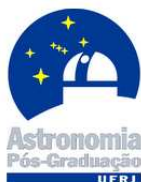


COSMOLOGIA DE LEMAÎTRE-TOLMAN: LENTEAMENTO  
GRAVITACIONAL FRACO E OUTRAS APLICAÇÕES

Nilo Sylvio Costa Serpa



Dissertação submetida ao Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Observatório do Valongo  
Pós-Graduação em  
Astronomia

atendendo aos requisitos acadêmicos formais  
para obtenção do grau de  
*Magister in Scientia, MSc*

Área de Concentração: Cosmologia Astrofísica  
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Byrro Ribeiro

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro, RJ  
Setembro de 2009



**Serpa, Nilo**

*Cosmologia de Lemaître-Tolman: Lenteamento Gravitacional Fraco e Outras Aplicações.*

Nilo Serpa.

Rio de Janeiro, 2009.

iii, 120f.

Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório do Valongo.  
Curso de Pós-Graduação em Astronomia.

1. relatividade geral. 2. cosmologia de Lemaître-Tolman. 3. distância por diâmetro angular.
4. junção. 5. desvio para o vermelho. 6. efeito Sunyaev-Zel'dovich. 7. supernova Ia.
8. lenteamento gravitacional fraco. 9. índice de refração. 10. fonte de convergência.

# Conteúdo

Agradecimentos . . . . .	1
Abstract . . . . .	3
Resumo . . . . .	4
Prólogo . . . . .	5
Convenções . . . . .	7
Introdução . . . . .	8
<b>1 Cosmologia Inomogênea de Lemaître-Tolman</b>	<b>14</b>
1.1 A abordagem contemporânea da cosmologia LT . . . . .	18
1.2 A idéia do <i>queijo suíço</i> . . . . .	24
1.3 A distância por diâmetro angular . . . . .	28
1.4 Supernovas Ia numa perspectiva LT . . . . .	32
1 Sem constante cosmológica . . . . .	32
2 Correção K . . . . .	42
1.5 A métrica LT em 5D . . . . .	45
1.6 Conhecimento objetivo em cosmologia . . . . .	51
<b>2 Teoria Fundamental das Lentes Gravitacionais</b>	<b>54</b>
2.1 Intróito . . . . .	56
2.2 Lenteamento . . . . .	59
2.3 Magnificação, curvas críticas e cáusticas . . . . .	61
2.4 O Grupo Local . . . . .	65
2.5 Lenteamento no Grupo Local . . . . .	69
<b>3 Cosmologia Lemaître-Tolman das Lentes Gravitacionais Fracas</b>	<b>74</b>
3.1 O índice de refração na métrica LT . . . . .	77
3.2 Aplicação à cosmologia . . . . .	85
3.3 Discussão . . . . .	85

Conclusão . . . . .	93
Supernovas Ia ( <i>Riess tables</i> , 1998) . . . . .	96
Glossário . . . . .	99

*The concept of cosmological homogeneity started out as a reasonable guess about the universe, and as a mathematical device for making Einstein's equations more tractable. A few decades later, the physics/astronomy community treats cosmological homogeneity as an empirical fact. Since cosmology is recognized as a full-fledged science, one would expect that this metamorphosis from assumption to apparent fact would be strongly supported by several types of empirical evidence. The curious thing, however, is that such evidence does not exist.*

*Robert L. Oldershaw*

*Quando buscamos métodos matemáticos rigorosos com demasiado empenho, fixamos nossa atenção naqueles pontos que não são importantes do ponto de vista físico e, com isso, nos afastamos da situação experimental. Quando tentamos resolver um problema com uma matemática mais grosseira, como fiz na maioria das vezes, somos sempre obrigados a pensar na situação experimental. E, seja qual for a fórmula que criamos, tentamos compará-la com a realidade; com isso, de algum modo, nos aproximamos mais dessa realidade do que ao buscar métodos rigorosos.*

*Werner Heisenberg*

## Agradecimentos

Esse trabalho tem uma longa história. Começou há muito tempo, quando aos quatorze anos ganhei um telescópio dos meus falecidos pais, Sylvio Serpa Costa e Nice Chaves Costa. Por isso, antes de tudo, sou muito grato a eles pelo amplo incentivo que me deram desde cedo. Agradeço muito ao Prof. José Abdalla Helayël-Neto, CBPF, meu primeiro mentor em Teoria Quântica de Campos e em matéria escura, pelo ânimo que sempre me deu para prosseguir na física com idéias próprias e também pela contribuição na seção sobre métrica Lemaître-Tolman em cinco dimensões; devo a ele uma ótima monografia sobre supergravidade. Agradeço ao corpo docente do Valongo, bem como ao corpo administrativo do mesmo, especialmente à Prof. Heloisa Boechat-Robert e ao Prof. Helio Jacques Rocha Pinto pelo apoio incondicional e pela simpatia desde os dias de ingresso na pós-graduação. Agradeço ao Prof. Martin Makler, CBPF, pelo excelente curso sobre lentes gravitacionais e pela atenção que dispensou à minha monografia de conclusão de curso, a qual embasou boa parte da dissertação. Agradeço também ao Prof. Ioav Waga pela forma gentil como me recebeu no Instituto de Física da UFRJ, me encaminhando ao Prof. Marcelo Byrro, meu orientador, a quem dirijo aqui minha gratidão e admiração pela maneira extremamente profissional com que conduziu a orientação e pela abertura que me concedeu para que eu pudesse propor meus próprios problemas. Muito agradeço ao Prof. Thomas Schramm, Universität Hamburg, pela amável parceria na discussão e elaboração das simulações sobre lenteamento gravitacional. Agradeço de coração aos meus colegas de mestrado, Alberto, Álvaro, Eduardo, Felipe, Gustavo, Marcelo e Molina pela paciência que tiveram em me ouvir nos seminários e pela amizade que hoje faz parte da minha vida. Agradeço ao Prof. Antônio Fernandes da Fonseca Teixeira, CBPF, de quem obtive boa parte dos meus conhecimentos em topologia, pelas observações acerca da seção sobre métrica Lemaître-Tolman em cinco dimensões. Agradeço ao meu grande amigo Camilo Tello, INPE, por toda a ajuda que me prestou e pelo interesse em futuros trabalhos cooperativos baseados em radiação cósmica de fundo. Agradeço ao meu Coordenador Geral de Informática no Ministério do Trabalho e Emprego - DF, Sérgio Alves Cotia, amigo de muitos anos, pela oportunidade de trabalho e pelo apoio logístico (recursos operacionais, facilidade de transporte e flexibilidade de jornada) que me deu, sem o qual não seria possível realizar a presente dissertação. Agradeço à Empresa Politec, pela qual sirvo ao Ministério do Trabalho e Emprego, por

ter valorizado meu currículo sobretudo no que se refere à pós-graduação em Astronomia, me concedendo o cargo de Gerente de Desenvolvimento de Sistemas Sr. Agradeço aos amigos de Brasília, catedráticos e pós-graduandos em ciências exatas, pelos debates filosóficos acalorados e pelas sugestões de pesquisas futuras. Agradeço a Bruna Brasil pelo convívio que muito me inspirou para a construção do terceiro capítulo. Finalmente, agradeço a minha família pelo encorajamento, suporte afetivo e compreensão durante os dois últimos anos ao longo dos quais os privei freqüentemente da minha presença.



## Abstract

*In the present work I carried out an objective review of the Lemaître-Tolman cosmology, emphasizing its main theoretical and observational features and performing a substantial analysis of its employment in the modeling of type Ia supernovae data. The results showed that it is clearly impossible, up to this moment, to reject the Lemaître-Tolman cosmology based on current data from type Ia supernovae. It was considered a formal determination of the refractive index ( $\bar{n}$ ) of a given weak gravitational lens featured as a faint perturbation on the Lemaître-Tolman metric. I formally deduced the quantity  $\bar{n}$  from this metric deformed by the lens. Yet, the refractive index  $\bar{n}$  was connected to the observation through the so-called source of convergence associated to the space-time geometry. The proposed expression for  $\bar{n}$  related explicitly theory and observation, providing an additional criterion for further tests on inhomogeneity. For the sake of clarity of the main subject, that is, the weak gravitational lensing from the point of view of the Lemaître-Tolman cosmology, I did a previous basic explanation of the fundamental theory of gravitational lens, including a discussion about the lensing in the Milk-Way vicinity.*

**Key words:** *type Ia supernovae, refractive index, Lemaître-Tolman cosmology, weak gravitational lensing.*





## Resumo

Nessa dissertação realizei uma revisão objetiva da cosmologia Lemaître-Tolman, dando ênfase aos seus principais aspectos teórico-observacionais e trazendo à tona uma análise substancial de seu emprego na modelagem de dados de supernovas tipo Ia. Os resultados de tal análise mostraram nitidamente a impossibilidade de se rejeitar *a priori* a cosmologia Lemaître-Tolman, tomando-se por base os dados de supernovas Ia. Como cerne original do escopo geral pretendido, desenvolvi o formalismo necessário à determinação do índice de refração ( $\bar{n}$ ) para eventos de lenteamento gravitacional fraco descritos na cosmologia Lemaître-Tolman em questão. Representei a ação da lente fraca por uma tênue perturbação na métrica. O índice de refração  $\bar{n}$  foi deduzido da métrica deformada pela lente e conectado à observação por intermédio da chamada fonte de convergência associada à geometria do espaço-tempo. A expressão proposta para  $\bar{n}$  relacionou de forma explícita teoria e observação, provendo um critério adicional para testes futuros de inhomogeneidade. Para ambientação do leitor ao tema principal do lenteamento gravitacional fraco, fiz previamente uma explanação da teoria elementar das lentes gravitacionais, incluindo uma discussão sobre lenteamento na vizinhança da Via-Láctea.

**Palavras-chave:** supernovas Ia, índice de refração, cosmologia Lemaître-Tolman, lenteamento gravitacional fraco.



## Prólogo

Durante toda a minha trajetória de estudo em física tenho procurado perseverar na busca de um entendimento crítico de conceitos e métodos, tentando mostrar que o trabalho científico é permeado por uma constante reflexão filosófica, fato que caracteriza uma diuturna inquietação do intelecto pesquisador. Não é fácil conviver com tal inquietação, pois é cada vez mais certo que quase nada, a rigor, será conclusivo ao longo de uma vida devotada à pesquisa. No entanto, por paradoxal que se afigure, também nada poderia ser mais confortante do que compreender que essa é a própria essência da ciência física contemporânea; precisa, porém, na maioria das vezes, inconclusiva. É como escreveu Andrei Linde [35]: *“The typical lifetime of a new trend in high-energy physics and cosmology nowadays is about 5 to 10 years. If it survived for a longer time, the chances are that it will be with us for quite a while”*.

Disse-me um eminente professor germânico: “Em geral, no meio acadêmico, não se aprende mecânica quântica. O que se faz é automatizar o emprego de uma metodologia universal. Se quisermos compreendê-la debilmente temos que buscar reforços na filosofia da ciência. Nessa linha remeto meus alunos às obras filosóficas de Mario Bunge, Karl Popper e Werner Heisenberg”. O motivo pelo qual se verifica com frequência certa aversão à idéia de existirem questões filosóficas fundamentais nas bases da cosmologia e da física de modo geral ainda me é desconhecido. A consideração de dimensões extras em determinada teoria, por exemplo, pode parecer um mero problema técnico, mas há muito sobre o que refletir sobre o assunto. Introduzir dimensões extras na estrutura de uma teoria física dá a impressão, a princípio, de uma arbitrariedade, mormente pelo fato de que tais dimensões são escondidas, isto é, escapam a qualquer esforço intelectual-observacional. O aparato matemático extremamente complexo envolvido em teorias como as de supergravidade e de supercordas, com suas dez ou onze dimensões, deixa muitos físicos descrentes quanto a factibilidade física de tais construções. Como discípulos de Dirac, ainda acreditamos que as leis da natureza devem ser descritas por uma matemática tão simples quanto elegante. Dessa forma, de um ponto de vista epistemológico, explicar por que existem dimensões escondidas não observáveis diretamente soa, na maioria das vezes, um tanto artificial e *ad hoc*. Pessoalmente, trabalhei num modelo de supergravidade com nove dimensões, mas entendo que tais dimensões extras expressam na verdade as

simetrias em jogo. Não se trata de observar dimensões mensuráveis como o são a largura e a altura, mas de verificar, direta ou indiretamente, a realidade de tais simetrias por métodos empírico-observacionais. As simetrias em si mesmas, expressas pelos geradores dos grupos que as representam, resumem as dimensões necessárias à existência de tudo quanto se possa observar em quatro dimensões. A discussão filosófica reside precisamente na questão de saber se há razão ontológica suficiente para a existência de dimensões extras diante das restrições do entendimento humano e da necessidade humana de explicação racional.

Por ter essa convicção da importância da filosofia no método científico é que não a pude abandonar completamente mesmo aqui numa dissertação de mestrado. Estou certo de que fui econômico ao máximo a esse respeito, de modo a não sobrecarregar o leitor, e ao mesmo tempo judicioso no discurso reflexivo na medida em que o rigor técnico e a originalidade aqui presentes se sobressaem sem deixar margem a dúvidas quanto aos claros objetivos estabelecidos.

Finalmente, cabe lembrar que boa parte das escolhas feitas pelos físicos, quer na área da formalização matemática, quer na esfera conceitual, repousa em argumentações nitidamente filosóficas (Mach, Boltzmann, Bohr, Heisenberg e Schrödinger são grandes exemplos, tendo o primeiro influenciado apreciavelmente o pensamento de Einstein). E não poderia ser de outra forma, pois equações e frases musicais são representações do que pensamos e sentimos a partir do que percebemos do mundo.



## Convenções

Para auxiliar o leitor, faço aqui um resumo das principais notações em uso ao longo desta dissertação. Não que a mesma substitua as indicações locais, mas que funcione como um guia de referência rápida em caso de dúvida ou de simples omissão inadvertida.

- O símbolo  $\Omega$  será sempre utilizado para designar o parâmetro de densidade, salvo se for encimado por um arco,  $\widehat{\Omega}$ , nesse caso denotando a quantidade angular  $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ .
- Índices gregos ( $\mu, \nu, \lambda$ , etc.) variam de 1 a 3, ao passo que os latinos ( $i, j, k$ , etc.) vão de 1 a 4.
- Qualquer letra encimada por um ponto ( $\dot{R}, \dot{G}$ , etc.) denota derivada temporal da quantidade que representa.
- Qualquer letra sobrescrita por coma a direita ( $R', G'$ , etc.) denota derivada espacial (via de regra, referente à coordenada comóvel  $r$ ) da quantidade que representa.
- A letra grega  $\beta$  indicará preferencialmente a terceira função arbitrária da cosmologia Lemaître-Tolman (o tempo do *Big-Bang*), salvo se for encimada por um arco, situação em que denotará uma quantidade angular (via de regra, em tópicos sobre lenteamento gravitacional), ou por qualquer outro caracter não registrado nesta convenção que a diferencie como índice.
- A cosmologia em foco no presente trabalho é comumente denominada LTB na literatura disponível, em alusão aos principais nomes historicamente envolvidos em sua criação (Lemaître, Tolman e Bondi). Todavia, penso que Lemaître e Tolman foram os que realmente trabalharam na fundamentação teórica, cabendo a Bondi muito mais um trabalho de revisão. Dessarte, usarei a sigla LT em lugar de LTB por entendê-la mais justa.
- Letras encimadas por acento circunflexo ( $\hat{R}, \hat{G}$ , etc.) representam quantidades assumidas em relação à escolha da geodésica única.



## Introdução

A presente dissertação teve por principais objetivos 1) modelar dados de supernovas tipo Ia em determinada cosmologia Lemaître-Tolman, 2) introduzir o estudo do lenteamento gravitacional fraco na cosmologia Lemaître-Tolman adotada e 3) estabelecer a expressão do índice de refração gravitacional no limite de campo fraco para essa cosmologia. No conjunto, esse trinômio constitui um estudo visando testar o modelo e verificar se o mesmo, no escopo dos testes apresentados, se mostra compatível com a realidade observacional.

Os dois últimos itens não se mostraram frequentados na literatura consultada, pelo menos até onde pude vislumbrar dos diversos trabalhos pesquisados e das consultas privadas a outros pesquisadores ativos na área. A meu ver, são assuntos de suma importância tanto para a cosmologia de um modo geral como para a evolução das investigações sobre a inhomogeneidade do universo. Em particular, o lenteamento gravitacional tem se revelado de extrema utilidade em cosmologia, sendo, portanto, mais do que necessário investigar como esse fenômeno seria descrito num espaço-tempo de Lemaître-Tolman. O próprio índice de refração gravitacional, sob o prisma da cosmologia, permite calcular e comparar inhomogeneidades.

Existem numerosos trabalhos sobre cosmologias Lemaître-Tolman, de modo que seria impraticável construir um apanhado sintético de todas as abordagens originais no âmbito de uma dissertação. Assim, minha seleção foi prioritariamente concentrada naqueles que objetivamente agregariam subsídios valiosos do ponto de vista observacional, uma vez que o cerne metodológico da minha explanação é a correlação entre teoria e observação no contexto de lentes gravitacionais. Em segundo plano, escolhi alguns artigos essencialmente formais com vistas a oferecer um panorama geral da atual vanguarda teórica no estudo daquelas cosmologias e na aplicação da métrica de Lemaître-Tolman em outras áreas.

Dentre os primeiros, destaca-se o artigo de D. Garfinkle [3] no qual um espaço-tempo inhomogêneo de Lemaître-Tolman é empregado de maneira inteligível e bastante pragmática na modelagem cosmológica dos dados de supernovas tipo Ia. Por sua simplicidade e clareza, além da receptividade do

próprio Prof. Garfinkle em dirimir minhas dúvidas, considero esse estudo fundamental como ponto de partida para pesquisas mais aprofundadas.

Outro artigo dessa índole é o de D. Chung e A. Romano [4] em que os autores apresentam um interessante mapeamento da distância de luminosidade numa distribuição inhomogênea de matéria conforme determinada cosmologia Lemaître-Tolman. Em particular, o trabalho tem grande mérito por demonstrar a possibilidade de ajustar essa cosmologia a fim de reproduzir a distância de luminosidade descrita num universo plano Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker com constante cosmológica.

Um terceiro artigo, de N. Brouzakis, N. Tetradis e E. Tzavara [5], analisa a propagação da luz através das inhomogeneidades do universo numa escala mínima de 10 Mpc. Os autores assumem uma estrutura do tipo “queijo suíço”<sup>1</sup>, na qual a simetria esférica da inhomogeneidade se caracteriza por uma região central de baixas densidades compensada por um envoltório de sucessivas camadas de densidades mais elevadas. Estudada nesse cenário, a distribuição das distâncias de luminosidade para fontes de mesmo desvio para o vermelho se mostra assimétrica.

Artigo de suma importância é o de Alnes, Amarzguioui e Grøn [66], cuja contribuição fundamental foi a de investigar o comportamento de um universo inhomogêneo de Lemaître-Tolman, confrontando-o com várias observações astrofísicas. Os autores concluíram que o modelo consegue dar conta satisfatoriamente tanto da relação distância de luminosidade-desvio para o vermelho das supernovas Ia quanto de algumas observações realizadas sobre a radiação cósmica de fundo, sem recurso à energia escura, deixando em aberto a questão da possibilidade de reprodução completa do espectro de potência angular da radiação cósmica de fundo num modelo inhomogêneo sem energia escura.

---

<sup>1</sup>Esse modelo foi introduzido por Einstein e Straus em 1945 [64]. Kantowski cunhou a expressão "queijo suíço" em 1969 [52]. É implementado a partir de um espaço-tempo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker constituído essencialmente de poeira, dele removendo-se aleatoriamente esferas comóveis. No centro dos vazios esféricos deixados são colocadas massas de Schwarzschild. A poeira remanescente é considerada como preenchimento homogêneo entre as regiões esféricas; as massas pontuais são interpretadas como inhomogeneidades.

Finalmente, há que comentar dois artigos relativamente recentes, um devido a K. Enqvist [6] e outro produzido por K. Bolejko [2]. O autor do primeiro estabelece o que eu chamaria de “uma variante do princípio de equivalência”, posto que a expansão do universo não é um observável e sim a luz que nos chega do passado, donde o efeito da inomogeneidade sobre o desvio para o vermelho ser indiscernível do efeito provocado pela aceleração num universo perfeitamente homogêneo. O segundo artigo analisa, com base na adoção de uma cosmologia Lemaître-Tolman, se o emprego de modelos de distribuição não-homogênea de matéria sem constante cosmológica é ou não realístico, tomando por objeto de investigação a redução de brilho das supernovas tipo Ia.

Quanto às abordagens de maior amplitude teórica vale lembrar os trabalhos de Hui-Ching Lu e C. Hellaby [7] e de K. Patil *et al* [8]. No primeiro, os autores descrevem um procedimento matemático que permite o cálculo através da singularidade típica da área radial. Embora tal procedimento não traga consequências diretas para a linha de investigação que escolhi, o recurso à expansão em série de potências de ambos os “lados” da singularidade (à esquerda e à direita do ponto de inflexão da curva representativa da área radial) é sem dúvida atraente para a análise dos efeitos da curvatura. Já no segundo estudo, travei contato pela primeira vez com o emprego de uma métrica Lemaître-Tolman 5D a um problema astrofísico, qual seja o da formação das chamadas “singularidades nuas”. Esse trabalho se reveste de especial interesse devido à possibilidade de conexão com minha pesquisa anterior sobre variedades Anti-de Sitter em 9D [19], para as quais a redução dimensional conduz a uma solução 5D.

A literatura sobre lentes gravitacionais, sobretudo no limite de campo fraco, é copiosa. Entretanto, a cosmologia das lentes gravitacionais segundo o formalismo integral da relatividade geral é praticamente nenhuma em se tratando de métricas Lemaître-Tolman. Isso se compreende até certo ponto devido ao fato de sempre se poder representar os efeitos de uma distribuição inomogênea de matéria por meio de simulações *N-corpos*, isto é, aproximações de projeções planas multi-lenticulares. Contudo, ditas aproximações persistem na idéia de homogeneidade do universo em grande escala e não consideram as diferenças de densidade como decorrentes de um fator intrínseco à estrutura do universo, e sim como fenômenos incidentais em escalas relativa-

mente reduzidas. As melhores abordagens relativísticas são as de P. Schneider [9] e de V. Perlick [10], nenhuma das quais particularmente interessada em cosmologia Lemaître-Tolman. Fica em aberto a questão de estabelecer uma representação completa da inomogeneidade imanente à modelagem Lemaître-Tolman, assunto chave nesta dissertação. Uma raríssima excessão à aridez literária comentada acima surgiu há pouco no artigo de Ghassemi *et al* [42], no qual os autores sugerem uma abordagem LT do lenteamento gravitacional ocasionado por esferas inomogêneas embutidas num *background* friedmanniano.

No que diz respeito ao efeito Sunyaev-Zel'dovich, as referências de maior relevância são os artigos de J. Carlstrom *et al* [11], de M. Bonamente [12], de M. Birkinshaw [13] e de K. Romer, J. Peterson e C. Cantalupo [14], se bem que muito tenha sido produzido sobre o assunto no final dos anos 90 por diversos autores. Embora eu não faça essa discussão, o ponto essencial a ser investigado é a maneira pela qual se poderia decidir sobre as origens de determinadas anisotropias na radiação cósmica de fundo, uma vez que as formas espectrais das anisotropias geradas pelo lenteamento gravitacional são idênticas àquelas geradas pelo efeito Sunyaev-Zel'dovich cinemático. O índice de refração gravitacional poderia então ser empregado como um elemento interveniente ponderador das estatísticas efetuadas sobre conjuntos de flutuações.

Com fundamento nos principais artigos comentados acima e nas demais referências consultadas, foi possível, nesses dois anos de pesquisas, demonstrar a factibilidade de um modelo cosmológico Lemaître-Tolman consistente com dados observacionais de supernovas tipo Ia e com lenteamento gravitacional fraco. Em tal demonstração, os eventos de lenteamento gravitacional fraco são traduzidos pelos índices de refração deduzidos de pequenas deformações da métrica. A concepção do índice de refração será discutida no Capítulo III, bem como a relação formal do índice com a observação. A modelagem de supernovas tipo Ia será analisada já no Capítulo I. O Capítulo II será devotado ao estudo da teoria básica das lentes gravitacionais e do lenteamento gravitacional no limite de campo fraco, fixando os pré-requisitos conceituais para uma abordagem cosmológica.



Em resumo, o plano da dissertação incluiu os seguintes tópicos de abordagem:

- 1) visão geral da cosmologia Lemaître-Tolman com algumas aplicações relevantes, em especial sobre supernovas tipo Ia;
- 2) fundamentos teóricos do fenômeno de lenteamento gravitacional fraco com aplicações na vizinhança da Via-Láctea;
- 3) fundamentos das lentes gravitacionais fracas na cosmologia Lemaître-Tolman adotada, com introdução do índice de refração nessa cosmologia.

Ressalte-se que, embora inicialmente eu desejasse ser exaustivo quanto ao formalismo, de maneira a prover o máximo de informação possível aos futuros leitores da presente dissertação, não haveria espaço suficiente para dar conta de tantas deduções já conhecidas, e, ao mesmo tempo, manter limites aceitáveis para a apresentação do conteúdo total, a não ser em detrimento das verdadeiras contribuições aqui explanadas. Dentro da harmonia sempre bem-vinda entre forma e conteúdo, procurei registrar o que de melhor produzi, recomendando aos estudiosos interessados as seletas referências indicadas em caso de complementação ou de especialização investigativa.



# Capítulo 1

# Capítulo 1

## Cosmologia Inomogênea de Lemaître-Tolman

Os principais objetivos da cosmologia relativística são descrever o universo em grande escala e prover uma explicação razoável acerca de sua origem com o auxílio da relatividade geral. Tais metas estariam fora do alcance não fossem os dados providos pelas observações astronômicas.

A consideração de modelos espacialmente homogêneos do universo tem sido dominante desde as primeiras aplicações da relatividade geral à cosmologia. Como bem observou Tolman [15, 16], essa preferência intelectual encontra alguma justificativa heurística em face da grande simplificação matemática que tal homogeneidade introduz no formalismo. Além disso, parece razoável supor certa uniformidade na distribuição de matéria em grande escala ainda que de maneira aproximada, uma abordagem quase consensual do ponto de vista da atividade observacional até para as gerações que trabalharam baseadas nos vislumbres do velho telescópio de 100 polegadas em Mount Wilson. Seria, entretanto, necessário provar essa suposta prevalência da homogeneidade, ou, o que vem a ser o mesmo, demonstrar a propensão universal para o desaparecimento de inomogeneidades com o passar do tempo. Na verdade, Bonnor fez isso em seu artigo de 1974 [51], no qual ele conclui que *"...there are two classes of dust-filled universes, each containing an arbitrary function of one variable, which evolve from inhomogeneity and anisotropy to the corresponding R-W model."*

A pesquisa na direção de modelos inomogêneos de universo foi, a princípio, parcialmente motivada pelo desafio intelectual de levar a relatividade geral além da cosmologia simplificada de Robertson-Walker. Não tardou para que uma série de problemas oferecidos pela astronomia observacional ampliasse tal motivação. A primeira aplicação séria da mecânica relativística à cosmologia no sentido de esclarecer as conseqüências da inomogeneidade sobre os modelos cosmológicos foi provida pelo Abade Georges Lemaître [17] em 1933, seguido por Richard C. Tolman [15]. Hoje, a publicação original do primeiro, *L'Univers en expansion*, permanece uma referência fundamental a despeito de sua base observacional anacrônica. Em referência aos aspectos heurísticos da simplicidade formal, Lemaître iniciou seu trabalho considerando soluções matematicamente exatas das equações de campo. O emprego dessas soluções a situações reais seria efetuado mediante intuição física, de modo a revelar uma representação simplificada do mundo. Tal representação possibilitaria, enfim, o estabelecimento de conexões verdadeiramente físicas.

A característica essencial de interseção entre as cosmologias Lemaître-Tolman (doravante LT) é a abordagem de um universo inomogêneo (de preferência dominado por poeira irrotacional), e não a constante cosmológica igual a zero; é possível trabalhar em LT com  $\Lambda \neq 0$  e comparar os resultados com o modelo padrão Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (doravante FLRW). A tabela 1 mostra as principais diferenças entre a cosmologia-padrão FLRW e a cosmologia LT.

O fato da modelagem LT ser extremamente versátil tem levado a controvérsias e a desconfianças sobre tal adaptabilidade a praticamente qualquer situação. Sou de opinião, como veremos abaixo, que a confusão é devida a diferentes formas de abordar o problema.

**Tabela 1:** principais diferenças entre os modelos FLRW e LT.  $R(r, t) = r \cdot a(r, t)$  é a distância por diâmetro angular e  $d\tilde{\Omega}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ .

Modelo	Métrica	Fator de Escala	Densidade
FLRW	$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\tilde{\Omega}^2 \right)$	$a = a(t)$	$\rho = \rho(t)$
LT	$ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2}{1 + f(r)} dr^2 + R^2 d\tilde{\Omega}^2$	$a = a(r, t)$	$\rho = \rho(r, t)$

Nos últimos cinquenta ou sessenta anos, filosofia e ciência têm andado juntas de tal forma que ficou mais difícil duvidar dos ganhos reais para ambas nessa parceria. No entanto, em várias situações a discussão filosófica permanece meramente idealística sem nenhuma contribuição efetiva para o esclarecimento dos dilemas científicos. Esse é o caso da objeção implícita na pergunta “quão antropocêntrica é a decisão de colocar o observador no centro do universo?”. Para refutá-la devemos nos lembrar que tudo o que temos são as medições que fazemos aqui na Terra, não em uma galáxia distante. Não sabemos como, de "lá", se observa o "aqui". Logo, supor que estamos no centro do universo é uma escolha orientada pelo pragmatismo técnico. Para os modelos LT parece útil, de um ponto de vista teórico, considerar a Terra no centro do universo.

