

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo

Perturbações das equações de Einstein-Boltzmann com
aplicação a flutuações na temperatura da radiação cósmica de
fundo

Gustavo de Barros

2006



Perturbações das equações de Einstein-Boltzmann com aplicação a
flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo

Gustavo de Barros

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Astronomia,
Observatório do Valongo, da Universidade
Federal do Rio de Janeiro, como parte
dos requisitos necessários à obtenção do
título de Mestre em Astronomia.

Orientador: Maurício Ortiz Calvão

Rio de Janeiro
Maio de 2006

Perturbações das equações de Einstein-Boltzmann com aplicação a
flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo

Gustavo de Barros

Orientador: Maurício Ortiz Calvão

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em
Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de
Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título
de Mestre em Astronomia.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Maurício Ortiz Calvão

Prof. Ioav Waga

Prof. Jailson Alcaniz

Prof. Gustavo Frederico Porto de Mello

Prof. Martín Makler

Rio de Janeiro

Maio de 2006

*Dedico este trabalho à minha família,
que, apesar de morarmos juntos, quase não interagimos;
por esses dois anos que dediquei, talvez, mais tempo aos estudos que à ela.*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao Maurício Calvão por me dar a possibilidade de estudar essa matéria tão interessante, por me ajudar sempre no entendimento de tantas coisas nessa teoria complicada e, principalmente, pelo dia-a-dia, pela convivência que com o Maurício flui de forma fácil e agradável.

Agradeço a minha família pelo apoio em tudo que é necessário para se viver nesses dias tão difíceis.

Agradeço aos meus amigos por tornarem agradáveis todos os momentos dessa fase estressante que foi o mestrado.

Obrigado a todos que participaram da minha vida e sabem que fizeram-na um pouco melhor, seja qual fora a situação, e àqueles que, mesmo não sendo bem vindos, fizeram algo que julgaram ser o melhor para mim.

Obrigado.

Resumo

Este trabalho é dedicado a um estudo introdutório e didático dessa nova e crescente área da cosmologia, que é a radiação cósmica de fundo (RCF). Apresentamos os conceitos, princípios e resultados básicos ligados a esse problema. Como a física que governa as equações a ele relacionadas vem essencialmente das perturbações das equações de Einstein-Boltzmann, grande parte desse trabalho direciona-se ao entendimento das perturbações lineares dessas equações, no “gauge” (calibre) newtoniano conforme, com tri-curvatura nula e considerando apenas perturbações escalares. As condições iniciais desse sistema de equações também são exploradas. Outra parte principal é consagrada à aplicação desse sistema para a compreensão do espectro de potência das anisotropias em temperatura da RCF.

Abstract

This work is the result of a study aimed at understanding the basics of the new and growing topic of cosmic microwave background (CMB) physics. We present the fundamental concepts, principles and results related with this problem. Since the relevant equations are essentially the Einstein-Boltzmann perturbed equations, a great part of this work is dedicated to these linearized equations, in the conformal Newtonian gauge, with vanishing tri-curvature, for scalar perturbations only. The initial conditions are also touched on. Another part of paramount importance is the application to the description of the power spectrum of temperature anisotropies.

Índice

| | |
|--|-----------|
| Lista de figuras | 1 |
| Convenções | 3 |
| 1 Introdução | 5 |
| 2 Equações de Boltzmann perturbadas | 8 |
| 2.1 “Gauge” (calibre) newtoniano conforme | 9 |
| 2.2 Geodésicas perturbadas | 10 |
| 2.3 Termo de Liouville | 15 |
| 2.4 Função de distribuição perturbada para os lúxons | 16 |
| 2.5 Termo de colisão para os fótons | 17 |
| 2.5.1 1ª parte: termo isotrópico | 22 |
| 2.5.2 2ª parte: termo anisotrópico | 25 |
| 2.6 Equação de Boltzmann para os lúxons | 29 |
| 2.6.1 Equação de Boltzmann em ordem zero | 29 |
| 2.6.2 Equação de Boltzmann em primeira ordem | 30 |
| 2.7 Expansão de $\tilde{\Theta}$ e $\tilde{\mathcal{N}}$ em multipolos | 33 |
| 2.8 Equação de Boltzmann para a matéria escura fria | 35 |
| 2.9 Equação de Boltzmann para os bárions | 39 |
| 3 Equação de Einstein perturbada | 46 |
| 3.1 Tensor e escalar de Ricci perturbados | 46 |
| 3.2 Componentes da equação de Einstein | 49 |
| 4 Condições iniciais | 54 |
| 4.1 Sistema de equações nos tempos primordiais | 55 |
| 4.2 Potenciais em pequenas escalas | 59 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Anisotropias | 62 |
| 5.1 | Espectro de potência das anisotropias da radiação cósmica de fundo | 62 |
| 5.2 | Perturbações nos dias de hoje | 68 |
| 5.3 | Grandes escalas: o platô de Sachs-Wolfe | 74 |
| 5.4 | Escalas intermediárias: os picos acústicos | 79 |
| 5.4.1 | Modelos simplificados | 84 |
| 5.5 | Pequenas escalas: a cauda de amortecimento | 88 |
| 6 | Conclusão | 92 |
| A | Funções de Bessel | 95 |

There are more things in heaven and earth than are dreamt
of in your philosophy.

William Shakespeare
Hamlet (1600)

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 5.1 | Função de visibilidade ($g(\eta)$), calculada para $h = 0.5$, com o pico em torno da época do desacoplamento, praticamente independente da quantidade de energia de bárions. Figura retirada de [1]. | 72 |
| 5.2 | Aproximação de delta de Dirac para a função de visibilidade. Vemos, pelos valores típicos das perturbações e da função de Bessel, que a contribuição da integral no pico da função g será dominante comparada ao resto. Figura retirada de [1]. | 73 |
| 5.3 | Gráfico das anisotropias da RCF. Podemos separá-lo em três regiões. Uma primeira, à esquerda, de grandes escalas, um platô (platô de Sachs-Wolfe); uma intermediária com grandes picos (região dos picos acústicos); e uma final de pequenas escalas, com amplitude decrescente, ainda oscilando (região do amortecimento). Note a escala logarítmica das abcissas, e o fato de o espectro ser calculado dimensionalmente (μK^2). | 75 |
| 5.4 | Platô de Sachs-Wolfe. As linhas acima são representantes de diferentes modelos cosmológicos, e as áreas mais escuras representam resultados do satélite COBE. Figura retirada de [1]. | 79 |
| 5.5 | Oscilações acústicas. O painel de cima esboça as oscilações causadas pelas equações (5.61) e (5.62); do lado esquerdo aparece um esquema bem simplificado do que seria a razão física das perturbações: as bolinhas (pelo fato de estarem em um poço de potencial) representam o efeito gravitacional (atrativo para o fluido), e a mola representa a pressão do fluido. No painel de baixo, vemos o translado do eixo de oscilação da perturbação em cosseno, e seu aumento relativo de amplitude com respeito à perturbação em seno. Do lado esquerdo temos o que seria o equivalente ao aumento de R , que é o fato de as bolinhas ficarem mais pesadas, e assim causarem um aumento na amplitude de oscilação e o translado de seu ponto zero (eixo central de oscilação). Figura retirada de [18]. | 86 |

| | | |
|-----|--|----|
| 5.6 | Potenciais variáveis. O gráfico do lado direito mostra como o potencial decrescente da época da radiação altera a amplitude dos picos. Do lado esquerdo podemos ver a analogia de como o potencial (poço) constante implica em uma distância entre as bolinhas (amplitude) maior. Figura retirada de [39]. | 87 |
| 5.7 | Influência do amortecimento. Vemos: a função de amortecimento (em verde); como fica o espectro de potência sem ser incluído o termo de amortecimento (em azul); e como fica o espectro com o termo de amortecimento (em vermelho). Figura retirada de [39]. | 91 |
| A.1 | Funções de Bessel. As funções de Bessel têm seu valor máximo quando o argumento é bem próximo ao grau da função. | 96 |
| A.2 | Função de Bessel e sua derivada. Vemos que essas funções estão fora de fase e têm basicamente amplitudes de mesma ordem de grandeza. | 97 |

Convenções

Métrica não perturbada:¹

$$\bar{g}_{00}(\vec{x}, t) := -1$$

$$\bar{g}_{ij}(\vec{x}, t) := a^2(t)\delta_{ij}$$

Símbolos de Christoffel (de segunda espécie):

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}g^{\mu\nu} [g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}]$$

Tensor de Riemann:

$$\mathcal{R}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} := \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta}$$

Tensor de Ricci:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} := \mathcal{R}^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$$

¹A barra sobre uma grandeza indica o seu valor no modelo não perturbado.

Escalar de Ricci:

$$\mathcal{R} := g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$$

Tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} := \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}$$

Equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Capítulo 1

Introdução

Com o avanço da tecnologia e a conseqüente construção de melhores telescópios e satélites, e também com o desenvolvimento de novos e mais sofisticados métodos de observação espacial (observação e detecção de todos os tipos de ondas eletromagnéticas e de partículas vindas do espaço), a cosmologia tem passado, nas últimas décadas, por uma grande revolução. O principal motor disso é a enorme quantidade de dados disponíveis, inclusive em domínio público. Antigamente, a cosmologia era, basicamente, teórica ou “especulativa”, sem muita oportunidade de ser colocada à prova por verificações observacionais.

Talvez o primeiro resultado observacional cosmologicamente importante tenha sido a descoberta de Hubble de que o universo está em expansão. Até então acreditava-se em um universo estático¹, sem movimento privilegiado². Com os dados observacionais e a conclusão de que o universo deveria estar se expandindo, modelos cosmológicos que não admitissem tal possibilidade começaram a ser descartados.

A descoberta da radiação cósmica de fundo (RCF), em 1964, por Penzias e

¹As principais teorias cosmológicas formuladas estavam de acordo com essa crença. Uma das histórias mais famosas em relação a isso foi a inclusão, feita por Einstein, da chamada constante cosmológica, nas suas equações. Ele “colocou à mão” um termo que não existia nelas, porque segundo as equações o universo deveria se expandir, e ele acreditava que isso não era verdade.

²As galáxias, estrelas ou outras componentes do universo, podem até se mover, mas na média, elas não tem nenhum movimento em comum.

Wilson, foi um resultado observacional que também revolucionou a cosmologia e deu grande força à teoria do Big Bang, até então relegada a segundo plano pela teoria do estado estacionário [7], [24]. A teoria do Big Bang pressupõe que, no passado remoto, o universo era muito quente e denso, e que, com o tempo, ele iria se expandindo³. Devido à expansão ele se resfriaria, e assim, surgiriam condições para a recombinação e conseqüente desacoplamento dos fótons, dando origem ao que se observa hoje como a RCF. A teoria do estado estacionário não explicava naturalmente a existência da RCF, e por isso, foi, essencialmente, abandonada.

Mais recentemente, com a melhoria nos instrumentos observacionais, fez-se uma grande catalogação de supernovas do tipo Ia, uma espécie particular de “velas padrão”. Essas observações revelaram, surpreendentemente, uma expansão acelerada do universo hoje, que pretende ser explicada (i) pela inclusão de uma nova componente no universo, a chamada energia escura, com pressão suficientemente negativa, ou (ii) pelo desenvolvimento de teorias alternativas de gravitação, como, por exemplo, a teoria de branas (para outros detalhes, ver [2]).

Paralelamente, no estudo de distribuição de matéria no universo, levantamentos espectroscópicos de galáxias e quasares, com grande abertura, foram ou estão sendo realizados. Há duas décadas atrás (no começo dos anos 80), eram conhecidos os valores do desvio para o vermelho de aproximadamente 5.000 galáxias, ao passo que, hoje, têm-se aproximadamente 600.000 [38], [42], [43].

Esses estudos pretendem principalmente explicar como ocorreu a formação das estruturas no universo. Com os resultados observacionais, uma das primeiras conclusões encontradas, por exemplo, é a de que mesmo para escalas maiores que a de galáxias, até pelo menos escalas da ordem de superaglomerados de galáxias, o universo não apresenta homogeneidade [40]. Algumas estruturas aparecem bem destacadas em relação a outras, como, por exemplo, a Grande Muralha encontrada pelo CfA [41], e mais recentemente, a Grande Muralha encontrada pelo SDSS [43]. Com os dados da distribuição de galáxias (ou aglomerados, etc.), pode-se comparar os modelos teóricos de espectro de potência da matéria, e ajustá-los.

³Idéia já bastante aceita após várias observações de Hubble.

A RCF começou a ser mais exaustivamente escrutinada do ponto de vista observacional com o satélite COBE, diversos balões atmosféricos e, mais recentemente, com o satélite WMAP. O estudo teórico, analítico e computacional também sofreu avanços notáveis, levando à percepção de que a RCF é uma ótima ferramenta para inferir restrições sobre os parâmetros cosmológicos, em geral, e até mesmo sobre o estado do universo primitivo [6] (inflação, nucleossíntese de elementos leves, recombinação, etc). O ajuste que existe entre a teoria e os dados da RCF é tão fino que, aceita a teoria, podemos determinar, com grande precisão, por exemplo, o parâmetro de Hubble, as densidades de matéria, de bárions, de radiação e a tri-curvatura do universo.

Neste trabalho, iremos, a partir da teoria linear de perturbações escalares das equações de Einstein-Boltzmann, no calibre newtoniano conforme, deduzir as equações que governam as anisotropias em temperatura da RCF hoje; particularmente, seremos capazes de relacioná-las, sob certas aproximações, com perturbações na época do desacoplamento e a evolução dos potenciais gravitacionais até hoje (para outros detalhes, ver [3]).

Pretendemos, assim, criar uma referência básica, em português, dessa teoria tão importante para a cosmologia atual. Baseados na referência [1], juntamos várias outras explicações que achamos na literatura, e abrimos e detalhamos ao máximo contas e explicações que não são facilmente encontradas. Esperamos deixar mais acessível, ao leitor já avançado em cosmologia, essa teoria que ainda terá muitos dados para serem analisados (Planck, QUIET, SPoRT, etc), e que pretende colocar muitas restrições nos modelos cosmológicos (para bibliografia geral consulte [37]).

Capítulo 2

Equações de Boltzmann perturbadas

Quando vamos estudar um número muito grande de partículas devemos utilizar alguma teoria estatística, que deve, em escalas macroscópicas, concordar com a termodinâmica. Fazemos normalmente a consideração de que estamos tratando de fluidos (meios contínuos). Tanto em casos mais simples, de fluidos perfeitos, como em casos mais complicados, de fluidos imperfeitos, utilizamos, por via de regra, um enfoque macroscópico ou termodinâmico.

Se estivermos tratando de problemas que precisam de um detalhamento muito fino, temos que, realmente, usar grandezas que descrevam o sistema microscopicamente, grandezas estatísticas que nos dão todas as informações do que acontece com as partículas do sistema que estamos tratando, que, em geral, nem pode ser considerado um fluido.

Para estudar um sistema que precisa ser analisado nesse limite, podemos utilizar a equação de Boltzmann ([10], [11], [12]), que é uma equação que trata de sistemas fora do equilíbrio e estuda variações diretamente na função de distribuição das partículas do sistema, que é o que pode nos dar maior informação sobre o sistema.

A equação de Boltzmann é uma equação que relaciona a derivada temporal da função de distribuição de um determinado elemento com um termo de colisão (ela é estudada em vários limites em [13] e mais especificamente aplicada à cosmologia em [14]). Conhecer a função de distribuição de uma

componente do sistema nos permite obter muitas informações sobre o sistema.

Usaremos essa equação para descrever as propriedades das componentes que temos no universo. Dividiremos os elementos do universo em 4 tipos: bárions, fótons, neutrinos e matéria escura fria.

Os elétrons estão incluídos no grupo que chamei de bárions, como uma concessão à nomenclatura comumente usada na literatura, apesar dessa nomenclatura ser muitas vezes inconveniente. A inclusão dos elétrons no grupo dos bárions se justifica pois algumas equações que derivaremos para os elétrons e os prótons têm a mesma forma. As variáveis de perturbação que derivaremos para os prótons e os elétrons (como veremos no devido momento) são iguais para as duas componentes, devido ao fato de elas estarem fortemente acopladas.

A equação de Boltzmann tem a seguinte forma:

$$\frac{df}{dt} = C[f] . \quad (2.1)$$

Temos que saber como é a derivada total da função de distribuição de nossas componentes, e quais são os termos de colisão correspondentes a cada uma delas.

2.1 “Gauge” (calibre) newtoniano conforme

A métrica com a qual trabalharemos será a métrica de FRW com tricurvatura zero, perturbada em primeira ordem, no gauge newtoniano conforme (existem estudos feitos com perturbações independentes de gauge, como [31], [32]). Esse gauge, também chamado de longitudinal, é um gauge bem apropriado para trabalharmos com perturbações escalares. Se fôssemos estudar perturbações não escalares, deveríamos utilizar uma forma mais geral para a métrica. Pode-se mostrar que a forma perturbada mais geral, reduz-se à forma que utilizaremos, quando não existem perturbações vetoriais e tensoriais [8]. Como nesse trabalho só constarão perturbações escalares, a métrica

é

$$\begin{aligned}g_{00}(\vec{x}, t) &= -1 - 2\Psi(\vec{x}, t) , \\g_{ij}(\vec{x}, t) &= a^2(t)\delta_{ij}[1 + 2\Phi(\vec{x}, t)] .\end{aligned}\tag{2.2}$$

As componentes não escritas acima são nulas. Temos o fator de escala a , que é função apenas de t ; e Φ e Ψ são perturbações muito pequenas, e são funções de t e \vec{x} .

2.2 Geodésicas perturbadas

Para a equação de Boltzmann, precisaremos saber como mudam no tempo o momento e a posição das componentes do universo devido somente à métrica perturbada.

Suporemos que as linhas de universo das partículas são descritas por um parâmetro λ tal que

$$P^\mu =: \frac{dx^\mu}{d\lambda} ,\tag{2.3}$$

onde P^μ é o quadri-momento das partículas. Lembrando que

$$P^2 = -m^2 ,\tag{2.4}$$

onde m é a massa das partículas, podemos expressar P^0 em função de P^i :

$$P^0 = E(1 - \Psi) ,\tag{2.5}$$

onde

$$E := \sqrt{p^2 + m^2} \quad (2.6)$$

$$p^2 := g_{ij} P^i P^j . \quad (2.7)$$

Na equação (2.5) escrevi apenas a equação correspondente a Ψ em primeira ordem. Isso será feito em todo o corpo deste trabalho; desprezarei termos de ordem superior a 1 nas perturbações, não explicitando quando esses termos estão sendo desprezados. Para lúxons (partículas que viajam à velocidade da luz) $E = p$.

Não trabalharei com as componentes do quadri-momento P^α , mas sim com as correspondentes variáveis do momento \vec{p} e da energia. A equação (2.7) relaciona a energia com o módulo do momento, p ; então, utilizarei as variáveis \vec{x}, t, E e \hat{p} , ou seja, sete variáveis, que é a mesma quantidade que teríamos escrito em função de P^μ e x^μ descartando uma das variáveis de P^μ , como fizemos, utilizando a equação $P^2 = -m^2$.

Assim temos,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dE}{dt} \frac{\partial}{\partial E} + \frac{d\hat{p}^i}{dt} \frac{\partial}{\partial \hat{p}^i} , \quad (2.8)$$

que é conhecido, às vezes, como operador de Liouville. O último termo da equação acima, conforme veremos na próxima seção, não precisará ser calculado.

Vamos ver, então, como, na métrica perturbada, é a variação de \vec{x} e E em relação a t .

Utilizando a equação (2.3) no segundo termo, podemos chegar a:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{P^i}{P^0} . \quad (2.9)$$

Vamos colocar isso em função de E e \hat{p}^i . Associando a P^i um módulo e uma direção

$$P^i = C\hat{p}^i, \quad (2.10)$$

onde o vetor unitário é definido como

$$\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j := 1, \quad (2.11)$$

podemos calcular o valor de C através da equação (2.7):

$$C = \frac{p(1 - \Phi)}{a}. \quad (2.12)$$

Logo, podemos escrever

$$P^i = p\hat{p}^i \frac{1 - \Phi}{a}. \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.5) e (2.13) na (2.9), obtemos, então,

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p\hat{p}^i}{E} \frac{1 - \Phi + \Psi}{a}. \quad (2.14)$$

Para lúxons podemos chegar a esse mesmo resultado de uma forma mais direta e mais fácil de ser visualizada.

