



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo

Mauro Ferreira Baião

**Análise dinâmica de um sistema de satélites
vinculados na vizinhança dos pontos colineares**

Rio de Janeiro

2010

Baião, Mauro Ferreira

Análise dinâmica de um sistema de satélites vinculados na vizinhança dos pontos colineares/ Mauro Ferreira Baião. - Rio de Janeiro: UFRJ/ OV, 2010.

xxi, 137f.:il.; 30 cm.

Orientador: Teresinha de Jesus Stuchi.

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ OV/ Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2010.

Referências Bibliográficas: f. 156-158.

1. Problema restrito de três corpos. 2. Modelagem de sistemas vinculados. 3. Pontos de equilíbrio. 4. Órbitas não-periódicas. 5. Órbitas periódicas. I. Stuchi, Teresinha de Jesus
- II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório do Valongo, Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2010.
- III. Título.

Mauro Ferreira Baião

**Análise dinâmica de um sistema de satélites
vinculados na vizinhança dos pontos colineares**

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Astronomia.

Orientador: Prof. Dra. Teresinha de Jesus Stuchi

Rio de Janeiro

2010

Mauro Ferreira Baião

**Análise dinâmica de um sistema de satélites
vinculados na vizinhança dos pontos colineares**

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Astronomia.

Aprovada por

Rio de Janeiro

2010

À minha esposa Martha,
e aos meus filhos Marcelo e Murilo.

AGRADECIMENTOS

À orientadora deste trabalho, grande amiga e mentora, prof. Dra. Teresinha de Jesus Stuchi, pela dedicação, paciência, incentivo e conhecimentos demonstrados ao longo de todo o nosso convívio.

Aos professores doutores do Observatório do Valongo, em particular Dr. Hélio Jacques Rocha-Pinto, Dra. Heloísa Maria Boechat-Roberty, Dr. Marcelo Assafin, Dr. Roberto Vieira Martins, Dr. Gustavo Frederico Porto de Mello, Dr. Alexandre Lyra de Oliveira, Dr. Carlos Roberto Rabaça e Dra. Lilia Irmeli Arany Prado, a quem tive o prazer de ser aluno.

Aos demais amigos e funcionários do Valongo, onde o convívio fraterno é sem dúvida um diferencial.

Aos meus pais, Edison e Leda, pois afinal de contas eles iniciaram este trabalho!

Aos meus filhos, Marcelo e Murilo, a quem procuro transmitir todas as coisas que sei, além de lhes dedicar um incondicional amor paterno.

E, finalmente, à pessoa que mais colaborou para que eu pudesse me dedicar à realização desta dissertação: minha esposa Martha Christiane Vianna Baião, a quem dedico integralmente este trabalho.

... cantar e cantar e cantar a beleza
de ser um eterno aprendiz ...

Gonzaguinha

RESUMO

BAIÃO, Mauro Ferreira. **Análise dinâmica de um sistema de satélites vinculados na vizinhança dos pontos colineares.** 2010. Dissertação (Mestrado em Astronomia) - Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010

Este trabalho analisa a evolução dinâmica de satélites formados por duas massas ligadas por um cabo, conhecidos na literatura internacional como *Tethered Satellites*. A partir de uma abordagem lagrangiana as equações de movimento são deduzidas para o caso plano na vizinhança dos pontos colineares, em particular para o L_2 do problema restrito dos três corpos. É realizada uma análise da influência de parâmetros como: comprimento do cabo, razão de massas e condições iniciais com o propósito de se estudar as alterações orbitais dos satélites. Os pontos de equilíbrio do sistema são analiticamente estudados, bem como um estudo da estabilidade destes pontos afim de se obter soluções periódicas nas suas vizinhanças através do *Método de Continuação Numérica*. As aplicações numéricas se concentram nos sistemas Terra-Lua e Sol-Terra, apesar do caráter geral das equações obtidas.

ABSTRACT

BAIÃO, Mauro Ferreira. Dynamic analysis of a satellite system linked in neighborhood of the Lagrangian points. 2010. Master Thesis in Astronomy - Observatory Valongo, Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010

This paper analyzes the dynamic evolution of satellites formed by two masses connected by a cable, known as Tethered Satellites. A from a model and a Lagrangian approach the equations of motion are deducted for the neighborhood plan in case of collinear points, particularly for the L2 the restricted problem of three bodies. Is an analysis of the influence of parameters as cable length, mass ratio and initial conditions with the purpose of to study the alterations of the satellites. The equilibrium points of the system are analytically determined, as well and made a study of stability in order to obtain periodic solutions in their neighborhoods through the method of analytic continuation. The numerical applications focus on Earth-Moon and Sun-Earth systems, although the character equations are valid for any other system which can be approximated by the restricted three body problem.

Lista de Figuras

2.1	Corpos primários	33
2.2	Sistema de coordenadas sinódico - XOY	34
2.3	Vetores posição do CM dos satélites	34
2.4	Distâncias relativas de m_1 e m_2	36
2.5	Vetores posição de m_1 e m_2 no referencial XOY	37
2.6	Vetores unitários $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ no referencial XOY	39
2.7	Configurações de equilíbrio	48
3.1	Pontos de equilíbrio para o sistema Terra-Lua (massas: 1 e 1)	53
3.2	Pontos de equilíbrio para o sistema Terra-Lua (massas: 1 e 9)	54
3.3	Pontos de equilíbrio para o sistema Terra-Lua (massas: 1 e 99)	54
3.4	Pontos de equilíbrio para o sistema Sol-Terra (massas: 1 e 1)	55
3.5	Pontos de equilíbrio para o sistema Sol-Terra (massas: 1 e 9)	56
3.6	Pontos de equilíbrio para o sistema Sol-Terra (massas: 1 e 99)	56
3.7	Parâmetros para cada sistema	59
3.8	Evolução do SVF inicialmente no equilíbrio com $\theta_0 = 0$ (Terra-Lua)	61
3.9	Evolução do SVF inicialmente no L_2 do PR3C com $\theta_0 = 0$ (Terra-Lua) . .	62
3.10	Sentido do movimento para $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$	63
3.11	Evolução do SVF inicialmente no equilíbrio com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Terra-Lua)	64
3.12	Evolução do SVF inicialmente com $\theta_0 = 1$ e $\hat{x}_0 = \hat{x}_{eq(\theta=0)}$ (Terra-Lua) . . .	65
3.13	Sentido do movimento para $\hat{x}_0 = 0$ ($\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$)	67
3.14	Evolução do SVF inicialmente com $\theta_0 = 0$ e $\hat{x}_0 = 0$ (Terra-Lua)	67
3.15	Evolução do SVF inicialmente com $\theta_0 = 1$ e $\hat{x}_0 = 0$ (Terra-Lua)	68
3.16	Evolução do SVF inicialmente com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\hat{x}_0 = 0$ (Terra-Lua)	69
3.17	Comparação do SVF para θ e $\dot{\theta}$ inicialmente com $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Terra-Lua)	70

3.18	Evolução do SVF para razões de massas 1 : 1 e 1 : 9 com $\theta_0 = 1$ (Terra-Lua)	72
3.19	Evolução do SVF para variação do comprimento do cabo com $\theta_0 = 0$ (Terra-Lua)	73
3.20	Evolução do SVF para variação da velocidade rotacional inicial com $\theta_0 = 1$ (Terra-Lua)	75
3.21	Trajetórias do SVF para a variação da velocidade rotacional inicial com $\theta_0 = 1$ (Terra-Lua)	76
3.22	Afastamento em relação ao L_2 para comprimentos diferentes de SVF no Terra-Lua e Sol-Terra	78
3.23	Afastamento em relação ao L_2 para comprimentos iguais de SVF no Terra-Lua e Sol-Terra	79
3.24	Evolução do SVF inicialmente com $\hat{x}_0 = \hat{x}_{eq}$ e $\theta_0 = 0$ (Sol-Terra)	80
3.25	Evolução do SVF inicialmente com $\hat{x}_0 = \hat{x}_{eq}$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Sol-Terra)	81
3.26	Evolução do SVF inicialmente com $\hat{x}_0 = \hat{x}_{L2}$, $\theta_0 = 0$ e $\dot{\hat{x}}_0 = 0$ (Sol-Terra)	82
4.1	Regiões vizinhas aos pontos de equilíbrio	86
4.2	Diagrama de fases para P_0	92
4.3	Diagrama de fases para $P_{\pi/2}$	94
4.4	Representação de uma seção de Poincaré	99
4.5	Arco ds entre duas órbitas periódicas	100
4.6	Família de órbitas periódicas	102
4.7	Refinamento da órbita periódica	103
4.8	Correção temporal da variação da órbita fiducial	105
4.9	Coordenadas adimensionais para o sistema Terra-Lua	108
4.10	Sentido do movimento de OPL para $x_0 = 9.999999999 \cdot 10^{-5}$ (Terra-Lua)	109
4.11	Órbita periódica com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)	110
4.12	Família com 3800 órbitas periódicas intercaladas de 200 em 200 com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)	111
4.13	Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)	112
4.14	Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 3500 km - (Terra-Lua)	114
4.15	Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 5000 km - (Terra-Lua)	114
4.16	Ampliação da família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)	115

4.17	Comparação de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km, 3500 km e 5000 km - com condição inicial em relação ao L_2 do PR3C (Terra-Lua)	115
4.18	Curva característica para OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Terra-Lua)	116
4.19	Curva característica (ampliada) para OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Terra-Lua)	117
4.20	Comparação de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km, 3500 km e 5000 km - com condição inicial em relação ao ponto de equilíbrio (Terra-Lua)	118
4.21	Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)	120
4.22	Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 3500 km - (Terra-Lua)	121
4.23	Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 5000 km - (Terra-Lua)	121
4.24	Ampliação da família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000km, 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)	122
4.25	Coordenadas adimensionais para o sistema Sol-Terra	122
4.26	Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 7500 km (Sol-Terra)	124
4.27	Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 7500 km (Sol-Terra)	124
4.28	Curva característica para OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Sol-Terra)	125
4.29	Curva característica (ampliada) para OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Sol-Terra)	126
A.1	Representação básica do modelo	130
B.1	Vetores posição	136

Lista de Tabelas

3.1	Distância da coordenada x_{eq} do ponto de equilíbrio ao L_2 para massas dos satélites iguais (Terra-Lua e Sol-Terra)	57
3.2	Parâmetros do sistema Terra-Lua	58
3.3	Parâmetros obtidos do sistema Terra-Lua	58
3.4	Limites dos parâmetros usados na integração	59
3.5	Condições iniciais para a integração das equações do SVF (Terra-Lua) . . .	60
3.6	Valor médio de $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta}_0 = 0 \text{ dia}^{-1}$, $\dot{\theta}_0 = 1 \text{ dia}^{-1}$ e $\dot{\theta}_0 = 100 \text{ dia}^{-1}$)	74
3.7	Parâmetros do sistema Sol-Terra	77
3.8	Parâmetros obtidos do sistema Sol-Terra	77
3.9	Pontos de equilíbrio para $\beta_1 = \beta_2$ (Sol-Terra)	78
4.1	Coeficiente ρ ($\theta_0 = 0$) para obtenção de OPL no sistema Terra-Lua	93
4.2	Coeficiente ρ ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$) para obtenção de OPL no sistema Terra-Lua	95
4.3	Coeficiente ρ para obtenção de OPL no sistema Sol-Terra	97
4.4	Condições iniciais do sistema variacional	104
4.5	Coordenada x_{eq} adimensional do ponto de equilíbrio para $\theta_0 = 0$ (Terra-Lua)	109
4.6	Condições iniciais e período para OPL com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Terra-Lua) . .	109
4.7	Condições iniciais e período para uma OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)	110
4.8	Condições iniciais e período para uma OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)	113
4.9	Condições iniciais e período de uma OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ iniciada a uma mesma distância do ponto de equilíbrio do SVF - 2000 km, 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)	118
4.10	Coordenada x_{eq} adimensional do ponto de equilíbrio para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Terra-Lua)	119

4.11	Condições iniciais e período para uma OPL em relação ao equilíbrio com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Terra-Lua)	119
4.12	Condições iniciais e período de uma OPN com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ iniciada a uma mesma distância do ponto de equilíbrio do SVF - 2000 km, 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)	120
4.13	Condições iniciais para uma OPL e uma OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 7500 km (Sol-Terra)	123
4.14	Condições iniciais para uma OPL e uma OPN com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 7500 km (Sol-Terra)	123
D.1	Sistema Sol-Planetas	155
D.2	Sistema Terra-Lua	155

Sumário

1	Apresentação	24
1.1	Introdução	24
1.2	Objetivos	27
2	Modelagem Analítica	30
2.1	Introdução	30
2.2	Descrição do modelo	31
2.3	Descrição do sistema	32
2.4	A lagrangiana do sistema	36
2.4.1	Energia cinética	36
2.4.2	Energia potencial	38
2.4.3	Forma da lagrangiana	39
2.4.4	Constante do movimento	40
2.5	Equações de movimento	42
2.5.1	Redução ao PR3C	43
2.6	Pontos de equilíbrio	45
3	Aplicações numéricas	51
3.1	Pontos de equilíbrio	51
3.1.1	Sistema Terra-Lua	52
3.1.2	Sistema Sol-Terra	55
3.2	Exploração da vizinhança do equilíbrio	57
3.2.1	Sistema Terra-Lua	58
3.2.2	Sistema Sol-Terra	77

4	Órbitas Periódicas de Lyapunov	84
4.1	Introdução	84
4.2	Estabilidade linear	85
4.2.1	Aplicação ao Terra-Lua	91
4.2.2	Aplicação ao Sol-Terra	95
4.3	O método da continuação	97
4.4	Aplicações numéricas	106
4.4.1	Sistema Terra-Lua	108
4.4.2	Sistema Sol-Terra	122
5	Conclusões e perspectivas	127
A	Energia cinética	130
B	Energia potencial	136
C	Equações de movimento	142
D	Dados do sistema solar	155

Capítulo 1

Apresentação

1.1 Introdução

Satélites vinculados ou como denominados neste trabalho - sistemas vinculados - são constituídos por duas ou mais massas conectadas por um cabo, haste ou corrente. São conhecidos na literatura técnica internacional como *Tethered Satellites*.

A dinâmica do sistema vinculado pode ser descrita pelo movimento do seu centro de massa e a rotação do sistema em relação a este ponto, de tal modo a considerar a *atitude* do satélite. Existem diversos estudos sobre a dinâmica dos sistemas vinculados em órbitas baixas na vizinhança da Terra.

Rajan e Anderson [17], usando o teorema de Noether obtiveram integrais primeiras para o movimento de um satélite vinculado considerando-o em órbita circular na vizinhança da Terra, afim de investigar a estabilidade do sistema segundo o método de Lyapunov. Em seu modelo, a massa e a elasticidade do cabo bem como a forma oblata da Terra não foram considerados.

Breakwell e Gearhart [1] desenvolveram um modelo a fim de incluir a oblatividade da Terra e com isso obter mais precisão para descrever a trajetória dos satélites vinculados em órbitas baixas.

Lorenzini [11] foi provavelmente o primeiro a estudar a dinâmica de um satélite vinculado formado por três massas em ambientes com baixa gravidade. Em seu trabalho procurou estabilizar o satélite através da aplicação de um modelo que levasse em conta um sistema de mola-amortecedor.

Os principais trabalhos já desenvolvidos para satélites vinculados são em sua grande

maioria para aplicações na vizinhança da Terra. O interesse em usar os pontos lagrangianos do problema restrito de três corpos (PR3C), principalmente nos sistemas Sol-Terra e Terra-Lua, estimula o estudo do comportamento destes satélites nas proximidades destes pontos. Para essa análise é necessário não mais considerar a massa do satélite como pontual, da forma como classicamente é tratada no PR3C.

Um grande número de estudos da dinâmica e controle de sistemas vinculados é observado a partir do artigo pioneiro de Colombo [5], que considerou a possibilidade de conseguir realizar a estabilidade posicional de um satélite artificial na vizinhança dos pontos colineares do sistema Terra-Lua. Ele concluiu que uma possível forma de conseguir tal estabilidade seria usar sistemas vinculados e que isso seria obtido através da alteração do comprimento do cabo que uniria as duas massas formadoras do satélite.

Farquhar [7] estudou uma forma de obter a estabilidade posicional de um sistema vinculado com duas massas na vizinhança dos pontos colineares do sistema Terra-Lua. Em sua análise, ele considerou a variação do comprimento do cabo mantendo-o paralelo à linha definida pelos pontos colineares. Com isso não considerou a rotação do sistema, porém, ainda assim, conclui que esse método poderia ser usado para implementar uma forma eficiente de controle.

Robinson [18] obteve as equações de movimento para um satélite considerado não pontual no PR3C, considerando os corpos primários em órbita circular. Ele considerou o satélite dotado de uma estrutura simples formada por duas massas pontuais unidas por uma haste ideal e rígida, ou seja, um *satélite em forma de haltere*. Em seu trabalho ele derivou as condições de estabilidade do seu modelo nos pontos de equilíbrio triangulares do PR3C circular em uma modelagem newtoniana.

Recentemente, Misra [12] analisou as configurações de equilíbrio de satélites vinculados orbitando a vizinhança dos pontos lagrangianos e sua estabilização, utilizando um sistema de controle adequado para o comprimento do cabo que une as massas.

O crescente interesse pelos satélites vinculados pode ser visto através do empenho das agências espaciais internacionais em desenvolver missões com a finalidade de estudar o comportamento de tais sistemas, principalmente em órbitas baixas na vizinhança da Terra, onde se concentram a maior parte dos trabalhos dessa área.

A Agência Espacial Americana (NASA) levou à frente duas missões espaciais na década de 90 com esse propósito. A missão *STS 46* foi lançada em 1992 onde um dos

objetivos principais era implementar um cabo de 20 km, usando o próprio ônibus espacial *Atlantis* como uma das massas do sistema vinculado. O conjunto recebeu o nome de *Tethered Satellite System 1* (TSS1) e apresentou problemas quando o cabo alcançou 260 metros de comprimento. Apesar disto, a missão concluiu que com um adequado controle os sistemas vinculados poderiam ser operados.

Uma segunda missão, a *STS 75*, foi colocada em prática em 1996 com o objetivo principal de implementar um novo sistema vinculado, desta vez usando o ônibus espacial *Columbia* como uma das massas. O novo sistema recebeu o nome de *Tethered Satellite System Reflight* (TSS1R) e permitiu que o cabo alcançasse 19 km de comprimento. Após duas semanas em órbita baixa o cabo acabou rompendo-se.

A marinha americana, através do *E.U. Naval Research Laboratory* desenvolveu uma bem sucedida missão denominada TIPS (*Tether Physics and Survivability*) que manteve um sistema vinculado com duas massas, denominadas *Norton* e *Ralph*, em órbita alta (1100 km) pelo período de 10 anos, entre 1996 e 2006. Este longo prazo forneceu uma enorme quantidade de dados estatísticos sobre a atitude e o comportamento geral dos satélites vinculados, inclusive sobre a resistência do cabo. Este conjunto pode ser visto diversas vezes por observadores em solo.

A Agência Espacial Europeia (ESA) lançou recentemente, em 2007, a missão *Young Engineer's Satellites - 2* (YES-2) também com o propósito de estudar o comportamento de um sistema vinculado de duas massas nas proximidades da Terra. Esta missão estabeleceu um novo recorde por conseguir implementar um cabo com 32 km de comprimento e coletou inúmeras informações sobre esses sistemas.

Em abril de 2007, o ônibus espacial ucraniano *Dnepr rocket* transportou um sistema com três pequenos satélites interligados por um cabo. O projeto recebeu o nome de MAST (*Multi-Application Survivable Tether*) e recebeu apoio governamental e privado. Nesse experimento um dos satélites enviou uma análise do comportamento do cabo em relação a erosão pelo oxigênio atômico e a luz UV, bem como a influência de micrometeoritos e detritos orbitais na vida útil do conjunto.

Várias aplicações podem ser desenvolvidas para o uso desses tipos de satélites não só na vizinhança da Terra como também em pontos mais distantes, como por exemplo a exploração do sistema Júpiter-Io e a colocação de satélites nos pontos colineares dos sistemas Sol-Terra e Terra-Lua.

A análise do comportamento orbital dos satélites vinculados nas vizinhanças dos pontos colineares determinados por outros dois corpos massivos, permite investigar e obter possíveis soluções periódicas ou quasi-periódicas como uma extensão do PR3C.

A busca de tais soluções no problema restrito dos três corpos permitiu, através dos trabalhos de Poincaré (1892), Moulton (1920), Stroengren (1922) e Birkhoff (1927), a obtenção sistemática de famílias de órbitas periódicas nas proximidades dos pontos colineares.

A principal diferença em relação ao problema que se apresenta está na consideração do comprimento do cabo que une as massas dos satélites, fazendo com que a abordagem não considere todo o satélite como uma única massa pontual, ainda que em sua totalidade tal massa possa ser negligenciada em relação aos corpos primários.

1.2 Objetivos

Como já informado, muitos trabalhos são realizados levando em consideração o comportamento dinâmico dos sistemas vinculados em órbitas próximas à Terra. O interesse deste trabalho é estudar como um sistema formado por duas massas conectadas por um cabo se comporta nas vizinhanças dos pontos colineares de um sistema formado por dois corpos massivos.

A partir de uma abordagem lagrangiana as equações de movimento são obtidas tanto para sistemas com comprimento fixo, como também para sistemas onde o comprimento do cabo que une as massas é variável. Um modelo matemático com três graus de liberdade é desenvolvido a fim de descrever o comportamento do sistema no caso plano, levando em consideração a rotação do satélite em torno do seu centro de massa.

A resolução numérica das equações de movimento permite compreender como o sistema dinâmico evolui no tempo e como o comprimento do cabo influencia nessa evolução, fazendo com que o sistema em questão se diferencie do PR3C.

A existência de um comprimento não nulo muda a posição dos pontos de equilíbrio para o sistema dinâmico que descreve os satélites, e assim os pontos colineares clássicos - L_1 , L_2 e L_3 - não são mais soluções de equilíbrio como ocorre no PR3C. Esses novos pontos são determinados sendo então possível utilizá-los como condições iniciais para a obtenção de uma maior estabilidade do sistema, mediante variação no comprimento do

cabo.

Através da linearização do sistema dinâmico que descreve o modelo, é possível discutir a estabilidade dos pontos de equilíbrio e obter condições iniciais adequadas para a obtenção de órbitas periódicas lineares em torno dos mesmos. Tais órbitas podem ser usadas como condições iniciais para a geração de órbitas periódicas não-lineares, através do método de continuação numérica baseado no método de continuação analítica devido a Poincaré, obtendo dessa forma uma descrição detalhada da trajetória dos satélites vinculados.

Os capítulos deste trabalho foram divididos com o objetivo de tornar o mais claro possível o tratamento do problema em questão, estando o conteúdo distribuído em quatro capítulos principais e três apêndices onde algumas deduções matemáticas são mostradas.

A obtenção da modelagem analítica do sistema é obtida no Capítulo 2, iniciando com uma descrição pormenorizada do modelo adotado. As equações de movimento são obtidas através do formalismo lagrangiano e como tal usam as energias cinética e potencial, que são derivadas formal e analiticamente nos apêndices A e B. Nesta parte do texto é feita uma redução do problema vinculado ao PR3C, quando o comprimento do cabo é nulo, o que fornece a possibilidade de obtermos as equações básicas do PR3C a partir das equações completas que descrevem o sistema vinculado. Também neste capítulo é feita uma discussão detalhada sobre os pontos de equilíbrio do sistema, bem como é estabelecida a sua existência como função de condições gerais.

A implementação numérica é desenvolvida no Capítulo 3, onde são obtidas algumas soluções das equações de movimento deduzidas anteriormente. Neste ponto foi usado diversos algoritmos escritos em linguagem C^{++} e em particular as equações diferenciais foram resolvidas através da implementação de um *algoritmo de Runge-Kutta de ordem 7 com passo variável - rk78*. Ainda neste capítulo os pontos de equilíbrio são encontrados numericamente para diversos comprimentos do cabo que une as massas dos satélites. Várias simulações foram realizadas para os sistemas Sol-Terra e Terra-Lua, onde algumas são mostradas com o objetivo de melhor entender o comportamento do sistema como função do ângulo de inclinação e do comprimento do cabo.

As órbitas periódicas são determinadas no Capítulo 4 a partir das equações de movimento e do estudo linear. Tais órbitas são obtidas pelo método de continuação numérica através da implementação de um algoritmo do tipo *corretor-preditor*. Neste capítulo

encontra-se uma discussão detalhada a respeito da linearização do sistema dinâmico e também da evolução não-linear.

No Capítulo 5 é feita uma análise geral dos resultados obtidos nesta dissertação, além de diversas sugestões de aplicações para o modelo descrito. Também são enumeradas algumas possibilidades de ampliação do referido trabalho, a fim de relaxar algumas das restrições impostas.

Capítulo 2

Modelagem Analítica

2.1 Introdução

Com o propósito de se obter as equações de movimento do sistema vinculado na vizinhança dos pontos colineares L_1 e L_2 , optamos pelo formalismo lagrangiano e modelamos as energias cinética e potencial com a finalidade de se chegar à lagrangiana do sistema.

O movimento é analisado no espaço de configuração formado pelas coordenadas generalizadas, que são definidas a partir das restrições do sistema vinculado tomando por base as leis básicas da dinâmica.

O nosso sistema vinculado é formado por duas massas que representam as duas partes do satélite, onde o cabo implementa um vínculo holônomo. A escolha do formalismo lagrangiano se justifica pela redução da quantidade de coordenadas necessárias para descrever o sistema, quando comparado com a abordagem newtoniana. Este segundo método foi o adotado por Farquhar [7] ao derivar as equações de movimento de seu modelo.