Outra objeção se refere a que com três funções arbitrárias o modelo LT virtualmente se ajustaria a qualquer conjunto de dados observacionais. Trata-se, a meu ver, de um criticismo pouco produtor. Aqui, a filosofia traz uma valiosa contribuição. Observação e teoria vivem num contraponto dialético no qual ambas estão sempre trocando entre si. Enquanto representação da realidade, a teoria busca o melhor ajuste possível à observação, além de prever o que poderemos vir a encontrar. Em contrapartida, a observação fornece fundamentos realísticos para a discussão da teoria e para a construção de modelos. Dessa forma, a questão científica não é saber quantos parâmetros são necessários àquela conversação entre teoria e observação, e sim quão bem a teoria cobre o acervo de dados disponível, quão bem ela concorda com várias fontes de dados observacionais ao mesmo tempo. Em face da inexistência de um isomorfismo completo entre teoria e realidade, não deveria haver tanto radicalismo em criticar teorias que, afinal de contas, fazem o que é possível fazer. Além disso, a contraposição de um modelo inomogêneo serve no mínimo como forma dialética de se buscar a melhor escolha; afinal, o modelo padrão é melhor do que o quê?

Ditas essas breves palavras de reflexão, deixarei clara a delimitação de abrangência da presente proposta de trabalho:

a) Irei tratar a situação na qual existe uma única geodésica nula do passado, de modo que, *a priori*, não estarei lidando com evolução.

b) A métrica LT pode reproduzir qualquer relação entre a distância de luminosidade e o desvio para o vermelho, o que significa que os dados de supernovas Ia podem ser descritos por uma distribuição inomogênea de matéria segundo aquela métrica. Inspirado nessa constatação, discutirei o índice de refração gravitacional num espaço LT com a mesma parametrização que usarei na modelagem de supernovas Ia.

c) Não abordarei a dedução do equivalente da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração em LT para o caso particular de *Big-Bang* simultâneo.



## 1.1 A abordagem contemporânea da cosmologia LT

O objetivo dessa seção é dar uma visão geral do formalismo básico da cosmologia LT, tradicionalmente visto na maioria dos estudos focados nessa linha de pesquisa. Alguns aspectos serão revistos e tratados com mais detalhe nos capítulos subseqüentes. O ponto principal é preparar o leitor para o tratamento que daremos ao tema do lenteamento gravitacional, considerando uma perturbação no limite de campo fraco sobre uma métrica LT. À guisa de inserção histórica do leitor, lembrando os primeiros trabalhos de Tolman, farei um pequeno comentário de abertura.

Em 1917-18, pouco depois de Einstein ter anunciado seu modelo cosmológico, surge um trabalho seminal publicado pelo astrônomo holandês Willem de Sitter [25], no qual ele mostra que um universo vazio não precisa ter a métrica de Minkowski, usualmente considerada como limite da métrica relativística desde que assumida longe o bastante de toda a matéria gravitante. Conectando a constante cosmológica com o raio comóvel, o elemento da linha de universo de de Sitter assume a forma

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2, \quad (1.1)$$

onde  $r, \theta$  e  $\phi$  são as coordenadas polares usuais síncrono-comóveis com a matéria e  $R$  é uma distância característica relacionada à constante cosmológica  $\Lambda$  por meio da chamada constante de curvatura,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.2)$$

Uma versão interessante da expressão (1.1) é a solução exterior de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2, \quad (1.3)$$

de maneira que, para um campo estático no espaço vazio em torno de uma esfera massiva, o elemento quadrático de linha recai no modelo de de Sitter se a massa da esfera tende a zero na origem. Tolman se referia a essa última

equação como um exemplo muito importante de elemento de linha cosmológica relacionado a um modelo inomogêneo [16], certamente porque o elemento de linha assim definido inclui a presença de um objeto singular no universo homogêneo completamente vazio e estático proposto por de Sitter. Quero sublinhar aqui o fato de que essa não-homogeneidade nada tem a ver com a inomogeneidade cosmológica prescrita pela moderna modelagem LT, a qual se refere às diferenças de densidade nas hipersuperfícies de tempo constante na geometria 3+1 do universo relativístico, admitindo-se que esse universo tenha um centro. Não obstante o fato de sabermos agora que em grandes escalas a geometria de Schwarzschild não é apropriada para lidar com cenários inomogêneos, por conta da cultura que se estabeleceu em torno do ideal de homogeneidade, ainda hoje é comum a crença de que tudo quanto seja inomogêneo deve presumir uma distribuição homogênea global sobre a qual se configuram flutuações locais de densidade. Não raro tenho visto argumentações pouco cautelosas que ignoram a abordagem LT pela alegação de que a relação distância por diâmetro angular-desvio para o vermelho em modelos nos quais a distribuição de massa é inomogênea pode ser modelada por intermédio da equação diferencial de Dyer-Roeder [1], deduzida por Kantowski [52] e, por último, aplicada à cosmologia por Dyer e Roeder [53]. Entretanto, ao assumirmos um modelo LT, dá-se uma ótica totalmente diversa. Na cosmologia FLRW, o universo não está em expansão a partir de um centro. Tudo acontece da mesma maneira, não importa o lugar. O universo inteiro está se expandindo e isso ocorre igualmente em todos os seus pontos. Por outro lado, Lemaître havia encontrado uma classe mais geral de soluções das equações de Einstein, a qual incluía possíveis configurações de universos esfericamente simétricos em expansão dotados de centro; da mesma forma que em FLRW, em LT partimos de uma estrutura geométrica folheada do universo, com cada folha representando uma hipersuperfície de tempo constante, porém, sendo a densidade função do raio comóvel e do tempo, isto é,  $\rho = \rho(r, t)$ .

Apenas para concluir a explanação, podemos então fazer  $m = 0$  na solução de Schwarzschild (1.3), o mesmo que supor um universo completamente vazio, de tal modo que

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2, \quad (1.4)$$

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.5)$$



onde

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{\Lambda r^2}{3},$$

$$\lambda = \lambda(r), \nu = \nu(r).$$

A métrica de Schwarzschild se adequa perfeitamente ao papel de representação do campo gravitacional esféricamente simétrico de uma partícula na origem. Tal simetria surge em razão do tensor métrico apresentar  $g_{11}$  e  $g_{44}$  dependentes unicamente da coordenada radial. Por último, vale lembrar que qualquer solução das equações de Einstein com simetria esférica é localmente isométrica à solução de Schwarzschild.

Reconhecendo que a tecnologia tenha hoje atingido níveis impensáveis na época de Lemaître, fato é que as limitações observacionais ainda são, cruamente falando, uma dura realidade. É difícil imaginar em que grau tais limitações serão minimizadas nas próximas décadas. Vazios de informação acerca do verdadeiro conteúdo do universo têm diminuído graças ao esforço contínuo da comunidade científica, porém, uma gama de questões críticas permanece sem solução mesmo com as boas aproximações fornecidas pelo modelo  $\Lambda$ CDM<sup>1</sup>. Nesse panorama, a cosmologia LT emerge como uma opção natural não apenas para tentar explicar a aparente aceleração cósmica, mas também para estabelecer um modelo consistente de universo. Sintetizarei, pois, a abordagem-padrão dessa cosmologia conforme a tenho estudado nos anos recentes.



A cosmologia LT tem sido aplicada como alternativa para descrever o universo sem constante cosmológica em escalas de  $\mathcal{O}(10)h^{-1}Mpc$  ou mesmo superiores. Apesar dos desafios que enfrenta e das objeções que lhe são

---

<sup>1</sup> $\Lambda$ CDM (Lambda-CDM) é a sigla para *Lambda-Cold Dark Matter*. Designa o modelo mais simples conhecido de universo com *Big-Bang* capaz de concordar razoavelmente bem com dados da radiação cósmica de fundo, de supernovas Ia e de estruturas em grande escala. A letra grega  $\Lambda$  faz referência à constante cosmológica como um termo de energia escura.

contrapostas, acredito que essa cosmologia lança luz sobre questões críticas, trazendo alguns resultados bastante interessantes, muito embora nos imponha certas restrições decorrentes da adoção de uma constante cosmológica igual a zero.

Começarei por estabelecer a equação de campo de Einstein (o termo  $\Lambda g_{\mu\nu}$  foi colocado à esquerda em razão de que sempre enfatizo as possíveis modificações na geometria),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_{Pl}^2}\rho u_\mu u_\nu. \quad (1.6)$$

Aqui,  $M_{Pl} = 1/\sqrt{8\pi G}$ ,  $G = (16\pi M^2)^{-1}$ ,  $\rho$  é a densidade de energia,  $M$  é a massa da quantidade de matéria considerada e  $u^\mu$  a 4-velocidade do fluxo de matéria, tal que  $u^i u_i = -1$ .

O espaço métrico LT padrão provê uma geometria embutida em um universo supostamente preenchido de maneira inomogênea por poeira de matéria isenta de pressão. Essa suposição não está fundamentada em relações perturbativas com qualquer cosmologia FLRW. Assumindo-se simetria esférica, isto é,  $(r \in ]0, \infty[, \theta \in ]0, \pi[, \phi \in [0, 2\pi[)$ , o elemento de linha associado é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'(r, t)^2 dr^2}{1 + f(r)} + R(r, t)^2 d\widehat{\Omega}^2, \quad (1.7)$$

com  $d\widehat{\Omega}^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  e  $\{r, \theta, \phi\}$  síncrono-comóvel com a matéria ( $dx^i/dt = 0, i = 1, 2, 3, 4$ ). A constante cosmológica é assumida igual a zero e  $f(r)$  é uma função arbitrária de  $r$  que determina a curvatura das hipersuperfícies espaciais. As funções  $R(r, t)$  e  $f(r)$  estão relacionadas de acordo com as equações de Einstein por

$$\dot{R}(r, t)^2 = \frac{1}{M_{Pl}^2} \frac{M(r)}{R(r, t)} + f(r), \quad (1.8)$$

$$\rho(r, t) = \frac{M'(r)}{R(r, t)^2 R'(r, t)}, \quad (1.9)$$

onde  $M(r)$  denota uma função também arbitrária que descreve a energia (massa gravitacional bariônica) contida no raio comóvel  $r$ . Com efeito, o

objetivo clássico da assunção de  $R(r, t)$  ao invés de  $R(t)$  é investigar as conseqüências da implementação de uma esfera de colapso, isto é, uma esfera constituída de cascas concêntricas de densidades diferentes. Alguns autores aplicam o modelo com ênfase na massa, outros na curvatura; é mais uma questão de estilo. Optei pela segunda abordagem, uma vez que estarei sempre interessado na associação entre geometria e desvio para o vermelho.

A equação da geodésica  $D_s(dx_\mu/ds) = 0$ , onde  $s$  é o parâmetro afim, resume as expressões

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{\dot{R}'R'}{1+f} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \dot{R}RL^2 = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2\frac{\dot{R}'}{R'} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \left(\frac{R''}{R'} - \frac{f'}{2(1+f)}\right) \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - (1+f) \frac{R}{R'} L^2 = 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2\frac{\dot{R}'}{R'} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} \left(\frac{R''}{R'}\right) \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - (1+f) \frac{R}{R'} L^2 = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + 2\frac{\dot{R}}{R} \frac{d\theta}{ds} \frac{dt}{ds} + 2\frac{R'}{R} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + 2\frac{\dot{R}}{R} \frac{d\phi}{ds} \frac{dt}{ds} + 2\frac{R'}{R} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} - 2\cot\theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0, \quad (1.14)$$

onde o acento denota derivação com respeito a  $r$ , o ponto denota derivação com respeito ao tempo, e

$$L^2 \equiv \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2. \quad (1.15)$$

A integração da primeira equação com respeito ao tempo fornece

$$-\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{R'^2}{1+f} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + R^2 L^2 = C_{ste}, \quad (1.16)$$

onde o membro direito é a constante de integração. Devido aos dois últimos termos da equação acima serem positivo-definidos<sup>2</sup>, para atender à condição da geodésica nula do passado é necessário o sinal negativo do primeiro termo.

---

<sup>2</sup>A função arbitrária  $f$  é considerada entre os seguintes três casos:  $f = 0$ ;  $f > 0$ ;  $0 > f > -1$ .

A métrica estabelecida pela expressão (1.7) leva, em termos do parâmetro  $\eta = \eta(t, r)$ , às seguintes soluções da equação (1.8):

$$R = (9M(r)/2)^{1/3} (t - \beta(r))^{2/3}, f = 0 \text{ (modelo parabólico)}, \quad (1.17a)$$

$$R = M(r) (\cosh \eta - 1) / f, f > 0 \text{ (modelo hiperbólico)}, \quad (1.17b)$$

$$R = M(r) (\cos \eta - 1) / f, 0 > f > -1 \text{ (modelo elíptico)}. \quad (1.17c)$$

Para a dedução destas expressões, remeto o leitor à referência [54]. O símbolo  $\beta(r)$  representa a terceira função arbitrária do modelo<sup>3</sup>. As três soluções acima representam na cosmologia LT respectivamente as imagens de universo plano, aberto e fechado. Nos modelos hiperbólico e elíptico, respectivamente, valem entre  $\eta$  e  $\beta(r)$  as relações

$$\sinh \eta - \eta = (f(r))^{3/2} (t - \beta(r)) / M(r), \quad (1.17d)$$

$$\eta - \sin \eta = (-f(r))^{3/2} (t - \beta(r)) / M(r). \quad (1.17e)$$

A função  $\beta(r)$  é interpretada como o tempo do *Big-Bang*. Olhando para o modelo parabólico descrito acima, se "agora" for definido como  $t = 0$  e se  $\beta(r) = 0$ , então a hipersuperfície  $t = 0$  corresponde a uma distância por diâmetro angular nula, ou seja,  $R = 0$ . Assim,  $\beta(r)$  provê a idade do universo, a qual, no espaço-tempo LT, contrariamente ao que se dá no universo friedmanniano, pode diferir para distintos observadores situados em diferentes coordenadas comóveis. Em razão disto, para que possamos reduzir a métrica LT à métrica de Friedmann será necessário fazer  $\beta(r) = \text{constante}$ , ficando a constante de Hubble dada por

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a} = H(t), \quad (1.18)$$

para  $\beta = \beta_0$ , onde  $\beta_0$  é uma constante.

---

<sup>3</sup>Ribeiro [22], acompanhando Bonnor [51], chama atenção para o fato de que uma das três funções arbitrárias pode ser removida por uma transformação de coordenadas, de modo que, a rigor, seriam apenas duas funções arbitrárias.

## 1.2 A idéia do *queijo suíço*

O chamado modelo do *queijo suíço* (*Swiss cheese* na versão inglesa) representa um universo inomogêneo no qual cada vazio esférico é descrito por uma métrica LT. Nos limites dessas regiões esféricas a métrica LT é colada à métrica FLRW exterior que descreve a evolução entre as esferas inomogêneas. Com isso podemos procurar por alterações nas distâncias cosmológicas conforme a luz passe através das zonas de baixa densidade. Em particular, no caso extremo em que assumimos que a luz atravessa os centros de todas as inomogeneidades ao longo do seu trajeto, considerando que as localizações da fonte e do observador são aleatórias e que as inomogeneidades são da ordem de  $10Mpc$ , o aumento relativo da distância de luminosidade equivale a um pequeno percentual nas imediações de  $z = 1$  [2].

Em seu artigo de 1956 [23], Bonnor apresentou de forma bastante clara a fundamentação teórica do modelamento tipo *queijo suíço*. Essa fundamentação serviu para um estudo que venho desenvolvendo acerca da distância por diâmetro angular, no qual um observador situado no centro da esfera LT percebe essa grandeza distorcida em razão do efeito de lenteamento provocado pela colagem das duas métricas. Ghassemi *et al* [42] realizaram, em estudo mais recente do que o meu, uma associação bastante interessante entre efeitos de lenteamento gravitacional e a presença de esferas inomogêneas, de acordo com um modelamento LT. No presente momento, cabe apenas reproduzir os principais pontos da importante discussão de Bonnor tanto como revisão como para ulteriores comparações formais.

Seja a métrica LT expressa pela equação (1.7) reescrita na forma

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\omega (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + dt^2, \quad (1.19)$$

onde  $\lambda$  e  $\omega$  são funções de  $r$  e  $t$ , com as equações de campo de Einstein, sem constante cosmológica, fornecendo as seguintes expressões relevantes [15]:

$$e^\lambda = e^\omega \omega'^2 / 4\alpha(r), \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{2} e^{3\omega/2} \dot{\omega}^2 + 2e^{(1/2)\omega} (1 - \alpha) = 4\chi(r), \quad (1.21)$$

$$8\pi\rho = 4e^{-3\omega/2} \chi' / \omega, \quad (1.22)$$

sendo  $\alpha(r)$  e  $\chi(r)$  funções arbitrárias.

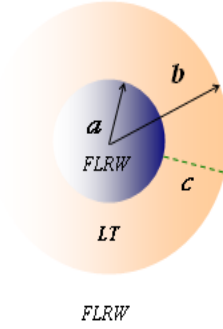


Figura 1.0: diagrama do modelo estudado por Bonnor, no qual LT vale apenas para  $c = b - a$ , isto é, para o domínio  $a < r < b$ .

Suponhamos um universo em expansão, livre de pressão, no qual o modelo em apreço represente uma inomogeneidade contida numa região  $r = b$ . Para  $r > b$  vale a métrica de Friedmann

$$ds^2 = - [R(t)]^2 \left[ (1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + dt^2 \right], \quad (1.23)$$

onde  $k$  assume um dos valores  $0, +1, -1$ , e as equações de campo tomam a forma

$$8\pi\rho = \frac{3k}{R^2} + 3 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2, \quad (1.24a)$$

$$8\pi\rho = -\frac{k}{R^2} - \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{2\ddot{R}}{R} = 0. \quad (1.24b)$$

Assumamos  $k = +1$ , o que corresponde a um modelo homogêneo fechado, e tomemos uma das esferas LT. O problema é colar os dois universos na fronteira comóvel  $r = b$ , sobre a qual as condições de continuidade

$$e^{\omega(a,t)} = a^2 R^2(t), \quad (1.25a)$$

$$\omega'(a,t) = 2/a, \quad (1.25b)$$

$$\alpha(a) = 1 - a^2, \quad (1.25c)$$

$$e^\lambda = R^2(t)/\alpha(a), \quad (1.25d)$$

são garantidas se

$$\alpha(a) = 1 - a^2, \quad \alpha'(a) = -2a, \quad (1.26a)$$

$$\chi(a) = Ja^3, \quad \chi'(a) = 3Ja^2, \quad (1.26b)$$

$$\beta(a) = 0, \quad \beta'(a) = 0, \quad (1.26c)$$

onde  $\beta(a)$ , como vimos anteriormente, é a função arbitrária que designa o tempo do *Big-Bang*. A título de recordação, o procedimento concebível para descrever o contato entre dois espaço-tempos consiste em remover, de ambos, regiões idênticas da forma  $\Sigma \times \tau$ , onde  $\Sigma$  é uma superfície compacta tipo espaço e  $\tau$  o eixo temporal. Assim, as duas variedades se identificam ao longo da fronteira  $\partial\Sigma \times \tau$  (a abstração fundamental é a mesma, quer para branas, quer para buracos de minhoca, etc.). A variedade resultante possui duas regiões conectadas por uma "passagem" delimitada pela junção  $\partial\Sigma$ , isto é, por uma superfície tipo espaço. No caso particular de um buraco de minhoca, a tensão superficial negativa na superfície de contato é absolutamente necessária para manter a "entrada" do buraco aberta e gravitacionalmente estável contra colapso. O leitor não deve estranhar esse resultado, já que energias e tensões de *stress* negativas são fisicamente aceitáveis e manifestam repulsão gravitacional. Em relatividade geral, a palavra "exótica" é preferida em lugar de "negativa". Os efeitos da energia negativa foram observados em laboratório, por exemplo, no chamado *Efeito Casimir*.

A equação (1.21) pode ser dada na forma integral

$$\int \frac{de^{w/2}}{\sqrt{2\chi e^{-3w/2} - (1 - \alpha)}} = t + \beta(r). \quad (1.27)$$

Essa integração origina três diferentes casos de acordo com  $1 - \alpha \gtrless 0$ . Em especial, para  $1 - \alpha > 0$ , a solução da integral (1.27) é dada pelas expressões

$$e^{(1/2)\omega} = \chi(1 - \alpha)^{-1}(1 - \cos\psi), \quad (1.28a)$$

$$t + \beta = \chi(1 - \alpha)^{-3/2}(\psi - \sin\psi), \quad (1.28b)$$

$$8\pi\rho = \frac{1}{2}\chi'(1 - \alpha)^3\chi^{-3}\operatorname{cosec}^6\frac{1}{2}\psi(\omega')^{-1}, \quad (1.28c)$$

válidas para as condições de fronteira em  $r = b$ . É importante frisar que tais condições não determinam univocamente as funções arbitrárias  $\beta(r)$ ,

$\alpha(r)$  e  $\chi(r)$ . Normalmente, para encontrarmos tais funções será necessária a assunção de  $0 < r < a < b$ , com  $a = \text{constante}$ . Adotando-se uma solução da forma,

$$ds^2 = -[R^*(t)]^2 \left[ (1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] + dt^2, \quad (1.29)$$

onde  $k = +1$  e

$$R^* = K^*(1 - \cos \eta), \quad (1.30a)$$

$$t + \varepsilon = K^*(\eta - \sin \eta), \quad (1.30b)$$

$K^*$  e  $\varepsilon$  sendo constantes arbitrárias, temos em verdade um caso especial das expressões (1.28a) e (1.28b), correspondente a uma região homogênea. Isto significa que, face à busca das funções arbitrárias  $\beta(r)$ ,  $\alpha(r)$  e  $\chi(r)$ , precisamos modificar sensivelmente o nosso modelo inicial explanado na página 26, estabelecendo no centro da região condensada um modelo friedmanniano (vide figura 1.0) com constantes diferentes daquelas prescritas para  $r > b$  pela expressão (1.23). Para  $a < r < b$  será requisitada a solução inomogênea mais geral especificada pela expressão (1.19). Entretanto, esse intervalo é tão pequeno quanto se queira, podendo-se escolher as funções arbitrárias  $\beta(r)$ ,  $\alpha(r)$  e  $\chi(r)$  de tal maneira que satisfaçam a  $r = b$  e a  $r = a$ . Assim, idealiza-se a condensação por uma região homogênea em  $r < a$ , com densidade diferente do resto do universo, e uma região de transição  $a < r < b$ , estudando-se a evolução dessa última pela comparação do comportamento dos modelos homogêneos friedmannianos (1.23) e (1.29).





### 1.3 A distância por diâmetro angular

Também denominada área radial, distância por área, distância por área do observador, ou ainda distância de luminosidade corrigida, se bem que as três últimas denominações sejam menos usuais. Excesso de sinônimos na ciência leva frequentemente ao confusãoismo, de modo que neste trabalho usarei sempre o nome do título desta seção. A definição da distância por diâmetro angular,  $D_a$ , é dada em primeira aproximação por  $d_S \approx \delta_0 D_a$  (para  $\delta_0$  muito pequeno), onde  $d_S$  é o diâmetro da fonte emissora medido no referencial da mesma e  $\delta_0$  o diâmetro angular, ou ângulo de abertura, da fonte em relação ao observador, medido no referencial do próprio observador. Na realidade, uma vez que o espaço seja considerado esfericamente simétrico, a distância por diâmetro angular do observador no centro da esfera até determinado objeto situado na  $i$ -ésima casca esférica coincide com o raio circunferencial  $R_i$  quando a geodésica nula a intersecta. Nas expressões do elemento de linha, a distância por diâmetro angular é usualmente representada por  $R(r, t)$ , desde que a área própria de uma esfera de raio  $r$  sobre um recorte temporal em  $t = \text{const.}$  é  $4\pi R^2$ . Um ponto sobre o que se deve atuar com certo cuidado é o do comportamento “patológico” de  $R(r, t)$ , tanto em cosmologias FLRW como em cosmologias LT. Há uma abordagem engenhosa do assunto devida a Hui-Ching Lu e Hellaby [7] concernente à modelagem LT, da qual tomarei alguns elementos para breve comentário.

Retomemos a expressão (1.7) referente à métrica LT, onde  $R(r, t)$ , como vimos, é a distância por diâmetro angular. Essa última é governada pela equação de Friedmann,

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} R \rho, \quad (1.31)$$

cuja integração fornece

$$\dot{R}^2 = -\frac{8\pi G}{3} R^2 \rho - k v_0^2, \quad (1.31a)$$

onde  $k$  assume os valores 0, 1 ou -1, respectivos aos movimentos parabólico, elítico ou hiperbólico, e  $v_0^2$  é o módulo da constante de integração [65]. Da forma geral (1.31a) se obtém a solução de LT com constante cosmológica [55]

$$\dot{R}^2 = \frac{\Lambda}{3} R^2 + \left[ \frac{2M(r)}{R} + f(r) \right], \quad (1.31b)$$

em que a massa gravitacional dentro da concha comóvel de raio  $r$ ,  $M(r)$  e o termo de geometria localizada  $f(r)$  são as duas primeiras funções arbitrárias em LT. Combinadas a uma terceira função, o tempo local do *Big-Bang*  $\beta$ , elas determinam completamente o modelo.

Definimos agora a quantidade  $W = \sqrt{1 + f(r)}$  e, para o cone nulo pretérito do observador, assumimos a geodésica única pela liberdade de escolha da coordenada radial, de modo que

$$\frac{d\hat{t}}{dr} = -1 \quad \text{ou} \quad \hat{R}' = W. \quad (1.32)$$

O circunflexo sobre os símbolos denota a escolha da geodésica única. Também é possível escrever a diferenciação da distância por diâmetro angular como

$$\frac{d\hat{R}}{dr} = \hat{R}' + \hat{R} \frac{d\hat{t}}{dr} = \hat{R}' \left( 1 + \frac{\hat{R}}{W} \right). \quad (1.33)$$

Combinando as equações (1.32) e (1.33), segue-se

$$W = \sqrt{1 + f(r)} = \quad (1.34)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{d\hat{R}}{dr} \right) + \frac{\left( 1 - \frac{2M}{R} \right)}{2 \left( \frac{d\hat{R}}{dr} \right)}. \quad (1.35)$$

A quantidade  $W$  identifica para quais regiões as seções espaciais serão hiperbólicas ( $1 + f > 1$ ), parabólicas ( $1 + f = 1$ ) ou elíticas ( $1 + f < 1$ ). Uma vez que  $r$  não é observável, torna-se conveniente pôr suas derivadas em termos do desvio para o vermelho  $z$ , escrevendo

$$\phi \equiv \frac{dr}{dz}, \quad (1.36)$$

donde

$$\frac{d\hat{R}}{dz} = \frac{d\hat{R}}{dr} \phi, \quad (1.37)$$

o que nos traz a equação (1.33) sob a forma

$$W = \frac{1}{2\phi} \left( \frac{d\hat{R}}{dz} \right) + \frac{\left( 1 - \frac{2M}{R} \right) \phi}{2 \left( \frac{d\hat{R}}{dz} \right)}. \quad (1.38)$$

A distância por diâmetro angular  $\hat{R}$  é uma função suave que evolui a um máximo, decrescendo em seguida. Assim, a derivada primeira de  $\hat{R}$  com respeito a  $z$  cai a zero no máximo, o que causa instabilidade na equação (1.35). Semelhante singularidade define uma característica topológica intrínseca de  $\hat{R}$ , e um modo possível de lidar com tal descontinuidade “genética” para permitir os cálculos através do ponto de inflexão é aplicar a técnica de expansão em série na vizinhança desse ponto para  $\hat{R}(z)$ ,  $M(z)$ ,  $\phi(z)$  e  $W(z)$ .

Seja  $\hat{R}_m$  o máximo de  $\hat{R}$ . O essencial aqui é que suponho  $\hat{R}_m$  ocorrendo num certo  $z_m$ , com

$$\Delta z = z - z_m. \quad (1.39)$$

As séries na vizinhança de  $\hat{R}_m$  são

$$\hat{R}(z) = \hat{R}_1 \Delta z + R_2 \Delta z^2 + R_3 \Delta z^3 + R_4 \Delta z^4 + R_5 \Delta z^5 + \dots, \quad (1.40)$$

$$M(z) = M_0 + M_1 \Delta z + M_2 \Delta z^2 + M_3 \Delta z^3 + \dots, \quad (1.41)$$

$$\phi(z) = \phi_0 + \phi_1 \Delta z + \phi_2 \Delta z^2 + \phi_3 \Delta z^3 + \dots, \quad (1.42)$$

$$W(z) = W_0 + W_1 \Delta z + W_2 \Delta z^2 + W_3 \Delta z^3 + \dots, \quad (1.43)$$

de modo que

$$\frac{d\hat{R}}{dz} = 2R_2 \Delta z + 3R_3 \Delta z^2 + 4R_4 \Delta z^3 + 5R_5 \Delta z^4 + \dots, \quad (1.44)$$

$$\frac{d^2 \hat{R}}{dz^2} = 2R_2 + 6R_3 \Delta z + 12R_4 \Delta z^2 + \mathcal{O}(\Delta z^n). \quad (1.45)$$

Nas séries (1.40) a (1.45) os coeficientes  $M_i$ ,  $\phi_i$  e  $W_i$  respondem pelas  $i$ -ésimas derivadas de  $M$ ,  $\phi$  e  $W$  em  $z = z_m$ . O procedimento é aplicado à esquerda e à direita do máximo, tão próximo quanto se queira do ponto de inflexão. Esse tipo de abordagem, extremamente útil, não chega a ser uma novidade absoluta. Em várias situações onde “buracos” topológicos aparecem (modelo politrópico na proximidade do centro das estrelas, variedades de configuração  $R^n$  em teoria quântica de campos, etc.), ou se recorre ao desdobramento serial ou a uma variedade de cobertura na qual é mapeado o espaço-origem. De qualquer modo, essa metodologia é necessária à construção do algoritmo para determinação, conforme proposta por Hui-Ching Lu e Hellaby [7], da métrica

do universo a partir de dados observacionais, o que sem dúvida nos permitiria verificar e quantificar a suposta homogeneidade em grandes escalas. Para validação dos resultados de tal empreendimento, hoje em andamento sob responsabilidade desses pesquisadores, seria conveniente ter-se à disposição um conjunto de métodos paralelos de corroboração como o proposto nesta dissertação.