De fato, temos que o intervalo para os lúxons é zero,

$$ds^2 = 0$$

o que leva a:

$$(1 + 2\Psi)dt^2 = a^2(1 + 2\Phi)dl^2 , \quad (2.15)$$

onde $dl^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$. Então,

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{a}(1 + \Psi - \Phi) . \quad (2.16)$$

Assim, para cada uma das três coordenadas x^i , temos:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\hat{p}^i}{a}(1 + \Psi - \Phi) . \quad (2.17)$$

Voltemos agora ao cálculo do operador de Liouville. O termo mais trabalhoso é dE/dt , que virá da equação da geodésica,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} , \quad (2.18)$$

que, para a componente zero, em termos do quadri vetor P^μ , fica:

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^0 P^\alpha P^\beta$$

$$\frac{dE}{dt}(1 - \Psi) = E \frac{d\Psi}{dt} - \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{E} (1 + \Psi), \quad (2.19)$$

onde utilizei as equações (2.3) e (2.5). Multiplicando por $(1 + \Psi)$ e abrindo a derivada temporal de Ψ , que é função apenas de x e t , chegamos a

$$\frac{dE}{dt} = E \left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{Ea} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \right] - \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{E} (1 + 2\Psi). \quad (2.20)$$

Abrindo o símbolo de Christoffel e separando o quadri-vetor P^μ em parte temporal e espacial, temos

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{P^\alpha P^\beta}{E} = (-1 + 2\Psi) \left[-\frac{\partial\Psi}{\partial t} E - 2 \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E} \left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) \right]. \quad (2.21)$$

onde $H := (da/dt)a^{-1}$. Então, substituindo na equação (2.20), obtemos

$$\frac{dE}{dt} = E \left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{Ea} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \right] - \frac{\partial\Psi}{\partial t} E - 2 \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E} \left(H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) \quad (2.22)$$

e, finalmente,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p\hat{p}^i}{a} \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - \frac{p^2}{E} H - \frac{p^2}{E} \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (2.23)$$

2.3 Termo de Liouville

A função de distribuição f depende da posição x^μ e do quadri-vetor momento P^μ . Pelo ferramental desenvolvido na seção anterior, sabemos que podemos substituir a variável P^μ por p e \hat{p}^i .

O operador de Liouville aplicado na função de distribuição ficará na forma:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt} . \quad (2.24)$$

O último termo tem uma derivada de f em relação a \hat{p}^i , essa derivada deve ser, no mínimo, de ordem um, pois, em ordem zero, como a função de distribuição dos elementos ou é a de Bose-Einstein ou a de Fermi-Dirac, f só depende de E e t . A outra derivada deste termo também não pode ser de ordem zero, pois em FRW de ordem zero com tri-curvatura zero, as geodésicas são retas e, como os elementos se movem nelas, não mudam de direção. Assim, a direção deles (\hat{p}^i) não varia com t . Então esse último termo pode ser desprezado, pois é de ordem superior a um.

No segundo termo do lado direito, aparece $\partial f / \partial x^i$, que é de primeira ordem (pois a função de distribuição em ordem zero não depende de x); portanto, o termo que ele multiplica tem que ser de ordem zero, assim utilizando a equação (2.14), o termo de Liouville fica:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{p\hat{p}^i}{Ea} + \frac{\partial f}{\partial E} \frac{dE}{dt} . \quad (2.25)$$

Utilizando ainda a equação (2.23), que será inteiramente considerada pois os termos dessa equação são de ordem um, e ele está multiplicado por um termo que tem contribuição em ordem zero, podemos escrever o termo de Liouville (lado esquerdo da equação de Boltzmann) na seguinte forma:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{Ea} \frac{\partial f}{\partial x^i} - p \frac{\partial f}{\partial E} \left(\frac{p}{E} H + \frac{p}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right). \quad (2.26)$$

2.4 Função de distribuição perturbada para os lúxons

Agora vamos utilizar a forma explícita da função de distribuição, para os lúxons, fazendo uma perturbação de primeira ordem na temperatura.

$$f(t, \vec{x}, p, \hat{p}) = g_w \left[\exp \left(\frac{p}{T(t, \vec{x}, p, \hat{p})} \right) \pm 1 \right]^{-1}. \quad (2.27)$$

onde

$$T(t, \vec{x}, p, \hat{p}) = \bar{T}(t)[1 + \mathcal{L}(t, \vec{x}, p, \hat{p})] \quad (2.28)$$

O fator g_w , é a degenerescência de estados de spin da componente w . Para partículas sem massa com spin igual a zero $g_w = 1$; para partículas sem massa com spin maior que zero $g_w = 2$; e para partículas com massa e com spin s , $g_w = 2s + 1$. Todas as funções de distribuição que utilizarei contêm esse fator [17].

A perturbação \mathcal{L} é a flutuação relativa na temperatura, ou seja, $\delta T/T$, e é suposta também muito pequena, sendo considerados, portanto, nesse trabalho, apenas termos lineares em \mathcal{L} . Eu coloquei nessa função de distribuição os sinais mais e menos ao mesmo tempo para ficar da forma mais geral. Para bósons o sinal a ser usado é menos, e para férmions, o sinal é mais.

Expandindo f em série de Taylor em torno de $T(t, \vec{x}, p, \hat{p}) = \bar{T}(t)$, ficamos com

$$\begin{aligned} f &= g_w \left[\exp \left(\frac{p}{\bar{T}(t)} \right) \pm 1 \right]^{-1} + T \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ g_w \left[\exp \left(\frac{p}{\bar{T}(t)} \right) \pm 1 \right]^{-1} \right\} \\ &= \bar{f} - p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde

$$\bar{f} = g_w \left[\exp \left(\frac{p}{\bar{T}(t)} \right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (2.30)$$

e usei que

$$T \frac{\partial \bar{f}}{\partial T} = -p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p}, \quad (2.31)$$

que é facilmente verificado.

Vamos considerar agora, o membro direito da equação de Boltzmann.

2.5 Termo de colisão para os fótons

Tendo entendido melhor o termo df/dt da equação de Boltzmann, precisamos calcular agora os termos de colisão.

Calcularei explicitamente o termo de colisão correspondente à interação fóton-elétron devido ao espalhamento Thomson (pode-se ver isso com detalhes em [21] e [25]). Os neutrinos e a matéria escura fria não têm termos de colisão, pois não interagem com nenhuma matéria. As interações que devem ser

estudadas são: fóton-elétron, fóton-próton e elétron-próton. Mostra-se que podemos considerar apenas a interação devida ao espalhamento Thomson, pois o termo de colisão depende quase que exclusivamente dessa interação [36]. O termo que calcularei é o da interação fóton-elétron para o estudo da função de distribuição dos fótons. O termo que precisará ser calculado para os bárions também devido a essa interação, poderá ser derivado do que calcularei, por uma simples transformação. O termo da interação próton-elétron, não precisará ser calculado pois ele é muito menor que o fóton-elétron; para maiores detalhes, ver seção 2.9.

Irei representar esse espalhamento fóton-elétron por

$$e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \leftrightarrow e^-(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}'), \quad (2.32)$$

onde os momentos das partículas aparecem entre parênteses.

Temos que descobrir como muda a distribuição de fótons com momento \vec{p} . Para isso, devemos somar a “reação” acima, para todos os valores de \vec{q} , \vec{q}' e \vec{p}' .

Escreverei abaixo a forma completa do termo de colisão e depois explicarei os termos:

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \\ &\times \delta^{(3)}[\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}'] \delta[E(p) + E_e(q) - E(p') - E_e(q')] \\ &\times [f_e(\vec{q}')f(\vec{p}') - f_e(\vec{q})f(\vec{p})]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

As funções delta representam as restrições de conservação de momento e energia.

Como o fator que dá a probabilidade de ocorrência do processo $e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \rightarrow e^-(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}')$ é igual àquele do processo inverso $(e^-(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}')) \rightarrow e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p})$, podemos colocar esse termo, que é o $|\mathcal{M}|^2$, em evidência [10].

O p no denominador aparece, pois a equação covariante de Boltzmann seria

$$\frac{df}{d\lambda} = C' ; \quad (2.34)$$

ou seja, para que a equação (2.1) seja covariante, ela deve ser equivalente a essa última equação. Vamos ver como isso é possível.

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = C' . \quad (2.35)$$

Pelas equações (2.5) e (2.3)

$$\frac{df}{dt} = \frac{C'}{p}(1 + \Psi) = \frac{C'}{p} . \quad (2.36)$$

O Ψ pode ser desprezado pois o termo de colisão já é de primeira ordem. Para ficar equivalente à equação (2.1), basta definir $C := C'/p$. Essa é a razão de ter o p no denominador da equação do termo de colisão.

Os termos de 2π que aparecem são por causa de convenções e definições. Da forma como foi definida a amplitude de espalhamento e como é normalizado o número de partículas por unidade de volume, esses termos aparecem naturalmente: um fator de 2π multiplicando cada função delta, e $(2\pi)^{(-3)}$ multiplicando cada elemento de volume d^3p (considerando o sistema de unidades naturais)[10].

O termo de $2E$ no denominador dos integrandos aparece, pois, na verdade, as integrais são no quadri-espaço de momentos, mas a integral em energia é fácil de ser feita, devido a restrição $E^2 = p^2 + m^2$:¹

¹Basta lembrar também que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{x_i} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, onde os x_i são as raízes da função.

$$\int d^3p \int_0^\infty dE \delta(E^2 - p^2 - m^2) = \int d^3p \int_0^\infty \frac{dE \delta(E - \sqrt{p^2 + m^2})}{2E}, \quad (2.37)$$

integrando agora em E , resta o fator $1/(2E)$. Agora que estamos mais familiarizados com o termo de colisão, vamos detalhá-lo para o processo de espalhamento Thomson de fótons por elétrons.

Os fótons têm $E = p$ e os elétrons no limite não relativístico, $E_e = m_e + q^2/(2m_e)$, bastando, nos denominadores, utilizar $E_e = m_e$; Usando a função δ tri-dimensional para eliminar \vec{q}' , ficamos com

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} |\mathcal{M}|^2 \delta \left[p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')^2}{2m_e} \right] \\ &\times [f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') f(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Vou fazer uma aproximação na função δ que será importante. Para isso utilizarei que:

$$\begin{aligned} E_e(q) - E_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') &= \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')^2}{2m_e} \\ &= \frac{(\vec{q} \cdot \vec{p}')}{m_e} + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{p}')}{m_e} - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{p})}{m_e} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{p})}{2m_e} - \frac{(\vec{p}' \cdot \vec{p}')}{2m_e}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Considerando que $p/m_e \ll 1$ e $p'/m_e \ll 1$, podemos fazer

$$E_e(q) - E_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') = qm_e \left[\frac{p'}{m_e^2} \cos \alpha - \frac{p}{m_e^2} \cos \beta + \frac{pp'}{qm_e^2} \cos \gamma - \frac{p^2}{qm_e^2} - \frac{p'^2}{qm_e^2} \right], \quad (2.40)$$

onde $\cos \alpha = \hat{q} \cdot \hat{p}'$, $\cos \beta = \hat{q} \cdot \hat{p}$ e $\cos \gamma = \hat{p} \cdot \hat{p}'$. Os três últimos termos podem ser desprezados frente aos dois primeiros, pois são de segunda ordem em p/m_e ou p'/m_e . Assim, podemos fazer a aproximação

$$E_e(q) - E_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') \simeq \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p}' - \vec{p})}{m_e}. \quad (2.41)$$

Expandindo a função δ em torno de $p - p'$, temos

$$\begin{aligned} \delta\left[p - p' + \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}')^2}{2m_e}\right] &\simeq \delta(p - p') + (E_e(q') - E_e(q)) \\ &\times \left. \frac{\partial \delta(p + E_e(q) - p' - E_e(q'))}{\partial E_e(q')} \right|_{E_e(q)=E_e(q')} \\ &= \delta(p - p') + \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Substituindo a equação acima na equação (2.38) e fazendo a aproximação $f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p}') \simeq f_e(\vec{q})$, temos

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{f_e(\vec{q}) d^3 q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \left[\delta(p - p') + \frac{\vec{q} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}{m_e} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right] [f(\vec{p}') - f(\vec{p})]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A amplitude do espalhamento Thomson, considerando um feixe incidente não polarizado, é

$$|\mathcal{M}|^2 = 6\pi\sigma_T m_e^2 (1 + \cos^2 \gamma) , \quad (2.44)$$

onde σ_T é a seção de choque de Thomson [4]:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 , \quad (2.45)$$

e γ é o ângulo entre \vec{p} e \vec{p}' . Para expressar esse ângulo em termos dos ângulos padrões de coordenadas esféricas (θ e ϕ), irei escrevê-lo em termos do polinômio de Legendre de segunda ordem e, mais tarde, relacioná-lo com os harmônicos esféricos. Assim,

$$\cos^2 \gamma = \frac{2\mathcal{P}_2(\cos \gamma) + 1}{3} , \quad (2.46)$$

e a amplitude então fica

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{isot}|^2 + |\mathcal{M}_{anisot}|^2 , \quad (2.47)$$

onde

$$|\mathcal{M}_{isot}|^2 := 8\pi\sigma_T m_e^2 , \quad (2.48)$$

$$|\mathcal{M}_{anisot}|^2 := 4\pi\sigma_T m_e^2 \mathcal{P}_2(\cos \gamma) . \quad (2.49)$$

2.5.1 1ª parte: termo isotrópico

Colocando a parte constante da amplitude, $|\mathcal{M}_{isot}|^2$, no cálculo do termo de colisão, utilizando a equação (2.29) (com $\mathcal{L} = \Theta$ para fótons) e integrando em dq , temos

$$\begin{aligned}
C_{isot}[f(\vec{p})] &= \frac{2\pi^2\sigma_T n_e}{p} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} \left[\delta(p-p') + \vec{v}_b \cdot (\vec{p} - \vec{p}') \frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} \right] \\
&\times \left[\bar{f}(p') - \bar{f}(p) + p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \Theta(\vec{p}) - p' \frac{\partial \bar{f}}{\partial p'} \Theta(\vec{p}') \right], \quad (2.50)
\end{aligned}$$

onde

$$n_e(t, \vec{x}) := \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} f_e(t, \vec{x}, \vec{q}), \quad (2.51)$$

$$\vec{v}_b(t, \vec{x}) \simeq \vec{v}_e(t, \vec{x}) := \frac{1}{n_e} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}}{E(\vec{q})} f_e(t, \vec{x}, \vec{q}). \quad (2.52)$$

A integral em dq resultou em n_e , que é a densidade de elétrons; no termo em que havia \vec{q}/m_e restou ainda \vec{v}_b , que é a velocidade média dos elétrons (ou dos bárions, já que pode ser considerada a mesma).

Expressando $d^3 p'$ em coordenadas esféricas, fazendo as multiplicações, e mantendo os termos só até primeira ordem (sabendo que v_b é de primeira ordem), temos

$$\begin{aligned}
C_{isot}[f(\vec{p})] &= \frac{\sigma_T n_e}{4\pi p} \int_0^\infty p' dp' \int d\Omega' \left[\delta(p-p') \left(p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \Theta(\vec{p}) - p' \frac{\partial \bar{f}}{\partial p'} \Theta(\vec{p}') \right) \right. \\
&\quad \left. + \vec{v}_b \cdot (\vec{p} - \vec{p}') \frac{\partial \delta(p-p')}{\partial p'} (\bar{f}(p') - \bar{f}(p)) \right]. \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Para resolver a integral em ângulo sólido, definirei

$$\Theta_0(t, \vec{x}, p') := \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(t, \vec{x}, \vec{p}') . \quad (2.54)$$

A integral do termo que tem $\vec{v}_b \cdot \vec{p}'$ dar  zero, pois \vec{v}_b   um vetor fixo (representa a velocidade m dia dos b rions), e o produto escalar com \vec{p}' variando em todos os  ngulos ter  simetria nas partes positiva e negativa. Assim,

$$\begin{aligned} C_{isot}[f(\vec{p})] = & \frac{\sigma_T n_e}{p} \int_0^\infty p' dp' \left[\delta(p - p') \left(p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \Theta(\vec{p}) - p' \frac{\partial \bar{f}}{\partial p'} \Theta_0(p') \right) \right. \\ & \left. + \vec{v}_b \cdot \vec{p} \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} (\bar{f}(p') - \bar{f}(p)) \right] . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Agora basta integrar a primeira parte utilizando a propriedade da fun o delta, e a segunda por integra o por partes, que chegamos a

$$\begin{aligned} C_{isot}[f(\vec{p})] = & \frac{\sigma_T n_e}{p} \left\{ p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} [\Theta(\vec{p}) - \Theta_0(p)] - \vec{v}_b \cdot \vec{p} \int_0^\infty dp' \delta(p - p') \right. \\ & \left. \times \left[\bar{f}(p') + p' \frac{\partial \bar{f}(p')}{\partial p'} - \bar{f}(p) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (2.56)$$

ou, finalmente,

$$C_{isot}[f(\vec{p})] = -p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} n_e \sigma_T [\Theta_0(p) - \Theta(\vec{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b] . \quad (2.57)$$

Essa   a primeira contribui o da integral da equa o (2.43). Vamos ver a segunda.

2.5.2 2ª parte: termo anisotrópico

Vou calcular agora a segunda parte do termo de colisão, utilizando $|\mathcal{M}_{anisot}|^2$. Pelo teorema de adição de harmônicos esféricos, temos que

$$\mathcal{P}_2(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{5} \sum_{m=-2}^2 \mathcal{Y}_{2m}^*(\theta', \phi') \mathcal{Y}_{2m}(\theta, \phi). \quad (2.58)$$

de modo que, substituindo isto na equação (2.49), depois na equação (2.43), e integrando em d^3q , temos

$$\begin{aligned} C_{anisot}[f(\vec{p})] &= \frac{4\pi^3 \sigma_T n_e}{5p} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} \left[\delta(p - p') + \vec{v}_b \cdot (\vec{p} - \vec{p}') \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \right] \\ &\quad \times [f(\vec{p}') - f(\vec{p})] \sum_{m=-2}^2 \mathcal{Y}_{2m}^*(\theta', \phi') \mathcal{Y}_{2m}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Utilizando a equação (2.29) e mantendo termos até primeira ordem,

$$\begin{aligned} C_{anisot}[f(\vec{p})] &= \frac{\sigma_T n_e}{10p} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \int_{p'=0}^{\infty} p' dp' \sin \theta' d\theta' d\phi' \left[\delta(p - p') \right. \\ &\quad \times \left(p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \Theta(\vec{p}) - p' \frac{\partial \bar{f}}{\partial p'} \Theta(\vec{p}') \right) + \vec{v}_b \cdot (\vec{p} - \vec{p}') \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} (\bar{f}(p') - \bar{f}(p)) \left. \right] \\ &\quad \times \sum_{m=-2}^2 \mathcal{Y}_{2m}^*(\theta', \phi') \mathcal{Y}_{2m}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Utilizarei aqui as transformadas Fourier de x^i para k^i , com a seguinte convenção:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{F}(\vec{k}, \vec{y}) . \quad (2.61)$$

Definirei também o cosseno diretor entre o modo \vec{k} e o tri-momento \vec{p} :

$$\mu := \hat{k} \cdot \hat{p} . \quad (2.62)$$

Supondo que a velocidade dos bárions é irrotacional, temos $\tilde{v}_b(t, \vec{k}) = \tilde{v}_b(t, k) \hat{k}$, onde \tilde{v}_b é, obviamente, o módulo de \tilde{v}_b . Com isso temos: $\hat{p} \cdot \tilde{v}_b = \mu \tilde{v}_b$.

Fazendo agora uma importante consideração, a de que utilizarei um sistema de coordenadas em que o eixo cartesiano \hat{z} esteja na direção de \vec{k} , podemos pensar em μ como $\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre a direção de propagação do fóton e o eixo \vec{z} .

Com as suposições acima, essa parte do termo de colisão fica:

$$\begin{aligned} C_{anisot}[f(\vec{p})] &= \frac{\sigma_T n_e}{10p} \sum_{m=-2}^2 \mathcal{Y}_{2m}(\theta, \phi) \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^1 \int_{p'=0}^{\infty} p' dp' d\mu' d\phi' \left[\delta(p - p') \right. \\ &\times \left(p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}(\vec{p}) - p' \frac{\partial \bar{f}}{\partial p'} \tilde{\Theta}(\vec{p}') \right) + (p\mu\tilde{v}_b - p'\mu'\tilde{v}_b) \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} (\bar{f}(p') - \bar{f}(p)) \left. \right] \\ &\times \mathcal{Y}_{2m}^*(\mu', \phi') \end{aligned} \quad (2.63)$$

Com isso poderei simplificar bastante essa integral, visto que teremos $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(t, k, p, \mu)$. Vamos entender o porquê.

Com a expansão da perturbação do espaço real para modos de Fourier, que correspondem a ondas planas, temos que as equações para esses modos

são desacopladas, evoluem independentemente. Podemos tratar cada \vec{k} separadamente dos outros.

O que temos, em princípio, são perturbações com as seguintes dependências: $\hat{\Theta}(t, k, \hat{k}, p, \hat{p})$. Isso corresponde à contribuição que a onda plana de modo \vec{k} tem na flutuação da temperatura em um tempo t , na direção \hat{p} em uma energia correspondente a p . Mas uma onda plana só varia na direção de sua propagação; em direções perpendiculares, ela é constante. Com isso, a contribuição de um determinado modo só se dará na direção paralela à sua propagação.

