objeto em movimento uniforme variado no espaço, na ausência de um campo gravitacional.

Essa consequência é fácil de perceber quando se trata de objetos como uma bola de canhão e uma pena (como no famoso experimento de Galileo na torre de Pisa 18]). Contudo é importante notar que o princípio da equivalência se aplica para todas as leis da física. Por exemplo, raios de luz são atraídos por um campo gravitacional com a mesma aceleração que um corpo material.

Na mecânica relativística, a equação de movimento de um partícula teste (em um referencial qualquer sob ação de um campo gravitacional arbitrário) pode ser obtida substituindo o intervalo (2.1) em $\mathcal{S} = \int ds$ e, pelo princípio da mínima ação [22], $\delta\mathcal{S} = 0$, de forma a obter a equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.9)$$

válida tanto para um sistema na presença de um campo gravitacional, quanto para um sistema não inercial na ausência de campos.

Para confirmar a relação entre a métrica e o potencial Newtoniano consideramos uma situação cujo campo gravitacional seja fraco. Supomos que uma partícula se move lentamente em um campo gravitacional estático fraco onde $g_{00} = (1 + \delta)\eta_{00}$, sendo $\eta_{\mu\nu}$ a métrica de Minkowski (plana) e $\delta \ll 1$.

Comparando a equação da geodésica nesta situação, $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\nabla\delta$, com a equação de Newton $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi$, encontramos que $\Phi = \delta/2$. Se o campo gravitacional é causado por um corpo de massa M , podemos ver como a métrica, $g_{00} = 1 - \frac{2GM}{r}$, esta conectada ao

potencial Newtoniano, $\Phi = -\frac{GM}{r}$ [9,10].

2.3 Equação de Einstein

Utilizando o princípio de Mach, que parte da hipótese de que a métrica do campo é determinada pela distribuição de matéria e energia, e com o objetivo de formular uma analogia com a equação de Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi\rho$ para o potencial gravitacional Newtoniano, Einstein estava motivado a encontrar um tensor que não contivesse derivadas da métrica maiores que de segunda ordem.

Ao contrário da relatividade restrita, teremos a presença e possibilidade de espaços curvos. Para isso devemos definir o tensor de curvatura de Riemann, encontrado quando verificamos que a ordem de derivadas covariantes importa (são não-comutativas), diferentemente de derivadas tradicionais no espaço plano [9, 20].

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}^{\delta} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\delta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\delta} + \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\delta} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\delta}, \quad (2.10)$$

onde, para espaços planos temos $\mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}^{\delta} = 0$. Este é o tensor mais simples que pode ser contruído somente a partir da métrica e de suas derivadas primeiras e segundas.

Como a equivalência entre massa e energia (derivada na relatividade restrita) sugere que todas as formas de energia atuam como fonte para o campo gravitacional, Einstein contrói uma equação de campo que depende apenas do tensor de momento energia $T_{\mu\nu}$, como termo de fonte, e de derivadas segundas do tensor de métrica $g_{\mu\nu}$.

Para isto, é necessário construir um tensor de divergente nulo, como o tensor de momento energia (conservação de energia e momento, $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$), sendo este:

$$G_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}, \quad (2.11)$$

onde $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Riemann $\mathcal{R}_{\mu\nu\sigma}^{\delta}$ com $\delta = \sigma$ e \mathcal{R} o tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ contraído em um escalar, conhecido como escalar de Ricci.

Einstein escreveu então a sua equação de campo ligando a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria e energia:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

A equação de Einstein como descrita anteriormente preve a existência de um universo dinâmico [24], o contrário do consenso da época. Einstein então modificou sua equação, adicionando um termo somado ao tensor de Einstein, forçando-a a admitir uma solução estática,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

sendo Λ o termo que Einstein chamou de *Constante Cosmológica* [9, 18, 21].

Com a descoberta de Hubble do universo em expansão, treze anos depois, Einstein abandonou o termo extra chamando-o de “o maior erro de sua vida”. Atualmente, em se tratando de escalas cosmológicas, a constante cosmológica é incorporada do lado direito da equação de Einstein como uma contribuição no tensor de energia-momento, enquanto em outras escalas (como a explorada neste trabalho) Λ é tão pequeno que pode ser desprezado.

2.4 Solução de Schwarzschild

A primeira solução exata para as equações de Einstein foi encontrada por Karl Schwarzschild em 1916. A solução de Schwarzschild é a solução para o espaço curvo mais simples possível, a geometria ao redor de uma fonte de curvatura com simetria esférica, por exemplo uma estrela esférica.

A condição de simetria esférica requer que θ e ϕ só ocorram na métrica na forma $d\Sigma^2 = r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$ [18], não havendo a possibilidade de termos cruzados em $d\theta$ ou $d\phi$.

Por simplicidade suporemos também que a métrica seja estática, ou seja independente do tempo, o que garante a ausência de termos cruzados em dt . Com isso temos então:

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.14)$$

onde ν e λ são funções somente de r .

No espaço vazio (vácuo) ao redor da estrela estática a equação de Einstein, ou seja a generalização de $\nabla^2\Phi = 0$, é $G_{\mu\nu} = 0$ - uma vez que o vácuo, ausência de matéria, implica $T_{\mu\nu} = 0$. Ou, equivalentemente:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}, \quad (2.15)$$

que pode ser reduzido multiplicando por $g^{\alpha\mu}$: $\mathcal{R}_\nu^\alpha = \frac{1}{2}\delta_\nu^\alpha\mathcal{R}$ [9]. E, contraindo os índices, ou seja fazendo $\alpha = \nu$, obtendo: $\mathcal{R} = 2\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} = 0$.

Desta forma, temos então que a equação de Einstein no vácuo implica:

$$G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{R} = 0 \quad \mathcal{R}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.16)$$

Para o espaço-tempo estático e isotrópico definido pela métrica (2.14):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{00} &= \left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)}, \\ \mathcal{R}_{11} &= -\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 + \frac{2\lambda'}{r}, \\ \mathcal{R}_{22} &= (r\lambda' - r\nu' - 1) e^{-2\lambda} + 1, \\ \mathcal{R}_{33} &= R_{22}\text{sen}^2\theta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

De $\mathcal{R}_{00} = \mathcal{R}_{11} = 0$ é fácil perceber que $\nu' + \lambda' = 0$. Integrando em r temos que $\nu + \lambda = \text{constante}$.

Para r muito grande o espaço-tempo deve permanecer inalterado pela presença da estrela, ou seja a grandes distâncias da fonte de curvatura, a geometria deve ser aproximar

a de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, Eq. (2.18), de forma que a métrica seja assintoticamente plana [10].

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.18)$$

Portanto λ e ν tendem a zero, logo $\nu + \lambda = 0$.

Usando então $\lambda' = -\nu'$ e $-\lambda = \nu$ em $\mathcal{R}_{22} = 0$:

$$\begin{aligned} (2r\nu' + 1)e^{2\nu} &= 1 \\ (re^{2\nu})' &= 1 \\ re^{2\nu} &= r + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ou seja $g_{00} \equiv e^{2\nu} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$ para $r > R$, onde R é o raio da estrela e $-2GM/c^2$ é a constante de integração. Comparando este resultado com a aproximação Newtoniana, identificamos M com a massa da estrela.

Dos resultados anteriores inferimos então $g_{11} \equiv -e^{2\lambda} = -e^{-2\nu} = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}$ para $r > R$.

Com isso, temos finalmente a solução de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.20)$$

O tempo t no sistema de coordenadas de Schwarzschild é o tempo próprio de um observador distante e inercial; este é relacionado ao tempo próprio τ da esfera pela seguinte expressão:

$$t = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} \tau, \quad (2.21)$$

e, para um observador distante do corpo, quando $r \rightarrow \infty$, $t = \tau$. Quanto mais perto o observador se encontra do corpo gravitacional, mais lenta é a passagem de tempo, isto é,

o intervalo $\Delta\tau$ correspondente a um intervalo Δt se torna menor conforme r diminui. Em $r \rightarrow 2GM/c^2$, $\Delta\tau \rightarrow 0$ [23].

Calculando a força F devido a aceleração de uma partícula teste em queda livre [23]

$$F = (F_\mu F^\mu)^{1/2} = \frac{GM/r^2}{(1 - 2GM/c^2r)^{1/2}}, \quad (2.22)$$

notamos que em $r = 2MG/c^2$ a força gravitacional se torna infinita, isso indica que um corpo estático não pode ter raio menor que $2MG/c^2$.

Ou seja, a métrica estática apresentada na Eq. (2.20) só pode ser aplicada em regiões com $r > 2MG/c^2$. Esse valor crítico de r é chamado raio de Schwarzschild, r_S [18].

Esta solução é muito mais geral do que parece. Mesmo se a fonte variar no tempo, esta é a única solução esfericamente simétrica das equações de Einstein no vácuo, este resultado é conhecido como teorema de Birkoff [24]. Uma breve prova deste teorema se encontra no Apêndice (C.1) e, maiores informações podem ser encontradas em bons livros de gravitação e relatividade geral, por exemplo, as Refs. [9,10, 19, 20, 21, 24].

Capítulo 3

Revisão de Hidrodinâmica e Termodinâmica Relativísticas e Equações de Estado

Na seção anterior estávamos focados na descrição macroscópica do sistema – isto é, a parte ligada a gravitação e a relatividade geral. Agora discutiremos o comportamento microscópico da matéria no interior da estrela e a força responsável por sua sustentação contra o colapso gravitacional.

Trabalhamos sob a suposição de que a dinâmica da matéria, independente dos detalhes e graus de liberdade microscópicos, pode ser descrita aproximadamente em termos de campos macroscópicos. Denominamos estes, variáveis hidrodinâmicas, e definimos-as como a média sobre os graus de liberdade microscópicos da vizinhança de um ponto arbitrário no espaço-tempo.

A principal vantagem dessa descrição é que o enorme número de graus de liberdade contido na composição microscópica do fluido é reduzido drasticamente para algumas variáveis hidrodinâmicas macroscópicas que representam a propriedade local do fluido [25].

Como a dinâmica considerada é macroscópica, o sistema é representado como um meio contínuo, mas para cada ponto associamos um volume infinitesimal de fluido ao qual nos referimos como *elemento de fluido*. E, as variáveis em questão são insensíveis as variações

microscópicas que ocorrem dentro de um elemento de fluido permanecendo constantes dentro destes.

Aqui, tudo será baseado na hipótese de simetria esférica ou seja, todas as funções e variáveis (incluindo velocidade, densidade, pressão, etc) são constantes e isotrópicas em circunferências concêntricas (na ausência de forças externas), analogamente, só dependerão do módulo da coordenada radial.

As propriedades locais são representadas pelas relações termodinâmicas entre as variáveis hidrodinâmicas junto com as equações de estado. Supomos também que o fluido se encontra em equilíbrio térmico local, ou muito próximo a este. Neste caso, não consideraremos que haja troca de calor, portanto a entropia é constante (fluxo adiabático \rightarrow Processo Isentrópico).

O estado termodinâmico da matéria é caracterizado por variáveis (como n , p e ε) medidas no referencial próprio do fluido, ou seja, no referencial de um observador que se move com o elemento de fluido – referencial de repouso [24].

A mecânica de fluidos se concentra em descrever o movimento de fluidos baseado em suas propriedades locais e nas leis de conservação de energia, momento e outras quantidades conservadas [25].

3.1 Hidrodinâmica Relativística

Diversos sistemas físicos macroscópicos podem ser descritos aproximadamente como um fluido perfeito. Este é definido como tendo em cada ponto uma velocidade \vec{v} , de modo que um observador se movendo com esta velocidade percebe o fluido ao seu redor como isotrópico [25].

O tensor de energia e momento é a quantidade tensorial que descreve o fluxo de energia e momento no espaço-tempo. Este é constituído pela contribuição da matéria e radiação. Serve como fonte do campo gravitacional na equação de campo de Einstein, Eq. (2.13). No caso de um fluido perfeito, em um sistema de coordenada qualquer, as componentes

do tensor Energia Momento são dadas por:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

A escolha de um sistema de coordenadas que se move com a matéria isto é, comóvel, leva às seguintes componentes para o tensor de Energia Momento:

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad (3.2)$$

onde ε é a densidade de energia e p a pressão.

Consideramos um elemento de volume V com nV partículas. As forças exercidas sob um elemento de fluido são devidas somente a pressão de elementos de fluido adjacentes, e são expressas em termos do tensor de energia e momento.

Se τ é o tempo próprio associado a origem do referencial localmente comóvel (LICF, do inglês *local inertial comoving frame*), a conservação de número de partículas pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\tau}(nV) = 0. \quad (3.3)$$

Essa equação não é covariante. A generalização desta lei, válida para qualquer referencial, é:

$$(nu^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (3.4)$$

Como bárions são muito mais pesados do que elétrons e neutrinos, a massa de repouso da estrela é considerada devida somente a contribuição de bárions [1, 2, 3]. Por isso n é denominado a densidade de bárions, não de partículas.

Alternativamente, a derivada covariante da lei de conservação de bárions, Eq. (3.4), pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} n u^\mu) = 0. \quad (3.5)$$

3.2 Termodinâmica Relativística

Supomos uma quantidade B de partículas (de uma única espécie) enclausurada em um volume V . Temos então $B = nV$, ou seja, n é a densidade de número de bárions, e $v = 1/n$ é o volume por bárions ambos medidos no referencial comóvel.

Seja ε a densidade de energia total (incluindo a energia de repouso) calculada neste referencial, e s a entropia por bárion, temos que a energia e entropia total neste volume V são respectivamente:

$$E = \varepsilon V, \quad (3.6)$$

$$S = sB. \quad (3.7)$$

A primeira lei da termodinâmica, $dQ = dE + p dV$, no referencial comóvel (próprio) de um elemento de fluido é idêntica a primeira lei no espaço plano (princípio da equivalência) [7,26]. Supondo um elemento de fluido de volume unitário:

$$d\dot{q} = d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + p d\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.8)$$

onde $d\dot{q}$ é a quantidade de calor ganha por bárion, e p é a pressão.

Se um processo ocorre em um elemento de fluido que está sempre em equilíbrio (processo adiabático), então:

$$d\dot{q} = T ds \quad (3.9)$$

onde s é a entropia por bárion e T é a temperatura.

Com isso, substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.8), temos a seguinte equação para o equilíbrio termodinâmico:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) &= -p d\left(\frac{1}{n}\right) + T ds \\ d\varepsilon &= \frac{\varepsilon + p}{n} dn + nT ds, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde estamos supondo que ε é função somente de (n, s) , ou seja $\varepsilon = \varepsilon(n, s)$, já que fizemos a hipótese de que o sistema é formado por uma única espécie de partícula.

Assim:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\right)_s = \frac{\varepsilon + p}{n}, \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right)_n = nT. \quad (3.12)$$

Equivalentemente, a pressão e temperatura do fluido são:

$$p \equiv -\frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial(1/n)} = n^2 \frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial n} = n^2 \left(\varepsilon \frac{\partial(1/n)}{\partial n} + \frac{1}{n} \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} \right) = n \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} - \varepsilon, \quad (3.13)$$

$$T \equiv \frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial s} = \frac{1}{n} \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}. \quad (3.14)$$

Como estamos supondo um processo isentrópico, ou seja em que o fluido sofre um processo adiabático e reversível, onde a entropia é conservada e o sistema permanece em equilíbrio termodinâmico, temos que $\varepsilon = \varepsilon(n, s)$ passa a ser função de um único parâmetro, $\varepsilon = \varepsilon(n)$ [24].

As leis e equações termodinâmicas no espaço curvo são as mesmas que no espaço Euclidiano – exceto pela inclusão da massa de repouso e outras formas de massa-energia nas variáveis ε e μ (o potencial químico, embora importante, não foi incluído neste trabalho) [7,26].

As equações de conservação estão contidas em $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

3.3 Equações de Estado para a Matéria

Em estrelas de nêutrons, o efeito da relatividade geral se torna considerável e não pode mais ser desprezado (como mencionado na introdução). A equação de estado da estrela de nêutrons é ainda desconhecida, devido a complexidade da natureza da matéria em seu interior [7]. Assume-se que difere significativamente da equação de estado para anãs brancas cuja densidade de energia é dominada pela massa de repouso de núcleos, enquanto a pressão é proporcionada por elétrons degenerados.

Diversas equações de estado foram propostas (para uma breve introdução sobre este assunto, veja a Ref.[7]), mas a relação entre densidade e massa ainda não é inteiramente compreendida, e isso causa incertezas na estimativa do raio.

Estrelas de nêutrons são muito mais densas que anãs brancas, são aproximadamente 3×10^{14} vezes mais densas que a Terra e sua densidade cai de 15 ordens de grandeza do centro à superfície [2]. A pressão de Fermi de nêutrons degenerados fornece estabilidade contra colapso gravitacional para estrelas de nêutrons mais leves, porém para estrelas mais massivas com densidades maiores que a densidade de equilíbrio da matéria nuclear, $\rho_0 \approx 2.51 \times 10^{14} g/cm^3$, a repulsão da força nuclear proporciona uma resistência adicional contra o colapso gravitacional além da proporcionada pela pressão de Fermi.

A densidade no interior de estrelas de nêutrons varia tanto que a matéria em seu interior pode ser separada em regiões de acordo com a densidade. Na camada mais externa (com $\rho = mn < 10^6 g/cm^3$) a estrela é formada por uma rede cristalina de ferro e elétrons livres. Com o aumento da densidade os elétrons se tornam relativísticos e são capturados por prótons (decaimento beta inverso, $p + e^- \rightarrow n + \nu$) tornando os núcleos cada vez mais ricos em nêutrons.