## 1.4 Supernovas Ia numa perspectiva LT

A cosmologia FLRW é, em última análise, caracterizada por duas funções: a taxa de expansão média do universo ( $H$ ) e o parâmetro de densidade ( $\Omega$ ), as quais dependem do tempo. Seus valores, embora não observados diretamente, são deduzidos da informação extraída das propriedades da luz que nos chega do passado através do cone de luz. Há, como em toda a ciência física, um elemento subjetivo de interpretação na construção dessa informação, a qual bem atendia às evidências até a recente chegada de um copioso acervo de dados obtidos das supernovas Ia, da distribuição de galáxias e das anisotropias encontradas na radiação cósmica de fundo. É no cenário de discrepâncias afigurado a partir das novas descobertas que surgiu a "energia escura" como redentora da ordem. Pelo viés da reintrodução de uma constante cosmológica, até agora sem qualquer modelo teórico que explique sua origem e magnitude, ela garante uma expansão acelerada do universo e uma "justificativa" para o aparente enfraquecimento de luminosidade verificado nas distantes supernovas Ia.

Todo esse esforço em preservar uma descrição homogênea, a meu ver bastante discutível, suscitou uma gama de trabalhos no sentido de afirmar cada vez mais a imagem inomogênea que a modernidade tecnológica na obtenção de dados precisos tem permitido entrever sobretudo no que diz respeito ao estudo das supernovas Ia. Reafirmo nesse caminho que minha principal tarefa tem sido a de descrever um universo inomogêneo LT viável com o mesmo nível de detalhe alcançado na descrição de seu alterego homogêneo FLRW, destacando a definição do índice de refração gravitacional em LT, ainda que tal objetivo não possa ser alcançado completamente numa dissertação de mestrado.

Muito do estudo aqui apresentado foi elaborado com base de corroboração nos resultados transmitidos por D. Garfinkle [3] e por K. Enqvist [6], tendo sempre em conta os exemplos de arbítreo das três funções típicas da modelagem LT dadas pelo primeiro.

### 1 Sem constante cosmológica

Supernovas Ia estão entre as maiores explosões termonucleares do universo. A luz de tais explosões é capaz de viajar por longuíssimas distâncias.

Embora elas tenham conduzido à descoberta da aceleração da taxa de expansão do universo, permanece um grande número de incertezas nos modelos teóricos correntes. Sem dúvida, a modelagem computacional tem oferecido excelentes perspectivas apesar da desafiadora tarefa de lidar com a imensidão das distâncias e das escalas de tempo.

A representação teórica padrão de uma supernova Ia é a da explosão termonuclear de uma estrela anã branca de carbono/oxigênio em processo de dragagem de material oriundo de uma companheira, via de regra, gigante vermelha. A massa da estrela anã tende ao limite de Chandrasekhar, no mesmo tempo em que sua temperatura e sua densidade convergem para o ponto de fusão do carbono. A energia liberada durante esse processo acaba superando a taxa de resfriamento devida à expansão e perda de neutrinos, de maneira que a estrela não consegue manter sua integridade, explodindo violentamente. As supernovas Ia são objetos de extremo interesse por apresentarem aproximadamente sempre a mesma curva de luminosidade, o que torna possível medir as distâncias e os desvios para o vermelho de suas galáxias hospedeiras.

Em tempos recentes, iniciou-se um intenso processo de investigação no intuito de verificar se modelos inomogêneos realísticos sem constante cosmológica poderiam dar conta do enfraquecimento da luz emitida pelas supernovas Ia, de tal maneira a interpretá-lo como um epifenômeno capaz de mimetizar a aceleração do universo. Sabe-se que modelos Lemaître-Tolman podem ser ajustados a um amplo conjunto de dados observacionais, o que significa ser possível ajustá-los aos dados de supernovas. No entanto, se o modelo não se ajustar a outras fontes, o problema cosmológico permanecerá não resolvido. O conjunto de dados observacionais modificou o estado do conhecimento cosmológico de tal maneira que, considerando-se as três principais fontes de dados atualmente reconhecidas, temos os seguintes valores da densidade média de matéria:

- Radiação cósmica de fundo  $\rightarrow \Omega_M \sim 1$ ,
- *Surveys* de galáxias  $\rightarrow \Omega_M \sim 0,3$ ,
- Supernovas Ia  $\rightarrow \Omega_M = 0,28 \pm 0,10$ .

Para o banimento de semelhantes discrepâncias convencionou-se introduzir uma constante cosmológica  $\Lambda$ , ou energia do vácuo  $\Omega_\Lambda$ , nas equações de Einstein. Esse artifício acarreta uma expansão acelerada do universo. Conseqüentemente, o enfraquecimento aparente das supernovas Ia encontra sua explicação natural num universo homogêneo. Embora isso garanta ótima concordância do modelo  $\Lambda$ CDM com os dados observacionais, o procedimento traz consigo alguns aspectos perturbadores. Vendo sob o prisma das unidades planckianas, a constante cosmológica surge como quantidade absurdamente pequena em relação àquelas (menor em cerca de 120 ordens de grandeza). Várias teorias têm sido empregadas no sentido de esclarecer as razões de semelhante valor. O papel da supersimetria, por exemplo, na avaliação da constante cosmológica requer a incorporação da gravidade em seu arcabouço teórico, algo que é feito pela introdução da supergravidade. Com ela as partículas ordinárias são complementadas por um multiplete gravitacional compreendido pelo graviton e por seu parceiro supersimétrico, o gravitino. O graviton, com spin 2, é o mediador da gravidade assim como o foton é o mediador do eletromagnetismo. O gravitino é uma partícula de spin 3/2. Não havendo quebra de supersimetria, ambas as partículas permanecem sem massa. No esquema mais simples de quebra de supersimetria, o gravitino se torna massivo. Tão logo a supersimetria seja quebrada, a energia do vácuo assume valores da ordem de  $10^{40}$  GeV, muito acima do que se esperaria para um motivador físico plausível da constante cosmológica conforme estimada atualmente. Além disso, o modelo  $\Lambda$ CDM requer que vivamos em uma era cosmológica *sui generis* na qual matéria e energia escura tenham densidades comparáveis. Por último, todo o esforço despendido ao longo de décadas pelos físicos de partículas no sentido de mostrar que a constante cosmológica deve ser zero cairá por terra se em definitivo a aceitarmos com seu valor assombrosamente minúsculo, porém, não nulo, nas bases do conhecimento cosmológico. Foram sobretudo esses fatos perturbadores que motivaram a busca de modelos alternativos ao modelo-padrão. Na presente seção farei uma revisão do que tem sido feito em termos de supernovas Ia.

Uma das vertentes da pesquisa atual consistiu em assumir um modelo LT tão simples quanto possível, verificando o impacto da distribuição inomogênea de matéria e da expansão não uniforme do universo na propagação da luz [2]. Aparentemente, as primeiras análises mostraram que em pequenas escalas as variações na densidade de fato induzem variações no brilho, o mesmo

não ocorrendo em grandes escalas. As flutuações de brilho decrescem com a distância, fato que inviabiliza a explicação sem constante cosmológica uma vez assumidos desvios para o vermelho muito elevados. Devido às grandes incertezas envolvidas e à relativa escassez de supernovas Ia, o assunto ainda é fonte de controvérsias.

As observações astronômicas do universo local indicam que sua densidade varia desde valores baixos referentes aos vazios até valores elevados relacionados às aglomerações. A tabela 2 exhibe cinco modelos que ilustram esse fato. As medições sobre a distribuição de matéria implicam em que o contraste de densidade ( $\delta = \rho/\rho_b - 1$ ,  $\rho_b =$  densidade do *background*) varia de  $\delta \approx -1$  nos vazios [44] até  $\delta$  igual a várias dezenas nos aglomerados [45]. Tais estruturas existem em diâmetros desde vários *Mpc* até várias dezenas de *Mpc*. Entretanto, se a média for considerada em grandes escalas, a densidade permanece entre  $0,3\rho_b$  e  $4,4\rho_b$  [46, 47], sendo os tamanhos das estruturas da ordem de várias dezenas de *Mpc*. Até o momento inexistente evidência observacional de estruturas maiores do que superaglomerados, ou seja, com diâmetros da ordem de centenas de *Mpc* ou mais.

**Tabela 2:** forma das funções utilizadas para diferentes modelos LT de densidade ( $\rho_b =$  densidade do *background*).

Modelo	Funções
Modelo 1	$\beta = 0; \rho/\rho_b = 0,5 + 0,2 \cos(10^{-5}\pi r Mpc^{-1}) + 0,5 \cos^2(10^{-5}\pi r Mpc^{-1})$
Modelo 2	$\beta = 0; \rho/\rho_b = 0,4 + 0,6 \cos(2x10^{-5}\pi r Mpc^{-1}) + 1,8 \cos^2(2x10^{-5}\pi r Mpc^{-1})$
Modelo 3	$\beta = 0; \rho/\rho_b = 1 + 0,4 \cos(10^{-5}\pi r Mpc^{-1})$
Modelo 4	$\beta = 0; \rho/\rho_b = 1 + (8x10^{-6}r Mpc^{-1})^{0,55}$
Modelo 5	$\rho/\rho_b = 1$

Os modelos apresentados na tabela 2 fornecem estimativas preliminares sobre o comportamento da densidade. O símbolo  $\beta$  representa a função tempo do *Big-Bang*. Note que a assunção de  $\beta = 0$  foi feita para os estágios iniciais do universo e decorre das observações sobre a radiação cósmica de fundo. Tais observações implicam em que o universo foi bastante homogêneo até o momento da grande dispersão final do *Big-Bang*. Por conseguinte, a amplitude de  $\beta$  não poderia ser maior do que uns poucos milhares de anos,



o que em comparação com a atual idade do universo é negligenciável. Em síntese, se  $\beta$  assumisse um valor elevado nas condições iniciais, as flutuações de temperatura seriam maiores do que as observadas na radiação cósmica de fundo.

No modelo 1, a maioria das regiões através das quais a luz das supernovas se propaga é de baixa densidade. No modelo 2, as densidades encontradas são, na sua maioria, mais altas do que a densidade do *background*. No modelo 3, a densidade média é da ordem da própria densidade do *background*. Em particular, vou me ater apenas aos modelos 4 e 5, os quais merecem maior atenção. No modelo 4, o valor inicial da função tempo do *Big-Bang*,  $\beta = 0$ , é consistente com a radiação cósmica de fundo. A distribuição da densidade, monotonicamente crescente desde um valor médio  $\rho = \rho_b$  na origem até  $\rho = 2,5\rho_b$  a cerca de 3 Gpc, foi escolhida de modo a ajustar as observações de supernovas. O aumento da densidade conduz à uma diminuição na expansão. Contudo, não há observações sistemáticas da distribuição de densidade, ou mesmo da expansão, a distâncias na escala de Gpc. Tudo o que sabemos se resume a que o movimento da Via-Láctea com respeito à radiação cósmica de fundo é pequeno. Por conseguinte, para dar conta do movimento relativamente pequeno em contraste com a radiação cósmica de fundo, tida como referencial em repouso, temos que admitir o aumento da expansão do universo a grandes distâncias. Vale ressaltar mais uma vez que a grande flexibilidade dos modelos de Lemaître-Tolman permite que se faça a escolha de funções tais que satisfaçam o ajuste aos dados oriundos da radiação cósmica de fundo. No modelo 5, a distribuição da densidade é assumida ser igual ao valor de *background*,  $\rho = \rho_b$ . Isso indica que inexistem estruturas na escala de Gpc. A função tempo do *Big-Bang* é bastante inomogênea, tornando-se fortemente inconsistente com as observações sobre a radiação cósmica de fundo.

Os resultados acima sugerem que a única maneira de ajustar os dados de supernovas é assumir a expansão decrescente do universo em direção ao passado. Isso pode ser feito quer supondo-se a diminuição da aceleração com a coordenada radial (modelos 4 e 5) ou adotando-se uma constante cosmológica (abordagem padrão). A primeira hipótese dispensa a introdução da constante cosmológica, porém, exige que estejamos situados numa posição privilegiada dentro do universo, bem como a existência de estruturas à escala de Gpc. A

segunda hipótese admite que os modelos aqui sugeridos suportam a aceleração do universo como uma justificativa para as observações realizadas sobre supernovas Ia. No quadro de tais modelos é impossível ajustar os dados de supernovas com uma distribuição realística de matéria, onde as variações do contraste de densidade fossem similares às observadas localmente. Aparentemente, as duas alternativas são equiprováveis do ponto de vista da análise observacional. A diferença reside antes nos pressupostos filosóficos. Não há como decidir se realmente estamos em um local especial. Em virtude da flexibilidade da cosmologia LT, os modelos 4 e 5 podem ser ajustados aos dados da radiação cósmica de fundo, simplesmente assumindo-se que a estrutura em Gpc é compensada por regiões externas. Repare o leitor que para tais modelos foi admitida uma distribuição de matéria em simetria esférica, com a ressalva de que esta assunção é adequada para a propagação da luz num intervalo de tempo pequeno. Para períodos maiores a evolução da matéria se torna importante. Normalmente se aceita que o universo evolua muito pouco até desvios para o vermelho de aproximadamente 0,5, de modo que a análise mencionada aqui não difere significativamente da realidade.

Passemos, então, ao modelamento dos dados de supernovas Ia de acordo com os estudos mais relevantes sobre o tema. Recordemos que, em geral, um modelo LT depende de três funções arbitrárias,  $M(r)$ ,  $\beta(r)$  e  $f(r)$ . A arbitrariedade da função  $M(r)$  é, na realidade, uma decorrência da liberdade de escolha do sistema de coordenadas [52]. A função  $\beta(r)$ , o tempo do *Big-Bang*, deve ser assumida constante se imaginarmos um modelo inomogêneo no qual exista uma região exterior definida como limite crítico perfeitamente equivalente a um universo FLRW, configurando assim um *Big-Bang* universalmente simultâneo. Também podemos fixar a coordenada temporal  $t$  da hipersuperfície de tempo constante "agora" de tal modo que ela seja igual à idade do universo  $t_0$  no modelo FLRW com  $\Omega_0 = 1$ , fato que nos garante um grau de liberdade extra no sentido de que a idade do universo passa a depender da posição. A terceira função,  $f(r)$ , dita "curvatura", é uma desconhecida a ser definida nos cálculos.

Como na referência [3], introduziremos as seguintes três quantidades:

$$R(r, t) = a(r, t)r, \quad (1.46)$$

$$f = A(r)r^2, \quad (1.47)$$

$$M = \beta r^3, \quad (1.48)$$

sendo  $M(r)$  (ver equação (1.8)) e  $\beta(r)$  (o tempo do *Big-Bang*) duas funções arbitrárias da coordenada comóvel  $r$  a serem definidas e  $a$  o fator de escala. De outra parte, as equações de Einstein fornecem

$$\dot{R}^2 = f + \frac{M}{R}, \quad (1.49)$$

donde, efetuando as substituições baseadas nas quantidades definidas acima, com  $\dot{R} = \dot{a}r$ , obtém-se

$$\dot{a}^2 r^2 = Ar^2 + \frac{\beta r^3}{ar}, \quad (1.50)$$

$$\dot{a}^2 = A + \frac{\beta}{a}. \quad (1.51)$$

A cosmologia FRW definida por  $A = 0$  assume a forma padrão  $a = t^{2/3}$  para  $\beta = 4/9$ . Isso se verifica tomando a solução da equação (1.51) com  $t_0 = 0$

$$t - \beta = \int_0^a \frac{du}{\sqrt{A + \frac{\beta}{u}}} \quad (1.52)$$

$$= \int_0^a \frac{du}{2/3\sqrt{u}} \quad (1.53)$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^a u^{1/2} du \quad (1.54)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} \quad (1.55)$$

$$= a^{3/2}. \quad (1.56)$$

Notemos que, devido à liberdade em lidar com  $r$ ,  $\beta$  poderia igualmente ser uma função que convergisse para  $4/9$  no infinito. No modelo LT assumido, de acordo com a escolha de  $A$  e  $\beta$ ,

$$\Omega_M = \left(1 + \frac{a}{\beta}\right)^{-1}, \quad (1.57)$$

$$1 + \frac{a}{\beta} = \Omega_M^{-1}, \quad (1.58)$$

$$a = \beta (\Omega_M^{-1} - 1). \quad (1.59)$$

A função  $A$  [3], uma das três especializações do modelo LT, foi arbitrada na forma

$$A = \frac{1}{1 + (cr)^2}, \quad (1.60)$$

com  $c$  representando uma constante de ajuste do modelo às observações.

A essa altura, para testarmos a teoria é interessante encontrar a distância de luminosidade,  $d_L^4$ , em função do desvio para o vermelho. Ajudaria muito saber como cada uma das quantidades envolvidas no cálculo varia na medida em que nos dirigimos mais profundamente ao passado através do cone de luz. Definimos o vetor nulo

$$\bar{v}_{(a)} = -\partial_t a + \frac{\sqrt{1+f}}{R'(r,t)} \partial_r a, \quad (1.61)$$

de tal forma que, da expressão da geodésica nula,  $dt = -\frac{R'(r,t)}{\sqrt{1+f}} dr$ , obtemos

$$\bar{v}_{(a)} \frac{dz}{da} = \frac{\dot{R}'(r,t)}{R'(r,t)} (1+z). \quad (1.62)$$

Uma vez que  $d_L$  é função de  $z$  e de  $R(r,t)$ , é útil saber também como  $R(r,t)$  varia ao longo do cone de luz, isto é,

$$\bar{v}_{(a)} \frac{dR(r,t)}{da} = \sqrt{1+f} - \dot{R}(r,t). \quad (1.63)$$

Finalmente,

$$\frac{dR(r,t)}{da} \frac{da}{dz} = \frac{R'(r,t)}{(1+z)\dot{R}'(r,t)} \left( \sqrt{1+f} - \dot{R}(r,t) \right), \quad (1.64)$$

---

<sup>4</sup>A distância de luminosidade,  $d_L$ , é calculada a partir do fluxo  $l_0$  de radiação emitido pela fonte e medido pelo observador. Formalmente, é dada por  $l_0 = L_e/4\pi d_L^2$ , onde  $L_e$  é a luminosidade absoluta da fonte medida no referencial da mesma. Na prática, a obtenção da distância de luminosidade de uma supernova a partir da observação de sua curva de luz requer um conjunto de premissas. Em geral as observações são dirigidas às supernovas mais próximas para o estabelecimento das relações entre a cor, a forma da curva de luz em bandas múltiplas, e o pico de luminosidade, uma vez que os objetos mais próximos podem ser observados em um número maior de bandas do que os objetos mais distantes. Finalmente, assume-se que o método resultante de conversão de curvas de luz para distâncias de luminosidade se aplica a todos os desvios para o vermelho.

$$\frac{da}{dz} = \frac{1}{(1+z)\dot{R}(r,t)} R'(r,t) \bar{v}_{(a)} = \frac{1}{(1+z)\dot{R}(r,t)} \left( \sqrt{1+fa'} - \dot{a}R'(r,t) \right). \quad (1.65)$$

Dessarte, temos um sistema de duas equações diferenciais a ser integrado para a obtenção da distância de luminosidade, qual seja,

$$\frac{dR(r,t)}{dz} = \frac{R'(r,t)}{(1+z)\dot{R}(r,t)} \left( \sqrt{1+f} - \dot{R}(r,t) \right), \quad (1.66a)$$

$$\frac{da(r,t)}{dz} = \frac{1}{(1+z)\dot{R}(r,t)} \left( \sqrt{1+fa'} - \dot{a}R'(r,t) \right). \quad (1.66b)$$

Seguindo a modelagem recomendada pelo Prof. D. Garfinkle (comunicação privada), para os gráficos das figuras 1.1 e 1.2 utilizei a "magnitude efetiva" conforme Perlmutter *et al.* [24], definida como a "magnitude efetiva na banda  $B$  no referencial em repouso". Essa última se resume à expressão

$$m_B^{\text{eff}} = m_R - A_R^{\text{MW}} - K_{BR} - \Delta_{B,1.1}, \quad (1.67)$$

a qual é essencialmente a magnitude aparente da supernova na banda  $R$ , corrigida sob a extinção da Via-Láctea pelo termo  $A_R^{\text{MW}}$ , convertida à magnitude na banda  $B$  no referencial em repouso por  $K_{BR}$  (correção K), e finalmente corrigida em função da forma da curva de luz por  $\Delta_{B,1.1}$ . Erros residuais no comprimento de onda foram compensados pela correção K. Perlmutter define a magnitude efetiva como  $m = M_B + 5 \log(H_0 d_L)$ , onde  $M_B$  é a magnitude absoluta na banda  $B$  tomada no máximo da curva de luz e  $d_L$  é a distância de luminosidade obtida da integração do sistema de equações diferenciais (1.66). É importante sublinhar que as supernovas mais distantes são as que apresentam maior brilho intrínseco.



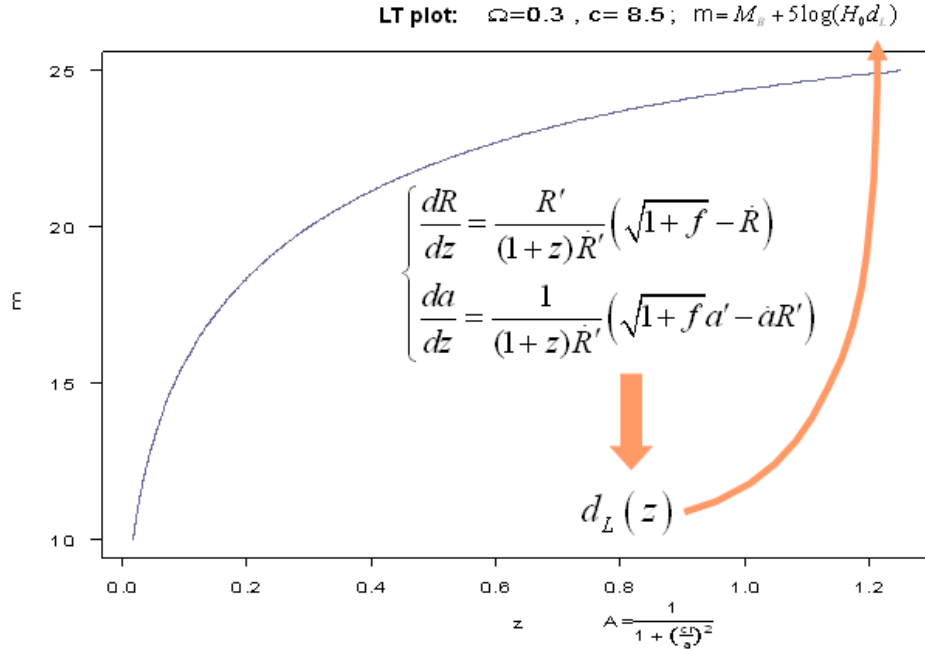


Figura 1.1: curva teórica da magnitude efetiva *versus* desvio para o vermelho. A integração do sistema de equações diferenciais exibido fornece a distância de luminosidade aplicada na fórmula da magnitude efetiva no modelo cosmológico LT definido pelas equações (1.46), (1.47), (1.48) e (1.60).

O gráfico da figura 1.2 foi construído a partir da tabela de A. Riess [18], reproduzida no anexo 1, resumindo 182 supernovas Ia registradas com alta precisão (com as respectivas barras de erro). As referências [1, 3, 6, 21, 22] são úteis para leituras complementares. A simulação foi reproduzida assumindo  $\Omega_M = 0,3$  e  $c = 8,5$  [3] e mantendo o melhor ajuste aos dados observacionais como na seção anterior. Com efeito, a integração numérica do sistema de equações diferenciais exibido na figura 1.1 conduz à distância de luminosidade  $d_L$  como função de  $z$ , uma vez que todas as quantidades dos lados direitos das equações são escritas como funções de  $z$ ,  $R$  e  $a$ . A figura 1.3 exhibe a distância de luminosidade em função de  $z$  (curva teórica e dados de supernovas Ia). O que se depreende da análise desses gráficos é uma ampla concordância com a observação (equiparável ao modelo  $\Lambda$ CDM) [3] pelo menos até desvios para o vermelho em torno de 1,8.

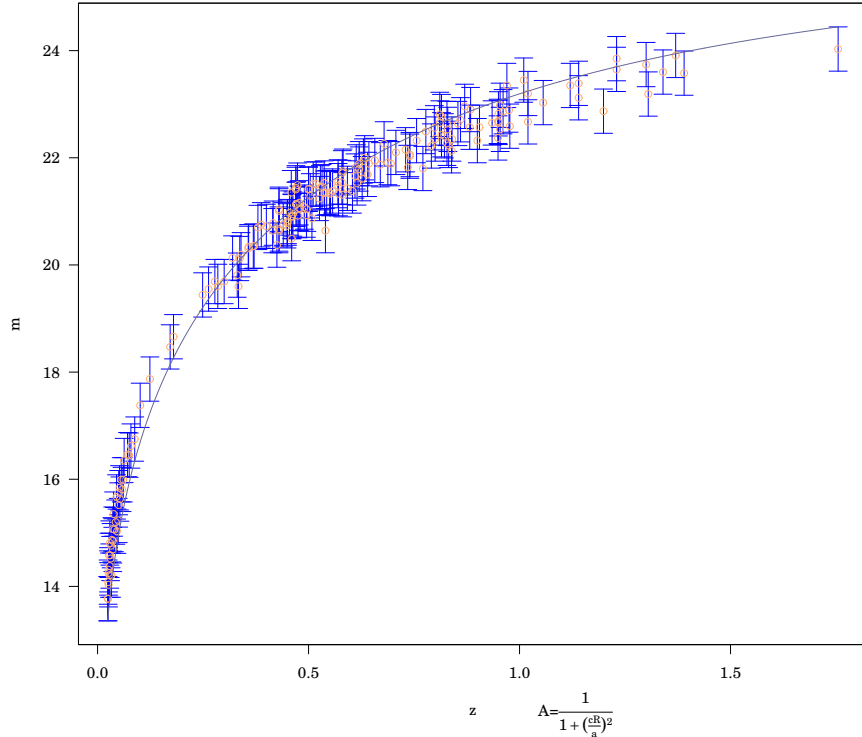
LT plot,  $\Omega_M = 0,3$ ,  $c = 8,5$ 

Figura 1.2: curva teórica da magnitude efetiva *versus* desvio para o vermelho e dados de supernovas segundo a tabela de A. Riess (*gold accurated*, vide Anexo 1).

## 2 Correção K

O confronto da teoria com os dados observacionais requer um trabalho meticuloso à parte. São muitas as causas de ruído nos resultados das observações. Por exemplo, uma amostra de supernovas a pequenos ou grandes desvios para o vermelho pode ser distorcida em direção à região mais brilhante de qualquer distribuição de magnitudes detectadas. O problema é que existe o denominado Viés de Malmquist (*Malmquist bias*), o qual resume o simples fato de que os objetos intrinsecamente brilhantes são mais fáceis de ver do que os intrinsecamente esmaecidos. Em particular, sob interferência do lenteamento gravitacional, e, quando se trata de lenteamento forte,

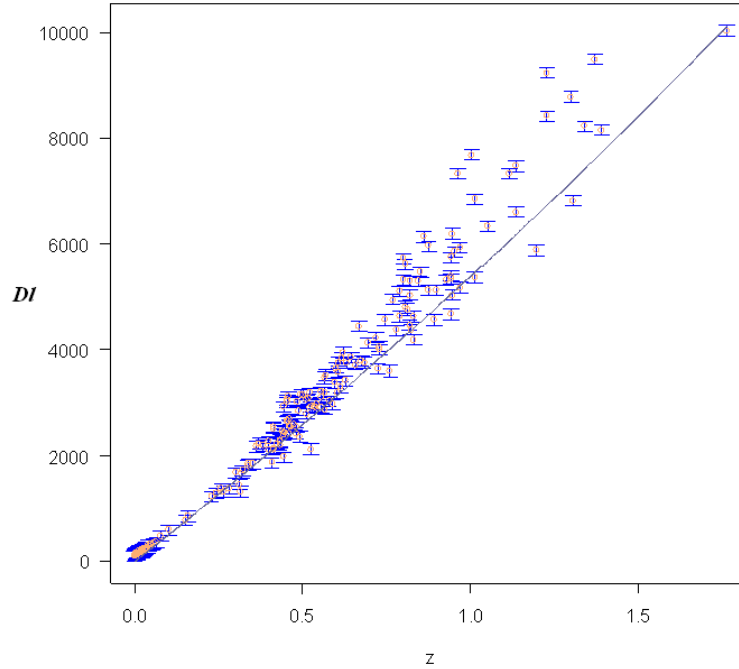
LT plot,  $\Omega_M = 0,3$ ,  $c = 8,5$ 

Figura 1.3: curva teórica da distância de luminosidade *versus* desvio para o vermelho no modelo cosmológico LT definido pela figura 1.1, e dados de supernovas segundo a tabela de A. Riess (*gold accurated*, vide Anexo 1).

a imagem será com certeza mais brilhante do que a fonte, pode-se chegar a resultados substancialmente divergentes da realidade. Além disso, tal efeito sobre as remotas supernovas Ia tende a acarretar um cálculo superestimado de  $\Omega_M$ . Por outro lado, há a necessidade de estabelecer referenciais comparativos no sentido de fixar padrões que permitam uniformizar os dados ou traduzi-los para contextos mais adequados. Nesse último enfoque aparece a chamada "correção K".

A correção K "corrige" pelo fato de que as fontes luminosas a diferentes desvios para o vermelho são em geral comparadas com padrões ou umas com as outras em diferentes comprimentos de onda nos referenciais em repouso. Tecnicamente, isso significa que a correção "K" corrige uma observação feita



em uma banda "passante" para outra, ou para valores bolométricos. Para uma fonte qualquer, a correção  $K$ ,  $K_{QR}$ , é dada pela igualdade

$$m_R = M_Q + DM + K_{QR}, \quad (1.68)$$

onde  $M_Q$  é a magnitude absoluta da fonte,  $DM$  é a distância *modulus* definida por

$$DM = 5 \log_{10} \left[ \frac{d_L}{10\text{pc}} \right], \quad (1.69)$$

com  $1\text{pc} = 3,086 \times 10^{16} m$ . A magnitude aparente  $m_R$  da fonte é relacionada a sua densidade espectral de fluxo  $f_\nu(\nu)$  (energia por unidade de tempo por unidade de área por unidade de frequência) por meio da expressão

$$m_R = -2,5 \log_{10} \left[ \frac{\int_0^\infty \frac{d\nu_o}{\nu_o} f_\nu(\nu_o) R(\nu_o)}{\int_0^\infty \frac{d\nu_o}{\nu_o} g_\nu^R(\nu_o) R(\nu_o)} \right], \quad (1.70)$$

na qual a integração é tomada sobre as frequências observadas  $\nu_o$ ;  $g_\nu^R(\nu_o)$  é a densidade espectral de fluxo para a magnitude-zero ou fonte padrão, a qual, para magnitudes relativas à estrela Vega, é a própria Vega;  $R(\nu_o)$ , chamado "função resposta", descreve a banda selecionada pelo dispositivo de análise.