Uma das implicações disso, é que a perturbação terá simetria azimutal em torno de sua direção de propagação, a perturbação não dependerá do ângulo que a projeção de \hat{p} no plano da onda faz com algum eixo coordenado \hat{x} (que seja definido nesse plano).

Tendo alinhado \hat{k} com \hat{z} como fizemos, estaremos acabando com a dependência em \hat{k} , e a simetria azimutal citada acima se manifestará como uma independência em ϕ .

Sendo assim, os harmônicos esféricos podem ser simplificados, pois em qualquer dessas integrais, já que não existe dependência em ϕ além deles próprios, se eles dependerem de ϕ' , a integral dará zero. O único termo do somatório que contribui para a integral é $\mathcal{Y}_{20}^*(\theta', \phi')\mathcal{Y}_{20}(\theta, \phi)$. Como

$$\mathcal{Y}_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\mathcal{P}_2(\cos\theta) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\mathcal{P}_2(\mu) ; \quad (2.64)$$

o termo de colisão fica

$$\begin{aligned}
C_{anisot}[f(\vec{p})] &= \frac{\sigma_T n_e}{8\pi p} \mathcal{P}_2(\mu) \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p' dp' d\mu' d\phi' [\delta(p - p') \\
&\times \left(p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}(p, \mu) - p' \frac{\partial \bar{f}}{\partial p'} \tilde{\Theta}(p', \mu') \right) + (\mu p v_b - \mu' p' v_b) \frac{\partial \delta(p - p')}{\partial p'} \\
&\times (\bar{f}(p') - \bar{f}(p))] \mathcal{P}_2(\mu') . \tag{2.65}
\end{aligned}$$

A integral em μ' do termo no qual a dependência é apenas μ' dá zero. Os termos que não têm dependência em θ também, pois a integral de $\mathcal{P}_2(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ é zero; o único termo que sobra é

$$\begin{aligned}
C_{anisot}[f(\vec{p})] &= -\frac{\sigma_T n_e}{8\pi p} \mathcal{P}_2(\mu) \int_0^\infty \delta(p - p') p'^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p'} dp' \\
&\times \int_0^{4\pi} d\Omega' \tilde{\Theta}(p', \mu') \mathcal{P}_2(\mu') . \tag{2.66}
\end{aligned}$$

Definindo

$$\tilde{\Theta}_l(t, k, p) := \frac{1}{2(-i)^l} \int_{-1}^1 d\mu' \mathcal{P}_l(\mu') \tilde{\Theta}(t, k, p, \mu') , \tag{2.67}$$

ficamos com:

$$C_{anisot}[f(\vec{p})] = \frac{\sigma_T n_e}{2} \mathcal{P}_2(\mu) p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_2(p) . \tag{2.68}$$

ou

$$C_{anisot}[f(\vec{p})] = \frac{\sigma_T n_e}{2} \mathcal{P}_2(\cos \theta) p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \Theta_2 . \quad (2.69)$$

O termo de colisão completo é, pois,

$$C[f(\vec{p})] = -p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} n_e \sigma_T \left[\Theta_0 - \Theta + \hat{p} \cdot \vec{v}_b - \frac{\mathcal{P}_2(\cos \theta) \Theta_2}{2} \right] . \quad (2.70)$$

2.6 Equação de Boltzmann para os lúxons

Agora já podemos colocar a função de distribuição perturbada (2.29) na equação de Boltzmann e ver como fica a equação para cada ordem de aproximação.

2.6.1 Equação de Boltzmann em ordem zero

Da equação (2.26), podemos tirar

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{ordem zero}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} - H p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} = 0 . \quad (2.71)$$

A derivada temporal de f é igual a zero, pois em ordem zero não existem termos de colisão. Os termos de colisão são justamente os responsáveis por “tirar” a função de distribuição de sua distribuição do equilíbrio.

Ao substituírmos

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{dT/dt}{T} p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \quad (2.72)$$

na equação anterior, obtemos

$$\frac{dT}{T} = -\frac{da}{a}, \quad (2.73)$$

que equivale ao bem conhecido resultado

$$Ta = \text{const} . \quad (2.74)$$

2.6.2 Equação de Boltzmann em primeira ordem

Para extrair os termos de primeira ordem da equação (2.26) devemos substituir nela a expansão de f em série de Taylor. Lembrando das equações (2.31) e (2.71), podemos chegar a

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{primeira ordem}} = -p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - p H \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right]. \quad (2.75)$$

Equação de Boltzmann para os fótons

Podemos visualizar agora, completamente, a equação de Boltzmann. Juntando as equações (2.75) e (2.70):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - pH \frac{\partial \Theta}{\partial p} + \frac{\hat{p}^i}{a} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = n_e \sigma_T \\ \times \left[\Theta_0(p) - \Theta(\vec{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b - \frac{\mathcal{P}_2(\cos \theta) \Theta_2(p)}{2} \right] . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Resultará conveniente trabalharmos, a partir de agora, com o tempo conforme η , definido por

$$\eta := \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} , \quad (2.77)$$

e as transformadas de Fourier como definidas anteriormente.

Desta forma, a equação de Boltzmann (2.76) fica

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} - p\mathcal{H} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p} + i\hat{p} \cdot \vec{k} \left[\tilde{\Theta} + \tilde{\Psi} \right] + \dot{\Phi} = n_e \sigma_T a(t) \\ \times \left[\tilde{\Theta}_0(p) - \tilde{\Theta}(\vec{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b - \frac{\mathcal{P}_2(\cos \theta) \tilde{\Theta}_2(p)}{2} \right] , \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde $\dot{} := \partial/\partial \eta$ e $\mathcal{H} := \dot{a}/a = aH$.

É convencional definir a chamada profundidade ótica:

$$\tau(\eta) := \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a . \quad (2.79)$$

Em tempos próximos à nossa época, com a pequena densidade de elétrons, $\tau \rightarrow 0$, enquanto que em momentos primordiais do universo ela assume valores cada vez maiores. Com a definição acima temos

$$\dot{\tau} = \frac{d\tau}{d\eta} = -n_e \sigma_T a . \quad (2.80)$$

Assim, a equação de Boltzmann em primeira ordem fica:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Theta}}(\eta, k, p, \mu) - p\mathcal{H}(\eta) \frac{\partial \tilde{\Theta}(\eta, k, p, \mu)}{\partial p} + i\mu k \left[\tilde{\Theta}(\eta, k, p, \mu) + \tilde{\Psi}(\eta, k) \right] + \dot{\tilde{\Phi}}(\eta, k) \\ = -\dot{\tau}(\eta) \left[\tilde{\Theta}_0(\eta, k, p) - \tilde{\Theta}(\eta, k, p, \mu) + \mu \tilde{v}_b(\eta, k) - \frac{\mathcal{P}_2(\mu) \tilde{\Theta}_2(\eta, k, p)}{2} \right] . \end{aligned} \quad (2.81)$$

É importante ressaltar aqui que, apesar de estarmos fixando (por conveniência) um sistema de coordenadas para cada \vec{k} (quando fizemos $\hat{z} \parallel \hat{k}$), isso não trará problema na hora de voltar ao espaço real, ou seja, na hora de fazer a transformada de Fourier para \vec{x} . Isso é possível porque a função Θ não depende do sistema de coordenadas escolhido, ela é uma função escalar de ponto: qualquer que seja o sistema de coordenadas empregado, no mesmo ponto, ela terá o mesmo valor. Então, podemos calculá-la usando um sistema conveniente de coordenadas e, depois, mudar de sistema, sabendo que seu valor não se alterará.

Equação de Boltzmann para os neutrinos

Como na equação de Boltzmann para os neutrinos não há termos de colisão, temos (fazendo $\mathcal{L} = \mathcal{N}$)

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{primeira ordem}} = 0 = -p \frac{\partial f_n^0}{\partial p} \left[\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} - pH \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] . \quad (2.82)$$

Fazendo a transformada de Fourier e passando para a variável temporal η , com as mesmas definições utilizadas no caso dos fótons, obtemos

$$\dot{\tilde{\mathcal{N}}} - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\mathcal{N}}}{\partial p} + i\mu k\tilde{\mathcal{N}} + i\mu k\tilde{\Psi} + \dot{\tilde{\Phi}} = 0 . \quad (2.83)$$

2.7 Expansão de $\tilde{\Theta}$ e $\tilde{\mathcal{N}}$ em multipolos

Agora que já determinamos as equações de Boltzmann para fótons e neutrinos, farei a expansão das perturbações $\tilde{\Theta}$ e $\tilde{\mathcal{N}}$ em multipolos. Esses multipolos serão muito importantes para derivarmos equações das anisotropias na radiação cósmica de fundo. Mostrarei as equações para $\tilde{\Theta}$; as equações para neutrinos serão análogas, simplesmente descartando o termo de colisão (que aparecem nas equações como termos proporcionais a $\dot{\tau}$).

Para nossos objetivos, utilizaremos os multipolos da expansão de $\tilde{\Theta}$ em polinômios de Legendre (seguindo a equação (2.67)). Para chegar na equação para esses multipolos basta multiplicar a equação (2.81) por $\mathcal{P}_l(\mu)$ e integrar em μ . Utilizando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, pode-se chegar às seguintes equações:

$$\dot{\tilde{\Theta}}_0 + k\tilde{\Theta}_1 - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\Theta}_0}{\partial p} = -\dot{\tilde{\Phi}} , \quad l = 0 , \quad (2.84)$$

$$\dot{\tilde{\Theta}}_1 + \frac{2}{3}k\tilde{\Theta}_2 - \frac{1}{3}k\tilde{\Theta}_0 - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\Theta}_1}{\partial p} = \frac{1}{3}k\tilde{\Psi} + \dot{\tau}\tilde{\Theta}_1 - \frac{1}{3}i\dot{\tau}\tilde{v}_b , \quad l = 1 , \quad (2.85)$$

$$\dot{\tilde{\Theta}}_2 + \frac{3}{5}k\tilde{\Theta}_3 - \frac{2}{5}k\tilde{\Theta}_1 - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\Theta}_2}{\partial p} = \frac{9}{10}\dot{\tau}\tilde{\Theta}_2 , \quad l = 2 , \quad (2.86)$$

$$\dot{\tilde{\Theta}}_l + \frac{(l+1)}{2l+1}k\tilde{\Theta}_{l+1} - \frac{l}{2l+1}k\tilde{\Theta}_{l-1} - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\Theta}_l}{\partial p} = \dot{\tau}\tilde{\Theta}_l , \quad l > 2 . \quad (2.87)$$

Para $\tilde{\Theta}$ podemos ver como ficam essas equações em tempos muito primitivos, ou seja, no limite em que $\dot{\tau}^{-1} \rightarrow 0$:

$$\dot{\tilde{\Theta}}_0 + k\tilde{\Theta}_1 - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\Theta}_0}{\partial p} = -\dot{\tilde{\Phi}} , \quad l = 0 , \quad (2.88)$$

$$\tilde{\Theta}_1 = \frac{i\tilde{v}_b}{3} , \quad l = 1 , \quad (2.89)$$

$$\tilde{\Theta}_l = 0 , \quad l \geq 2 , \quad (2.90)$$

Uma análise rápida desses dois conjuntos de equações mostra que com a hipótese de que no início têm-se apenas o monopolo e o dipolo diferentes de zero, com o tempo, começarão a aparecer os multipolos superiores, a começar pelo quadrupolo, depois o octupolo, etc. Podemos ver isso, considerando como zero, todos os termos superiores ao dipolo nas equações (2.84) a (2.87); com isso, a derivada de $\tilde{\Theta}_2$ é diferente de zero, pois o dipolo é diferente de

zero. Assim, $\tilde{\Theta}_2$ assumirá um valor diferente de zero e a derivada de $\tilde{\Theta}_3$ também, o que fará com que $\tilde{\Theta}_3$ seja diferente de zero e assim por diante. Vemos, então, que mesmo tendo apenas termos de monopolo e dipolo nos instantes iniciais, podemos ter todos os multipolos em algum instante posterior (hoje por exemplo).

2.8 Equação de Boltzmann para a matéria escura fria

Como a matéria escura fria também não interage, sua equação de Boltzmann corresponde, simplesmente, ao termo de Liouville (2.26) igual a zero:

$$\frac{\partial f_{dm}}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{Ea} \frac{\partial f_{dm}}{\partial x^i} - p \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \left[H \frac{p}{E} + \frac{p}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = 0 . \quad (2.91)$$

A forma de tratar a perturbação para matéria, (tanto escura fria quanto bárions) é diferente da que utilizamos para radiação. Para a matéria utilizaremos a aproximação de fluido, que consiste em considerar apenas as perturbações equivalentes ao monopolo e ao dipolo. Essas perturbações (equivalentes ao monopolo e ao dipolo) são as perturbações na densidade da matéria e na velocidade da matéria. O que nos permite fazer essa abordagem para a matéria é que ela é não relativística: se fôssemos utilizar a mesma abordagem feita para a radiação, os termos correspondentes a multipolos superiores apareceriam multiplicados por potências da velocidade e, como a velocidade é muito pequena (em comparação a c , que estamos considerando igual a 1), podemos desprezar qualquer termo superior ao equivalente do dipolo.

O contrário se manifesta da seguinte forma: se utilizássemos a abordagem que faremos para matéria na radiação, teríamos problema em um termo que desprezaremos na matéria por ser de segunda ordem na velocidade. Como no caso da radiação a velocidade é igual a um, esse termo não poderia ser desprezado, e isso implicaria no aparecimento de multipolos superiores, que

precisariam de mais equações para serem calculados. Mais explicitamente, o termo do qual estou falando é o segundo termo da equação (2.99).

Multiplicando a equação (2.91) por $d^3p/(2\pi)^3$ e integrando, com as equações (2.52) e (2.51), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{dm}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(n_{dm} v_{dm}^i)}{\partial x^i} - \left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \\ - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int p \hat{p}^i \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = 0 . \end{aligned} \quad (2.92)$$

O último termo pode ser desprezado porque a integral direcional de \hat{p}^i só é diferente de zero em primeira ordem e, a integral multiplica uma derivada de Ψ , que também é de primeira ordem.

Para o terceiro termo basta usar a regra da cadeia e o fato de que $dE/dp = p/E$ para reescrever o integrando e resolvê-lo integrando por partes:

$$\int p \frac{\partial f_{dm}}{\partial p} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -3n_{dm} . \quad (2.93)$$

O momento de ordem zero leva então à seguinte equação (que pode ser vista como a generalização da equação da continuidade):

$$\frac{\partial n_{dm}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(n_{dm} v_{dm}^i)}{\partial x^i} + 3 \left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] n_{dm} = 0 . \quad (2.94)$$

Em ordem zero,

$$\frac{\partial \bar{n}_{dm}}{\partial t} + 3H \bar{n}_{dm} = 0 , \quad (2.95)$$

que permite resgatar um resultado bem conhecido da cosmologia padrão:

$$\bar{n}_{dm} a^3 = \text{const} . \quad (2.96)$$

Para chegar à equação de primeira ordem, vou expandir a densidade numérica como

$$n_{dm} = \bar{n}_{dm} [1 + \delta_{dm}(\vec{x}, t)] , \quad (2.97)$$

onde $\delta_{dm}(\vec{x}, t)$ é um fator de primeira ordem, que é o contraste da densidade numérica. Colocando essa expansão na equação (2.94), lembrando de utilizar a equação de ordem zero, obtemos

$$\frac{\partial \delta_{dm}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_{dm}^i}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 . \quad (2.98)$$

Aqui temos duas variáveis de perturbação da matéria escura fria: δ_{dm} e \vec{v}_{dm} . Precisamos de mais uma equação para poder calcular essas duas variáveis. Vou, então, calcular o momento de ordem um da equação de Boltzmann para a matéria escura fria. Para isso, basta multiplicar a equação (2.91) por $p/(2\pi)^3(\hat{p}^i/E)d^3p$ e integrar:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n_{dm} v_{dm}^j}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{f_{dm}}{(2\pi)^3} \frac{p^2 \hat{p}^i \hat{p}^j}{E^2} d^3p - \left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \\ & \times \int \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \frac{p^3 \hat{p}^i}{E^2} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{\partial f_{dm}}{\partial E} \frac{p^2 \hat{p}^i \hat{p}^j}{E} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = 0 . \quad (2.99) \end{aligned}$$

O segundo termo pode ser desprezado, pois é da ordem de $(p/E)^2$. O terceiro termo não é, na verdade, de ordem superior (a despeito do fator p^2/E^2).

De fato, usando que $(p/E)\partial/\partial E = \partial/\partial p$, podemos transformar a integral, em

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial f_{dm}}{\partial p} \frac{p^2 \hat{p}^i}{E} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} &= \int \frac{\hat{p}^j d\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^4}{E} \frac{\partial f_{dm}}{\partial p} \\
&= - \int \frac{\hat{p}^j d\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp f_{dm} \left(\frac{4p^3}{E} - \frac{p^5}{E^3} \right) \\
&\simeq - \int \frac{\hat{p}^j d\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp f_{dm} \frac{4p^3}{E} . \tag{2.100}
\end{aligned}$$

Para resolver o quarto termo da equação (2.99), basta utilizar que

$$\int \hat{p}^j \hat{p}^i d\Omega = \delta^{ij} \frac{4\pi}{3} . \tag{2.101}$$

Então o primeiro momento da equação de Boltzmann fica, finalmente,

$$\frac{\partial(n_{dm} v_{dm}^j)}{\partial t} + 4H n_{dm} v_{dm}^j + \frac{n_{dm}}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0 . \tag{2.102}$$

Como essa equação não tem termos de ordem zero, podemos fazer $n_{dm} = \bar{n}_{dm}$ em toda a equação, e utilizando a equação (2.95), chegamos a

$$\frac{\partial v_{dm}^j}{\partial t} + H v_{dm}^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0 . \tag{2.103}$$

Com essa equação, fechamos duas contendo os termos de perturbação da matéria escura fria. Vou reescrevê-las, utilizando o tempo conforme η , e passando para o espaço de Fourier, com as mesmas definições usadas para os

fótons. Assim as equações (2.98) e (2.103) ficam:

$$\dot{\tilde{\delta}}_{dm} + ik\tilde{v}_{dm} + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0 , \quad (2.104)$$

$$\dot{\tilde{v}}_{dm} + \mathcal{H}\tilde{v}_{dm} + ik\tilde{\Psi} = 0 . \quad (2.105)$$

2.9 Equação de Boltzmann para os bárions

Precisamos, agora, encontrar equações para as perturbações no fluido elétron-bárion. Como essas duas componentes estão muito acopladas pela interação coulombiana, temos

$$\frac{\rho_e - \bar{\rho}_e}{\bar{\rho}_e} = \frac{\rho_p - \bar{\rho}_p}{\bar{\rho}_p} =: \delta_b , \quad (2.106)$$

ou seja, podemos usar a mesma variável para as duas componentes. Devido ao acoplamento, também, as velocidades ficam

$$\vec{v}_e = \vec{v}_p =: \vec{v}_b . \quad (2.107)$$

O subscrito b mostra que a perturbação vale tanto para elétrons quanto para prótons. As equações de Boltzmann para eles são:

$$\frac{df_e(\vec{x}, \vec{q}, t)}{dt} = C_{ep}[f_e(\vec{q})] + C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] , \quad (2.108)$$

$$\frac{df_p(\vec{x}, \vec{Q}, t)}{dt} = C_{pe}[f_p(\vec{Q})] + C_{p\gamma}[f_p(\vec{Q})] . \quad (2.109)$$

Não precisarei abrir os termos de colisão aqui; basta saber que, *mutatis mutandis*, eles têm a mesma forma mostrada na equação (2.33).

Para chegar nas variáveis de perturbação, vamos fazer o análogo ao feito para a matéria escura fria. Multiplicarei a equação de Boltzmann para os elétrons por $d^3q/(2\pi)^3$ e integrarei, chegando a uma equação semelhante à (2.94), só que para elétrons com termos de colisão.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(n_e v^i)}{\partial x^i} + 3 \left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] n_e = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} C_{ep}[f(\vec{q})] + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} C_{e\gamma}[f(\vec{q})] . \quad (2.110)$$

Os termos do lado direito darão zero. O número de elétrons é conservado nos processos acima considerados, e como estamos integrando em todos os momentos (o importante é perceber que é “em todos os momentos”), o termo de colisão dará zero, pois ele estará comparando o número total de elétrons criados com o total de elétrons destruídos.