O formalismo de Euler-Lagrange nos permite escrever que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}$ é a função lagrangiana do sistema e $\mathbf{q}$ representa as coordenadas generalizadas.

2.2 Descrição do modelo

Consideramos o movimento do sistema vinculado sendo devido exclusivamente ao campo gravitacional de outros dois corpos denominados corpos primários.

As massas envolvidas são de tal forma que os corpos primários são muito mais massivos que os corpos que formam o sistema vinculado. Assim, o movimento dos corpos primários pode ser considerado kepleriano, ou seja, não sofre influência das massas do sistema vinculado.

Tal suposição é plenamente justificada, pois os corpos primários possuem massas planetárias enquanto que os corpos que formam o sistema vinculado possuem massas artificiais, várias ordens de grandeza menores.

A suposição sobre as massas envolvidas nos permite tratar o problema como o PR3C onde um terceiro corpo, agora representando todo o sistema vinculado, tem seu movimento determinado pela ação dos outros dois corpos massivos, porém, esses não são influenciados pelo corpo menor.

Para descrever o movimento dos corpos primários admitiremos um *problema clássico de dois corpos* não-perturbado com excentricidade nula, o que faz com que os dois corpos dominantes descrevam órbitas circulares em torno do centro de massa do sistema. Chamaremos de *plano primário* o plano definido por tais órbitas.

A distância entre os corpos primários é considerada como sendo muito maior que o comprimento do cabo que une os dois corpos menores que formam o sistema vinculado. Tal aproximação é válida em virtude dos corpos primários envolverem distâncias como planeta-planeta ou planeta-satélite e a distância entre as massas menores ser várias ordens de grandeza menor.

As massas dos corpos primários serão consideradas pontuais, tal qual as massas do sistema vinculado, em virtude das distâncias envolvidas serem compatíveis com tal aproximação.

O cabo é considerado como um *cabo ideal e rígido*, ou seja, desprovido de massa e não são consideradas torções e/ou deformações de qualquer natureza. Consideraremos que em nenhum instante a tensão sobre o cabo seja nula ou negativa e que também em nenhum instante a tensão sobre ele seja suficiente para deformá-lo ou rompê-lo.

Neste modelo, o movimento do sistema vinculado está limitado ao plano primário definido pela órbita dos corpos primários, ou seja, estaremos analisando o *movimento pla-*

nar. Afim de satisfazer esta consideração, as condições iniciais do problema, como posição e velocidade iniciais, são tomadas de tal modo a serem compatíveis com tal suposição, fazendo com que o movimento do sistema vinculado também fique limitado ao caso plano.

Em resumo, as restrições que permitem descrever o modelo são:

1. massas pontuais;
2. massas primárias muito maiores que as massas dos satélites;
3. movimento dos corpos primários como sendo circular e não-perturbado;
4. movimento do sistema vinculado limitado ao plano da órbita dos corpos primários;
5. comprimento do cabo que une os satélites muito menor que a distância dos corpos primários e
6. cabo ideal e rígido, ou seja, sem torções e/ou deformações.

2.3 Descrição do sistema

Sejam M_1 e M_2 as massas dos dois corpos primários e D a distância entre eles. Mediante as restrições já estabelecidas a distância D será constante ao longo do movimento, visto que ambos descrevem órbitas circulares ao redor do centro de massa, aqui representado por O .

Adotando o referencial *sinódico* que é mantido sobre o centro de massa e girante com os corpos primários, teremos as posições dos corpos primários fixas neste referencial. Definindo D_1 e D_2 , respectivamente, como as posições de M_1 e M_2 e usando uma notação como Murray e Dermott [14], podemos escrever que:

$$|D_1| = \mu D \quad |D_2| = (1 - \mu)D \quad (2.2)$$

onde

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad 1 - \mu = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \quad (2.3)$$

representam a razão entre as massas dos corpos primários e a massa total do sistema.

Por se tratar de um referencial girante, o referencial sinódico é não-inercial e sua velocidade de rotação, definida como n , é calculada a partir da *Lei da Gravitação Universal*. No caso em que a órbita é considerada circular, a velocidade de rotação é constante

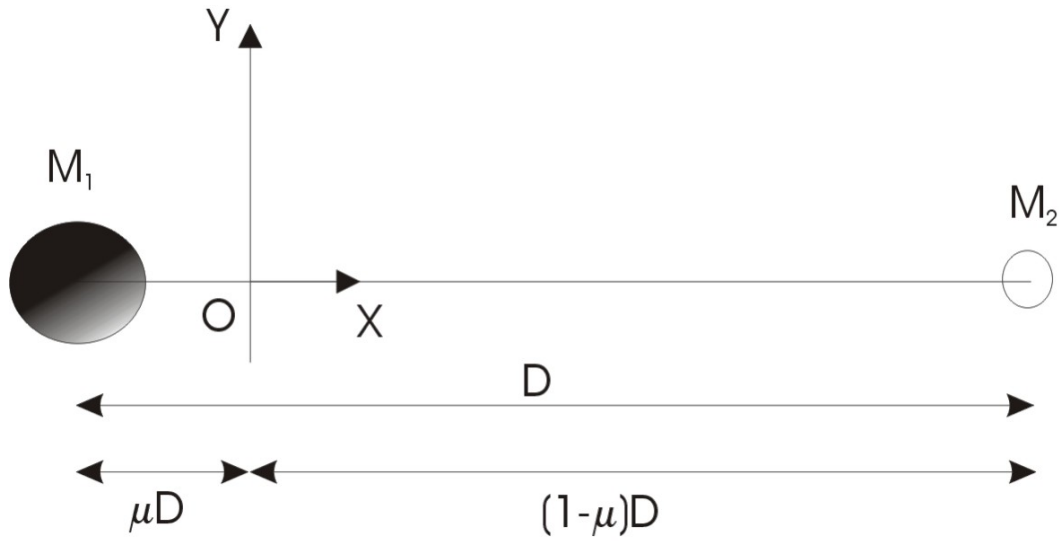


Figura 2.1: Corpos primários

ao longo do tempo conforme Szebehely [23] e é dada por:

$$n = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{D^3}} \quad (2.4)$$

onde G representa a constante de gravitação universal. Esta é na verdade a 3ª lei de Kepler.

A equação 2.4 representa também a velocidade de rotação de ambos os corpos primários em relação a um referencial inercial fixo ao centro de massa do sistema.

Em relação ao referencial sinódico os corpos primários permanecerão fixos e somente os satélites que formam o sistema vinculado terão movimento. As massas destes satélites são definidas como m_1 e m_2 , e o comprimento do cabo que os une será representado por l .

Para descrever o movimento do sistema vinculado, consideramos como sendo determinantes a posição do centro de massa dos satélites, CM , e a inclinação do cabo que os une em relação à reta que passa pelos corpos primários.

Mediante a restrição do movimento planar, o centro de massa do sistema vinculado pode ser descrito a partir de somente duas coordenadas espaciais (X, Y) e a inclinação a partir de um único ângulo (θ) medido em relação ao eixo que une os corpos primários no sentido trigonométrico. Desta forma (X, Y, θ) são as três coordenadas generalizadas que constituem um ponto do espaço de configuração tridimensional que descreve a evolução do sistema no tempo.

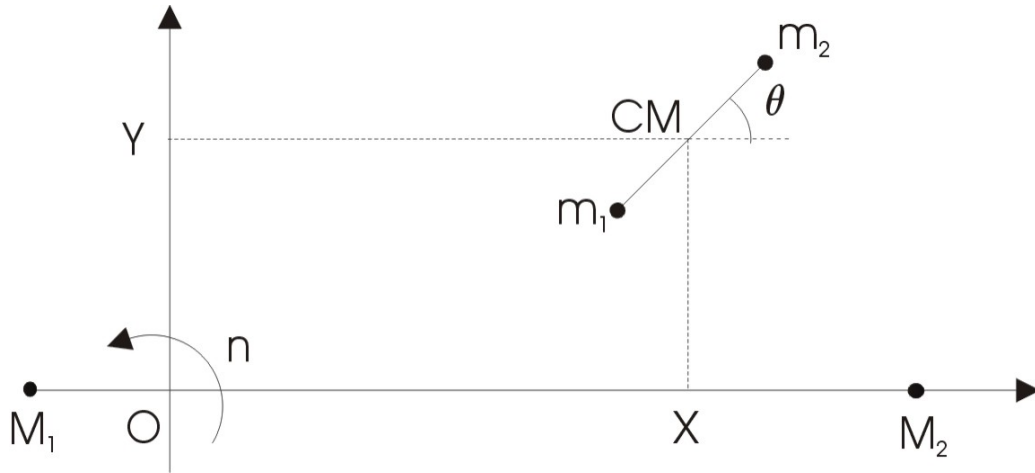


Figura 2.2: Sistema de coordenadas sinódico - XOY

O uso destas coordenadas generalizadas permite descrever o sistema com o mínimo de três graus de liberdade no referencial adotado, tornando a abordagem mais simples por já considerar os vínculos holônomos do sistema, ou seja, o fato do movimento ser planar, as massas serem pontuais e estarem ligadas por um cabo rígido e ideal.

Os vetores posição do centro de massa dos satélites em relação às massas primárias e em relação ao centro de massa dos corpos dominantes são dados por:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= X\vec{i} + Y\vec{j} \\ \vec{R}_1 &= (X + D_1)\vec{i} + Y\vec{j} \\ \vec{R}_2 &= (X - D_2)\vec{i} + Y\vec{j}\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde $\vec{i}$ e $\vec{j}$ são os vetores unitários nas direções X e Y do referencial sinódico com D_1 e D_2 dados pelas equações 2.2.

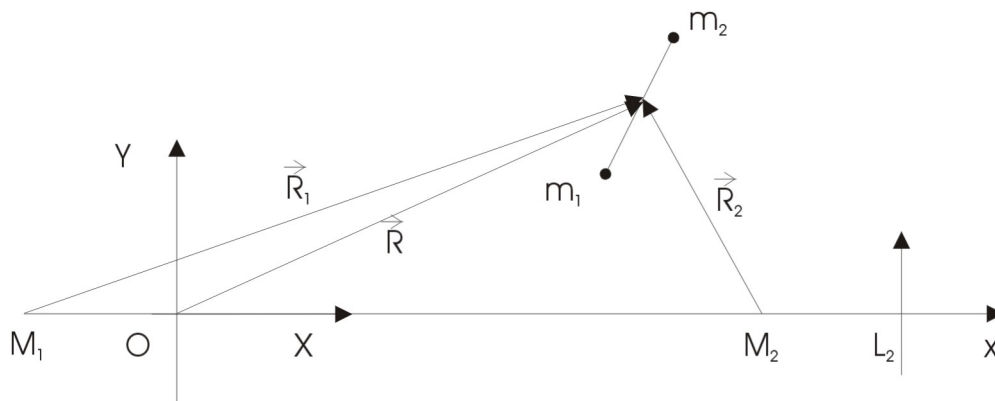


Figura 2.3: Vetores posição do CM dos satélites

A fim de melhor descrever o movimento dos satélites vinculados na vizinhança dos pontos colineares dos corpos primários, adotamos uma translação da origem do referencial sinódico do centro de massa dos corpos primários para o ponto lagrangiano L_2 do PR3C, definindo o referencial xL_2y .

Sejam (X_0, Y_0) as coordenadas de L_2 no referencial XOY e (x, y) as coordenadas do centro de massa dos satélites no referencial xL_2y . Desta forma podemos usar as relações $X = X_0 + x$ e $Y = Y_0 + y$ que permitem fazer a translação dos referenciais. Substituindo-as nas equações 2.5 podemos escrever os vetores posição em relação ao referencial sinódico com origem em L_2 , como:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= (X_0 + x)\vec{i} + (Y_0 + y)\vec{j} \\ \vec{R}_1 &= (X_0 + x + D_1)\vec{i} + (Y_0 + y)\vec{j} \\ \vec{R}_2 &= (X_0 + x - D_2)\vec{i} + (Y_0 + y)\vec{j}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Para o sistema vinculado m_1 , m_2 e cabo, temos as distâncias ao centro de massa d_1 e d_2 dadas por:

$$d_1 = \beta_2 l \quad d_2 = \beta_1 l \tag{2.7}$$

onde

$$\beta_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \beta_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \tag{2.8}$$

representam a razão entre as massas dos satélites e a massa total do sistema vinculado.

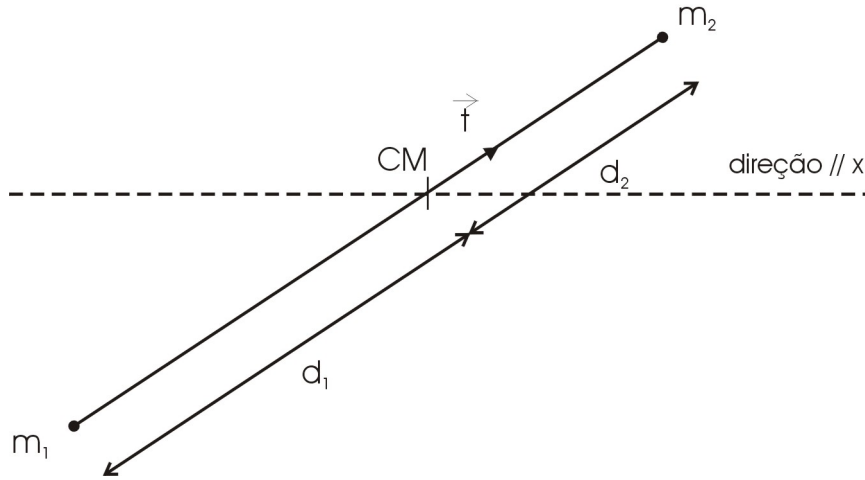
As coordenadas das massas dos satélites são calculadas a partir da posição do centro de massa pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned}x_1 &= x - d_1 \cos \theta & x_2 &= x + d_2 \cos \theta \\ y_1 &= y - d_1 \sin \theta & y_2 &= y + d_2 \sin \theta\end{aligned}\tag{2.9}$$

O vetor unitário $\vec{t}$ na direção do cabo que liga m_1 e m_2 pode ser escrito com suas projeções nas direções do referencial sinódico XOY, como:

$$\vec{t} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \tag{2.10}$$

onde θ representa o ângulo de inclinação do cabo em relação ao eixo OX.

Figura 2.4: Distâncias relativas de m_1 e m_2

2.4 A lagrangiana do sistema

A função lagrangiana é obtida a partir da relação

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q) \quad (2.11)$$

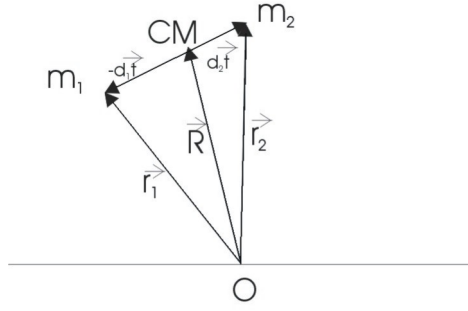
onde $(q, \dot{q})$ são as coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais, $\mathcal{T}(q, \dot{q})$ representa a energia cinética e $\mathcal{V}(q)$ a energia potencial de todo o sistema. Assim nosso interesse se concentra em obter ambas as grandezas sob o referencial sinódico xL_2y .

2.4.1 Energia cinética

No referencial sinódico, seja com origem no centro de massa, seja com origem em L_2 , os corpos primários não possuem movimento e portanto a energia cinética de ambos é nula. Já os satélites com massas m_1 e m_2 e conectados pelo cabo, por estarem sujeitos ao campo gravitacional dos corpos primários, possuem movimentos próprios nesses referenciais fazendo com que a energia cinética assuma um valor não nulo. Assim, temos

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m_1(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1) + \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2) \quad (2.12)$$

onde $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ são as velocidades, respectivamente, de m_1 e m_2 em relação ao referencial sinódico XOY. Estas velocidades não se alteram quando a origem do referencial é transladada para L_2 , uma vez que este ponto é fixo em relação ao centro de massa dos corpos primários, ou seja, a velocidade relativa entre L_2 e O é nula.

Figura 2.5: Vetores posição de m_1 e m_2 no referencial XOY

Observando a figura 2.5 e através de somas vetoriais podemos escrever que

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - d_1\vec{t} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + d_2\vec{t} \quad (2.13)$$

onde $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ representam, respectivamente, os vetores posição das massas m_1 e m_2 em relação ao referencial sinódico XOY.

Para se obter as velocidades $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ usadas na equação 2.12, devemos encontrar as derivadas temporais das equações 2.13, de tal forma que

$$\vec{V}_1 = \frac{d}{dt}(\vec{R} - d_1\vec{t}) \quad \vec{V}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{R} + d_2\vec{t}) \quad (2.14)$$

Pelo fato do referencial usado ser não-inercial com velocidade de rotação n dada pela equação 2.4 e considerando que o sistema vinculado pode girar com velocidade $\dot{\theta}$, o vetor unitário $\vec{t}$ irá variar sua inclinação no tempo com velocidade $\vec{\omega}_f$, tal que

$$\vec{\omega}_f = (n + \dot{\theta})\vec{k} \quad (2.15)$$

onde $\vec{k}$ é o vetor unitário na direção perpendicular ao plano da órbita. Com isso estão sendo computadas as forças de inércia oriundas da não-inercialidade do referencial adotado, ao obtermos as derivadas temporais conforme as equações 2.14.

A energia cinética do sistema é obtida após sucessivas deduções algébricas conforme demonstrado no apêndice A e representada por:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left\{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n\dot{x}(Y_o + y) + 2n\dot{y}(X_o + x) + \right. \\ \left. n^2[(X_o + x)^2 + (Y_o + y)^2] + \beta_1\beta_2[(n + \dot{\theta})^2 l^2 + \dot{l}^2] \right\} \quad (2.16)$$

2.4.2 Energia potencial

Considerando o sistema vinculado e os corpos primários, a energia potencial será dada por

$$\mathcal{V} = -\frac{GM_1m_1}{|\vec{R}_1 - d_1\vec{t}|} - \frac{GM_2m_1}{|\vec{R}_2 - d_1\vec{t}|} - \frac{GM_1m_2}{|\vec{R}_1 + d_2\vec{t}|} - \frac{GM_2m_2}{|\vec{R}_2 + d_2\vec{t}|} - \underbrace{\frac{GM_1M_2}{D} - \frac{Gm_1m_2}{l}}_{(K)} \quad (2.17)$$

A quantidade K representa a energia potencial existente entre os corpos primários separados pela distância D e a energia potencial entre os dois satélites separados pela distância l . Sendo D constante no referencial adotado, temos que a energia associada ao par de massas M_1 e M_2 será também constante e portanto não influencia nas equações de movimento, visto que a sua variação é nula. A energia potencial devido ao par m_1 e m_2 apesar de não ser constante, pois l pode variar com o tempo, possui valor muito menor que os outros termos, em virtude de $\frac{m_1m_2}{l} \ll \frac{M_im_j}{|\vec{R}_i - d_j\vec{t}|}$, $i, j \in \{1, 2\}$. Para esta desigualdade no sistema Terra-Lua obtemos uma razão de $10^{-16} : 1$ e no sistema Sol-Terra $10^{-19} : 1$. Sendo assim, consideramos apenas os quatro primeiros termos da equação 2.17.

No apêndice B, a equação 2.17 foi desenvolvida através de uma expansão em séries de potência usando polinômios de Legendre. Utilizando termos até a quarta ordem (com isso estamos desprezando valores da ordem de 10^{-20}) obtemos a seguinte expressão para a energia potencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = -(m_1 + m_2) & \left\{ \frac{GM_1}{R_1} \left[1 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 [3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 - 1] + \right. \right. \\ & \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 [5(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})] + \\ & \left. \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 [35(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 + 3] \right] + \\ & \frac{GM_2}{R_2} \left[1 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 [3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 - 1] + \right. \\ & \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 [5(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})] + \\ & \left. \left. \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 [35(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 + 3] \right] \right\} \quad (2.18) \end{aligned}$$

Os vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são os unitários das direções que unem os corpos primários e o centro de massa do satélite vinculado, conforme representado na figura 2.6.

2.4.3 Forma da lagrangiana

A lagrangiana do sistema é dada pela substituição das equações 2.16 e 2.18 na equação 2.11, e com isso obtemos uma representação do modelo.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) & \left\{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n\dot{x}(Y_0 + y) + 2n\dot{y}(X_o + x) + \right. \\
 & \left. n^2[(X_o + x)^2 + (Y_0 + y)^2] + \beta_1\beta_2[(n + \dot{\theta})^2 l^2 + \dot{l}^2] \right\} + \\
 (m_1 + m_2) & \left\{ \frac{GM_1}{R_1} \left[1 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 [3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 - 1] + \right. \right. \\
 & \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 [5(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})] + \\
 & \left. \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 [35(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 + 3] \right] + \\
 & \frac{GM_2}{R_2} \left[1 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 [3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 - 1] + \right. \\
 & \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 [5(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})] + \\
 & \left. \left. \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 [35(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 + 3] \right] \right\} \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Observando a figura 2.6 podemos calcular os valores de $\vec{u}_1 \cdot \vec{t}$ e $\vec{u}_2 \cdot \vec{t}$ na vizinhança dos pontos colineares L_1 e L_2 , de tal forma a mantermos nestas regiões $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim 10^{-8}$ e assim temos que:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{t} = \cos(\gamma_1 - \theta) = \cos \gamma_1 \cos \theta + \sin \gamma_1 \sin \theta \sim \cos \theta$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{t} = \cos(\gamma_2 - \theta) = \cos \gamma_2 \cos \theta + \sin \gamma_2 \sin \theta \sim \cos \theta$$

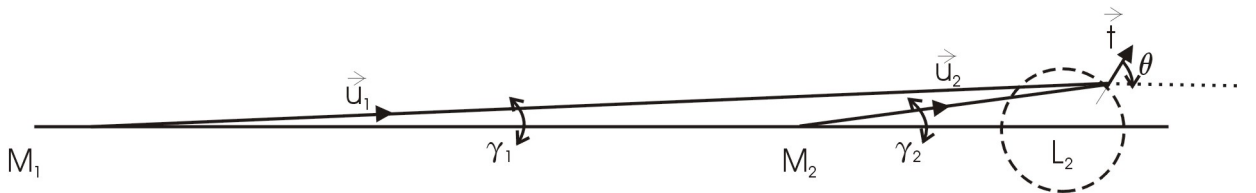


Figura 2.6: Vetores unitários $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ no referencial XOY

Onde se conclui que $\vec{u}_1 \cdot \vec{t} \sim \vec{u}_2 \cdot \vec{t} \sim \cos \theta$.

Usando a condição de que o referencial adotado para descrever o movimento do sistema vinculado está centrado em um dos pontos colineares do PR3C, em particular L_2 , podemos tomar que $Y_0 = 0$. Esta condição pode ser usada nas equações 2.6 e 2.19.

Tomando as simplificações acima e usando as equações 2.6 na equação 2.19 chegamos a uma equação para a lagrangiana em função das coordenadas generalizadas do sistema, o que nos permite obter as equações de movimento de forma analítica.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left\{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n\dot{x}y + 2n\dot{y}(X_0 + x) + n^2[(X_0 + x)^2 + y^2] + \right. \\ & \left. \beta_1\beta_2[(n + \dot{\theta})^2 l^2 + \dot{l}^2] \right\} + \\ & G(m_1 + m_2) \left\{ M_1 \left[\frac{1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1\beta_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \right. \right. \\ & \frac{1}{2} \frac{\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1)l^3(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} + \\ & \left. \frac{1}{8} \frac{\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2)l^4(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} \right] + \\ & M_2 \left[\frac{1}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\beta_1\beta_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ & \frac{1}{2} \frac{\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1)l^3(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^2} + \\ & \left. \left. \frac{1}{8} \frac{\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2)l^4(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{\frac{5}{2}}} \right] \right\} \quad (2.20) \end{aligned}$$

2.4.4 Constante do movimento

Podemos verificar na equação 2.20 que a lagrangiana não depende explicitamente do tempo. Portanto, uma integral primeira E pode ser obtida através de:

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \quad (2.21)$$

onde os q_i e os $\dot{q}_i$ são, respectivamente, as coordenadas e as velocidades generalizadas do sistema e n o número de graus de liberdade.

Para o nosso modelo a equação 2.21 torna-se:

$$E = \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} \quad (2.22)$$

A fim de simplificarmos a notação sejam Σ_1 e Σ_2 duas grandezas adimensionais definidas como:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 1 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1}\right)^3 (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \\ &\quad \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1}\right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \\ \Sigma_2 &= 1 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2}\right)^3 (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \\ &\quad \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2}\right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Substituindo as equações 2.23 na equação 2.20, a lagrangiana assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = (m_1 + m_2) \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - n\dot{x}y + n\dot{y}(X_0 + x) + \frac{n^2}{2} [(X_0 + x)^2 + y^2] + \right. \\ \left. \frac{\beta_1\beta_2}{2} [(n + \dot{\theta})^2 l^2 + \dot{l}^2] + G \left[\frac{M_1}{R_1} \Sigma_1 + \frac{M_2}{R_2} \Sigma_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Com as equações 2.22 e 2.24 e após algumas operações algébricas obtemos a expressão para uma constante do movimento $E^* = \frac{-2E}{(m_1 + m_2)}$ dada por:

$$E^* = 2\Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \beta_1\beta_2 [(\dot{\theta}^2 - n^2)l^2 - \dot{l}^2] \quad (2.25)$$

$$\text{onde } \Omega = \frac{n^2}{2} [(X_0 + x)^2 + y^2] + \frac{GM_1}{R_1} \Sigma_1 + \frac{GM_2}{R_2} \Sigma_2$$

Assim a equação 2.25 define uma integral primeira para o movimento do modelo em questão, sendo equivalente à *constante do movimento de Jacobi* (C_J) do PR3C e que por simplicidade manteremos esta nomenclatura.