A magnitude absoluta  $M_Q$  é definida como a magnitude aparente que a fonte teria se estivesse afastada 10 pc, em repouso (i.e., não desviada para o vermelho). É relacionada à densidade espectral da luminosidade  $L_\nu(\nu)$  da fonte (energia por unidade de tempo por unidade de frequência) segundo a equação

$$M_Q = -2,5 \log_{10} \left[ \frac{\int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d\nu_e}{\nu_e} \frac{L_\nu(\nu_e)}{4\pi(10\text{pc})^2} Q(\nu_e)}{\int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d\nu_e}{\nu_e} g_\nu^Q(\nu_e) Q(\nu_e)} \right], \quad (1.71)$$

na qual  $Q(\nu_e)$  equivale a  $R(\nu_e)$ , porém, na banda selecionada  $Q$ , sendo as integrais tomadas sobre as frequências emitidas  $\nu_e$ . Repare que  $M_Q$  é uma quantidade bolométrica, ao passo que  $m_R$  é tomada em uma única banda.



## 1.5 A métrica LT em 5D

Têm sido debatidas várias idéias acerca da real natureza do universo, algumas delas bem exóticas mesmo para as mentes mais abertas. Se bem que a rejeição seja considerável entre o público conservador, ninguém pode ignorar o fato de que seria muito difícil, senão mesmo impossível, cruzar as fronteiras atuais do conhecimento sem inovação ou quebra de paradigmas. No centro de convergência de áreas críticas para a compreensão física do mundo, como o são a teoria de campos e a cosmologia, residem as métricas com dimensões extras.

Um fenômeno atualmente discutido, dentro dos limites da plausibilidade dos objetos colapsantes, é o surgimento de uma singularidade nua<sup>5</sup> durante o colapso de determinado espaço-tempo dotado de simetria esférica e constituído por campos de matéria tais como poeira inomogênea ou fluido perfeito. Parece haver grande interesse em estudar a física do colapso gravitacional em representações com mais de quatro dimensões. Em particular, as métricas a cinco dimensões se mostram relevantes sobretudo porque as teorias de supergravidade em 10 e 11 dimensões produzem soluções das quais se obtém geometrias 5D após redução dimensional. Alternativamente, tenho investigado em teoria de campo uma representação 5-dimensional num espaço-tempo anti-de Sitter (AdS5), inicialmente não-métrico, porém capaz de adquirir uma métrica LT em determinadas circunstâncias de quebra de simetria [19]. Cabe, então, averiguar da repercussão de uma dimensão extra no processo de formação das singularidades nuas. Uma abordagem possível seria partir de certo espaço-tempo tipo Tolman a cinco dimensões, cuja poeira inomogênea em colapso produziria a singularidade nua. Uma vez que o exemplo não se identifica com um enfoque cosmológico, não faremos aqui mais do que uma sucinta explanação de certos aspectos do modelo, tais como a condição de formação do horizonte aparente e a configuração da densidade em torno da singularidade, remetendo o leitor interessado às referências recomendadas.

Seguindo o formalismo que temos adotado, para uma nuvem de poeira inomogênea, esfericamente simétrica, descrita num espaço-tempo pentadi-

---

<sup>5</sup>Singularidade gravitacional sem horizonte de eventos.

mensional de Lemaître-Tolman, teríamos o elemento de linha dado por

$$ds^2 = \frac{R'(r,t)^2 dr^2}{1+f} + R(r,t)^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] - dt^2, \quad (1.72)$$

onde  $(t, r, \chi, \theta, \phi)$  são coordenadas síncrono-comóveis e  $f$  é a função arbitrária usual da coordenada comóvel  $r$ . A coordenada  $\chi$  é a quinta dimensão, implementada em representação trigonométrica. A função  $R(r, t)$  segue sendo solução da primeira equação de campo independente

$$\dot{R}^2 = \frac{M(r)}{R^2} + f(r). \quad (1.73)$$

Ambas as funções arbitrárias  $f(r)$  e  $M(r)$  resultam da integração da equação de campo. As equações de Einstein em cinco dimensões tomam a forma  $\check{G}_{\mu\nu} = -8\pi G_5 \check{T}_{\mu\nu}$ , cujas componentes não nulas são

$$\check{G}_{00} = 3 \frac{(-2R(r,t)\dot{R}(r,t)\dot{R}'(r,t) - 2R'(r,t)\dot{R}(r,t)^2 + R(r,t)f' + 2R'(r,t)f)}{2R(r,t)^2 R'(r,t)}, \quad (1.74)$$

$$\check{G}_{11} = R'(r,t)^2 \frac{(3R(r,t)\ddot{R}(r,t) + 3\dot{R}(r,t)^2 - 3f)}{R(r,t)^2(1+f)}, \quad (1.75)$$

$$\check{G}_{22} = R'(r,t)^{-1} (2R(r,t)\partial_r \ddot{R}(r,t)R'(r,t) + 2R(r,t)\dot{R}(r,t)\dot{R}'(r,t) - R(r,t)f' + R'(r,t)\dot{R}(r,t)^2 - R'(r,t)f + R(r,t)^2 \ddot{R}'(r,t)), \quad (1.76)$$

$$\check{G}_{33} = \sin^2 \chi \check{G}_{22}, \quad (1.77)$$

$$\check{G}_{44} = \sin^2 \theta \check{G}_{33}. \quad (1.78)$$

Se, por simplicidade, nos restringimos ao contorno  $f(r) = 0$ , então

$$\dot{R}(r,t) = \frac{-\sqrt{M}}{R(r,t)}, \quad (1.79)$$

uma vez que assumimos igualmente a condição de colapso  $\dot{R}(r,t) < 0$ .

Integrando a equação (1.79),

$$\frac{R(r, t)^2}{2} = -\sqrt{Mt} \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.80)$$

Em  $t_1$  a área radial deve ir a zero, de modo que,

$$\frac{R(r, t)^2}{2} = -\sqrt{M}(t_2 - t_1), \quad (1.81)$$

$$\frac{R(r, t)^2}{2} = -\sqrt{M} \left( t_2 - \frac{r^2}{2\sqrt{M}} \right), \quad (1.82)$$

$$R(r, t)^2 = r^2 - 2\sqrt{M}t. \quad (1.83)$$

Com isso, pela liberdade de escala, deduzimos que

$$R(r, 0) = r. \quad (1.84)$$

Para geodésicas radiais nulas dirigidas ao futuro, obtém-se do elemento quadrático de linha

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{dr^2} + R'(r, t)^2 = 0, \quad (1.85)$$

$$\frac{dt}{dr} = R'(r, t). \quad (1.86)$$

Seja agora a variável,

$$u = r^\alpha (\alpha > 1), \quad (1.87)$$

$$\frac{du}{dr} = \alpha r^{\alpha-1}. \quad (1.88)$$

Escrita em termos de  $du$ , a equação da geodésica assume a forma

$$\frac{dR}{du} = \frac{1}{\alpha r^{\alpha-1}} \left( \dot{R} \frac{dt}{dr} + R' \right) \quad (1.89)$$

$$= \frac{R'}{\alpha r^{\alpha-1}} (\dot{R} + 1) \quad (1.90)$$

$$= \frac{R'}{\alpha r^{\alpha-1}} \left( 1 - \frac{\sqrt{M}}{R} \right). \quad (1.91)$$

Para  $R > \sqrt{M}$ ,  $dr/du$  é positiva, donde o horizonte aparente ser definido por  $R = \sqrt{M}$ . Portanto, o tempo em que tal horizonte se formaria é encontrado a partir da equação (1.83), isto é,

$$M = r^2 - 2\sqrt{M}t, \quad (1.92)$$

$$M - r^2 = -2\sqrt{M}t, \quad (1.93)$$

$$\frac{M}{-2\sqrt{M}} - \frac{r^2}{-2\sqrt{M}} = t, \quad (1.94)$$

$$\frac{-M}{2\sqrt{M}} + \frac{r^2}{2\sqrt{M}} = t, \quad (1.95)$$

$$t_h = \frac{r^2}{2\sqrt{M}} - \frac{\sqrt{M}}{2}. \quad (1.96)$$

Notemos que, sendo  $M$  positiva para  $r > 0$ , com  $M(r) = 0$  em  $r = 0$  temos que  $t_h < t_c$  para  $r > 0$  e  $t_h(0) = t_c(0)$ . Isso significa que, à exceção do ponto  $r = 0$ , todos os demais pontos sobre a curva de singularidade são cobertos pelo horizonte aparente. Repare que em  $r = 0$ ,  $t_h = 0/0$  (limite de aproximação á singularidade central).

Consideremos agora a distribuição de densidade  $\rho(r, 0)$  da nuvem de poeira na época em que o colapso teve início. Assumindo  $R(r, 0) = r$ ,

$$M' = \frac{2}{3}\rho(r)R^3\frac{dR}{dr}, \quad (1.97)$$

$$M'dr = \frac{2}{3}\rho(r)r^3dr, \quad (1.98)$$

$$M = \frac{2}{3}\int \rho(r)r^3dr. \quad (1.99)$$

Supondo que a densidade  $\rho(r)$  seja expandível numa série em torno da densidade central  $\rho_0$ , segue-se

$$\rho(r) = \rho_0 + \rho_1r + \rho_2\frac{r^2}{2!} + \rho_3\frac{r^3}{3!} + \dots + \rho_i\frac{r^i}{i!}, \quad (1.100)$$

onde  $\rho_0 > 0$  e  $\rho_i$  responde pela  $i$ -ésima derivada de  $\rho$  em  $r = 0$ . Dessa expressão tem-se que

$$M(r) = M_0r^4 + M_1r^5 + M_2r^6 + \dots, \quad (1.101)$$

com  $M_i = \frac{2}{3}\frac{\rho^{(i)}}{i!(i+4)}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ).

Pelo desdobramento apresentado, com a densidade decrescente em direção ao exterior, delinham-se as seguintes opções para o surgimento da singularidade nua:

- $\rho_1 < 0$ , singularidade será nua e de fraca curvatura;
- $\rho_1 = 0$  e  $\rho_2 < 0$ , singularidade será nua e apresentará forte curvatura se

$$\frac{M_2}{M_0^2} = \frac{2\rho_2}{\rho_0^2} < -22,01833.$$

O cenário descrito acima é considerado um contra-exemplo à chamada "conjectura da censura cósmica", ou *cosmic censorship conjecture*, e um caso de uso especializado da modelagem LT. Não obstante, a efetividade da aplicação de métricas LT com mais de quatro dimensões ainda é assunto em aberto, principalmente porque até o momento a consideração de tais métricas se restringe praticamente às discussões sobre o surgimento de singularidades nuas. Ainda não há consenso sobre o realismo de tais objetos do ponto de vista da relatividade geral. Pela literatura consultada, há bem poucos indícios de aplicabilidade produtora de métricas com mais de quatro dimensões conectadas a dados observacionais em cosmologia. Recentemente, porém, interessei-me pela possibilidade de descrever uma cavidade LT por meio de uma métrica em 5D como a que apresentei acima, incrustada num *background* friedmanniano padrão em 4D. A idéia foi assumir que a inomogeneidade carrega na quinta dimensão informação capaz de lhe conferir uma simetria tal que sua estrutura permaneça irreduzível a FLRW, a não ser na junção entre o *background* FLRW e a cavidade LT. Aqui vale uma breve discussão sobre simetrias cosmológicas do ponto de vista geométrico, e não apenas material. As simetrias de um espaço-tempo, ou isometrias, constituem um grupo para o qual a) a identidade é uma isometria, b) o inverso de uma isometria é uma isometria, e c) a composição de duas isometrias é uma isometria. Define-se a órbita de um ponto  $p$  como o conjunto de todos os pontos para os quais  $p$  pode ser movido pela ação translativa das isometrias do espaço. As órbitas são necessariamente homogêneas, isto é, todas as quantidades físicas são as mesmas em cada ponto. Uma vez que uma variedade invariante é um conjunto de pontos mapeáveis neles mesmos pelo grupo de isometrias, as órbitas são necessariamente variedades invariantes. A liberdade de translação em determinado espaço, ou dimensão de transladamento, é, em geral, simbolizada

pela letra "s", sendo definida a expressão  $s \leq n$ , onde  $n$  é o número de dimensões do espaço. Um importante subgrupo do grupo de isometrias, cuja dimensão pode ser considerada em cada  $p$ , é o grupo de isotropias, isto é, o grupo das isometrias que deixam  $p$  fixo (rotações). Em geral, a dimensão de rotação de um espaço é representada pela letra "q", sendo definida a expressão  $q \leq 1/2n(n-1)$ , onde  $n$  é o número de dimensões do espaço. Dessa forma, a dimensão  $\mathfrak{D}$  do grupo de isometrias de determinado espaço é  $\mathfrak{D} = s + q$  (translações + rotações). Na verdade, as isometrias contínuas são geradas pela álgebra de Lie dos vetores de Killing. A ação do grupo é caracterizada pela natureza da respectiva órbita no espaço em questão. Para um modelo cosmológico, em virtude da quadridimensionalidade do espaço-tempo, as dimensionalidades orbitais possíveis são  $s = 0, 1, 2, 3, 4$ . O grupo de isometrias que caracteriza os modelos LT em 4D é o  $\mathcal{G}_{s+q} = \mathcal{G}_3$  ou  $\mathcal{G}(2, 1)$ , isomórfico ao grupo real especial pseudo-ortogonal em  $s + q$ ,  $\mathcal{SO}(2, 1)$ . Cada modelo LT é caracterizado por uma superfície bidimensional de simetria esférica:  $s = 2$ ; todas as observações realizadas em qualquer ponto da superfície são rotacionalmente simétricas em torno de uma direção espacial privilegiada:  $q = 1$ ; portanto,  $\mathfrak{D}_{LT4D} = 2 + 1 = 3$ . Todavia, a implementação de uma quinta dimensão angular corresponde à introdução de um grau de liberdade "translacional" extra,  $p = 1$ , donde  $\mathfrak{D}_{LT5D} = s + p + q = 2 + 1 + 1 = 4$ . Por conseguinte, um modelo LT em 5D, conforme estabelecido anteriormente, exige um grupo de isometrias  $\bar{\mathcal{G}}_4$ , isomórfico ao grupo singular ortogonal em  $s + p + q$ ,  $\mathcal{SO}(2, 1, 1)$ , correspondente à álgebra de Lie inomogênea  $so(2, 1, 1)$ .

Dessarte, concluí que, fora da junção, a única maneira de se obter uma métrica LT em 4D redutível a FLRW seria por um mecanismo desconhecido de quebra espontânea de simetria  $\parallel \mathcal{Q} \parallel$ , tal que  $\parallel \mathcal{Q} \parallel \mathcal{SO}(2, 1, 1) \longrightarrow \mathcal{G}_3$ <sup>6</sup>. Esse estudo, ainda em andamento como projeto alternativo de doutoramento, vem sendo discutido com pesquisadores da área de teoria de campos e se baseou na crença de que o universo evolui conservando a simetria material entre regiões homogêneas e inomogêneas, sendo que dita simetria só poderia ser rompida por mecanismos de quebra espontânea ainda desconhecidos.

---

<sup>6</sup>A situação singular em que é física e claramente necessário encontrar uma métrica LT em 4D redutível a FLRW ocorre nas junções, onde  $\Sigma$  tem que ser quadridimensional.

## 1.6 Conhecimento objetivo em cosmologia

Encerro este capítulo com alguns comentários que julgo importantes. Sempre que não dispomos de acesso direto ao objeto da investigação, nos vemos obrigados a lançar mão de construtos derivados de elaborações supositícias grandemente aproximativas. Desde as relações que descrevem os interiores estelares até a cosmologia mais penetrante nos deparamos com a nossa severa finitude. Para articularmos tais construtos de maneira racional e organizada nos valem de parametrizações e engenhosidades matemáticas que, por vezes, nos custam anos de pesquisa para serem devidamente refinadas e testadas. No meu entender, o principal desafio da cosmologia observacional é selecionar uma teoria que seja consistente com os dados colhidos nas observações. O emprego de testes paramétricos no intuito de estabelecer um modelo condizente com o referido desafio deixa claro que sempre há a possibilidade de inclusão de novos parâmetros na cosmologia assumida por modo de explicar um determinado comportamento dos dados observacionais, ainda que se evoque a "Navalha de Ockham". No entanto, os testes paramétricos não devem fluir por considerações puramente arbitrárias. É preciso que estejam atrelados a uma linha-de-base axiomática para que ganhem força como instrumentos de validação. A trilha de raciocínio esposada acima mostra, entre outras coisas, que *inexiste base teórico-observacional, até o momento, para se rechaçar a cosmologia LT*, como, de resto, claramente comprovam as simulações aqui exibidas. Não há como optar pela homogeneidade ou pela inomogeneidade, até porque nem mesmo conseguimos decidir coisas fundamentais como quanto seja "grande escala"; quão grande deve ser essa última para que possamos dizer que o universo é globalmente homogêneo? É claro que a validação completa de um modelo deverá passar pelo contraste com outras fontes de dados como a radiação cósmica de fundo [66], o efeito Sunyaev-Zel'dovich, o lenteamento gravitacional e a formação de estruturas. Uma coisa, porém, é certa: se estamos no centro do universo, na vizinhança de um imenso vazio, atitude mais lógica não há do que aceitar que daqui da origem o universo não nos parece nem absolutamente homogêneo nem totalmente inomogêneo, mas, de algum modo, uma combinação de ambas as realidades. Isso lembra um pouco as bases conceituais da mecânica quântica, para a qual não há como discernir o que é a matéria fora da interação do observador com o aparato de medição. No caso da cosmologia, dependendo do aparato e da profundidade da observação poderemos concluir por uma imagem cosmológica homogênea ou inomogênea. A partir daí, tudo é



possível. Cabe a nós, cosmologistas, reunindo ética científica, bom senso e sobretudo humildade intelectual, dirigirmos as pesquisas conscientes de que talvez nossa distância da verdade seja da ordem da própria distância por diâmetro angular que nos separa dos aglomerados mais remotos.



## Capítulo 2

## Capítulo 2

# Teoria Fundamental das Lentes Gravitacionais

Esse capítulo tem por finalidade fornecer uma base de entendimento do fenômeno de lenteamento e da aplicabilidade das lentes gravitacionais na modelagem de estruturas, estabelecendo assim uma cultura para seu posterior e mais amplo emprego em cosmologia. Lembro o leitor de que a idéia inicial foi a de reunir instrumentos que permitam uma análise ulterior da relação entre o índice de refração médio em determinado  $z$  e a densidade média do universo no mesmo  $z$ , muito embora tal análise não ocorra nos limites dessa dissertação.

O assunto “lentes gravitacionais” ganhou força a partir dos anos 60. Nos últimos vinte anos, com os avanços vertiginosos da informática e da tecnologia de prospecção espacial, numerosos trabalhos com simulações e resultados observacionais nesse campo têm produzido mudanças expressivas em nossa maneira de ver o universo tanto em grande escala quanto nos limites da vizinhança galáctica mais acessível. Em particular, a busca por efeitos de lenteamento nas redondezas da Via-Láctea compreende um considerável capítulo do estudo geral sobre lentes gravitacionais, provavelmente capaz de ocupar uma vida de pesquisa sem que seja completamente esgotado. Isso se deve em parte a que muito tempo de exposição é necessário para computar as possibilidades de lenteamento entre um observador na Terra e as estrelas, por exemplo, da Grande Nuvem de Magalhães. Além disso, a composição do

halo da Via-Láctea por si só já constitui um tema com nuances próprias de grande incerteza, sobretudo no tocante à composição da matéria escura. O estudo do halo exterior, em particular, requer antes de tudo a construção de um modelo satisfatório capaz de reproduzir as circunstâncias sob as quais foi possível a formação dos aglomerados globulares, tarefa que tem se revelado muito mais próxima de uma cosmogonia do que se gostaria. Finalmente, as dificuldades inerentes ao ato de observar impõem as costumeiras restrições de precisão, algo com que sempre teremos de nos preocupar em qualquer modelagem e que nos faz repensar com frequência nossos métodos e objetivos. Uma das situações mais dramáticas de incerteza ocorre quando não é possível resolver se o efeito observado provém de microlenteamento ou de variabilidade estelar intrínseca.

A potencialidade para o esclarecimento contida na teoria do lenteamento gravitacional compreende desde a descoberta de planetas até as possíveis implicações sobre a radiação cósmica de fundo. No presente estudo, embora me concentre nos efeitos de lenteamento gravitacional fraco, farei uma abordagem resumida, porém sólida, da teoria básica das lentes gravitacionais, remetendo o leitor, sempre que necessário, às referências consagradas na literatura científica mundial.



## 2.1 Intróito

De acordo com a teoria geral da relatividade, a gravidade nada mais é do que a realização da curvatura do espaço-tempo. Consequentemente, os raios de luz podem ser curvados na vizinhança de um objeto massivo. Por exemplo, uma estrela que normalmente não seria visível por estar atrás do Sol é vista próxima ao seu limbo, mostrando assim como a luz se curva em presença da gravidade.

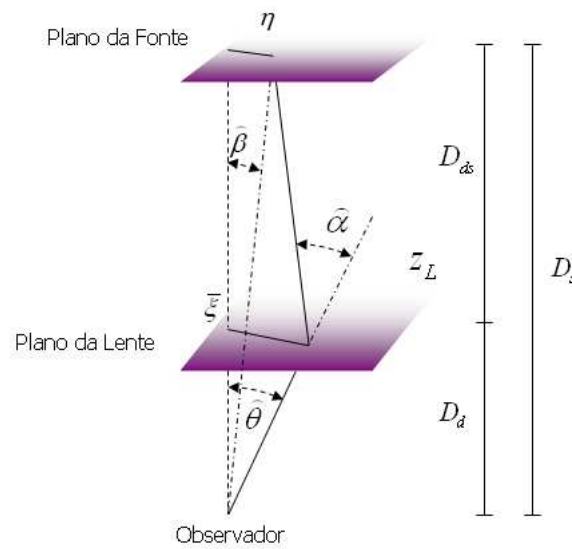


Figura 2.1: esquema da geometria do lenteamento gravitacional, em que determinada massa situada a uma distância por diâmetro angular  $D_d$  (ou desvio para o vermelho  $z_L$ ), com parâmetro de impacto  $\xi$  referente ao seu *centro* fiduciário, deflete a luz da fonte situada em  $D_s$ . A distância por diâmetro angular entre a massa defletora e a fonte é  $D_{ds}$ . Não havendo outros deflectores próximos à linha-de-visada, e, uma vez que a lente é assumida fina em comparação com as distâncias  $D_d$  e  $D_s$ , sua influência é computada pelo ângulo de deflexão  $\tilde{\alpha}$ . O raio defletido alcança o observador, o qual tem a impressão de que a fonte está na posição  $\tilde{\theta}$ . A real posição da fonte é dada por  $\tilde{\beta}$ .

Costuma-se achar que a deflexão da luz em presença da gravidade foi predita pela primeira vez via relatividade geral. Trata-se de uma abreviação histórica, posto que, de acordo com a teoria newtoniana, podemos imaginar a luz constituída de partículas, as quais, sendo capazes de "sentir" a gravidade, teriam suas trajetórias desviadas.

Ainda que o primeiro cálculo conhecido acerca da deflexão de um raio de luz por um objeto massivo tenha sido realizado por Soldner em 1801 com base na mecânica newtoniana<sup>8</sup>, a busca efetiva por lentes gravitacionais remonta a princípios do século XX (Eddington, 1919, foi o primeiro a testar as previsões de Einstein, seguido por Lodge também em 1919), sendo Zwicky, em 1937, quem se antecipou na compreensão do efeito de lenteamento em sua dimensão cosmológica. Em 1964, Sjur Refsdal apresenta pela primeira vez um método para determinação da massa de uma estrela atuando como lente, mas somente em 1992 (Blandford & Narayan) surge uma abordagem mais concisa e sistemática do assunto, resumindo quase vinte anos de estudos (Dyer & Roeder 1973, Mitrofanov 1981, Narayan *et al* 1984, Crawford *et al* 1986, Blanchard & Schneider 1987, Sasaki 1989, Watanabe & Tomita 1991, Bartelmann & Schneider 1991). No mesmo ano aparece o primeiro livro dedicado exclusivamente ao tema (Schneider *et al* 1992). Em particular, Chang & Refsdal (1979) e Gott (1981) já haviam observado que mesmo uma imagem dupla não resolvida de um quasar, criada por uma massa pontual no halo de uma galáxia distante, pode ser analisada em termos do tempo de variação do brilho combinado das duas imagens. Dessa maneira, é possível detectar os efeitos da matéria escura bariônica na forma de anãs marrons e objetos jovianos (ver em [36] todas as referências citadas neste parágrafo até aqui). Dentro desse esboço histórico, também é digno de nota o trabalho de Schramm, publicado em 1995 [63], acerca de aglomerados de galáxias atuando como lentes gravitacionais sobre as imagens de galáxias em *background*, no qual ele introduz e resolve uma equação diferencial linear ordinária de primeira ordem que descreve completamente o lenteamento radial dos aglomerados.

O conceito de lente gravitacional, em sua acepção mais ampla, resume um coletivo de efeitos do campo gravitacional sobre a radiação eletromagnética,

---

<sup>8</sup>Soldner determinou que o ângulo de deflexão no limbo solar seria de 0."84, metade do valor calculado pela teoria geral da relatividade.

assumindo-a geometricamente representada por raios. Minha pesquisa é baseada sobretudo no lenteamento gravitacional fraco, acerca do qual apresentarei os aspectos teóricos mais relevantes com o auxílio de algumas simulações computacionais. Em seguida, farei uma revisão resumida do Grupo Local, preparando o ambiente para a abordagem mais direta do principal assunto em questão. Por último, discutirei o que de melhor se tem produzido no sentido da aplicação do conhecimento acumulado sobre lentes gravitacionais ao estudo da estrutura da galáxia, partindo da ocorrência de lenteamento no Grupo Local. Não será contemplado nessa discussão o emprego do conceito de microlenteamento no processo de varredura em busca de planetas, assunto que ocuparia uma dissertação a parte.



## 2.2 Lenteamento

Admitamos que o halo da nossa galáxia seja composto, entre outros objetos, por uma quantidade não negligenciável de astros escuros massivos. Se algum desses objetos do halo estiver próximo o bastante da linha de visada de um observador focado numa estrela distante ocorrerá um efeito caracterizado pelo abrilhantamento temporário da luz proveniente da estrela em foco. Tal efeito de lenteamento será descrito com mais detalhes adiante.

Na maioria dos casos de interesse é suficiente usar o campo gravitacional no limite fraco para a descrição do efeito de lenteamento próximo a massas pontuais. Consideremos o cenário descrito na figura 2.1. Assumindo simetria esférica, com a massa pontual no centro das coordenadas, qualquer trajetória através do plano da lente desde a fonte até o observador  $O$  será defletida. Uma vez que o sistema de coordenadas é arbitrário, podemos adotar o plano  $\widehat{\theta} = \pi/2$  para o caminho da luz.

Tomando-se o exemplo tradicional do potencial newtoniano representativo de uma lente provocada por um ponto material, o ângulo da deflexão sofrida pelo raio de luz sob influência do objeto lenteador é dado pela igualdade

$$\widehat{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_{\perp} \Phi dl = \frac{4GM}{c^2 \bar{\xi}}, \quad (2.1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz,  $l$  é o percurso do raio luminoso,  $\Phi$  é o potencial newtoniano,  $M$  a massa-origem da lente e  $\bar{\xi}$  o parâmetro de impacto, o qual nada mais é do que a distância que resume a zona linear eficaz de influência da lente. A dedução da igualdade (2.1)<sup>1</sup> encontra-se em [57], recomendando-se também a referência [58].

Tomemos por definição,  $\gamma(\widehat{\theta}) = D_{ds}/D_s$ . Tendo em mente o esquema da figura 2.1, a equação da lente estabelece que

$$\widehat{\beta} = \widehat{\theta} - \gamma(\widehat{\theta})\widehat{\alpha}, \quad (2.2)$$

onde  $\widehat{\alpha}$  é o ângulo de deflexão. Note o leitor que se a lente não fosse esfericamente simétrica teríamos ângulos vetoriais, isto é,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\theta}$  e  $\vec{\alpha}$ . A equação (2.2)

---

<sup>1</sup>Com essa expressão, Einstein foi o primeiro a derivar corretamente o ângulo de deflexão  $\widehat{\alpha}$  de um raio de luz ao passar a certa distância  $\bar{\xi}$  de um objeto de massa  $M$ .



é conhecida como *equação da lente*. Dado que no caso simétrico-circular vale a equação (2.1) e  $\bar{\xi} = D_d \hat{\theta}$  (para ângulos pequenos), é lícito reescrever essa equação como

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \hat{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{4GM(\bar{\xi})}{c^2 \bar{\xi}}, \\ \hat{\beta} &= \hat{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{4GM(\bar{\xi})}{c^2 \hat{\theta} D_d}, \\ \hat{\beta} &= \hat{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s D_d} \frac{4GM(\bar{\xi})}{c^2 \hat{\theta}}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Definimos agora o chamado raio de Einstein segundo a igualdade

$$\hat{\theta}_E = \sqrt{\frac{D_{ds}}{D_s D_d} \frac{4GM(\bar{\xi})}{c^2}},\tag{2.4}$$

donde

$$\hat{\beta} = \hat{\theta} - \frac{\hat{\theta}_E^2}{\hat{\theta}},\tag{2.5}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}_E^2}{\hat{\theta}}.\tag{2.6}$$

Finalmente,

$$\frac{\hat{\theta}}{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\theta}^2}{\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}_E^2}.\tag{2.7}$$

A expressão (2.6) é uma simples equação de segundo grau com soluções

$$\hat{\theta}_{1,2} = 1/2 \left( \hat{\beta} \pm \sqrt{\hat{\beta}^2 + 4\hat{\theta}_E^2} \right),\tag{2.8}$$

que fornecem as posições das duas imagens geradas por uma fonte pontual.