A equação de perturbação tem a mesma forma da equação para a matéria escura fria,

$$\ddot{\delta}_b + ik\tilde{v}_b + 3\dot{\Phi} = 0 . \quad (2.111)$$

Para conseguir a outra equação para essas perturbações, vamos calcular o primeiro momento da equação de Boltzmann para os bárions, assim como fizemos para a matéria escura fria. Multiplicarei a equação (2.108) por \vec{q}/E e a equação (2.109) por \vec{Q}/E , integrarei no momento, e chegarei a

$$\frac{\partial(n_e v_e^j)}{\partial t} + 4H n_e v_e^j + \frac{n_e}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{q^j}{E(\vec{q})} \left[C_{ep}[f_e(\vec{q})] + C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] \right], \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial(n_p v_p^j)}{\partial t} + 4H n_p v_p^j + \frac{n_p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{Q^j}{E(\vec{Q})} \left[C_{pe}[f_p(\vec{Q})] + C_{p\gamma}[f_p(\vec{Q})] \right]. \quad (2.113)$$

Como os bárions são não relativísticos, aproximarei $E \sim m$, multiplicarei por m_e a equação (2.112) e por m_p a equação (2.113) e somarei as duas equações. Já que $n_e = n_p =: n_b$, temos

$$\begin{aligned} (m_e + m_p) \left[\frac{\partial(n_b v_e^j)}{\partial t} + 4H n_b v_e^j + \frac{n_b}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q^j C_{ep}[f_e(\vec{q})] \\ &+ \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} Q^j C_{pe}[f_p(\vec{Q})] + \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q^j C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})]. \quad (2.114) \end{aligned}$$

Como $m_p \gg m_e$, do lado esquerdo posso desprezar m_e , e do lado direito, temos o termo de espalhamento próton-fóton no qual a amplitude depende do inverso do quadrado da massa do próton, e a mesma dependência tem o espalhamento elétron-fóton com a massa do elétron; assim, desprezei o primeiro pois a massa do próton é 1900 vezes maior que a do elétron, resultando em um termo de colisão muito menor (no caso dos prótons).

Representarei as duas primeiras integrais do lado direito de forma esquemática,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^j C_{ep}[f_e(\vec{q})] + \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} Q^j C_{pe}[f_p(\vec{Q})] =: \int_{qq'QQ'} (q^j + Q^j) A \\
& \quad \times \delta^{(3)}[\vec{q} + \vec{Q} - \vec{q}' - \vec{Q}'] \delta[E(q) + E(Q) - E(q') - E(Q')] \\
& \quad \times [f_b(\vec{q}') f_b(\vec{Q}') - f_b(\vec{q}) f_b(\vec{Q})] , \quad (2.115)
\end{aligned}$$

Onde A assume o papel dos termos que não estão explícitos. Por conservação de momento, temos que $\vec{Q} + \vec{q} = \vec{Q}' + \vec{q}'$, o que implica $q^j + Q^j = q'^j + Q'^j$. Se fizermos no termo acima a transformação de momentos “sem linha” para momentos “com linha”, teremos:

$$\begin{aligned}
& \int_{qq'QQ'} A(q'^j + Q'^j) \delta^{(3)}[\vec{q}' + \vec{Q}' - \vec{q} - \vec{Q}] \delta[E(q') + E(Q') - E(q) - E(Q)] \\
& \quad \times [f_b(\vec{q}) f_b(\vec{Q}) - f_b(\vec{q}') f_b(\vec{Q}')] . \quad (2.116)
\end{aligned}$$

Essa integral será igual à integral anterior se trocarmos o sinal dos colchetes das funções de distribuição, ou seja, teremos um fator igual a ele mesmo com o sinal trocado, o que significa que esse fator tem que ser igual a zero.

Com isso a equação (2.114) fica

$$m_p \left[\frac{\partial(n_b v_e^j)}{\partial t} + 4H n_b v_e^j + \frac{n_b}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^j C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] . \quad (2.117)$$

Dividindo a equação acima por $\bar{\rho}_b = m_p \bar{n}_b$, e utilizando o análogo da equação (2.95) para bárions, temos

$$\frac{\partial v_b^j}{\partial t} + H v_b^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \frac{1}{\bar{\rho}_b} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q^j C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] . \quad (2.118)$$

Para calcular o lado direito, utilizarei que

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q^j C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^j C_{\gamma e}[f(\vec{p})] . \quad (2.119)$$

Isso é válido pelo mesmo motivo pelo qual zerei o termo da equação (2.115). O termo de colisão que aparece do lado direito é o calculado na equação (2.70), então:

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q^j C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^j p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} n_e \sigma_T \left[\Theta_0 - \Theta + \hat{p} \cdot \vec{v}_b - \frac{\mathcal{P}_2(\cos \theta) \Theta_2}{2} \right] .$$

A integral na parte angular anula dois termos:

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q^j C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] = n_e \sigma_T \int \frac{dp}{(2\pi)^3} p^4 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \int d\Omega \hat{p}^j [-\Theta + \hat{p} \cdot \vec{v}_b] .$$

O último termo não depende de p , logo podemos realizar a integral em p e chegar a

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q^j C_{e\gamma}[f_e(\vec{q})] = -n_e \sigma_T \left[\frac{\bar{\rho}_\gamma}{\pi} \int d\Omega \hat{p}^j (\hat{p} \cdot \vec{v}_b) + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \hat{p}^j \Theta \right] .$$

Substituindo esse termo na equação (2.118), e utilizando o tempo conforme η , temos

$$\dot{v}_b^j + \mathcal{H} v_b^j + \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \frac{\dot{\tau}}{\rho_b} \left[\frac{\rho_\gamma}{\pi} \int d\Omega \hat{p}^j \hat{p} \cdot \vec{v}_b + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \hat{p}^j \Theta \right] . \quad (2.120)$$

Passando essa equação para o espaço de Fourier e multiplicando-a por \hat{k}^j , ficaremos com:

$$\dot{\tilde{v}}_b + \mathcal{H}\tilde{v}_b + ik\tilde{\Psi} = \frac{\dot{\tau}}{\rho_b} \left[\frac{\rho_\gamma \tilde{v}_b}{\pi} \int d\Omega \mu^2 + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial f}{\partial p} \mu \tilde{\Theta} \right], \quad (2.121)$$

que nos leva à segunda equação para as variáveis perturbativas dos bárions:

$$\dot{\tilde{v}}_b + \mathcal{H}\tilde{v}_b + ik\tilde{\Psi} = \frac{\dot{\tau}}{\bar{\rho}_b} \left(\frac{4}{3} \tilde{v}_b \bar{\rho}_\gamma - i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_1 \right). \quad (2.122)$$

Com essa equação fechamos as seis equações de perturbação para as seis variáveis das funções de distribuição que temos. Como essas estão acopladas com as duas variáveis de perturbação da métrica (totalizando 8), precisaremos de mais duas equações para fechar o sistema. As seis equações são:

$$\dot{\tilde{\Theta}} - p\mathcal{H} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p} + i\mu k \tilde{\Theta} + i\mu k \tilde{\Psi} + \dot{\tilde{\Phi}} = -\dot{\tau} \left[\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu \tilde{v}_b - \frac{\mathcal{P}_2(\mu) \tilde{\Theta}_2(p)}{2} \right],$$

$$\dot{\tilde{\mathcal{N}}} - p\mathcal{H} \frac{\partial \tilde{\mathcal{N}}}{\partial p} + i\mu k \tilde{\mathcal{N}} + i\mu k \tilde{\Psi} + \dot{\tilde{\Phi}} = 0,$$

$$\dot{\tilde{\delta}}_{dm} + ik\tilde{v}_{dm} + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0 ,$$

$$\dot{\tilde{v}}_{dm} + \mathcal{H}\tilde{v}_{dm} + ik\tilde{\Psi} = 0 ,$$

$$\dot{\tilde{\delta}}_b + ik\tilde{v}_b + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0 ,$$

$$\dot{\tilde{v}}_b + \mathcal{H}\tilde{v}_b + ik\tilde{\Psi} = \frac{\dot{\tau}}{\bar{\rho}_b} \left(\frac{4}{3}\tilde{v}_b\bar{\rho}_\gamma - i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_1 \right) .$$

Capítulo 3

Equação de Einstein perturbada

No capítulo anterior calculamos equações que relacionam as perturbações na métrica com as perturbações nas funções de distribuição. Chegamos nas seis equações mostradas ao fim do capítulo, mas temos um número maior de variáveis ($\mathcal{N}, \Theta, \Psi, \Phi, v_b, \delta_b, v_{dm}, \delta_{dm}$). Para conseguir outras equações, podemos fazer perturbações de primeira ordem na equação de Einstein, já que ela relaciona as perturbações nas distribuições de partículas com as perturbações na métrica.

3.1 Tensor e escalar de Ricci perturbados

Primeiramente, precisamos calcular os símbolos de Christoffel. Esse cálculo, assim como a maioria dos cálculos desse capítulo, é muito trabalhoso mas bem simples. Basta utilizar a métrica perturbada da equação (2.2), que encontraremos, até primeira ordem,

$$\Gamma_{00}^0 = \Psi_{,0} ,$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = \Psi_{,i} ,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^0 &= \Gamma_{ji}^0 = \delta_{ij} a^2 [H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] , \\
\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{a^2} \Psi_{,i} , \\
\Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij} (H + \Phi_{,0}) , \\
\Gamma_{jk}^i &= \Gamma_{kj}^i = [\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} + \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} - \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}] \Phi , \tag{3.1}
\end{aligned}$$

onde a componente zero corresponde a variável temporal t .

Usando esses resultados podemos calcular as componentes do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{00} &= -3 \frac{d^2 a / dt^2}{a} + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}) , \\
\mathcal{R}_{ij} &= \delta_{ij} \left[\left(2 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + a \frac{d^2 a}{dt^2} \right) (1 + 2\Phi - 2\Psi) \right. \\
&\quad \left. + a^2 H (6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2 \Phi_{,00} - \nabla^2 \Phi \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \Psi . \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Calculei apenas essas componentes pois, essas são as componentes necessárias para calcularmos o escalar de Ricci:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= g^{00}\mathcal{R}_{00} + g^{ij}\mathcal{R}_{ij} \\
&= 6 \left[H^2 + \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} \right] - 12\Psi \left[H^2 + \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} \right] \\
&\quad - \frac{2}{a^2} \nabla^2 \Psi + 6\Phi_{,00} - 6H(\Psi_{,0} - 4\Phi_{,0}) - 4 \frac{\nabla^2 \tilde{\Phi}}{a^2} , \tag{3.3}
\end{aligned}$$

A passagem dessas grandezas para o espaço de Fourier é imediata:

Símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{00}^0 &= \tilde{\Psi}_{,0} \\
\tilde{\Gamma}_{0i}^0 &= \tilde{\Gamma}_{i0}^0 = ik_i \tilde{\Psi} \\
\tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= \tilde{\Gamma}_{ji}^0 = \delta_{ij} a^2 \left[H + 2H(\tilde{\Phi} - \tilde{\Psi}) + \tilde{\Phi}_{,0} \right] \\
\tilde{\Gamma}_{00}^i &= \frac{ik^i}{a^2} \tilde{\Psi} \\
\tilde{\Gamma}_{j0}^i &= \tilde{\Gamma}_{0j}^i = \delta_{ij} \left(H + \tilde{\Phi}_{,0} \right) \\
\tilde{\Gamma}_{jk}^i &= \tilde{\Gamma}_{kj}^i = i\tilde{\Phi} [\delta_{ij} k_k + \delta_{ik} k_j - \delta_{jk} k_i] , \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}_{00} &= -3\frac{d^2a/dt^2}{a} - \frac{k^2}{a^2}\tilde{\Psi} - 3\tilde{\Phi}_{,00} + 3H(\tilde{\Psi}_{,0} - 2\tilde{\Phi}_{,0}) \\
\tilde{\mathcal{R}}_{ij} &= \delta_{ij} \left[\left(2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + a\frac{d^2a}{dt^2} \right) (1 + 2\tilde{\Phi} - 2\tilde{\Psi}) \right. \\
&\quad \left. + a^2H(6\tilde{\Phi}_{,0} - \tilde{\Psi}_{,0}) + a^2\tilde{\Phi}_{,00} + k^2\tilde{\Phi} \right] + k_ik_j(\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}) . \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Escalar de Ricci:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}} &= 6 \left[H^2 + \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} \right] - 12\tilde{\Psi} \left[H^2 + \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} \right] \\
&\quad + \frac{2k^2}{a^2}\tilde{\Psi} + 6\tilde{\Phi}_{,00} - 6H(\tilde{\Psi}_{,0} - 4\tilde{\Phi}_{,0}) + 4\frac{k^2\tilde{\Phi}}{a^2} . \quad (3.6)
\end{aligned}$$

3.2 Componentes da equação de Einstein

Para completar o conjunto de equações exigidas no começo desse capítulo, precisaremos de duas equações, que poderão vir de quaisquer componentes não triviais da equação de Einstein.

A primeira componente que vou calcular é \tilde{G}^0_0 :

$$\tilde{G}^0_0 = g^{00} \left[\tilde{\mathcal{R}}_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\tilde{\mathcal{R}} \right] .$$

A parte perturbada dessa equação é

$$\delta\tilde{G}^0_0 = -6H\tilde{\Phi}_{,0} + 6\tilde{\Psi}H^2 - 2\frac{k^2\tilde{\Phi}}{a^2} . \quad (3.7)$$

Para completar a equação de Einstein temos que calcular \tilde{T}^0_0 . Essa componente do tensor energia-momento é o negativo da densidade de energia somada de todas as partículas do universo. Como a densidade de energia de uma espécie w qualquer é¹

$$\rho_w(t, \vec{x}) = g_w \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_w(t, \vec{x}, \vec{p}) E_w(p) , \quad (3.8)$$

teremos

$$T^0_0 = (t, \vec{x}) = - \sum_{\text{todas as espécies } w} \rho_w(t, \vec{x}) . \quad (3.9)$$

Estamos considerando que temos quatro espécies no universo; para bárions e matéria escura fria, pela equação (2.97), temos $\rho = \bar{\rho}[1 + \delta(t, \vec{x})]$. Para fótons e neutrinos precisaremos calcular as integrais que definem a densidade de energia, pois não fizemos isso antes.

Para fótons temos, utilizando a equação (2.29) e a definição (3.8).

¹Aqui, estou explicitando g_w , a degenerescência de estados de spin da componente w .

$$\begin{aligned}
(\tilde{T}^0_\gamma)_\gamma &= -2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \left[\bar{f} - p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta} \right] \\
&= -\bar{\rho}_\gamma + 2 \int \int d\phi \frac{dp}{(2\pi)^3} 2p^4 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_0 \\
&= -\bar{\rho}_\gamma + 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_0 .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Para neutrinos, a equação obedecerá exatamente à mesma forma.

Para a equação de Einstein utilizaremos a equação (3.7) e as partes perturbadas das densidades de energia de nossas quatro componentes. Passando também da variável t para η , temos a primeira componente da equação de Einstein em ordem 1:

$$\begin{aligned}
3\mathcal{H} \left(\dot{\tilde{\Phi}} - \tilde{\Psi}\mathcal{H} \right) + k^2 \tilde{\Phi} &= 4\pi G a^2 \left\{ \bar{\rho}_{dm} \tilde{\delta}_{dm} + \bar{\rho}_b \tilde{\delta}_b - 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_0 \right. \\
&\quad \left. - 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial p} \tilde{\mathcal{N}}_0 \right\} .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Precisamos de mais uma equação para as perturbações, para isso utilizaremos a parte espacial das equações de Einstein.

Temos

$$\tilde{G}^i_j = \frac{\delta^{ik}(1 - 2\tilde{\Phi})}{a^2} \tilde{\mathcal{R}}_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2} \tilde{\mathcal{R}} . \tag{3.12}$$

Como quase todos os termos das componentes \mathcal{R}_{kj} dependem de δ_{kj} e, na equação acima, estão multiplicados por δ^{ik} , isso resultará em δ_{ij} . Assim, praticamente todos os termos da equação terão essa dependência; se pudermos de alguma forma, zerar esses termos, simplicaremos bastante. Podemos fazer isso tomando a parte simétrica sem traço das equações, ou seja, multiplicando por $\hat{k}^j \hat{k}_i - (1/3)\delta_i^j$. Assim, a expressão resultante será:

$$\left(\hat{k}^j \hat{k}_i - (1/3)\delta_i^j\right) \tilde{G}_j^i = \frac{2}{3a^2} k^2 (\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}) . \quad (3.13)$$

Precisamos fazer o mesmo para o tensor energia-momento:

$$\left(\hat{k}^j \hat{k}_i - (1/3)\delta_i^j\right) \tilde{T}_j^i = \sum_{\text{todas as espécies } w} g_w \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^2 \mu^2 - (1/3)p^2}{E_w(p)} f_w(\vec{p}) . \quad (3.14)$$

Como o termo que contribui para essa equação é o de quadrupolo, só importa a contribuição da radiação, a da matéria é desprezível (pois será da ordem da velocidade ao quadrado). Logo,

$$\left(\hat{k}^j \hat{k}_i - (1/3)\delta_i^j\right) \tilde{T}_j^i = \frac{4}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_2 + \frac{4}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial p} \tilde{\mathcal{N}}_2 . \quad (3.15)$$

Temos então, como segunda componente da equação de Einstein:

$$k^2 (\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}) = 16\pi G a^2 \left[\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_2 + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial p} \tilde{\mathcal{N}}_2 \right] . \quad (3.16)$$

Fechamos, assim, a quantidade de equações necessárias para formar um sistema consistente com as oito variáveis de perturbação que temos. Qualquer componente da equação de Einstein que derivarmos a mais será desnecessária, redundante. Mais à frente teremos um resultado que fica fácil de ser demonstrado se utilizarmos outra componente da equação de Einstein que pode ser derivada da seguinte forma:

Utilizando a parte espaço-temporal da equação de Einstein, pode-se mostrar que [1]

$$\dot{\tilde{\Phi}} - a\mathcal{H}\tilde{\Psi} = \frac{4\pi Ga^2}{ik} \left[\bar{\rho}_{dm}\tilde{v}_{dm} + \bar{\rho}_b\tilde{v}_b - 4i\bar{\rho}_\gamma\tilde{\Theta}_1 - 4i\bar{\rho}_\nu\tilde{\mathcal{N}}_1 \right]. \quad (3.17)$$

Podemos ainda somar essa equação com a equação (3.11), para chegar a:

$$k^2\tilde{\Phi} = 4\pi Ga^2 \left\{ \bar{\rho}_{dm}\tilde{\delta}_{dm} + \bar{\rho}_b\tilde{\delta}_b + 4 \left(\bar{\rho}_\gamma\tilde{\Theta}_0 + \bar{\rho}_\nu\tilde{\mathcal{N}}_0 \right) + \frac{3aH}{k} \left[i\bar{\rho}_{dm}\tilde{v}_{dm} + \bar{\rho}_b\tilde{v}_b + 4 \left(\bar{\rho}_\gamma\tilde{\Theta}_1 + \bar{\rho}_\nu\tilde{\mathcal{N}}_1 \right) \right] \right\}. \quad (3.18)$$

Essa equação será útil na próxima seção.

Capítulo 4

Condições iniciais

Para resolvermos o sistema de equações diferenciais que conseguimos montar com as equações de Einstein-Boltzmann nos dois capítulos anteriores¹, precisamos fornecer condições iniciais. Precisamos saber como as variáveis de perturbação se comportavam no início do período que queremos estudar [30], [33]. Esse início é imediatamente após a inflação, no início da época dominada pela radiação.

A teoria mais aceita hoje em dia na cosmologia para explicar os momentos mais primitivos do universo é a inflação. De fato, a maioria dos estudos realizados sobre RCF usam a teoria inflacionária, e chegam a resultados extremamente precisos se comparados com dados experimentais.

Utilizaremos resultados da teoria inflacionária para chegar às condições iniciais necessárias para resolver o sistema de equações diferenciais (resultados similares foram achados também em outro gauge em [33]).

Como estamos buscando valores para as variáveis em épocas bem remotas, podemos trabalhar com algumas aproximações. Essas aproximações nos permitirão relacionar entre si as variáveis nos seus instantes iniciais, o que fará com que, ao invés de precisarmos de condições iniciais para todas as variáveis, precisaremos para apenas uma.