Em regiões mais densas, $\rho \sim 4.3 \times 10^{11} g/cm^3$, a fração proton/nêutron atinge um limite crítico de $n_p/n_n = 1/8$ [2, 7]. Os núcleos estão tão instáveis que qualquer aumento na densidade leva à um vazamento de nêutrons (do inglês *neutron drip*) e, esta região é

composta por um sistema bifásico em que núcleos, prótons e nêutrons livres coexistem e configuram o estado de menor energia.

Com o aumento da densidade, a fração n/p também aumenta, e o sistema se torna cada vez mais rico em nêutrons. Em regiões próximas ao centro, a estrela alcança densidades em torno da densidade nuclear, ρ_0 , e é composta predominantemente por nêutrons com uma pequena abundância de prótons e elétrons.

Quando a densidade excede a densidade nuclear, os núcleos começam a se dissolver e se fundir. A equação de estado neste caso depende da interação forte entre os núcleons [7] e é tópico de pesquisa atual.

A estrela pode ser modelada como um gás ideal de Fermi puramente de nêutrons, como o modelo adotado por Oppenheimer e Volkoff nos primeiros cálculos do limite de massa [12] em foi encontrado $0.7 M_{\odot}$ como o limite inferior para a massa máxima da estrela de nêutrons. No entanto esse modelo não é realista pois além de ignorar a interação forte entre os núcleons que tem uma contribuição importante na densidade de energia, uma configuração em equilíbrio formada somente de nêutrons nunca ocorreria na natureza, e sim uma combinação de prótons nêutrons e elétrons como descrita anteriormente.

Para estrelas de nêutrons reais, a força nuclear é decisiva para estabelecer o limite de massa. A repulsão entre núcleons torna a equação de estado mais dura (do inglês *stiff*), ou seja, aumenta a pressão para uma densidade de energia fixa, e possibilita a estabilidade de estrelas de nêutrons com maiores massas em comparação com o caso sem interação. A inclusão de interações nucleares empura o limite de massa de $0.7 M_{\odot}$ para até $3 M_{\odot}$ [13].

Como neste trabalho não estamos interessados em uma descrição detalhada e realista de estrelas de nêutrons, e sim no desenvolvimento do método via princípio variacional que nos permie uma descrição geral da configuração de equilíbrio da estrela com um número de graus de liberdade consideravelmente menor do que o método de TOV, nós utilizaremos o modelo de Oppenheimer e Volkoff como uma primeira estimativa para a equação de estado.

3.3.1 Gás de Fermi

Estrelas de nêutrons nascem do colapso de estrelas extremamente quentes ($T > 10^{10}K$). No entanto, sua temperatura interior cai rapidamente devido a emissão de neutrinos: em 100 anos a temperatura cai para 10^8K . E, esta ($k_B T \approx 10keV$) pode ser considerada fria quando comparada com a energia de nêutrons relativísticos degenerados, $\epsilon_F \approx 1000MeV$. Sendo assim, os efeitos de temperatura podem ser desprezados e a equação de estado é essencialmente a mesma para $T \approx 0$ [1, 2].

Primeiramente, para o desenvolvimento da equação de estado, consideramos um gás de Fermi de nêutrons degenerados não interagentes. Isto é, todos os estados quânticos até um certo ponto (energia de Fermi) estão ocupados por um único férmion (princípio da exclusão de Pauli). E, estão sendo desconsideradas quaisquer interações nucleares (ou interação fraca).

Na teoria cinética dos gases, a densidade de número ($n = dB/d^3x$) no espaço de fase ($dn/d^3k = dB/d^3x d^3k$) proporciona uma descrição completa do sistema.

$$\frac{dB}{d^3x d^3k} = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} f(\epsilon), \quad (3.15)$$

onde $(2\pi\hbar)^3$ é o volume de uma célula no espaço de fase, g é o número de estados de uma partícula com um dado valor de momento \vec{k} , ou seja, a degenerescência. Para férmions $g = 2$. E, $f(\epsilon)$ é a função de distribuição para um gás de Fermi.

Para um gás ideal em equilíbrio, a distribuição de férmions é descrita pela Estatística de Fermi-Dirac, (cf. Apêndice B):

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1}, \quad (3.16)$$

onde k_B é a contante de Boltzmann e T é a temperatura.

A condição de degenerescência (regime quântico) é válida para baixas temperaturas, onde entende-se baixas temperaturas em comparação a temperatura de Fermi, ou seja,

para férmions degenerados a temperatura pode ser considerada nula ($(\mu - mc^2) \gg k_B T$), logo $\mu/k_B T \rightarrow \infty$. Neste caso a distribuição (3.16) fica:

$$f(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{para } \epsilon \leq \epsilon_F, \\ 0 & \text{para } \epsilon > \epsilon_F. \end{cases} \quad (3.17a)$$

$$(3.17b)$$

Com isso, a densidade de número de nêutrons degenerados é:

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{dB}{d^3x d^3k} d^3k \\ n &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde a integral representa a soma de (3.15) sobre todos os estados (de momento) ocupados até o momento máximo (k_F o momento de Fermi) e a função $f(\epsilon)$, foi substituída pela distribuição de Fermi Dirac no limite quântico (3.17a).

É conveniente definir a quantidade $x = k_F/m_n c$, isto é um momento de Fermi adimensional.

$$x = \frac{k_F}{m_n c} = \frac{(3\pi^2\hbar^3)^{1/3}}{m_n c} n^{1/3}. \quad (3.19)$$

A densidade de energia ε será dada pela soma sobre E

$$\varepsilon = \int E \frac{dB}{d^3x d^3k} d^3k, \quad (3.20)$$

onde

$$E = \sqrt{k^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (3.21)$$

Podemos escrever então a contribuição de ε da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k_F) &= \frac{8\pi}{(2\pi\hbar^3)} \int_0^{k_F} E(k)k^2 dk \\
&= \frac{8\pi}{(2\pi\hbar^3)} \int_0^{k_F} (k^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}k^2 dk \\
&= \varepsilon_0 \int_0^{k_F/mc} (u^2 + 1)^{1/2}u^2 du \\
&= \frac{\varepsilon_0}{8} [(2x^3 + x)(1 + x^2)^{1/2} - \operatorname{arcsinh}(x)], \tag{3.22}
\end{aligned}$$

onde ε inclui a contribuição de massa de repouso. Sendo $\varepsilon_0 = m_n^4 c^5 / \pi^2 \hbar^3 = 1,64642 \times 10^{37} \text{ ergs/cm}^3$.

A pressão de um sistema com uma distribuição de momento isotrópica é dada por, (cf. Apêndice B):

$$p = \frac{1}{3} \int kv \frac{dB}{d^3x d^3k} d^3k, \tag{3.23}$$

onde a velocidade é $v = kc^2/E$

$$\begin{aligned}
p(k_F) &= \frac{1}{3} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} kvk^2 dk \\
&= \frac{1}{3} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} (k^2c^2 + m^2c^4)^{-1/2}c^2k^4 dk \\
&= \frac{\varepsilon_0}{3} \int_0^{k_F/mc} (u^2 + 1)^{-1/2}u^4 du \\
&= \frac{\varepsilon_0}{24} [(2x^3 - 3x)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \operatorname{arcsinh}(x)]. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Percebe-se que a equação acima obedece a relação termodinâmica

$$p = n^2 \frac{d(\varepsilon/n)}{dn} = n \frac{d\varepsilon}{dn} - \varepsilon, \tag{3.25}$$

derivada da 1ª Lei.

No limite $x \ll 1$ (aproximação não relativística), as equações para a densidade de energia (3.22) e pressão (3.24) ficam:

$$\varepsilon(n) \simeq mnc^2 \left[1 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{56}x^4 + \frac{1}{48}x^6 - \frac{15}{1408}x^8 + \mathcal{O}(x^{10}) \right], \quad (3.26)$$

e,

$$p(n) \simeq mnc^2 \frac{1}{8} \left[\frac{8}{5}x^2 - \frac{4}{7}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{5}{22}x^8 + \mathcal{O}(x^{10}) \right]. \quad (3.27)$$

Usando a aproximação em primeira ordem, o gás pode ser aproximado como politrópico, ou seja obedece a relação $p = \kappa n^\gamma$:

$$p = \frac{(3\pi^2\hbar^3)^{2/3}}{5m} n^{5/3}. \quad (3.28)$$

E, com isso, a equação de estado fica:

$$\varepsilon = mnc^2 + \frac{Kn^\gamma}{\gamma - 1}. \quad (3.29)$$

Já no limite $x \gg 1$ (aproximação ultra relativística), as equações para a densidade de energia (3.22) e pressão (3.24) tomam as seguintes formas:

$$\varepsilon(n) \simeq mnc^2 \frac{3}{4x^3} \left[x^4 + x^2 - \frac{1}{2} \ln(2x) \right], \quad (3.30)$$

$$p(n) \simeq mnc^2 \frac{1}{4x^3} \left[x^4 - x^2 + \frac{3}{2} \ln(2x) \right]. \quad (3.31)$$

E, a aproximação politrópica e equação de estado ficam:

$$\begin{aligned} p &= \frac{(3\pi^2\hbar^3 m^3 c^5)^{1/3}}{4} n^{4/3} \\ \varepsilon &= 3p \end{aligned} \quad (3.32)$$

Capítulo 4

Princípios Variacionais aplicados à Relatividade Geral: Caso Contínuo

Tendo discutidos as duas principais faces do problema (gravidade/macrosscópica e matéria/microscópica) separadamente, apresentamos a seguir como estas atuam em conjunto na descrição da estrutura de estrelas de nêutrons (do equilíbrio ao colapso) utilizando o princípio variacional.

O princípio de mínima ação declara que as equações (diferenciais) de movimento de qualquer sistema físico podem ser, com uma escolha criteriosa de condições iniciais e de contorno, integradas. Assim, todas as equações físicas fundamentais de campos clássicos, incluindo a equação de Einstein, podem ser derivadas a partir do princípio variacional. A ação é definida como a integral da Lagrangiana ao longo do caminho seguido por um sistema físico e, é geralmente expressa como:

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (4.1)$$

onde \mathcal{L} é a densidade da lagrangeana desse sistema.

O princípio de Hamilton (princípio da ação mínima) postula que o caminho seguido pelo sistema, entre dois extremos fixos, é aquele em que a ação é estacionária em relação a pequenas variações no sistema (δx) [27]. Assim as equações de movimento de um sistema (clássico) podem ser derivadas a partir da extremização da Lagrangiana.

A ação satisfaz então um princípio variacional ou seja, a variação $\delta\mathcal{S}$ deve ser nula para perturbações infinitesimais no caminho seguido pelo sistema.

A exigência de que a ação deve ser estacionária sob pequenas perturbações, $\delta\mathcal{S} = 0$, é satisfeita se :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dq} - \frac{d}{dt} \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}} = 0, \quad (4.2)$$

onde $q(t)$ são as coordenadas generalizadas que definem a configuração do sistema. As equação acima são denominadas equações de Euler-Lagrange [28, 29].

4.1 Ação Gravitacional com Matéria em Relatividade Geral

A fim de derivar as equações de Einstein com fontes por meio do princípio variacional devemos supor a presença de outros campos além do campo gravitacional, uma vez que desprezando esse campos extras obteríamos a equação do campo gravitacional no vácuo. Sendo assim, ação total do sistema é a soma da ação da matéria com a ação gravitacional: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_M + \mathcal{S}_G$ [9], onde

$$\mathcal{S}_M = - \int dx^4 \sqrt{-g} \varepsilon(n), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{S}_G = - \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} \mathcal{R} \quad \text{onde, } \kappa = 8\pi G/c^4 \text{ e } g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (4.4)$$

A ação dada pela Eq. (4.4) é chamada de ação de Einstein-Hilbert. Pelo princípio da ação mínima, ou seja $\delta\mathcal{S} = 0$ com extremos fixos, devemos obter a equação de Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$.

Demonstração:

Pelo princípio da ação mínima, a variação da ação total deve ser nula, ou seja:

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{S}_G + \mathcal{S}_M) &= 0, \\ \delta\mathcal{S}_G &= -\delta\mathcal{S}_M.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Na parte esquerda da Eq. (4.5) temos a variação da ação gravitacional em relação a métrica $g_{\mu\nu}$, que são as variáveis dinâmicas na relatividade geral. Explicitamente:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_G &= -\int dx^4 \left[\frac{1}{2\kappa} \delta(\sqrt{-g}\mathcal{R}) \right] \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int dx^4 [\mathcal{R}\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta\mathcal{R}].\end{aligned}\tag{4.6}$$

Usando a fórmula de Jacobi de derivação de determinante, $\delta g = \delta \det(g_{\mu\nu}) = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$, temos:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},\tag{4.7}$$

onde, na última igualdade, foi usada a propriedade $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, que vem do fato de que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ é o traço do tensor de Kronecker, $g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$, e por ser um tensor constante é invariante, ou seja, $\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = 0$ [21]. Com isso, e usando o fato do escalar de Ricci, \mathcal{R} , poder ser escrito como $g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$, temos que a variação da ação gravitacional fica:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_G &= -\frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \left[\mathcal{R} \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\mathcal{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu}) \right] \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \left\{ \mathcal{R} \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \sqrt{-g} [\mathcal{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \Gamma_{\mu\rho}^\rho)] \right\} \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \mathcal{R}_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right] \text{ (o termo de derivada total foi desprezado)} \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \left[\mathcal{R} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} - \mathcal{R}^{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} G^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

onde foi usada a equação de Palantini, vide Ref. [21] e, pelo teorema da divergência [30], o termo de derivada total pode ser desprezado assumindo que as variações são nulas na superfície.

Em seguida desenvolvemos a parte direita da Eq. (4.5), ou seja a variação da ação da matéria. Para isto utilizamos os vínculos de conservação de número de bárions, $(nu^\mu)_{;\mu} = 0$, e a normalização da quadri-velocidade, $u^\mu u_\mu = 1$, acoplados à ação por meio de multiplicadores de Lagrange. Neste caso, a ação deve ser variada em relação a n e u^μ , além da variação em relação à métrica.

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}_M &= \delta \int dx^4 \sqrt{-g} \left[-\varepsilon + \xi(nu^\mu)_{;\mu} + \frac{1}{2}\zeta(u^\mu u_\mu - 1) \right] \\ &= \delta \int dx^4 \sqrt{-g} \left[-\varepsilon - \xi_{;\mu} nu^\mu + \frac{1}{2}\zeta(u^\mu u_\mu - 1) \right].\end{aligned}\quad (4.9)$$

Variando, primeiramente, com respeito a n e u^μ , obtemos, respectivamente:

$$-\frac{\delta\varepsilon}{\delta n} - u^\mu \xi_{;\mu} = 0, \quad (4.10)$$

$$-n\xi_{;\mu} + \zeta u_\mu = 0. \quad (4.11)$$

Com isso, é fácil perceber que:

$$\xi_{;\mu} = -\frac{\delta\varepsilon}{\delta n} u_\mu, \quad (4.12)$$

$$\zeta = -n \frac{\delta\varepsilon}{\delta n}. \quad (4.13)$$

Variando agora em relação a métrica, $g_{\mu\nu}$, e usando as relação acima temos:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_M &= \delta \int dx^4 \sqrt{-g} \left[-\varepsilon - \xi_{;\mu} n u^\mu + \frac{1}{2} \zeta (u^\mu u_\mu - 1) \right] \\
&= \int dx^4 \delta \sqrt{-g} \left[-\varepsilon - \xi_{;\mu} n u^\mu + \frac{1}{2} \zeta (u^\mu u_\mu - 1) \right] + \sqrt{-g} \delta \left[\frac{1}{2} \zeta u^\mu u_\mu \right] \\
&= \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \left[-\varepsilon + n u^\mu \frac{\delta\varepsilon}{\delta n} u_\mu - \frac{1}{2} n \frac{\delta\varepsilon}{\delta n} (u^\mu u_\mu - 1) \right] - \frac{1}{2} \frac{\delta\varepsilon}{\delta n} n u^\mu u^\nu \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \left\{ g^{\mu\nu} \left[-\varepsilon + n \frac{\delta\varepsilon}{\delta n} \right] - \frac{1}{2} \frac{\delta\varepsilon}{\delta n} n u^\mu u^\nu \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \left\{ g^{\mu\nu} \left[-\varepsilon + n \frac{\varepsilon + p}{n} \right] - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon + p}{n} n u^\mu u^\nu \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \left\{ g^{\mu\nu} p - \frac{1}{2} (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo, substituindo as Eqs. (4.8) e (4.14) na Eq. (4.5), obtemos :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} G^{\mu\nu} &= - \left\{ -\frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right\}, \\
G^{\mu\nu} &= \kappa T^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ou seja, a equação de Einstein. **(c.q.d.)**

4.2 Equilíbrio Hidrostático em Relatividade Geral

Resolvendo as equações de Einstein para uma estrela com simetria esférica formada por um fluido perfeito, Tolman [32], Oppenheimer e Volkoff [12] desenvolveram as equações que descrevem o equilíbrio hidrostático da estrela. No entanto, esta solução pode corresponder a uma configuração de equilíbrio estável ou instável. Na maioria dos casos, são as soluções estáveis que apresentam interesse físico.

É possível determinar se a solução de equilíbrio é estável ou não pelo seguinte teorema: Uma estrela constituída de fluido perfeito (com potencial químico e entropia por nucleon constantes) passa de estável para instável com respeito a qualquer modo radial de oscilação

somente em valores de densidade central em que a massa e o número de bárions são estacionários [2, 9], isto é

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial n_c} &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial n_c} &= 0,\end{aligned}\tag{4.16}$$

onde modo de oscilação “radial” se refere a modos de oscilação em que a perturbação na densidade é função somente de r e t .