2.5 Equações de movimento

Para a obtenção das equações de movimento substituímos a equação 2.20 na equação de Euler-Lagrange (equação 2.1). Assim teremos um sistema com três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem nas variáveis x , y e θ , que são respectivamente, a abscissa e a ordenada do centro de massa do sistema vinculado e sua inclinação, tomados em relação ao referencial sinódico centrado no ponto L_2 . O conjunto destas três EDO(s) forma um sistema onde a solução é um ponto do espaço de fase e sua evolução no tempo descreve o comportamento do satélite vinculado, cujas variáveis são $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$. O cálculo analítico, conforme demonstrado no apêndice C, nos fornece o sistema abaixo.

$$\ddot{x} = +2n\dot{y} + n^2(X_0 + x) - \frac{GM_1}{R_1^3}\Lambda_1^{l,\theta}(X_0 + D_1 + x) - \frac{GM_2}{R_2^3}\Lambda_2^{l,\theta}(X_0 - D_2 + x) \quad (2.26)$$

$$\ddot{y} = -2n\dot{x} + n^2y - \frac{GM_1}{R_1^3}\Lambda_1^{l,\theta}y - \frac{GM_2}{R_2^3}\Lambda_2^{l,\theta}y \quad (2.27)$$

$$\ddot{\theta} = -2(\dot{l}/l)(\dot{\theta} + n) - \frac{GM_1}{R_1^3}\Omega_1^{l,\theta} - \frac{GM_2}{R_2^3}\Omega_2^{l,\theta} \quad (2.28)$$

Os coeficientes $\Lambda_i^{l,\theta}$ e $\Omega_i^{l,\theta}$ com $i \in \{1, 2\}$ estão definidos abaixo e são funções do comprimento e da inclinação do cabo - l e θ .

$$\begin{aligned} \Lambda_1^{l,\theta} &= \left[1 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] \\ \Lambda_2^{l,\theta} &= \left[1 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] \\ \Omega_1^{l,\theta} &= \left[\frac{3}{2}\sin 2\theta - \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right) (1 - 5\cos^2\theta)\sin\theta - \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 (3 - 7\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta \right] \\ \Omega_2^{l,\theta} &= \left[\frac{3}{2}\sin 2\theta - \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right) (1 - 5\cos^2\theta)\sin\theta - \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 (3 - 7\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

A fim de tornar as equações de movimento adimensionais, redefinimos as variáveis

em função de duas constantes do movimento, que são a distância entre os corpos primários (D) e a velocidade de rotação do referencial sinódico (n) determinada pela equação 2.4.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{x}{D} & \hat{y} &= \frac{y}{D} & \hat{l} &= \frac{l}{D} & \tau &= nt & \hat{X}_0 &= \frac{X_0}{D} \\ \hat{R}_1 &= \frac{R_1}{D} & \hat{R}_2 &= \frac{R_2}{D} & \hat{D}_1 &= \frac{D_1}{D} & \hat{D}_2 &= \frac{D_2}{D} & \hat{D} &= 1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Desta forma chegamos a um sistema com três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem afim de descrever o movimento do satélite vinculado adimensionalmente.

$$\hat{x}'' = +2\hat{y}' - \left(\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} - 1 \right) (\hat{X}_0 + \hat{x}) - \mu(1-\mu) \left(\frac{\mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta}}{\hat{R}_1^3} - \frac{\mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta}}{\hat{R}_2^3} \right) \quad (2.31)$$

$$\hat{y}'' = -2\hat{x}' - \left(\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} - 1 \right) \hat{y} \quad (2.32)$$

$$\theta'' = -2(\hat{l}'/\hat{l})(\theta' + 1) - \frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} \mathbf{\Omega}_1^{l,\theta} - \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \mathbf{\Omega}_2^{l,\theta} \quad (2.33)$$

A constante do movimento E^* obtida pela equação 2.25 calculada adimensionalmente com as equações 2.30 assume a forma da *constante do movimento de Jacobi* (C_J) dada pela equação a seguir:

$$C_J = 2\Omega - (\hat{x}'^2 + \hat{y}'^2) - \beta_1\beta_2 \left[(\hat{\theta}'^2 - 1)\hat{l}^2 - \hat{l}'^2 \right] \quad (2.34)$$

$$\text{onde } \Omega = \frac{(\hat{X}_0 + \hat{x})^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{2} + \frac{1-\mu}{\hat{R}_1} \mathbf{\Sigma}_1 + \frac{\mu}{\hat{R}_2} \mathbf{\Sigma}_2$$

2.5.1 Redução ao PR3C

Observando as equações 2.31, 2.32 e 2.33 com as definições dos coeficientes $\mathbf{\Lambda}_i^{l,\theta}$ e $\mathbf{\Omega}_i^{l,\theta}$ com $i \in \{1, 2\}$, podemos verificar que suas expressões estão ordenadas em potências crescentes dos valores de $\frac{l}{R_1}$ e $\frac{l}{R_2}$, respectivamente as razões entre o comprimento do cabo e as distâncias do centro de massa do sistema vinculado aos corpos primários M_1 e M_2 .

Podemos escrever que:

$$\begin{aligned}\Lambda_1^{l,\theta} &= C_{0,1} + C_{1,1} \left(\frac{l}{R_1}\right)^1 + C_{2,1} \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 + C_{3,1} \left(\frac{l}{R_1}\right)^3 + C_{4,1} \left(\frac{l}{R_1}\right)^4 \\ \Lambda_2^{l,\theta} &= C_{0,2} + C_{1,2} \left(\frac{l}{R_2}\right)^1 + C_{2,2} \left(\frac{l}{R_2}\right)^2 + C_{3,2} \left(\frac{l}{R_2}\right)^3 + C_{4,2} \left(\frac{l}{R_2}\right)^4\end{aligned}\quad (2.35)$$

onde os coeficientes $C_{i,j}$ com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $j \in \{1, 2\}$ são obtidos das equações 2.29.

No caso específico em que $l = 0$, ou seja, sendo nulo o comprimento do cabo que une os satélites, o modelo se reduz ao PR3C visto que todas as outras restrições estabelecidas anteriormente permanecem válidas e são idênticas às do problema clássico.

Neste caso, a coordenada θ torna-se não definida e a equação 2.33 e os coeficientes $\Omega_1^{l,\theta}$ e $\Lambda_1^{l,\theta}$ dados pelas equações 2.29 tornam-se inexistentes, ficando o problema restrito a apenas dois graus de liberdade, que são x e y . Estes valores representam a posição do centro de massa dos satélites em relação ao referencial sinódico adotado com origem em L_2 , agora representados como uma única massa pontual.

Fazendo $l = 0$ nas equações 2.35 obtemos os valores dos coeficientes $\Lambda_1^{0,0}$ e $\Lambda_2^{0,0}$ que são então reduzidos aos termos de ordem zero, conforme abaixo:

$$\Lambda_1^{0,0} = C_{0,1} = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda_2^{0,0} = C_{0,2} = 1 \quad (2.36)$$

Usando estes valores nas equações 2.31 e 2.32 obtemos as equações de movimento para o PR3C a partir do caso limite do nosso modelo de sistema vinculado com comprimento nulo. Estas equações tornam-se:

$$\hat{x}'' = +2\hat{y}' - \left(\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} - 1\right)(\hat{X}_0 + \hat{x}) - \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\hat{R}_1^3} - \frac{1}{\hat{R}_2^3}\right) \quad (2.37)$$

$$\hat{y}'' = -2\hat{x}' - \left(\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} - 1\right)\hat{y} \quad (2.38)$$

As equações 2.37 e 2.38 podem ser transladas do referencial sinódico xL_2y para o referencial sinódico com origem no centro de massa dos corpos primários, XOY , através das transformações $X = X_0 + x$ e $Y = y$ e assim passam a ter a forma exata das equações

de movimento do PR3C, conforme obtidas por Murray and Dermott [14], com variáveis adimensionais. Tais equações são escritas a seguir.

$$\hat{X}'' = +2\hat{Y}' - \left(\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} - 1 \right) \hat{X} - \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{\hat{R}_1^3} - \frac{1}{\hat{R}_2^3} \right) \quad (2.39)$$

$$\hat{Y}'' = -2\hat{X}' - \left(\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} - 1 \right) \hat{Y} \quad (2.40)$$

Com isso é possível obtermos as equações de movimento do PR3C a partir da modelagem aqui proposta como caso limite em que o comprimento do cabo torna-se nulo. Convém observar, que na referência [12] esta redução não levou ao PR3C, o que nos motivou a desviar daquele autor e desenvolver uma modelagem independente.

Ainda podemos verificar que tomando $l = 0$ nas equações 2.23 e com a translação do referencial xL_2y para o referencial XOY , temos que $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 1$ e $\hat{X}_0 + \hat{x} \leftrightarrow \hat{x}$. Com isso a equação 2.34 se reduz a *constante do movimento de Jacobi* do PR3C, como esta é obtida por Murray and Dermott [14]:

$$C_J = 2\Omega - (\hat{x}'^2 + \hat{y}'^2) \quad (2.41)$$

$$\text{onde } \Omega = \frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{2} + \frac{1-\mu}{\hat{R}_1} + \frac{\mu}{\hat{R}_2}$$

2.6 Pontos de equilíbrio

Os coeficientes das equações de movimento 2.31, 2.32 e 2.33 dependem do comprimento e da inclinação do sistema vinculado devido aos coeficientes $\Lambda_i^{l,\theta}$ e $\Omega_i^{l,\theta}$ com $i \in \{1, 2\}$.

Denominamos sistema vinculado fixo (SVF) aquele onde o comprimento permanece contante, sendo $\dot{l} = 0$. Quando temos $\dot{l} \neq 0$ definimos um sistema vinculado variável (SVV).

Para cada l temos um conjunto de equações diferenciais parametrizadas pelo comprimento, de tal forma que para cada valor do comprimento do cabo que une os satélites teremos um ponto de equilíbrio diferente. Denominamos L_2^* este ponto de equilíbrio, que apesar de não coincidir com o L_2 do PR3C, está em sua vizinhança. Notamos que a modelagem é facilmente adaptável para a vizinhança de L_1 e L_3 do PR3C.

Para obtermos os pontos de equilíbrio temos que impor o seguinte conjunto de restrições nas equações 2.31, 2.32 e 2.33:

$$\hat{x}' = 0 \quad \hat{y}' = 0 \quad \theta' = 0 \quad \hat{x}'' = 0 \quad \hat{y}'' = 0 \quad \theta'' = 0 \quad (2.42)$$

Estas restrições determinam que a velocidade e a aceleração são nulas estabelecendo a situação de equilíbrio. Assim os pontos de equilíbrio são obtidos mediante a solução das seguintes equações algébricas:

$$\left(\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} \Lambda_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \Lambda_2^{l,\theta} - 1 \right) (\hat{X}_0 + \hat{x}) + \mu(1-\mu) \left(\frac{\Lambda_1^{l,\theta}}{\hat{R}_1^3} - \frac{\Lambda_2^{l,\theta}}{\hat{R}_2^3} \right) = 0 \quad (2.43)$$

$$\left(\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} \Lambda_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \Lambda_2^{l,\theta} - 1 \right) \hat{y} = 0 \quad (2.44)$$

$$-2(\hat{l}'/\hat{l})(\theta' + 1) - \frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} \Omega_1^{l,\theta} - \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \Omega_2^{l,\theta} = 0 \quad (2.45)$$

De acordo com a modelagem adotada, os valores μ (relativo aos corpos primários), β_1 , β_2 e l (relativos ao sistema vinculado) e $\hat{x}$, $\hat{y}$ e θ (coordenadas generalizadas na forma adimensional) devem ser tais a satisfazer as equações 2.43, 2.44 e 2.45, fazendo com que a existência e os valores dos pontos de equilíbrio dependam destes parâmetros.

Estamos supondo pelas restrições do modelo que μ , β_1 e β_2 são necessariamente fixos, não variando ao longo do tempo em nosso sistema. Em particular, μ não pode ser escolhido, pois depende exclusivamente dos corpos primários usados. Lembramos que β_1 e β_2 dependem das massas dos satélites. Isto nos leva a procurar pontos de equilíbrio no caso geral, visto que não nos interessam pontos de equilíbrio que dependam de valores particulares de μ , β_1 e β_2 .

No caso de termos um sistema vinculado fixo o valor de l é constante e o primeiro termo da equação 2.45 torna-se nulo. Tal consideração é usada para se obter os pontos de equilíbrio do sistema vinculado desprezando-se a taxa de variação do comprimento do cabo que une as massas m_1 e m_2 , ainda que o ponto de equilíbrio seja obtido para diversos valores do comprimento l tomado como parâmetro. Usando as equações 2.29, a equação 2.45 torna-se:

$$\left\{ \frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} \left[3 \cos \theta - \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right) (1 - 5 \cos^2 \theta) - \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 (3 - 7 \cos^2 \theta) \cos \theta \right] + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \left[3 \cos \theta - \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right) (1 - 5 \cos^2 \theta) - \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 (3 - 7 \cos^2 \theta) \cos \theta \right] \right\} \sin \theta = 0 \quad (2.46)$$

Analisando a equação 2.46 verificamos que a condição $\sin \theta = 0$ ($\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$) a torna válida para quaisquer valores de μ , β_1 , β_2 , l , $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Esta condição implica em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, ao levarmos em conta o domínio de θ na modelagem adotada.

No caso particular em que $\beta_1 = \beta_2$, o segundo termo dentro dos colchetes da equação 2.46 torna-se nulo e a condição $\cos \theta = 0$ ($\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$) a torna válida para quaisquer valores de μ , l , $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Neste caso temos $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$ para o domínio adotado de θ .

Por outro lado, quando $\sin \theta \neq 0$ e $\cos \theta \neq 0$, a equação 2.46 **não é válida** para quaisquer valores de μ , β_1 , β_2 , l , $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Sendo assim não consideramos a existência de pontos de equilíbrio para $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), pois não nos interessam casos particulares.

Assim consideramos apenas a possibilidade de existência dos pontos de equilíbrio no caso geral, ou seja, quaisquer valores de μ , β_1 , β_2 e l , resumidas a seguir:

- $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, para quaisquer valores de β_1 e β_2 . No caso em que $\beta_1 = \beta_2$, isto é $m_1 = m_2$, os dois casos tornam-se indistinguíveis e
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$, para o caso específico em que $\beta_1 = \beta_2$. Nesta situação os dois casos são sempre indistinguíveis.

A equação 2.44 possui uma solução geral para $\hat{y} = 0$, fazendo com que ela se torne satisfeita para quaisquer valores de μ , β_1 , β_2 , l , $\hat{x}$ e θ .

Considerando a possibilidade de se obter pontos de equilíbrio onde $\hat{y} \neq 0$, ou seja, fora da reta que une os corpos primários, temos que:

$$\frac{1-\mu}{\hat{R}_1^3} \Lambda_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \Lambda_2^{l,\theta} - 1 = 0 \quad (2.47)$$

A exemplo da análise da equação 2.46, a equação 2.47 também **não é válida** para quaisquer valores de μ , β_1 , β_2 , l , $\hat{x}$ e θ . Com isso consideramos apenas a possibilidade de pontos de equilíbrio onde a condição $\hat{y} = 0$ é válida.

A análise das equações 2.44 e 2.45 mostra que as condições necessárias para a existência de pontos de equilíbrio do sistema vinculado, independentes dos valores de μ , β_1 , β_2 e l são:

- $\hat{y} = 0$, com $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, para quaisquer valores de β_1 e β_2
- $\hat{y} = 0$, com $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$, no caso em que $\beta_1 = \beta_2$

A solução da equação 2.43 deve satisfazer as condições acima estabelecidas, e com isso fornecer o valor de $\hat{x}$, que juntamente com $\hat{y} = 0$ ($\theta = 0$, $\theta = \pi$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$) determinam os pontos de equilíbrio do sistema.

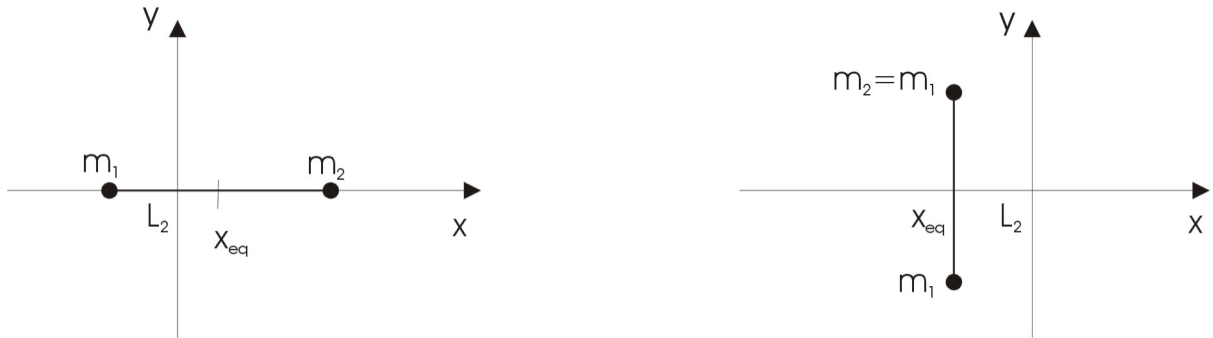


Figura 2.7: Configurações de equilíbrio

Os módulos dos vetores posição obtidos pelas equações 2.2, 2.6 e 2.30, para os casos em que $\theta = 0$, $\theta = \pi$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ com $\hat{y} = 0$, tornam-se:

$$\hat{R}_1 = \hat{X}_0 + \hat{x} + \mu \qquad \hat{R}_2 = \hat{X}_0 + \hat{x} + \mu - 1 \qquad (2.48)$$

Primeiramente vamos considerar o caso em que $\theta = 0$. Nesta situação os coeficientes $\Lambda_1^{l,\theta}$ e $\Lambda_2^{l,\theta}$ dados pelas equações 2.29 tornam-se:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{l,0} &= 1 + 3\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 + 4\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1}\right)^3 + 5\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1}\right)^4 \\
\Lambda_2^{l,0} &= 1 + 3\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2}\right)^2 + 4\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2}\right)^3 + 5\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2}\right)^4
\end{aligned} \quad (2.49)$$

Para o caso em que $\theta = \pi$ os mesmos coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{l,\pi} &= 1 + 3\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 - 4\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1}\right)^3 + 5\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1}\right)^4 \\
\Lambda_2^{l,\pi} &= 1 + 3\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2}\right)^2 - 4\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2}\right)^3 + 5\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2}\right)^4
\end{aligned} \quad (2.50)$$

Comparando as equações 2.49 e 2.50 verificamos que:

- para $\beta_1 = \beta_2$ os terceiros termos das equações 2.49 e 2.50 tornam-se nulos e os pontos de equilíbrio para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ tornam-se indistinguíveis e
- para $\beta_1 \neq \beta_2$ os terceiros termos das equações 2.49 e 2.50 tornam-se simétricos e os pontos de equilíbrio para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ equivalem a uma troca de β_1 por β_2 , ou seja, podemos obter os pontos de equilíbrio para ambas as situações através de uma permutação entre as massas dos satélites. Diante disto, trataremos estas duas situações de equilíbrio como equivalentes.

Considerando o caso em que $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtemos um outro ponto de equilíbrio do sistema vinculado sempre que $\beta_1 = \beta_2$. Nesta situação os coeficientes $\Lambda_1^{l,\theta}$ e $\Lambda_2^{l,\theta}$ são dados por:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{l,\frac{\pi}{2}} &= 1 - \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1}\right)^2 + \frac{15}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1}\right)^4 \\
\Lambda_2^{l,\frac{\pi}{2}} &= 1 - \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2}\right)^2 + \frac{15}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2}\right)^4
\end{aligned} \quad (2.51)$$

Substituindo a equação 2.48 na equação 2.43, temos:

$$\frac{1 - \mu}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu)^2} \Lambda_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu - 1)^2} \Lambda_2^{l,\theta} = \hat{X}_0 + \hat{x} \quad (2.52)$$

A solução da equação 2.52 nos informa a coordenada $\hat{x} = \hat{x}_{eq}$ do ponto de equilíbrio do sistema vinculado (L_1^* ou L_2^*) dado por $(\hat{x}_{eq}, 0, 0)$, $(\hat{x}_{eq}, 0, \pi)$ e $(\hat{x}_{eq}, 0, \frac{\pi}{2})$, sendo este último ponto exclusivo para $\beta_1 = \beta_2$.

No caso limite em que $l = 0$, ou seja, o comprimento do cabo é nulo, temos o problema reduzido ao PR3C. Nesta situação os coeficientes $\mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta}$ e $\mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta}$ são unitários e a equação (2.52) se reduz a:

$$\frac{1 - \mu}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu)^2} + \frac{\mu}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu - 1)^2} = \hat{X}_0 + \hat{x} \quad (2.53)$$

Lembramos que $\hat{X}_0$ é a coordenada adimensional do ponto lagrangiano L_1 ou L_2 do PR3C e como tal é a solução de um polinômio do quinto grau (a *quintica* de Euler), conforme Murray and Dermott [14]. Esta equação reescrita utilizando a convenção adotada em nosso modelo toma a seguinte forma:

$$\frac{1 - \mu}{(\hat{X}_0 + \mu)^2} + \frac{\mu}{(\hat{X}_0 + \mu - 1)^2} = \hat{X}_0 \quad (2.54)$$

Observando as equações 2.53 e 2.54, verificamos que $\hat{x} = 0$ é uma solução da equação 2.53, tornando o ponto de equilíbrio do nosso modelo coincidente com um dos pontos lagrangianos do PR3C, quando o sistema vinculado for reduzido a um comprimento de cabo nulo. Esta conclusão também pode ser obtida observando que tomando como origem um dos pontos lagrangianos, a coordenada dele próprio será nula no referencial adotado.

Capítulo 3

Aplicações numéricas

3.1 Pontos de equilíbrio

Conforme estabelecido anteriormente o sistema vinculado fixo possui pontos de equilíbrio que dependem fundamentalmente do seu comprimento e de sua inclinação. Estes pontos de equilíbrio são obtidos através das soluções da equação 2.52 que fornecem a coordenada $\hat{x}$, juntamente com $\hat{y} = 0$ e $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ ($\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$) ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($\beta_1 = \beta_2$).

Para resolver numericamente a equação 2.52 e obtermos os pontos de equilíbrio para comprimentos e inclinações específicos, usamos o método de Newton-Raphson para encontrar zeros de uma função algébrica.

A partir da equação 2.52 podemos escrever uma função F cuja expressão é dada por:

$$F(\hat{x}) = \hat{X}_0 + \hat{x} - \frac{1 - \mu}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu)^2} \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} - \frac{\mu}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu - 1)^2} \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} \quad (3.1)$$

A aplicação do método estabelece que após sucessivas iterações com,

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \frac{F(\hat{x}_k)}{F'(\hat{x}_k)}$$

o valor encontrado converge para o zero da função F . O valor da derivada de F no ponto $\hat{x}$, ou seja, $F'(\hat{x})$, tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
F'(\hat{x}) = & 1 - \frac{(1-\mu)}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu)^2} \frac{\partial \Lambda_1^{l,\theta}}{\partial \hat{x}} + \frac{2(1-\mu)}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu)^3} \Lambda_1^{l,\theta} \\
& - \frac{\mu}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu - 1)^2} \frac{\partial \Lambda_2^{l,\theta}}{\partial \hat{x}} + \frac{2\mu}{(\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu - 1)^3} \Lambda_2^{l,\theta}
\end{aligned} \quad (3.2)$$

As derivadas parciais dos coeficientes $\Lambda_1^{l,\theta}$ e $\Lambda_2^{l,\theta}$ são obtidas a partir das equações 2.6 e 2.43, resultando nas equações a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda_1^{l,\theta}}{\partial \hat{x}} = & \frac{-\beta_1 \beta_2 l^2}{R_1^3} \left[(3 \cos^2 \theta - 1) + 6(\beta_2 - \beta_1)(5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta \left(\frac{l}{R_1} \right) \right. \\
& \left. + \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1 \beta_2)(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 \right] \frac{\partial R_1}{\partial \hat{x}}
\end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda_2^{l,\theta}}{\partial \hat{x}} = & \frac{-\beta_1 \beta_2 l^2}{R_2^3} \left[(3 \cos^2 \theta - 1) + 6(\beta_2 - \beta_1)(5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta \left(\frac{l}{R_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1 \beta_2)(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 \right] \frac{\partial R_2}{\partial \hat{x}}
\end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{onde temos: } \quad \frac{\partial R_1}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu}{R_1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial R_2}{\partial \hat{x}} = \frac{\hat{X}_0 + \hat{x} + \mu - 1}{R_2}$$

Usamos um código escrito em linguagem C^{++} para implementar o método acima descrito e aplicá-lo no sistema Terra-Lua e Sol-Terra.

3.1.1 Sistema Terra-Lua

Usando os dados da tabela D.2 do apêndice D no caso específico do sistema Terra-Lua, obtemos os pontos de equilíbrio para massas adimensionais dos satélites iguais ($\beta_1 = \beta_2$) com comprimentos l compreendidos no intervalo de 0 km a 6000 km ($\Delta l = 10\text{km}$), para as inclinações de 0 e $\frac{\pi}{2}$, conforme discutido no capítulo 2. Observamos que como estamos considerando $\beta_1 = \beta_2$, as situações de equilíbrio para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ são equivalentes. Os valores encontrados estão plotados no gráfico da figura 3.1.