¹São as seis últimas equações do capítulo 2, ou seja: (2.81), (2.83), (2.104), (2.105), (2.111) e (2.122), e as duas primeiras componentes da equação de Einstein derivadas no capítulo 3: (3.11) e (3.16)

4.1 Sistema de equações nos tempos primordiais

Vamos fazer a aproximação de que $\dot{\tau}^{-1} \rightarrow 0$, que é uma aproximação válida no limite de acoplamento forte (até momentos próximos ao desacoplamento). As equações derivadas anteriormente ficam (já com a expansão em multipolos (2.88)-(2.90) para os fótons):

$$\dot{\tilde{\Theta}}_0 + k\tilde{\Theta}_1 - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\Theta}_0}{\partial p} = -\dot{\tilde{\Phi}} \quad (4.1)$$

$$\tilde{\Theta}_1 = \frac{i\tilde{v}_b}{3} \quad (4.2)$$

$$\dot{\tilde{\mathcal{N}}} - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\mathcal{N}}}{\partial p} + i\mu k\tilde{\mathcal{N}} + i\mu k\tilde{\Psi} + \dot{\tilde{\Phi}} = 0 \quad (4.3)$$

$$\dot{\tilde{\delta}}_{dm} + ik\tilde{v}_{dm} + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0 \quad (4.4)$$

$$\dot{\tilde{v}}_{dm} + \mathcal{H}\tilde{v}_{dm} + ik\tilde{\Psi} = 0 \quad (4.5)$$

$$\dot{\tilde{\delta}}_b + ik\tilde{v}_b + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0 \quad (4.6)$$

$$k^2(\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}) = 16\pi G a^2 \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial p} \tilde{\mathcal{N}}_2 \right] \quad (4.7)$$

$$3\mathcal{H} \left(\dot{\tilde{\Phi}} - \mathcal{H}\tilde{\Psi} \right) + k^2\tilde{\Phi} = 4\pi G a^2 \left[\bar{\rho}_{dm}\tilde{\delta}_{dm} + \bar{\rho}_b\tilde{\delta}_b \right. \\ \left. - 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_0 - 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial p} \tilde{\mathcal{N}}_0 \right] \quad (4.8)$$

Multiplicando por η poderemos desprezar os termos proporcionais a $k\eta$, pois podemos considerar que estamos em tempos muito primordiais, nos quais η é tão pequeno que torna válida essa aproximação². Assim, teremos

$$\dot{\tilde{\Theta}}_0 - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\Theta}_0}{\partial p} = -\dot{\tilde{\Phi}} \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Theta}_1 = \frac{i\tilde{v}_b}{3} \quad (4.10)$$

$$\dot{\tilde{\mathcal{N}}} - p\mathcal{H}\frac{\partial\tilde{\mathcal{N}}}{\partial p} + \dot{\tilde{\Phi}} = 0 \quad (4.11)$$

$$\dot{\tilde{\delta}}_{dm} + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0 \quad (4.12)$$

$$\dot{\tilde{v}}_{dm} + \mathcal{H}\tilde{v}_{dm} = 0 \quad (4.13)$$

$$\dot{\tilde{\delta}}_b + 3\dot{\tilde{\Phi}} = 0 \quad (4.14)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_2 = 0 \quad (4.15)$$

$$3\mathcal{H}\left(\dot{\tilde{\Phi}} - \mathcal{H}\tilde{\Psi}\right) = 4\pi G a^2 \left[\bar{\rho}_{dm}\tilde{\delta}_{dm} + \bar{\rho}_b\tilde{\delta}_b - 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_0 - 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial p} \tilde{\mathcal{N}}_0 \right] \quad (4.16)$$

Para chegar em uma relação entre as perturbações $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Theta}_0$ podemos utilizar a equação (4.16), na qual pode-se desprezar os termos de matéria pois estamos tratando da época da radiação. Farei também uma suposição importante, a de que Θ não depende de p . Isso é plausível, posto que a perturbação

²Essa aproximação pode não ser válida em escalas muito pequenas (quando k tende a infinito), mas em escalas relevantes não temos esse problema

nos fótons é devida ao espalhamento Compton não relativístico e a energia do fóton varia muito pouco, ou seja, Θ é aproximadamente constante com a variação de p . Assim teremos

$$3\mathcal{H} \left(\dot{\tilde{\Phi}} - \mathcal{H}\tilde{\Psi} \right) = 16\pi G a^2 (\bar{\rho}_\gamma \tilde{\Theta}_0 + \bar{\rho}_\nu \tilde{\mathcal{N}}_0) . \quad (4.17)$$

Como estamos na época dominada pela radiação, $\mathcal{H} = 1/\eta$ e, se utilizarmos a seguinte equação de Einstein da cosmologia padrão (não perturbada),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} , \quad (4.18)$$

podemos chegar a

$$\frac{\dot{\tilde{\Phi}}}{\eta} - \frac{\tilde{\Psi}}{\eta^2} = \frac{2}{\eta^2} \left(\frac{\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}} \tilde{\Theta}_0 + \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}} \tilde{\mathcal{N}}_0 \right) ; \quad (4.19)$$

onde $\bar{\rho} = \bar{\rho}_\nu + \bar{\rho}_\gamma$.

Derivando essa equação, utilizando as equações (4.9) e (4.11), sem a dependência em p das perturbações, e utilizando que os quadrupolos são muito pequenos e podem ser desprezados (ou seja $\tilde{\Phi} = -\tilde{\Psi}$), chegamos a:

$$\ddot{\tilde{\Phi}}\eta + 4\dot{\tilde{\Phi}} = 0 . \quad (4.20)$$

Supondo que $\tilde{\Phi}$ é alguma potência de η : $\tilde{\Phi} = \eta^d$, onde d é constante, teremos duas soluções para essa equação: $d = 0$ e $d = -3$. Se tivermos uma solução do tipo $\tilde{\Phi} = \eta^{-3}$, isso significa que a perturbação diminui rapidamente com o tempo, e é possível que a perturbação, sendo gerada na inflação, diminua rapidamente e fique desprezível no momento que nos interessa. A maioria dos autores despreza esse tipo de solução por causa desse fato, mas

é bem verdade que poderia existir uma perturbação dessas gerada pela inflação que fosse grande o suficiente para cair mas não ficar desprezível até, talvez, o desacoplamento. Como estamos tratando dos casos mais simples não consideraremos esse tipo de perturbação. Assim, utilizaremos $\dot{\tilde{\Phi}} = 0$, de modo que a equação 4.19 fica

$$\tilde{\Phi} = 2 \left(\frac{\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}} \tilde{\Theta}_0 + \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}} \tilde{\mathcal{N}}_0 \right) . \quad (4.21)$$

Se considerarmos que a radiação foi gerada homogeneamente distribuída, podemos pensar que a perturbação não será diferente para fótons e neutrinos, o que leva, da equação acima, a

$$\tilde{\Phi}(\eta_i, k) = 2\tilde{\Theta}_0(\eta_i, k) = 2\tilde{\mathcal{N}}_0(\eta_i, k) . \quad (4.22)$$

onde η_i é o instante em que estamos escolhendo as condições iniciais: logo depois da inflação. Para encontrar uma relação com a matéria, basta utilizar as equações (4.9), (4.12) e (4.14). Como as equações para matéria escura fria e bárions têm a mesma forma, utilizarei $\tilde{\delta}_b \equiv \tilde{\delta}_{dm} \equiv \tilde{\delta}$. Assim teremos,

$$\tilde{\delta}(\eta_i, k) = 3\tilde{\Theta}_0(\eta_i, k) + A(k) , \quad (4.23)$$

onde A não depende de η_i .

Os resultados do espectro de potência das anisotropias encontrados para modelos contendo só modos com $A = 0$, ditos adiabáticos, são mais adaptados aos dados observacionais do que os para $A \neq 0$. Existem outros tipos de modos de perturbações, tais como os de isocurvatura.

As perturbações do tipo adiabáticas também são favorecidas pela teoria da inflação [27], [26], mas muitos estudos mostram que também pode haver perturbações de isocurvatura, [20], [35], [34].

Vamos, então, considerar nesse estudo apenas perturbações do tipo adiabáticas, ou seja:

$$\tilde{\delta}(\eta_i, k) = 3\tilde{\Theta}_0(\eta_i, k) . \quad (4.24)$$

Vamos ver agora, porque esse caso é chamado de condição adiabática. A relação entre as densidades de bárions e fótons é

$$\frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{\bar{n}_b}{\bar{n}_\gamma} \left(\frac{1 + \delta_b}{1 + 3\Theta_0} \right) . \quad (4.25)$$

Sabendo que a densidade de fótons é proporcional a T^3 e a densidade de entropia de fótons (S_γ) também; temos $n_\gamma \propto S_\gamma$. Pode-se mostrar que a entropia dos fótons é dominante sobre a da matéria [25], [5], o que permite fazer $S_T \approx S_\gamma$, ou seja

$$\frac{n_b}{S_T} \approx \frac{\bar{n}_b}{\bar{n}_\gamma} \left(\frac{1 + \delta_b}{1 + 3\Theta_0} \right) . \quad (4.26)$$

O lado esquerdo da equação acima é o inverso da entropia por partícula (no caso de bárions) do universo; sendo a quantidade de bárions conservada, para não termos variação na entropia, o lado direito da equação deve ser constante, isso implica na equação que mostramos anteriormente: (4.24).

4.2 Potenciais em pequenas escalas

Um resultado que será útil mais à frente é o de que, em pequenas escalas, os potenciais são desprezíveis frente às outras perturbações. De fato, usando que, na época dominada pela radiação,

$$\frac{8\pi G\bar{\rho}_r}{3} = H^2 = \frac{1}{(a\eta)^2}, \quad (4.27)$$

a equação (3.18) fica

$$\tilde{\Phi} = \frac{6a^2H^2}{k^2} \left[\tilde{\Theta}_{r,0} + \frac{3aH}{k} \tilde{\Theta}_{r,1} \right], \quad (4.28)$$

onde defini

$$\Theta_{r,l} := \frac{(\bar{\rho}_\gamma \tilde{\Theta}_l + \bar{\rho}_\nu \tilde{\mathcal{N}}_l)}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu}, \quad (4.29)$$

com l sendo 0 ou 1, correspondente aos multipolos das perturbações.

Podemos derivar equações para $\tilde{\Theta}_{r,0}$ e $\dot{\tilde{\Theta}}_{r,0}$ das equações (2.84) e (2.85), considerando que o termo de quadrupolo é desprezível, que $\tilde{\Theta}$ não depende de p , e que estamos no limite de acoplamento forte [equação (2.89)]. Obtemos então

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Theta}}_{r,0} + k\tilde{\Theta}_{r,1} &= -\dot{\tilde{\Phi}}, \\ \dot{\tilde{\Theta}}_{r,1} - \frac{k}{3}\tilde{\Theta}_{r,0} &= -\frac{k}{3}\tilde{\Phi}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aqui usei também a equação (3.16) desprezando os quadrupolos, ou seja, utilizando que $\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi}$. Substituindo $\tilde{\Theta}_{r,0}$ da equação (4.28) nas equações (4.30), chegaremos a duas equações, e podemos usar o $\dot{\tilde{\Theta}}_{r,1}$ da segunda equação então encontrada na primeira, para obter

$$\dot{\tilde{\Phi}} + \frac{\tilde{\Phi}}{\eta} = -\frac{6}{k\eta^2}\tilde{\Theta}_{r,1}. \quad (4.31)$$

Podemos deduzir uma equação só para $\tilde{\Phi}$, derivando essa equação e substituindo $\tilde{\Theta}_{r,1}$ da equação acima e $\dot{\tilde{\Theta}}_{r,1}$ da equação (4.30) na equação assim encontrada. O resultado é

$$\ddot{\tilde{\Phi}} + \frac{4}{\eta} \dot{\tilde{\Phi}} + \frac{k^2}{3} \tilde{\Phi} = 0 , \quad (4.32)$$

que é equivalente a

$$\ddot{u} + \frac{2}{\eta} \dot{u} + \left(\frac{k^2}{3} - \frac{2}{\eta^2} \right) u = 0 , \quad (4.33)$$

sendo $u := \Phi\eta$. Essa equação tem como solução³ a função esférica de Bessel [4]

$$u = \frac{\text{sen}(k\eta/\sqrt{3}) - (k\eta/\sqrt{3}) \cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta)^2} . \quad (4.34)$$

Assim, temos, finalmente

$$\tilde{\Phi}(\eta) = 3\tilde{\Phi}(\eta = 0) \frac{\text{sen}(k\eta/\sqrt{3}) - (k\eta/\sqrt{3}) \cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta/\text{sqr}t{3})^3} . \quad (4.35)$$

Essa função tende a zero rapidamente, ou seja, podemos desprezar os potenciais frente às outras perturbações.

³Existe também uma outra solução, que é a função de Neumann, mas essa diverge no limite de tempos primordiais.

Capítulo 5

Anisotropias

5.1 Espectro de potência das anisotropias da radiação cósmica de fundo

Para entendermos as anisotropias na radiação cósmica de fundo vamos primeiro pensar no que queremos calcular exatamente. O que podemos observar a respeito dessas anisotropias?

A única coisa que podemos verificar experimentalmente é como se comportam as flutuações da RCF nas diferentes direções que chegam a nós, aqui neste ponto (Terra), neste momento (ano 2006, aproximadamente 13,7 bilhões depois do que teria sido o início do universo)¹.

Mas que informações são essas que podemos extrair?

Para verificarmos alguma tendência nos dados observados, devemos ter alguma estatística que trate os dados. Utilizaremos a função de correlação de dois pontos para verificar se existe alguma correlação na flutuação da temperatura entre dois pontos separados por uma determinada abertura angular.

¹É claro que podemos fazer observações de locais ligeiramente distintos; podemos, por exemplo, receber dados de satélites na Lua, na órbita da Terra ou de telescópios na Terra mesmo. Mas, em escalas cosmológicas, essas variações na posição são desprezíveis, assim como variações no tempo; medições feitas há dez anos atrás ou daqui a dez anos, cosmológicamente, são instantâneas. Por isso, podemos pensar que o evento no qual podemos extrair informações da RCF é único: aqui e hoje.

Pense o seguinte: podemos medir a temperatura (ou melhor, a intensidade da radiação) que chega até nós em cada direção diferente; se calcularmos a média da temperatura total (a soma em todas as direções, dividida por 4π), poderemos calcular, em cada direção, qual a flutuação relativa da temperatura. Ela será a diferença entre a temperatura naquela direção e a temperatura média, dividida pela média (por conveniência)²:

$$\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{p}) := \frac{T(\eta, \vec{x}, \hat{p}) - \bar{T}(\eta)}{\bar{T}(\eta)}. \quad (5.1)$$

Para extrair a função de correlação de dois pontos (ou direções), devemos medir a flutuação da temperatura em duas direções, separadas por um dado ângulo, e multiplicar as duas flutuações encontradas. Devemos fazer esse procedimento para todas as direções no céu mas sempre mantendo o ângulo de separação fixo. Devemos, então, calcular a média desses valores (produtos entre as flutuações). Aí teremos uma correlação de dois pontos que depende apenas do ângulo de separação entre eles. Essa correlação como função apenas do ângulo está relacionada com as equações que derivamos para os multipolos ($\tilde{\Theta}_l$) das perturbações. Vamos ver como é essa relação.

Para chegar nessa relação, farei uma coisa diferente do que falei acima. Imagine que fosse possível estudar vários universos, que pudéssemos estudar todos os universos criados a partir da variação das condições iniciais. Existe uma hipótese estatística, que aplicada a esse estudo de RCF, diz que, se calcularmos a média de uma grandeza física (medida em um determinado ponto, evento) em todos os universos (supostamente criados a partir da variação das condições iniciais)³, essa média seria igual a média espacial calculada em um único universo. Essa hipótese é conhecida como hipótese ergódica.

Vamos supor que a hipótese ergódica seja válida para poder relacionar

²É comum encontrar na literatura trabalhos que utilizam uma flutuação dimensional, ou seja, $T(\eta, \vec{x}, \hat{p}) - \bar{T}(\eta, \vec{x})$ apenas. Note que a grandeza que defini é adimensional

³Essa média em vários universos é a chamada média no ensemble, é uma média em diversos sistemas que teoricamente pode-se criar a partir de variações em grandezas físicas conhecidas. No nosso caso, variação nas perturbações iniciais.

a função de correlação com as perturbações na temperatura da RCF [19]. Podemos definir, então, uma outra flutuação de temperatura, agora calculada com médias no ensemble:

$$\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{p}) := \frac{T(\eta, \vec{x}, \hat{p}) - \langle T(\eta, \vec{x}, \hat{p}) \rangle}{\langle T(\eta, \vec{x}, \hat{p}) \rangle} . \quad (5.2)$$

A função de correlação será

$$C(\eta, \vec{x}, \hat{p}, \hat{p}') := \langle \Theta(\eta, \vec{x}, \hat{p}), \Theta^*(\eta, \vec{x}, \hat{p}') \rangle \Big|_{\hat{p}, \hat{p}' = \cos \alpha = \text{const}} . \quad (5.3)$$

Essa função deve a princípio depender de todas as variáveis indicadas acima, mas, devido ao fato de estarmos considerando verdadeira a hipótese ergódica, temos que devem ser válidos também a isotropia estatística, implicando, assim, que $C = C(\eta, \alpha)$.

A perturbação Θ pode ser expandida em harmônicos esféricos.⁴

$$\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{p}) = \sum_{lm} a_{lm}(\eta, \vec{x}) \mathcal{Y}_{lm}(\hat{p}) . \quad (5.4)$$

Com isso, vale

$$a_{lm}(\eta, \vec{x}) = \int d\Omega \Theta(\eta, \vec{x}, \hat{p}) \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{p}) . \quad (5.5)$$

Por definição

$$\langle \Theta \rangle = 0 . \quad (5.6)$$

⁴ $\sum_{lm} := \sum_{m=-l}^l \sum_{l=-\infty}^{\infty}$

Como os harmônicos esféricos são funções determinísticas definidas na superfície de uma esfera (isso significa que, se pensarmos em um universo formado por diferentes condições iniciais, os harmônicos esféricos não mudam, são sempre as mesmas funções), então:

$$\begin{aligned} \langle \Theta \rangle = 0 &= \sum_{lm} \langle a_{lm} \mathcal{Y}_{lm} \rangle = \sum_{lm} \langle a_{lm} \rangle \mathcal{Y}_{lm} = 0 , \\ &\langle a_{lm} \rangle = 0 . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para relacionar com a função de correlação, vamos expandir essa última função em polinômios de Legendre, já que só depende de um ângulo:

$$\begin{aligned} C(\eta, \alpha) &= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l(\eta) \mathcal{P}_l(\cos \alpha) \\ &= \sum_{lm} C_l(\eta) \mathcal{Y}_{lm}(\hat{p}) \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{p}') , \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde os fatores na primeira linha são colocados apenas para que, após a utilização do teorema da adição dos harmônicos esféricos, a segunda linha fique sem fatores.

Pelas equações (5.3), (5.4) e (5.8), podemos chegar na relação

$$\begin{aligned}
\langle a_{lm}(\eta, \vec{x}) a_{l'm'}^*(\eta, \vec{x}) \rangle &= \int \int d\Omega d\Omega' \langle \Theta(\eta, \vec{x}, \hat{p}) \Theta^*(\eta, \vec{x}, \hat{p}') \rangle \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{p}) \mathcal{Y}_{l'm'}(\hat{p}') , \\
&= \int \int d\Omega d\Omega' C(\eta, \alpha) \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{p}) \mathcal{Y}_{l'm'}(\hat{p}') , \\
&= C_l(\eta) \delta_{ll'} \delta_{mm'} .
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Podemos ver que a correlação só é diferente de zero para harmônicos de mesmos índices (representado pelos deltas de Kronecker acima) e, de fato, só depende do índice l : para diferentes m com o mesmo l a correlação é a mesma.

Para chegar na equação que relaciona os C_l com as perturbações, utilizarei o resultado das condições iniciais que mostra que $\tilde{\Theta}$ é proporcional à $\tilde{\delta}_{dm}$, ou seja, $\tilde{\Theta}/\tilde{\delta}_{dm}$ é uma constante, não depende das condições iniciais. As médias que utilizei acima nos ensembles, correspondem a variações nas condições iniciais, logo

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Theta}(\eta, \vec{k}, \hat{p}) \tilde{\Theta}^*(\eta, \vec{k}', \hat{p}') \rangle &= \left\langle \frac{\tilde{\delta}_{dm}(\eta, \vec{k}) \tilde{\Theta}(\eta, \vec{k}, \hat{p})}{\tilde{\delta}_{dm}(\eta, \vec{k})} \frac{\tilde{\delta}_{dm}^*(\eta, \vec{k}') \tilde{\Theta}^*(\eta, \vec{k}', \hat{p}')}{\tilde{\delta}_{dm}^*(\eta, \vec{k}')} \right\rangle \\
&= \langle \tilde{\delta}_{dm}(\eta, \vec{k}) \tilde{\delta}_{dm}^*(\eta, \vec{k}') \rangle \frac{\tilde{\Theta}(\eta, \vec{k}, \hat{p})}{\tilde{\delta}_{dm}(\eta, \vec{k})} \frac{\tilde{\Theta}^*(\eta, \vec{k}', \hat{p}')}{\tilde{\delta}_{dm}^*(\eta, \vec{k}')} \\
&= (2\pi)^3 \delta^3(\eta, \vec{k} - \vec{k}') P(\eta, k) \frac{\tilde{\Theta}(\eta, k, \hat{k} \cdot \hat{p})}{\tilde{\delta}_{dm}(\eta, k)} \frac{\tilde{\Theta}^*(\eta, k, \hat{k} \cdot \hat{p}')}{\tilde{\delta}_{dm}^*(\eta, k')} ,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde, da primeira para a segunda linha, utilizei que $\tilde{\Theta}(\eta, \vec{k}, \hat{p})/\tilde{\delta}_{dm}(\eta, \vec{k})$ é constante para variações das condições iniciais. Isso ocorre porque a evolução

dessas funções é descrita por equações diferenciais lineares; com isso, se a razão entre as funções no momento inicial não varia com mudanças nas condições iniciais, a razão entre as mesmas em qualquer instante também será independente das condições iniciais. Da segunda para a terceira linha utilizei que $\hat{z} \parallel \hat{k}$ e temos $P(\eta, k)$ como o espectro de potência da matéria.