Para o leitor interessado, uma demonstração deste teorema pode ser encontrada na Ref. [31]. Para as aplicações deste trabalho, é suficiente fazer uma análise puramente qualitativa deste teorema [2]. A figura a seguir é uma representação esquemática da solução das equações de TOV em uma região em que a massa cresce e decresce em função da densidade central.

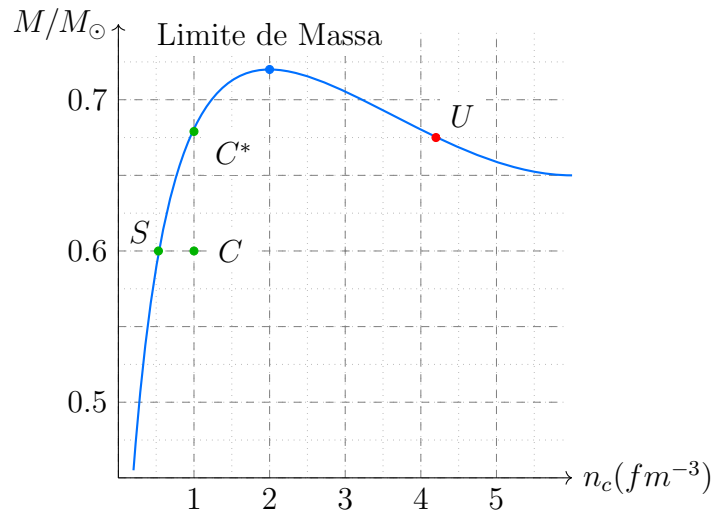


Figura 4.1: Massa em função da densidade central.

Supondo que uma configuração de equilíbrio, representada por S em Fig.(4.1), seja perturbada de forma a aumentar sua densidade central n_c , ou seja, a estrela é deslocada para C (comprimida). A configuração de equilíbrio para tal densidade central é representada por C^* . A estrela C tem portanto um déficit de massa em relação à sua configuração

de equilíbrio e, por consequência, a atração gravitacional nesta estrela é menor que a pressão. Assim, as forças atuando sobre C agirão de forma a forçá-la a retornar a posição de equilíbrio original S .

Analogamente, se a estrela S sofre uma perturbação que diminui sua densidade central, sua atração gravitacional supera a pressão e, as forças atuando sobre a estrela a retornam para a posição de equilíbrio S .

Aplicando esta mesma análise a uma configuração de equilíbrio em U , localizada na parte decrescente da curva de $M \times n_c$ na Fig. (4.1), chegamos a conclusão de que se a estrela for comprimida ou expandida por perturbações radiais, sua tendência é se afastar da configuração de equilíbrio.

Sendo assim, temos que a condição de equilíbrio estável deve satisfazer

$$\frac{\partial E}{\partial n_c} > 0, \quad (4.17)$$

esta é uma condição necessária para estabilidade, mas não suficiente.

Em vista desta análise qualitativa, é conveniente escrever as equações que descrevem a estrutura de uma estrela relativística em equilíbrio por meio do princípio variacional.

A forma geral da métrica para a geometria estática de simétrica esférica no interior da estrela, encontrada em (2.14), [9,10]:

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (4.18)$$

onde ν e λ são funções somente de r .

A partir da componente 00 da equação de Einstein, temos:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{\kappa}{r} \int_0^r r^2 \varepsilon(n(r)) dr, \quad (4.19)$$

isto é, a relação entre o efeito da distorção do espaço, λ , e a distribuição de energia, ε . Sabendo que para $r > R$, ou seja fora da estrela, temos $n(r) = 0$, podemos escrever a

equação anterior como:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{\kappa}{r} \int_0^\infty r^2 \varepsilon(n(r)) dr \quad (4.20)$$

e, comparando com a solução Schwarzschild, (2.20), concluímos que a energia total contida na esfera de raio r (contribuição da matéria + contribuição gravitacional + energia de repouso) é dada por:

$$E = 4\pi \int_0^\infty r^2 \varepsilon(n(r)) dr. \quad (4.21)$$

Assim, $M = E/c^2$ pode ser identificada com a massa do sistema vista por um observador longe da estrela.

A energia total interna do sistema (ou seja, a energia da matéria), mais a contribuição de massa de repouso seria:

$$E_{int} = 4\pi \int_0^\infty e^\lambda r^2 \varepsilon(n(r)) dr. \quad (4.22)$$

Como $e^\lambda \geq 1$ sempre (se não houver singularidade), então:

$$E_{int} \geq E = 4\pi \int_0^\infty r^2 \varepsilon(n(r)) dr. \quad (4.23)$$

A razão disto é que para um observador distante a energia total, percebida como a massa do sistema através de sua força gravitacional, contém também a energia do campo gravitacional. Que pode ser calculada pela diferença $E_{int} - E$.

O número de bárions é dado por:

$$B = 4\pi \int_0^\infty e^\lambda n(r) r^2 dr, \quad (4.24)$$

e, este é constante e conservado já que não há transporte de matéria, $\delta N = 0$.

Uma dada configuração estelar (com entropia por nucleon uniforme) satisfaz a condição de equilíbrio se e somente se E for estacionário com respeito a todas as variações de ε

que não variam o número de bárions B (e não modificam a entropia por nucleon e a composição química). O equilíbrio é estável em relação às oscilações radiais se e somente se E for um mínimo com respeito a tais variações [9].

Em posse disto, usamos o método de multiplicadores de Lagrange [30] para encontrar a equação que descreve o estado de equilíbrio. A energia, E , será estacionária com respeito a todas as variações que não modificam B se e somente se existe uma constante μ tal que a quantidade $E - \mu B$ é estacionária com respeito a tais variações [9].

Ou seja, o estado de equilíbrio hidrostático é especificado pelo mínimo da energia total sob o vínculo do número de bárions ser conservado.

Utilizando o princípio variacional, a energia total (ou massa $\times c^2$) deve ser mínima, dada a condição de conservação de número de bárions, ou seja:

$$\delta E [n] - \mu \delta B [n] = 0. \quad (4.25)$$

Utilizando as integrais (4.21) e (4.56) na equação (4.25), obtemos:

$$4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \delta n - \mu e^\lambda (\delta \lambda n + \delta n) \right\} = 0, \quad (4.26)$$

onde a variação $\delta \lambda$ pode ser obtida a partir de (4.19):

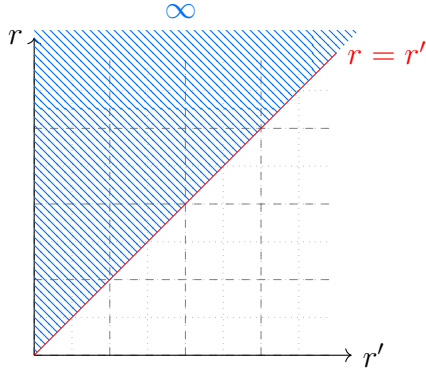
$$\delta \lambda = \frac{\kappa}{2r} e^{2\lambda} \int_0^r r'^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \delta n dr'. \quad (4.27)$$

Substituindo então (4.27) em (4.26), obtemos:

$$4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \delta n - \mu e^\lambda \left[\frac{\kappa}{2r} n e^{2\lambda} \int_0^r r'^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \delta n dr' + \delta n \right] \right\} = 0$$

$$4\pi \left\{ \int_0^\infty r^2 dr \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} - \mu e^\lambda \right] \delta n - \mu \int_0^\infty r^2 dr n e^{3\lambda} \frac{\kappa}{2r} \int_0^r r'^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \delta n dr' \right\} = 0. \quad (4.28)$$

Trocando a ordem das integrais em r e r' no último termo da integral anterior, temos:



$$\int f(r)dr \int g(r')dr' \quad \int g(r')dr' \int f(r)dr$$

$$\begin{array}{l} 0 < r' < r \\ 0 < r < \infty \end{array} \quad \begin{array}{l} r' < r < \infty \\ 0 < r' < \infty \end{array}$$

$$(4.29) \qquad (4.30)$$

Usando os limites dados pela Eq. (4.30) e fazendo a troca das variáveis mudas, $r \leftrightarrow r'$, temos:

$$4\pi \left\{ \int_0^\infty r^2 dr \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} - \mu e^\lambda \right] \delta n - \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty r^2 dr \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \delta n \int_r^\infty r' n e^{3\lambda} dr' \right\} = 0. \quad (4.31)$$

Logo, $\delta E - \mu \delta B$ é zero para qualquer variação δn se e somente se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} - \mu e^\lambda - \frac{\kappa}{2} \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \int_r^\infty r n e^{3\lambda} dr &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} &= \mu \left\{ e^\lambda + \frac{\kappa}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \int_r^\infty r n e^{3\lambda} dr \right\} \\ \frac{1}{\mu} &= \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right]^{-1} e^\lambda + \frac{\kappa}{2} \int_r^\infty r n e^{3\lambda} dr. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Usando a relação termodinâmica (3.11) e as equações (4.19) e (4.21), podemos substituir $e^{-2\lambda}$ por $1 - 2GM/rc^2$ na equação anterior, obtendo assim:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{n}{p + \varepsilon} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1/2} + \frac{\kappa}{2} \int_r^\infty r' n(r') \left[1 - \frac{2GM}{r'^2 c^2} \right]^{-3/2} dr'. \quad (4.33)$$

Como multiplicador de Lagrange μ é uma constante, independente de r , podemos eliminá-lo derivando a equação anterior com respeito a r .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \right) &= \left\{ \frac{n'}{p + \varepsilon} - \frac{n(p' + \varepsilon')}{(p + \varepsilon)^2} \right\} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1/2} + \\
&+ \frac{Gn}{(p + \varepsilon)} \left\{ \frac{4\pi r \varepsilon}{c^4} - \frac{M}{r^2 c^2} \right\} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-3/2} + \\
&- \frac{\kappa}{2} r n \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-3/2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Considerando que a entropia por nucleon é uniforme (processo isentrópico = reversível e adiabático, entropia permanece constante):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} \left(\frac{\varepsilon}{n} \right) + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{n} \right) &= 0 \\
\frac{\varepsilon' n - \varepsilon n'}{n^2} - p \frac{n'}{n^2} &= 0 \\
\frac{\varepsilon'}{n} - \frac{\varepsilon + p}{n^2} n' &= 0 \\
n' &= \frac{n \varepsilon'}{p + \varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Usando então a Eq. (4.35)

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{n \varepsilon'}{(p + \varepsilon)^2} - \frac{n(p' + \varepsilon')}{(p + \varepsilon)^2} \right\} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1/2} + \\
&+ \frac{Gn}{(p + \varepsilon)} \left\{ \frac{4\pi r \varepsilon}{c^4} - \frac{M}{r^2 c^2} - \frac{4\pi}{c^4} r(p + \varepsilon) \right\} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-3/2} = 0 \\
&- \frac{np'}{(p + \varepsilon)^2} - \frac{Gn}{(p + \varepsilon)} \left\{ \frac{M}{r^2 c^2} + \frac{4\pi r p}{c^4} \right\} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1} = 0 \\
&- \frac{p'}{p + \varepsilon} - G \left\{ \frac{M}{r^2 c^2} + \frac{4\pi r p}{c^4} \right\} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1} = 0 \\
p' &= -G(p + \varepsilon) \left\{ \frac{M}{r^2 c^2} + \frac{4\pi r p}{c^4} \right\} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Reorganizando os termos, encontramos finalmente, via princípio variacional, a chamada equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff que descreve a estrutura da estrela em equilíbrio hidrostático.

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon m}{c^2 r^2} \left[1 + \frac{p}{\epsilon}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p}{mc^2}\right] \left[1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right]^{-1}. \quad (4.37)$$

Esta expressa o equilíbrio entre a força que atua em uma camada de matéria devido a pressão do gás no interior desta e o “peso” da matéria externa a esta camada comprimindo-a. O primeiro termo do lado direito é a atração gravitacional Newtoniana que atua em uma camada de matéria devido a ação da massa em seu interior. Enquanto os demais três termos correspondem às correções relativísticas.

Em estrelas em que a pressão é muito menor do que a densidade de energia, como é o caso de anãs brancas cuja densidade de energia é dominada pela massa de repouso de bárions (que contribuem minimamente para a pressão), as correções relativísticas podem ser desprezadas e a estrela é descrita puramente pela equação Newtoniana, em contraste com estrelas de nêutrons em que a velocidade do som se aproxima da velocidade da luz e estas correções se tornam essenciais.

É importante notarmos que a pressão atua junto com a densidade de energia como uma fonte de gravidade e esta não consegue impedir o colapso de uma estrela com massa maior que um certo limite. Ou seja, a existência de uma massa máxima está intrinsecamente relacionada a natureza das equações que as descrevem – a relatividade geral. Enquanto em estrelas Newtonianas, o limite de Chandrasekhar (de anãs brancas) é devido a mudança que ocorre no coeficiente adiabático durante a transição dos elétrons de não relativísticos para relativísticos.

4.3 Colapso Gravitacional em Relatividade Geral

Sabemos que uma estrela fria de massa maior que um certo limite não consegue atingir uma configuração de equilíbrio como anã branca ou estrela de nêutrons [12], ou seja, a partir de um certo limite de massa, a pressão se torna insuficiente para sustentar a atração gravitacional e a estrela entra em colapso.

4.3.1 No Interior do Raio de Schwarzschild

Vimos que o raio $r = r_S = 2GM/c^2$ é especialmente importante na Sec. 2.4. A força gravitacional em $r = r_S$ é infinita, conseqüentemente nenhum corpo estático pode ter raio menor que r_S . O que acontece então com um corpo dinâmico em contração? Uma esfera de poeira em colapso devido a sua própria gravidade pode atingir e ultrapassar $r = r_S$? Durante o processo de contração, a massa da esfera não varia, ou seja, as partículas de poeira na superfície da esfera seguem em queda livre (devido a falta de força para sustentar a atração gravitacional) em direção ao centro da mesma.

Consideramos o movimento de partículas teste, inicialmente em repouso no infinito, caindo radialmente em direção ao centro gravitacional de uma esfera. Já vimos que a geometria no exterior da estrela é descrita pela métrica de Schwarzschild [18, 24]. Sendo assim, seguindo [21], a geodésica de tais partículas pode ser calculada por:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0, \quad (4.38)$$

onde \mathcal{K} é definido como:

$$2\mathcal{K} \equiv g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (4.39)$$

Usando o tempo próprio como parâmetro, isto é $u = \tau$, temos:

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 2\mathcal{K}, \quad (4.40)$$

note que, como a partícula cai radialmente, $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. E, como usamos $u = \tau$, segue-se que $2\mathcal{K} = 1$. A equação (4.38) calculada em $\mu = 0$ fica então:

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \text{const.} \quad (4.41)$$

Devemos então resolver o seguinte sistema de equações:

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \text{const}, \quad (4.42)$$

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1, \quad (4.43)$$

onde a constante acima representa a condição inicial. Para uma partícula inicialmente em repouso caindo do infinito, devemos fazer a escolha $\text{const} = 1$, de forma que $\dot{t} \approx 1$ para $r \rightarrow \infty$. Simplificando este sistema, temos:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{r_S}{r}. \quad (4.44)$$

Tomando a raiz negativa, apropriada para geodésicas orientada para o centro, temos:

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3r_S^{1/2}}(r_0^{3/2} - r^{3/2}), \quad (4.45)$$

onde a partícula se encontra na posição r_0 no tempo próprio τ_0 . Note que não há comportamento singular em $r = r_S$ e, a partícula cai continuamente até $r = 0$ em um tempo próprio finito. Ou seja, a esfera leva um tempo finito para contrair-se até r_S e, uma vez atingido, deve necessariamente continuar a contrair-se.

Contudo, descrevendo este mesmo movimento em termos das coordenadas de Schwarzschild, temos:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = -\sqrt{\frac{r}{r_S}} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}. \quad (4.46)$$

Integrando, obtemos:

$$t - t_0 = -\frac{2}{3r_S^{1/2}} \left(r^{3/2} - r_0^{3/2}\right) - 2r_S \left(r^{1/2} - r_0^{1/2}\right) + r_S \ln \left| \frac{[(r/r_S)^{1/2} + 1][(r_0/r_S)^{1/2} - 1]}{[(r/r_S)^{1/2} - 1][(r_0/r_S)^{1/2} + 1]} \right|, \quad (4.47)$$

para r_0 e r muito maiores que r_S , os resultados (4.45) e (4.47) são aproximadamente os mesmos, como esperado devido ao comportamento assintótico da métrica de Schwarzschild.

No entanto, para $r \approx r_S$, é necessário um tempo coordenado t infinito para se aproximar de $r = r_S$ [9, 10, 18, 24]. O gráfico em Fig.(4.2) (em unidades naturais, $G = c = 1$) ilustra este comportamento assintótico comparando o tempo próprio da partícula teste com o tempo coordenado de Schwarzschild.

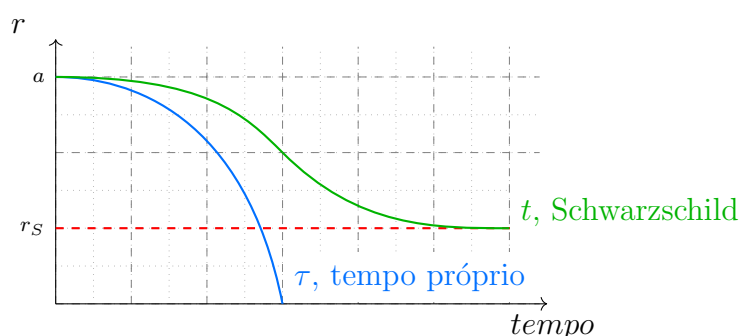


Figura 4.2: O colapso em um buraco negro de Schwarzschild descrito por dois referenciais. Em verde, um observador distante - coordenada de Schwarzschild; e em azul, um observador comóvel à matéria em queda livre - tempo próprio

No referencial de Schwarzschild, $r = 0$ nunca é alcançado, as partículas levam um tempo infinito dada pela Eq. (4.47), para alcançarem o raio de Schwarzschild, como podemos notar pela natureza assintótica da curva t (verde), impossibilitando a entrada de partículas nesta região. Em contrapartida, no referencial comóvel, as partículas em queda livre levam um tempo finito para alcançarem e ultrapassarem o raio de Schwarzschild, finalizando o colapso em $r = 0$ em um tempo finito; como é visto na Eq. (4.45).