Da análise do gráfico podemos observar que:

- no caso de comprimento nulo, o ponto de equilíbrio coincide com o L_2 do PR3C, conforme previsto em nossa modelagem;

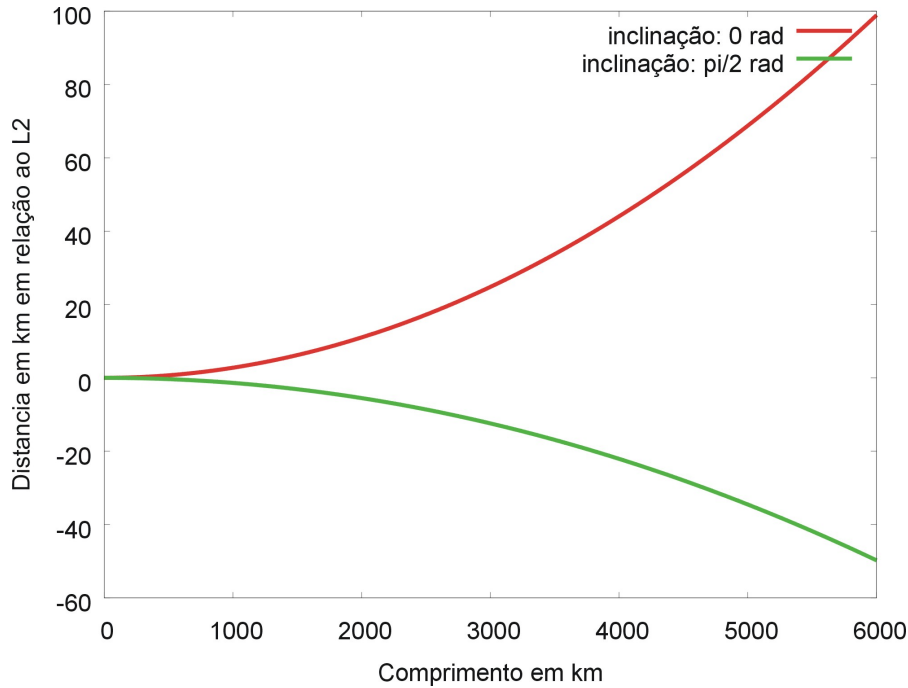


Figura 3.1: Pontos de equilíbrio para o sistema Terra-Lua (massas: 1 e 1)

- a localização do ponto de equilíbrio é diferente para $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$. Para a inclinação nula, o ponto de equilíbrio se afasta do L_2 no sentido positivo do referencial adotado, sempre que o comprimento do cabo aumenta. O inverso é observado no caso de inclinação perpendicular do sistema vinculado, fazendo com que o ponto de equilíbrio se aproxime dos corpos primários.

No caso em que as massas adimensionais dos satélites são diferentes ($\beta_1 \neq \beta_2$), como já visto, as configurações de equilíbrio são conseguidas para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. As simulações para este caso foram obtidas com o comprimento do cabo que une o sistema vinculado entre 0 km e 6000 km, com $\Delta l = 10$ km. Os gráficos das figuras 3.2 e 3.3 reproduzem duas situações em que $\beta_1 = 9\beta_2$ e $\beta_1 = 99\beta_2$, respectivamente. Ressaltamos que o caso em que $\theta = \pi$ pode ser obtido tomando-se $\theta = 0$ com uma permutação das massas dos satélites β_1 e β_2 , tornando a obtenção desses pontos de equilíbrio semelhante para ambos os casos. Com isso os mesmos resultados poderiam ser obtidos fazendo-se $\beta_2 = 9\beta_1$ e $\beta_2 = 99\beta_1$ e os pontos de equilíbrio seriam invertidos em relação a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, conforme descrito na página 49.

A análise dos gráficos das figuras 3.2 e 3.3 nos permite observar que à medida que a razão de massas dos satélites cresce o ponto de equilíbrio varia cada vez menos em relação ao L_2 . Tal situação é explicada pelo fato do sistema vinculado tender a um único

corpo quando a massa de um dos satélites se torna muito menor que a do outro. É o caso, por exemplo, de um pequeno satélite acoplado por um cabo a um veículo espacial, conforme ocorreu nas missões *TSS1* e *TSS1R* da NASA. Lembramos, porém, que estes foram lançados na vizinhança da Terra.

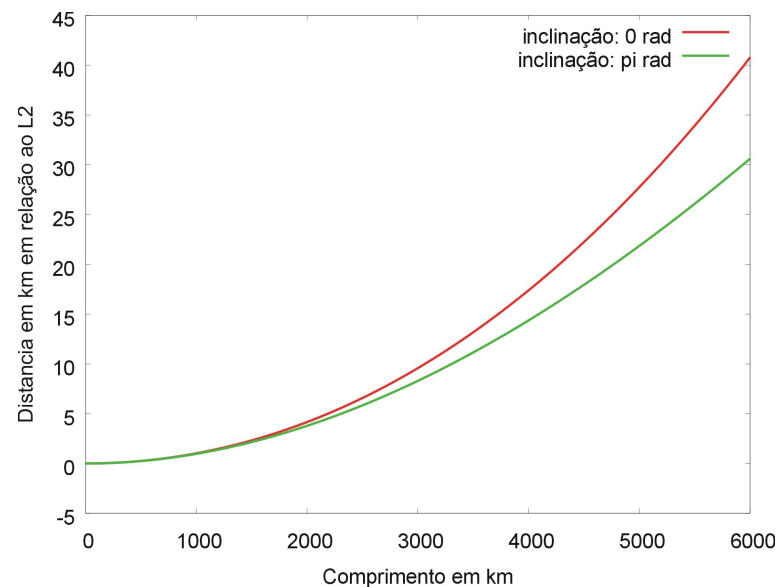


Figura 3.2: Pontos de equilíbrio para o sistema Terra-Lua (massas: 1 e 9)

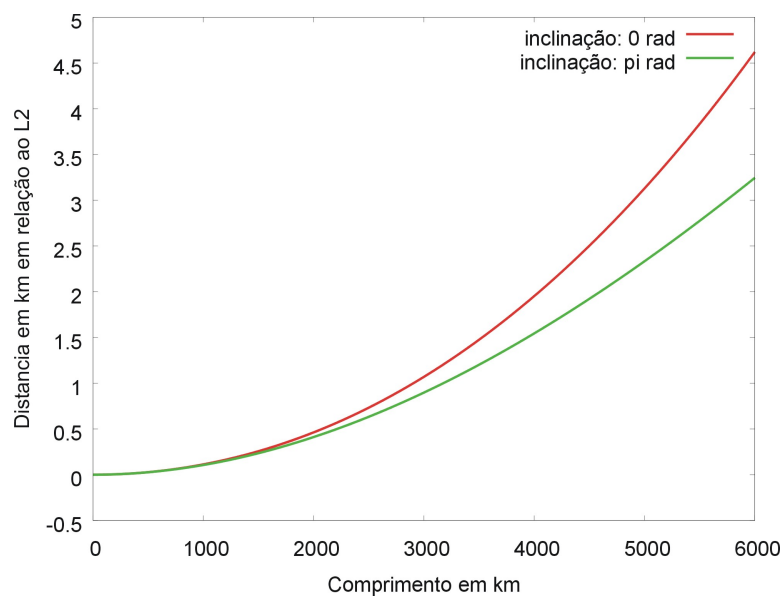


Figura 3.3: Pontos de equilíbrio para o sistema Terra-Lua (massas: 1 e 99)

Na revisão bibliográfica não encontramos uma análise tão detalhada quanto a nossa em relação aos equilíbrios.

3.1.2 Sistema Sol-Terra

Neste caso é possível observarmos um comportamento semelhante ao descrito no sistema Terra-Lua. O gráfico da figura 3.4 nos informa a posição do ponto de equilíbrio em relação ao L_2 do PR3C, para comprimentos do cabo entre 0 km e 10000 km (com $\Delta l = 10$ km), massas adimensionais dos satélites $\beta_1 = \beta_2$ e inclinações de 0 e $\frac{\pi}{2}$. Comprimentos de cabos maiores são necessários pelo fato do sistema Sol-Terra ter dimensões maiores que o sistema Terra-Lua.

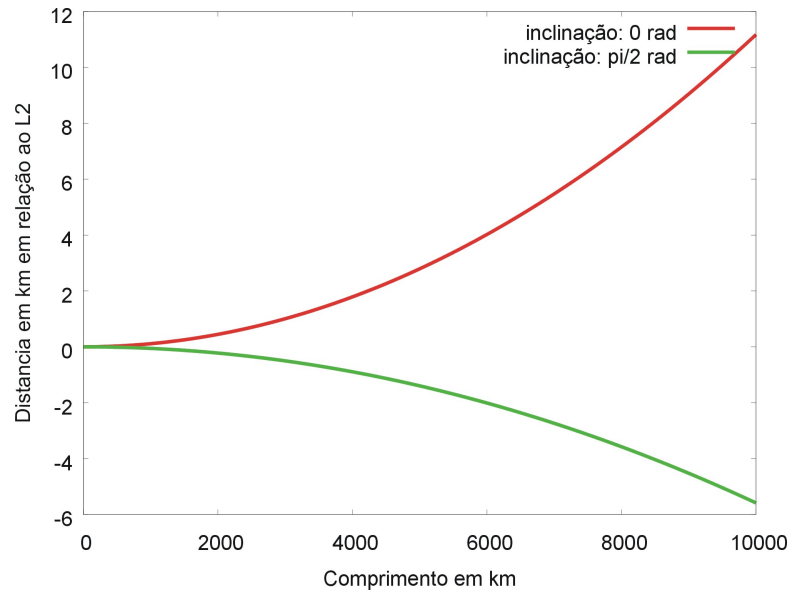


Figura 3.4: Pontos de equilíbrio para o sistema Sol-Terra (massas: 1 e 1)

Em virtude das diferenças dos corpos primários nos dois casos, observamos que a variação do ponto de equilíbrio em relação ao L_2 no sistema Sol-Terra é menor que no sistema Terra-Lua, para um mesmo comprimento e/ou inclinação do cabo. Sendo assim, para se conseguir a mesma distância entre o ponto de equilíbrio e o L_2 do PR3C é necessário um comprimento de cabo consideravelmente maior quando os satélites estão no sistema Sol-Terra, do que se o mesmo estivesse no sistema Terra-Lua.

As figuras 3.5 e 3.6 reproduzem a localização dos pontos de equilíbrio nos casos em que $\beta_1 = 9\beta_2$ e $\beta_1 = 99\beta_2$, respectivamente, para as situações em que $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

A tabela 3.1 nos informa a distância dos pontos de equilíbrio dos satélites em relação ao L_2 do PR3C para o caso da aplicação no Terra-Lua e no Sol-Terra, considerando as massas dos satélites iguais ($\beta_1 = \beta_2$) a fim de que a variação do comprimento do cabo enfatize o efeito dos satélites vinculados.

É possível observarmos que mesmo para comprimentos de cabos relativamente elevados, a variação do ponto de equilíbrio no sistema Sol-Terra é bem pequena quando comparada com o sistema Terra-Lua.

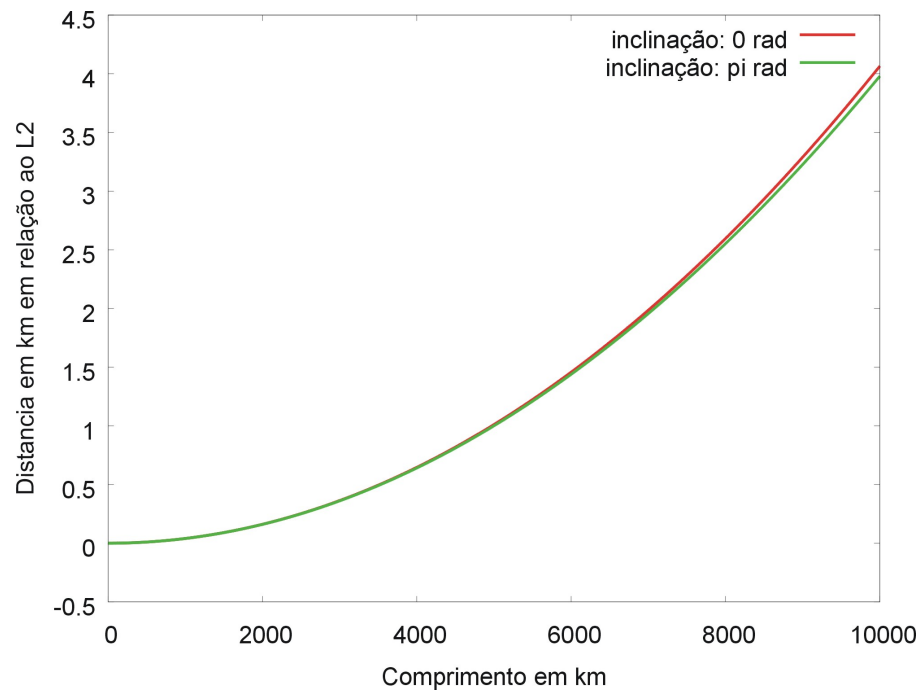


Figura 3.5: Pontos de equilíbrio para o sistema Sol-Terra (massas: 1 e 9)

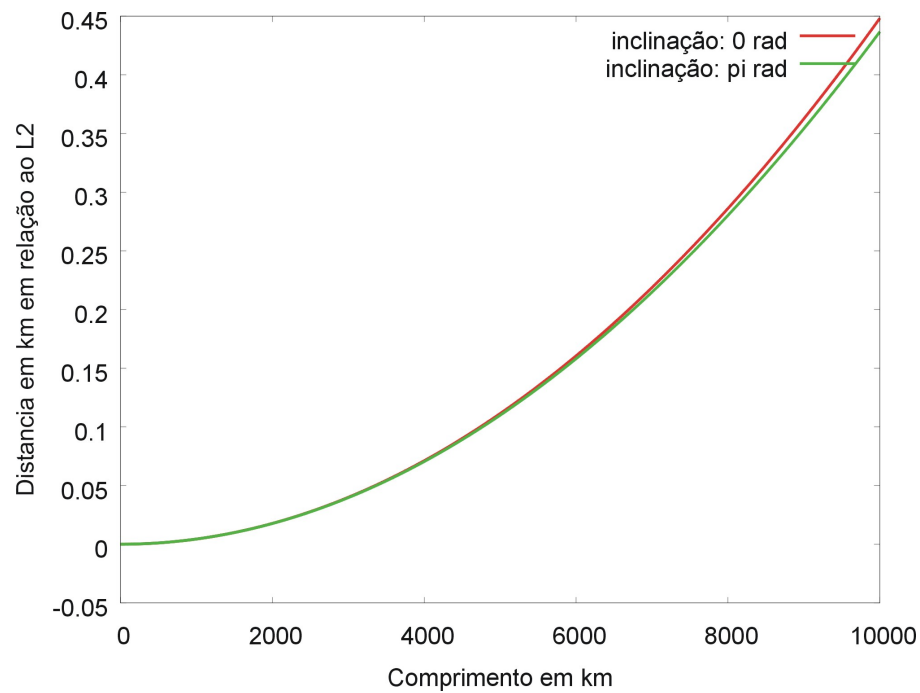


Figura 3.6: Pontos de equilíbrio para o sistema Sol-Terra (massas: 1 e 99)

comprimento (km)	Terra-Lua (km)		Sol-Terra (km)	
	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
0	0.000	0.000	0.000	0.000
500	0.689	-0.344	0.028	-0.014
1000	2.758	-1.379	0.112	-0.056
1500	6.205	-3.104	0.251	-0.126
2000	11.029	-5.519	0.447	-0.223
2500	17.229	-8.624	0.698	-0.349
3000	24.802	-12.421	1.006	-0.503
3500	33.745	-16.909	1.369	-0.684
4000	44.055	-22.090	1.788	-0.894
4500	55.729	-27.965	2.262	-1.131
5000	68.763	-34.534	2.793	-1.396
5500	83.152	-41.799	3.379	-1.689
6000	98.891	-49.762	4.022	-2.011

Tabela 3.1: Distância da coordenada x_{eq} do ponto de equilíbrio ao L_2 para massas dos satélites iguais (Terra-Lua e Sol-Terra)

3.2 Exploração da vizinhança do equilíbrio

A fim de resolver numericamente as equações de movimento obtidas para o SVF ($\dot{l} = 0$), inicialmente aplicamos ao sistema Terra-Lua tomando condições iniciais na vizinhança do L_2 deste sistema. Convém lembrar que neste ponto está a origem do nosso sistema de coordenadas. Os resultados também são obtidos para o sistema Sol-Terra, em particular pelo crescente interesse deste último por parte das agências espaciais.

As equações de movimento são integradas ao longo do tempo, sempre considerando as restrições do modelo, e assim obtemos órbitas na vizinhança do L_2 .

As soluções numéricas são obtidas por um código escrito em C^{++} utilizando o algoritmo numérico de Runge-Kutta de ordem 7 com passo variável através do controle de erro dado pela ordem 8 ($rk78$). Verificamos que a constante do movimento de Jacobi do modelo é preservada até a ordem 10^{-20} ao longo das integrações.

3.2.1 Sistema Terra-Lua

Como já estabelecido anteriormente, a descrição do movimento do sistema vinculado depende fundamentalmente dos corpos primários e da região em que o sistema irá se mover. Como veremos no capítulo 4, na vizinhança de L_2 do PR3C o sistema é instável. Na literatura esta instabilidade é controlada estabelecendo-se uma lei de controle para $l(t)$, conforme encontramos em Misra [12]. Podemos adiantar que nossos resultados sem uso de uma lei de controle são compatíveis com a do referido autor.

massa da Terra	$M_1 = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
massa da Lua	$M_2 = 7.348 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
distância Terra-Lua	$D = 3.891 \cdot 10^8 \text{ m}$

Tabela 3.2: Parâmetros do sistema Terra-Lua

Tomamos por base o sistema Terra-Lua com os parâmetros numéricos descritos na tabela 3.2, extraídos de Peláez [15]. Em seguida calculamos os valores necessários para a definição dos parâmetros que são usados nas equações 2.31, 2.32 e 2.33.

movimento médio	$n = 2.617 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
massa reduzida	$\mu = 1.215 \cdot 10^{-2}$
distância Terra-O	$D_1 = 4.727 \cdot 10^6 \text{ m}$
distância Lua-O	$D_2 = 3.843 \cdot 10^8 \text{ m}$
distância L_2 -O	$X_0 = 4.496 \cdot 10^8 \text{ m}$

Tabela 3.3: Parâmetros obtidos do sistema Terra-Lua

- O movimento médio (n) é calculado a partir da equação 2.4, onde ressaltamos a consideração sobre o movimento dos corpos primários ser tomado como circular, fazendo com que este valor seja constante.
- Os valores de D_1 e D_2 são obtidos a partir das equações 2.2 e a coordenada do centro de massa do sistema como um todo é adotada como sendo coincidente com a coordenada do centro de massa dos corpos primários, em virtude de suas massas serem várias ordens de grandeza superiores às massas dos satélites. A massa reduzida (μ) é obtida da equação 2.3.

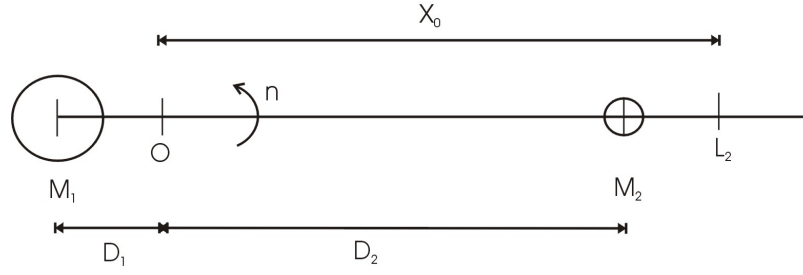


Figura 3.7: Parâmetros para cada sistema

- A localização da coordenada do X_0 do L_2 do sistema Terra-Lua em relação ao centro de massa é calculada a partir da equação 2.54 através do método de Newton-Raphson.
- Com relação aos satélites, os parâmetros do SVF que os definem são as massas reduzidas (β_1 e β_2) e o comprimento do cabo (l). As simulações foram obtidas para diversos valores dos parâmetros cujos limites são dados na tabela 3.4. É relevante observarmos que em todas os cálculos o comprimento do cabo foi muito menor que a distância entre os corpos primários ($l \ll D$).

Considerando o sistema de equações diferenciais de segunda ordem formado pelas equações de movimento, necessitamos definir condições iniciais a fim de obtermos uma solução. Estas condições iniciais são dadas pela posição $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ e velocidade $(\dot{\hat{x}}_0, \dot{\hat{y}}_0)$ iniciais do centro de massa do sistema vinculado, bem como a inclinação do cabo que une os satélites (θ_0) e sua taxa de variação temporal ($\dot{\theta}_0$).

	inferior	superior
$\beta_1 : \beta_2$	1 : 1	1 : 9
$l(km)$	100	6000

Tabela 3.4: Limites dos parâmetros usados na integração

A posição inicial $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ do centro de massa dos satélites deve estar na vizinhança do L_2 devido às aproximações tomadas no desenvolvimento do modelo (vide figura 2.6). Comparamos as simulações tomando como posição inicial os seguintes casos:

- o ponto lagrangiano L_2 do PR3C, representado por $(0, 0)$, pois $\hat{x}_{L_2} = 0$
- o ponto de equilíbrio do sistema, representado por $(\hat{x}_{eq}, 0)$

A inclinação inicial do satélite (θ_0) foi fixada em três valores - 0, 1 e $\frac{\pi}{2}$ - para ser possível compararmos a evolução dinâmica do sistema em condições de equilíbrio ($\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$) e de uma situação de não-equilíbrio ($\theta_0 = 1$).

A velocidade de translação inicial é tomada como nula ($\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$) para que o satélite permaneça o maior tempo possível na vizinhança considerada. Com relação à taxa de variação temporal da inclinação ($\dot{\theta}_0$), analisamos três hipóteses que são:

- $\dot{\theta}_0 = 0 \text{ dia}^{-1}$, inicialmente parado
- $\dot{\theta}_0 = 1 \text{ dia}^{-1}$, inicialmente lento
- $\dot{\theta}_0 = 100 \text{ dia}^{-1}$, inicialmente rápido

A tabela 3.5 representa o conjunto de condições iniciais usado nas simulações e para efeito de comparação o tempo de integração foi fixado em 8 dias. Este valor é compatível com o usado por Misra [12].

condição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\hat{x}_0$	$\hat{x}_{eq}$	$\hat{x}_{eq}$	$\hat{x}_{eq}$	$\hat{x}_{eq}$	$\hat{x}_{eq}$	$\hat{x}_{eq}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{y}_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\dot{\hat{x}}_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\dot{\hat{y}}_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
θ_0	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	1	1	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\dot{\theta}_0$	0	1	100	0	1	100	0	1	100	0	1	100	0	1	100

Tabela 3.5: Condições iniciais para a integração das equações do SVF (Terra-Lua)

Convém ressaltar que no caso em que $\theta_0 = 1$, embora possamos ter $\hat{x}_0 = \hat{x}_{eq}$ com a coordenada $\hat{x}_{eq}$ sendo a coordenada dos equilíbrios para $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, não temos representada uma situação inicial de equilíbrio.

As condições 4, 5 e 6 somente são de equilíbrio quando $\beta_1 = \beta_2$, e portanto só apresentaremos estas simulações neste caso.

Exceto no caso em que analisamos o efeito da alteração da razão de massas dos satélites, usaremos massas iguais ($\beta_1 = \beta_2$) em todas as outras simulações. Assim, ressaltamos que as situações de equilíbrio para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ são equivalentes.

Para uma melhor compreensão da influência de cada um dos parâmetros envolvidos na órbita dos satélites, dividimos a análise de tal forma a variar um parâmetro por vez, mantendo os outros constantes.

1. variação da posição inicial

Uma situação importante a ser analisada é aquela em que a condição inicial representa o próprio ponto de equilíbrio no espaço de fase. No nosso modelo significa partir de $(\hat{x}_{eq}, 0, 0)$ ou $(\hat{x}_{eq}, 0, \frac{\pi}{2})$ além de $\dot{\hat{x}}_0 = \dot{\hat{y}}_0 = \dot{\hat{\theta}}_0 = 0$ como condições iniciais. Os gráficos da figura 3.8 reproduzem estes resultados para um satélite com cabo de comprimento 1500 km, com razão de massas 1 : 1 usando a condição 1 da tabela 3.5 com um tempo de integração de 8 dias. Para este caso temos $x_{eq} = 6.205$ km, obtido da tabela 3.1. Observa-se que o SVF permanece no equilíbrio e mesmo com uma simulação de 1000 dias o equilíbrio se mantém.