Como utilizarei resultados anteriormente calculados no espaço de Fourier, farei

$$a_{lm}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int d\Omega \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{p}) \tilde{\Theta}(\eta, \vec{k}, \hat{p}) . \quad (5.11)$$

Juntando as três últimas equações (5.9)-(5.11), temos:

$$\begin{aligned} C_l(\eta) &= \langle a_{lm}(\eta, \vec{x}) a_{lm}(\eta, \vec{x}) \rangle , \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \int d\Omega \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{p}) \int d\Omega' \mathcal{Y}_{lm}(\hat{p}') \\ &\quad \times \langle \tilde{\Theta}(\eta, \vec{k}, \hat{p}) \tilde{\Theta}^*(\eta, \vec{k}', \hat{p}') \rangle , \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} C_l(\eta) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(\eta, k) \int d\Omega \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{p}) \frac{\tilde{\Theta}(\eta, k, \hat{k} \cdot \hat{p})}{\tilde{\delta}_{dm}(\eta, k)} \\ &\quad \times \int d\Omega' \mathcal{Y}_{lm}(\hat{p}') \frac{\tilde{\Theta}^*(\eta, k, \hat{k} \cdot \hat{p}')}{\tilde{\delta}_{dm}^*(\eta, k)} . \quad (5.12) \end{aligned}$$

Expandindo as funções $\tilde{\Theta}$ em polinômios de Legendre:

$$\tilde{\Theta}(\eta, k, \hat{k} \cdot \hat{p}) = \sum_{l'} (-i)^{l'} (2l' + 1) \mathcal{P}_{l'}(\hat{k} \cdot \hat{p}) \tilde{\Theta}_{l'}(\eta, k), \quad (5.13)$$

ficamos com:

$$C_l(\eta) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P(\eta, k) \sum_{l'l''} (-i)^{l'} i^{l''} (2l' + 1)(2l'' + 1) \frac{\tilde{\Theta}_{l'}(\eta, k) \tilde{\Theta}_{l''}^*(\eta, k)}{|\tilde{\delta}_{dm}(\eta, k)|^2} \\ \times \int d\Omega \mathcal{P}_{l'}(\hat{k} \cdot \hat{p}) \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{p}) \int d\Omega' \mathcal{P}_{l''}(\hat{k} \cdot \hat{p}') \mathcal{Y}_{lm}(\hat{p}'). \quad (5.14)$$

A integral dos harmônicos esféricos é simples; basta usar o teorema da adição dos harmônicos e a ortonormalidade dos harmônicos para chegar a:

$$C_l(\eta) = \frac{2}{\pi} \int d^3 k P(\eta, k) \sum_{l'l''} (-i)^{l'} i^{l''} \frac{\tilde{\Theta}_{l'}(\eta, k) \tilde{\Theta}_{l''}^*(\eta, k)}{|\tilde{\delta}_{dm}(\eta, k)|^2} \mathcal{Y}_{lm}^*(\hat{k}) \mathcal{Y}_{l'm'}(\hat{k}). \quad (5.15)$$

A integral na parte angular será um delta de Kronecker, e assim

$$C_l(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 P(\eta, k) \left| \frac{\tilde{\Theta}_l(\eta, k)}{\tilde{\delta}_{dm}(\eta, k)} \right|^2. \quad (5.16)$$

5.2 Perturbações nos dias de hoje

Nesta seção, veremos como relacionar as perturbações em tempos primordiais η_i (um instante logo após a inflação), com as perturbações hoje (η_0).

Podemos reescrever a equação (2.81) da seguinte forma

$$\frac{d}{d\eta} \left[\tilde{\Theta} e^{ik\mu\eta - \tau} \right] = S, \quad (5.17)$$

onde

$$S := e^{ik\mu\eta - \tau} \left[-\dot{\tilde{\Phi}} - ik\mu\tilde{\Psi} - \dot{\tau} \left(\tilde{\Theta}_0 + \mu\tilde{v}_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\tilde{\Theta}_2 \right) \right]. \quad (5.18)$$

Integrando de η_i até η_0 , lembrando que $\tau(\eta_0) = 0$, e $\tau(\eta_i) \rightarrow \infty$. Podemos chegar a

$$\tilde{\Theta}(\eta_0, k, \mu) = e^{-ik\mu\eta_0} \int_0^{\eta_0} d\eta S(\eta, k, \mu), \quad (5.19)$$

onde o limite inferior da integral pôde ser mudado, pois qualquer contribuição da integral entre 0 e η_i será desprezível devido ao fato de conter o termo da exponencial de τ .

Podemos reescrever a equação (5.19) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(\eta_0, k, \mu) = e^{-ik\mu\eta_0} \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} \left[-\dot{\tilde{\Phi}} - ik\tilde{\Psi} \frac{1}{ik} \frac{d}{d\eta} \right. \\ \left. - \dot{\tau} \left(\tilde{\Theta}_0 + \tilde{v}_b \frac{1}{ik} \frac{d}{d\eta} - \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_2 \mathcal{P}_2 \left(\frac{1}{ik} \frac{d}{d\eta} \right) \right) \right] e^{ik\mu\eta}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

pois

$$\frac{1}{ik} \frac{d}{d\eta} (e^{ik\mu\eta}) = \mu e^{ik\mu\eta}. \quad (5.21)$$

Para conseguir simplificar a dependência em μ (com o intuito de calcular os multipolos da equação), vamos transformar os termos que têm a derivada em relação a η , da seguinte forma: vamos realizar uma integração por partes para “tirar” a derivada de uma exponencial e “passar” para a outra exponencial. Vou mostrar explicitamente para um termo:

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau(\eta)} \frac{\tilde{v}_b \dot{\tau}}{ik} \frac{d}{d\eta} e^{ik\mu(\eta-\eta_0)} &= e^{-\tau(\eta)} \frac{\tilde{v}_b \dot{\tau}}{ik} e^{ik\mu(\eta-\eta_0)} \Big|_0^{\eta_0} \\
&+ \int_0^{\eta_0} d\eta e^{ik\mu(\eta-\eta_0)} \frac{d}{d\eta} e^{-\tau(\eta)} \frac{\tilde{v}_b \dot{\tau}}{ik} \\
&= + \int_0^{\eta_0} d\eta e^{ik\mu(\eta-\eta_0)} \frac{d}{d\eta} e^{-\tau(\eta)} \frac{\tilde{v}_b \dot{\tau}}{ik}, \quad (5.22)
\end{aligned}$$

o primeiro termo do lado direito da primeira linha, pode ser desprezado. No limite inferior de integração a primeira exponencial tende a zero; no limite superior, o termo não tende a zero, mas é uma contribuição que não depende de escalas angulares, ou seja será uma contribuição igual para todas as escalas no céu e não fará nenhuma diferença quando formos medir as flutuações na temperatura.

Feitas essas transformações, temos, agora, uma dependência em μ que está apenas na exponencial. Para tirarmos os multipolos da equação, basta utilizarmos a seguinte relação entre os polinômios de Legendre e as funções esféricas de Bessel:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) e^{i\mu z} = \frac{1}{(-i)^l} j_l(z). \quad (5.23)$$

Podemos, com isso, tirar os multipolos da equação (5.20). Basta multiplicar por $\mathcal{P}_l(\mu)$ e integrar em μ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_l(\eta_0, k) = \int_0^{\eta_0} d\eta j_l(k\eta_0 - k\eta) \left\{ e^{-\tau} \left[-\dot{\tilde{\Phi}} - \dot{\tau} \left(\tilde{\Theta}_0 + \frac{1}{4} \tilde{\Theta}_2 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{d}{d\eta} \left[e^{-\tau} \left(\tilde{\Psi} - \frac{i\tilde{v}_b \dot{\tau}}{k} \right) \right] - \frac{3}{4k^2} \frac{d^2}{d\eta^2} \left[e^{-\tau} \dot{\tau} \tilde{\Theta}_2 \right] \right\} , \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde usei a relação

$$j_l(z) = (-1)^l j_l(-z) . \quad (5.25)$$

A maioria dos termos têm a dependência de $-\dot{\tau}e^{-\tau}$. Definindo

$$g(\eta) := -\dot{\tau}e^{-\tau} , \quad (5.26)$$

que é conhecida como função de visibilidade, temos algumas facilidades. Esse termo é muito pequeno em tempos primordiais, pois nesse caso $e^{-\tau} \ll 1$ e também em tempos próximos aos dias de hoje, que têm $\dot{\tau} \rightarrow 0$. Essa função é como se fosse uma delta de Dirac, com o pico em torno da última superfície de espalhamento (ver figura 5.1).

A integral dessa função é igual a um (como pode ser facilmente verificado), e ela pode ser interpretada como sendo a probabilidade de um fóton ser espalhado pela última vez no instante η [1]. Podemos ver pela figura 5.1 que isso faz sentido, posto que a grande chance disso acontecer foi na época do desacoplamento.

A equação (5.24) em função de $g(\eta)$ fica

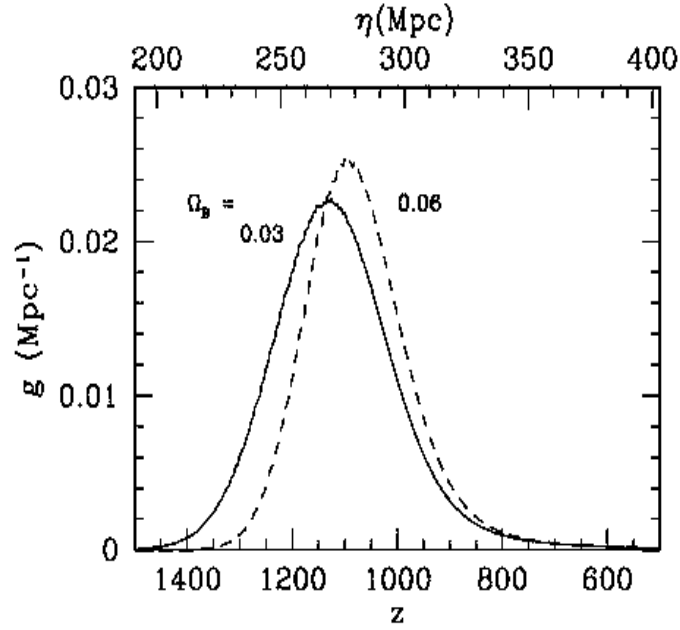


Figura 5.1: Função de visibilidade ($g(\eta)$), calculada para $h = 0.5$, com o pico em torno da época do desacoplamento, praticamente independente da quantidade de energia de bárions. Figura retirada de [1].

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_i(\eta_0, k) &= \int_0^{\eta_0} d\eta g(\eta) \left[\tilde{\Theta}_0(\eta, k) + \tilde{\Psi}(\eta, k) \right] j_l(k\eta_0 - k\eta) \\
&\quad - \int_0^{\eta_0} d\eta g(\eta) \frac{i\tilde{v}_b(\eta, k)}{k} \frac{d}{d\eta} j_l(k\eta_0 - k\eta) \\
&\quad + \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} \left[\dot{\tilde{\Psi}}(\eta, k) - \dot{\tilde{\Phi}}(\eta, k) \right] j_l(k\eta_0 - k\eta) . \quad (5.27)
\end{aligned}$$

No segundo termo, usarei a seguinte relação entre as funções esféricas de Bessel

$$\frac{dj_l}{dz}(z) = j_{l-1}(z) - \frac{l+1}{z}j_l(z), \quad (5.28)$$

e aí podemos integrar facilmente, usando $g(\eta)$ como se fosse uma delta de

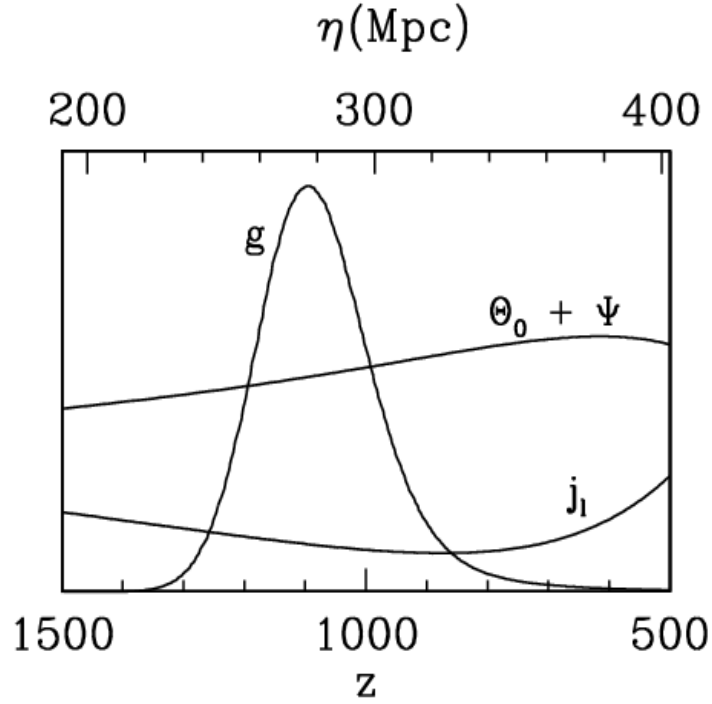


Figura 5.2: Aproximação de delta de Dirac para a função de visibilidade. Vemos, pelos valores típicos das perturbações e da função de Bessel, que a contribuição da integral no pico da função g será dominante comparada ao resto. Figura retirada de [1].

Dirac, visto também que as outras funções são monótonas (ver figura 5.2). Em tempos primordiais, temos $\tilde{v}_b = -3i\tilde{\Theta}_1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_l(\eta_0, k) &= \left[\tilde{\Theta}_0(\eta_*, k) + \tilde{\Psi}(\eta_*, k) \right] j_l(k\eta_0 - k\eta_*) \\
&+ 3\tilde{\Theta}_1(\eta_*, k) \left[j_{l-1}(k\eta_0 - k\eta_*) - \frac{(l+1)j_l(k\eta_0 - k\eta_*)}{k(\eta_0 - \eta_*)} \right] \\
&+ \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} \left[\dot{\tilde{\Psi}}(\eta, k) - \dot{\tilde{\Phi}}(\eta, k) \right] j_l(k\eta_0 - k\eta) . \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Essa equação é fundamental. Com ela podemos calcular as anisotropias hoje em função do potencial primordial $\tilde{\Psi}$, dos termos de monopolo e dipolo primordiais e de uma integral nos potenciais até os dias de hoje.

Os potenciais e os multipolos primordiais podem ser calculados nos estudos de condições iniciais advindas da inflação. Já a integral se anulará se estivermos considerando um modelo em que a densidade fracionária de energia total seja dominada pela matéria, ou seja, $\Omega_T \simeq \Omega_m$, e além disso, que o universo não tenha curvatura ($\Omega_T \simeq 1$), pois, nesse caso, pode-se mostrar que os potenciais são constantes [1]. Esse será o caso que analisaremos; mas hoje em dia quase todos os modelos consideram essa integral como sendo diferente de zero, e isso se deve basicamente a dois motivos: um é que nos momentos primordiais em que começamos a calcular essa integral, mesmo que já seja um momento calculado na época dominada pela matéria, ainda há que se considerar uma quantidade de energia da radiação que não é desprezível; essa contribuição é chamada de efeito Sachs-Wolfe integrado primordial; outra razão é que os modelos cosmológicos têm, em geral, uma componente chamada de energia escura (tipicamente constante cosmológica), e é ela que domina o universo atualmente; essa contribuição é chamada de efeito Sachs-Wolfe integrado tardio.

5.3 Grandes escalas: o platô de Sachs-Wolfe

As anisotropias da radiação cósmica de fundo podem ser divididas em três tipos (ver figura 5.3): grandes escalas (platô de Sachs-Wolfe), escalas inter-

mediárias (picos acústicos) e pequenas escalas (cauda de amortecimento).

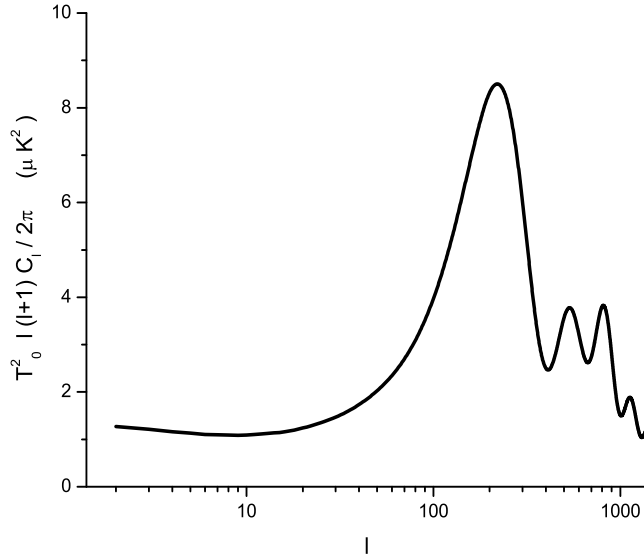


Figura 5.3: Gráfico das anisotropias da RCF. Podemos separá-lo em três regiões. Uma primeira, à esquerda, de grandes escalas, um platô (platô de Sachs-Wolfe); uma intermediária com grandes picos (região dos picos acústicos); e uma final de pequenas escalas, com amplitude decrescente, ainda oscilando (região do amortecimento). Note a escala logarítmica das abcissas, e o fato de o espectro ser calculado dimensionalmente (μK^2).

Em escalas muito grandes podemos, com certas aproximações, chegar, analiticamente, a resultados bem próximos aos observáveis. Considerando casos em que a perturbação é muito maior que o raio de Hubble, podemos desprezar o segundo termo da equação (2.84), pois é proporcional a k . O terceiro termo dessa equação irei desprezar também por considerar que Θ não depende de p , assim teremos:

$$\tilde{\Theta}_0(\eta, k) = -\tilde{\Phi}(\eta, k) + A(k) , \quad (5.30)$$

onde A não depende de η .

Pelas condições iniciais sabemos que $\tilde{\Theta}_0(\eta_i, k) = \tilde{\Phi}(\eta_i, k)/2$ então $A(k) = 3\tilde{\Phi}(\eta_i, k)/2$. Pode-se mostrar que, considerando o instante de desacoplamento muito tempo depois da igualdade matéria-radiação [1](pág.191),

$$\tilde{\Phi}(\eta_*, k) \simeq \frac{9}{10}\tilde{\Phi}(\eta_i, k) . \quad (5.31)$$

Assim, na aproximação de pequenos quadrupolos ($\tilde{\Phi} = -\tilde{\Psi}$),

$$\tilde{\Theta}_0(\eta_*, k) + \tilde{\Psi}(\eta_*, k) = \frac{\tilde{\Psi}(\eta_*, k)}{3} . \quad (5.32)$$

Vários modelos usam os potenciais depois da igualdade matéria-radiação como constantes, a menos da chamada função de crescimento (D) [1](pág.183). Assim, podemos relacionar o potencial no desacoplamento com o potencial hoje:

$$\tilde{\Theta}_0(\eta_*, k) + \tilde{\Psi}(\eta_*, k) = \frac{\tilde{\Psi}(\eta_0, k)}{3D(\eta_0)} . \quad (5.33)$$

Utilizarei aqui um resultado que relaciona o potencial Ψ com o contraste de densidade da matéria escura fria, da seguinte forma [1](pág.184):

$$\tilde{\Psi}(\eta_0, k) = -\frac{3\Omega_m H_0^2 \tilde{\delta}_{dm}(\eta_0)}{2k^2} , \quad (5.34)$$

onde foi usado $a(\eta_0) = 1$ e $\tilde{\Phi} = -\tilde{\Psi}$. Com isso conseguimos determinar o primeiro termo da equação (5.29). Podemos desprezar o terceiro termo da mesma equação por estarmos considerando potenciais constantes. O segundo também poderá ser desprezado porque, da equação (2.85) na qual podemos

desprezar os termos proporcionais a k , e o termo de colisão (que não contribui para escalas muito grandes)⁵, chegamos a:

$$\dot{\tilde{\Theta}}_1 = 0 . \quad (5.35)$$

Assim, vemos que o dipolo é constante em grandes escalas, e, como, das condições iniciais (4.2) e (4.5) (que será análoga para os bárions em se desprezando o termo de colisão),

$$\tilde{\Theta}_1 = \frac{k\tilde{\Psi}}{3\mathcal{H}} , \quad (5.36)$$

temos que ele é proporcional a k : ele poderá ser desprezado frente ao monopolo (4.22).