A partir desta análise concluímos que não há singularidades na geometria do espaço-tempo na esfera de Schwarzschild ou seja, o raio de Schwarzschild não é uma singularidade geométrica e sim um problema da escolha da métrica utilizada. Devido a possibilidade de reescrever essa geometria em um sistema de coordenadas que não apresenta singularidade em r_S inferimos que a singularidade na métrica de Schwarzschild é meramente uma sin-

gularidade de coordenadas [24]. Em contraste com $r = 2GM$, $r = 0$ é uma singularidade física; este é um ponto de curvatura e força gravitacional infinitas.

Queremos então acompanhar uma esfera contraindo conforme sua superfície ultrapassa a esfera de Schwarzschild. Este interior precisa ser descrito por outra métrica que não seja a de Schwarzschild. O gráfico desenhado na Fig.(4.2) justifica a necessidade desta mudança da métrica.

Para analisar o campo gravitacional no vácuo fora da estrela, é conveniente introduzir um referencial feito por partículas teste em queda livre com velocidade zero no infinito. Em contraste com o referencial de Schwarzschild, esse referencial abrange o interior da esfera de Schwarzschild assim como a região exterior.

A métrica externa toma a seguinte forma:

$$ds^2 = (cd\tau)^2 - \left[\frac{3}{2} \frac{R - c\tau}{r_S} \right]^{-2/3} dR^2 - \left[\frac{3}{2} R - c\tau \right]^{4/3} r_S^{2/3} (d^2\theta + \text{sen}^2\theta d^2\phi), \quad (4.48)$$

obtida a partir da métrica de Schwarzschild (2.20) utilizando a transformação de Novikov $r = r_S^{1/3} \left[\frac{3}{2}(R - c\tau) \right]^{2/3}$ [23] (inspirada no cálculo da trajetória de uma partícula em queda livre (4.45) e, escolhendo uma coordenada temporal, τ , ortogonal à coordenada radial R .

A nova coordenada radial R é a posição da partícula em que sua velocidade é nula (ou seja, corresponde à coordenada Lagrangiana do sistema), e a coordenada temporal τ é o tempo próprio da mesma. O tempo τ em que uma partícula em R atravessa o raio de Schwarzschild é dado por:

$$\frac{3}{2}(R - c\tau) = r_S. \quad (4.49)$$

No interior da estrela em colapso, a solução (4.48) não é válida. Esta deve ser igual a solução interna na superfície da estrela. Para uma esfera de poeira com densidade de energia uniforme em contração a métrica interior é dada por:

$$ds^2 = (cd\tau)^2 - \left[\frac{3}{2}(a - c\tau) \right]^{4/3} \frac{r_S^{2/3}}{a^2} [dR^2 + R^2(d^2\theta + \text{sen}^2\theta d^2\phi)], \quad (4.50)$$

onde a é o raio da superfície da esfera, em coordenadas Lagrangeanas, ou seja, que acompanha a contração da esfera.

Com isso vemos que é possível tratar da geometria no interior do raio de Schwarzschild uma vez feita uma “simples” mudança de referencial. A demonstração das métricas dadas pelas Eqs. (4.48) e (4.50) estão fora dos objetivos desta tese. Para maiores detalhes recomendam-se as Refs. [22, 23,24].

4.3.2 Colapso de Poeira

Próximo ao raio de Schwarzschild, como demonstrado na Sec. 2.4, a atração gravitacional tende ao infinito, enquanto a pressão permanece finita. Assim, investigando a situação onde a superfície da estrela aproxima-se do raio de Schwarzschild, em primeira aproximação a pressão pode ser desprezada. Este consiste o caso mais simples de colapso, desenvolvido por Oppenheimer e Snyder [14], isto é, um sistema esfericamente simétrico com pressão nula, ou seja, o colapso de uma esfera de poeira. Como a atração gravitacional é a única força atuando sobre as partículas de poeira, estas vão cair em queda livre em direção ao centro da estrela durante o colapso e seu raio necessariamente vai se aproximar do raio de Schwarzschild $r_S = 2MG/c^2$. Para a solução deste problema, é conveniente usar um referencial, ao mesmo tempo, síncrono e comóvel. Isto é, a coordenada temporal t representa o tempo próprio do fluido em cada ponto do espaço e a coordenada radial r acompanha cada elemento de fluido. A métrica para este caso é:

$$ds^2 = dt^2 - A(r, t)dr^2 - B(r, t)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (4.51)$$

O tensor de energia momento, (3.1), para um fluido sem pressão fica:

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu, \quad (4.52)$$

como, no referencial comóvel, temos $u^\mu \doteq \delta_0^\mu$, então

$$T_{00} = \varepsilon. \quad (4.53)$$

As equações de Einstein podem ser escritas na forma $R_{\mu\nu} = \kappa S_{\mu\nu}$, onde $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}T^\sigma_\sigma$ [9]:

$$\kappa S_{00} = \kappa\varepsilon = -\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}^2}{2A^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2}, \quad (4.54a)$$

$$\kappa S_{11} = \kappa\varepsilon = \frac{1}{A} \left(-\frac{2B''}{B} + \frac{B'^2}{B^2} + \frac{A'B'}{AB} \right) + \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A^2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}, \quad (4.54b)$$

$$\kappa S_{22} = \kappa\varepsilon = \frac{2}{B} - \frac{1}{A} \left(\frac{B''}{B} - \frac{A'B'}{2AB} \right) + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2AB}, \quad (4.54c)$$

$$\kappa S_{01} = 0 = -\frac{\dot{B}'}{B} + \frac{\dot{B}B'}{2B^2} + \frac{\dot{A}B'}{2AB}. \quad (4.54d)$$

Por simplicidade, supomos que a densidade de energia é uniforme, isto é, não depende da coordenada radial, ou seja $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Analisando as Eqs. (4.54a) – (4.54d) é fácil perceber que devemos procurar uma solução de variáveis separadas, isto é: $A = U^2(t)f(r)$ e $B = V^2(t)g(r)$. Note que se a pressão não fosse nula não seria possível encontrar uma solução desse tipo (uma demonstração deste fato encontra-se no Apêndice C). A Eq.(4.54d) exige então que: $\dot{U}/U = \dot{V}/V$ e, podemos normalizar f e g de forma que $U(t) = V(t)$ [23]. Podemos também redefinir a coordenada radial como uma função $\tilde{r} = \tilde{r}(r)$. Escolhendo em particular a função $\tilde{r} = \sqrt{g(r)}$, de forma que f e g sejam substituídos por: $\tilde{f} = f4g/g'^2$ e $\tilde{g} = \tilde{r}^2$. Ignorando os tildes, temos:

$$A = U^2(t)f(r), \quad (4.55) \quad B = U^2(t)r^2, \quad (4.56)$$

Utilizando este resultado, as Eqs.(4.54b) e (4.54c) ficam:

$$\frac{2f'}{f^2r} + 4\dot{U}^2 + 2U\ddot{U} = \kappa\varepsilon U^2, \quad (4.57)$$

$$\frac{2}{r^2} - \frac{1}{fr^2} + \frac{f'}{f^2r} + 4\dot{U}^2 + 2U\ddot{U} = \kappa\varepsilon U^2, \quad (4.58)$$

Com isso temos então que os primeiros termos das equações acima devem ser iguais e constantes, isto só ocorre devido a simplificação feita anteriormente sobre a densidade de energia. Escolhendo a constante $4C$:

$$\frac{2f'}{f^2r} = \frac{2}{r^2} - \frac{1}{fr^2} + \frac{f'}{f^2r} = 4C. \quad (4.59)$$

Estas equações diferenciais possuem solução única: $f(r) = [1 - Cr^2]^{-1}$. A métrica (4.51) toma então a forma:

$$ds^2 = dt^2 - U^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Cr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (4.60)$$

Esta é a métrica de Friedmann-Robertson-Walker e, por ser homogênia e isotrópica é a métrica utilizada para descrever o universo em modelos cosmológicos. O problema se resume então em determinar as funções $\varepsilon(t)$ e $U(t)$. Pela conservação de energia:

$$(T_0^\mu)_{;\mu} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \left(\frac{\dot{A}}{2A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon B \sqrt{A}) = 0. \quad (4.61)$$

Usando as Eqs.(4.55) e (4.56) na equação de conservação (4.61), encontramos que a quantidade εU^3 é constante. E, normalizando a coordenada radial r para que $U(t=0) = 1$, temos por consequência:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)U^{-3}(t). \quad (4.62)$$

Agora, as Eqs.(4.57), (4.58) e (4.54a) são equações diferenciais ordinárias:

$$4C + 4\dot{U}^2(t) + 2U(t)\ddot{U}(t) = \kappa\varepsilon(0)U^{-1}(t), \quad (4.63)$$

$$\frac{\kappa}{3}\varepsilon(0)U^{-1}(t) = -2U(t)\ddot{U}(t). \quad (4.64)$$

Podemos eliminar $\ddot{U}(t)$ somando estas duas equações, com isso encontramos:

$$\dot{U}^2(t) = -C + \frac{1}{3}\kappa\varepsilon(0)U^{-1}(t). \quad (4.65)$$

Supondo que o fluido está inicialmente em repouso, isto é $\dot{U}(t=0) = 0$ e, lembrando que $U(t=0) = 1$, temos em $t = 0$:

$$C = \frac{1}{3}\kappa\varepsilon(0). \quad (4.66)$$

Logo:

$$\dot{U}^2(t) = C(U^{-1}(t) - 1). \quad (4.67)$$

Cuja solução é dada pela equação paramétrica de uma cicloide:

$$t = \left(\frac{\psi + \text{sen}\psi}{2\sqrt{\psi}} \right), \quad (4.68)$$

$$U = \frac{1}{2}(1 + \text{cos}\psi). \quad (4.69)$$

Note que $U(t)$ vai a zero em $\phi = \pi$, e conseqüentemente em $t = T$, onde:

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{C}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{\kappa\varepsilon(0)}}. \quad (4.70)$$

Ou seja, uma esfera de densidade inicial $\varepsilon(0)$ e pressão nula irá colapsar partindo do repouso para um estado de densidade de energia própria infinita em um tempo finito T . Apesar do colapso estar completo em uma coordenada $t = T$, qualquer sinal de luz vindo da estrela em nossa direção sofrerá um forte desvio para o vermelho [23] pelo seu campo gravitacional, então nós na Terra não veremos a estrela sumir repentinamente. O desenvolvimento desta seção segue a Ref. [23], uma forma alternativa se encontra na Ref. [32].

4.3.3 Colapso com Pressão

As equações que descrevem o colapso gravitacional de um objeto esfericamente simétrico encontradas por Misner e Sharp em Ref.[15] podem, alternativamente, ser derivadas por meio do princípio variacional, conforme apresentado por Elze, Hamma, Kodama, Makler e Rafaelski [33]. Começando a partir da métrica esfericamente simétrica mais geral possível, (B.1):

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.71)$$

onde (t,r) são as coordenadas temporal e espacial e $\nu = \nu(t, r)$, $\lambda = \lambda(t, r)$ e $R = R(t, r)$ são funções a se determinar (pelas equações de campo de Einstein). E, $2\pi R(t, r)$ é a circunferência de um círculo que passa pelos pontos de coordenada r em um dado tempo t . Supondo um sistema de coordenadas que se move em cada ponto acompanhando a matéria nesse ponto, ou seja comóvel ou coordenadas Lagrangeanas, (B.2), temos que as componentes espaciais da quadri-velocidade são nulas.

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (u^0, 0, 0, 0). \quad (4.72)$$

E, pela normalização $u^\mu u_\mu = 1$, obtemos: $u^0 = e^{-\nu}$.

A partir da Eq. (3.5), em conjunto com a métrica (4.71), encontramos a equação para a densidade de número de bárions:

$$\begin{aligned} (nu^\mu)_{;\mu} &= \frac{1}{R^2 e^\nu e^\lambda} \partial_t (R^2 e^\lambda n) = 0 \\ n &= \frac{f(r)}{R^2 e^\lambda}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde $f(r)$ é uma função determinada pela condição inicial.

Equações de Euler-Lagrange

Como a ação é definida como a integral da Lagrangeana entre um intervalo de tempo, isto é $\mathcal{S} = \int dt \int \mathcal{L} dx^3$, temos que a densidade de Lagrangeana gravitacional e de matéria são respectivamente:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} \mathcal{R}, \quad (4.74)$$

$$\mathcal{L}_M = -\sqrt{-g} \varepsilon(n). \quad (4.75)$$

Para o caso de uma estrela esfericamente simétrica (em colapso gravitacional), descrita por (4.71), a densidade de lagrangeana da matéria (4.75) fica:

$$\mathcal{L}_M = -e^\nu e^\lambda R^2 \varepsilon(n), \quad (4.76)$$

onde n é dado pela equação (4.73). Os vínculos de conservação de número de bárions, (3.4), e normalização da quadri-velocidade, $u^\mu u_\mu = 1$, são automaticamente satisfeitos, por isso não são incluídos na Lagrangeana.

Desprezando o termos que podem ser agrupados em uma derivada total na densidade Lagrangeana gravitacional, (4.74), temos:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{\kappa} e^\nu e^\lambda [\dot{R}(2R\dot{\lambda} + \dot{R})e^{-2\nu} - R'(2R\nu' + R')e^{-2\lambda} - 1], \quad (4.77)$$

onde introduzimos a notação $\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$ e $f' \equiv \frac{\partial f}{\partial r}$. A dependência angular, em ambos os casos, é omitida pois sua integração trivial proporciona somente um termo 4π multiplicado à densidade de Lagrangeana. Ou seja: $\mathcal{S} = 4\pi \int dt \int \mathcal{L} dr$. A densidade de Lagrangeana total do sistema é dada então por:

$$\mathcal{L} = e^\nu e^\lambda R^2 \left\{ -\varepsilon(n) + \frac{1}{\kappa R^2} [R'(2R\nu' + R')e^{-2\lambda} - \dot{R}(2R\dot{\lambda} + \dot{R})e^{-2\nu} + 1] \right\}. \quad (4.78)$$

No caso em que $g_{\mu\nu}$ são as variáveis dinâmicas, a equação de Euler-Lagrange (4.2) toma sua forma generalizada (4.79), onde o termo extra esta presente pois $g_{\mu\nu}$ são funções multidimensionais, isto é de várias variáveis, no caso de t e r . Tomando então as equações de Euler - Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \right) = 0, \quad (4.79)$$

em relação a ν , λ e R encontramos:

$$\varepsilon = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1}{R^2} + 2e^{-2\lambda} \left(\frac{R'\lambda'}{R} - \frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{2R^2} \right) + 2e^{-2\nu} \left(\frac{\dot{R}\dot{\lambda}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{2R^2} \right) \right], \quad (4.80)$$

$$p = -\frac{1}{\kappa} \left[\frac{1}{R^2} - 2e^{-2\lambda} \left(\frac{R'\nu'}{R} + \frac{R'^2}{2R} \right) + 2e^{-2\nu} \left(\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}\dot{\nu}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{2R^2} \right) \right], \quad (4.81)$$

$$p = -\frac{1}{\kappa} \left[-e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{1}{R}(R'' + \nu'R' - \lambda'R') \right) + e^{-2\nu} \left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\nu}\dot{\lambda} + \frac{1}{R}(\ddot{R} + \dot{\lambda}\dot{R} - \dot{\nu}\dot{R}) \right) \right]. \quad (4.82)$$

Identificando que os termos entre colchetes nas Eqs. (4.80),(4.81) e (4.82) correspondem respectivamente às componentes G_0^0 , G_1^1 e G_2^2 do tensor de Einstein e, escrevendo-os da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{\kappa} G_0^0, \quad (4.83)$$

$$-p = \frac{1}{\kappa} G_1^1, \quad (4.84)$$

$$-p = \frac{1}{\kappa} G_2^2, \quad (4.85)$$

onde o lado esquerdo corresponde às componentes do tensor energia momento, (3.2), verificamos que a densidade de Lagrangeana (4.78) é equivalente a parte diagonal da equação de Einstein, $T_\mu^\mu = \kappa G_\mu^\mu$.

Como no sistema de coordenadas comóveis o tensor de energia-momento T_ν^μ é diagonal, a componente não diagonal do tensor de Einstein G_1^0 deve ser nula, ou seja:

$$G_1^0 = 2 \frac{e^{-2\lambda}}{R} (\dot{R}' - \dot{R}\nu' - \dot{\lambda}R') = 0. \quad (4.86)$$

Para demonstrar que este método é idêntico à teoria de Einstein é preciso mostrar que a equação (4.86) é consequência das Eqs. (4.80) - (4.82). Partindo da identidade de Bianchi:

$$G_{\nu}^{\mu};_{\mu} = \partial_{\mu}(\sqrt{-g}G_{\nu}^{\mu}) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\partial_{\nu}g^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.87)$$

onde a primeira componente $\nu = 0$ nos dá:

$$\begin{aligned} \partial_0(\sqrt{-g}G_0^0) + \partial_1(\sqrt{-g}G_0^1) + \frac{1}{2}\sqrt{-g} \left[\sum_{\alpha=0}^3 g_{\alpha\alpha}G_{\alpha}^{\alpha}\partial_0g^{\alpha\alpha} \right] &= 0 \\ \partial_1(\sqrt{-g}G_0^1) &= -R^2 e^{\nu} e^{\lambda} \kappa \left[\dot{\varepsilon} + (\varepsilon + p) \left(\dot{\lambda} + \frac{2\dot{R}}{R} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Como,

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial n} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f(r)}{R^2 e^{\lambda}} \right) \\ &= -(\varepsilon + p) \left(\dot{\lambda} + \frac{2\dot{R}}{R} \right), \end{aligned} \quad (4.89)$$

onde foi usada a Eq. (4.73) para n e a relação (3.11). Substituindo então a Eq. (4.89) na identidade de Bianchi para $\nu = 0$, Eq. (4.88), concluímos que:

$$\begin{aligned} \partial_1(\sqrt{-g}G_0^1) &= 0, \\ R^2 e^{\nu} e^{\lambda} G_0^1 &= C(t), \end{aligned} \quad (4.90)$$

onde $C(t)$ é uma função de t somente. Como, para uma métrica não singular devemos ter $R(r = 0, t) = 0$, então a Eq. (4.90) calculada em $r = 0$ nos leva a concluir que $C(t) = 0$

e, com isso temos que a componente não diagonal do tensor de Einstein (em qualquer ponto) é nula, isto é: $G_0^1 = 0$.