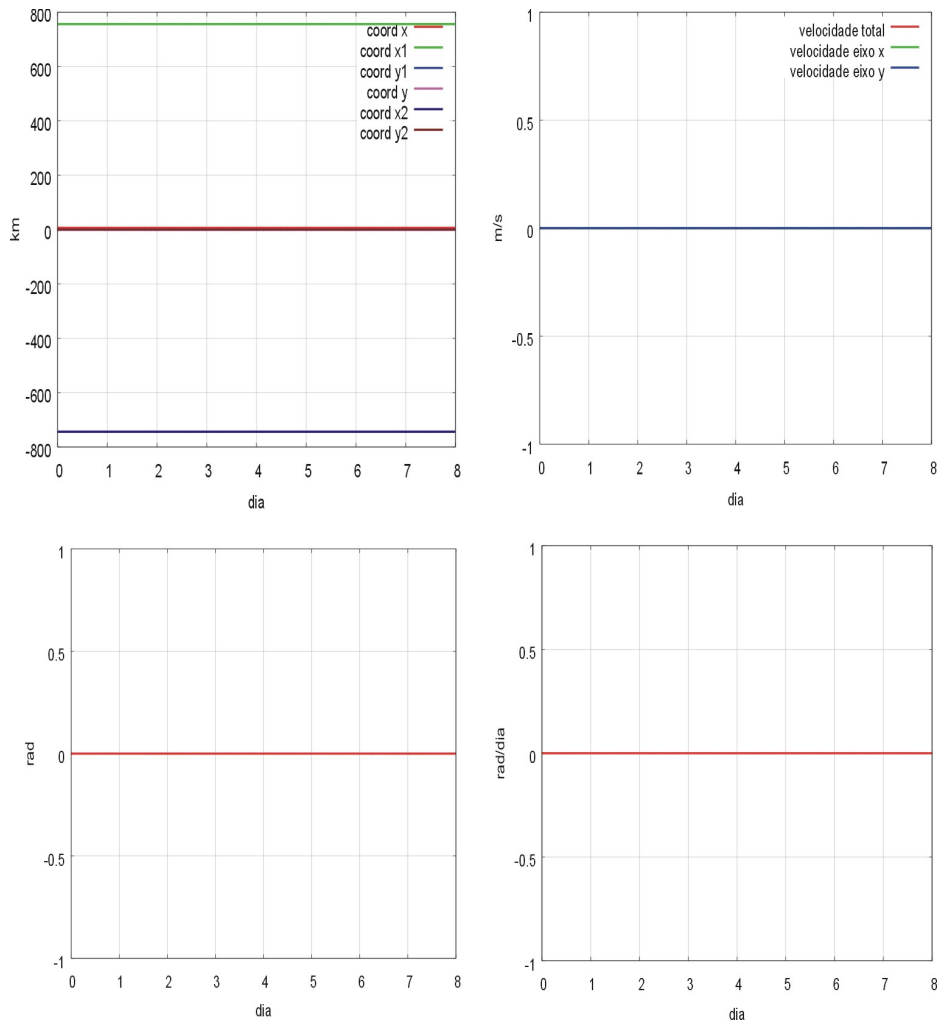


Figura 3.8: Evolução do SVF inicialmente no equilíbrio com $\theta_0 = 0$ (Terra-Lua)

As coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) representam as posições de cada uma das massas dos satélites e foram obtidas através das equações 2.9.

Os gráficos da figura 3.9 representam uma simulação do mesmo satélite com a condição 7 da tabela 3.5 e com o mesmo tempo de integração. Como podemos observar, com relação ao comportamento das variáveis translacionais o sistema evolui de forma muito diferente quando colocado inicialmente no ponto de equilíbrio ou em um outro ponto qualquer, como por exemplo o L_2 do PR3C, conforme realizado nesta simulação.

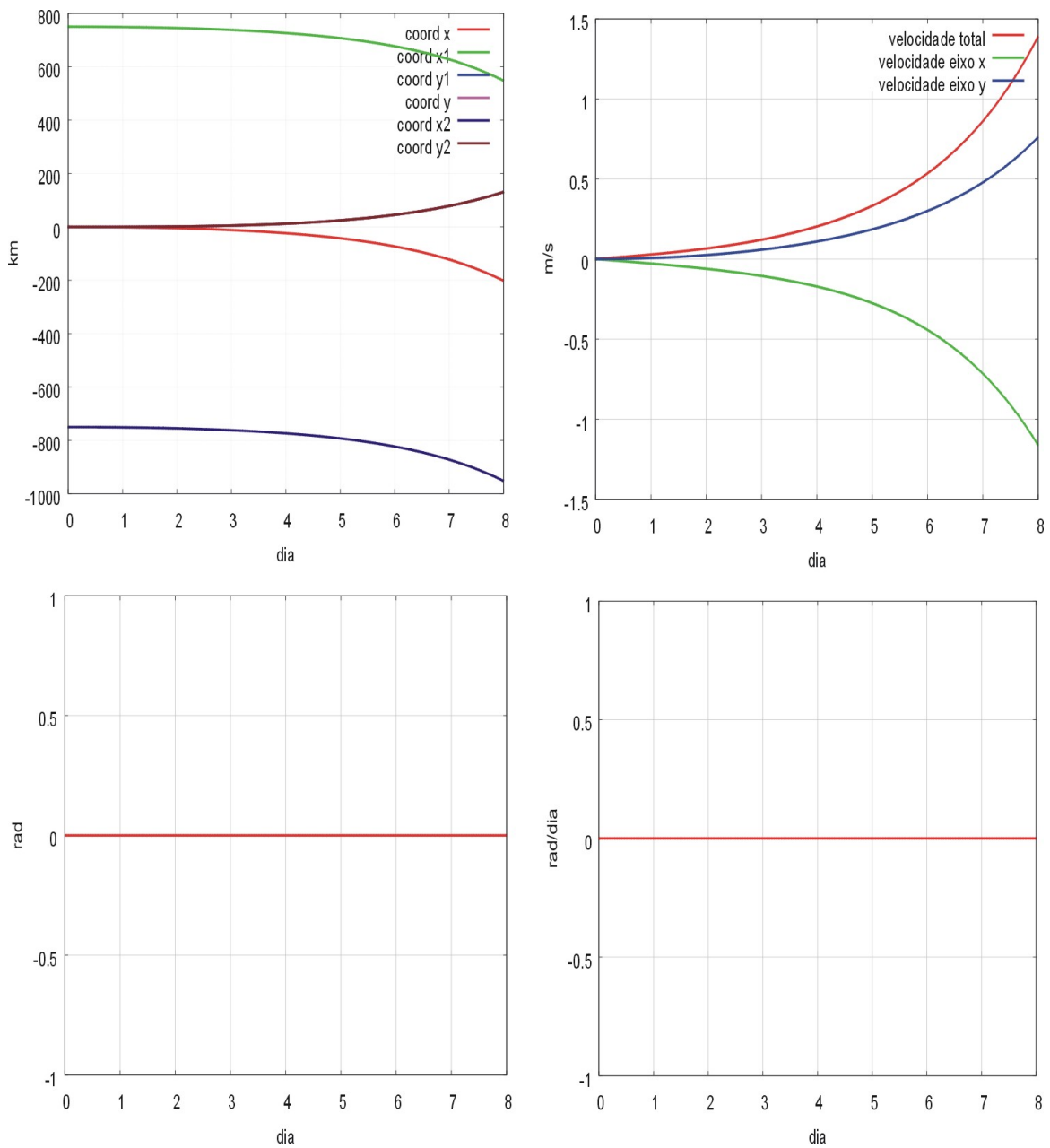


Figura 3.9: Evolução do SVF inicialmente no L_2 do PR3C com $\theta_0 = 0$ (Terra-Lua)

Observamos ainda que, para a mesma condição 7, o sistema permanece com inclinação nula, fazendo com que seu movimento seja descrito como na figura 3.10. Podemos adiantar que este resultado está de acordo com a linearização do sistema feita no capítulo 4 que estabelece autovalores imaginários puros para o equilíbrio em $\theta = 0$, tornando o sistema estável com relação à variável θ .

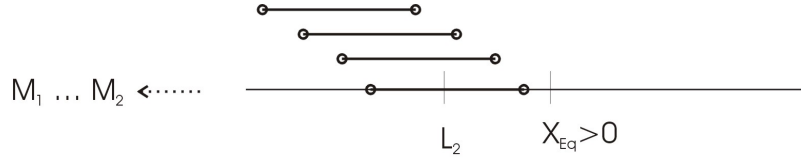


Figura 3.10: Sentido do movimento para $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$

Aqui convém estabelecer uma comparação importante com Misra [12]. Expandimos com polinômios de Legendre apenas os denominadores da equação 2.17 que representa o potencial e usamos duas ordens a mais que o referido autor. As potências de $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$ que aparecem na equação 2.18 não foram expandidas, tal como feitos por ele. Ao compararmos as simulações numéricas com este autor notamos que seus pontos de equilíbrio não fornecem a estabilidade mostrada nos gráficos da figura 3.8.

Usando a condição 4 da tabela 3.5 para o mesmo satélite, ou seja, partindo do equilíbrio para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, obtemos resultados que mostram variações na taxa temporal da inclinação ($\dot{\theta} \neq 0$), fazendo com que o SVF não se mantenha em equilíbrio. Este fato também será visto com mais detalhes no capítulo 4, onde mostraremos que neste caso os autovalores para as variáveis θ e $\dot{\theta}$ são reais, tornando o sistema instável. Os resultados para esta simulação estão mostrados nos gráficos da figura 3.11 e foram obtidos com a coordenada do ponto de equilíbrio retirado da tabela 3.1 sendo $x_{eq} = -3.104$ km. O tempo de integração foi aumentado para 24 dias a fim de melhor visualizarmos o afastamento da situação de equilíbrio. Ainda assim, seria necessário um tempo maior (da ordem de 100 dias) para que pudéssemos verificar afastamento nas demais coordenadas.

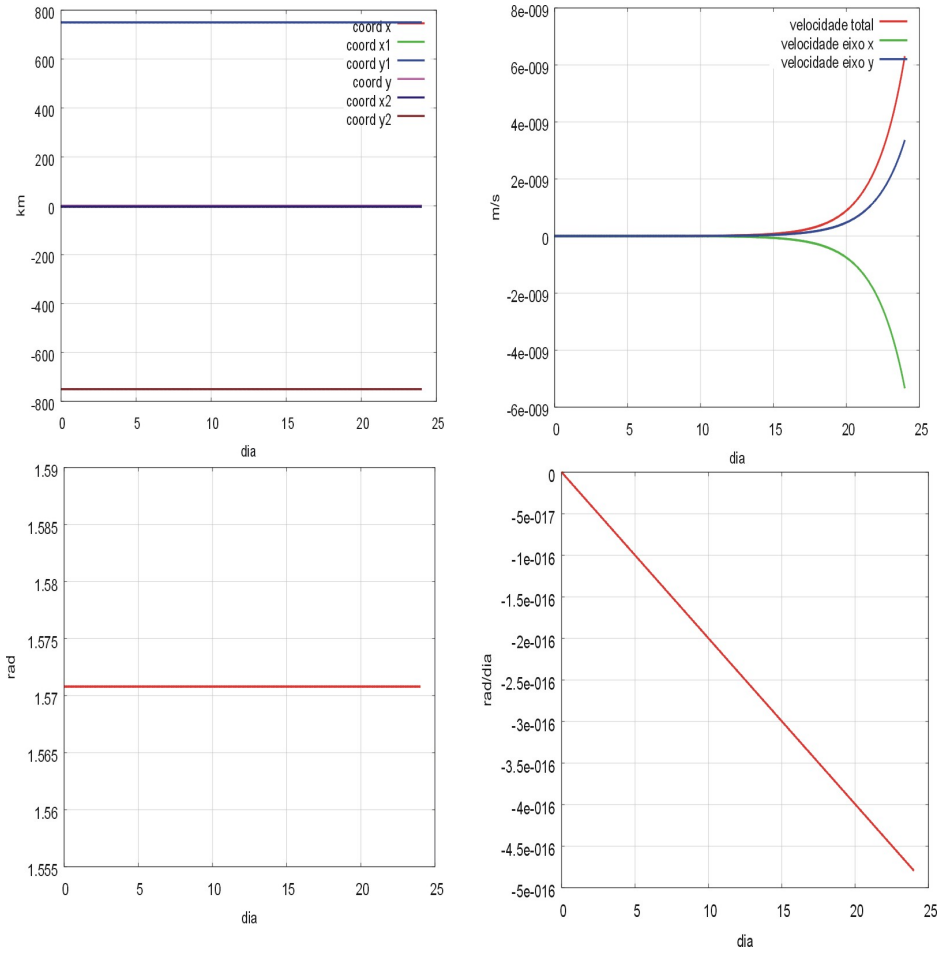


Figura 3.11: Evolução do SVF inicialmente no equilíbrio com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Terra-Lua)

Como podemos observar, os valores mostrados nos gráficos da velocidade translacional e da velocidade de rotação são muito próximos de zero, e o que ressaltamos é a tendência à instabilidade para esta situação de equilíbrio.

2. variação da inclinação inicial

Tomando como posição inicial do centro de massa do satélite o ponto $(\hat{x}_{eq}, 0)$, podemos ainda variar a inclinação inicial θ_0 .

Como já estabelecido, este ponto somente representa uma situação de equilíbrio nos casos em que $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Esta análise pode ser verificada pela observação dos gráficos da figura 3.12, onde um satélite com cabo de comprimento 2000 km e razão de massas dos satélites 1 : 1, inicialmente em repouso translacional e rotacional, foi colocado sob o ponto $(\hat{x}_{eq}, 0)$ correspondente a este comprimento para a situação de equilíbrio em que $\theta_0 = 0$ ($x_{eq} = 11.029$ km), vide tabela 3.1, porém com $\theta_0 = 1$, ou seja, fora do equilíbrio.

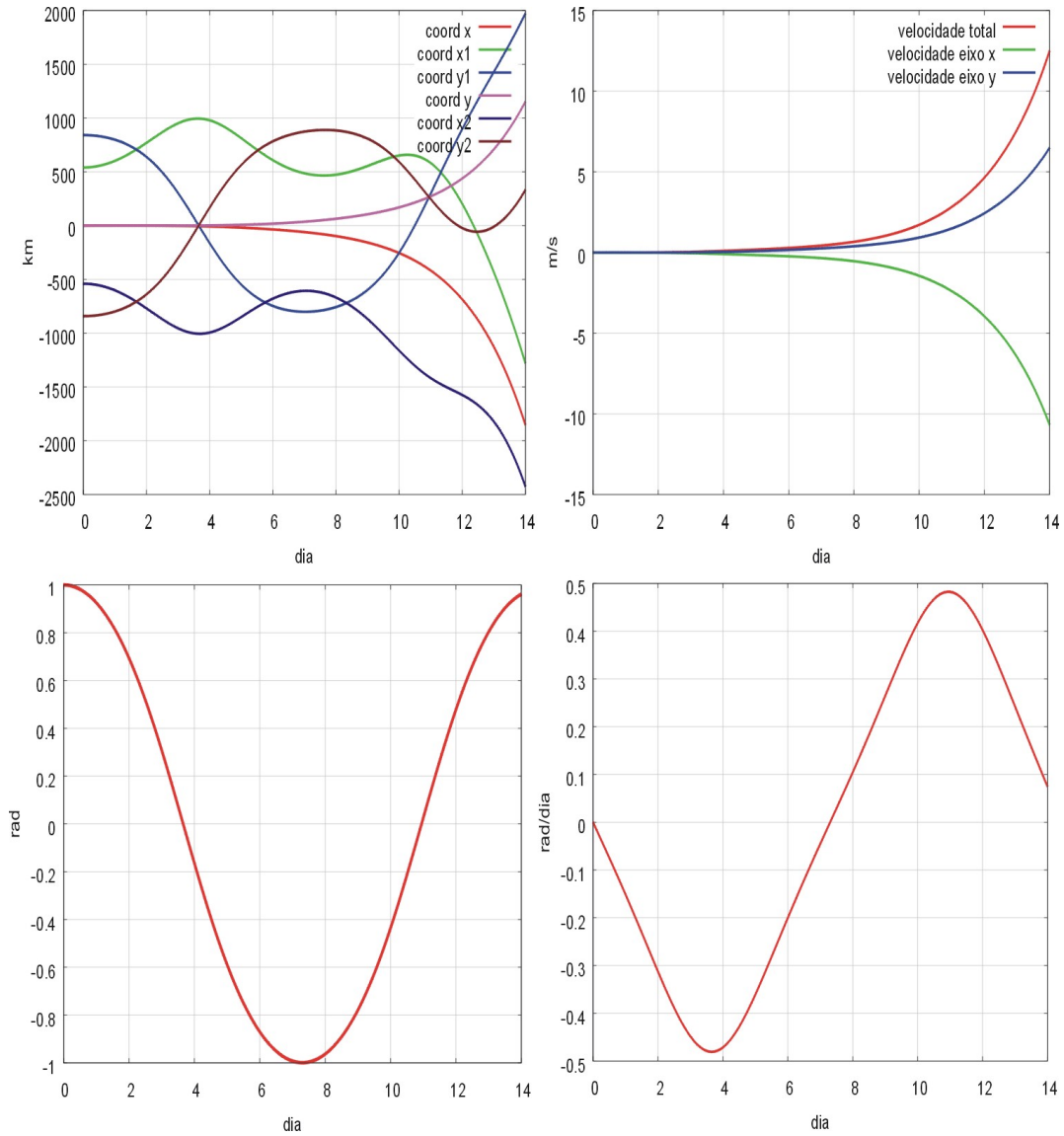


Figura 3.12: Evolução do SVF inicialmente com $\theta_0 = 1$ e $\hat{x}_0 = \hat{x}_{eq}(\theta=0)$ (Terra-Lua)

Observa-se que o sistema torna-se instável com relação às coordenadas espaciais e a velocidade de translação, apesar de manter uma periodicidade nas variáveis θ e $\dot{\theta}$. O tempo de integração desta simulação foi aumentado para 14 dias com o objetivo de identificar o comportamento da inclinação e da velocidade rotacional do sistema.

Como esperado, ao mantermos as mesmas condições anteriores com $\theta_0 = 0$, verificamos que o sistema se mantém em equilíbrio, fazendo com que o satélite permaneça em repouso não apenas translacional como também rotacional. Esses resultados foram mostrados nos gráficos da figura 3.9 para um cabo com comprimento de 1500 km, porém estes são válidos para qualquer comprimento mantidas

as restrições do modelo.

Podemos complementar a análise da influência do movimento do satélite com relação à variação da inclinação inicial usando as condições 7, 10 e 13 da tabela 3.5, com um comprimento de 1000 km e razão de massas 1 : 1. Ressaltamos que para estas condições iniciais tomamos $\dot{\theta}_0 = 0$. Os gráficos das figuras 3.14, 3.15 e 3.16 reproduzem os resultados obtidos. O tempo de integração foi de 16 dias.

A evolução das coordenadas espaciais e da velocidade translacional do centro de massa é devida ao afastamento da posição inicial ($\hat{x}_0 = \hat{x}_{L_2} = 0$) com relação ao ponto de equilíbrio do sistema. Neste caso, ou seja, para um comprimento $l = 1000$ km e razão de massas 1 : 1 temos para $\theta_0 = 0$ ($x_{eq} = 2.758$ km), $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ($x_{eq} = -1.379$ km) e $\theta_0 = 1$ ($\bar{A}x_{eq}$), todos obtidos a partir da tabela 3.1.

Quando comparamos as condições 7 e 13 da tabela 3.5, ainda que inicialmente o sistema esteja fora do equilíbrio, os gráficos das figuras 3.14 e 3.16 nos mostram que:

- para $\theta_0 = 0$ a evolução é mais rápida que para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, pois a posição inicial ($\hat{x}_0 = 0$) está mais distante do ponto de equilíbrio para a inclinação nula.
- as coordenadas espaciais evoluem de forma oposta, ou seja, para $\theta_0 = 0$ a coordenada $\hat{x}$ diminui e $\hat{y}$ aumenta enquanto que para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ a coordenada $\hat{x}$ aumenta e $\hat{y}$ diminui. Esta diferença está no fato dos pontos de equilíbrio estarem em lados opostos em relação ao L_2 do PR3C, conforme explicado no capítulo anterior. Quando iniciamos com $\theta_0 = 0$, a posição inicial ($\hat{x}_0 = \hat{x}_{L_2} = 0$) está entre os corpos primários e o ponto de equilíbrio do SVF e desta forma o movimento será de aproximação aos corpos primários, visto que o potencial gravitacional supera o potencial centrífugo. Com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ a posição inicial está além do ponto de equilíbrio e portanto o movimento se dará no sentido de afastamento dos corpos primários, visto que o potencial centrífugo supera o gravitacional. A figura 3.13 (fora de escala) descreve o comportamento destes satélites.
- observando os gráficos da figura 3.16 verificamos que o satélite se afasta do L_2 do PR3C com valores não nulos para $\dot{\theta}$, ainda que muito próximos de zero. Conforme já adiantamos, isto ocorre devido a instabilidade do equilíbrio em $\theta =$

$\frac{\pi}{2}$ e será visto no próximo capítulo através da linearização do sistema. O fato destes valores serem muito próximos de zero e o tempo usado na simulação ser de 16 dias, impede que seja medida alguma variação na inclinação do satélite, fazendo com que para efeitos práticos tenhamos uma situação em que o satélite continue praticamente perpendicular em relação ao eixo x.

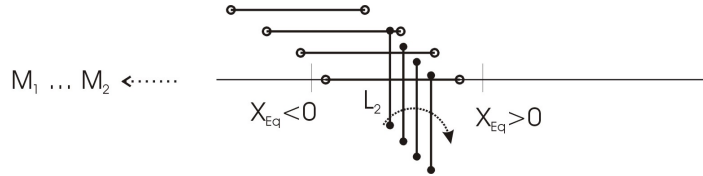


Figura 3.13: Sentido do movimento para $\hat{x}_0 = 0$ ($\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$)

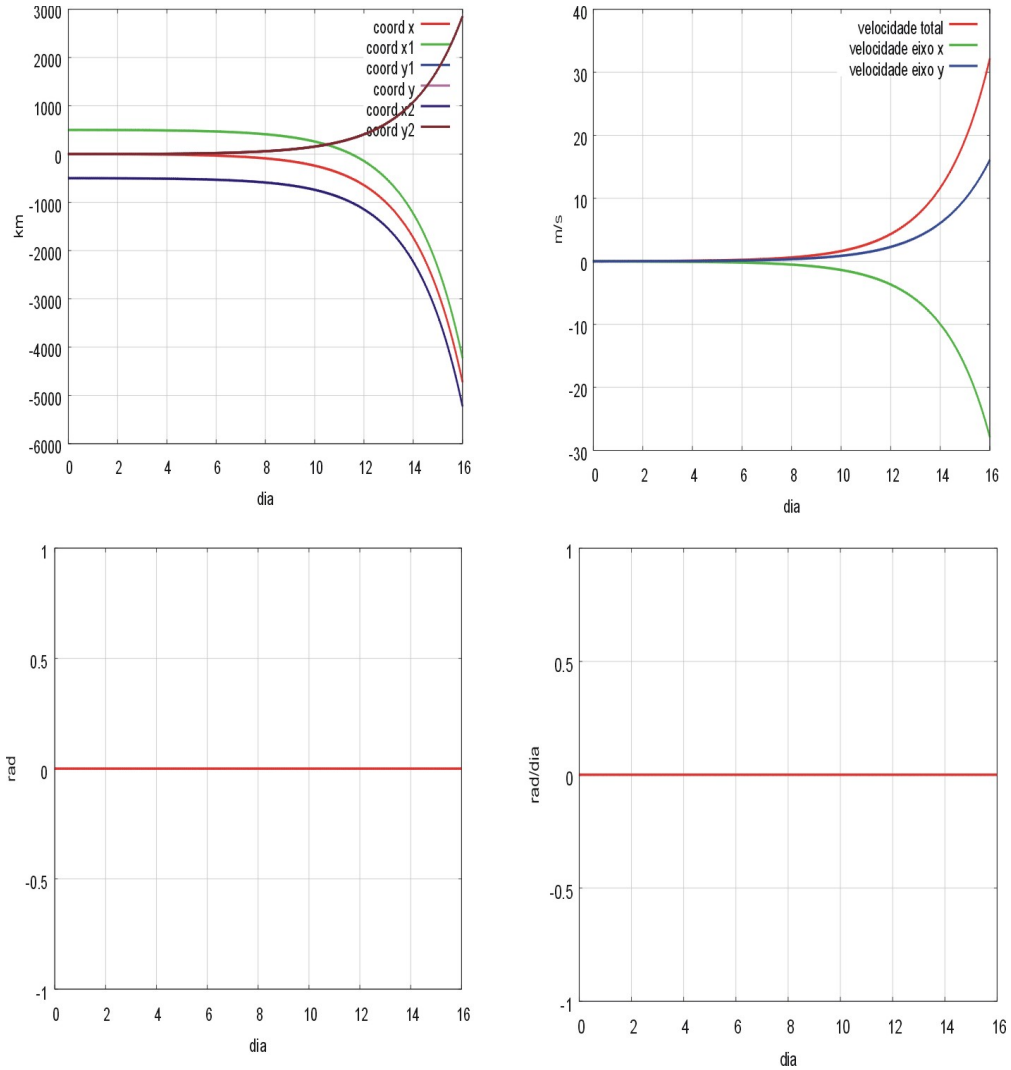


Figura 3.14: Evolução do SVF inicialmente com $\theta_0 = 0$ e $\hat{x}_0 = 0$ (Terra-Lua)