Assim, podemos substituir a equação (5.34) na (5.33), depois na (5.29) e finalmente na (5.16), chegando a:

$$C_l(\eta_0) = \frac{\Omega_m^2 H_0^4}{2\pi D_0^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} j_l^2(k\eta_0 - k\eta_*) P(\eta_0, k) . \quad (5.37)$$

Nas condições que estamos usando, ou seja, grandes escalas e tempos tardios ($\eta \simeq \eta_0$), pode-se mostrar que [1](pág.184)

$$P(\eta_0, k) = 2\pi^2 \tilde{\delta}_{dm|H}^2 \frac{k^n}{H_0^{n+3}} , \quad (5.38)$$

onde $\tilde{\delta}_{dm|H}$ é avaliado no momento de saída do raio de Hubble. Assim,

$$C_l(\eta_0) = \pi H_0^{1-n} \tilde{\delta}_{dm|H}^2 \left(\frac{\Omega_m}{D_0} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k^{2-n}} j_l^2(k\eta_0 - k\eta_*) . \quad (5.39)$$

⁵Lembrando de desconsiderar também a dependência de $\tilde{\Theta}$ em p .

Para resolver essa equação, vamos desprezar η_* , já que $\eta_* \ll \eta_0$. Agora basta fazer a substituição $k\eta_0 \rightarrow y$ e lembrar que

$$\int_0^\infty dy y^{n-2} j_l^2(y) = 2^{n-4} \pi \frac{\Gamma(l + n/2 - 1/2) \Gamma(3 - n)}{\Gamma(l + 5/2 - n/2) \Gamma^2(2 - n/2)}, \quad (5.40)$$

para chegar a

$$C_l = 2^{n-4} \pi^2 (\eta_0 H_0)^{1-n} \left(\frac{\Omega_m}{D_0} \right)^2 \tilde{\delta}_{dm|H}^2 \frac{\Gamma(l + n/2 - 1/2) \Gamma(3 - n)}{\Gamma(l + 5/2 - n/2) \Gamma^2(2 - n/2)}. \quad (5.41)$$

Utilizando o espectro de Harrison-Zel'dovich-Peebles, no qual $n = 1$, podemos, finalmente, obter

$$C_l = \frac{\pi}{2l(l+1)} \left(\frac{\Omega_m}{D_0} \right)^2 \tilde{\delta}_{dm|H}^2. \quad (5.42)$$

Se passarmos $l(l+1)$ para o outro lado da equação, teremos um fator que é constante, por isso costuma-se utilizar os gráficos das anisotropias da RCF em função de $l(l+1)C_l$ (ver figura 5.4).

Esse resultado, ao qual pudemos chegar analiticamente (com algumas aproximações) é bem próximo ao valor obtido numericamente e aos dados observacionais também, e como já foi citado, é conhecido como platô de Sachs-Wolfe (pelo trabalho [29]). Para as outras escalas (que não sejam grandes comprimentos de onda) só podemos chegar aos gráficos das anisotropias, com razoável precisão, numericamente (cf., contudo, [28]). Existem alguns códigos de domínio público que fazem isso, como: CMBFAST [44], CAMB [45], CMBEASY [46]. Sendo assim, o que podemos fazer, para ganhar alguma intuição sobre como é a dependência do gráfico de anisotropias em

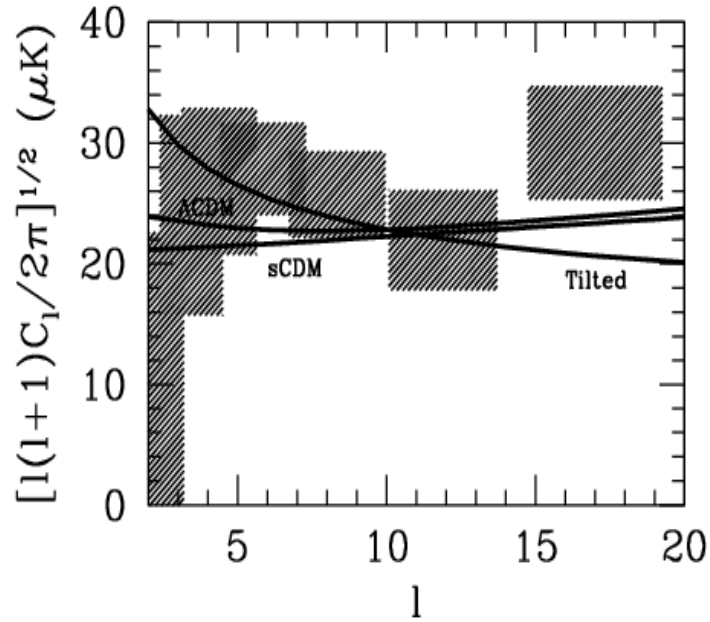


Figura 5.4: Platô de Sachs-Wolfe. As linhas acima são representantes de diferentes modelos cosmológicos, e as áreas mais escuras representam resultados do satélite COBE. Figura retirada de [1].

função de alguns parâmetros físicos, é olhar para as equações que derivamos para os próprias perturbações ($\tilde{\Theta}_0, \tilde{\Theta}_1$).

5.4 Escalas intermediárias: os picos acústicos

Para a região dos grandes picos, utilizaremos as equações (2.84), (2.85) e (2.86), mas, como está mostrado na equação (2.90), os multipolos superiores ao dipolo tendem a zero no limite do acoplamento forte ($\dot{\tau}^{-1} \rightarrow 0$). Assim, utilizaremos as equações dos multipolos, desprezando os $\tilde{\Theta}_l$ com $l > 1$.

Vamos utilizar também uma expressão para \tilde{v}_b que virá da equação (2.122).

$$\tilde{v}_b = \frac{3}{4\bar{\rho}_\gamma} i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_1 + \frac{3\bar{\rho}_b}{4\dot{\tau}\bar{\rho}_\gamma} \left(\dot{v}_b + \mathcal{H}\tilde{v}_b + ik\tilde{\Psi} \right) . \quad (5.43)$$

Na equação acima, o segundo termo do lado direito é muito menor que o primeiro, pois esta dividido por $\dot{\tau}$. Como em algumas equações que utilizarei a velocidade aparece multiplicada por $\dot{\tau}$, não vou desprezar diretamente esse termo. Vou expandir a velocidade em um termo de primeira ordem (já que a velocidade já é de primeira ordem), mais um termo muito pequeno comparado ao primeiro.

Para isso considerarei que, em primeira ordem, a velocidade é dada pela equação acima no limite em que $\dot{\tau} \rightarrow 0$, e em segunda ordem, basta substituir esse valor aproximado onde aparecer a velocidade no termo entre parênteses que está dividido por $\dot{\tau}$, ou seja:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_b = \frac{3}{4\bar{\rho}_\gamma} i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_1 + \frac{3\bar{\rho}_b}{4\dot{\tau}\bar{\rho}_\gamma} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(+ \frac{3}{4\bar{\rho}_\gamma} i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_1 \right) \\ + \frac{3\bar{\rho}_b}{4\dot{\tau}\bar{\rho}_\gamma} \mathcal{H} \frac{3}{4\bar{\rho}_\gamma} i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_1 + ik\tilde{\Psi} \frac{3\bar{\rho}_b}{4\dot{\tau}\bar{\rho}_\gamma} . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Aqui o primeiro termo do lado direito é a velocidade em primeira aproximação, e o resto é muito menor que esse termo. Desprezando a dependência das perturbações dos fótons em p , temos

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \tilde{\Theta}_1 = -4\bar{\rho}_\gamma \tilde{\Theta}_1 , \quad (5.45)$$

e, portanto,

$$\tilde{v}_b = -3i\tilde{\Theta}_1 + \frac{R}{\dot{\tau}} \left(-3i\dot{\tilde{\Theta}}_1 - 3i\mathcal{H}\tilde{\Theta}_1 + ik\tilde{\Psi} \right) , \quad (5.46)$$

onde

$$R := \frac{3\bar{\rho}_b}{4\bar{\rho}_\gamma} . \quad (5.47)$$

Substituindo essa expressão para a velocidade na equação (2.85), temos:

$$\dot{\tilde{\Theta}}_1 + \mathcal{H} \frac{R}{1+R} \tilde{\Theta}_1 - \frac{k}{3(1+R)} \tilde{\Theta}_0 = \frac{k\tilde{\Psi}}{3} . \quad (5.48)$$

Podemos utilizar a equação (2.84) e sua derivada para eliminar $\tilde{\Theta}_1$ da equação acima, e chegar a (esta equação foi derivada e bem estudada em [22] e [21])

$$\ddot{\tilde{\Theta}}_0 + \mathcal{H} \frac{R}{1+R} \dot{\tilde{\Theta}}_0 + k^2 c_s^2 \tilde{\Theta}_0 = F(k, \eta) , \quad (5.49)$$

onde

$$c_s := \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}} , \quad (5.50)$$

e

$$F(k, \eta) := -\frac{k^2}{3} \tilde{\Psi} - \mathcal{H} \frac{R}{1+R} \dot{\tilde{\Phi}} - \ddot{\tilde{\Phi}} . \quad (5.51)$$

O termo c_s é conhecido como velocidade de propagação de perturbações adiabáticas de pressão no fluido fóton-bárion. De fato,

$$\begin{aligned}
c_s^2 &:= \frac{\partial \bar{\mathcal{P}}}{\partial \bar{\rho}} = \frac{\dot{\bar{\mathcal{P}}}}{\dot{\bar{\rho}}} = \frac{(1/3)\dot{\bar{\rho}}_\gamma}{\dot{\bar{\rho}}_\gamma + \dot{\bar{\rho}}_b}, \\
&= \frac{(1/3)(-3H)(4/3\bar{\rho}_\gamma)}{-3H(4/3\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_b)}, \\
&= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + 3\bar{\rho}_b/4\bar{\rho}_\gamma}, \tag{5.52}
\end{aligned}$$

que coincide com a equação (5.50).

A equação (5.49) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{\dot{R}}{1+R} \frac{d}{d\eta} + k^2 c_s^2 \right) (\tilde{\Theta}_0 + \tilde{\Phi}) = \frac{k^2}{3} \left(\frac{1}{1+R} \tilde{\Phi} - \tilde{\Psi} \right). \tag{5.53}$$

Para resolvermos a equação (5.53) utilizaremos o método da função de Green. Essa equação tem a forma de uma equação de oscilador harmônico amortecido sujeito a forças externas. Podemos, com boa aproximação, desprezar o termo de amortecimento. Sabemos, pelo menos, que isso é válido para modos k menores que o raio de Hubble (em que $k\eta \gg 1$) ou quando $R \ll 1$.

A solução da equação será a solução homogênea mais a integral do lado direito da equação vezes a função de Green [9]. Como c_s é função de η , é interessante definir uma nova função para chegar à solução da equação:

$$r_s(\eta) := \int_0^\eta d\eta' c_s(\eta'), \tag{5.54}$$

que é chamada de horizonte acústico. Apesar dessa definição, irei considerar, como primeira aproximação, c_s aproximadamente constante em η , considerando R muito pequeno. Assim, a solução é

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_0 + \tilde{\Phi}(\eta) = C_1 S_1(\eta) + C_2 S_2(\eta) + \frac{k^2}{3} \int_0^\eta d\eta' [\tilde{\Phi}(\eta') - \tilde{\Psi}(\eta')] \\ \times \frac{S_1(\eta') S_2(\eta) - S_1(\eta) S_2(\eta')}{S_1(\eta') \dot{S}_2(\eta') - \dot{S}_1(\eta') S_2(\eta')}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde

$$S_1(k, \eta) := \text{sen}(kr_s(\eta)) ,$$

$$S_2(k, \eta) := \text{cos}(kr_s(\eta)) . \quad (5.56)$$

Podemos descobrir as constantes utilizando as condições iniciais que achamos. Nos momentos iniciais, o lado esquerdo da equação acima é constante, o que implica que $C_1 = 0$ e $C_2 = \tilde{\Theta}_0(0) + \tilde{\Phi}(0)$. Na equação acima já consideramos $R \ll 1$ (que significa pouca matéria em relação à radiação), com isso o denominador da integral acima fica $-k/\sqrt{3}$ e, por relações trigonométricas, chegamos a

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_0(\eta) + \tilde{\Phi}(\eta) = [\tilde{\Theta}_0(0) + \tilde{\Phi}(0)] \text{cos}(kr_s) \\ + \frac{k}{\sqrt{3}} \int_0^\eta d\eta' [\tilde{\Phi}(\eta') - \tilde{\Psi}(\eta')] \text{sen}(kr_s(\eta) - kr_s(\eta')) . \end{aligned} \quad (5.57)$$

Podemos utilizar a equação acima na equação (2.88) e chegar na solução para $\tilde{\Theta}_1$:

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_1(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{3}}[\tilde{\Theta}_0(0) + \tilde{\Psi}(0)]\text{sen}(kr_s) \\ &\quad - \frac{k}{\sqrt{3}} \int_0^\eta d\eta' [\Phi(\eta') - \Psi(\eta')] \cos(kr_s(\eta) - kr_s(\eta')) .\end{aligned}\quad (5.58)$$

5.4.1 Modelos simplificados

Para entendermos um pouco mais sobre as equações encontradas, vamos começar fazendo modelos simplificados e depois ver como eles são modificados quando formos desfazendo as simplificações, [18], [16], [15]. Vamos começar olhando para a equação (5.49), mas fazendo duas hipóteses: que a razão bárion-fóton é zero ($R = 0$), ou seja, que a densidade de energia de bárions é desprezível frente à dos fótons; e que os potenciais são constantes no tempo. Assim,

$$\ddot{\tilde{\Theta}}_0 + k^2 c_s^2 \tilde{\Theta}_0 = -\frac{k^2}{3} \tilde{\Psi} .\quad (5.59)$$

A solução para essa equação é:

$$\tilde{\Theta}_0(\eta) = -\tilde{\Psi} + A \cos(kc_s\eta) + B \text{sen}(kc_s\eta).\quad (5.60)$$

Sabemos, pela equação (5.29), que o que importará no cálculo das perturbações é a soma $\tilde{\Psi} + \tilde{\Theta}_0$; utilizando as condições iniciais (quando $\tilde{\Theta}_0$ é constante), a equação acima fica:

$$\tilde{\Theta}_0(\eta) + \tilde{\Psi} = (\tilde{\Theta}_0(0) + \tilde{\Psi}) \cos(kc_s\eta) ,\quad (5.61)$$

ou seja, gera uma perturbação oscilatória em cosseno. O outro termo que importa na equação (5.29) é o dipolo dos fótons. É claro que a equação (5.29) é muito mais complicada do que eu estou supondo para verificar como essas perturbações irão influenciar nos multipolos $\tilde{\Theta}_l$; mas é o jeito mais fácil para começar a entender um pouco sobre essas relações. Veja apêndice A para maiores detalhamentos.

Das equações (5.61) e (2.88), podemos achar que

$$\tilde{\Theta}_1 = c_s \left[\tilde{\Theta}_0(0) + \Psi \right] \text{sen}(kc_s\eta) , \quad (5.62)$$

ou seja, uma oscilação em seno, o que faz com que a soma com a contribuição da equação (5.61) seja contrária. Elas tendem a se cancelar.

Consideremos, agora, $R = \text{const} \neq 0$. Pode-se mostrar, seguindo os mesmos passos anteriores, que:

$$\tilde{\Theta}_0 + \tilde{\Psi} = -R\tilde{\Psi} + \left[\tilde{\Theta}_0(0) + (1 + 3R)\tilde{\Psi} \right] \text{cos}(kc_s\eta) , \quad (5.63)$$

$$\tilde{\Theta}_1 = c_s \left[\tilde{\Theta}_0(0) + (1 + R)\tilde{\Psi} \right] \text{sen}(kc_s\eta) . \quad (5.64)$$

Analisando essas equações e comparando com as outras em que $R = 0$, podemos notar que a primeira equação acima tem um novo eixo de simetria da oscilação (ver figura 5.5); ela oscila agora em torno de $-R\tilde{\Psi}$, e não de zero como antes. E também ocorreu que as amplitudes de oscilação das duas equações mudaram; na primeira equação aumentou mais que na segunda. Perceba que a segunda está dividida por c_s , que agora é maior que antes, pois $c_s = (\sqrt{3(1+R)})^{-1}$. Então, o termo do cosseno fica mais pronunciado que o do seno.

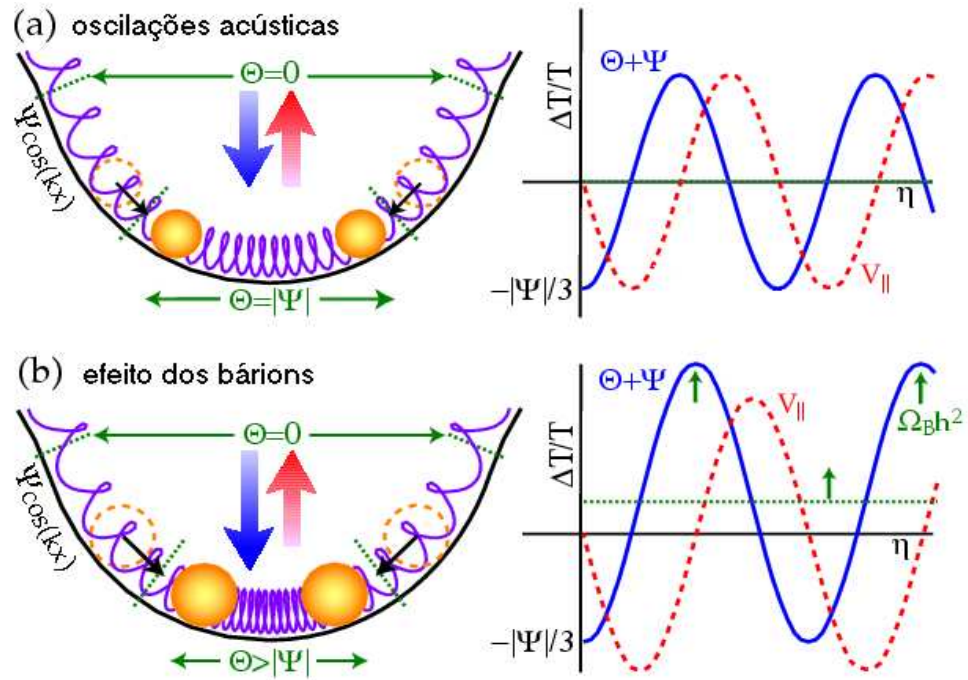


Figura 5.5: Oscilações acústicas. O painel de cima esboça as oscilações causadas pelas equações (5.61) e (5.62); do lado esquerdo aparece um esquema bem simplificado do que seria a razão física das perturbações: as bolinhas (pelo fato de estarem em um poço de potencial) representam o efeito gravitacional (atrativo para o fluido), e a mola representa a pressão do fluido. No painel de baixo, vemos o translado do eixo de oscilação da perturbação em cosseno, e seu aumento relativo de amplitude com respeito à perturbação em seno. Do lado esquerdo temos o que seria o equivalente ao aumento de R , que é o fato de as bolinhas ficarem mais pesadas, e assim causarem um aumento na amplitude de oscilação e o translado de seu ponto zero (eixo central de oscilação). Figura retirada de [18].

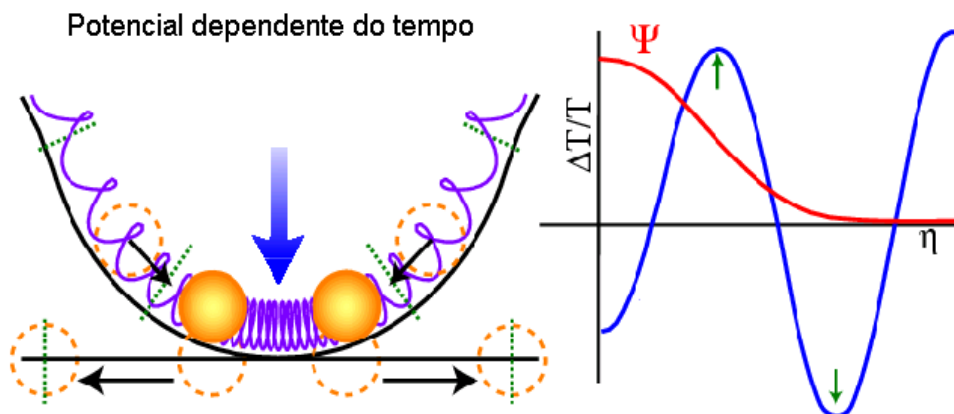


Figura 5.6: Potenciais variáveis. O gráfico do lado direito mostra como o potencial decrescente da época da radiação altera a amplitude dos picos. Do lado esquerdo podemos ver a analogia de como o potencial (poço) constante implica em uma distância entre as bolinhas (amplitude) maior. Figura retirada de [39].

Isso fará com que os picos fiquem maiores conforme aumentemos a razão bárion-fóton. E isso também nos mostra que os picos relativos aos termos do cosseno serão maiores que os do termo do seno, devido à mudança de ponto zero de oscilação do cosseno.

A forma mais geral que deve ser estudada é quando considerarmos R como dependente do tempo. Isso pode ser bem analisado utilizando a aproximação WKB [21] e [16], mas não será considerado aqui.