Isto demonstra que a Lagrangeana (4.78) descreve corretamente a dinâmica de um sistema esfericamente simétrico de fluido ideal com campo gravitacional.

Equação de Misner-Sharp

Usando $G_1^0 \equiv 0$ na segunda componente da identidade de Bianchi, $\nu = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \partial_1(\sqrt{-g}G_1^0) + \partial_1(\sqrt{-g}G_1^1) + \frac{1}{2}\sqrt{-g} [\sum_{\alpha=0}^3 g_{\alpha\alpha}G_\alpha^\alpha \partial_1 g^{\alpha\alpha}] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}G_1^1 + \frac{2R'}{R}(G_1^1 - G_2^2) + \nu'(G_1^1 - G_0^0) &= 0 \\ p' &= -(\varepsilon + p)\nu'. \end{aligned} \quad (4.91)$$

que é a equação de Euler no referencial comóvel. Definindo a quantidade U ,

$$U = \dot{R}e^{-\nu} \equiv \frac{dR}{d\tau}, \quad (4.92)$$

que nos dá a velocidade relativa $Ud\theta$ de partículas de fluido adjacente na mesma esfera de raio r constante. Podemos escrever a relação $\dot{R}' - \dot{R}\nu' - \dot{\lambda}R' = 0$ encontrada na seção anterior, Eq.(4.86), como:

$$\begin{aligned} (\dot{R}e^{-\nu})'e^\nu &= \dot{\lambda}R' \\ \frac{U'}{R'} &= \dot{\lambda}e^{-\nu}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Assim, reescrevendo a equação (4.80) em termos da variável U , temos:

$$8\pi G\varepsilon R^2 = 1 - RR'(e^{-2\lambda})' - e^{-2\lambda}(2R''R + R'^2) + U^2 + 2RU\frac{U'}{R'}. \quad (4.94)$$

Multiplicando por R' e integrando em dr temos:

$$\begin{aligned}
\int 8\pi G \varepsilon R^2 R' dr &= \int [R' - RR'^2(e^{-2\lambda})' - e^{-2\lambda}(2R''R'R + R'^3) + R'U^2 + 2RUU'] dr \\
2G \int 4\pi \varepsilon R^2 R' dr &= \int dr [R' - (e^{-2\lambda}R'^2R)' + (U^2R)'] \\
2GM(r, t) &= R - e^{-2\lambda}R'^2R + U^2R \\
e^{-2\lambda} &= \frac{1}{R'^2} \left[1 + U^2 - \frac{2GM}{R} \right], \tag{4.95}
\end{aligned}$$

onde $M(r, t) = 4\pi \int_0^r \varepsilon R^2 R' dr = 4\pi \int_0^R \varepsilon R^2 dR$ é definido como a massa total dentro da esfera de raio r no tempo t . A partir da definição (4.92), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2R}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dR}{d\tau} \right) = \frac{dt}{d\tau} \frac{dU}{dt} \\
&= e^{-\nu} \frac{d}{dt} (\dot{R}e^{-\nu}) \\
&= e^{-\nu} (\ddot{R}e^{-\nu} - \dot{\nu}\dot{R}e^{-\nu}), \tag{4.96}
\end{aligned}$$

cujo segundo termo pode ser identificado na Eq. (4.81) como:

$$\dot{\nu}\dot{R}e^{-\nu} = \left[\frac{1}{2R} - e^{-2\lambda}R'\nu' - e^{-2\lambda}\frac{R'^2}{R} + e^{-2\nu}\ddot{R} + e^{-2\nu}\frac{\dot{R}^2}{2R} + 4\pi GRp \right] e^\nu. \tag{4.97}$$

Substituindo então as equações (4.97), (4.95) e (4.91) em (4.96) obtemos, após algumas manipulações,

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = e^{-\nu}\dot{U} = - \left(\frac{1}{\varepsilon + p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial R} \right)_t \left(1 + U^2 - \frac{2GM}{R} \right) - G \frac{M + 4\pi R^3 p}{R^2}. \tag{4.98}$$

Esta equação foi obtida por Misner and Sharp [15] para o colapso gravitacional esféricamente simétrico. Reforçamos que os métodos usados nesta seção são fortemente baseados na Ref. [33].

Capítulo 5

Princípios Variacionais aplicados à Relatividade Geral: Caso Discreto

Inicialmente dividimos a estrela em N camadas, introduzindo um conjunto de variáveis discretas $\{r_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, que representam os raios de cada camada i . E, usando como condição inicial o número de bárions $b_{i-\frac{1}{2}}$ em cada camada, supondo que não há fluxo de bárions entre camadas, encontramos a configuração de equilíbrio da estrela.

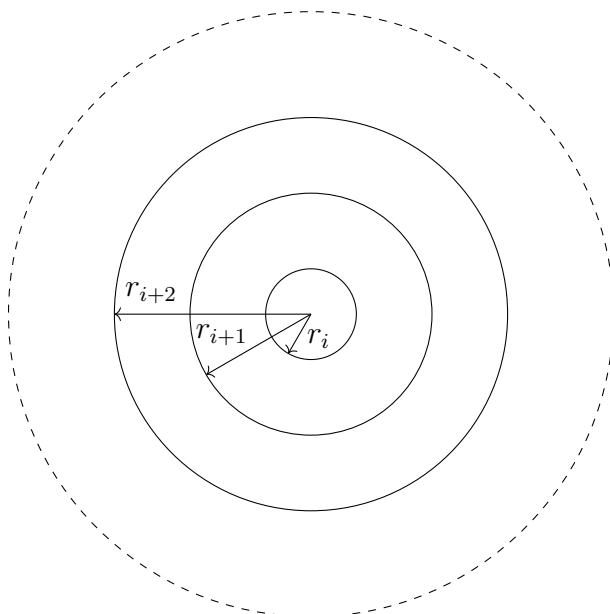


Figura 5.1: Modelo de camadas.

Para a discretização, definimos que as variáveis ε , n e λ serão constantes dentro da camada definida entre r_i e r_{i-1} , onde o índice i varia de 1 a N . O índice $i - \frac{1}{2}$ está

relacionado a quantidades definidas entre os raios r_{i-1} e r_i , mas calculado com o valor da métrica no ponto $i - 1$. Enquanto o índice i esta relacionado a quantidades calculadas de r_0 à r_i . Desta forma, uma função contínua $F = \int f d^3x$ qualquer, supondo a quantidade f constante na camada, é discretizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{i=1}^N \int_{r_{i-1}}^{r_i} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
 &\simeq 4\pi \sum_{i=1}^N \int_{r_{i-1}}^{r_i} f r^2 dr \\
 &= 4\pi \sum_{i=1}^N f_{i-\frac{1}{2}} \frac{(r_i^3 - r_{i-1}^3)}{3},
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde F é a quantidade total na estrela. Para encontrar esta quantidade no interior de uma esfera de raio r_i , fazemos:

$$F_i = F_{i-1} + \frac{4\pi}{3} f_{i-\frac{1}{2}} (r_i^3 - r_{i-1}^3) \tag{5.2}$$

de forma que $F = F_N$.

Nesta discretização estamos usando que, em primeira aproximação, a contribuição de λ no campo gravitacional em cada camada afeta sempre a camada seguinte. Ou seja, a camada 1 sente a atração gravitacional da origem, λ_0 , a camada 2 sente a ação de λ_1 e assim em diante até a camada N que sente a atração da camada anterior, λ_{N-1} . É importante notarmos que o campo λ_i recebe contribuição de todas as camadas de 0 até i . Então, a camada N (por exemplo) que sofre atração gravitacional devido ao campo gerado por λ_{N-1} , sente a ação de toda a massa (energia) contida na esfera de raio r_{N-1} .

5.1 Equilíbrio Hidrostático em Relatividade Geral

Como visto na Sec.4.2, o equilíbrio hidrostático de uma estrela de nêutrons pode ser obtido a partir da minimização de:

$$M_{Obs}[n] = 4\pi \int_0^\infty \frac{\varepsilon(n)}{c^2} r^2 dr, \quad (5.3)$$

como função de n e com o vínculo de número total de bárions constante,

$$B = 4\pi \int_0^\infty e^\lambda n(r) r^2 dr, \quad (5.4)$$

junto com a função da métrica

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{\kappa}{r} \int_0^r r'^2 \varepsilon(n) dr', \quad (5.5)$$

onde $n(r)$ é a densidade de número de bárions local, $\varepsilon(n)$ a densidade de energia e r' é a variável de integração, não a derivada de r . Como supomos a estrela formada puramente por um gás de nêutrons degenerados (vide Sec. 3.3.1), temos que a pressão e densidade de energia são dadas pelas Eqs. (3.22) e (3.24).

$$\varepsilon(n) = \frac{\varepsilon_0}{8} [(2x^3 + x)(1 + x^2)^{1/2} - \operatorname{arcsinh}(x)], \quad (5.6)$$

$$p(n) = \frac{\varepsilon_0}{24} [(2x^3 - 3x)(1 + x^2)^{1/2} + 3 \operatorname{arcsinh}(x)] \quad (5.7)$$

onde $x = \frac{\hbar}{mc} (3\pi^2 n)^{1/3}$.

5.1.1 Solução Numérica

Utilizando a discretização apresentada anteriormente, introduzimos N variáveis radiais discretas, $\vec{r} = \{r_1, \dots, r_N\}$, e, definindo $r_0 = 0$, a integral (5.4) fica

$$\begin{aligned}
B &= 4\pi \sum_{i=1}^N \int_{r_0}^{r_i} e^{\lambda} n r^2 dr \\
&\simeq \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^N e^{\lambda_{i-1}} n_{i-\frac{1}{2}} (r_i^3 - r_{i-1}^3) \\
&\equiv \sum_{i=1}^N b_{i-\frac{1}{2}}, \tag{5.8}
\end{aligned}$$

onde $\{b_{i-\frac{1}{2}}, i = 1, \dots, N\}$, ou seja, a quantidade de bárions em cada camada, são constantes independente de \vec{r} , mas podem ser funções de i . Como

$$b_{i-\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3} e^{\lambda_{i-1}} n_{i-\frac{1}{2}} (r_i^3 - r_{i-1}^3), \tag{5.9}$$

há duas incógnitas, $e^{\lambda_{i-1}}$ e $n_{i-\frac{1}{2}}$. Usando como uma condição de contorno a aproximação $e^{\lambda_0} = 1$, eliminamos uma das incógnitas. Uma vez conhecida a densidade de bárions $n_{\frac{1}{2}}$, podemos calcular a densidade de energia $\varepsilon(n_{1/2})$, usando a Eq. (5.6). Obtemos em seguida

$$\begin{aligned}
M_1 &= 4\pi \int_0^{r_1} \rho(n) r^2 dr \\
&= \frac{4\pi}{3} \rho(n_{1/2}) r_1^3, \tag{5.10}
\end{aligned}$$

onde $\rho(n_{1/2}) = \varepsilon(n_{1/2})/c^2$. Com isto, podemos calcular a função da métrica:

$$e^{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa \varepsilon(n_{1/2}) r_1^2/3}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{G}{c^2 r_1} M_1}}. \tag{5.11}$$

Para as camadas seguintes, $2 \leq i \leq N$, calculamos iterativamente:

$$n_{i-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\pi} \frac{b_{i-\frac{1}{2}} e^{-\lambda_{i-1}}}{r_i^3 - r_{i-1}^3}, \tag{5.12}$$

$$M_i = M_{i-1} + \frac{4\pi}{3} \rho(n_{i-\frac{1}{2}}) (r_i^3 - r_{i-1}^3), \tag{5.13}$$

$$e^{\lambda_i} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{G}{r_i c^2} M_i}}. \quad (5.14)$$

5.1.2 Unidades

Para otimização do cálculo numérico é conveniente usar um sistema de unidades apropriado de maneira que todas as variáveis tenham seu valor próximo a unidade. No caso de estrelas de nêutrons, distâncias r'_i s devem ser medidas em km ($R_* \sim 10km$) e a massa M em M_\odot ($M_* \sim 0.7M_\odot$, onde $M_\odot = 1.9891 \times 10^{30} kg$). No entanto, as quantidades termodinâmicas devem ser medidas no sistema de unidades de partículas, isto é, fm^3 para a densidade de bárions que deve ser da ordem da densidade nuclear e, GeV/fm^3 para a densidade de energia ε . Para as quantidades calculadas no sistema unidades macroscópico, isto é km e M_\odot , usaremos o índice *, para distinguir do sistema de unidades microscópico, que não terão índice. No sistema macro, $G/c^2 = 1.4771 km/M_\odot$.

Para os cálculos da massa (5.3) e número de bárions (5.4), será necessário converter um sistema de unidades no outro. Para isto, usaremos os fatores de conversão C_E e C_N , onde:

$$C_E \varepsilon = \rho_*, \quad (5.15)$$

$$C_N n = n_*, \quad (5.16)$$

sendo

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= \left[\frac{GeV}{fm^3} \right], & [n] &= \left[\frac{1}{fm^3} \right], \\ [\rho_*] &= \left[\frac{M_\odot}{km^3} \right], & [n_*] &= \left[\frac{N_\odot}{km^3} \right]. \end{aligned}$$

Assim, os fatores de conversão ficam:

$$\begin{aligned}
C_E &= \left(\frac{km}{fm}\right)^3 \frac{1}{c^2} \frac{1}{M_\odot} \frac{GeV}{J} = 0,89623 \times 10^{-3}, \\
C_N &= \left(\frac{km}{fm}\right)^3 \frac{1}{N_\odot} = 0,8409 \times 10^{-3}.
\end{aligned}$$

onde $N_\odot \equiv M_\odot/m_{p[kg]} = 1,1892 \times 10^{57}$ é a quantidade de bárions em uma massa solar.

Note que os fatores de conversão são proporcionais:

$$C_N = m_{p[GeV]} C_E, \quad (5.17)$$

já que $m_{p[GeV]} = m_{p[kg]} c^2 J / GeV$, onde $m_{p[GeV]} = 0,93827 GeV$. Com isto, podemos reescrever as equações necessárias usando o sistema de unidades adequado para cada variável.

Ou seja, o número de bárions fica:

$$\begin{aligned}
B &= 4\pi \int_0^\infty e^\lambda n_*(r) r^2 dr \\
&= 4\pi C_N \int_0^\infty e^\lambda n(r) r^2 dr.
\end{aligned} \quad (5.18)$$

Para a métrica, escrevemos,

$$\begin{aligned}
e^{-2\lambda} &= 1 - \frac{\bar{\kappa}}{r} \int_0^r r'^2 \rho_*(n) dr' \\
&= 1 - \frac{\bar{\kappa}}{r} C_E \int_0^r r'^2 \varepsilon(n) dr',
\end{aligned} \quad (5.19)$$

onde $\bar{\kappa} = 8\pi G/c^2 = 8\pi \times 1,4771$.

Para os cálculos relacionados a equação de estado, sempre usaremos o sistema de unidades micro. Neste caso,

$$x = \frac{\hbar c}{m} (3\pi^2 n)^{1/3}. \quad (5.20)$$

Note a diferença na primeira fração ($\hbar/mc|_{SI} \Rightarrow \hbar c/m|_{GeV}$) devido a conversão de unidades. E, na Eq.(5.20) devemos usar: $\hbar c = 0,1973 \text{ GeV fm}$ e $m = 0,93827 \text{ GeV}$.

A densidade de energia, Eq.(5.6), no limite não relativístico $x \ll 1$ fica:

$$\varepsilon \simeq nm + mn x^2 \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{56}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{15}{1408}x^6 + \dots \right), \quad (5.21)$$

e, como normalmente em estrelas compactas o segundo termo é muito pequeno comparado ao primeiro, para evitar erros de truncamento é vantajoso minimizar a massa observada subtraindo a massa de repouso, isto é

$$\begin{aligned} M_{opt}[n] &= M_{Obs} - m_{p[kg]}B \\ &= 4\pi C_E \int [\varepsilon - mn - mn(e^\lambda - 1)] r^2 dr. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Assim, a massa otimizada para a minimização é:

$$M_{opt}[n] = C_E \sum_{i=1}^N \{ \varepsilon - mn - mn(e^\lambda - 1) \}_{i-\frac{1}{2}} \Delta V_{i-\frac{1}{2}}, \quad (5.23)$$

onde $\Delta V_{i-\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3}(r_i^3 - r_{i-1}^3)$.

5.1.3 Algoritmo

Usamos como condições de contorno: $e^{\lambda_0} = 1$, $r_0 = 0$, $M_0 = 0$, $B_0 = 0$, mais a condição inicial de número de bárions, $\{b_{i-\frac{1}{2}}, i = 1.., n\}$, onde $b_{i-\frac{1}{2}}$ é o número de bárions na camada entre $\{r_i - r_{i-1}\}$.