Chegamos assim à magnificação  $\mu$ , isto é, à relação entre os ângulos sólidos da imagem e da fonte, conservado o brilho superficial,

$$\mu = \frac{\hat{\theta} d\hat{\theta}}{\hat{\beta} d\hat{\beta}}.\tag{2.9}$$

Compreendendo melhor o conceito de magnificação, lembremos que a quantidade de luz recebida de uma estrela é determinada pelo ângulo sólido subtendido pela estrela. O ângulo sólido por sua vez é compreendido pela área angular aparente da estrela no céu. O efeito de lenteamento amplia o ângulo sólido sob o qual nós recebemos a luz, aumentando assim a quantidade dessa luz recebida. Dessa forma, se nós pudermos calcular o ângulo sólido da estrela na ausência da lente e em seguida com a lente, a magnificação seria, em última análise,

*magnificação = ângulo sólido com lenteamento / ângulo sólido sem lenteamento.*

### 2.3 Magnificação, curvas críticas e cóusticas

No plano da lente, há locais em que formalmente a magnificação é infinita; são chamados "curvas críticas". Os locais correspondentes no plano da fonte são conhecidos como "cóusticas". Para distribuições de massa esfericamente simétricas, as curvas críticas são círculos. Para uma lente pontual, a cóustica degenera em um ponto. Para lentes elípticas ou lentes esfericamente simétricas sob ação de um cisalhamento exterior, as cóusticas apresentam cúspides.

Uma forma de visualizar as curvas críticas é, de acordo com T. Schramm, por via do chamado "campo de elipses" do mapeamento da lente. A figura 2.2 mostra como um campo de elipses teórico e idealmente alinhado é distorcido por uma lente pontual (supondo simetria radial e simetria elíptica). Eu discuti com o Prof. Schramm acerca de alguns aspectos do efeito de lenteamento e adicionei comandos ao código original por ele desenvolvido para exibição das curvas críticas. Para as galáxias elípticas (pequenas elipses na figura), hipoteticamente dispostas em configuração horizontal, as lentes causariam deformações como as que aparecem na vizinhança das curvas críticas.

Se introduzirmos um cisalhamento (*shear*), a simetria esférica é perdida e a curva crítica assume um formato elipsoidal. A cóustica é a imagem da curva crítica formada pela ação do mapeamento do plano da lente no plano de visualização do observador (veja glossário).

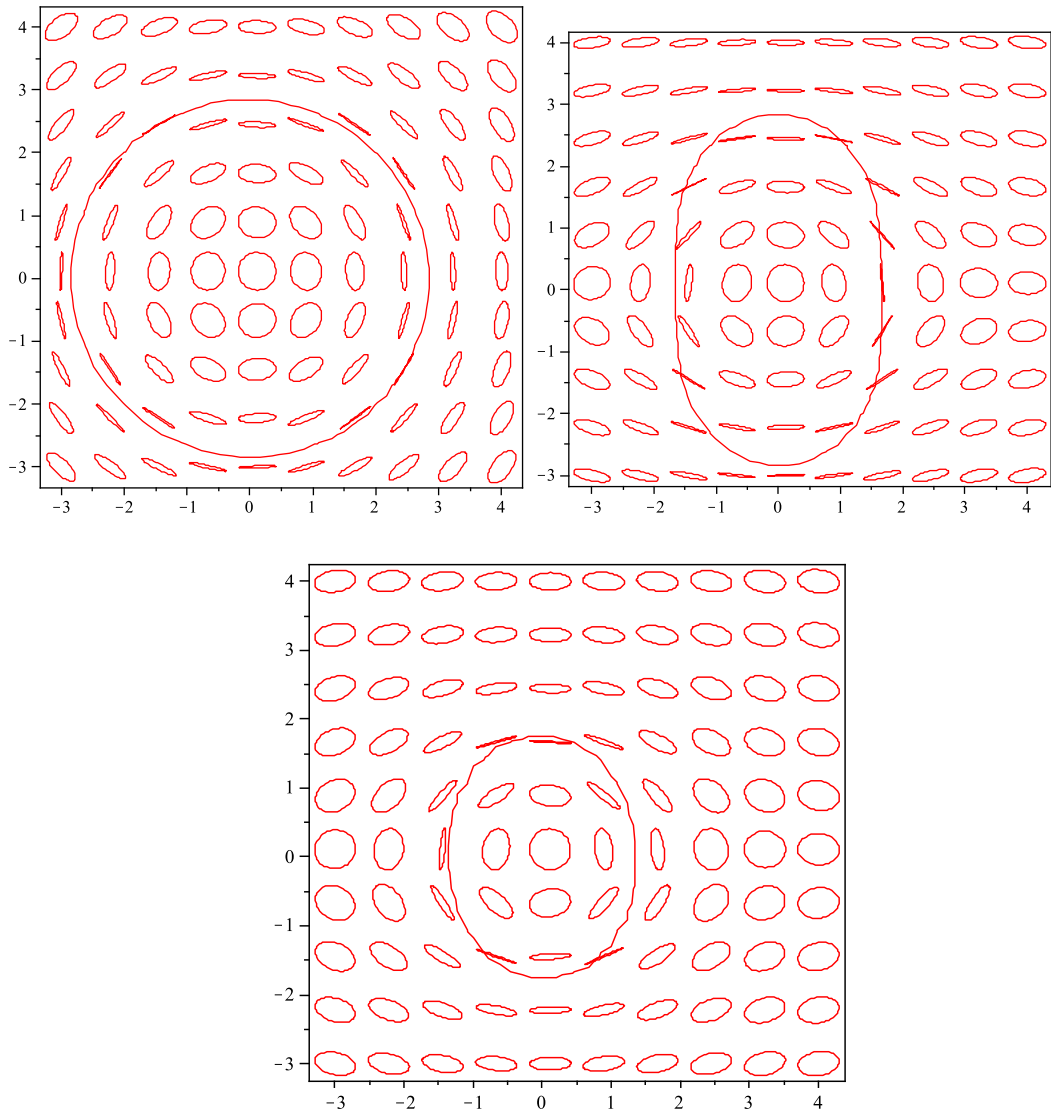


Figura 2.2: campos de elipses (galáxias elíticas) deformados pelo efeito de lenteamento (acima, à esquerda, simetria radial; acima, à direita, e abaixo, simetria radial perdida pela introdução do cisalhamento).

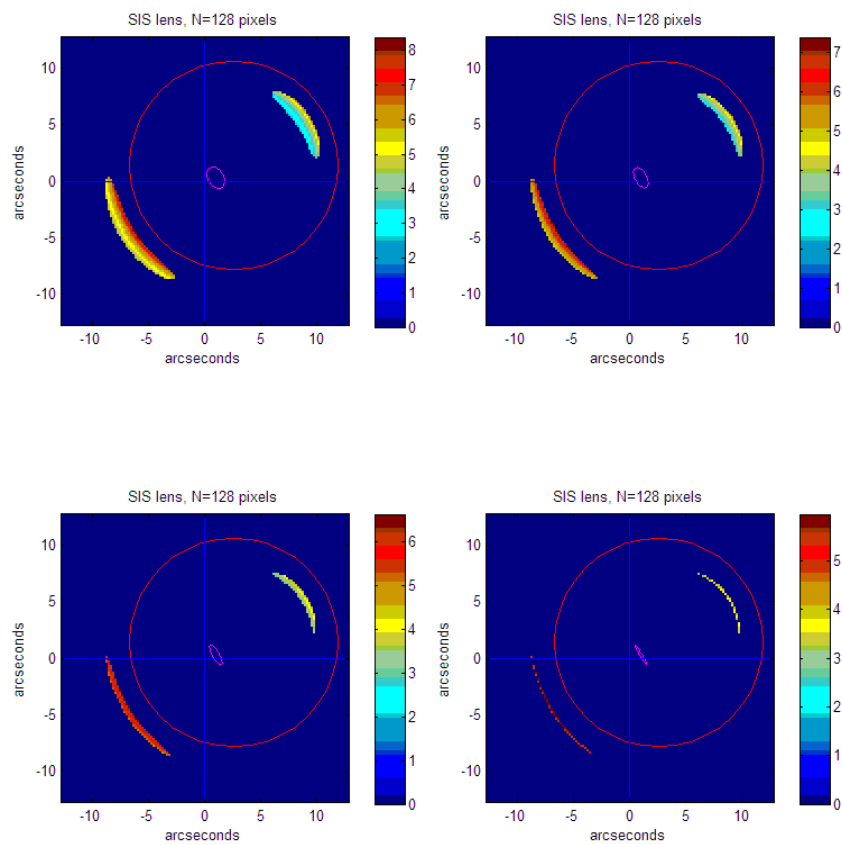


Figura 2.3: da esquerda para a direita e de cima para baixo: seqüência de simulações para quatro elipticidades da galáxia fonte (0.3, 0.5, 0.7 e 0.9).

Já a figura 2.3 ilustra o efeito de lenteamento, porém, considerando como fonte não um ponto massivo mas uma galáxia elíptica. Nela o leitor poderá perceber com mais clareza o fenômeno da magnificação. Utilizei um código em MATLAB, criado por Newbury and Spiteri [20] e adaptado por mim para a geração de imagens segundo o modelo da esfera isotérmica singular (doravante, EIS)<sup>2</sup>, manipulando o parâmetro de massa e os desvios para o vermelho da lente e da fonte. Lembremos que nesse modelo o conteúdo massivo da lente é assumido ser um gás ideal constringido por um potencial gravitacional de simetria esférica. Tal gás é suposto em equilíbrio térmico e hidrostático. A fonte é representada pela pequena elipse magenta e o anel de Einstein pelo grande círculo vermelho. A magnificação diverge ao longo desse último de acordo com uma escala de cor; quanto maior a magnificação, mais nos dirigimos para o extremo vermelho do espectro. Os parâmetros da lente são as coordenadas do centro de distribuição de massa da EIS, o parâmetro de massa  $\sigma (= 750)$  e o desvio para o vermelho ( $= 0.3$ ). Os parâmetros da fonte são o desvio para o vermelho ( $= 0.7$ ), as coordenadas do centro da fonte, a elipticidade e o fator de magnificação ( $= 1.0$ ).

Na discussão acima nós consideramos uma lente gravitacional a uma distância angular fixa de uma estrela. De fato, a separação angular está sempre mudando em função do movimento relativo da lente e da estrela. Tal fato implica em que o brilho total das duas imagens se altera de modo peculiar.



---

<sup>2</sup>Um modelo simples muito utilizado para estimar a massa de aglomerados de galáxias. É baseado na assunção da simetria esférica atribuída a um sistema em equilíbrio hidrostático submetido tão somente a forças de pressão e gravidade (por exemplo, um gás cujas partículas são galáxias).

## 2.4 O Grupo Local

O Grupo Local é um pequeno grupo de 35 galáxias, a maioria delas anãs distribuídas ao redor da Via-Láctea e da M31 em amplitude radial máxima de aproximadamente 1.2 Mpc, supondo um potencial de simetria esférica. Em geral não se comenta o porquê da simetria esférica, mas podemos dizer que 1) ela serve para tornar a teoria e os cálculos mais simples, além de que 2) tudo que observamos está no passado, ao longo de uma linha radial que se aprofunda em qualquer direção desde um observador convenientemente posicionado no "centro".

A busca de novos integrantes do Grupo Local parece uma tarefa contínua. Muitos objetos foram descobertos em anos recentes. A dinâmica observada das galáxias ditas "satélites" do Grupo Local sugere a existência de regiões dominadas por halos escuros contendo 10 vezes mais matéria escura do que as satélites conhecidas. Do ponto de vista dinâmico, por menos que se admita, modelos de MOND (Modified Newtonian Dynamics, Milgrom 1983) [39] podem dar conta do cenário sem lançar mão de matéria escura, apenas alterando a segunda lei de Newton em baixas acelerações. Dessa forma, as objeções feitas às teorias de MOND deveriam discutir tão somente os limites de sua generalização a outros fenômenos. O fato é que MOND se torna mais complexa quanto mais complexo for o contexto estudado (por exemplo, é preciso introduzir o formalismo vetorial/tensorial para fazer cosmologia com MOND). Entretanto, até o presente momento, MOND não pode ser refutada como recurso de modelagem galáctica. Evidentemente, não estou afirmando que não existe matéria escura. Há várias evidências que a comprovam; o aglomerado da Bala, por exemplo, cujas imagens mostram a colisão de dois aglomerados de galáxias com grandes manchas atribuídas à matéria escura (ilustração 1). Em particular, uma vez que a deformação do espaço-tempo provocada pela massa dos aglomerados de galáxias distorce a luz de galáxias distantes situadas atrás deles, a medição desse efeito de lenteamento permite estimar a massa real dos aglomerados. Simplesmente chamo atenção para o fato de que em alguns contextos a matéria escura não se faz necessária na construção explicativa.

O grupo local é bastante heterogêneo em morfologia, idade, metalicidade e graus de isolamento. Galáxias anãs elíticas (dEs) e esféricas (dSphs)

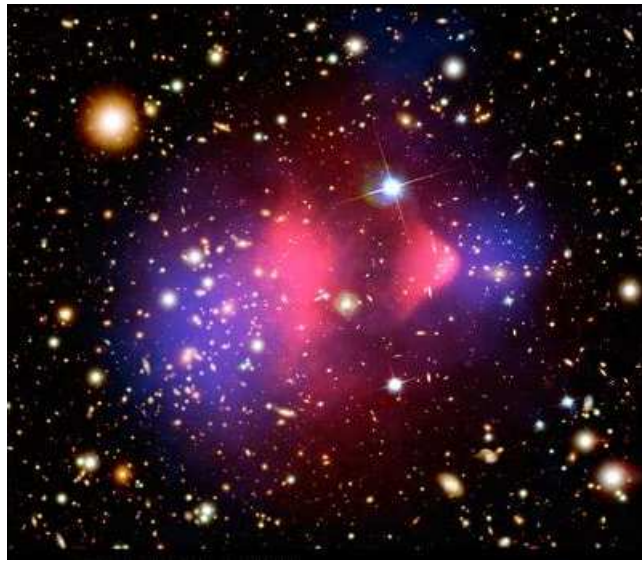


Ilustração 1: o aglomerado da Bala, distante cerca de 3,4 bilhões de anos-luz. As manchas rosadas correspondem a nuvens de gás muito quente emitindo raios X. As manchas azuis representam a matéria escura. Foto: Telescópio Espacial Hubble e Chandra/STScI/Nasa.

concentram-se em torno das grandes espirais; galáxias anãs irregulares (dIrrs) tendem a permanecer mais afastadas, muito embora as duas mais massivas (Grande Nuvem de Magalhães e Pequena Nuvem de Magalhães) estejam bem próximas à Via-Láctea e interajam com ela e entre si. Tal distribuição está longe de ser completamente entendida. Por suas características de baixa metalicidade e níveis relativamente altos de gás, as dIrrs têm sido consideradas similares às primeiras galáxias do universo.

As galáxias dIrrs apresentam traços de formação recente de estrelas. Várias delas possuem aglomerados globulares e abertos. Já as dSphs são dominadas por estrelas velhas ou de idade intermediária, sendo sistemas muito pobres em gás. A ausência de gás nesses objetos tem sido difícil de explicar, sobretudo porque há evidências de episódios recentes de formação estelar em algumas dSphs. As galáxias dEs têm concentração central bem pronunciada, ao contrário de suas vizinhas esferoidais com pequenos adensamentos em seus centros. Tanto galáxias dIrrs de baixa massa como várias galáxias dSphs exi-

bem vestígios centrais de suas últimas criações estelares, fato que permite estabelecer um gradiente radial de idade associado a outro de metalicidade.

As galáxias espirais são sem dúvida os indivíduos mais complexos. Dotadas de estrelas de todos os tipos, idades, metalicidades e comportamentos cinemáticos, elas dominam gravitacionalmente o Grupo Local. Seus discos finos, berçários de novas estrelas, são preenchidos por nuvens moleculares e dominados por estrelas de população I. Nos discos espessos e nos halos predominam estrelas de população II, sendo que as estrelas extremamente pobres em metais dos halos são bem mais difíceis de datar.

Grosso modo, as estrelas são agrupadas em duas classes gerais ditas "População I" e "População II". A classificação depende de fatores como composição química, presença de gas nas redondezas, localização na galáxia, cor integrada e outros aspectos, mas, fundamentalmente, podemos afirmar que as estrelas da população I têm elevada metalicidade enquanto que as da população II apresentam baixa metalicidade. Tal diferença está diretamente relacionada com a idade das estrelas; as mais jovens, concentradas no disco fino, são ricas em metais, ao passo que as mais antigas, típicas das regiões externas e do halo, são pobres em metais. No cômputo geral, essa imagem atende à realidade observada, uma vez que a região do disco galáctico concentraria a matéria precipitada do halo durante o processo de formação da galáxia. A formação de nuvens moleculares no disco fino e o gradativo enriquecimento do meio interestelar pelos sucessivos ciclos de esvanecimento e geração de estrelas garantem a alta metalicidade do disco em detrimento das antigas e quase isoladas regiões do halo. Naturalmente, essa classificação é simplista e não resolve as subpopulações intermediárias, porém, serve para destacar a metalicidade como fator crucial no estudo da evolução estelar.

Como dei a entender acima, a heterogeneidade do Grupo Local nos leva a traçar histórias bem distintas para cada objeto. O entendimento da diversidade das galáxias anãs é algo que ainda nos escapa, apesar das modernas técnicas fotométricas empregadas na derivação das suas prováveis origens e da quantidade de dados acerca da cinemática relativa desses objetos e de suas dinâmicas internas. Contudo, elas compartilham padrões globais como metalicidade média, magnitude absoluta e brilho superficial central. Parece claro que suas massas e interações com o meio externo desempenham papel



fundamental em cada estágio evolutivo. Por último, cabe lembrar que, apesar do Grupo Local ser relativamente pouco profundo e denso para produzir efeitos apreciáveis de lenteamento gravitacional, não se descarta a possibilidade de termos em futuro não muito distante alguns resultados de interesse provenientes da varredura realizada por telescópios de grande resolução.



## 2.5 Lenteamento no Grupo Local

Os principais trabalhos sobre lenteamento no Grupo Local, no que concerne à pesquisa do conteúdo do halo, referem-se às estrelas das Nuvens de Magalhães, notadamente da Grande Nuvem de Magalhães (GNM). Como observou o astrofísico Bodan Paczynski em 1996 [38], se o halo galáctico contém objetos escuros, chamados *Massive Compact Halo Objects (MACHOS)*, com massas que variam desde a de Jupiter ( $\sim 1/1000$  da massa solar) até a das anãs marrons ( $\sim 1/10$  da massa solar), então tais objetos ao cruzarem a linha de visada entre a Terra e as estrelas mais distantes poderiam provocar efeitos de lenteamento.

Quatro equipes de colaboradores - *EROS*, *MACHO*, *OGLE* e *DUO* - buscam atualmente por objetos do halo, usando estrelas da GNM como referencial de *background* contra o qual se investigam os movimentos daqueles objetos.

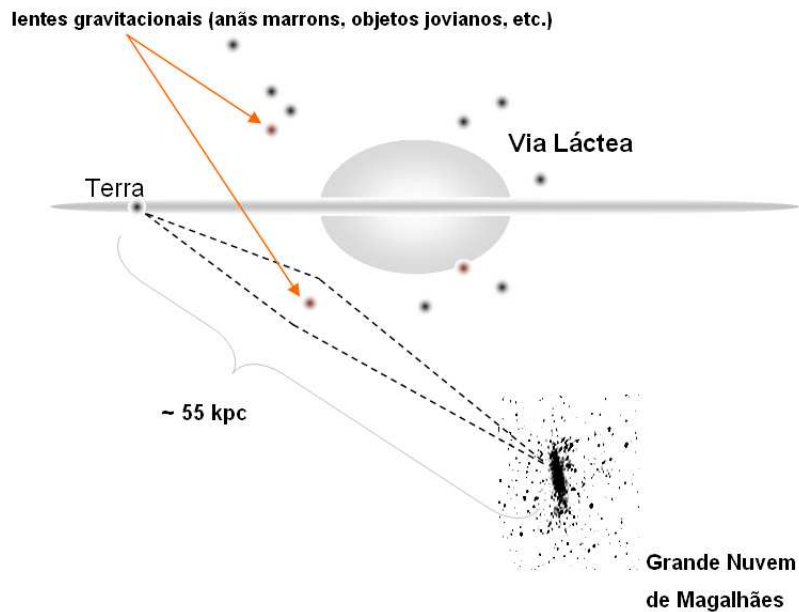


Figura 2.4: vista esquemática do sistema da Via-Láctea com ênfase na Grande Nuvem de Magalhães e em objetos massivos do halo capazes de produzir lenteamento.

A figura 2.4 mostra um esquema de como ocorre o lenteamento no domínio em questão. A luz proveniente de uma estrela na GNM é defletida por um objeto massivo do halo. Tal objeto atua assim como uma lente gravitacional. Em tese, por meio da medição da distribuição de eventos de lenteamento se poderia inferir alguma informação acerca da natureza e da distribuição dos objetos do halo. Na prática, procurar essas lentes é uma tarefa bastante ingrata, pois o tipo de evento descrito acima ocorre muito raramente. A colaboração EROS, por exemplo, é capaz de monitorar cerca de 4 milhões de estrelas ao mesmo tempo [26]; em três anos de varredura foram encontrados apenas dois eventos classificáveis como resultantes de lenteamento. Por outro lado, a equipe MACHO registrou vários candidatos a lentes.

Retomemos o sistema de lenteamento típico mostrado na figura 2.1. Suponhamos que existam vários objetos lentesadores no campo de visão do observador. Definimos a profundidade ótica para o lenteamento gravitacional como o ângulo sólido que confina tais objetos e seus respectivos anéis de Einstein dentro do campo de visão. Agora, suponhamos todos aqueles objetos com a mesma massa  $M$ . Assumindo a distância  $D_d$ , sobre uma "lâmina" plana hipotética com espessura  $\Delta D_d$  é razoável projetar em média uma lente por área superficial

$$\pi \widehat{\theta}_M^2 = \frac{M}{\rho \Delta D_d}, \quad (2.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa média, considerando todas as lentes no volume  $\pi \widehat{\theta}_M^2 \Delta D_d$ . A secção reta de cada lente é dada por  $\pi \widehat{\theta}_E^2$  ( $\widehat{\theta}_E$  é o raio do anel de Einstein). A contribuição da lâmina para a profundidade ótica é fornecida por

$$\Delta \tau = \frac{\pi \widehat{\theta}_E^2}{\pi \widehat{\theta}_M^2} = \left[ \frac{4\pi G \rho D_d (D_s - D_d)}{c^2 D_s} \right] \Delta D_d, \quad (2.11)$$

onde  $c^2$  é o quadrado da velocidade da luz. Logo, a profundidade ótica  $\tau$  total dentro do campo de visão do observador, devida a todas as lentes entre a fonte e o observador, é a integral

$$\tau = \int_0^{D_s} \frac{4\pi G \rho D_d (D_s - D_d)}{c^2 D_s} dD_d, \quad (2.12)$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{D_s} \rho \frac{D_d(D_s - D_d)}{D_s} dD_d, \quad (2.13)$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{D_s} \rho \frac{D_d D_s (1 - D_d/D_s)}{D_s} dD_d, \quad (2.14)$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^1 \rho D_d D_s (1 - x) dx \left( x = D_d/D_s, dx = \frac{1}{D_s} dD_d \right), \quad (2.15)$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^1 \rho x D_s D_s (1 - x) dx, \quad (2.16)$$

$$\tau = \frac{4\pi G}{c^2} D_s^2 \int_0^1 \rho x (1 - x) dx. \quad (2.17)$$

Dessa forma, a profundidade óptica total depende da massa total das lentes, não das massas individuais  $M$ . Para uma densidade constante, temos que

$$\tau = \frac{4\pi G}{6c^2} \rho D_s^2 = \frac{2\pi G\rho}{3c^2} D_s^2. \quad (2.18)$$

Se o sistema de lentes é auto-gravitante, supondo a distância igual ao tamanho do sistema inteiro, o teorema do virial garante que

$$\frac{GM_{tot}}{D_s} \approx \frac{G\rho D_s^3}{D_s} \approx V^2, \quad (2.19)$$

onde  $V^2$  é a velocidade de dispersão e  $\rho$  a densidade dada por

$$\rho \approx \frac{3M_{tot}}{4\pi D_s^3} \approx \frac{3}{4\pi G} \left( \frac{V}{D_s} \right)^3, \quad (2.20)$$

$$\tau \approx \frac{V^2}{c^2}. \quad (2.21)$$

Combinando os resultados acima, deduzimos que

$$\tau \approx \frac{V^2}{c^2}. \quad (2.22)$$

Para a GNM,  $\tau \approx \frac{V^2}{c^2} = \frac{10^4}{9 \times 10^{10}} = 0.11 \times 10^{-6}$ .

O monitoramento do espaço na direção da GNM analisou dados de milhões de estrelas ao longo de vários anos. De acordo com a colaboração MACHO (USA/Australia), a profundidade óptica deduzida dos possíveis eventos de lenteamento (*lasting* entre 2 e 400 dias) é

$$\tau_{LMC(MACHO)} = 1.2_{-0.3}^{+0.4} \times 10^{-7}, \quad (2.23)$$

resultado totalmente compatível com o nosso cálculo anterior aproximado e que implica no fato de que o halo da Via-Láctea pode ser formado por MACHOs numa taxa entre 8% e 50%, e numa faixa de massas entre  $0.15M_{\odot}$  e  $0.9M_{\odot}$ .



**|** Capítulo 3

## Capítulo 3

# Cosmologia Lemaître-Tolman das Lentes Gravitacionais Fracas

Os objetivos desse capítulo são 1) mostrar como se escreve o índice de refração gravitacional na métrica LT escolhida e 2) mostrar como a análise do índice pode servir à descrição de um efeito de lenteamento, dado um campo gravitacional fraco. Lembro que, do ponto de vista desta dissertação, o lenteamento gravitacional fraco constitui uma teoria de geodésicas tipo luz numa variedade pseudo-riemanniana dotada de métrica LT. Tal métrica, presumida sob simetria esférica num referencial simultaneamente síncrono e comóvel, pertence à classe de métricas dada por

$$ds^2 = -dt^2 + b^2(r, t) dr^2 + R(r, t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

onde o ramo LT é a família de soluções que descrevem um colapso inhomogêneo de poeira (ou o equivalente reverso temporal). As soluções decorrem de

$$b^2 = \frac{R'(r, t)^2}{1 + f(r)}, \quad (3.2)$$

em que a função  $f(r)$  pode ser pensada como parâmetro de curvatura espacial, sendo uma das três funções arbitrárias clássicas da cosmologia LT, como vimos anteriormente.

É possível introduzir uma forma reduzida da expressão do elemento de linha com base no fato de que o sistema de coordenadas é arbitrário. Dessa forma, pode-se adotar o plano  $\theta = \pi/2$  para o caminho da luz (como no §2.2, pag. 56), donde

$$ds^2 = \frac{R'(r, t)^2 dr^2}{1 + f(r)} + R(r, t)^2 d\phi^2 - dt^2. \quad (3.3)$$

Os coeficientes da métrica são

$$\begin{aligned} g_{11} &= R'(r, t)^2 / 1 + f, \\ g_{33} &= R(r, t)^2 \sin^2 \theta, \\ g_{44} &= -1. \end{aligned}$$

A partir da métrica LT, deduzimos a expressão da geodésica nula, percorrida por raios de luz que viajam radialmente ( $ds^2 = d\theta^2 = d\phi^2 = 0$ ) para dentro do cone de luz, isto é,

$$dt = -\frac{R'(r, t)}{\sqrt{1 + f}} dr. \quad (3.4)$$

Repare que, em FLRW, a expressão da geodésica nula (ver tabela 1) em condições idênticas de percurso dos raios de luz é escrita como

$$dt = -\frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}} dr.$$

No mesmo espírito da métrica FLRW perturbada [48],

$$ds^2 = \left[1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right] c^2 dt^2 - a^2(t) \left[1 - \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right] d\sigma^2, \quad (3.5)$$

onde  $1 - 2\Phi(r)/c^2$  é interpretado como o índice de refração relacionado ao efeito da curvatura do espaço-tempo sobre o caminho da luz <sup>1</sup>, podemos igualmente tomar a métrica LT na forma da expressão (3.1) e obter a representação correspondente para tal índice.

---

<sup>1</sup>Essa abordagem encontra-se bem detalhada em Misner, Thorne & Wheeler [58]. A referência contém uma excelente compilação dos principais pontos do modelo inclusive quanto à interpretação da função métrica  $\Phi(r)$  como um potencial gravitacional newtoniano.