Quando vimos as condições iniciais, consideramos apenas os modos em que o potencial $\tilde{\Psi}$ é independente do tempo, mas se considerarmos que ele depende do tempo, o que teremos é algo parecido com a mudança de eixo de oscilação que apareceu quando consideramos R diferente de zero. O que ocorre é que temos, do lado direito da equação do oscilador harmônico, um termo que tem um valor em cada tempo diferente, ou seja, para cada η ele mudará o eixo de oscilação (ver figura 5.6).

5.5 Pequenas escalas: a cauda de amortecimento

O amortecimento ocorre em pequenas escalas. Apesar de na época do desacoplamento o fluido estar fortemente acoplado, existe uma distância (por menor que seja) na qual o fóton consegue viajar “livremente” no fluido, conhecida como livre caminho médio. Como o desacoplamento não é instantâneo, o fluido fica aos poucos mais rarefeito, e com isso o livre caminho médio dos fótons aumenta bastante, tornando homogêneas regiões que, no começo do desacoplamento, eram não homogêneas. Esse processo é conhecido como amortecimento de Silk (pelo trabalho [23]).

O amortecimento tem uma contribuição importante do termo de quadrupolo da flutuação da temperatura dos fótons. O modo pelo qual isso pode ser justificado é fazer os cálculos das anisotropias da RCF considerando o quadrupolo desprezível, e fazer os cálculos considerando-o como importante; e mostra-se que a região de amortecimento é bem afetada por essa perturbação.

Vamos utilizar as equações (2.84), (2.85) e (2.86), considerando que os $\tilde{\Theta}_l$ não dependem de p , e que são muito próximos de zero para $l > 2$. Como o amortecimento se dá em pequenas escalas, vamos utilizar a aproximação da seção 4.2, que mostra que para pequenas escalas as perturbações nos potenciais podem ser desprezadas frente às outras perturbações. Assim as equações (2.84), (2.85) e (2.86) ficam

$$\dot{\tilde{\Theta}}_0 + k\tilde{\Theta}_1 = 0 , \quad (5.65)$$

$$\dot{\tilde{\Theta}}_1 + \frac{2k\tilde{\Theta}_2}{3} - \frac{k\tilde{\Theta}_0}{3} = \dot{\tau}\tilde{\Theta}_1 - \frac{i\dot{\tau}\tilde{v}_b}{3} , \quad (5.66)$$

$$\dot{\tilde{\Theta}}_2 - 2\frac{k\tilde{\Theta}_1}{5} = \frac{9\dot{\tau}\tilde{\Theta}_2}{10} . \quad (5.67)$$

Assumindo que todas as perturbações tenham uma dependência temporal do tipo $e^{i \int \omega(\eta) d\eta}$, podemos desprezar $\mathcal{H}\tilde{v}_b$ frente a $\dot{\tilde{v}}_b$, pois:

$$\dot{\tilde{v}}_b = i\omega\tilde{v}_b \gg \mathcal{H}\tilde{v}_b. \quad (5.68)$$

A última afirmação é válida pois estamos em pequenas escalas, e nesse caso, a frequência (ω) é muito grande. Assim, podemos reescrever a equação (5.43) da seguinte forma:

$$3i\tilde{\Theta}_1 + \tilde{v}_b = \frac{R}{\dot{\tau}} \dot{\tilde{v}}_b, \quad (5.69)$$

que nos leva até segunda ordem de aproximação a

$$\tilde{v}_b = -3i\tilde{\Theta}_1 \left[1 + \frac{i\omega R}{\dot{\tau}} - \left(\frac{\omega R}{\dot{\tau}} \right)^2 \right]. \quad (5.70)$$

A equação (5.67) pode ser aproximada, já que $\dot{\tilde{\Theta}}_2 \ll \dot{\tau}\tilde{\Theta}_2$. Utilizando a dependência temporal como citada anteriormente, podemos substituir as equações (5.70), (5.67) e (5.65) na equação (5.66), e chegar a

$$\omega^2(1+R) - \frac{k^2}{3} + \frac{i\omega}{\dot{\tau}} \left[\omega^2 R^2 + \frac{8k^2}{27} \right] = 0. \quad (5.71)$$

Podemos chegar a uma equação linear para a frequência se considerarmos que a parte não perturbada equivale ao limite $\dot{\tau} \rightarrow \infty$, ou seja, $\bar{\omega} = kc_s$. Fazendo $\omega = \bar{\omega}(1 + \delta\omega)$ na equação acima, podemos chegar a:

$$\delta\omega = -\frac{ik^2}{2(1+R)\dot{\tau}} \left[c_s^2 R^2 + \frac{8}{27} \right]. \quad (5.72)$$

Assim, podemos reescrever a dependência temporal das perturbações e ver que existe um termo de amortecimento

$$\tilde{\Theta}_0, \tilde{\Theta}_1 \sim e^{ik \int d\eta c_s} e^{-\frac{k^2}{k_D^2}}, \quad (5.73)$$

onde

$$\frac{1}{k_D^2(\eta)} := \int_0^\eta \frac{d\eta'}{6(1+R)n_e\sigma_T a(\eta')} \left[\frac{R^2}{1+R} + \frac{8}{9} \right]. \quad (5.74)$$

Isso significa que em escalas muito pequenas as perturbações são amortecidas por um fator exponencial (ver figura 5.7).

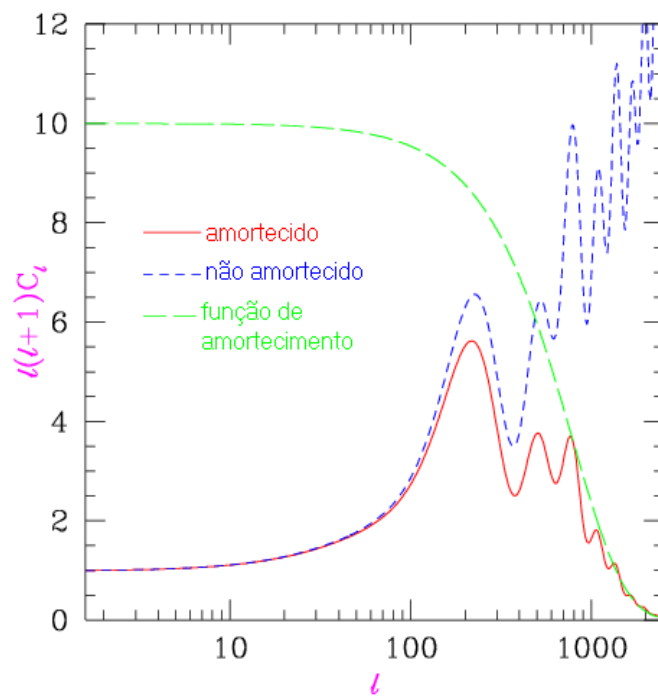


Figura 5.7: Influência do amortecimento. Vemos: a função de amortecimento (em verde); como fica o espectro de potência sem ser incluído o termo de amortecimento (em azul); e como fica o espectro com o termo de amortecimento (em vermelho). Figura retirada de [39].

Capítulo 6

Conclusão

Este trabalho é o que podemos chamar de primeira visão das anisotropias da RCF [37], derivamos o que seria o “corpo” dessa teoria, no “gauge” newtoniano conforme, com tri-curvatura igual a zero e apenas para perturbações escalares. A referência de base escolhida para esse estudo foi o livro “Modern Cosmology” de S. Dodelson [1]. Acredito que o entendimento deste texto já deixe o leitor com capacidade de perceber pontos não muito bem explicados e saber como avançar nesses estudos.

Listaremos aqui alguns desenvolvimentos detalhados explicitamente, nessa tese, para os quais julgamos importante chamar atenção.

Nas seções 2.2 e 2.3 derivamos as equações sem restringir para um tipo de componente. Chegamos, até onde foi conveniente, em equações genéricas, como por exemplo o termo de Liouville.

Sempre que possível utilizei equações para lúxons, sem separar em fótons e neutrinos; e para matéria não relativística, sem separar em bárions e matéria escura fria.

Fizemos os cálculos do termo de colisão, considerando a matriz de espalhamento completa¹, com dependência angular.

¹Completa com as aproximações que consideramos, é óbvio que em outros regimes de validade essa matriz é muito mais complexa [21].

Consideramos, até fechar o conjunto de equações de Einstein-Boltzmann, que Θ é função explícita do módulo, p , do tri-momento.

Explicamos, com refinamento, os termos de colisão que aparecem nas equações de Boltzmann para bárions.

Detalhamos a forma de relacionar a função de correlação que pode ser medida com àquela que resulta do estudo do sistema de equações.

Na seção de modelos simplificados, demos alguns argumentos intuitivos sobre o porquê da forma do gráfico das anisotropias, seguindo [18], [15], [16]. Em um apêndice, fizemos uma exploração da influência das funções de Bessel no processo de passar das flutuações de temperatura na época do desacoplamento para o gráfico do espectro de potência hoje.

Vários itens que desprezamos podem ser levados em consideração para chegar a resultados mais precisos, assim como foi feito em vários trabalhos. Um que deve ser considerado, por exemplo, é a polarização dos fótons [25], [21]; deve-se considerar também perturbações dos tipos vetoriais e tensoriais, como, por exemplo, perturbações devido a ondas gravitacionais, para abranger todo tipo de perturbação. Em vez de considerar apenas termos de primeira ordem, pode-se expandir o estudo até ordens superiores.

Outras partes que também devem ser estendidas, para melhor entendimento dessa teoria, são, por exemplo, considerar tri-curvatura (k) diferente de zero. As condições iniciais aqui utilizadas (do tipo adiabática) são apenas um tipo de perturbações, deve-se estudar também outros tipos de perturbações e ver como isso afeta os resultados do espectro de potência [35], [34]. Essa área de condições iniciais é realmente muito rica, até hoje existem muitos artigos sendo publicados com novos estudos desse tipo.

Outros passos muito importantes a serem dados também, são, o estudo de algoritmos que resolvem as equações calculadas, e o tratamento estatístico de dados obtidos observacionalmente, para comparação com os resultados teóricos.

Essas melhorias citadas acima, não afetam muito os resultados em tratamentos mais grosseiros. Mas, com o contínuo aumento na precisão dos ins-

trumentos de observação, como foi com o WMAP, e espera-se ocorrer com o PLANCK, será possível observar, nos dados obtidos, resultados que dependam desses refinamentos.

Apêndice A

Funções de Bessel

As funções de Bessel têm um pico bem próximo ao argumento equivalente ao grau da função: por exemplo, a função $j_{30}(x)$ tem um pico em $x \simeq 30$ (ver figura A.1). Outra propriedade interessante que podemos utilizar no entendimento da equação (5.29) é que a função de Bessel e sua derivada, são defasadas ¹ (ver figura A.2). Com essa propriedade, no momento em que formos fazer a função de correlação dos $\tilde{\Theta}_l$, não aparecerá termo cruzado, ou seja:

$$|\tilde{\Theta}_l|^2 = |(\tilde{\Theta}_0 + \tilde{\Psi})j_l|^2 + 9|\tilde{\Theta}_1 \frac{dj_l}{dx}|^2, \quad (\text{A.1})$$

onde desprezei a integral de Sachs-Wolfe.

Para o cálculo do espectro de potência das anisotropias, então, podemos perceber que, para um determinado l , o termo da função de Bessel que dominará será o equivalente a $l \sim k\eta$, assim quando vemos o gráfico de anisotropias sendo feito em C_l por l , sabemos que a contribuição de cada l é feita multiplicando as perturbações dos multipolos e do potencial com $k\eta$ correspondente a esse l . Sendo assim, o que se traduzirá nesse gráfico final será aproximadamente o que seria o gráfico de $|\tilde{\Theta}_0 + \tilde{\Psi}|^2 + 9|\tilde{\Theta}_1|^2$, sendo que cada termo está reescalonado pela função de Bessel correspondente. Como

¹O que aparece na equação (5.29) é uma função de Bessel multiplicando o primeiro termo e a derivada dessa função de Bessel multiplicando o segundo termo, lembre que utilizamos, para chegar a essa equação, a relação (5.28)

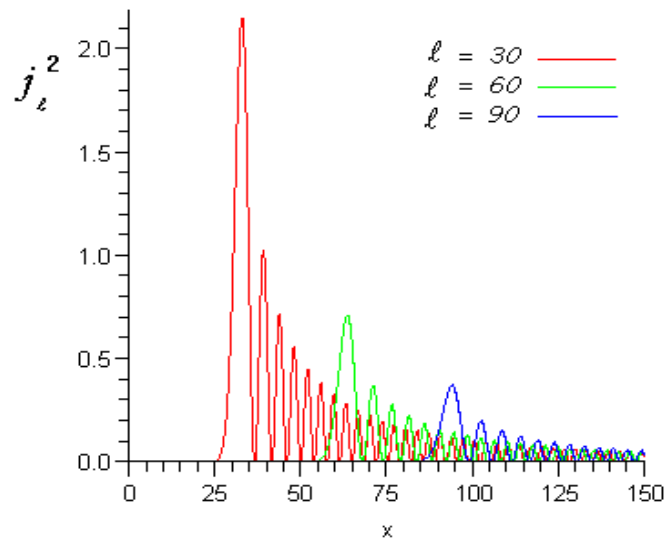


Figura A.1: Funções de Bessel. As funções de Bessel têm seu valor máximo quando o argumento é bem próximo ao grau da função.

as funções de Bessel têm aproximadamente a mesma ordem em suas amplitudes, teremos no gráfico de C_l por l algo similar ao que é visto para as perturbações nos instantes primordiais como visto na seção 5.4.1.

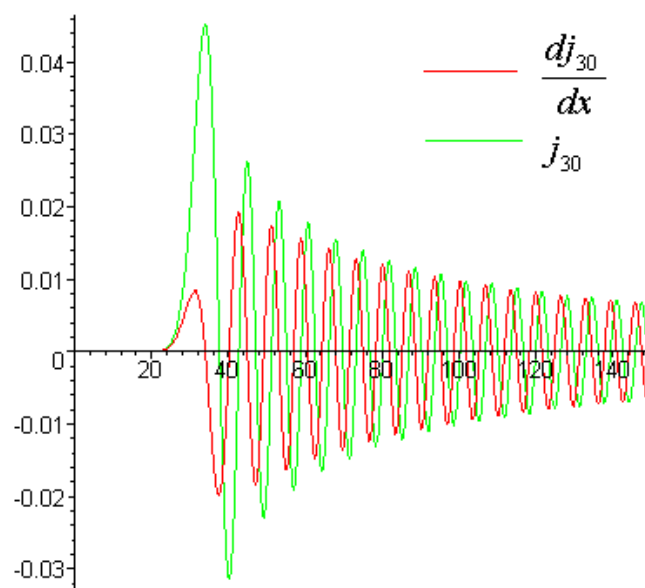


Figura A.2: Função de Bessel e sua derivada. Vemos que essas funções estão fora de fase e têm basicamente amplitudes de mesma ordem de grandeza.

Bibliografia

- [1] S. Dodelson, *Modern cosmology*. Academic Press, San Diego, USA (2003).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, USA (1972).
- [3] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe*, Cambridge Universe, Cambridge, USA (1993).
- [4] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, 3rd. ed. John Wiley & Sons, Massachussets, USA (1998).
- [5] G. Börner, *Cosmology. The origin and evolution of cosmic structure*. Wiley, New York, USA (1996)
- [6] E. W. Kolb & M. S. Turner *The early universe*, Addison-Wesley Publishing Company, California, USA (1990).
- [7] J. V. Narlikar *Introduction to cosmology*, 2nd. ed. Cambridge University Press, New York, USA (1983).
- [8] H. Kodama & M. Sasaki, Cosmological perturbation theory, *Progress of Theoretical Physics Supplement* **78**, 01 (1984).
- [9] E. Butkov, *Física matemática*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, Brasil (1983).
- [10] K. Huang, *Statistical mechanics*, 2nd. ed. John Wiley & Sons, New York, USA (1966).
- [11] D. A. McQuarrie, *Statistical mechanics*. HarperCollins, New York, USA (1973).

- [12] F. H. Shu, *The physics of astrophysics. Vol. II Gas Dynamics*, University Science Books, California, USA (1992).
- [13] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen & Ch. G. van Weert, *Relativistic kinetic theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Holanda (1980).
- [14] J. Bernstein, *Kinetic theory in the expanding universe*. Cambridge University Press, Cambridge, USA (1988).
- [15] E. F. Bunn, “Calculation of cosmic background radiation anisotropies and implications”, in C. H. Lineweaver *et alii* (eds.), *The Cosmic Microwave Background*, Kluwer Academic Press, 135 (1997), astro-ph/9607088.
- [16] M. Tegmark, “Doppler peaks and all that: CMB anisotropies and what they can tell us”, in S. Bonometto, J.R. Primack and A. Provenzale Oxford, *Dark Matter in the Universe*, Proceedings of the International School of Physics Course CXXXII, 379 (1996), astro-ph/9511148.
- [17] J. Ehlers, “General relativity and kinetic theory”, in R. K. Sachs, *Relatività generale e Cosmologia*, Enrico Fermi international school of physics, XLLVII course, Academic Press, New York, USA, (1971).
- [18] W. Hu, “Concepts in CMB anisotropy formation”, in E. Martinez-Gonzalez, J.L. Sanz, Springer-Verlag, *The Universe at High-z*, 207 (1996), astro-ph/9511130.
- [19] J. G. Bartlett, “The standard cosmological model and CMB anisotropies”, *New Astronomy Reviews* **43**, 83 (1999), astro-ph/9903260.
- [20] R. Durrer, “The theory of CMB anisotropies”, *Journal of Physical Studies* **5**, 177 (2001), astro-ph/0109522.
- [21] W. Hu, “Wandering in the background: a cosmic microwave background explorer”. Tese de doutorado, UC Berkeley, Berkeley, USA (1995), astro-ph/9508126.
- [22] W. Hu & N. Sugiyama, “Anisotropies in the cosmic microwave background: an analytic approach”, *Astrophysical Journal* **444**, 489 (1995), astro-ph/9407093.

- [23] J. Silk, “Cosmic Black-Body Radiation and Galaxy Formation”, *Astrophysical Journal* **151**, 459 (1968).
- [24] I. Waga, “Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o século XXI”, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 1 (2005).
- [25] J. Väliiviita, “An analytic approach to cosmic microwave background radiation anisotropies”. Tese de mestrado, Universidade de Helsinki, Helsinki, Finlândia (1999).
- [26] S. Weinberg, “Must cosmological perturbations remain non-adiabatic after multi-field inflation?”, *Physical Review D* **70**, (2004), astro-ph/0405397.
- [27] E. W. Kolb “Inflation in the post modern era”, *Astrofundamental Physics*, Proceedings of the Erice School, astro-ph/9612138.
- [28] V. Mukhanov “CMB-slow, or how to estimate cosmological parameters by hand”, *International Journal of Theoretical Physics* **43**, 623 (2004), astro-ph/0303072.
- [29] R. K. Sachs & A. M. Wolfe “Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background”, *Astrophysical Journal* **147**, 73 (1967).
- [30] P. J. E. Peebles & J. T. Yu “Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe”, *Astrophysical Journal* **162**, 815 (1970).
- [31] G. F. R. Ellis, J. Hwang & M. Bruni “Covariant and gauge-independent perfect-fluid Robertson-Walker perturbations”, *Physical Review D* **40**, 1819 (1989).
- [32] J. M. Bardeen “Gauge-invariant cosmological perturbations”, *Physical Review D* **22**, 1882 (1980).
- [33] C.-P. Ma & E. Bertschinger “Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges”, *Astrophysical Journal* **455**, 7 (1995).
- [34] M. Bucher & K. Moodley & N. Turok, “Primordial isocurvature perturbations: testing the adiabaticity of the CMB anisotropy”, in Ruth

- Durrer, Juan Garcia-Bellido, and Mikhail Shaposhnikov, *Cosmology and Particle Physics*, AIP Conference Proceedings **555**, 313 (2001), astro-ph/0011025.
- [35] K. A. Malik & D. Wands, “Adiabatic and entropy perturbations with interacting fluids and fields”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **02**, 007 (2005), astro-ph/0411703.
- [36] S. Hannestad, “On the coupling between different species during recombination”, *New Astronomy* **6**, 17 (2001), astro-ph/0008452.
- [37] M. White & J. D. Cohn, “The theory of anisotropies in the cosmic microwave background”, *American Journal of Physics* **70**, 106 (2002), astro-ph/0203120.
- [38] N. Padmanabhan *et alii*, “The clustering of luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey imaging data”, astro-ph/0203120.
- [39] W. Hu, <http://background.uchicago.edu/~whu/> .
- [40] An atlas of the universe, <http://www.anzwers.org/free/universe/>
- [41] CfA Redshift Survey, <http://www.cfa.harvard.edu/huchra/zcat/>.
- [42] 2dF Galaxy redshift Survey, <http://mcp1.anu.edu.au/TDFgg/>.
- [43] Sloan Digital Sky Survey, <http://www.sdss.org/>.
- [44] CMBFAST, <http://cmbfast.org/> .
- [45] CAMB, <http://camb.info/> .
- [46] CMBEASY, <http://www.cmbeasy.org/> .