Em seguida, calculamos iterativamente (utilizando o Mathematica) as seguintes quantidades em ordem:

$$\Delta V_{i-\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3} (r_i^3 - r_{i-1}^3), \quad (5.24)$$

$$n_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{C_N} \frac{3}{4\pi} b_{i-\frac{1}{2}} e^{-\lambda_{i-1}} \frac{1}{r_i^3 - r_{i-1}^3}, \quad (5.25)$$

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\hbar c}{m} \left(3\pi^2 n_{i-\frac{1}{2}} \right)^{1/3}, \quad (5.26)$$

$$\varepsilon_{i-\frac{1}{2}} = mn_{i-\frac{1}{2}} + mn_{i-\frac{1}{2}} x_{i-\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{56} x_{i-\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{48} x_{i-\frac{1}{2}}^4 - \frac{15}{1408} x_{i-\frac{1}{2}}^6 + \dots \right), \quad (5.27)$$

$$M_i = M_{i-1} + C_E \varepsilon \left(n_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta V_{i-\frac{1}{2}}, \quad (5.28)$$

$$e^{\lambda_i} = \frac{1}{\sqrt{1 - S_i}}, \quad (5.29)$$

onde foi usada o limite não relativístico (5.27) puramente para a otimização do programa e, para evitar o caso em que $2GM_i/c^2r_i \geq 1$ (o que levaria o termo da métrica e^{λ_i} a ser imaginário), fazemos uma pequena modificação na definição de S_i , que normalmente seria dado por $2GM_i/c^2r_i$.

$$S_i \rightarrow S_i = \frac{2S_i^0 - \eta}{1 + S_i^0 + \sqrt{(1 - S_i^0)^2 + \eta}} \quad \text{onde: } S_i^0 = 2\frac{G}{c^2r_i}M_i. \quad (5.30)$$

Observe no gráfico abaixo que, com η sendo um número pequeno, como $\eta = 10^{-6}$, as funções S_i e S_i^0 possuem os mesmos valores, de forma que S_i continua obedecendo sua função original S_i^0 , mas estabiliza em 1, enquanto S_i^0 poderia ter valores maiores que 1, levando a um valor imaginário para a função da métrica.

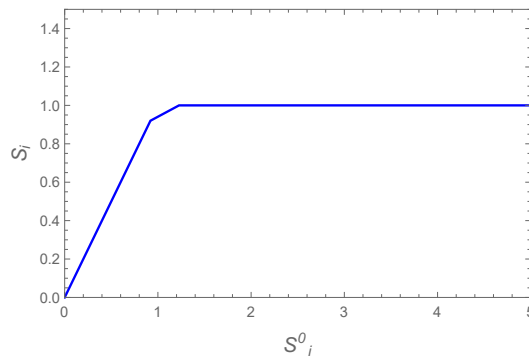


Figura 5.2: Relação entre S_i e S_i^0

Uma vez calculadas as Eqs.(5.24) – (5.29) podemos minimizar a massa otimizada:

$$M_{Opt}^{(i)} = M_{Opt}^{(i-1)} + C_E \Delta V_{i-\frac{1}{2}} \{(\varepsilon - mn) - mn(e^\lambda - 1)\}_{i-\frac{1}{2}}, \quad (5.31)$$

onde $(e^\lambda - 1)_{i-\frac{1}{2}}$ é definido como:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_{i-\frac{1}{2}}} - 1 &\equiv \frac{1}{2} (e^{\lambda_i} - 1 + e^{\lambda_{i-1}} - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{S_i}{\sqrt{1-S_i}(1+\sqrt{1-S_i})} + \frac{S_{i-1}}{\sqrt{1-S_{i-1}}(1+\sqrt{1-S_{i-1}})} \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

e com isso obtemos o conjunto de variáveis $\{r_1, \dots, r_N\}$ que correspondem a solução de equilíbrio estável da estrela.

5.1.4 Aproximação Newtoniana para $N = 1$

A aproximação na Eq.(5.31) é particularmente útil para o pequeno número de camadas (até mesmo para o caso com uma única camada) na aproximação Newtoniana. Para ver isso, vamos considerar o caso $N = 1$, em que $r_1 = R$ e $b_{\frac{1}{2}} = B$. Calculamos então o primeiro e segundo termo de M_{Opt} na Eq.(5.31) :

$$\begin{aligned} C_E \Delta V_{\frac{1}{2}} (\varepsilon - mn)_{\frac{1}{2}} &\simeq C_E \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{3}{10} mn_{\frac{1}{2}} x_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{C_E}{C_N} \frac{3}{10} m \left(\frac{\hbar c}{m} \right)^2 \left(3\pi^2 \frac{1}{C_N} \frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \frac{B^{5/3}}{R^2} \\ &= K \frac{B^{5/3}}{R^2}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

nesta aproximação o primeiro termo de (5.21) é dominante e, $K \simeq 5,4842$.

$$\begin{aligned} C_E \Delta V_{\frac{1}{2}} mn_{\frac{1}{2}} (e^{\lambda_{\frac{1}{2}}} - 1) &= C_E m \frac{B}{C_N} \frac{1}{2} [e^{\lambda_1} - 1 + e^{\lambda_0} - 1] \\ &= \frac{1}{2} \frac{G}{R} B^2, \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde usamos $\Delta V_{\frac{1}{2}} n_{\frac{1}{2}} = B/C_N$ e, a aproximação $(e^{\lambda_1} - 1) \simeq S_i/2$. Note que a utilização de uma única camada obriga o uso da aproximação Newtoniana. Assim, a função de otimização tem a seguinte forma

$$M_{Opt}(R) = K \left(\frac{B}{B_{\odot}} \right)^{5/3} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{G}{R} \left(\frac{B}{B_{\odot}} \right)^2, \quad (5.35)$$

cujo gráfico se encontra na Fig. (5.3).

Aqui ressaltamos a semelhança entre Eq.(5.35) e a equação clássica para a energia potencial efetiva de um corpo sob ação gravitacional [28, 29], comprovando a veracidade do método utilizado.

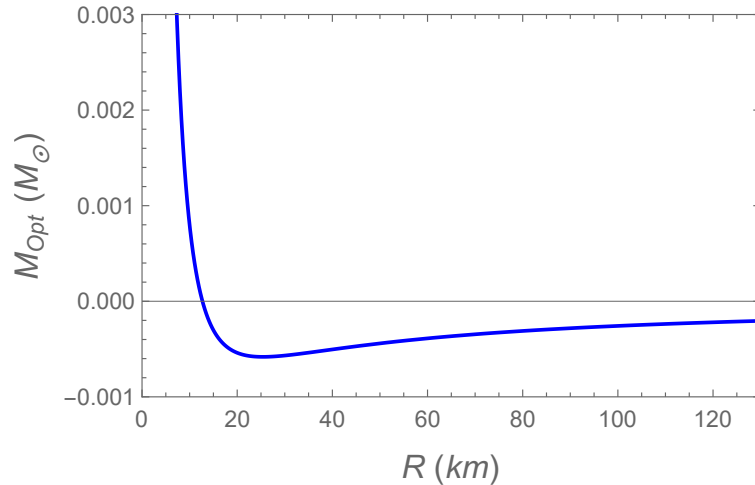


Figura 5.3: Aproximação Newtoniana para uma camada.

A minimização deve ser feita dada a condição inicial de um número fixo de bárions B . Resolvendo analiticamente obtemos o mínimo da função em $R_a = 25,395 \text{ km}$ para a condição inicial de $B = 0,2 B_{\odot}$. Comparando este resultado com o obtido a partir da minimização numérica (realizada no Mathematica), isto é $R_n = 24,14 \text{ km}$, observamos uma concordância de 96%.

5.2 Resultados e Conclusões

5.2.1 Solução de TOV

Para otimizar a solução de TOV no Mathematica usamos o limite não relativístico do gás de nêutrons (uma vez que estamos interessados na região $x < 0,4$). Neste limite as equações de pressão (3.23) e densidade de energia (3.22) tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= mn + \frac{3}{10}m\bar{K}^2n^{5/3} - \frac{3}{56}m\bar{K}^4n^{7/3} + \frac{1}{48}m\bar{K}^6n^3 - \frac{15}{1408}m\bar{K}^8n^{11/3} + \frac{21}{3328}m\bar{K}^{10}n^{13/3} + \dots \\
 p &= \frac{1}{5}m\bar{K}^2n^{5/3} - \frac{1}{14}m\bar{K}^4n^{7/3} + \frac{1}{24}m\bar{K}^6n^3 - \frac{5}{176}m\bar{K}^8n^{11/3} + \frac{35}{1664}m\bar{K}^{10}n^{13/3} - \frac{21}{1280}m\bar{K}^{12}n^5 + \\
 &+ \frac{231}{17408}m\bar{K}^{14}n^{17/3} + \dots
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

escritas em função da densidade ao invés do parâmetro x , com

$$\bar{K} = \frac{\hbar c}{m}(3\pi^2)^{1/3}, \tag{5.37}$$

onde foram feitas as modificações necessárias para que obedecam o mesmo sistema de unidades apresentado na Sec.5.1.2 e, são expressos todos os termos da expansão usados na solução numérica.

Para estrelas com menos massa o primeiro termo é dominante, logo a forma politrópica (3.28) e (3.29) é suficiente para descrevê-las. No entanto, para estrelas com maior massa (como é o caso de $0.5 N_{\odot}$), os termos seguintes se tornam essenciais e não podem ser desprezados.

As equações de TOV (4.37) e (4.21) junto com equação do número de bárions (4.56) devem ser integradas numericamente da origem até o ponto em que a pressão vai a zero, o qual marca o fim da estrela isto é, $p(r = R) = 0$.

No sistema de unidades descrito na Sec.5.1.2, as Eqs.(4.37), (4.21) e (4.56) ficam:

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{-G\varepsilon M}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\varepsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 C_{EP}}{M}\right) \left(1 + \frac{2MG}{r}\right)^{-1}, \\
M' &= 4\pi C_E \varepsilon r^2, \\
B' &= \frac{4\pi C_N n r^2}{\sqrt{1 + \frac{2MG}{r}}},
\end{aligned} \tag{5.38}$$

com condições de contorno $M(r = 0) = 0$, $B(r = 0) = 0$ e $n(r = 0) = n_c$. Como estrelas de nêutrons têm densidade aproximadamente iguais à densidade de matéria nuclear, 0.153 fm^{-3} , escolhemos uma gama de valores próximos a este. A seguir, um gráfico da quantidade de bárions contidos na estrela para cada densidade central.

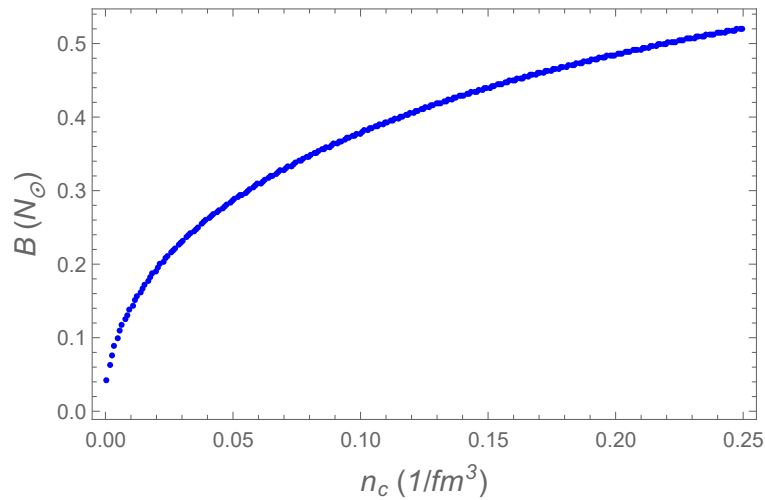


Figura 5.4: Número de bárions contidos na estrela em função da densidade central desta.

Este gráfico servirá como base para convertermos as condições de contorno entre a resolução de TOV e o método variacional. A tabela abaixo mostra a densidade central para as condições iniciais estudadas no método variacional.

$B(N_\odot)$	$n_c(\text{fm}^{-3})$
0,2	0,022
0,5	0,221

Tabela 5.1: Equivalência entre as condições iniciais de ambos os métodos.

Aa Figs. (5.5a) e (5.5b) mostram a distribuição de matéria para estas condições iniciais. Na seção seguinte estas distribuições serão comparadas com o resultado obtido via minimização da energia.

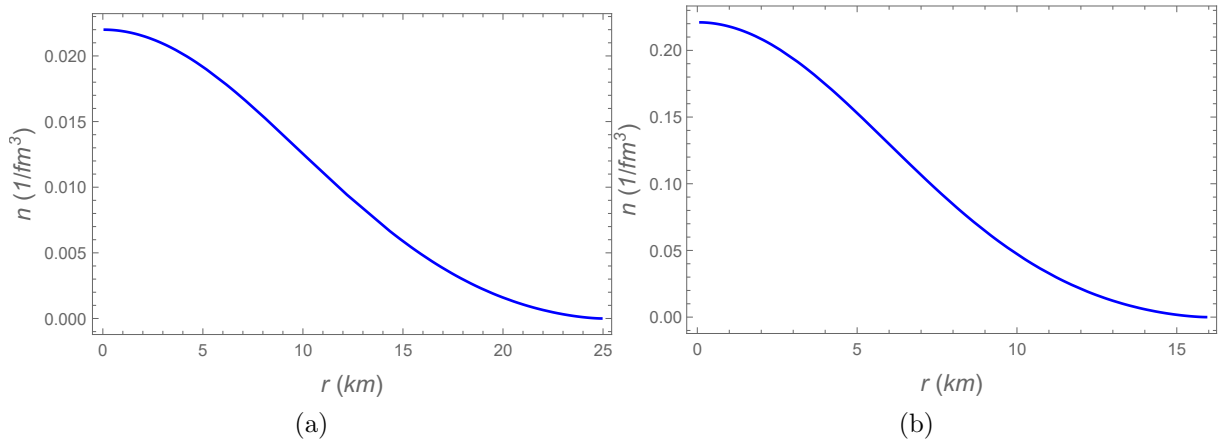


Figura 5.5: Distribuição de matéria no interior da estrela para as condições iniciais que geram configurações de equilíbrio com (a) $0,2N_{\odot}$ e (b) $0,5N_{\odot}$ via equações diferenciais de TOV.

5.2.2 Solução Discreta

Como mencionado anteriormente supomos, por simplicidade uma distribuição de matéria uniforme, ou seja, em que todas as camadas possuem o mesmo número de bárions $b = B/N$. Para resolver o princípio variacional numericamente, devemos dividir a estrela em N camadas e, usamos como condição inicial o número de bárions contidos na estrela assumindo que não há transporte de bárions entre camadas. Assim, diferentemente de resolver TOV, já temos em mente a dimensão da estrela que queremos estudar. Ou seja, fixando a massa, o método variacional proporciona um resultado muito mais rápido qualitativamente para poucos parâmetros.

Como o limite de massa para o objeto estudado aqui, isto é uma estrela relativística modelada por um gás puramente de nêutrons degenerados, é $0,7M_{\odot}$ [12] ou, equivalentemente $B = 0,7N_{\odot}$, estudamos a minimização da energia para as condições iniciais de $0,2N_{\odot}$ e $0,5N_{\odot}$.

As figuras (5.6a) e (5.6b) ilustram os gráficos da densidade de matéria em função do raio para diferentes quantidades de camadas N com as condições iniciais de $0,2N_{\odot}$ e $0,5N_{\odot}$ respectivamente encontradas minimizando a Eq. (5.31) no Mathematica.

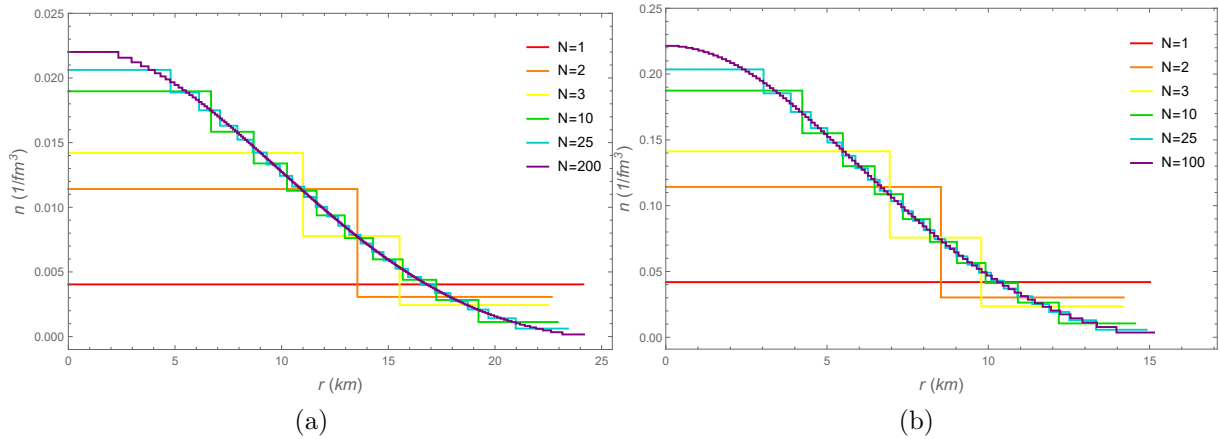


Figura 5.6: Distribuição de matéria no interior da estrela de (a) $B = 0,2 N_{\odot}$ e (b) $B = 0,5N_{\odot}$ para diferentes número de camadas via minimização da energia.