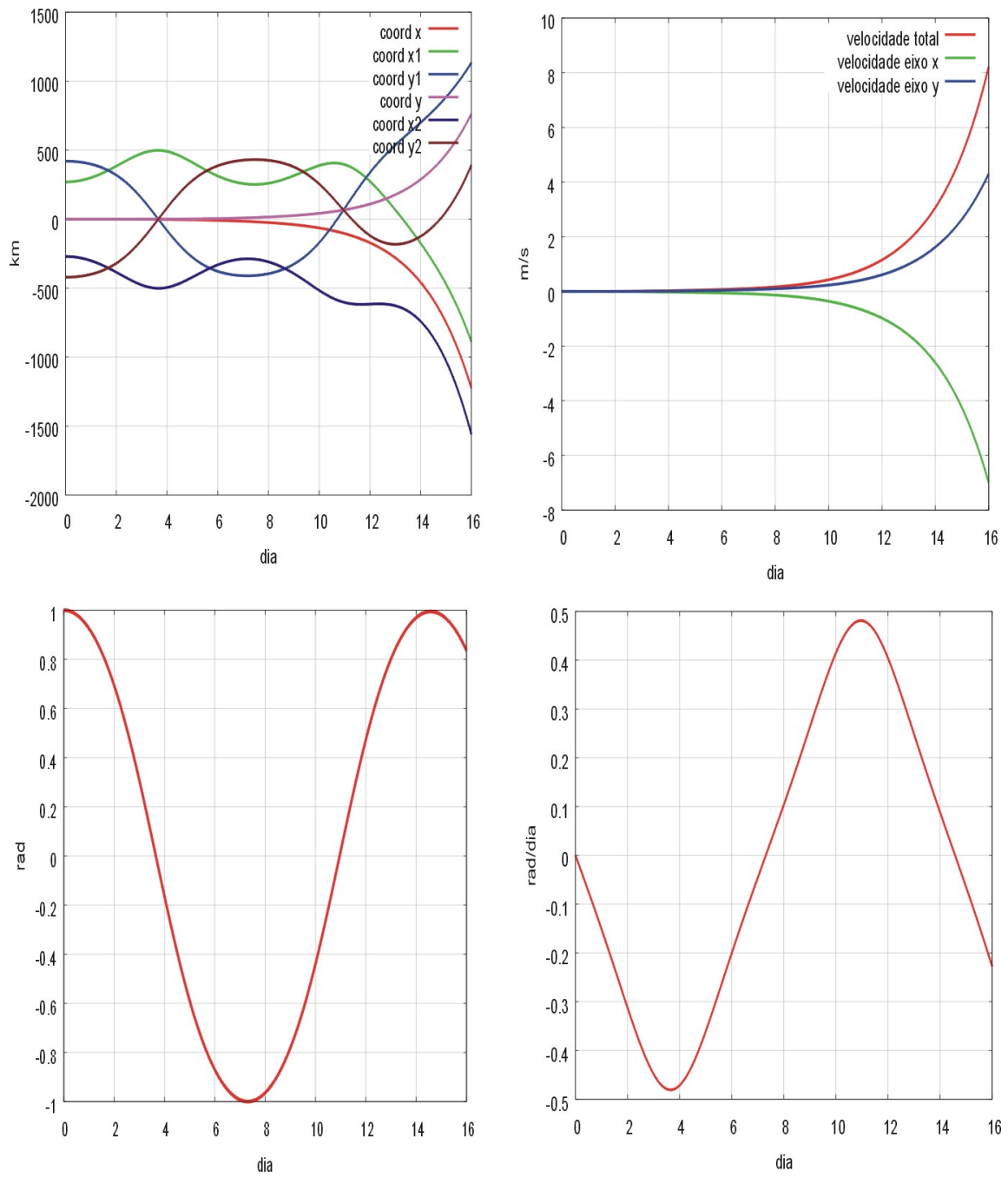


Figura 3.15: Evolução do SVF inicialmente com $\theta_0 = 1$ e $\hat{x}_0 = 0$ (Terra-Lua)

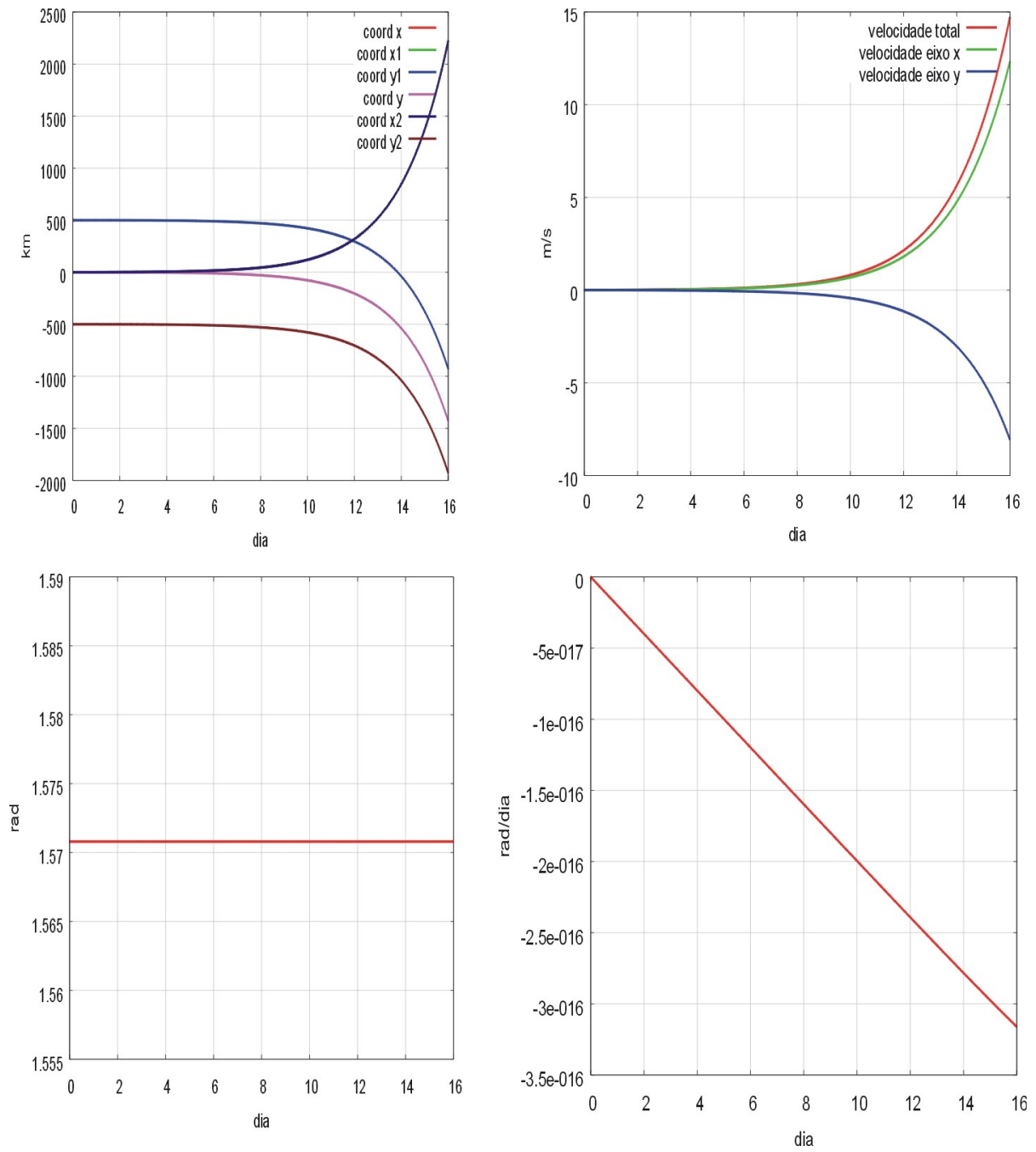


Figura 3.16: Evolução do SVF inicialmente com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\hat{x}_0 = 0$ (Terra-Lua)

Aqui cabe ressaltar a diferença existente para $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Usamos o mesmo satélite, ou seja, comprimento $l = 1000$ km e razão de massas $1 : 1$, porém com uma velocidade rotacional inicial $\dot{\theta}_0 = 0.001 \text{ dia}^{-1}$. O tempo de integração foi aumentado para 30 dias.

Como podemos observar nos gráficos da figura 3.17, quando iniciamos em $\theta_0 = 0$ o SVF evolui de forma a oscilar em torno desta situação de equilíbrio para a variável $\dot{\theta}$ e consequentemente para a variável θ . Porém, iniciando em $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ observamos um comportamento instável para θ e $\dot{\theta}$. Este fato ocorre pois ao considerarmos $\dot{\theta}_0 = 0.001 \text{ dia}^{-1}$ estamos partindo de uma condição inicial fora do equilíbrio, ainda que próxima, tanto para $\theta_0 = 0$ como para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Desta forma podemos observar com mais clareza que o comportamento instável do equilíbrio em $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, que aparece em uma ordem de grandeza muito pequena (10^{-16}) no quarto gráfico da figura 3.16, de fato caracteriza uma instabilidade, ao contrário do que ocorre em $\theta_0 = 0$.

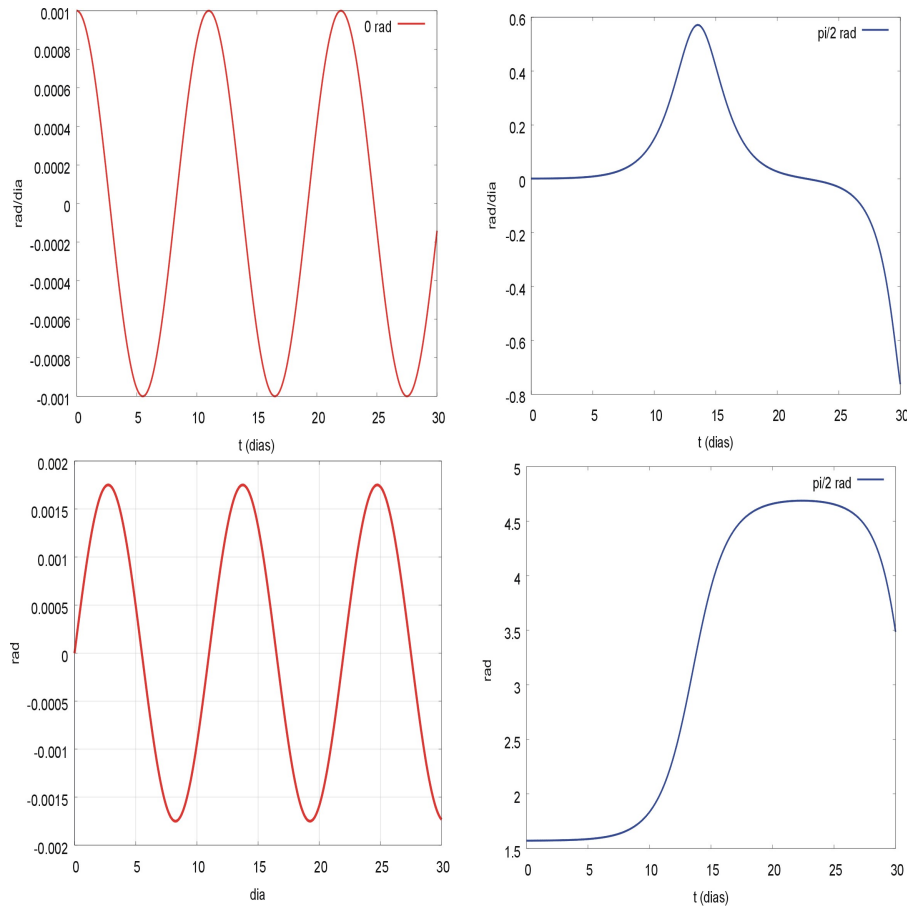


Figura 3.17: Comparação do SVF para θ e $\dot{\theta}$ inicialmente com $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Terra-Lua)

Ao analisarmos o movimento em que $\theta_0 = 1$ verificamos que inicialmente o satélite gira com $\dot{\theta} < 0$ e isto faz com que sua inclinação se torne nula ($t = 3.6545$ dia, $x = -1.2728$ km e $\dot{\theta} = -0.4805$ dia⁻¹). Podemos observar nos gráficos da figura 3.15 que $\dot{\theta}$ tem um comportamento periódico, indicando um comportamento mais estável para a rotação do que para a translação, como veremos no capítulo 4.

3. variação das massas reduzidas dos satélites

Os gráficos da figura 3.18 mostram a evolução dinâmica das coordenadas do centro de massa, além da inclinação e da taxa temporal da inclinação do cabo que une os satélites, para as razões de massas 1 : 1 e 1 : 9. Em ambos os casos foi fixado um comprimento de 1000 km com a condição inicial 11 da tabela 3.5, ou seja, fora da condição inicial de equilíbrio. O tempo de integração foi fixado em 8 dias.

Podemos observar que para a razão de massas 1 : 1 as coordenadas do centro de massa dos satélites evoluem mais rapidamente no tempo que para a razão de massas 1 : 9. Isto ocorre como consequência do fato que quando a massa de um dos satélites torna-se maior que a do outro, o ponto de equilíbrio do sistema tende ao L_2 do PR3C, conforme visto na página 54. Sendo assim, ao considerarmos o L_2 como posição inicial ($\hat{x}_0 = 0$), no caso da razão de massas 1 : 9 ($x_{eq} = 1.067$ km) estamos mais próximos do ponto de equilíbrio, o que fornece maior estabilidade ao sistema, do que no caso em que a razão de massas é 1 : 1 ($x_{eq} = 2.758$ km).

O comportamento da variável θ é dado pela equação 2.33, sendo então pouco dependente das massas reduzidas dos satélites. Isto pode ser visto examinando-se as equações 2.29 onde verificamos que as massas reduzidas β_1 e β_2 estão relacionadas a termos de ordem superiores das razões $\frac{l}{R_1}$ e $\frac{l}{R_2}$, que por sua vez são pequenos. Este resultado pode ser comprovado ao constataremos nos gráficos da figura 3.18 que a rotação do satélite é pouco afetada pela alteração da razão de massas, ou seja, a inclinação e a sua taxa de variação temporal evoluem de forma semelhante, mesmo quando um dos satélites torna-se mais massivo que o outro. Podemos verificar que para estas simulações o SVF possui um movimento de libração.

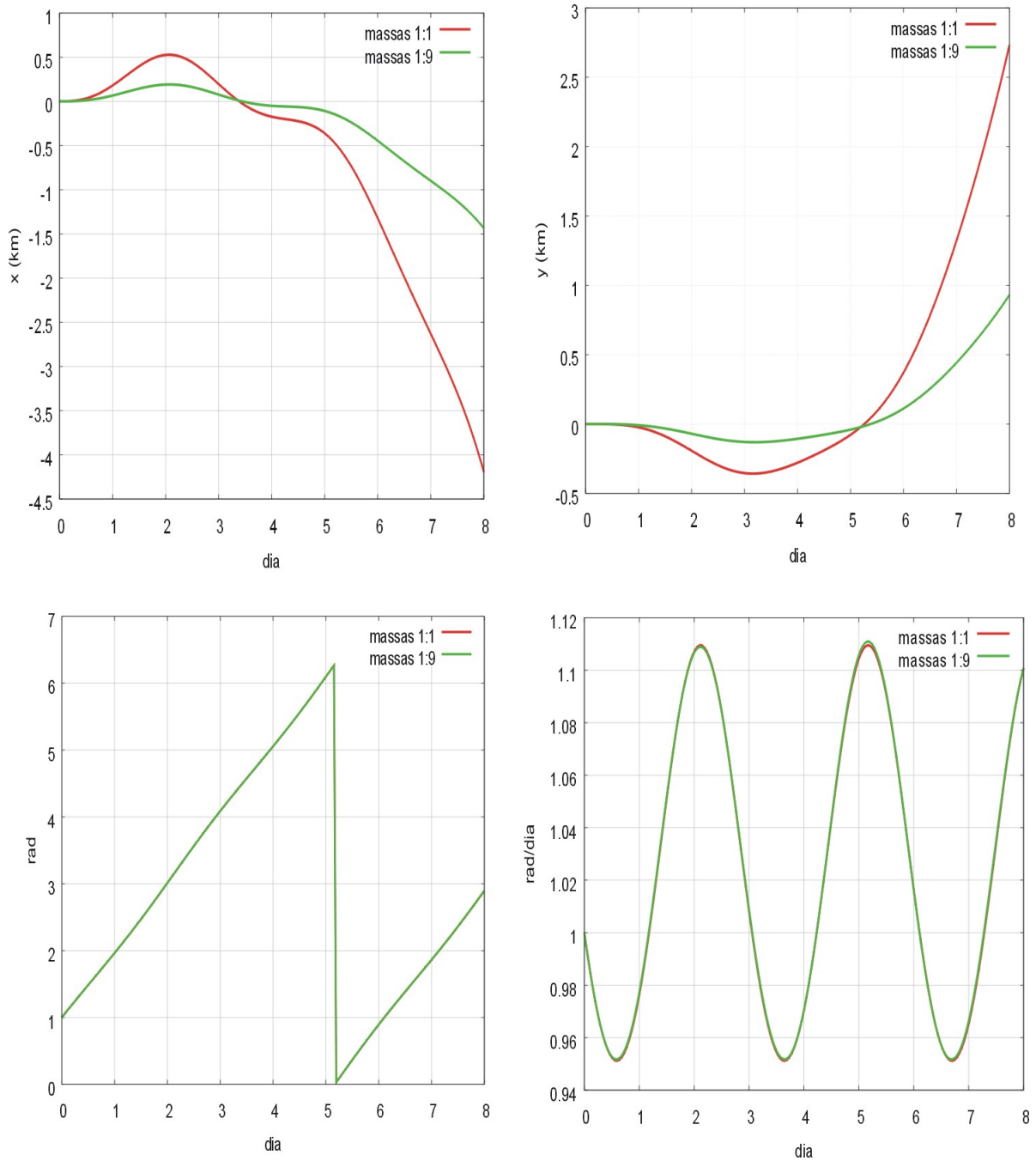


Figura 3.18: Evolução do SVF para razões de massas 1 : 1 e 1 : 9 com $\theta_0 = 1$ (Terra-Lua)

4. variação do comprimento do cabo

Usando a condição 8 da tabela 3.5, fixamos a razão de massas em 1 : 1 e variamos o comprimento do cabo que une os satélites. Os gráficos da figura 3.19 mostram a evolução dinâmica obtida para um tempo de integração de 8 dias.

A análise dos resultados mostra claramente que a posição do centro de massa varia de forma bastante sensível ao valor do comprimento do cabo. O fato dessas

variáveis serem muito sensíveis às variações do comprimento do cabo é devido ao fato do L_2 do Terra-Lua estar cada vez mais distante do ponto de equilíbrio do SVF, à medida que o comprimento aumenta. Lembramos que $\hat{x}_0 = \hat{x}_{L_2} = 0$ para estas simulações. Para os comprimentos dos cabos que foram simulados temos:

- para 500 km $\longrightarrow (x_{eq} = 0.689 \text{ km})$
- para 800 km $\longrightarrow (x_{eq} = 1.765 \text{ km})$
- para 1000 km $\longrightarrow (x_{eq} = 2.758 \text{ km})$

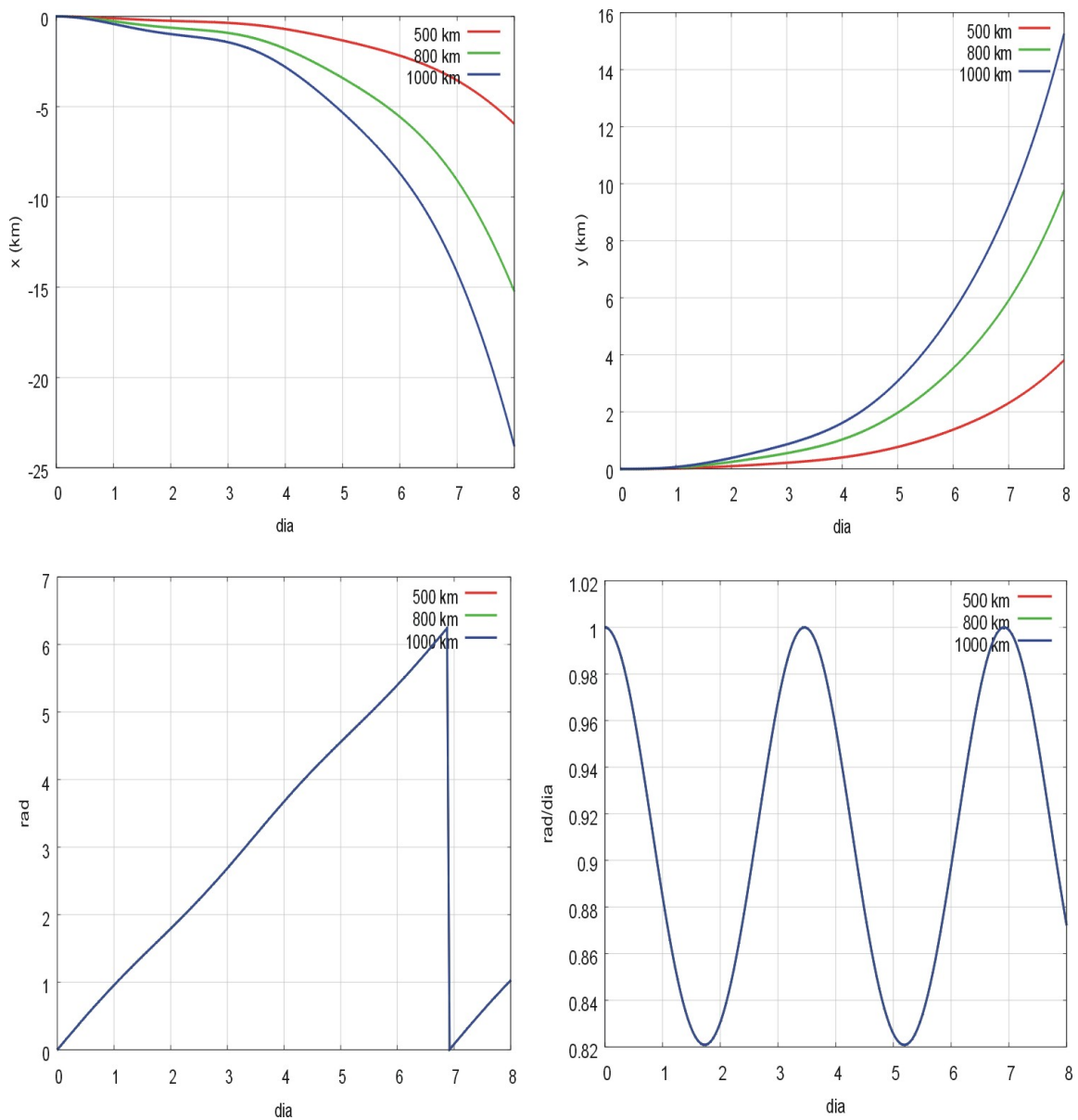


Figura 3.19: Evolução do SVF para variação do comprimento do cabo com $\theta_0 = 0$ (Terra-Lua)

Portanto, o SVF de menor comprimento está inicialmente mais próximo de seu ponto de equilíbrio, fazendo com que evolua de forma mais lenta que os outros dois.

A exemplo do que ocorreu com o efeito das massas reduzidas, a alteração do comprimento do cabo pouco influencia na rotação do satélite. A razão para tal resultado é o fato de que um aumento no comprimento, ainda que relativamente grande porém dentro dos limites do modelo ($l \ll D$), torna a variação das razões $\frac{l}{R_1}$ e $\frac{l}{R_2}$ praticamente nula. Sendo assim, a evolução da rotação e sua velocidade pouco variam com o comprimento do cabo.

5. variação da taxa temporal da inclinação inicial

Os gráficos da figura 3.20 foram obtidos com as condições 10, 11 e 12 da tabela 3.5, para satélites com razão de massas 1 : 1, comprimento do cabo de 3000 km. e tempo de integração de 8 dias.

Como podemos observar, para as três simulações realizadas a velocidade rotacional do SVF torna-se limitada e oscilatória. A principal diferença está no valor da frequência, de tal modo que os satélites que inicialmente giram mais rápidos possuem frequências maiores.

Notemos ainda que para as simulações aqui expostas o valor médio da velocidade rotacional é próximo do seu valor inicial, como mostrado na tabela 3.6. No caso de $\dot{\theta}_0 = 0$ o valor médio foi obtido para um tempo de integração de 16 dias.

$\dot{\theta}_0 \text{ (dia}^{-1}\text{)}$	$\bar{\dot{\theta}} \text{ (dia}^{-1}\text{)}$
0	0.00187741357
1	1.03037706965
100	99.999673075

Tabela 3.6: Valor médio de $\dot{\theta}$ ($\dot{\theta}_0 = 0 \text{ dia}^{-1}$, $\dot{\theta}_0 = 1 \text{ dia}^{-1}$ e $\dot{\theta}_0 = 100 \text{ dia}^{-1}$)

O primeiro gráfico da figura 3.20 sugere que satélites com alto valor inicial para a velocidade rotacional poderiam evoluir de forma semelhante a satélites inicialmente em repouso, porém este resultado não se mantém para outras simulações, como pode ser visto no gráfico da figura 3.21.