Em termos de relatividade geral, um procedimento simples para descrever o efeito de lente gravitacional fraca é submeter a própria métrica à influência da lente. Dessarte, introduzi na equação (3.3) uma perturbação gravitacional fraca  $\varepsilon_{jk}$  de tal maneira que

$$ds^2 = \left[ \frac{R'(r, t)^2}{1 + f(r)} + \varepsilon_{11}(r, t) \right] dr^2 + [R(r, t)^2 + \varepsilon_{33}(r, t)] d\phi^2 - [1 + \varepsilon_{44}(r, t)] dt^2. \quad (3.6)$$

A aplicação de pequenas correções  $\varepsilon_{jk} \ll 1$  à métrica é conhecida desde os primeiros estudos sobre ondas gravitacionais fracas [49]. Bartelmann [56] também introduz a idéia, lembrando que pequenas perturbações na métrica não necessariamente implicam pequenas perturbações na densidade de matéria, pelo menos numa teoria linear de gravitação. A função arbitrária  $f$  é sempre assumida entre os já conhecidos três casos:

$$f = 0, f > 0, 0 > f > -1.$$

As pequenas quantidades  $\varepsilon_{jk}$  são positivo-definidas e de primeira ordem, de modo que seus quadrados são negligenciáveis. Admitamos preservado o cenário  $d\theta = 0, \theta = \pi/2$ . Nesse contexto, o símbolo trinário de Christoffel se resume a representar as componentes distintas não-nulas sem  $g_{22}$ , quais sejam,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 1 \end{array} \right\} &= \frac{1}{2g_{11}} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial(\log g_{11})}{\partial x_1}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ 4 \end{array} \right\} &= \frac{1}{2g_{44}} \left( \frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_4} \right) = -\frac{1}{2g_{44}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_4}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 14 \\ 1 \end{array} \right\} &= \frac{1}{2g_{11}} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{41}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial(\log g_{11})}{\partial x_4}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 13 \\ 3 \end{array} \right\} &= \frac{1}{2g_{33}} \left( \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 43 \\ 3 \end{array} \right\} &= \frac{1}{2g_{33}} \left( \frac{\partial g_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{43}}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_4}, \\ \left\{ \begin{array}{c} 33 \\ 1 \end{array} \right\} &= \frac{1}{2g_{11}} \left( \frac{\partial g_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Seja a equação da geodésica na forma

$$\frac{d^2 x_{\tilde{\beta}}}{ds^2} = -\Gamma_{\tilde{\beta}}^{\eta\gamma} \frac{dx_{\eta}}{ds} \frac{dx_{\gamma}}{ds}. \quad (3.7)$$

Reescrevendo-a para o sufixo mudo  $\tilde{\beta} = 4$  na métrica não perturbada, segue-se

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{R'(r, t) \dot{R}'(r, t)}{1 + f(r)} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 0. \quad (3.8)$$

A mesma equação para a métrica perturbada é

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{1 + \varepsilon_{44}} \left[ \frac{R'(r, t) \dot{R}'(r, t)}{1 + f(r)} + \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{2} \right] \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 0. \quad (3.9)$$

A integração temporal das equações (3.8) e (3.9), isto é, a anti-diferenciação aplicada sobre as derivadas no tempo que aparecem nas duas expressões, fornece

$$- \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{R'(r, t)^2}{1 + f(r)} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 0, \quad (3.10)$$

$$- \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{1}{1 + \varepsilon_{44}} \left[ \frac{R'(r, t)^2}{1 + f(r)} + \frac{\varepsilon_{11}}{2} \right] \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 0, \quad (3.11)$$

nas quais o sinal negativo do primeiro termo aparece para garantir igualdades identicamente nulas.

As duas expressões acima constituem a base do cálculo da lei de movimento para trajetórias tipo tempo sob um campo gravitacional fraco.

### 3.1 O índice de refração na métrica LT

Olhando o assunto pela ótica geométrica, de acordo com o princípio de Fermat, o curso tomado por um raio de luz de um ponto a outro é tal que o tempo gasto é mínimo, assumindo-se que não existam grandes perturbações ao longo do trajeto. O mínimo correspondente derivado a partir da relatividade geral é, após Landau e Lifshitz [43],

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{g_{44}}} = \delta \int \frac{dt}{d\tau} dl = 0, \quad (3.12)$$

onde  $dl$  é o elemento local da trajetória da luz medido pelo observador,  $d\tau$  é o intervalo de tempo próprio (local) medido pelo observador e  $g_{44}$  é o coeficiente métrico do elemento quadrático de linha tipo tempo,  $dt^2$ , contido em  $ds^2$ . A expressão

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}}, \quad (3.13)$$

associa o intervalo de tempo  $dt$  (medido pelo observador no infinito), necessário para o raio de luz percorrer  $dl$ , com o intervalo de tempo próprio  $d\tau$ .

A equação (3.12) é também escrita como

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{g_{44}}} = \delta \int \frac{dt}{d\tau} dl = \delta \int \frac{dt}{d\tau} \frac{dl}{ds} ds = \delta \int \bar{n} ds = 0, \quad (3.14)$$

lembrando que  $ds$  é o correspondente no infinito de  $dl$  (local). Em adição a isto, o tempo de percurso da luz é influenciado pelo campo gravitacional de acordo com a expressão

$$\Delta t = \int \frac{dl}{c'} - \int \frac{dl}{c} = \int (\bar{n} - 1) dl = -\frac{2}{c^3} \int \Phi dl, \quad (3.15)$$

onde  $\bar{n}$  é o índice de refração,  $\Phi$  é o potencial newtoniano,  $c$  é a velocidade da luz e  $c' = c/\bar{n}$  [50, 51]. Esse formalismo, embora tenha clara conexão com a relatividade, é ainda centrado na abordagem ótica de Fermat. É tentador relacionar o entortamento de um raio de luz devido à gravidade com o índice de refração do meio lenteador, o qual é uma função contínua suave da coordenada  $r$  e pode ser assumido constante numa região suficientemente pequena confinando um ponto particular qualquer. Tal analogia revela-se mais intrincada quando investigamos estruturas métricas distintas e suas diferenças.

O procedimento-padrão para implementar a analogia acima mencionada, considerando-se o que foi dito até o momento, parte da métrica geral de Schwarzschild

$$ds^2 = -\frac{1}{P} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + P dt^2, \quad (3.16)$$

na qual  $P$  é uma determinada função a ser definida. Vou introduzir uma nova coordenada radial  $\chi$  em lugar da coordenada  $r$  segundo a relação

$$r = \chi \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^2, \quad (3.17)$$

onde  $m$  é a massa da fonte. Daqui obtemos

$$dr = \left[ \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^2 + 2\chi \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right) \left(-\frac{m}{2\chi^2}\right) \right] d\chi, \quad (3.18)$$

$$dr = \left[ \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^2 + 2\chi \left(-\frac{m}{2\chi^2} - \frac{m^2}{4\chi^3}\right) \right] d\chi, \quad (3.19)$$

$$dr = \left[ \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^2 - \frac{m}{\chi} - \frac{m^2}{2\chi^2} \right] d\chi, \quad (3.20)$$

$$dr = \left[ 1 + \frac{m^2}{4\chi^2} - \frac{m^2}{2\chi^2} \right] d\chi, \quad (3.21)$$

$$dr = \left[ 1 - \frac{m^2}{4\chi^2} \right] d\chi. \quad (3.22)$$

Substituindo na equação (3.16), assumindo-se  $ds^2 = 0$ , segue-se

$$ds^2 = -\frac{1}{P} \left(1 - \frac{m^2}{4\chi^2}\right)^2 d\chi^2 - \chi^2 \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^4 d\theta^2 - \chi^2 \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^4 \sin^2 \theta d\phi^2 + P dt^2, \quad (3.23)$$

$$ds^2 = -\frac{1}{P} \left(1 - \frac{m^2}{4\chi^2}\right)^2 d\chi^2 - \chi^2 \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^4 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + P dt^2, \quad (3.24)$$

$$P dt^2 = \frac{1}{P} \left(1 - \frac{m^2}{4\chi^2}\right)^2 d\chi^2 + \chi^2 \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^4 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.25)$$

$$dt^2 = \frac{1}{P^2} \left[ \left(1 - \frac{m}{2\chi}\right) \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right) \right]^2 d\chi^2 + \frac{\chi^2}{P} \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^4 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.26)$$

$$dt^2 = \frac{1}{P^2} \left(1 - \frac{m}{2\chi}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^2 d\chi^2 + \frac{\chi^2}{P} \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^4 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.27)$$

Pondo  $P = \left(\frac{1 - \frac{m}{2\chi}}{1 + \frac{m}{2\chi}}\right)^2$ , chegamos a

$$dt^2 = \frac{1}{\frac{(1 - \frac{m}{2\chi})^4}{(1 + \frac{m}{2\chi})^4}} \left(1 - \frac{m}{2\chi}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^2 d\chi^2 + \frac{\chi^2}{\frac{(1 - \frac{m}{2\chi})^2}{(1 + \frac{m}{2\chi})^2}} \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^4 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.28)$$

$$dt^2 = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^4}{\left(1 - \frac{m}{2\chi}\right)^4} \left(1 - \frac{m}{2\chi}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^2 d\chi^2 + \frac{\chi^2 \left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^6}{\left(1 - \frac{m}{2\chi}\right)^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.29)$$

$$dt^2 = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^6}{\left(1 - \frac{m}{2\chi}\right)^2} [d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (3.30)$$

$$\bar{n} = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\chi}\right)^3}{1 - \frac{m}{2\chi}}. \quad (3.31)$$

Essa fórmula resultante vale para um sistema de coordenadas centrado na massa  $m$  associada ao índice de refração  $\bar{n}$ , variando com a coordenada radial  $\chi$ .

De maneira similar, isto é, supondo-se válido o mesmo procedimento para a métrica LT completa, vamos determinar o índice de refração  $\bar{n}$ , recordando que trabalhamos sempre num espaço-tempo com simetria esférica. Isso pode ser expresso em coordenadas isotrópicas, de modo que toda a informação acerca da trajetória dos raios luminosos se faz resumida na função escalar  $\bar{n}$ . A primeira coisa a fazer é aplicar na métrica definida por (3.1) e (3.2) a substituição

$$\mathcal{R} = \frac{\sqrt{(1+f)R(r,t)}}{R'(r,t)}, \quad (3.32)$$

$$\frac{R'(r,t)^2}{1+f} \left[ dr^2 + \frac{(1+f)}{R'(r,t)^2} R(r,t)^2 d\theta^2 + \frac{(1+f)}{R'(r,t)^2} R(r,t)^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] - dt^2 = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{R'(r,t)^2}{1+f} (dr^2 + \mathcal{R}^2 d\theta^2 + \mathcal{R}^2 \sin^2 \theta d\phi^2) = dt^2, \quad (3.34)$$

$$\frac{R'(r,t)^2}{1+f} \left( dr^2 + \mathcal{R}^2 d\widehat{\Omega}^2 \right) = dt^2. \quad (3.35)$$

Em modelos cosmológicos friedmannianos, o índice de refração é muitas vezes considerado função apenas da coordenada comóvel  $r$ . Admitindo-se uma abordagem LT *on-lightcone*, e que a lente gravitacional seja um objeto muito pequeno comparado às distâncias cosmológicas em jogo, seria possível assumir um domínio de integração em  $r$  sobre o cone de luz do passado para um tempo fixo, ou imaginar que o índice varia muito lentamente com o tempo. Outrossim, é possível implementar uma transformação de coordenadas, tal que

$$\frac{R'(r,t)^2}{1+f} \left[ \bar{n}(\tilde{r})^2 \left( d\tilde{r}^2 / \omega(t)^2 + \tilde{r}^2 d\widehat{\Omega}^2 \right) \right] = dt^2, \quad (3.36)$$

onde  $\omega(t)$  é uma função a ser determinada pelos cálculos, de modo que

$$\bar{n}(\tilde{r}) d\tilde{r} = \omega(t) dr \quad (3.37)$$

e

$$\bar{n}(\tilde{r}) \tilde{r} \approx \mathcal{R}. \quad (3.38)$$

Combinando essas duas igualdades, tem-se que, no contexto do sistema de coordenadas escolhido, e, para efeito de cálculo do índice,

$$\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} = \omega(t) \frac{dr}{\mathcal{R}}, \quad (3.39)$$

$$\int \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} = \int \omega(t) \frac{dr}{\mathcal{R}}. \quad (3.40)$$

A integração em  $\tilde{r}$  e  $r$  conduz a,

$$\ln \frac{\tilde{r}}{\bar{C}} = \int \omega(t) \frac{R'(r,t) dr}{\sqrt{1+f} R(r,t)}, \quad (3.41)$$

onde  $\bar{C}$  é uma constante de integração, de maneira que,

$$\tilde{r} = \bar{C} e^{\int \omega(t) \frac{R'(r,t) dr}{\sqrt{1+f} R(r,t)}}. \quad (3.42)$$

Dado que  $\bar{n}(\tilde{r})\tilde{r} = \mathcal{R}$ , segue-se

$$\bar{n}(\tilde{r} \approx r) = \frac{\mathcal{R}}{\tilde{r}} = \frac{\sqrt{1+f}R(r,t)e^{-\omega(t)} \int \frac{R'(r,t)dr}{\sqrt{1+f}R(r,t)}}{R'(r,t)\bar{C}},$$

$$\bar{n}(\tilde{r} \approx r) = \frac{\mathcal{R}}{\tilde{r}} = \frac{\sqrt{1+f}R(r,t)e^{-\omega(t)}W(r,t)}{R'(r,t)\bar{C}}. \quad (3.43)$$

A figura 3.1 fornece uma idéia nítida dos valores do índice de refração (adimensional) segundo a equação (3.43). A parametrização empregada foi a mesma das simulações referentes ao parágrafo 1.4.1 ( $\Omega_M = 0.3, c = 8.5$ ), havendo que ressaltar-se o fato dessa escolha ter sido orientada pela consistência geral do modelamento cosmológico proposto.

Agora, avaliando a diferença entre as equações (3.10) e (3.11), temos que, em vista do resultado (3.4),

$$\frac{1}{1+\varepsilon_{44}} \left[ \frac{R'(r,t)^2}{1+f(r)} + \frac{\varepsilon_{11}}{2} \right] \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{R'(r,t)^2}{1+f(r)} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{R'(r,t)^2}{1+f(r)} \frac{1}{1+\varepsilon_{44}} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{1}{1+\varepsilon_{44}} \frac{\varepsilon_{11}}{2} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{R'(r,t)^2}{1+f(r)} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \left[ \frac{1}{1+\varepsilon_{44}} \frac{R'(r,t)^2}{1+f(r)} - \frac{R'(r,t)^2}{1+f(r)} + \frac{1}{1+\varepsilon_{44}} \frac{\varepsilon_{11}}{2} \right] = 0,$$

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \left[ \frac{1}{1+\varepsilon_{44}} \left( \frac{dt}{dr} \right)^2 - \left( \frac{dt}{dr} \right)^2 + \frac{1}{1+\varepsilon_{44}} \frac{\varepsilon_{11}}{2} \right] = 0,$$

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \left[ \left( \frac{dt}{dr} \right)^2 \left( \frac{1}{1+\varepsilon_{44}} - 1 \right) + \frac{\varepsilon_{11}}{2(1+\varepsilon_{44})} \right] = 0,$$

$$\left( \frac{dt}{dr} \right)^2 \left( \frac{1}{1+\varepsilon_{44}} - 1 \right) + \frac{\varepsilon_{11}}{2(1+\varepsilon_{44})} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 \left(\frac{1}{1+\varepsilon_{44}} - 1\right) &= -\frac{\varepsilon_{11}}{2(1+\varepsilon_{44})}, \\
\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 \left(\frac{-\varepsilon_{44}}{1+\varepsilon_{44}}\right) &= -\frac{\varepsilon_{11}}{2(1+\varepsilon_{44})}, \\
\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 &= -\frac{\varepsilon_{11}}{2(1+\varepsilon_{44})} \frac{1+\varepsilon_{44}}{-\varepsilon_{44}}, \\
\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 &= \frac{\varepsilon_{11}}{2\varepsilon_{44}}, \\
\frac{dt}{dr} &= \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}}{2\varepsilon_{44}}}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Portanto, o valor de  $dt/dr$  no caso inomogêneo em foco com a introdução da lente deve ser tal que

$$dt/dr = -\frac{R'(r, t)}{\sqrt{1+f}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_{11}}{2\varepsilon_{44}}}.$$

Tomando-se esse resultado e combinando as equações (3.4) e (3.43), para  $g_{22} = R(r, t)^2$  e  $g_{11} = R'(r, t)^2/(1+f)$  segue-se

$$\begin{aligned}
g_{22}/g_{11} &= \frac{R(r, t)^2(1+f)}{R'(r, t)^2}; \\
\sqrt{g_{22}/g_{11}} &= \frac{R(r, t)\sqrt{1+f}}{R'(r, t)}; \\
\bar{n}(\tilde{r} \approx r) &= \frac{1}{C} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} e^{-\omega(t)} \int \frac{\sqrt{\varepsilon_{11}/2\varepsilon_{44}}}{R(r, t)} dr.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

A interpretação física dessa igualdade é que a geodésica nula na representação do espaço-tempo LT aqui adotada é inteiramente determinada pela função escalar  $\bar{n}$ , uma vez que ela inclui toda a informação geométrica relevante acerca da deflexão do raio de luz. Como esperado, a perturbação na métrica também contribui para o índice de refração, por conseguinte, para a deflexão dos raios luminosos. Isso significa que a observação do lenteamento gravitacional fraco reflete contribuições das componentes métricas da perturbação,  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{44}$ .



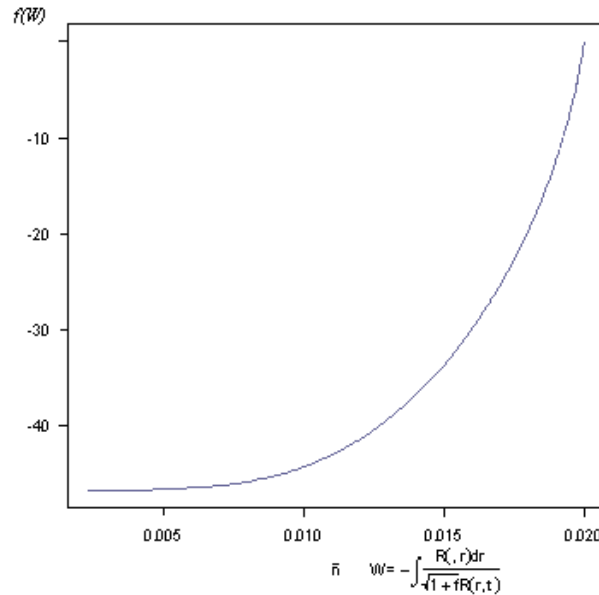


Figura 3.1: curva teórica exponencial do índice de refração (equação (3.43)).

Este importante resultado mostra que o índice de refração proposto é realmente uma função da perturbação fraca, uma característica da lente. Contudo, tal como ocorre em todas as construções baseadas em analogias, poderia ser objetado que haveria restrições a essa abordagem, pois o índice de refração ótico é dependente da frequência, ao passo que a deflexão gravitacional não é. Assim, para aceitarmos a expressão (3.43) deveríamos igualmente aceitar um índice de refração anormal, independente da frequência. Além disso, não há qualquer garantia de que tal representação expresse corretamente o movimento de objetos tipo tempo da mesma maneira consistente como a representação de curvatura o faz. Por outro lado, o análogo gravitacional do índice ótico é também definido pela função de curvatura  $f$  e por uma clara regra de movimento para objetos tipo tempo, qual seja,  $dt/dr = \pm \sqrt{\varepsilon_{11}/2\varepsilon_{44}}$ . Com efeito, para que não haja controvérsia em razão de mera insuficiência linguístico-semântica, será mais adequado falar de um meio *G-refringente* ("G" de "Gravitacional"), o meio da própria lente, dotado de um índice de *G-refração* dado pela equação (3.46).

### 3.2 Aplicação à cosmologia

A equação (3.46) é de capital importância, pois reúne teoria e observação. Como vimos na seção 1.3, a área radial é a própria distância por diâmetro angular, de modo que podemos inferir para a geodésica única [31]

$$\frac{1}{\bar{C}} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} = \frac{\sqrt{1+f}\hat{R}(r,t)}{\hat{R}'(r,t)\bar{C}}, \quad (3.47)$$

$$\bar{n} = \frac{\sqrt{1+f}\hat{R}(r,t)}{\hat{R}'(r,t)\bar{C}} e^{-\omega(t)} \int \frac{\hat{R}'}{\sqrt{1+f}R(r,t)} dr = \frac{\hat{R}(r,t)}{\bar{C}} e^{-\omega(t)} \int \frac{dr}{R(r,t)}, \quad (3.48)$$

$$\bar{n} = \frac{\hat{D}_a}{\bar{C}} e^{-\omega(t)} \int \frac{dr}{\hat{D}_a}, \quad (3.49)$$

enfatizando que substituí  $\hat{R}(r,t)$  por  $\hat{D}_a$  ao entender ser esta a melhor nomenclatura para a distância por diâmetro angular. Como  $r$  não é observável, é conveniente que façamos a substituição  $dr = j(z)dz$ , onde  $j(z)$  é uma função de  $z$  a ser definida. Assim,

$$\bar{n} = \frac{\hat{D}_a}{\bar{C}} e^{-\omega(t)} \int \frac{j(z)dz}{\hat{D}_a}. \quad (3.50)$$

Essa é a expressão final do índice de *G-refração* em termos do desvio para o vermelho e da distância por diâmetro angular. Ela mede, para um determinado  $z$ , a intensidade da deflexão que um raio de luz experimentaria em presença de uma lente gravitacional fraca que estivesse posicionada àquele  $z$ . A figura 3.2 mostra como o índice evolui ao longo de  $z$  num formato análogo ao da distância por diâmetro angular. A escala utilizada depende basicamente do valor de  $\bar{C}$ , mas foi assumida como a mais adequada para futuras contagens de eventos de lenteamento. Essa abordagem associativa entre índice de *G-refração* e distância por diâmetro angular foi em parte inspirada nos estudos de Hadrovic e Binney [34].

### 3.3 Discussão

Várias transformações da métrica LT são possíveis para a definição do índice de *G-refração*. Para não dar mais do que um último exemplo de

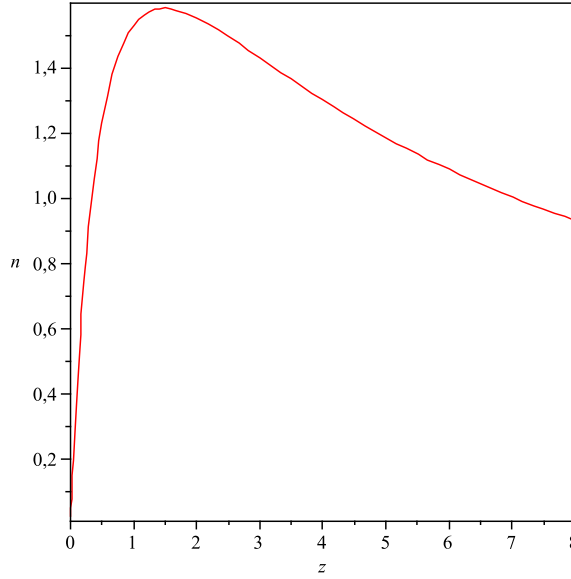


Figura 3.2: curva teórica do índice de *G-refração* em função do desvio para o vermelho na métrica LT.

relevo formal, tomemos o caso parabólico plano em que  $f = 0$  (expressão 1.17a), lembrando sempre que as equações de campo demandam que  $R(r, t)$  satisfaça

$$2R\dot{R}^2 + 2R(1 - f^2) = F(r), \quad (3.51)$$

onde  $F(r)$  é uma função arbitrária. Aplicando-se a transformação  $R(t, \bar{r}) = \bar{r}(t + \beta(\bar{r}))^{2/3}$ , donde  $R'(t, \bar{r}) = [t + \beta(\bar{r})]^{2/3} + \frac{2}{3}\bar{r}[t + \beta(\bar{r})]^{-1/3}\beta'(\bar{r})$ , a métrica torna-se, para  $r \approx \bar{r}$ , tendo sempre em foco a geodésica nula,

$$dt^2 = \left[ (t + \beta)^{4/3} + \frac{4}{3}r(t + \beta)^{1/3}\beta' + \frac{4}{9}r^2(t + \beta)^{-2/3}\beta'^2 \right] dr^2 - r^2(t + \beta)^{4/3} d\widehat{\Omega}^2,$$

$$dt^2 = (t + \beta)^{4/3} \left[ 1 + \frac{4}{3}r(t + \beta)^{-1}\beta' + \frac{4}{9}r^2(t + \beta)^{-2}\beta'^2 \right] dr^2 - r^2(t + \beta)^{4/3} d\widehat{\Omega}^2,$$

$$dt^2 = (t + \beta)^{4/3} \left[ 1 + \frac{4}{3}r(t + \beta)^{-1}\beta' + \frac{4}{9}r^2(t + \beta)^{-2}\beta'^2 \right] dr^2 - r^2(t + \beta)^{4/3} d\widehat{\Omega}^2,$$

$$dt^2 = (t + \beta)^{4/3} \left[ \left( 1 + \frac{2r\beta'}{3(t + \beta)} \right)^2 dr^2 - r^2 d\widehat{\Omega}^2 \right],$$

$$dt^2 = (t + \beta)^{4/3} (Y^2 dr^2 + r^2 d\widehat{\Omega}^2), \quad (3.52)$$

com

$$Y = 1 + \frac{2r\beta'}{3(t + \beta)}. \quad (3.53)$$

Reescrevendo a equação (3.36) numa forma ligeiramente diferente,

$$dt^2 = \frac{R'(r, t)^2}{1 + f} \left[ \bar{n}(\tilde{r})^2 \left( d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\widehat{\Omega}^2 \right) \right]. \quad (3.54)$$

Explicitando  $Y$  na equação (3.52),

$$dt^2 = (t + \beta)^{-2/3} \left[ (t + \beta)^2 \left( 1 + \frac{2r\beta'}{3(t + \beta)} \right)^2 dr^2 + (t + \beta)^2 r^2 d\widehat{\Omega}^2 \right]. \quad (3.55)$$

Das duas últimas equações obtemos

$$(t + \beta) \left( 1 + \frac{2r\beta'}{3(t + \beta)} \right) dr = \tilde{n}(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad (3.56)$$

$$(t + \beta) r = \tilde{n}(\tilde{r}) \tilde{r}, \quad (3.57)$$

Combinando essas igualdades, tem-se que

$$\left( 1 + \frac{2r\beta'}{3(t + \beta)} \right) \frac{dr}{r} = \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}}, \quad (3.58)$$

$$\ln \frac{\tilde{r}}{\bar{C}} = \int \left( 1 + \frac{2r\beta'}{3(t + \beta)} \right) \frac{dr}{r}, \quad (3.59)$$

$$\tilde{r} = \bar{C} e^{\int \left( 1 + \frac{2r\beta'}{3(t + \beta)} \right) \frac{dr}{r}}, \quad (3.60)$$

$$\bar{n} = \frac{(t + \beta) r}{\bar{C}} e^{-\int \left( 1 + \frac{2r\beta'}{3(t + \beta)} \right) \frac{dr}{r}}. \quad (3.61)$$

Das equações (3.54), (3.55) e (3.45) deduzimos que

$$\frac{R'(r, t)^2}{1 + f} = (t + \beta)^{-2/3}, \quad (3.62)$$

$$-(t + \beta)^{1/3} = -\frac{\sqrt{1+f}}{R'} = \frac{dr}{dt}, \quad (3.63)$$

$$\bar{n} = \frac{(t + \beta)r}{\bar{C}} e^{-\int \left(1 + (t + \beta)^{-2/3} \frac{-2r\beta'}{3dr/dt}\right) \frac{dr}{r}}, \quad (3.64)$$

$$\bar{n} = \frac{(t + \beta)r}{\bar{C}} e^{-\int \left(1 + (t + \beta)^{-2/3} \frac{-2r\beta' dt}{3 dr}\right) \frac{dr}{r}}, \quad (3.65)$$

$$\bar{n} = \frac{(t + \beta)r}{\bar{C}} e^{-\int \left(1 + (t + \beta)^{-2/3} \frac{2r\beta'}{3} \sqrt{\frac{\varepsilon_{11}}{2\varepsilon_{44}}}\right) \frac{dr}{r}}. \quad (3.66)$$

Nesse caso, a função  $\beta$  determina que para cada observador haverá um índice de *G-refração* condicionado ao respectivo tempo do *Big-Bang*, configurando assim uma quantidade de caráter nitidamente cosmológico do ponto de vista de um modelamento LT.

Retornemos às equações (3.10) e (3.11). O sistema de coordenadas que escolhermos nos leva a pensar em tomar a distância infinitesimal transversa entre dois raios de luz vizinhos, em propagação conforme a métrica  $g_{\mu\nu}$ , como uma quantidade vetorial bidimensional [40]. O caminho tipo-tempo perturbado por um campo gravitacional fraco foi dado pela equação da geodésica com  $s$  no papel de parâmetro afim. Suponha que estejamos interessados na evolução da forma de um feixe de luz com vértice no observador  $O$ . Façamos o parâmetro afim  $s$  alcançar  $O$ , de tal maneira que  $s = 0$  em  $O$ . Assim,  $s$  cresce ao longo do cone nulo do passado a partir de  $O$ . Definamos a quantidade

$$\tilde{\kappa}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (3.67)$$

na qual  $s$  mede a distância própria ao longo dos raios de luz para eventos próximos a  $O$ . Consideremos  $\gamma^\mu(\vec{\theta}, s)$  uma característica dos raios com vértice em  $O$  de forma que  $\vec{\theta}$  seja o ângulo entre um raio genérico e o raio de referência  $\gamma_0^\mu \equiv \gamma^\mu(0, s)$ , sempre assumindo  $|\vec{\theta}|$  pequeno o bastante para que possamos linearizar o problema. Esses dois raios podem ser conectados por

$$\Gamma^\mu(\vec{\theta}, s) = \gamma^\mu(\vec{\theta}, s) - \gamma^\mu(\vec{0}, s) = \left[ \frac{\partial \gamma^\mu(\vec{\theta}, s)}{\partial \theta_\kappa} \right] \theta_\kappa, \quad (3.68)$$

no mesmo valor do parâmetro afim  $s$ . Em atenção à convenção da soma de Einstein, essa conexão pode ser explanada em termos da quantidade vetorial bidimensional  $\vec{\xi}$ , isto é,

$$\Gamma^\mu(\vec{\theta}, s) = - \left[ \xi_\nu(\vec{\theta}, s) U_\nu^\mu + \xi_0(\vec{\theta}, s) \tilde{\kappa}^\mu \right], \quad (3.69)$$

com  $\nu = (1, 2)$  e  $U_\nu^\mu$  sendo uma base ortonormal bidimensional perpendicular a  $\tilde{\kappa}^\mu$ .