Observamos que quando todas as camadas tem o mesmo número de bárions b (suposição feita inicialmente por simplicidade), a primeira camada, onde a densidade é mais alta e a gravitação é suposta Newtoniana ($e^{\lambda_0} = 1$), possui um raio grande comparando com o raio das demais camadas. Esses resultados devem ser compatíveis com a solução de TOV dada as mesmas condições iniciais. Usando a tabela 5.1 de equivalência entre condições iniciais, sobrepomos a seguir as distribuições obtidas via TOV, na Figs. (5.5a) e (5.5b), e via minimização de energia nas Figs. (5.6a) e (5.6b), para as condições iniciais citadas anteriormente.

Note nas Figs. (5.7a) e (5.7b), que quanto maior o número de camadas usadas no método de minimização mais suave é a curva e, conseqüentemente mais próxima à solução de TOV.

Comparando os dois métodos observamos que as distribuições calculadas via TOV coincidem com o método variacional, com uma discrepância de 0,05% para o modelo de 200 camadas com $0,2 N_{\odot}$ e 0,18% para 100 camadas com $0,5 N_{\odot}$.

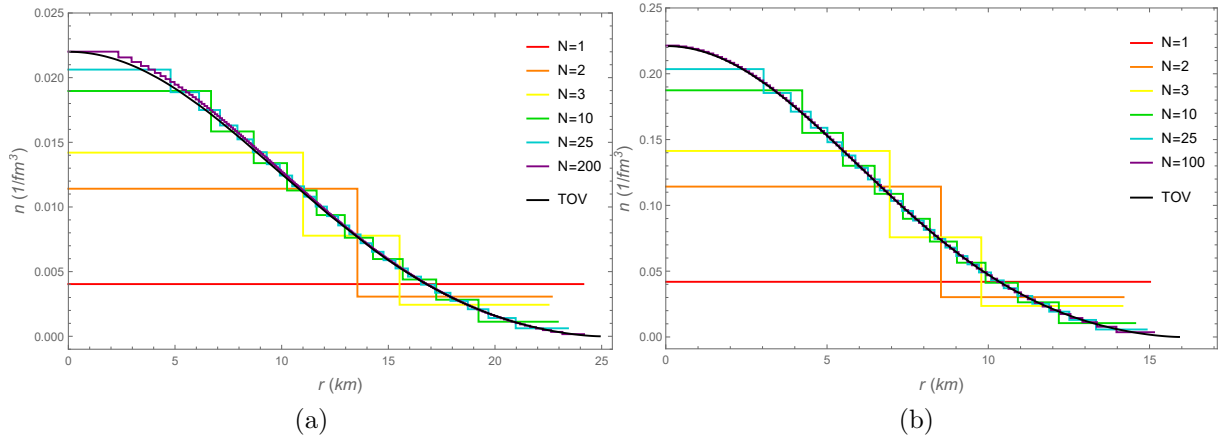


Figura 5.7: Superposição da distribuição de matéria no interior da estrela de (a) $B = 0,2 N_{\odot}$ e (b) $B = 0,5N_{\odot}$ por ambos os métodos.

Comparando estrelas com números de bárions de $0,65$, $0,70$ e $0,73 N_{\odot}$ discretizadas em 500 camadas via minimização e sobrepondo a solução de TOV observamos na Fig. (5.8) um aumento de menos de 10% no número de bárions gera um aumento de cerca de 50% na densidade central. E, utilizando $0,74 N_{\odot}$ (número de bárions máximo encontrado na solução de TOV) como condição inicial na minimização, notamos que a densidade central é tão alta que nenhuma configuração de equilíbrio estável é encontrada. Logo, os dois métodos concordam no valor máximo de B .

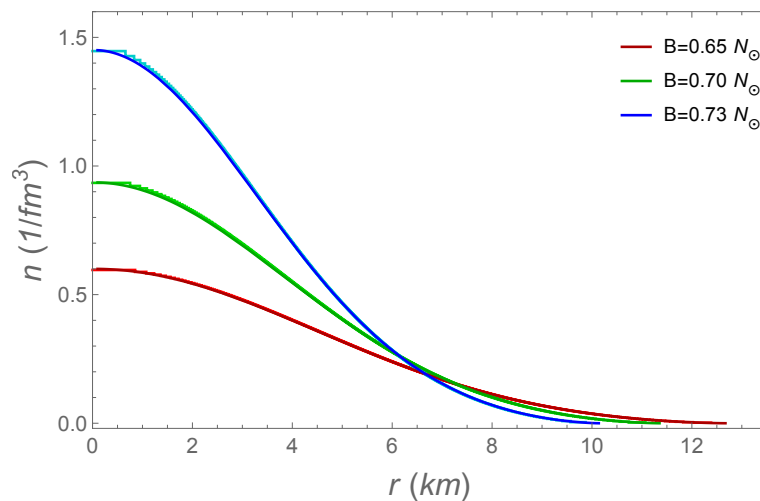


Figura 5.8: Superposição da distribuição de matéria em função do raio para estrelas de $0,65$, $0,70$ e $0,73N_{\odot}$, com $N = 500$ via minimização da energia e via TOV.

Podemos também comparar a quantidade $M - B$ na solução de TOV com seu equivalente, M_{Opt} minimizada. Assim, para as condições iniciais de $0,2$ e $0,5N_{\odot}$ com 100 camadas encontramos uma discrepância de $2,4\%$ e $0,3\%$ respectivamente.

Uma discussão interessante a ser feita é sobre o efeito da relatividade na estrela. Para isto vamos supor uma estrela de $0,5N_{\odot}$ com uma única camada. A seguir o gráfico da massa otimizada, dada pela Eq. (5.31), em função do raio para este caso.

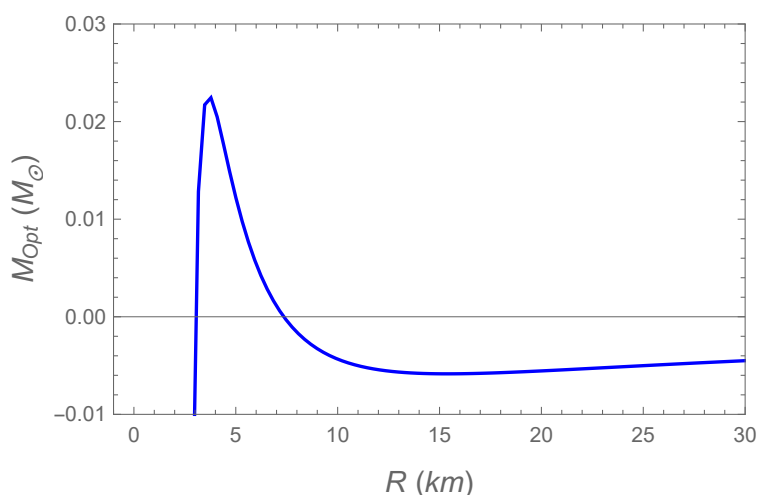


Figura 5.9: Massa otimizada em função do raio para uma estrela de $0,5N_{\odot}$ e $N = 1$ via minimização da energia.

Observamos a presença de um pico em $r = 3,7 \text{ km}$. A queda abrupta na massa para raios menores que $r = 3,7 \text{ km}$ indica o desequilíbrio entre a pressão do gás e a atração gravitacional que levaria ao colapso da estrela.

Queremos descobrir se este colapso seria devido ao gás, que analogamente ao efeito de Chandrasekhar em anãs brancas, não pode mais sustentar a atração gravitacional devido a mudança que ocorre na equação de estado quando os elétrons se tornam relativísticos, ou devida a atuação da relatividade na gravitação. Para isso, usamos a aproximação de gás não relativístico e comparamos o efeito dos “potenciais” $(1 - e^{\lambda})$ e GM/c^2r responsáveis pela atração gravitacional nos limites relativístico e Newtoniano, respectivamente. Como pode ser visto na Fig. (5.10)

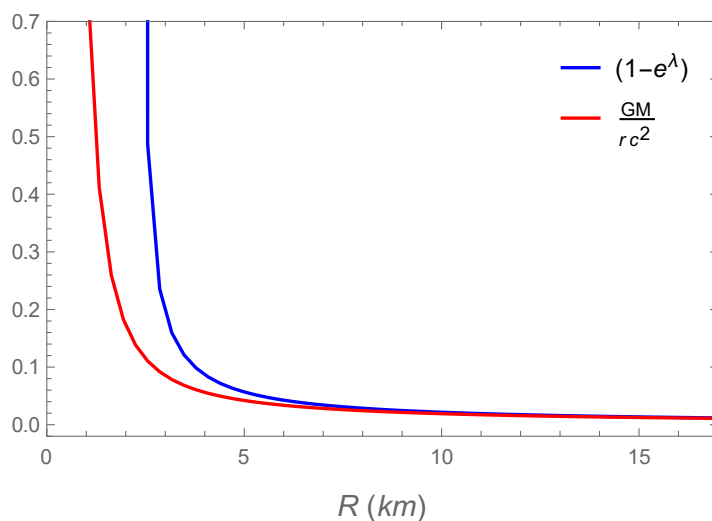


Figura 5.10: Comparação entre os potenciais nos limites relativístico e newtoniano para a estrela citada anteriormente via minimização da energia.

Note que estes “potenciais” calculados em $r = 3,7 \text{ km}$ são respectivamente 0,099 e 0,061. Ou seja, o efeito da relatividade da gravitação proporciona uma atração 1,6 vezes mais forte, o que indica que esta é a responsável pelo colapso, e não a equação de estado, como acontece no caso de anãs brancas.

Analisando as equações de TOV, (4.37), na Sec.4.2 vemos que as correções relativísticas tem função de fortalecer a atração gravitacional, o que pode ser observado na Fig. 5.10, em que comparamos a ação do potencial gravitacional relativístico e sua aproximação Newtoniana.

Para raios pequenos (ou seja, estrelas bem compactas) o potencial relativístico, em azul, é sempre maior do que o newtoniano. Mas conforme o raio vai aumentando eles se tornam cada vez mais próximos, ou seja, as correções relativísticas deixam de ser significantes e podemos usar as equações clássicas, como no caso de anãs brancas.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação estudamos o equilíbrio hidrostático de um objeto compacto relativístico modelado por um gás de nêutrons degenerados. Usualmente este estudo é realizado resolvendo as equações diferenciais de TOV, alguns exemplos podem ser encontrados em trabalhos como Refs. [11, 34, 35, 36]. Aqui usamos os resultados proporcionados por essa análise para comparar com um método variacional.

Utilizando o princípio variacional encontramos uma alternativa para a obtenção da configuração de equilíbrio hidrostático dos objetos mencionados. A discretização da estrela em camadas simplifica sua estrutura de forma que possibilita um maior controle físico das características da estrela como por exemplo a possibilidade de escolher como a distribuição de matéria se dá no inteiro da estrela – aqui usamos, como primeira aproximação e por simplicidade, uma distribuição uniforme, mas partimos do princípio que esta pode ser qualquer outra função (um exemplo seria definir o número de bárions por camada $b_{i-1/2}$ como uma função crescente com o raio). Desta maneira, podemos reduzir consideravelmente o número de graus de liberdade e ainda assim obter a estrutura geral da estrela compatível com TOV e, por consequência podemos incluir interações mais complicadas como difusão de calor e transporte de neutrinos.

Comparando os resultados obtidos pela solução usual de TOV e pelo método proposto, encontrados nas Secs. 5.2.1 e 5.2.2 respectivamente, observamos uma significativa concordância, o que nos leva a crer que o mesmo pode ser desenvolvido para a situação do

colapso gravitacional de estrelas relativísticas.

Tendo isto em vista, apresentamos também um resumo teórico sobre o colapso gravitacional, na Sec. 4.3, onde discutimos o problema de utilizar da métrica de Schwarzschild para este caso e apresentamos uma possibilidade de métrica mais apropriada ao problema do colapso. Seguimos com a análise sobre o colapso descrevendo o caso mais simples, sem pressão, que permite uma solução analítica. Em seguida, apresentamos o formalismo teórico adaptado ao colapso gravitacional relativístico, derivando as chamadas equações de Misner e Sharp, descrevendo o colapso da matéria esfericamente simétrica.

Esperamos que o conteúdo presente neste trabalho seja um ponto de partida para o desenvolvimento de um método variacional, análogo ao apresentado no Cap. 5, que possa ser aplicado à situação do colapso gravitacional e comparado com a solução usual obtida em trabalhos com as Refs. [37, 38, 39].

Referências Bibliográficas

- [1] R. Kippenhahn, A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*, Springer (1990).
- [2] N.K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*, 2nd edition, Springer Verlag, New York, USA (2000).
- [3] Arthur S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press (1988).
- [4] R. Kippenhahn, *100 Bilhões de Sóis: Nascimento, Vida e Morte das Estrelas*, Editora Melhoramentos, São Paulo, SP (1981).
- [5] A. C. Phillips, *The Physics of Stars*, John Wiley & Sons (1994).
- [6] S . Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Publications (2010).
- [7] S.L. Shapiro and Saul A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, The Physics of Compact Objects*, Wiley - VCH (1983).
- [8] S. Chandrasekhar, *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*, *Astrophysical Journal*, **74**, 81 (1931).
- [9] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Massachusetts Institute of Technology (1972).
- [10] M. Bazin, M. Schiffer e R. Adler, *Introduction To General Relativity*, McGraw-Hill (1965).

- [11] Y. Souza , M. Calvão, B. Siffert and C. A. D. Zarro *Charged compact stars. In: Second Argentinian-Brazilian Meeting on Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology, 2015, Buenos Aires. Proceedings of the Second Argentinian-Brazilian Meeting on Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology. Buenos Aires: Asociación Argentina de Astronomía, p. 151-156. (2014).*
- [12] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, *Phys. Rev.*, **55**, 374, (1939).
- [13] C. E. Rhoades and R. Ruffin, *Maximum Mass of a Neutron Star*, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 324 (1974).
- [14] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, *Phys. Rev.*, **56**, 455, (1939).
- [15] C.W. Misner and D.H. Sharp, *Relativistic Equations for Adiabatic Spherically Symmetric Gravitational Collapse* *Physical Review B*, **136**, 571-576 (1964).
- [16] R. Derradi de Souza, T. Koide and T. Kodama, *Hydrodynamic Approches in Relativistic Heavy Ion Reactions*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **86** 35-85 (2016).
- [17] Y. Hama, T. Kodama and O. Socolowski Jr., *Topics on Hydrodynamic Model of Nucleus-Nucleus Collisions*, *Brazilian Journal of Physics*, **35**, no. 1 (2005).
- [18] J. B. Hartle, *Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley (2003).
- [19] Bernard F. Schutz, *General Relativity*, Cambridge University Press (1985).
- [20] Wolfgang Rindler, *Relativity Special, General, and Cosmological*, 2nd edition, Oxford University Press (2006).
- [21] R. D' Inverno, *Introducing Einstein's relativity*, Oxford University Press, USA (1899).

- [22] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics Volume 2 - The Classical Theory of Fields*, 4th edition, Butterworth-Heinemann (1980).
- [23] Ya. B. Zel'dovich, I. D. Novikov, *Stars and Relativity*, Dover Publications (2011).
- [24] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, John Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman (1973).
- [25] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics Volume 6 - Fluid Mechanics*, 2nd edition, Butterworth-Heinemann (1987).
- [26] Richard C. Tolman, *Relativity, thermodynamics, and cosmology*, Dover Publications (1987).
- [27] Goldstein, Poole and Safko, *Classical Mechanics*, 3rd edition, Addison Wesley (2000).
- [28] Keith R. Symon, *Classical Mechanics*, 3rd edition, Addison Wesley (1971).
- [29] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Thomson Books-Cole (2004).
- [30] Philip M. Morse and Herman Feshbach, *Methods Of Theoretical Physics*, vol.1, McGRAW-HILL Book Company (1953).
- [31] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Nakano and J. A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, University of Chicago Press (1965).
- [32] Richard C. Tolman, *Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models*, Proc. N. A. S., **20** (1934).
- [33] H.-T. Elze, Y. Hama, T. Kodama, Martín Makler, Johann Rafaelski, *Variational Principle for Relativistic Fluid Dynamics*, G: Nucl. Part. Phys. **25**, 1935–1957 (1999).

- [34] R. R. Silbar, S. Reddy *Neutron Stars for Undergraduates* Am. J. Phys. **72**, (7), (2004).
- [35] B. B. Siffert, J. R. T. de Mello Neto, M. O. Calvão, Compact Charged Stars, Braz. J. Phys. **37**, 609 (2007)
- [36] S. Ray, A. L. Espíndola, M. Malheiro, J. P. S. Lemos, V. T. Zanchin, Phys. Rev. D **68**, 084004 (2003); astro-ph/0307262.
- [37] Michael H. May and Richard H. White, *Hydrodynamic Calculations of General Relativistic Collaps*, Physical Review, **141** (1966).
- [38] Henneth A. Van Riper, *General Relativistic Hydordynamics and the Adiabatic Collapse of Stelar Cores*, The Astrophysical Journal, **232** (1979).
- [39] C.R. Ghezzi, *Ghezzi- Relativitic Structure, Stability and Gravitational Collapse of Charged Neutron Stars*, Physical Review D **72** (2005).
- [40] S. R. A. Salinas, *Introduction to Statistical Physics*, Springer (2001)
- [41] Kerson Huang, *Statistical mechanics*, Wiley (1987)
- [42] C. Kittel, *Elementary Statistical Physics*, 2nd Edition, John Wiley & Sons (1958).
- [43] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGRAW-HILL Book Company (1965)
- [44] H. Moyses Nussenzeig, *Curso de Física Básica 2 - Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*, Editora Edgard Blücher (2010).
- [45] A. P. Lightman, Willian H. Press, Richard H. Price, Saul A. Teukolsky , *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press (1975).

- [46] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt , *Exact Solutions of Einsteins Field Equations*, 2nd edition, Cambridge University Press (2003).