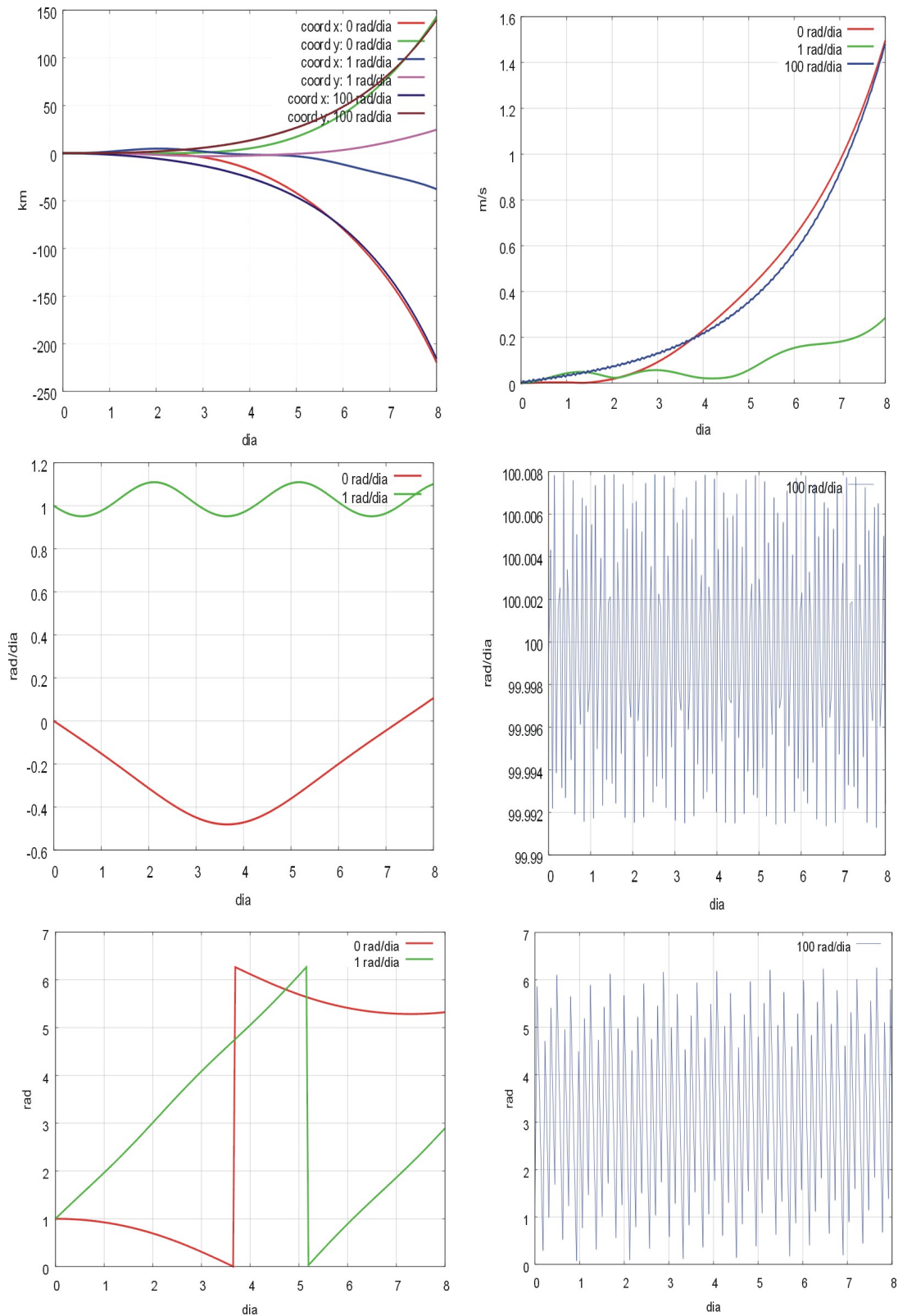


Figura 3.20: Evolução do SVF para variação da velocidade rotacional inicial com $\theta_0 = 1$ (Terra-Lua)

Para estas simulações utilizamos um SVF com comprimento $l = 3000$ km, inclinação inicial $\theta_0 = 1$, localizado inicialmente no L_2 do PR3C e um tempo de integração de 8 dias, a fim de mantermos as mesmas condições anteriormente usadas, e acrescentamos uma quarta velocidade inicial de rotação $\dot{\theta}_0 = 200 \text{ dia}^{-1}$. Como podemos visualizar pelas trajetórias do gráfico da figura 3.21, o SVF com $\dot{\theta}_0 = 200 \text{ dia}^{-1}$ não evolui de forma semelhante ao SVF inicialmente em repouso, tal como ocorreu no caso em que $\dot{\theta}_0 = 100 \text{ dia}^{-1}$.

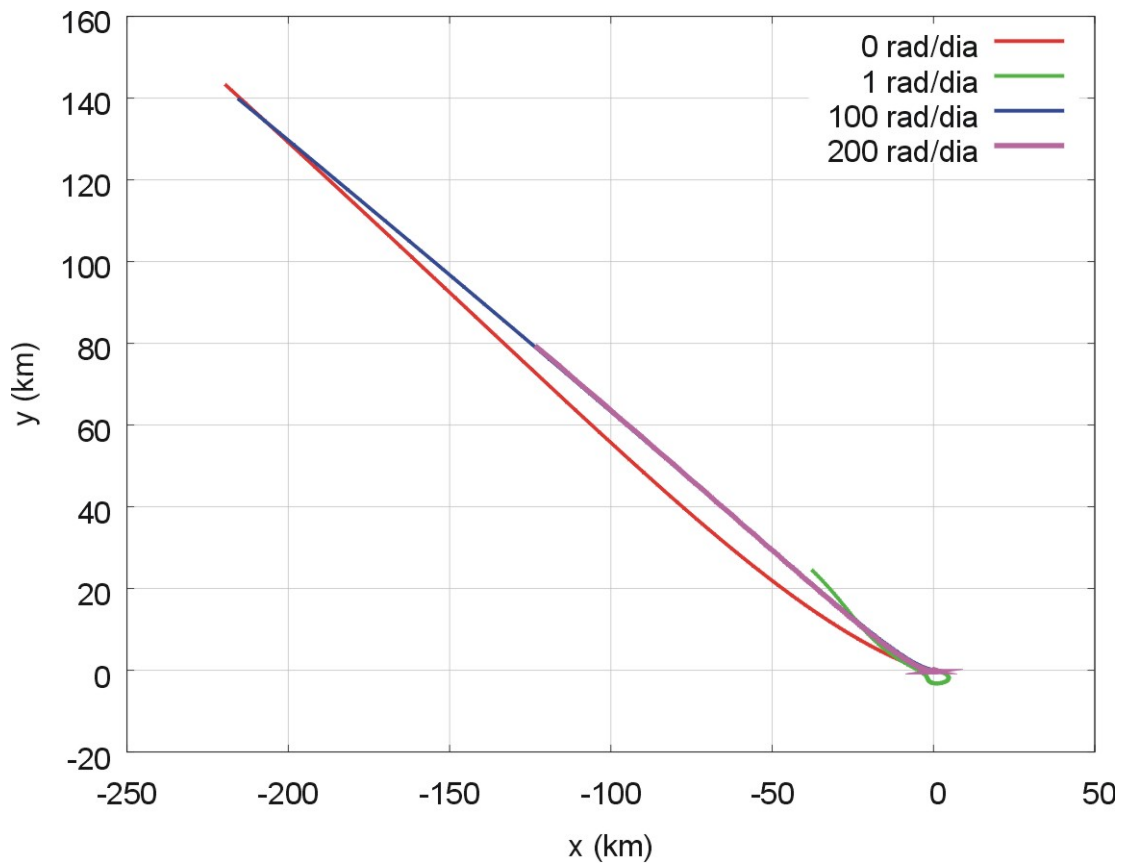


Figura 3.21: Trajetórias do SVF para a variação da velocidade rotacional inicial com $\theta_0 = 1$ (Terra-Lua)

Podemos ainda observar que em todas as simulações realizadas a velocidade rotacional é finita durante todo o tempo de integração.

3.2.2 Sistema Sol-Terra

A tabela 3.7, extraída de Peláez [15], reproduz os valores usados na aplicação do modelo na vizinhança do L_2 do sistema Sol-Terra.

massa do Sol	$M_1 = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
massa da Terra	$M_2 = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
distância Sol-Terra	$D = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Tabela 3.7: Parâmetros do sistema Sol-Terra

Os parâmetros fixos foram calculados, a exemplo do sistema Terra-Lua, e estão listados na tabela 3.8.

A principal diferença entre os dois sistemas está no fato de ser necessário um comprimento de cabo bem superior no sistema Sol-Terra em relação ao aplicado no Terra-Lua. Quando usamos comprimentos de cabo relativamente próximos, devido as características dos corpos primários, o sistema Sol-Terra reduz o comportamento dos satélites vinculados ao PR3C, como explicado anteriormente.

movimento médio	$n = 1.991 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$
massa reduzida	$\mu = 3.004 \cdot 10^{-6}$
distância Sol-O	$D_1 = 4.494 \cdot 10^5 \text{ m}$
distância Terra-O	$D_2 = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
distância L_2 -O	$x_0 = 1.511 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Tabela 3.8: Parâmetros obtidos do sistema Sol-Terra

Os comprimentos usados nas simulações no sistema Sol-Terra foram sempre superiores ou iguais a 5000 km. A tabela 3.9 informa algumas coordenadas de pontos de equilíbrio para comprimentos maiores e sua representação gráfica está na figura 3.4.

Comparamos a evolução de satélites vinculados fixos para os primários Terra-Lua e Sol-Terra. Para isso tomamos a coordenada x do centro de massa do SVF em relação ao L_2 de cada um dos sistemas. Assim, os gráficos da figura 3.22 permitem a comparação entre os afastamentos experimentados em relação ao L_2 de cada um dos primários, para um SVF com comprimento de 1000 km no Terra-Lua e um outro SVF com comprimento de 5000 km para o Sol-Terra.

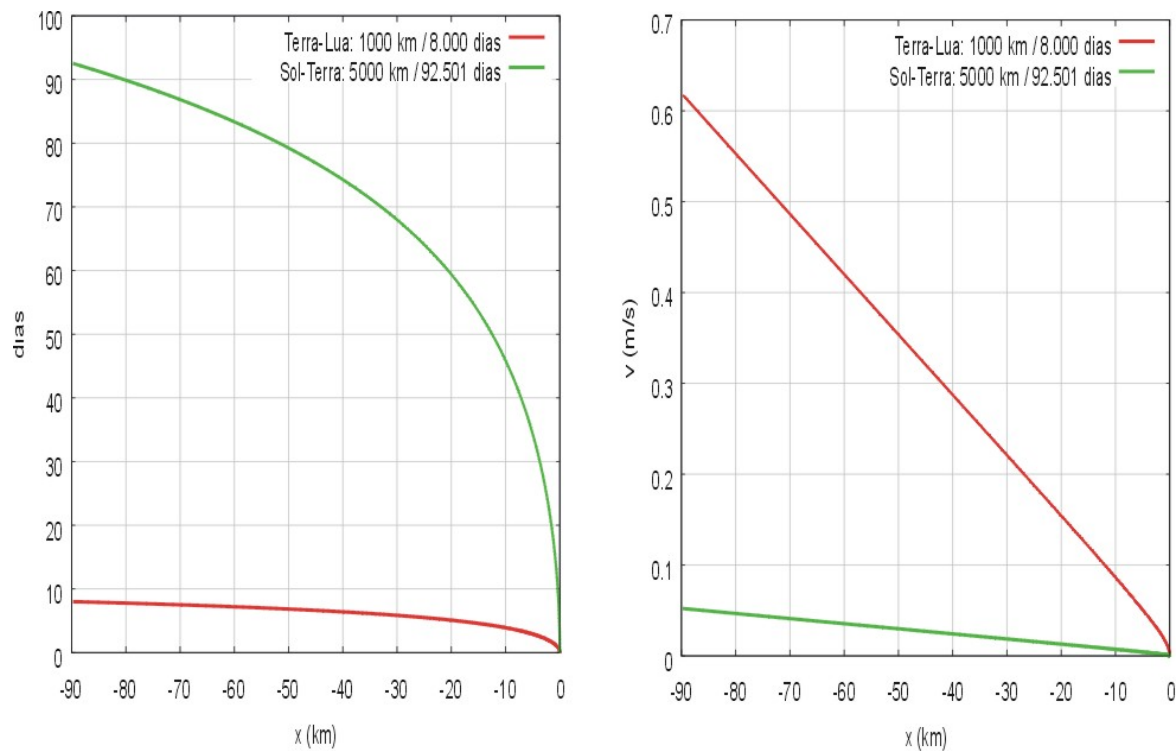


Figura 3.22: Afastamento em relação ao L_2 para comprimentos diferentes de SVF no Terra-Lua e Sol-Terra

comprimento (km)	Sol-Terra (km)	
	0	$\frac{\pi}{2}$
5000	2.793	-1.396
5500	3.379	-1.689
6000	4.022	-2.011
6500	4.721	-2.360
7000	5.474	-2.737
7500	6.284	-3.142
8000	7.150	-3.575
8500	8.072	-4.036
9000	9.049	-4.525
9500	10.082	-5.041
10000	11.172	-5.586

Tabela 3.9: Pontos de equilíbrio para $\beta_1 = \beta_2$ (Sol-Terra)

Nessas simulações foram utilizadas a condição 7 da tabela 3.5. Observamos no primeiro gráfico da figura 3.22 que para os afastamentos serem da mesma ordem (~ 90 km) em relação ao ponto inicial ($x_0 = x_{L_2}$), mesmo com um comprimento 5 vezes maior é necessário um tempo de integração de 92.501 dias no caso do sistema Sol-Terra e apenas 8 dias no Terra-Lua. O segundo gráfico da figura 3.22 nos mostra que a velocidade de afastamento do satélite ainda assim evolui bem mais rapidamente no sistema Terra-Lua.

A diferença aumenta ainda mais quando usamos o mesmo comprimento $l = 5000$ km em ambos os casos, pois são necessários 167.826 dias de integração no sistema Sol-Terra a fim de produzir o mesmo afastamento que o observado no Terra-Lua em apenas 8 dias, conforme visto nos gráficos da figura 3.23.

Notemos que devido as características do sistema Sol-Terra, mesmo para comprimentos de cabos grandes, o ponto de equilíbrio do SVF para um certo comprimento está relativamente muito mais próximo do L_2 do PR3C do que está dos corpos primários, quando fazemos a mesma comparação com o Terra-Lua. Estes resultados reforçam o fato de que o uso de um SVF no sistema Sol-Terra deve utilizar comprimentos de cabos bem maiores do que se fosse usado no Terra-Lua, pois os efeitos no primeiro sistema são bem menos sensíveis que no segundo.

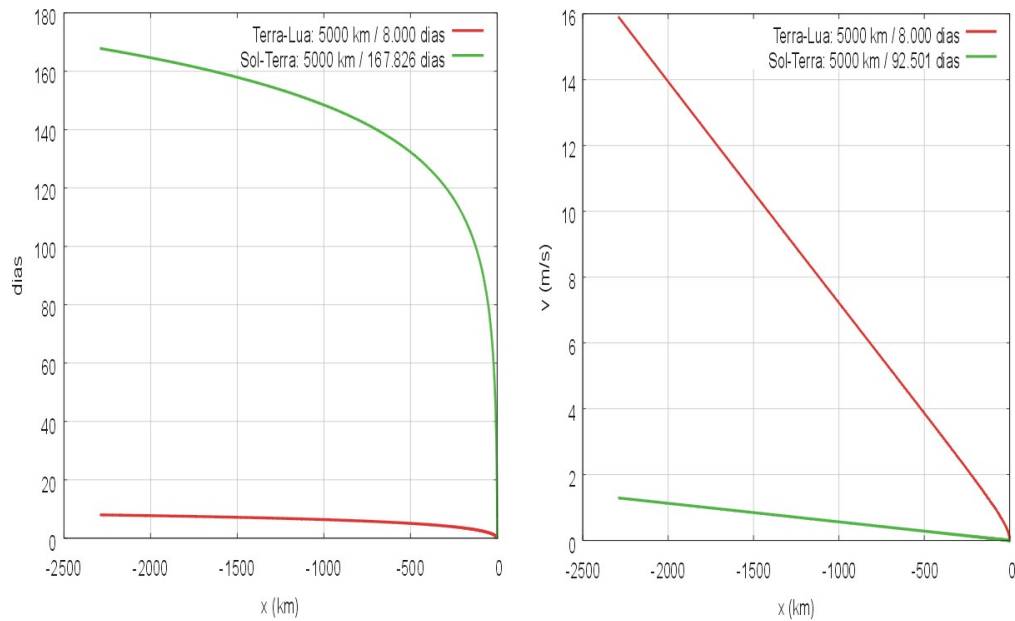


Figura 3.23: Afastamento em relação ao L_2 para comprimentos iguais de SVF no Terra-Lua e Sol-Terra

Quando usamos as condições 1 e 4 da tabela 3.5 estamos colocando o satélite em seu ponto de equilíbrio e o sistema permanece em repouso, a exemplo do que mostramos nas simulações para o sistema Terra-Lua. Os gráficos da figura 3.24 nos mostram esses resultados para um SVF com comprimento de 7000 km, razão de massas 1 : 1 e $\theta_0 = 0$, que fornece $x_{eq} = 5.474$ km. O tempo de integração foi de 8 dias, mas a estabilidade se mantém para períodos superiores a 1000 dias, a exemplo do observado no sistema Terra-Lua.

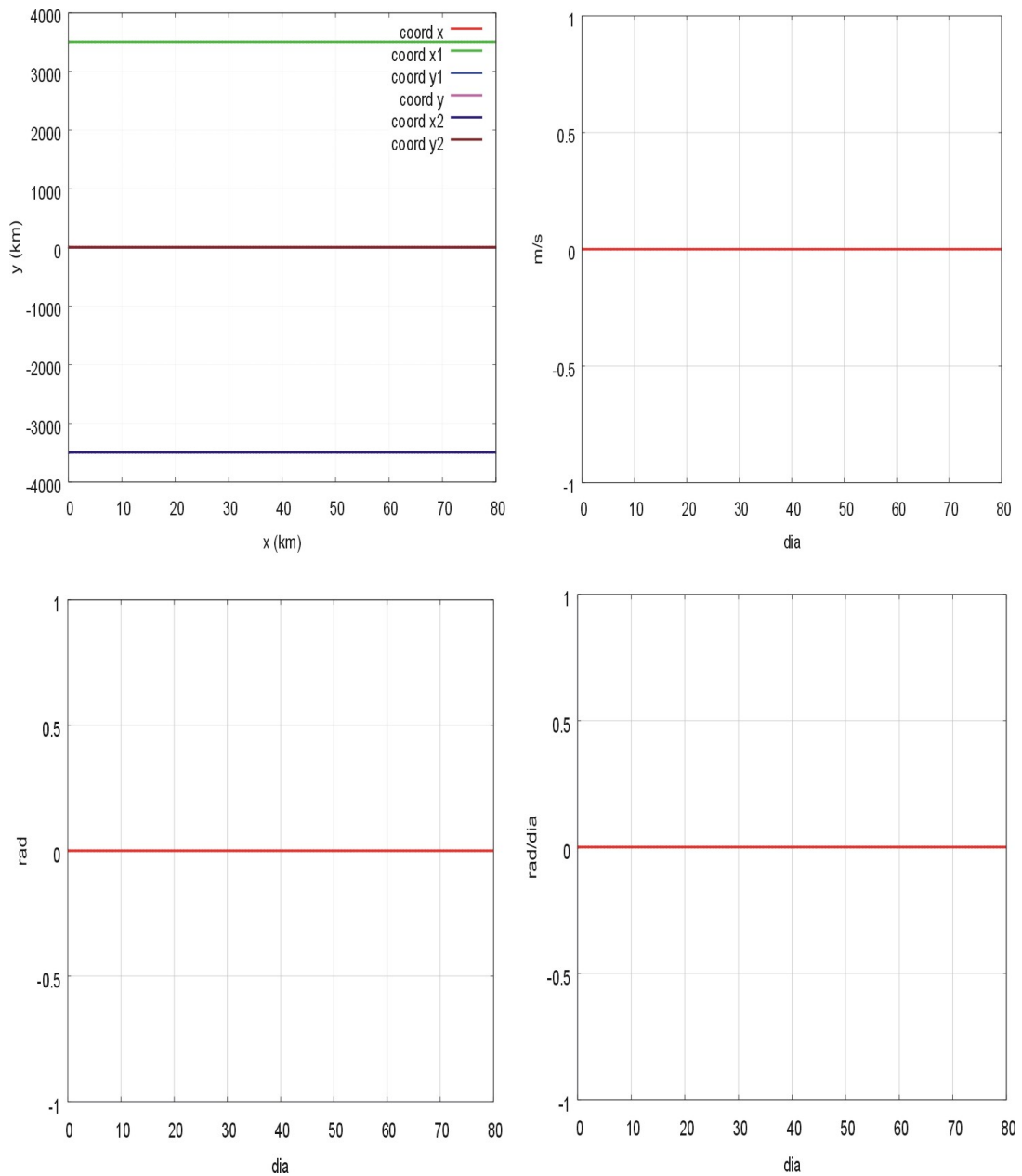


Figura 3.24: Evolução do SVF inicialmente com $\hat{x}_0 = \hat{x}_{eq}$ e $\theta_0 = 0$ (Sol-Terra)

Quando o SVF é inicialmente colocado no ponto de equilíbrio correspondente a $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ observamos também um comportamento semelhante ao encontrado no Terra-Lua, ou seja, devido a instabilidade deste ponto de equilíbrio o sistema tende a sair da situação de equilíbrio, porém com uma velocidade rotacional muito próxima de zero. A fim de obtermos a mesma ordem de grandeza (10^{-16}) para a velocidade rotacional encontrada em 16 dias no sistema Terra-Lua, tivemos que integrar o sistema Sol-Terra com um tempo de 1200 dias. Os gráficos da figura 3.25 ilustram este comportamento, e nos informam também que, ao contrário do Terra-Lua, no Sol-Terra a velocidade translacional permanece estável mesmo para este tempo de integração mais elevado. Notemos, porém, que se continuarmos a aumentar o tempo de integração, o sistema apresentará variações consideráveis para as coordenadas espaciais e também para a velocidade translacional.

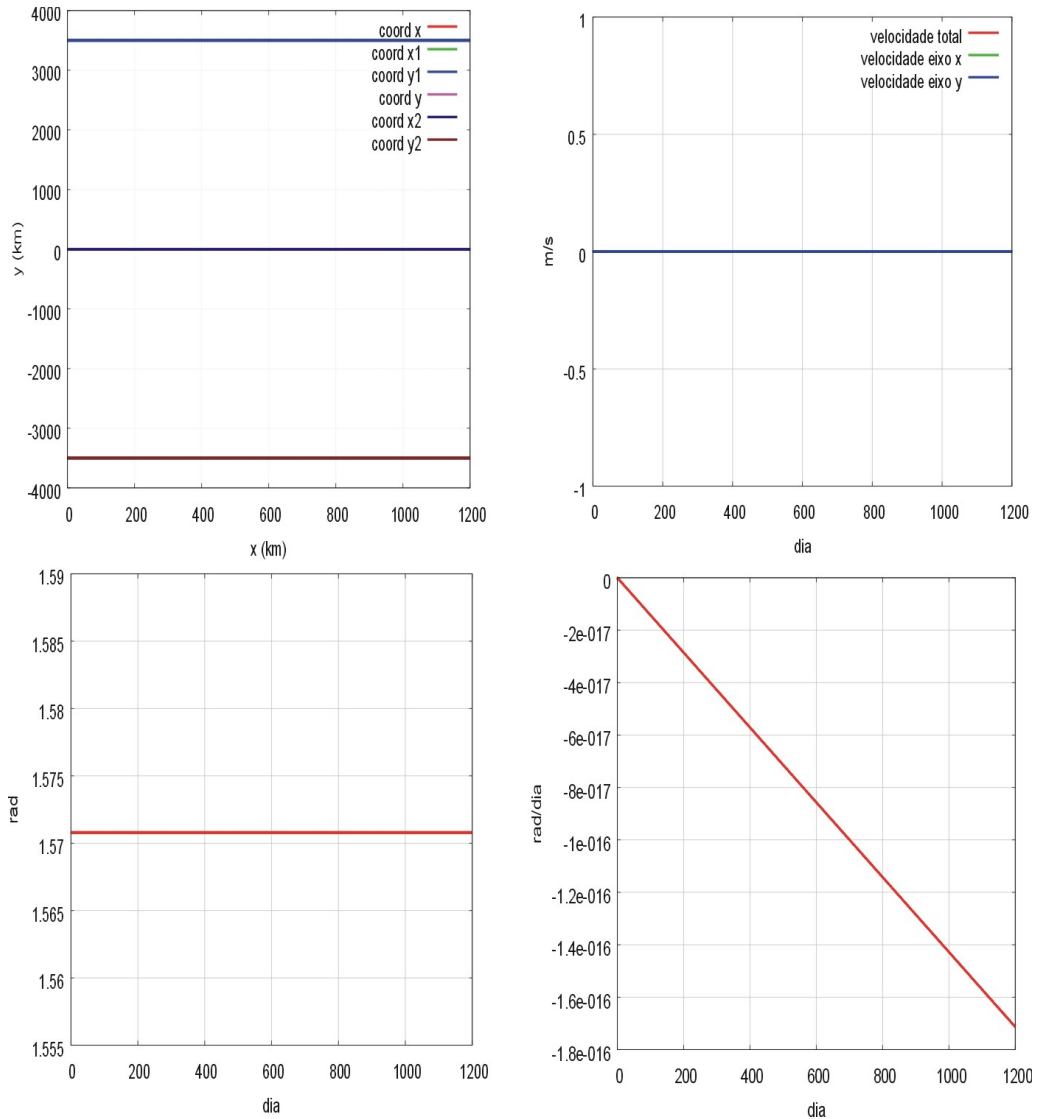


Figura 3.25: Evolução do SVF inicialmente com $\hat{x}_0 = \hat{x}_{eq}$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Sol-Terra)

Os gráficos da figura 3.26 mostram a evolução para este mesmo satélite, ou seja comprimento $l = 7000$ km e razão de massas $1 : 1$, colocado inicialmente no L_2 do PR3C, partindo da condição 7 da tabela 3.5, para um tempo de integração de 8 dias.

Ressaltamos as diferenças nos gráficos das figuras 3.24 e 3.26 em função de não ser o L_2 do PR3C um ponto de equilíbrio para o SVF. Desta forma ocorre uma evolução dinâmica no SVF, ainda que de forma mais lenta que no caso do mesmo ser aplicado no sistema Terra-Lua. Observamos que o SVF, a exemplo do que ocorre no Terra-Lua, evolui de forma a manter constantes e nulas a inclinação e sua taxa de variação temporal. Isto corre devido a termos $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ e ao fato dos autovalores do sistema linearizado para estas variáveis de estado serem imaginários puros, conforme veremos no capítulo 4.