A soma  $\xi_\nu(\vec{\theta}, s) U_\nu^\mu$  descreve a separação transversal à linha de visada do observador  $O$  entre os dois raios de luz em determinado valor do parâmetro afim  $s$ , e responde por uma componente de desvio na direção do feixe. Vemos assim que, devido à linearização adotada acima ( $\xi_\nu$  depende linearmente de  $\vec{\theta}$ ), segue-se

$$\frac{d\vec{\xi}}{ds} = \vec{\theta}(s = 0). \quad (3.70)$$

Com essa breve compilação da geometria requerida, podemos definir a *fonte de convergência* [41] por

$$R(s) = -\frac{1}{2} R_{\eta\gamma}(s) \tilde{\kappa}^\eta(s) \tilde{\kappa}^\gamma(s), \quad (3.71)$$

com o tensor de Ricci  $R_{\eta\gamma}(s)$  tomado em  $\gamma_0^\mu(s)$ . Um exemplo ilustrativo simples de determinação da fonte de convergência consiste em tomar a métrica (3.5) e calcular o tensor de curvatura, lembrando que o potencial newtoniano é assumido fraco, isto é,  $\Phi \ll c^2$ . Para um raio de luz que se propaga na direção da terceira coordenada espacial, a fonte de convergência se reduz a  $R(s) = -4\pi G\rho/c^2$ . Em termos dos símbolos trinários de Christoffel, o tensor de Ricci tem a forma

$$R_{\eta\gamma} = \partial_\gamma \left( \Gamma_{\psi}^{\eta\psi} \right) - \partial_\psi \left( \Gamma_{\psi}^{\eta\gamma} \right) + \Gamma_w^{\eta\psi} \Gamma_{\psi}^{w\gamma} - \Gamma_w^{\eta\gamma} \Gamma_{\psi}^{w\psi}. \quad (3.72)$$

Pondo  $\eta = \gamma = 4$  para a métrica LT, ficamos com

$$\begin{aligned} R_{44} = & \Gamma_1^{41} \Gamma_1^{14} + \Gamma_2^{41} \Gamma_1^{24} + \Gamma_3^{41} \Gamma_1^{34} + \Gamma_4^{41} \Gamma_1^{44} + \\ & \Gamma_1^{42} \Gamma_2^{14} + \Gamma_2^{42} \Gamma_2^{24} + \Gamma_3^{42} \Gamma_2^{34} + \Gamma_4^{42} \Gamma_2^{44} + \\ & \Gamma_1^{43} \Gamma_3^{14} + \Gamma_2^{43} \Gamma_3^{24} + \Gamma_3^{43} \Gamma_3^{34} + \Gamma_4^{43} \Gamma_3^{44} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_1^{44}\Gamma_4^{14} + \Gamma_2^{44}\Gamma_4^{24} + \Gamma_3^{44}\Gamma_4^{34} + \Gamma_4^{44}\Gamma_4^{44} + \\ & \quad \partial_{4,4}^2 \log \sqrt{-g}, \\ R_{44} &= \Gamma_1^{41}\Gamma_1^{14} + \partial_{4,4}^2 \log \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Assim, na métrica perturbada temos para a fonte de convergência,

$$\bar{R}(s) = -\frac{1}{2} (\Gamma_1^{41}\Gamma_1^{14} + \partial_{4,4}^2 \log \sqrt{-g}) \left( \frac{dt}{ds} \right)^2, \quad (3.74)$$

$$\bar{R}(s) = -\frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \frac{2R'(r,t)\dot{R}'(r,t) + \dot{\epsilon}_{11}(1+f(r))}{R'(r,t)^2 + \epsilon_{11}(1+f(r))} \right]^2 + \partial_{4,4}^2 \log \sqrt{-g} \right\} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2. \quad (3.75)$$

Uma fonte de convergência não esvanecente significa que a luz proveniente de determinado objeto em  $(r, t)$  é convergente quando observada na origem  $O$  [41]. É útil termos a matriz ótica simétrica (*optical tidal matrix*)<sup>2</sup> dada por

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{pmatrix} \bar{R}(s) + \mathcal{R}e\langle \mathcal{F}(s) \rangle & \Im\langle \mathcal{F}(s) \rangle \\ \Im\langle \mathcal{F}(s) \rangle & \bar{R}(s) - \mathcal{R}e\langle \mathcal{F}(s) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{R}(s) & 0 \\ 0 & \bar{R}(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{R}e\langle \mathcal{F}(s) \rangle & \Im\langle \mathcal{F}(s) \rangle \\ \Im\langle \mathcal{F}(s) \rangle & -\mathcal{R}e\langle \mathcal{F}(s) \rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde  $\mathcal{R}e\langle \mathcal{F}(s) \rangle$  e  $\Im\langle \mathcal{F}(s) \rangle$  são as partes real e imaginária da quantidade complexa  $\mathcal{F}(s)$ . A fonte de convergência  $\bar{R}(s)$  determina a isotropia da seção reta do feixe de raios luminosos no sentido de que a forma circular original é conservada, expandindo ou contraindo. Por outro lado, uma fonte de cisalhamento (*shear*)  $\mathcal{F}(s)$  diferente de zero, baseada no tensor de curvatura de Weyl em  $\gamma_0^\mu(s)$ , provoca uma anisotropia capaz de mudar a forma da seção reta do feixe. Em suma, as propriedades óticas de uma lente gravitacional são descritas por meio da convergência, a qual representa a magnificação isotrópica da luz, e do cisalhamento, que descreve os efeitos do campo gravitacional sobre a forma das imagens.

<sup>2</sup>Essa matriz descreve a mudança relativa da forma do feixe de raios luminosos.

Finalmente, há que estabelecer uma importante relação entre  $R'(r, t)$  e sua derivada temporal  $\dot{R}'(r, t)$ , obtida da diferença entre as fontes de convergência com e sem a perturbação fraca<sup>3</sup>, admitindo-se que não haja cisalhamento. Suponhamos que essa diferença seja igual a zero. Isso é factível quando o efeito de lenteamento fraco é anulado por anisotropias locais, de tal maneira que a diferença desaparece sob condições especiais de simetria da perturbação. O fato pode ser determinado por uma onda gravitacional ou pela passagem singular de outro objeto lenteador mais próximo, cruzando a linha de visada do observador. Que eu saiba, tal fenômeno pertence ainda à classe das previsões, não havendo até o momento nenhum caso relatado na literatura corrente. Seja a referida diferença dada pela expressão

$$\begin{aligned} \bar{R}(s) - R(s) = & \\ - 2 \left( \frac{1}{8} \frac{4R'(r, t)^2 \dot{R}'(r, t)^2 + 4R'(r, t) \dot{R}'(r, t) \dot{\epsilon}_{11} (1 + f(r)) + \dot{\epsilon}_{11}^2 (1 + f(r))^2}{R'(r, t)^4 + 2\epsilon_{11} (1 + f(r)) R'(r, t)^2 + \epsilon_{11}^2 (1 + f(r))^2} \right. & \\ \left. + \frac{1}{2} \partial_{4,4}^2 \log \sqrt{-g} \right) \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \frac{4R'(r, t)^2 \dot{R}'(r, t)^2}{R'(r, t)^4} + \partial_{4,4}^2 \log \sqrt{-g} \right) \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(s) - R(s) = & \\ - \frac{4R'(r, t)^2 \dot{R}'(r, t)^2 + 4R'(r, t) \dot{R}'(r, t) \dot{\epsilon}_{11} (1 + f(r)) + \dot{\epsilon}_{11}^2 (1 + f(r))^2}{8R'(r, t)^4 + 16\epsilon_{11} (1 + f(r)) R'(r, t)^2 + 8\epsilon_{11}^2 (1 + f(r))^2} & \\ + \frac{R'(r, t)^2 \dot{R}'(r, t)^2}{2R'(r, t)^4} = 0, & \\ \frac{-4\dot{\epsilon}_{11} R'(r, t)^3 \dot{R}'(r, t) (1 + f(r)) - \dot{\epsilon}_{11}^2 R'(r, t)^2 (1 + f(r))^2}{R'(r, t)^2 (8R'(r, t)^4 + 16\epsilon_{11} (1 + f(r)) R'(r, t)^2 + 8\epsilon_{11}^2 (1 + f(r))^2)} & \\ + \frac{8\epsilon_{11} R'(r, t)^2 \dot{R}'(r, t)^2 (1 + f(r)) + 4\epsilon_{11}^2 \dot{R}'(r, t)^2 (1 + f(r))^2}{R'(r, t)^2 (8R'(r, t)^4 + 16\epsilon_{11} (1 + f(r)) R'(r, t)^2 + 8\epsilon_{11}^2 (1 + f(r))^2)} = 0. & \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Como observou Bartelmann [56], no caso de perturbações fracas as fontes de convergência da métrica de *background* e da métrica perturbada podem ser somadas.



Por simplicidade, podemos supor  $f = 0$  (LT plano), e assim obter

$$\bar{R}(s) - R(s) = \frac{-4\dot{\varepsilon}_{11}R'(r,t)^3\dot{R}'(r,t) - \dot{\varepsilon}_{11}^2R'(r,t)^2 + 8\varepsilon_{11}R'(r,t)^2\dot{R}'(r,t)^2 + 4\varepsilon_{11}^2\dot{R}'(r,t)^2}{R'(r,t)^2(8R'(r,t)^4 + 16\varepsilon_{11}R'(r,t)^2 + 8\varepsilon_{11}^2)} = 0.$$

Negligenciando termos quadráticos de perturbação,

$$\begin{aligned} \frac{-4\dot{\varepsilon}_{11}R'(r,t)^3\dot{R}'(r,t) + 8\varepsilon_{11}R'(r,t)^2\dot{R}'(r,t)^2}{8R'(r,t)^2(R'(r,t)^4 + 2\varepsilon_{11}R'(r,t)^2)} &= 0, \\ \frac{-\dot{\varepsilon}_{11}R'(r,t)^3\dot{R}'(r,t) + 2\varepsilon_{11}R'(r,t)^2\dot{R}'(r,t)^2}{2R'(r,t)^2(R'(r,t)^4 + 2\varepsilon_{11}R'(r,t)^2)} &= 0, \\ 2\varepsilon_{11}\dot{R}'(r,t) &= \dot{\varepsilon}_{11}R'(r,t), \\ \frac{R'(r,t)}{\dot{R}'(r,t)} &= \frac{2\varepsilon_{11}}{\dot{\varepsilon}_{11}}, \\ \frac{\varepsilon_{11}}{\dot{\varepsilon}_{11}} &= \frac{R'(r,t)}{2\dot{R}'(r,t)}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Substituindo a expressão (1.66a), segue-se

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\dot{\varepsilon}_{11}} = \frac{R'(r,t)}{2\dot{R}'(r,t)} = \frac{(1+z)}{2(\sqrt{1+f} - \dot{R}(r,t))} \frac{dR(r,t)}{dz}. \quad (3.78)$$

Dessa forma, a expressão (3.78) estabelece uma função rica em informação, associando a deformação provocada pelo lenteamento fraco ao desvio para o vermelho e à derivada da distância por diâmetro angular em relação ao desvio para o vermelho. Ainda que o fenômeno de superposição destrutiva de efeitos de lenteamento possa ser raro e de difícil acesso, se considerarmos as dificuldades observacionais sublinhadas anteriormente, no modelo LT sugerido por Ghassemi *et al* [42] ele poderá se revelar mais freqüente do que o esperado, tendo em conta as possibilidades globais de compensação entre os lenteamentos das múltiplas esferas inomogêneas (ver seção 1.2).



## Conclusão

Para concretizar uma dissertação que versou sobre determinado assunto, acerca do qual pairam tantas incertezas, foi preciso considerar três opções: 1) discorrer sobre tudo o que já se fez no campo em foco, montando uma espécie de *review*, 2) tomar uma linha de pesquisa já iniciada por alguém e tentar ir um pouco além, 3) arriscar alguma abordagem nova no intuito de polarizar as discussões e, quiçá, abrir perspectivas objetivas para a solução de problemas. Por razões pessoais que vão desde necessidades do temperamento até uma espécie de idealismo pragmático que dá primazia antes ao debate com progresso do que à simples retórica polêmica, escolhi a terceira alternativa, sem abandonar de todo a primeira.

Nesse rumo de raciocínio, o *review* elaborado no primeiro capítulo, embora não consumisse completamente o tema, trouxe à tona alguns dos principais delineamentos em cosmologia LT, dando ênfase aos resultados advindos de investigações sobre supernovas Ia. Tais resultados foram aqui discutidos num quadro suficientemente robusto para que se pudesse chegar à conclusão de que é impossível ignorar a cosmologia LT no atual estágio do conhecimento, pelo menos do ponto de vista dos dados de supernovas Ia. Pela explanação realizada no primeiro capítulo, a versatilidade do modelamento LT, ao contrário do que se poderia pensar de início, mostrou que a teoria é bem ajustável aos dados sem perda de consistência e sem rechaçar a coexistência dialética com um modelo friedmanniano assumido como limite. No que se refere ao conteúdo original, a dissertação apresentou uma teoria de lenteamento gravitacional fraco modelada numa cosmologia LT, com principal foco na definição do índice de refração gravitacional  $\bar{n}$  a partir de uma tênue deformação aplicada à métrica LT adotada. O estabelecimento de semelhante índice implicou na determinação da geodésica nula em LT pela função escalar  $\bar{n}$ , uma vez que essa função carrega a informação geométrica referente à deflexão do raio de luz, além de ter claras repercussões não apenas no estudo da distribuição de efeitos de lenteamento, mas igualmente em pesquisas versando sobre densidade e distâncias cosmológicas, conforme insinuado no terceiro capítulo. Como subsídio para a abordagem do lenteamento gravitacional fraco, foram apresentados no segundo capítulo princípios básicos sobre lentes gravitacionais, incluindo simulações realizadas juntamente com o Prof. Dr.

Thomas Schramm (vide referências), bem como um breve estudo do lenteamento gravitacional no chamado "Grupo Local" de galáxias.

Uma das coisas que me causa espécie nos debates sobre cosmologia LT é a formulação de perguntas do tipo "para que um centro do universo", "para que uma junção", enfim, "para que um modelo inomogêneo", se o modelo padrão FLRW parece dar conta dos principais aspectos concluídos das observações? Para mim não se trata de ser partidário de uma ou outra teoria, mas de ser coerente com a própria realidade observacional; os dados não são concludentes, e ponto final. Sendo assim, por mais que sejamos tentados a adotar determinado modelo, tal adoção trará em si um viés epistemológico indistigível. Quando duas construções explicativas são igualmente possíveis, tendo, cada uma, seu espaço de validade, provavelmente precisaremos de ambas numa combinação complementar; isso Bohr já nos ensinava há muito. Pessoalmente, não creio em um universo globalmente homogêneo pela simples razão de que não há indicativos convincentes que favoreçam tal crença, nem "aqui", nem "lá". Predicados como linearidade e homogeneidade parecem distantes da realidade, constituindo antes ferramentas do entendimento para lidarmos com a incapacidade natural que manifestamos ao tentarmos deslindar a complexidade do mundo. Seguindo Kursunoglu [59], considero quatro grandes avanços em cosmologia nos últimos 70 anos, a saber, 1)- a predição por Alpher e Herman da radiação cósmica de fundo em 1940, 2)- a observação em 1964, por Penzias e Wilson, do calor residual atribuído à radiação cósmica de fundo, 3)- a hipótese de um universo inflacionário, devida a Guth (1979), e 4)- a observação em 1992 de anisotropias na radiação cósmica de fundo, levada a cabo via COBE por Smoot e colaboradores. Tais avanços conduziram físicos e cosmologistas ao consenso de que uma descrição completa do universo necessita de uma visão unificada da cosmologia e da teoria de partículas elementares. Assim, mais valia há em conceber que a natureza se manifesta por simetrias nos níveis elementar e cosmológico, e, em nível cosmológico, semelhantes simetrias se estabelecem em função de compensações entre regiões homogêneas e inomogêneas. Essas compensações sequer implicam em distribuição homogênea de zonas inomogêneas, de modo que, sob uma ótica termodinâmica, homogeneidade seria admissível nos extremos evolutivos caóticos de quebra de simetria, isto é, nos estágios iniciais e finais do universo, nos quais se sobrepõe o requerimento de uma abordagem no nível elementar.

Dessarte, o que busquei na minha dissertação foi estabelecer modelos não no intuito de rivalizar, mas no de conciliar idéias e trazer, com a maior simplicidade possível, uma imagem não apenas aceitável, mas plenamente cabível em certos contextos. E mais; ao trazer tal imagem, procurei firmar a razão lógica dos construtos fundamentais. Com efeito, se vou descrever o lenteamento gravitacional fraco como a ação de um meio refringente sobre a trajetória da luz, então caracterizo fisicamente esse meio na sua "aparência" mais íntima, isto é, por intermédio da sua métrica intrínseca, bem como a natureza gravitacional da refringência. A propósito, um cuidado gnosiológico: se, como observadores, não conseguimos resolver com nitidez a distribuição de matéria no universo, não devemos imaginar que isso dependa de insuficiência instrumental apenas, como se a tecnologia pudesse avançar infinitamente. Precisamos admitir que outros fatores poderiam contribuir para essa limitação, como barreiras naturais do próprio entendimento humano e características topológicas e/ou geométricas da nossa posição no espaço-tempo. Refleti intensamente sobre isso e, como conseqüência, tenho procurado uma estrutura de centro do universo que, entre outras coisas, espelhe essa preocupação. Outro aspecto que deve ser explorado em modelagens de índole inovadora é o potencial preditivo incorporado. Nesse sentido, em particular, mostrei o que espero de uma análise tão meticulosa como o é a do lenteamento gravitacional fraco, prevendo a interferência de objetos lenteadores extras na observação corrente de um dado efeito de lenteamento.

Concluo, assim, que a teoria apresentada, diante das simulações e do formalismo exibido, de fato reúne tópicos motivadores suficientes para se prosseguir em estudos mais acurados, mediante insumo proveniente de novos conjuntos de dados. Deixo claro também que as idéias explanadas ao longo desse trabalho são passíveis de correções e aperfeiçoamentos dentro do espírito das melhores práticas científicas.



# Anexo 1

## Supernovas Ia (*Riess tables, 1998*)

SN	$z$	$\mu(\text{mag.})$	$\sigma$	$Dl$	SN	$z$	$\mu(\text{mag.})$	$\sigma$	$Dl$
SN90O	0,03	35,58	0,21	130,62	SN96U	0,43	42,01	0,34	2.523,48
SN90T	0,04	36,06	0,2	162,93	SN96C	0,027	35,58	0,21	130,62
SN90af	0,05	36,52	0,22	201,37	SN96bl	0,034	35,87	0,2	149,28
SN91U	0,033	35,21	0,21	110,15	SN96ab	0,124	38,87	0,22	594,29
SN91S	0,056	36,99	0,19	250,03	SN96ci	0,495	41,93	0,19	2.432,20
SN92P	0,026	35,31	0,22	115,35	SN96cl	0,828	43,64	0,46	5.345,64
SN92bg	0,036	35,85	0,2	147,91	SN97eq	0,538	42,34	0,18	2.937,65
SN92bl	0,043	36,2	0,19	173,78	SN97ek	0,86	43,71	0,3	5.520,77
SN92bh	0,045	36,67	0,18	215,77	SN97ez	0,778	43,49	0,35	4.988,84
SN92J	0,046	36,03	0,21	160,69	SN97as	0,508	41,87	0,35	2.365,92
SN92bk	0,058	36,81	0,19	230,14	SN97bb	0,518	42,51	0,31	3.176,87
SN92au	0,061	36,99	0,22	250,03	SN97bj	0,334	40,6	0,3	1.318,26
SN92bs	0,063	37,35	0,19	295,12	SN97ce	0,44	41,75	0,19	2.238,72
SN92ae	0,075	37,45	0,19	309,03	SN97cj	0,5	42,41	0,2	3.033,89
SN92bp	0,079	37,62	0,18	334,2	SN97dg	0,029	35,81	0,21	145,21
SN92br	0,088	37,75	0,28	354,81	SN97F	0,58	42,72	0,21	3.499,45
SN92aq	0,101	38,38	0,2	474,24	SN97H	0,526	42,24	0,18	2.805,43
SN93H	0,025	34,77	0,22	89,95	SN97I	0,172	39,47	0,18	783,43
SN93ah	0,028	35,21	0,22	110,15	SN97N	0,18	39,66	0,18	855,07
SN93ag	0,05	36,75	0,19	223,87	SN97P	0,472	42,14	0,19	2.679,17
SN93O	0,052	36,84	0,18	233,35	SN97Q	0,43	41,67	0,18	2.157,74
SN93B	0,071	37,46	0,19	310,46	SN97R	0,657	42,95	0,2	3.890,45
SN94M	0,024	34,77	0,22	89,95	SN97ac	0,32	41,13	0,18	1.682,67
SN94Q	0,029	35,38	0,21	119,12	SN97af	0,579	42,54	0,19	3.221,07
SN94T	0,036	35,69	0,21	137,4	SN97ai	0,45	41,78	0,23	2.269,86
SN95K	0,478	42,16	0,23	2.703,96	SN97aj	0,581	42,31	0,19	2.897,34
SN95ac	0,049	36,23	0,2	176,2	SN97am	0,416	41,78	0,19	2.269,86
SN95aw	0,4	41,72	0,19	2.208,00	SN97ap	0,83	43,53	0,19	5.081,59
SN95ax	0,615	42,53	0,23	3.206,27	SN98ba	0,43	42,04	0,25	2.558,59

SN	$z$	$\mu(\text{mag.})$	$\sigma$	$Dl$	SN	$z$	$\mu(\text{mag.})$	$\sigma$	$Dl$
SN95ay	0,48	42,05	0,2	2.570,40	SN98bi	0,74	43,03	0,3	4.036,45
SN95az	0,45	41,81	0,21	2.301,44	SN98ac	0,46	41,49	0,4	1.986,09
SN95ba	0,388	41,75	0,19	2.238,72	SN98M	0,63	42,94	0,37	3.872,58
SN96E	0,425	41,37	0,4	1.879,32	SN98J	0,828	43,27	0,61	4.508,17
SN96H	0,62	42,79	0,28	3.614,10	SN98cs	0,032	35,76	0,2	141,91
SN96I	0,57	42,48	0,25	3.133,29	SN98dx	0,053	36,63	0,19	211,84
SN96J	0,3	40,69	0,25	1.374,04	SN99Q2	0,459	42,35	0,22	2.951,21
SN96K	0,38	41,7	0,22	2.187,76	SN99U2	0,511	42,51	0,21	3.176,87
SN99S	0,474	42,49	0,22	3.147,75	2003XX	0,935	43,65	0,29	5.370,32
SN99N	0,537	42,53	0,41	3.206,27	2003bd	0,67	42,87	0,24	3.749,73
SN99fn	0,477	42,06	0,21	2.582,26	2002kd	0,735	42,82	0,19	3.664,38
SN99ff	0,455	41,97	0,28	2.477,42	2003be	0,64	42,69	0,25	3.451,44
SN99fj	0,815	43,43	0,33	4.852,89	2003dy	1,34	44,6	0,31	8.317,64
SN99fm	0,949	43,68	0,24	5.445,03	2002ki	1,14	44,39	0,29	7.550,92
SN99fk	1,056	44,03	0,23	6.397,35	2002hp	1,305	44,19	0,3	6.886,52
SN99fw	0,278	40,69	0,41	1.374,04	2002fw	1,3	44,74	0,2	8.871,56
SN99X	0,025	35,08	0,22	103,75	HST04Pat	0,97	44,35	0,36	7.413,10
SN99gp	0,026	35,25	0,21	112,2	HST04Mcg	1,37	44,91	0,25	9.594,01
SN99cc	0,031	35,52	0,21	127,06	HST05Fer	1,02	43,67	0,27	5.420,01
SN99ef	0,038	36,35	0,19	186,21	HST05Koe	1,23	44,85	0,23	9.332,54
SN99fv	1,199	43,87	0,34	5.942,92	HST04Gre	1,14	44,12	0,31	6.668,07
SN00ec	0,47	42,44	0,21	3.076,10	HST04Omb	0,975	43,89	0,26	5.997,91
SN00dz	0,5	42,42	0,24	3.047,89	HST05Lan	1,23	44,65	0,2	8.511,38
SN00eg	0,54	41,64	0,41	2.128,14	HST04Tha	0,954	43,53	0,27	5.081,59
SN00ee	0,47	42,41	0,23	3.033,89	HST04Rak	0,74	43,06	0,22	4.092,61
SN00eh	0,49	42,08	0,25	2.606,15	HST04Yow	0,46	41,91	0,32	2.409,91
SN00fr	0,543	42,35	0,19	2.951,21	HST04Man	0,854	43,64	0,29	5.345,64
SN00bk	0,026	35,03	0,23	101,39	HST05Spo	0,839	43,13	0,2	4.226,69
SN00cf	0,036	36,07	0,19	163,68	HST04Eag	1,02	44,2	0,19	6.918,31
SN01jh	0,884	43,9	0,19	6.025,60	HST05Gab	1,12	44,35	0,18	7.413,10
SN01hu	0,882	43,57	0,3	5.176,07	HST05Str	1,01	44,45	0,19	7.762,47
SN01iy	0,57	42,55	0,31	3.235,94	HST04Sas	1,39	44,58	0,19	8.241,38
SN01jp	0,528	42,44	0,25	3.076,10	SN-03D1au	0,504	42,29	0,17	2.870,78
SN01fo	0,771	42,8	0,17	3.630,78	03D1aw	0,582	42,75	0,17	3.548,13
SN01hs	0,832	43,23	0,29	4.425,88	03D1ax	0,496	42,04	0,17	2.558,59
SN01hx	0,798	43,56	0,31	5.152,29	03D1cm	0,87	43,96	0,34	6.194,41
SN01hy	0,811	43,65	0,35	5.370,32	03D1co	0,679	43,26	0,19	4.487,45
SN01jf	0,815	43,77	0,28	5.675,45	03D1fc	0,331	40,81	0,17	1.452,11
SN01jm	0,977	43,59	0,26	5.223,96	03D1fl	0,688	42,91	0,17	3.819,44
1997ff	1,755	45,03	0,35	10.139,11	03D1fq	0,8	43,35	0,19	4.677,35
2002dc	0,475	41,92	0,2	2.421,03	03D3af	0,532	42,46	0,18	3.104,56
2002dd	0,95	43,66	0,34	5.395,11	03D3aw	0,449	41,73	0,17	2.218,20
2003eq	0,84	43,35	0,21	4.677,35	03D3ay	0,371	41,35	0,17	1.862,09
2003es	0,954	43,98	0,27	6.251,73	03D3bh	0,249	40,44	0,17	1.224,62
2003eb	0,9	43,32	0,25	4.613,18	03D3cc	0,463	41,95	0,17	2.454,71

SN	$z$	$\mu(\text{mag.})$	$\sigma$	$Dl$	SN	$z$	$\mu(\text{mag.})$	$\sigma$	$Dl$
03D3cd	0,461	41,9	0,17	2.398,83	04D3co	0,62	42,89	0,18	3.784,43
03D4ag	0,285	40,6	0,17	1.318,26	04D3cy	0,643	42,89	0,18	3.784,43
03D4at	0,633	43	0,18	3.981,07	04D3df	0,47	42,13	0,17	2.666,86
03D4cx	0,949	43,37	0,32	4.720,63	04D3do	0,61	42,66	0,17	3.404,08
03D4cz	0,695	42,89	0,19	3.784,43	04D3ez	0,263	40,55	0,17	1.288,25
03D4dh	0,627	42,61	0,17	3.326,60	04D3fk	0,358	41,34	0,17	1.853,53
03D4di	0,905	43,57	0,3	5.176,07	04D3fq	0,73	43,15	0,18	4.265,80
03D4dy	0,604	42,38	0,17	2.992,26	04D3hn	0,552	42,33	0,17	2.924,15
03D4fd	0,791	43,22	0,18	4.405,55	04D3kr	0,337	41,12	0,17	1.674,94
03D4gg	0,592	42,43	0,19	3.061,96	04D3lu	0,822	43,41	0,27	4.808,39
03D4gl	0,571	42,33	0,18	2.924,15	04D3ml	0,95	43,82	0,31	5.807,64
04D1ag	0,557	42,38	0,17	2.992,26	04D3nh	0,34	41,19	0,17	1.729,82
04D2cf	0,369	41,35	0,17	1.862,09	04D3oe	0,756	43,32	0,17	4.613,18
04D2fp	0,415	41,64	0,17	2.128,14	04D4an	0,613	42,83	0,18	3.681,29
04D2fs	0,357	41,31	0,17	1.828,10	04D4bq	0,55	42,35	0,17	2.951,21
04D2gb	0,43	41,64	0,17	2.128,14	04D4dm	0,811	43,81	0,31	5.780,96
04D2gp	0,707	43,1	0,21	4.168,69	04D4dw	0,961	43,86	0,33	5.915,62



## Anexo 2

### Glossário

- *Bremsstrahlung* - O vocábulo germânico *bremsstrahlung* significa "radiação devida ao retardo" (*Bremsen* = frear e *Strahlung* = radiação) e foi adotado para denominar a radiação produzida por uma carga acelerada (via de regra, um elétron), com velocidade e aceleração colineares, que experimenta uma frenagem brusca ao interagir com determinado alvo. Quando os elétrons livres de um gás aquecido colidem com outras partículas, sendo assim freados, a perda de energia global se dá por emissões em raios X, constituindo o chamado *bremsstrahlung* térmico, típico do interior dos aglomerados de galáxias. Esse fenômeno produz um espectro característico, o qual pode ser utilizado para estimar a massa total de gas.
- *Buraco de minhoca* - Em inglês, *wormhole*. O termo foi introduzido pelo físico teórico norte-americano John Wheeler em 1957, embora a idéia original tenha sido concebida pelo matemático alemão Hermann Weyl já em 1921. Trata-se de uma característica topológica hipotética do *continuum* quadridimensional relativístico, a qual define uma "passagem" singular através do espaço-tempo, ligando dois pontos por meio de uma espécie de "condute" gravitacionalmente estável. Apesar de inexistir qualquer evidência direta de buracos de minhoca, a consideração de tais objetos tem sido encarada como válida pela relatividade geral [27, 28, 29, 30].
- *Cáustica* - Do ponto de vista da ótica geométrica, o mapa do lenteamento é uma aplicação que conecta duas variedades, o plano da lente e o plano de visualização do observador. Assim, tem-se o jacobiano  $J = 0$  do mapeamento, o qual fornece a curva crítica, e o dual de  $j = 0$ , que provê a imagem da curva crítica, ou seja, sua *cáustica*. O jacobiano do



mapeamento pode ser representado por

$$(x, y, a, b) \rightarrow \frac{abx^4 + 2x^2aby^2 + x^2b - x^2a + aby^4 - 1 - by^2 + ay^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

onde  $a$  e  $b$  são os parâmetros da transformação (aqui,  $a = \pm 0.1$  e  $b = \pm 1$ ),  $x$  e  $y$  são as coordenadas no plano da lente. Na figura G.1, a primeira linha mostra as curvas críticas e a segunda mostra as cáusticas correspondentes. Cáusticas e linhas críticas servem para delimitar regiões de posicionamento relativo da fonte no campo da lente. Na figura G.2, as duas únicas cáusticas computadas aparecem em roxo e em verde, enquanto a curva crítica aparece em vermelho. O pequeno círculo representa a fonte. Quando localizada dentro de ambas as cáusticas, a fonte origina quatro imagens. Para a fonte colocada fora da cáustica interna, porém, dentro da outra, são produzidas três imagens.