Apêndice A

Dimensões de uma Estrela de Nêutrons Típica

Supondo um número de camadas N , a quantidade de bárions por camada pode ser calculada usando: $b = B/N$.

Seguindo a Ref. [2], estimamos a massa e raio da estrela próximo ao limite do colapso gravitacional: $R = 2M$, ou seja, $R = r_s$

Fazendo a suposição de que a gravidade mantém os núcleons unidos até a região de caroço duro dos nucleons:

$$\begin{aligned} r_0 &\approx 0.5 \times 10^{-13} \text{cm}, \\ m_0 &\approx 1.7 \times 10^{-24} \text{g}. \quad (\text{aprox. massa de } p \text{ e } n, \text{ a massa de } e \text{ pode ser desprezada}) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Então a massa e raio da estrela podem ser escritas como:

$$R \approx r_0 B^{1/3} \quad M \approx m_0 B. \tag{A.2}$$

Com isso, para uma estrela de nêutrons com a máxima massa possível:

$$\begin{aligned}
R &= 2M \\
r_0 B^{1/3} &= 2m_0 B \\
B^{2/3} &= \frac{r_0}{2m_0}.
\end{aligned}
\tag{A.3}$$

Substituindo os valores médios das dimensões do nucleon temos uma estimativa do limite de massa, raio e número de bárions para uma estrela de nêutrons, encontramos:

$$\begin{aligned}
M &= 2.3M_\odot, \\
R &= 7km, \\
B &= 2.6 \times 10^{57}.
\end{aligned}
\tag{A.4}$$

Como a matéria próxima à superfície da estrela é menos compacta do que no centro, esperamos um raio um pouco maior e uma massa menor (isso se deve também a energia de ligação), tipicamente:

$$\begin{aligned}
M &\approx 2M_\odot, \\
R &\approx 10km,
\end{aligned}
\tag{A.5}$$

A densidade de energia típica é $\bar{\varepsilon} \approx 10^{15}g/cm^3$.

Apêndice B

Gás Ideal

B.1 Estatística de Fermi-Dirac

Consideramos um sistema de partículas independentes idênticas não interagentes e em equilíbrio que obedecem o Princípio de Exclusão de Pauli. Isto é, Fermions, que por terem spin semi inteiro, duas partículas não podem ocupar o mesmo estado simultaneamente, ou seja a função de onda total é antissimétrica em relação a troca de quaisquer duas partículas. O termo independente exprime que os estados de N partículas podem ser escritos a partir do estado de uma partícula.

Por conveniência, trabalhamos no ensemble grão-canônico, onde o sistema pode ser especificado pelo numero de partículas n_i que ocupa o estado ϵ_i , de maneira que i denomina um único estado. A função de grande-partição é escrita como [40]

$$Z_{GC} = \sum_{\alpha} e^{-\beta(E_{\alpha} - \mu N_{\alpha})}, \quad (\text{B.1})$$

onde $\beta = 1/k_B T$ e $E_{\alpha} = \sum_i n_i \epsilon_i$.

No caso de férmions, o princípio de exclusão permite somente os valores $n_i = 0$ ou 1 . Sendo assim, supondo $N = \sum n_i$ partículas e M estados possíveis:

$$\begin{aligned}
Z_{GC} &= \sum_{\text{estados}} e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)} = \sum_{\{n_i\}} e^{-\beta \sum_{i=1}^M n_i(\epsilon_i - \mu)} \\
&= \sum_{\{n_i\}} \left[\prod_i e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)} \right] = [1 + e^{-\beta n_1(\epsilon_1 - \mu)}][1 + e^{-\beta n_2(\epsilon_2 - \mu)}] \dots [1 + e^{-\beta n_M(\epsilon_M - \mu)}] \\
&= \prod_i \left[\sum_{n_i=0}^1 e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)} \right] \\
&= \prod_i (1 + q_i) \quad \text{onde } q_i = e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Como $n_i = 0, 1$ é fácil perceber que o somatório e produtório são intercambiáveis. Já que $e^{-\beta \sum_{i=1}^M n_i(\epsilon_i - \mu)}$ é a probabilidade relativa de encontrar o gás em um dado estado, podemos calcular o número médio de partículas no estado de uma partícula i , ou seja o número de ocupação a partir da definição de valor médio:

$$\begin{aligned}
\langle n_j \rangle &= \frac{\left[\sum_{\{n_i\}} n_j e^{-\beta \sum n_i(\epsilon_i - \mu)} \right]}{\left[\sum_{\{n_i\}} e^{-\beta \sum n_i(\epsilon_i - \mu)} \right]} = \frac{-1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \ln Z_{GC} \\
&= \frac{\sum_{\{n_i\}} n_j \prod_i q_i^{n_i}}{\prod_i (1 + q_i)} \\
&= \frac{\sum_{\{n_i\}} n_j q_j^{n_j} \prod_{i \neq j} q_i^{n_i}}{\prod_i (1 + q_i)} \quad n_j = 0, 1 \\
&= \frac{\sum_{\{n_i\}} n_j (=1) q_j^{n_j} \prod_{i \neq j} q_i^{n_i} + \sum_{\{n_i\}} n_j (=0) q_j^{n_j} \prod_{i \neq j} q_i^{n_i}}{\prod_i (1 + q_i)} \\
&= \frac{\sum_{\{n_i\}} q_j \prod_{i \neq j} q_i^{n_i}}{\prod_i (1 + q_i)} \\
&= \frac{\prod_{i \neq j} q_j \sum_{\{n_i\}} q_i^{n_i}}{\prod_i (1 + q_i)} \\
&= \frac{q_j \prod_{i \neq j} (1 + q_i)}{\prod_i (1 + q_i)} \\
&= \frac{q_j}{(1 + q_j)},
\end{aligned} \tag{B.3}$$

ou, substituindo q_j

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1}, \quad (\text{B.4})$$

que é a distribuição de Fermi-Dirac $f(\epsilon)$ isto é, a probabilidade de um estado de energia ϵ estar ocupado.

Como o potencial químico μ é a diferença de energia gerada pela adição de uma partícula ao sistema, a temperatura zero, isto é no regime degenerado (quântico), μ é igual a energia de Fermi ϵ_F . Para uma partícula ser adicionada ao sistema, esta precisa ter uma energia maior do que a energia de Fermi do sistema uma vez que todos os estados de energia mais baixos estão ocupados. Esta descrição coincide com a definição de potencial químico, logo para $T = 0$ (caso degenerado) temos que $\mu = \epsilon_F$. A dependência da distribuição $f(\epsilon)$ com a energia esta ilustrada na Fig. B.1 tanto para $T = 0$ quanto para uma temperatura $T \ll T_F = \mu/k_B = (\epsilon)/k_B$.

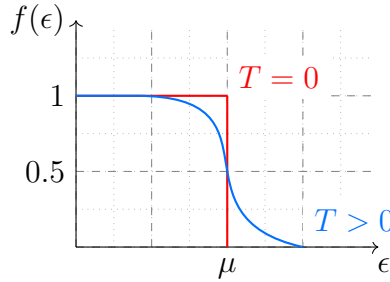


Figura B.1: Distribuição de Fermi-Dirac plotada para $T = 0$ e $T \ll T_F$.

Note que $f(\epsilon) = 1/2$ em $\epsilon = \mu$, enquanto que para $T = 0$ a distribuição cai abruptamente. Para melhor aprofundamento consultar as Refs. [40, 41, 42, 43].

B.2 Pressão Exercida por um Gás Ideal

Em teoria cinética dos gases, a pressão é igual a força exercida pelos átomos que o compõem ao colidir com uma unidade de área da superfície que contém o gás. (no nosso caso, as bordas das camadas, consideradas 'rígidas/impenetráveis' para que não haja transporte de partícula entre camadas)

Como as colisões são elásticas (não há perda de energia), o efeito do impacto da molécula com as paredes é inverter o sentido da componente da velocidade perpendicular à superfície, isto é $v_x \rightarrow -v_x$.

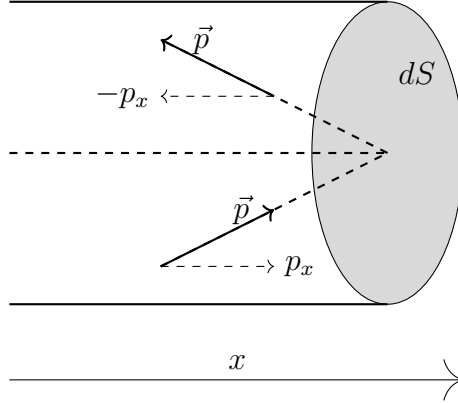


Figura B.2: Colisão de uma molécula com uma parede.

Supondo m a massa das moléculas do gás, o momento transferido à parede devido a colisão de uma molécula, Fig. B.2, é menos a variação de momento p_x desta molécula.

$$-\Delta p_x = p_x^i - p_x^f = p_x^i - (-p_x^i) = 2p_x^i = 2mv_x. \quad (\text{B.5})$$

A força média \bar{F}_x exercida sobre a parede pelas moléculas do gás a é taxa de variação do momento médio transferido devido a colisão, ou seja, a média do momento por colisão vezes o número de colisões por unidade de tempo. Para simplificar, assumimos que a distribuição de velocidades seja discreta. Seja n_i o número de moléculas por volume com velocidade \vec{v}_i então, o número total de moléculas com v_i que colidem com o elemento de área dS durante um intervalo de tempo dt é:

$$dn_i = n_i v_{ix} dS dt. \quad (\text{B.6})$$

Como cada colisão transfere um momento $\Delta p_{ix} = 1mv_{ix}$, então o momento total transferido pelas colisões (das moléculas com v_i) em dS durante dt é:

$$dp_{ix} = dn_{ix}\Delta p_{ix} = 2mn_i v_{ix}^2 dS dt. \quad (\text{B.7})$$

A força $F_{ix} = dp_{ix}/dt$ é a taxa de variação do momento, e a pressão $P_i = dF_{ix}/dS$ é força por unidade de área, logo temos que a pressão exercida sobre a parede devido as moléculas com \vec{v}_i é:

$$P_i = 2mn_i v_{ix}^2. \quad (\text{B.8})$$

Com isso podemos calcular a pressão total como a soma de todas as contribuições de \vec{v}_i , então

$$\begin{aligned} P &= 2m \sum_{v_{ix}>0} n_i v_{ix}^2, \\ P &= m \sum_i n_i v_{ix}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Pela isotropia da distribuição de velocidade, isto é $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, temos $\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$

$$\begin{aligned} P &= nm \langle v_x^2 \rangle, \\ P &= \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Como neste apêndice estamos lidando com partículas relativísticas, é conveniente escrever a pressão em termos do momento linear

$$P = \frac{1}{3} n \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle. \quad (\text{B.11})$$

Com isto, e de posse das relações de momento e energia relativísticos, $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ e $E = \gamma mc^2$ respectivamente, chegamos a Eq. ((3.23)), umas vez feitas as modificações necessárias para descrever a distribuição continua. (Note que há um diferença entra a

notação apresentada aqui e a contida no texto em relação a pressão $P \rightarrow p$ e momento $\vec{p} \rightarrow \vec{k}$). Esta seção é baseada na Ref. [44].

Apêndice C

Sistema de Coordenadas no Caso do Colapso

C.1 Teorema de Birkhoff

O teorema de Birkhoff estipula que se a geometria de uma dada região do espaço-tempo esfericamente simétrica é uma solução da equação de Einstein no vácuo, esta geometria é necessariamente de Schwarzschild. Logo, como qualquer região em torno de uma estrela esférica eletricamente neutra seja esta estática ou em colapso satisfaz o teorema de Birkhoff, o campo externo a uma estrela deve ser uma geometria de Schwarzschild.

Consideramos uma região esférica de espaço-tempo cuja geometria pode ser descrita pelas coordenadas de Schwarzschild:

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{C.1})$$

onde $\nu = \nu(t, r)$ e $\lambda = \lambda(t, r)$

A solução da equação de Einstein no vácuo, $G_{\mu\nu} = 0$, neste caso é:

$$G_{tt} = \frac{2r\lambda' + e^{2\lambda} - 1}{r^2} = 0, \quad (\text{C.2})$$

$$G_{tr} = \frac{2\dot{\lambda}}{r} = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$G_{rr} = \frac{2r\nu' + 1 - e^{2\lambda}}{r^2} = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi} = (-r\dot{\lambda}^2 + r\dot{\lambda}\dot{\nu} + r\ddot{\nu})e^{-2\nu} + (\nu' + r\nu'^2 - \lambda' - r\lambda'\nu' + r\nu'')e^{-2\lambda} = 0. \quad (\text{C.5})$$

A equação (C.3) garante que λ é uma função somente de r e (C.2) garante que λ tem a mesma forma que na métrica de Schwarzschild, isto é:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\ln\left|1 - \frac{2M}{r}\right| + f(t). \quad (\text{C.6})$$

E, as equações (C.4) e (C.5) se tornam equações equivalentes em virtude da identidade de Bianchi, $\nabla \cdot G = 0$ cuja solução é:

$$\nu = \frac{1}{2}\ln\left|1 - \frac{2M}{r}\right| + f(t), \quad (\text{C.7})$$

onde $f(t)$ é uma função arbitrária. Substituindo as soluções obtidas para λ e ν na métrica (C.1) obtemos:

$$ds^2 = e^{2f(t)} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{C.8})$$

Definindo uma nova temporalada temporal:

$$t_{novo} = \int e^{f(t)} dt, \quad (\text{C.9})$$

o elemento de linha fica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{C.10})$$

Ou seja, a geometria de qualquer região esfericamente simétrica no vácuo é descrita pela métrica de Schwarzschild. (c.q.d.)

C.2 Coordenadas Comóveis

Apesar do teorema de Birkhoff, o interior de uma estrela em colapso não pode ser descrita pela métrica de Schwarzschild – pelos motivos expostos na Sec. (4.3). Assim, para a descrição de uma estrela em colapso precisamos introduzir um sistema de coordenadas comóvel.

Seja o interior da estrela composto por um fluido ideal (de composição química fixa) em equilíbrio termodinâmico cujo movimento é descrito pela quadri-velocidade u^ν .

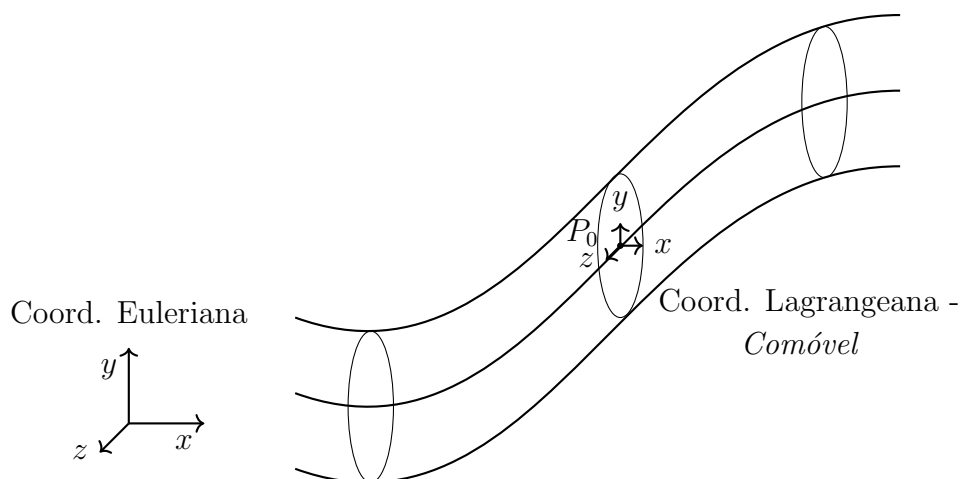


Figura C.1: Linhas de mundo das partículas do elemento de volume dV . Coordenadas Eulerianas - sistema de referencial fixo. Coordenadas Lagrangeanas - sistema de referencial comóvel a um elemento de fluido.

Considerando um pequeno elemento de fluido dV cujas paredes são presas ao fluido de forma que não há fluxo de bárions. Seja P_0 um ponto neste elemento de fluido que coincide com o centro de massa deste volume. Como este elemento de fluido se move no espaço-tempo este descreve uma linha de mundo (para cada partícula deste elemento), como indicado a Fig.(C.1).

Em um instante de tempo $t = t_0$ associamos ao ponto P_0 um sistema de coordenadas que acompanha este ponto (coordenadas Lagrangeanas). Assim, o sistema referencial inercial associado ao ponto P_0 é comóvel com P_0 de forma que $u^\nu = (u^0, 0, 0, 0)$ (já que P_0 está em repouso em relação ao referencial que o acompanha).

Conforme o elemento de fluido se move, este é deformado ou seja, seu volume varia, mas a quantidade de bárions nele contida permanece a mesma. Com isso escrevemos conservação de número de bárions $(nu^\nu)_{;\nu} = 0$.

Com isso, precisamos definir um sistema de coordenadas adequado para a descrição do colapso

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{C.11})$$

onde $\nu = \nu(t, r)$, $\lambda = \lambda(t, r)$ e $R = R(t, r)$ são funções a se determinar. E, $2\pi R(t, r)$ corresponde a circunferência de um círculo que passa pelos pontos de coordenada r em um dado tempo t enquanto r é a coordenada Lagrangeana que acompanha a matéria.

C.3 Métrica para o Caso do Colapso Gravitacional

A métrica na Eq. (C.11) é justificada pelo seguinte teorema segundo o qual para estrelas em colapso gravitacional não é possível haver as três seguintes propriedades simultaneamente:

1. Coordenada radial comóvel com uma camada de fluido;
2. Coordenada temporal comóvel com o fluido, ou seja, o compatível com o tempo próprio;
3. Métrica diagonal;

Só é possível que as três condições acima sejam satisfeitas se a pressão for nula. Para o leitor mais interessado, a prova deste teorema se encontra nas Refs. [45,46].