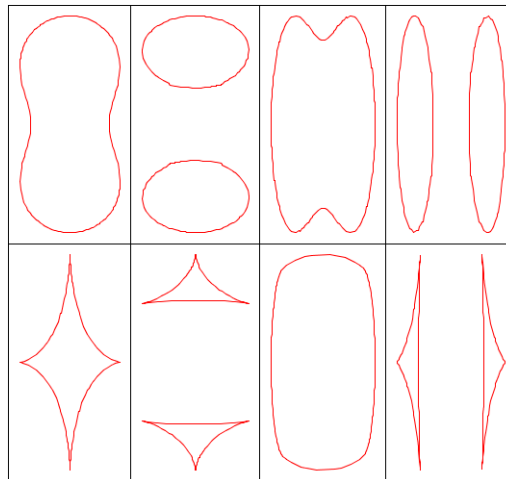


Figura G.1: linhas críticas (acima) e respectivas cáusticas (abaixo).

- *Censura Cósmica (Cosmic censorship)* - Conjectura defendida por Roger Penrose pela qual a formação de singularidades nuas seria descartada da natureza simplesmente porque as singularidades no espaço-tempo são sempre envolvidas por um evento-horizonte que as previne de serem

observadas e de influenciarem o mundo exterior. Em sua formulação mais elementar, essa conjectura foi refutada por exemplos de métricas regidas pelas equações de Einstein capazes de abrigar singularidades nuas. Contudo, de acordo com os proponentes da conjectura, os exemplos apresentados não propiciam generalização teórica; alguns requerem espaço-tempos altamente simétricos ou ajustes paramétricos, enquanto outros mostram campos gravitacionais em torno das singularidades por demais fracos para serem considerados verdadeiramente singulares. Ainda não há, portanto, uma formulação conclusiva que nos permita validar a conjectura no âmbito da relatividade geral.

- *Efeito Casimir* - A física do efeito Casimir nasce de um campo quantizado. O modelo mais conhecido desse efeito é o das duas placas metálicas descarregadas colocadas lado-a-lado no vácuo, muitíssimo próximas entre si (da ordem de vários diâmetros atômicos), e na ausência de campos eletromagnéticos externos. Bem entendido, essa ausência significa igualmente que inexistem campos entre as placas. Quando, porém, se aplica a eletrodinâmica quântica para estudar o intervalo micrométrico entre as placas, descobre-se que as mesmas interagem com fótons virtuais, gerando forças que podem ser de repulsão ou de atração, dependendo da maneira como as placas estejam arrumadas. Tais forças, muito pequenas, foram medidas, e constituem clássico exemplo de fenômenos originados de segunda quantização. O efeito foi previsto em 1948 pelo físico holandês Hendrik Casimir dos Laboratórios de Pesquisa Philips. Em física aplicada, o efeito Casimir tem grande importância no desenvolvimento da nanotecnologia.

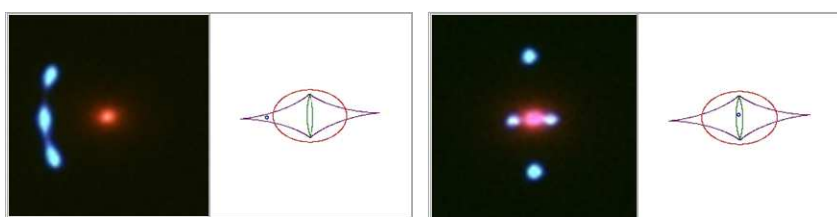


Figura G.2: imagens (em azul) produzidas por uma galáxia (em vermelho) sob efeito de lenteamento com os respectivos diagramas de curvas críticas e cáusticas.

- *Efeito Sunyaev-Zel'dovich* - Existem meios empíricos para estimar a distância por diâmetro angular levando em conta inclusive certas flutuações detectáveis na radiação cósmica de fundo (doravante RCF). Rashid Sunyaev e Yakov Zel'dovich [8] previram que, durante a passagem pela vizinhança de um aglomerado de galáxias, alguns fótons da RCF perceberiam o espalhamento Compton dos elétrons termalizados no interior do aglomerado. As distorções provocadas no espectro de corpo negro da RCF constituem o chamado efeito Sunyaev-Zel'dovich. Se o aglomerado possui velocidade peculiar, isto é, velocidade diferente de zero ao longo da linha de visada, então ocorrerá concomitantemente um efeito Sunyaev-Zel'dovich cinemático e o estudo de sua componente sobre a linha de visada pode fornecer informação acerca do movimento do aglomerado como um todo. A velocidade peculiar (radial) é dada por  $V_r = cz - rH_0$ , onde  $z$  é o desvio para o vermelho do aglomerado e  $r$  sua distância.

Aglomerados de galáxias são os maiores sistemas gravitantes conhecidos em quase-equilíbrio. Chegam a cerca de  $1h^{-1}Mpc$  de extensão, sendo que os mais povoados alcançam massas da ordem de  $10^{14} - 10^{15}M_{\odot}$ . O ambiente dessas estruturas gigantesas inclui gás aquecido com temperaturas em torno de  $10^7 - 10^8K^{\circ}$ , originando *bremsstrahlung* térmico e emissões em raios-X. De um ponto de vista instrumental, as distâncias aos aglomerados de galáxias foram determinadas da análise conjunta de observações em raios X e de observações interferométricas do efeito Sunyaev-Zel'dovich (doravante SZ) em 30 GHz [14]. Para fins comparativos, vou me referir ao modelo da esfera isotérmica pela expressão empírica geral da distância por diâmetro angular segundo o efeito SZ,

$$D_a = \frac{(\Delta T_0)^2}{S_{x0}} \left( \frac{m_e c^2}{k_B T_{e0}} \right)^2 \frac{\Lambda_{eH0} \mu_e / \mu_H}{4\pi \zeta_{(x, T_e)}^2 T_{RCF}^2 \sigma_T^2 (1+z)^4} \frac{1}{\theta_c} \frac{\int \left( \frac{n_e}{n_{e0}} \right)^2 \frac{\Lambda_{eH}}{\Lambda_{eH0}} d\eta |_{R=0}}{\left[ \int \frac{n_e}{n_{e0}} \frac{T_e}{T_{e0}} d\eta |_{R=0} \right]^2},$$

onde  $\Delta T$  é o incremento/decremento da temperatura termodinâmica central do aglomerado devida ao efeito SZ,  $T_{RCF} = 2.728K$  é a temperatura da RCF,  $\Lambda_{eH0}$  é a chamada função de resfriamento ou “*cooling function*” da radiação X em unidades cgs ( $\Lambda_{eH}$  é a mesma grandeza,

porém, tomada no *rest frame* do aglomerado),  $\varsigma_{(x,T_e)}$  é a dependência frequencial do efeito SZ com  $x = h\nu/kT_{\text{RCF}}$ ,  $\sigma_T$  é a secção de choque de Thompson,  $S_{x0}$  é a normalização do brilho superficial  $S_x$  (em raios X) usada no ajuste do modelo,  $\theta_c$  é a escala angular característica do aglomerado,  $n_e$  é o número de densidade de elétrons,  $n_{e0}$  é a densidade central do aglomerado,  $\eta$  é a distância na linha de visada em unidades do raio característico (o chamado *core radius*)  $r_c = \theta_c D_a$  [13,14]. A rigor, essa maneira de calcular distâncias envolve grandes incertezas porque raramente se verifica simetria esférica da distribuição de gás nos aglomerados. Não obstante, há consenso de que nenhum viés importante é introduzido no parâmetro de Hubble inferido de uma amostra suficientemente grande de aglomerados. A figura G.3 apresenta a distância por diâmetro angular calculada para 38 aglomerados de galáxias [12,14,33], de acordo com o *Chandra X-ray Observatory*. As barras de erro incluem incertezas estatísticas intrínsecas às observações em raios X e às medições do efeito SZ. As incertezas no registro da distância por diâmetro angular são de tal monta que seria, para dizer o mínimo, arbitrária qualquer conclusão baseada em tão precária conjuntura observacional. Isso se torna mais evidente na figura G.4, onde classifiquei os 38 aglomerados por dissimilaridades no par de variáveis  $(z, D_a)$ , construindo 6 mega-aglomerados fiduciários e adotando para cada um as medianas de  $z$  e de  $D_a$ , bem como as médias dos erros em  $D_a$  [32].

- *Halo exterior (da Via-Láctea)* - Região envolvente do disco da nossa galáxia, o halo é constituído por duas partes rotantes em sentidos opostos com relação ao centro galáctico. O halo interior, que se estende até cerca de 50.000 anos-luz do centro, gira na mesma direção do disco, porém, mais lentamente. O halo exterior, que se estende de 65.000 a 300.000 anos-luz do centro, gira na direção oposta, sendo mais veloz que o interior. Os halos manifestam composições químicas distintas, fato que aponta para uma formação da Via-Láctea em etapas.
- *Homogeneidade* - Um sistema é dito homogêneo se todos os seus pontos são equivalentes com respeito a um determinado conjunto de propriedades relevantes. Em cosmologia significa independência de posição no espaço. Numa cosmologia realística, o espaço-tempo pode ser espacialmente homogêneo, isto é, sua geometria pode ser independente de

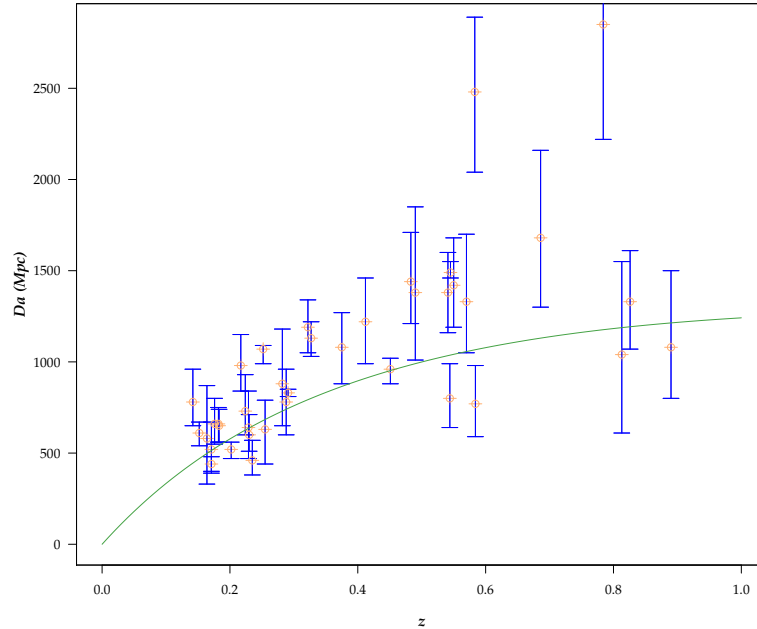


Figura G.3: distância por diâmetro angular no modelo FLRW (curva teórica) e distância por diâmetro angular calculada para 38 aglomerados de galáxias, de acordo com o *Chandra X-ray Observatory*.

posição em cada superfície de tempo cosmológico constante. Entretanto, assumindo a descrição relativística *ipsis litteris*, a homogeneidade completa exigiria que o tensor de energia-*stress* da matéria incluísse independência do tempo, o que seria completamente incompatível com as evidências atuais de expansão do universo. Um espaço que é isotrópico com respeito a todos os seus pontos é também homogêneo, embora a recíproca não seja verdadeira.

- *Joviano* - Diz-se do astro com características (dimensões, composição química, etc.) que o fazem semelhante ao planeta Jupiter. Os planetas extra-solares descobertos até o momento são tipicamente jovianos. Devido a sua massa, um astro joviano exerce sobre sua primária efeitos gravitacionais de tal monta que torna-se possível deduzir de forma ine-

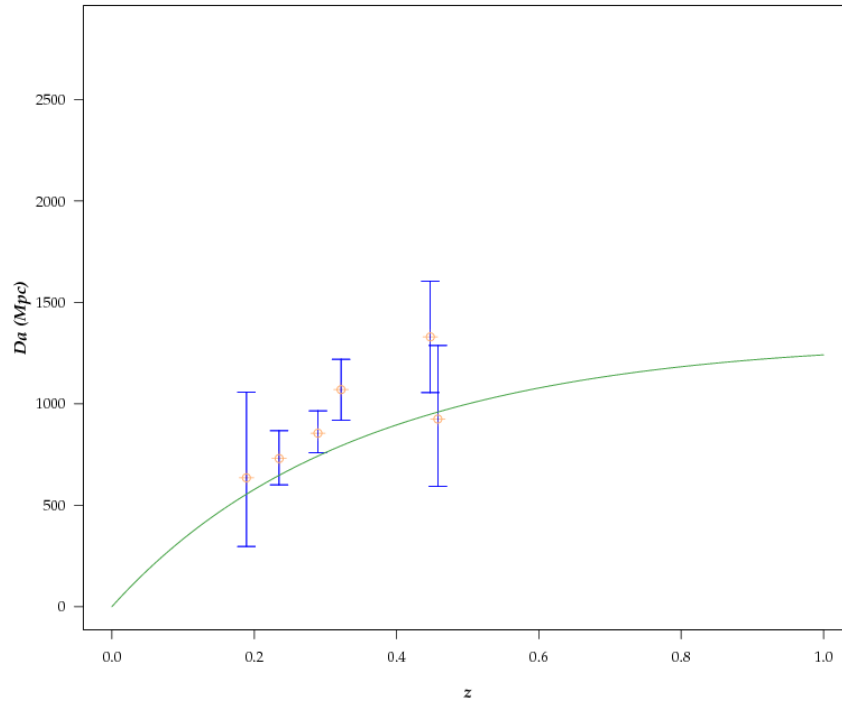


Figura G.4: distância por diâmetro angular no modelo FLRW (curva teórica) e distância por diâmetro angular calculada para 6 mega-aglomerados fiduciários construídos a partir das dissimilaridades de 38 aglomerados pelo método de "partição por medóides"[32].

quívoca sua presença. Uma variante mais rara é o termo *jovóide*.

- *Polítropo ou estrela politrópica* - O conceito de politropo, ou estrela politrópica, se refere a modelos bastante simplificados acerca da variação interna das principais propriedades físicas das estrelas. Tais modelos são representados por sistemas de equações que expressam os processos físicos relevantes correlatos àquelas propriedades. O caráter simplificado desses modelos permite que se obtenham soluções analíticas ou numéricas para a equações representativas, soluções essas que descrevem as variações em questão. A equação de Lane-Emden determina a estrutura interna das estrelas politrópicas.

De um ponto de vista essencialmente cosmológico-astrofísico, modelos politrópicos encontram aplicação a partir da observação de eventos GRB (*Gamma-Ray Bursts*), os quais mostraram uma imagem química inusitada do universo distante ( $z > 2$ ). Contrariamente à pobreza em metais que seria de esperar para estrelas a elevados desvios para o vermelho, o meio interestelar em torno daqueles eventos mostrou-se rico em metais, com metalicidades variando entre 0.1 e 1 (1 = metalicidade solar). Verifica-se naturalmente uma evolução correlata ao desvio para o vermelho se combinarmos tais resultados com observações de galáxias a  $z < 1$ . Eventos GRB são particularmente esperados em hiperestrelas jovens, isto é, estrelas de nêutrons onde uma considerável parte desses foi convertida a híperons e/ou a matéria na forma de *quarks* (na verdade, híperons são bárions dotados de "estranheza" diferente de zero). Ignorando correções relativísticas de primeira ordem, o modelo básico usado para descrever tais objetos é o de um gás de Fermi degenerado auto-gravitante constituído de nêutrons com massa bariônica total  $M_b$  e momento angular 0 obtido a partir de certa solução politrópica de Lane-Emden. Para maior aprofundamento sobre modelos politrópicos, recomendo as referências [60, 61, 62].

- *Singularidade* - Em relatividade geral e em outras teorias de campo, uma singularidade é um subconjunto do espaço-tempo para o qual quantidades como curvatura e densidade não se definem, isto é, tornam-se infinitas. Há-que atentar-se para as chamadas singularidades aparentes, as quais podem ser removidas por simples transformação de coordenadas. Uma verdadeira singularidade aponta para uma quebra nas regras da teoria que a abriga, tornando imprevisíveis alguns aspectos da evolução do sistema físico em questão, bem como indetermináveis certos valores de condições iniciais.
- *Sistema de coordenadas comóveis* - Na relatividade geral, as coordenadas são rótulos para os pontos do espaço-tempo, não possuindo, *a priori*, qualquer significado físico. No entanto, é possível associar tais rótulos com partes da matéria presente no universo, configurando assim a materialização do sistema de referência. Uma vez que tal sistema acompanha a matéria em seu movimento, ele é dito "comóvel" (ou "comovente", como querem alguns). Um requisito fundamental para um sistema desse tipo é que as trajetórias dos objetos considerados não

se cruzem em momento algum, o que tornaria o mapeamento das coordenadas singular em cada cruzamento. Outro requisito, desejável, porém, não necessário, é que os objetos considerados interajam tão-somente por gravitação de modo a transladarem sempre via geodésicas do espaço-tempo assumido.

- *Supergravidade* - Teoria que descreve a supersimetria supostamente presente na gravidade. Por seu turno, supersimetria se refere à simetria fermi-bosônica do espectro de energia de acoplamento entre as partículas; é uma hipótese ou conjunto de hipóteses que procura preencher o vazio fenomenológico que ocorre entre os setores do espectro relacionados às interações eletrofracas e às interações que têm lugar na escala da grande unificação (de 102 GeV a 10<sup>16</sup> GeV).

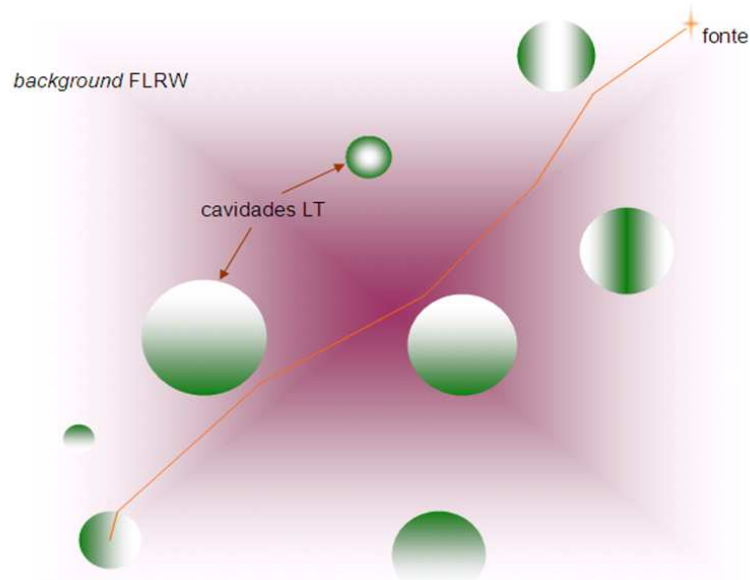


Figura G.5: cavidades LT embutidas num *background* FLRW, produzindo lenteamento gravitacional sobre a luz emitida por uma fonte remota.

- *Supersimetria cosmológica* - Hipótese que defende acerca da existência de uma simetria global entre regiões homogêneas e inhomogêneas no universo. As regiões inhomogêneas, via de regra cavidades LT embutidas



num *background* friedmanniano (fig. G5), seriam dotadas de estrutura própria, em geral, representadas por uma métrica LT em cinco dimensões para observadores situados no *background*. Tal métrica só seria redutível a FLRW nas junções entre as cavidades LT e o *background*. Ressalte-se que tais cavidades produziriam efeitos de lenteamento gravitacional apreciáveis, refletindo assim a influência das inhomogeneidades sobre a avaliação das distâncias cosmológicas.



Artigos e livros

# Bibliografia

- [1] D. Palle, *On the large-scale inhomogeneous Universe and the cosmological constant* (arXiv:astro-ph/0205462v1, 2002).
- [2] K. Bolejko, *Supernova Ia observations in the Lemaitre-Tolman model* (arXiv:astro-ph/0512103v4, 2008).
- [3] D. Garfinkle, *Inhomogeneous spacetimes as a dark energy model* (arXiv:gr-qc/0605088, 2006).
- [4] D. J. H. Chung and A. Enea Romano, *Mapping Luminosity-Redshift Relationship to LTB Cosmology* (arXiv:astro-ph/0608403v1, 2006).
- [5] N. Brouzakis, N. Tetradis and E. Tzavara, *The effect of large-scale inhomogeneities on the luminosity distance* (arXiv: astro-ph/0612179, 2007).
- [6] K. Enqvist, *Lemaitre-Tolman-Bondi model and accelerating Universe* (Gen Relativ Gravit 40:451- 466 DOI 10.1007/s10714-007-0553-9, 2008).
- [7] T. Hui-Ching Lu and C. Hellaby, *Obtaining the spacetime metric from cosmological observations* (arXiv: 0705.1060, 2007).
- [8] K. Patil, S. Ghate and R. Saraykar, *Spherically symmetric inhomogeneous dust collapse in higher dimensional space-time and cosmic censorship hypothesis* (Pramana - Journal of Physics, Vol. 56, No 4, 2001).
- [9] P. Schneider, *The cosmological lens equation and the equivalent single-plane gravitational lens* (arXiv: astro-ph/9706185v1, 1997).
- [10] V. Perlick, *Gravitational lensing from a spacetime perspective* (Living Reviews in Relativity 7, Berlin, 2004).

- [11] J. Carlstrom, G. Holder and E. Reese, *Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich effect* (Annu. Rev. Astronomy and Astrophysics, 2002).
- [12] M. Bonamente, M. K. Joy *et al*, *Determination of the cosmic distance scale from Sunyaev-Zel'dovich effect and Chandra X-ray measurements of high redshift galaxy clusters* (arXiv: astro-ph/0512349v2, 2006).
- [13] M. Birkinshaw, *The Sunyaev-Zel'dovich effect* (arXiv: astro-ph/9808050v1, 1998).
- [14] K. A. Romer, J. Peterson, C. Cantalupo *et al*, *First results from an X-ray, weak lensing, and Sunyaev-Zel'dovich effect survey of nearby clusters: Abell 3266* (arXiv: astro-ph/0301024v1, 2003).
- [15] R. Tolman, *Effect of inhomogeneity on cosmological models* (General Relativity and Gravitation, Vol. 29, n<sup>o</sup> 7, 1997).
- [16] R. Tolman, *Relativity, thermodynamics and cosmology* (Dover, reprint, 1987).
- [17] G. Lemaître, *The expanding Universe* (General Relativity and Gravitation, Vol. 29, n<sup>o</sup> 5, 1997).
- [18] A. Riess *et al*, *Astron. J.* 116 1009, 1998.
- [19] N. Serpa, *New lectures on supergravity*, monografia inédita da cadeira de *Campos Quânticos e Teorias de Gauge*, CBPF, 1998.
- [20] P. Newbury and R. Spiteri, *Inverting gravitational lenses* (SIAM Review, Vol. 44, n<sup>o</sup> 1, 111-130).
- [21] R. Kayser, P. Helbig and T. Schramm, *A general and practical method for calculating cosmological distances* (arXiv: astro-ph/9603028v3, 1997).
- [22] M. Ribeiro, *On Modelling a Relativistic Hierarchical (Fractal) Cosmology by Tolman's Spacetime . II. Analysis of the Einstein-de Sitter Model* (arXiv: astro-ph/08070869v1, 2008).
- [23] W. Bonnor, *The Formation of the Nebulae*, General Relativity and Gravitation, Vol. 30, n<sup>o</sup> 7, 1998.

- [24] S. Perlmutter *et al*, *Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae* (arXiv: astro-ph/9812133v1, 1998).
- [25] W. de Sitter 1917a, *On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis*, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings 19(1916-17): 1217-1225; 1917b, *On the Curvature of Space*. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences. Proceedings 20 (1917-18): 229-243; 1917c, *On Einstein's Theory of Gravitation, and its Astronomical Consequences*. Third Paper. Royal Astronomical Society. Monthly Notices 78 (1917-18): 3-28.
- [26] R. Ansari, et al., *Experimental limits on the contribution of sub-stellar and stellar objects to the galactic halo* (arXiv:astro-ph/9511073, 1995).
- [27] M. Visser, *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking*, AIP Press, New York, 1995.
- [28] M. Visser, *Wormholes, baby universes, and causality*, Phys. Rev. D, 41, 1116-1124, 1990.
- [29] M. Visser, *Traversable wormholes: some simple examples*, Phys. Rev. D, 39, 3182-3184, 1989.
- [30] K. Thorne, *Closed timelike curves*, GRP-340, CalTech, Pasadena, CA, 1993.
- [31] C. Hellaby, *Finding the metric of the cosmos*, Mathematics of Gravitation II, Banach Centre, Warsaw, 2003.
- [32] M. van der Laan, K. Pollard, J. Bryan, *A new partitioning around medoids algorithm*, U.C. Berkeley Division of Biostatistics Working Paper Series, *paper 105*, 2002.
- [33] *The SDSS-C4 Galaxy Cluster Catalog* (2004), in: <http://www.ctio.noao.edu/chrism/c4/>, consultado em 19/01/2008.
- [34] F. Hadrović, J. Binney, *Gravitational lensing and the angular-diameter distance relation*(arXiv:astro-ph/9708110v2, 1997).
- [35] A. Linde, *Inflation and creation of matter in the Universe*, in: <http://moriond.in2p3.fr/J00/ProcMJ2000/linde/paper.pdf>.

- [36] J. Wambsganss, *Gravitational lensing in astronomy*, in: <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-12wamb>.
- [37] T. Schramm, R. Kayser, *The complex theory of gravitational lensing*, *Astron. Astrophys.* Vol. 299, 1-10, 1995.
- [38] B. Paczynski, *Gravitational microlensing in the Local Group*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 34, 419–59, 1996.
- [39] M. Milgrom, *A Modification of the Newtonian Dynamics as a Possible Alternative to the Hidden Mass Hypothesis*, *Astrophysical Journal*, Vol. 270, 365-370, 1983.
- [40] M. Bartelmann, *General Relativity*, Lecture Notes, Universität Heidelberg, 2004.
- [41] V. Perlick, *Gravitational lensing from a spacetime perspective*, *Living Reviews in Relativity*, Berlin, 2004.
- [42] S. Ghassemi *et al*, *Lensing effects in inhomogeneous cosmological models*(arXiv:0901.0340v1 [astro-ph.CO], 2009).
- [43] L. Landau, E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, New York, 1975.
- [44] F. Hoyle and M. S. Vogeley, *Astrophys. J.* Vol. 607, 751, 2004.
- [45] S. Bardelli, E. Zucca, G. Zamorani, L. Moscardini and R. Scaramella, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 312, 540, 2000.
- [46] T. Kolatt, A. Dekel, A. and O. Lahav, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* Vol. 275, 797, 1995.
- [47] M. J. Hudson, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* Vol. 265, 43, 1993.
- [48] T. Faber, M. Visser, *Combining rotation curves and gravitational lensing: How to measure the equation of state of dark matter in the galactic halo* (arXiv:astro-ph/0512213v2, 2006).
- [49] H. Weyl, *Space, Time, Matter*, Dover, New York, 1952.

- [50] M. Meneghetti, *Il Lensing Gravitazionale*, in <http://www.ita.uni-heidelberg.de/massimo/sub/Popular/lensingcoelum.pdf>, consultado em 25/05/2009.
- [51] W. Bonnor, *Evolution of Inhomogeneous Cosmological Models*, Mon. Not R. Astron. Soc. Vol. 167, 55-61, 1974.
- [52] R. Kantowski, *Corrections in the Luminosity-Redshift Relations of the Homogeneous Friedmann Models*, The Astrophysical Journal, Vol. 155, 1969.
- [53] C. Dyer, R. Roeder, *The Distance-Redshift Relation for Universes with no Intergalactic Medium*, The Astrophysical Journal, Vol. 174, 115-117, 1972.
- [54] J. Plebański, A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge University Press, 2006.
- [55] M. McClure, C. Hellaby, *Determining the Metric of the Cosmos: Stability, Accuracy, and Consistency* (arXiv:0709.0875v2 [gr-qc], 2008).
- [56] M. Bartelmann, P. Schneider *Weak Gravitational Lensing* (arXiv:astro-ph/9912508v1, 2000).
- [57] R. Narayan, M. Bartelmann, *Lectures on Gravitational Lensing*, Proceedings of the 1995 Jerusalem Winter School; edited by A. Dekel and J.P. Ostriker; Cambridge University Press.
- [58] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973.
- [59] B. Kursunoglu *et al*, *Unified Symmetry*, Plenum Press, New York, 1995.
- [60] G. Pinzón, B. Calvo-Mozo, *A Perturbed Tri-Polytropic Model of the Sun* (astro-ph/0107428, 2001).
- [61] E. Böhm-Vitense, *Introduction to Stellar Astrophysics*, Cambridge University Press, 1992.
- [62] M. Schwarzschild, *Structure and Evolution of the Stars*, Dover, New York, 1965.

- [63] T. Schramm, R. Kayser, *Radial cluster lensing* (arXiv:astro-ph/9407025, 1995).
- [64] A. Einstein, E. Straus, *Rev. Mod. Phys.* 17, 120, 1945; *Rev. Mod. Phys.* 18, 148 - 149, 1946.
- [65] Yu. V. Baryshev *et al*, *Facts and Ideas in Modern Cosmology* (arXiv:astro-ph/9503074, 1995).
- [66] H. Alnes *et al*, *An inhomogeneous alternative to dark energy?* (arXiv:astro-ph/0512006, 2006).