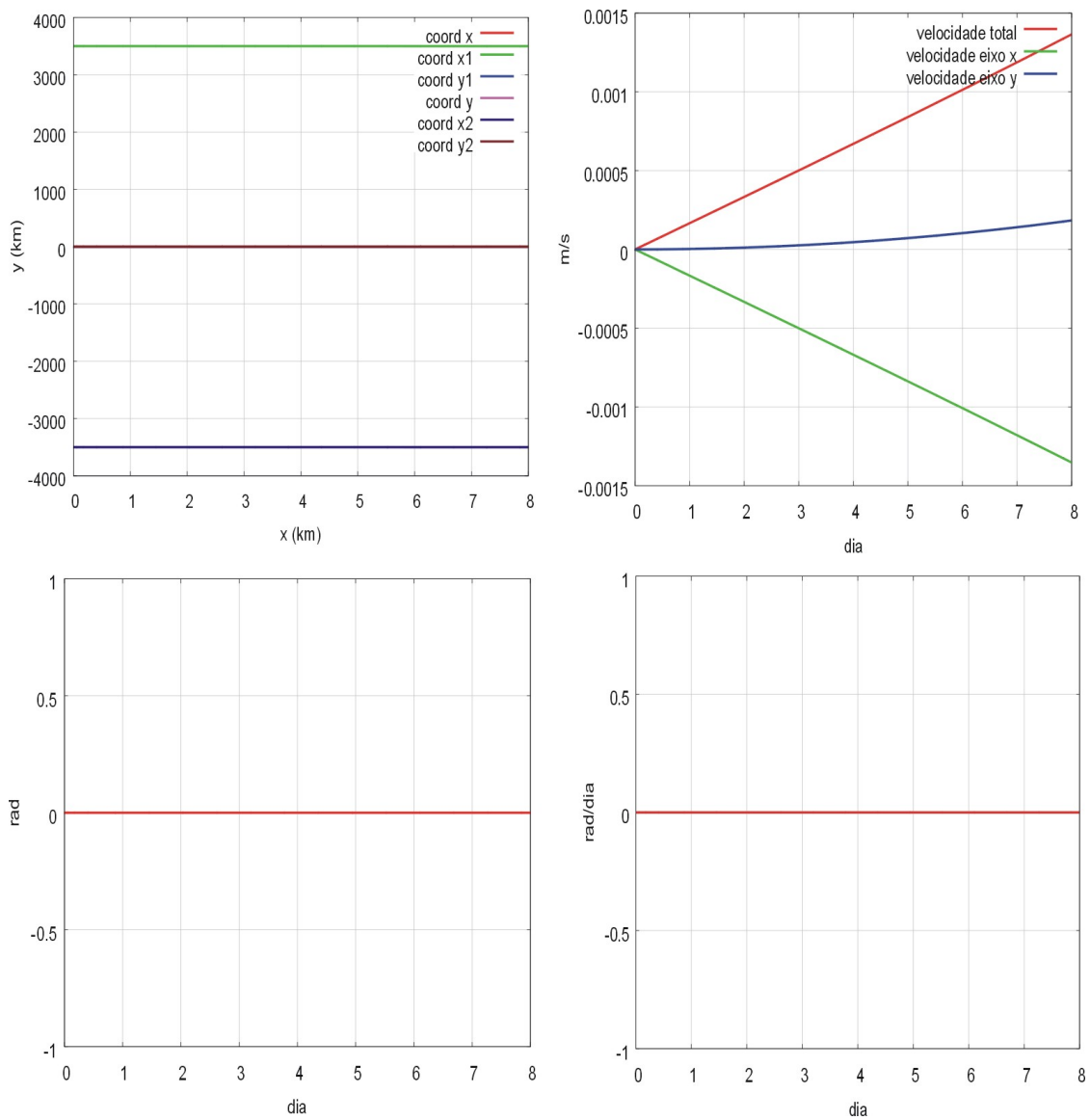


Figura 3.26: Evolução do SVF inicialmente com $\hat{x}_0 = \hat{x}_{L_2}$, $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Sol-Terra)

Observamos que todas as variações realizadas para a análise do comportamento do SVF no sistema Terra-Lua continuam válidas quando aplicadas no sistema Sol-Terra, mantidas as diferenças de escala devido às características de ambos os sistemas.

Capítulo 4

Órbitas Periódicas de Lyapunov

4.1 Introdução

Calculamos algumas órbitas não periódicas na vizinhança do equilíbrio para os satélites vinculados fixos e analisamos como estas órbitas são afetadas pela alteração dos parâmetros que descrevem o modelo. Vamos agora examinar as equações linearizadas nas vizinhanças do equilíbrio para estudar a estabilidade linear. Na seção 4.2 deste capítulo obtemos condições iniciais que fornecem órbitas periódicas lineares - $OPL(s)$. O principal objetivo de se calcular estas condições iniciais está no fato de podermos usá-las para a obtenção das órbitas periódicas não lineares - $OPN(s)$ - na vizinhança dos pontos de equilíbrio, ou seja, as *órbitas periódicas de Lyapunov*, como descrito na seção 4.3. Ainda através da linearização do sistema de equações diferenciais que descreve o movimento, verificamos a estabilidade dos pontos de equilíbrio.

O sistema de 3(três) EDO(s) de segunda ordem formado pelas equações de movimento 2.31, 2.32 e 2.33 pode ser transformado em um sistema com 6(seis) EDO(s) de primeira ordem mediante uma mudança de variável, conforme o sistema 4.1. Lembramos que estamos considerando um SVF ($\dot{l} = 0$) e como tal o primeiro termo da equação 2.33 é nulo.

$$\left\{ \begin{array}{l} dx/d\tau = x' \\ dx'/d\tau = 2y' - \left(\frac{1-\mu}{R_1^3} \Lambda_1 + \frac{\mu}{R_2^3} \Lambda_2 - 1 \right) (X_0 + x) - \mu(1-\mu) \left(\frac{\Lambda_1}{R_1^3} - \frac{\Lambda_2}{R_2^3} \right) \\ dy/d\tau = y' \\ dx'/d\tau = -2x' - \left(\frac{1-\mu}{R_1^3} \Lambda_1 + \frac{\mu}{R_2^3} \Lambda_2 - 1 \right) y \\ d\theta/d\tau = \theta' \\ d\theta'/d\tau = - \frac{1-\mu}{R_1^3} \Omega_1 - \frac{\mu}{R_2^3} \Omega_2 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

A fim de simplificar a notação, passaremos a descrever as variáveis adimensionais sem o símbolo ($\wedge$), os coeficientes descritos pelas equações 2.29 sem os sobrescritos (l, θ) e as derivadas com o símbolo ($\dot{\cdot}$) em vez de ($'$). Sendo assim, o sistema de equações 4.1 representa as variáveis em suas formas adimensionais definidas pelas equações 2.30 e em notação matricial será representado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ (\dot{x})' \\ \dot{y} \\ (\dot{y})' \\ \dot{\theta} \\ (\dot{\theta})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) \\ F_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) \\ F_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) \\ F_3(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) \\ F_4(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) \\ F_5(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{x}$ representa um vetor com 6 (seis) componentes tais que $\mathbf{x} = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})^T$ e $\mathbf{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ representa o campo vetorial. Este sistema é obviamente não-linear e autônomo se o comprimento l não variar no tempo.

Faremos o estudo de sua linearização nas proximidades dos pontos de equilíbrio próximos do L_2 do PR3C, estudando a estabilidade nessa vizinhança.

4.2 Estabilidade linear

A obtenção de órbitas periódicas lineares é feita através da linearização do sistema 4.2. Vamos considerar que $\mathbf{x}^*$ seja um vetor que represente um ponto de equilíbrio do espaço de fase, onde sua existência e cálculo foram determinados na seção 2.6. A figura 4.1 nos permite visualizar os possíveis pontos de equilíbrio e suas vizinhanças onde a

linearização do sistema é realizada. Como visto no capítulo anterior, o ponto de equilíbrio para $\theta = \pi$ pode ser obtido através da simples permutação das massas reduzidas (β_1, β_2) , tomando $\theta = 0$. Sendo assim, descreveremos a linearização apenas nas regiões vizinhas aos pontos de equilíbrio onde $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

As OPL(s), quando existem, devem então ser obtidas para essas regiões e para isso usamos uma expansão de Taylor para o campo vetorial $\mathbf{F}$ na vizinhança de $\mathbf{x}^*$, de tal forma que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \left. \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\mathbf{F}}{d\mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^2 + \dots \quad (4.3)$$

Como $\mathbf{x}^*$ é um ponto de equilíbrio, temos que $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$. Se da expansão desprezarmos os termos de segunda ordem em diante, o campo vetorial na vizinhança do ponto de equilíbrio será descrito, em primeira aproximação, por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (4.4)$$

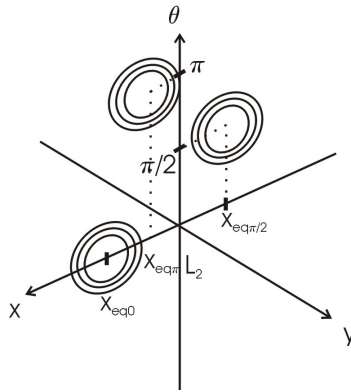


Figura 4.1: Regiões vizinhas aos pontos de equilíbrio

Realizando uma mudança de variável onde $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, podemos observar que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}\big|_0 \mathbf{x} \quad (4.5)$$

onde $D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}\big|_0 = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]$ representa a matriz jacobiana no ponto de equilíbrio.

Desta forma o sistema 4.2 em sua representação linearizada e transladado para um dos pontos de equilíbrio torna-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = (D_{\mathbf{x}}\mathbf{F})\mathbf{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x} & \frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_0}{\partial y} & \frac{\partial F_0}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_0}{\partial \theta} & \frac{\partial F_0}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x} & \frac{\partial F_4}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_4}{\partial y} & \frac{\partial F_4}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_4}{\partial \theta} & \frac{\partial F_4}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial F_5}{\partial x} & \frac{\partial F_5}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_5}{\partial y} & \frac{\partial F_5}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_5}{\partial \theta} & \frac{\partial F_5}{\partial \dot{\theta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

É importante salientar que a matriz $D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$ é calculada no ponto de equilíbrio do sistema, e que este por sua vez depende do comprimento e da inclinação do cabo que une os satélites vinculados, bem como de sua razão de massas.

Cada componente da matriz jacobiana deve ser analiticamente obtido a partir das equações do sistema 4.1. Os itens a seguir descrevem os resultados obtidos para as derivadas parciais que permitem obter os elementos $(D_{\mathbf{x}}\mathbf{F})_{i,j}$, com $i, j \in \{1, \dots, 6\}$.

Coefficientes básicos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (3 \cos^2 \theta - 1) \\ \alpha_2 &= 6(\beta_2 - \beta_1)(5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta \\ \alpha_3 &= \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2)(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \\ \alpha_4 &= 9 \cos \theta \\ \alpha_5 &= 6(\beta_2 - \beta_1)(5 \cos^2 \theta - 1) \\ \alpha_6 &= \frac{25}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2)(7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ \omega_1 &= \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_1)(1 - 5 \cos^2 \theta) \\ \omega_2 &= 5(1 - 3\beta_1\beta_2)(3 - 7 \cos^2 \theta) \cos \theta \\ \omega_3 &= 3 \cos 2\theta \\ \omega_4 &= -\frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_1)(11 - 15 \cos^2 \theta) \cos \theta \\ \omega_5 &= -\frac{5}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2)(-28 \cos^4 \theta + 27 \cos^2 \theta - 3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Derivadas parciais dos vetores posição:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial x} &= \frac{X_0 + x + \mu}{R_1} & \frac{\partial R_2}{\partial x} &= \frac{X_0 + x + \mu - 1}{R_2} \\ \frac{\partial R_1}{\partial y} &= \frac{y}{R_1} & \frac{\partial R_2}{\partial y} &= \frac{y}{R_2} \\ \frac{\partial R_1}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial R_2}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Derivadas parciais dos coeficientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} &= \frac{-\beta_1 \beta_2 l^2}{R_1^3} \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{l}{R_1} \right) + \alpha_3 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} &= \frac{-\beta_1 \beta_2 l^2}{R_1^3} \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{l}{R_1} \right) + \alpha_3 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial \Lambda_2}{\partial x} &= \frac{-\beta_1 \beta_2 l^2}{R_2^3} \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{l}{R_2} \right) + \alpha_3 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \Lambda_2}{\partial y} &= \frac{-\beta_1 \beta_2 l^2}{R_2^3} \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{l}{R_2} \right) + \alpha_3 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} \right) \\
\\
\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \theta} &= \frac{-\beta_1 \beta_2 l^2}{R_1^2} \left[\alpha_4 + \alpha_5 \left(\frac{l}{R_1} \right) + \alpha_6 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 \right] \text{sen} \theta \\
\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \theta} &= \frac{-\beta_1 \beta_2 l^2}{R_2^2} \left[\alpha_4 + \alpha_5 \left(\frac{l}{R_2} \right) + \alpha_6 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 \right] \text{sen} \theta \\
\\
\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} &= \frac{l}{R_1^2} \left[\omega_1 + \omega_2 \left(\frac{l}{R_1} \right) \right] \text{sen} \theta \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} &= \frac{l}{R_1^2} \left[\omega_1 + \omega_2 \left(\frac{l}{R_1} \right) \right] \text{sen} \theta \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial \Omega_2}{\partial x} &= \frac{l}{R_2^2} \left[\omega_1 + \omega_2 \left(\frac{l}{R_2} \right) \right] \text{sen} \theta \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial \Omega_2}{\partial y} &= \frac{l}{R_2^2} \left[\omega_1 + \omega_2 \left(\frac{l}{R_2} \right) \right] \text{sen} \theta \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} \right) \\
\\
\frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} &= \omega_3 + \omega_4 \left(\frac{l}{R_1} \right) + \omega_5 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 \\
\frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} &= \omega_3 + \omega_4 \left(\frac{l}{R_2} \right) + \omega_5 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Com os valores calculados das derivadas parciais, os elementos da matriz jacobiana são então obtidos.

- $F_0(\mathbf{x}) = \dot{x}$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = \frac{\partial F_0}{\partial y} = \frac{\partial F_0}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F_0}{\partial \theta} = \frac{\partial F_0}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_0}{\partial \dot{x}} = 1$$

- $F_1(\mathbf{x}) = 2\dot{y} - \left(\frac{1-\mu}{R_1^3} \Lambda_1 + \frac{\mu}{R_2^3} \Lambda_2 - 1 \right) (X_0 + x) - \mu(1-\mu) \left(\frac{\Lambda_1}{R_1^3} - \frac{\Lambda_2}{R_2^3} \right)$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_1}{\partial \dot{\theta}} = 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x} &= \left\{ -\frac{1-\mu}{R_1^3} \left[\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} - 3 \frac{\Lambda_1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial x} \right] - \frac{\mu}{R_2^3} \left[\frac{\partial \Lambda_2}{\partial x} - 3 \frac{\Lambda_2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial x} \right] \right\} (X_0 + x) - \left(\frac{1-\mu}{R_1^3} \Lambda_1 + \frac{\mu}{R_2^3} \Lambda_2 - 1 \right) \\
&\quad - \mu(1-\mu) \left[\frac{1}{R_1^3} \left[\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} - 3 \frac{\Lambda_1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial x} \right] - \frac{1}{R_2^3} \left[\frac{\partial \Lambda_2}{\partial x} - 3 \frac{\Lambda_2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial x} \right] \right] \\
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \left\{ -\frac{1-\mu}{R_1^3} \left[\frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} - 3 \frac{\Lambda_1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial y} \right] - \frac{\mu}{R_2^3} \left[\frac{\partial \Lambda_2}{\partial y} - 3 \frac{\Lambda_2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial y} \right] \right\} (X_0 + x) \\
&\quad - \mu(1-\mu) \left[\frac{1}{R_1^3} \left[\frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} - 3 \frac{\Lambda_1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial y} \right] - \frac{1}{R_2^3} \left[\frac{\partial \Lambda_2}{\partial y} - 3 \frac{\Lambda_2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial y} \right] \right] \\
\frac{\partial F_1}{\partial \theta} &= -\left(\frac{1-\mu}{R_1^3} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \theta} + \frac{\mu}{R_2^3} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \theta} \right) (X_0 + x) - \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{R_1^3} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \theta} - \frac{1}{R_2^3} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

- $F_2(\mathbf{x}) = \dot{y}$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}} = 1$$

- $F_3(\mathbf{x}) = -2\dot{x} - \left(\frac{1-\mu}{R_1^3} \Lambda_1 + \frac{\mu}{R_2^3} \Lambda_2 - 1 \right) y$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_3}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial F_3}{\partial \theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_3}{\partial \dot{x}} = -2 \\
\frac{\partial F_3}{\partial x} &= \left\{ -\frac{1-\mu}{R_1^3} \left[\frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} - 3 \frac{\Lambda_1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial x} \right] - \frac{\mu}{R_2^3} \left[\frac{\partial \Lambda_2}{\partial x} - 3 \frac{\Lambda_2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial x} \right] \right\} y \\
\frac{\partial F_3}{\partial y} &= \left\{ -\frac{1-\mu}{R_1^3} \left[\frac{\partial \Lambda_1}{\partial y} - 3 \frac{\Lambda_1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial y} \right] - \frac{\mu}{R_2^3} \left[\frac{\partial \Lambda_2}{\partial y} - 3 \frac{\Lambda_2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial y} \right] \right\} y - \left(\frac{1-\mu}{R_1^3} \Lambda_1 + \frac{\mu}{R_2^3} \Lambda_2 - 1 \right) y \\
\frac{\partial F_3}{\partial \theta} &= -\left(\frac{1-\mu}{R_1^3} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \theta} + \frac{\mu}{R_2^3} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \theta} \right) y
\end{aligned}$$

- $F_4(\mathbf{x}) = \dot{\theta}$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x} = \frac{\partial F_4}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F_4}{\partial y} = \frac{\partial F_4}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F_4}{\partial \theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_4}{\partial \dot{\theta}} = 1$$

- $F_5(\mathbf{x}) = -\frac{1-\mu}{R_1^3} \Omega_1 - \frac{\mu}{R_2^3} \Omega_2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_5}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial F_5}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial F_5}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\
\frac{\partial F_5}{\partial x} &= -\frac{1-\mu}{R_1^3} \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} - 3 \frac{\Omega_1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial x} \right] - \frac{\mu}{R_2^3} \left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial x} - 3 \frac{\Omega_2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial x} \right] \\
\frac{\partial F_5}{\partial y} &= -\frac{1-\mu}{R_1^3} \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} - 3 \frac{\Omega_1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial y} \right] - \frac{\mu}{R_2^3} \left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial y} - 3 \frac{\Omega_2}{R_2} \frac{\partial R_2}{\partial y} \right] \\
\frac{\partial F_5}{\partial \theta} &= -\frac{1-\mu}{R_1^3} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} - \frac{\mu}{R_2^3} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

A matriz jacobiana é calculada pela equação 4.10 onde os elementos são obtidos com as equações anteriores e assume a forma dada a seguir:

$$D_{\mathbf{x}} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial y} & 2 & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & -2 & \frac{\partial F_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial F_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Observamos que para cada PR3C e fixadas as massas do sistema vinculado esta matriz será em última análise função apenas do comprimento do cabo que une as massas dos satélites.

Um sistema linear com n equações representado por $\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{x}$, com a matriz característica (D) diagonal e com coeficientes constantes possui solução analítica $\mathbf{x}(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t})^T$, onde os λ_i são os autovalores da matriz D e os c_i são coeficientes a serem determinados por n condições iniciais. Tal sistema é dito *desacoplado*.

Observando a matriz jacobiana do sistema 4.2 dada pela equação 4.10, verificamos que a mesma deve então ser diagonalizada para que o sistema se torne desacoplado e nos permita escolher adequadamente as condições iniciais para órbitas periódicas lineares. A diagonalização é obtida através da transformação $D = P^{-1}AP$, onde $A = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$ e a matriz P é formada pelos autovetores da matriz jacobiana. Este processo é usado pois não existem autovalores com multiplicidade maior que a unidade neste problema.

Seja uma mudança de variável com $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$, onde $\mathbf{y} = (x_N, \dot{x}_N, y_N, \dot{y}_N, \theta_N, \dot{\theta}_N)^T$. Com isso podemos escrever que:

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = P^{-1}(A\mathbf{x}) \Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = (P^{-1}AP)\mathbf{y} \quad (4.11)$$

O sistema $\dot{\mathbf{y}} = (P^{-1}AP)\mathbf{y}$ é desacoplado com solução $\mathbf{y}(t) = (c_1^* e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n^* e^{\lambda_n t})^T$, onde os λ_i são os autovalores da matriz característica ($P^{-1}AP$) e os c_i^* a serem determinados por novas condições iniciais, uma vez que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

Para que o sistema 4.11 tenha soluções quasi-periódicas é necessário que tenhamos $c_i^* = 0$ para todos os i onde os respectivos λ_i são reais ou complexos com parte real diferente de zero. O subespaço gerado pelos autovetores correspondentes a estes autovalores é denominado *variedade central*.

Temos que obter novas condições iniciais para o sistema 4.2 a partir das condições iniciais do sistema 4.11, e para isso podemos usar o inverso da mudança de variáveis, onde obtemos:

$$\mathbf{x}_0 = P\mathbf{y}_0 \Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^6 p_{ij}y_j, \text{ com } i \in \{1, \dots, 6\} \quad (4.12)$$

A equação 4.12 nos permite selecionar as condições iniciais do sistema 4.6 para que as soluções sejam periódicas, isto é, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T)$, para um certo período $T \in \mathbb{R}$, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. Estas soluções devem ser transladadas, com a mudança de variável $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$, a fim de fornecer órbitas periódicas para o sistema 4.2 linearizado pela equação 4.4. Com isso a solução periódica linear do sistema 4.2 será dada por

$$\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^* \leftrightarrow \mathbf{x}(t + T) + \mathbf{x}^* \quad (4.13)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é a solução do sistema 4.6 e T o período.

4.2.1 Aplicação ao Terra-Lua

Um satélite com cabo de comprimento 1000 km e razão de massas 1 : 1 usando dados adimensionais obtidos da tabela 3.1 tem os seguintes pontos de equilíbrio no espaço de fase:

$$P_0(7.08815214 \cdot 10^{-6}, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ e } P_{\pi/2}(-3.54407607 \cdot 10^{-6}, 0, 0, 0, \frac{\pi}{2}, 0)$$

Ressaltamos que no caso em que a razão de massas é 1 : 1 temos que $P_0 = P_\pi$.

Vamos inicialmente considerar o ponto de equilíbrio P_0 . Com as equações 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 obtemos a matriz jacobiana e a forma linearizada do sistema, dados a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.38243591 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2.190729422 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9.572491113 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (4.14)$$

Calculamos $P^{-1}(D_{\mathbf{x}}\mathbf{F})P$ a partir da matriz P dos autovetores da jacobiana e assim obtemos o sistema em sua forma desacoplada, como a seguir:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2.159007343 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.159007343 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.862687895 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.862687895 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.093944265 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.093944265 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (4.15)$$

Podemos verificar a presença de 2 (dois) autovalores reais e outros 4 (quatro) imaginários puros (conjugados dois a dois). Isto nos permite visualizar os retratos de fase conforme os gráficos da figura 4.2 e concluir que as soluções periódicas devem ter condições iniciais que anulem as coordenadas x_N e $\dot{x}_N$. É possível ainda concluirmos

que o ponto de equilíbrio P_0 é instável com relação a estas coordenadas e estável em relação a $y_N, \dot{y}_N, \theta_N, \dot{\theta}_N$ e este subespaço corresponde à variedade central linear (Perko [16]). Portanto, uma condição inicial suficiente para se obter soluções periódicas é $\mathbf{y}_0 = (0, 0, y_{N0}, \dot{y}_{N0}, \theta_{N0}, \dot{\theta}_{N0})^T$. Observe que esta condição inicial é de uma órbita periódica instável, pois basta um par real para que o ponto de equilíbrio seja considerado instável.

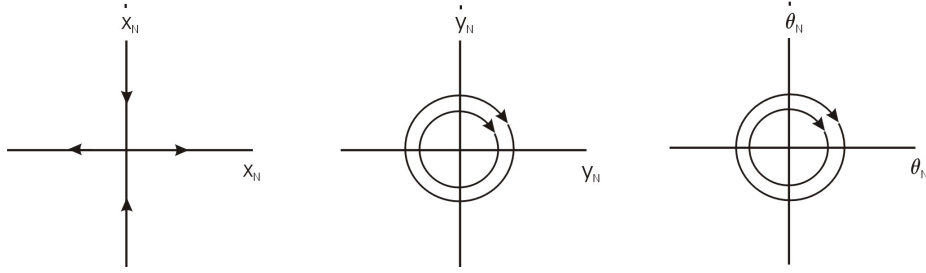


Figura 4.2: Diagrama de fases para P_0

As condições iniciais para o sistema 4.14 são então obtidas através da equação 4.12 e podemos escrever que:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.3013652184y_{N0} & \dot{x}_0 &= 0.5613493546\dot{y}_{N0} \\ y_0 &= 0.8778787062\dot{y}_{N0} & \dot{y}_0 &= -1.635214044y_{N0} \\ \theta_0 &= 0.3232120279\theta_{N0} & \dot{\theta}_0 &= \dot{\theta}_{N0} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Conforme veremos mais adiante buscamos órbitas com a simetria $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, t) = \mathcal{L}(x, -\dot{x}, -y, \dot{y}, -\theta, \dot{\theta}, -t)$. Assim, tomando $\dot{y}_{N0} = 0$ obtemos $(x_0, 0, 0, \rho x_0, \theta_0, \dot{\theta}_0)^T$ com $\rho = -5.426021134$ como condição inicial para uma órbita periódica linear do satélite vinculado fixo considerado com $l = 1000$ km. O modulo do coeficiente ρ representa a razão entre o valor da velocidade vertical inicial e a coordenada horizontal inicial em relação ao ponto de equilíbrio ($\rho = \frac{\dot{y}_0}{x_0}$). Ressaltamos que para estas condições uma OPL do sistema 4.2 será dada pela transformação 4.13, onde $\mathbf{x}^* = (0.00000708815, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, fazendo a translação para o referencial adotado na modelagem, onde a origem é o L_2 do PR3C.

A tabela 4.1 fornece o valor de ρ na vizinhança de P_0 para vários comprimentos de cabos e razões de massas, o que nos permite obter soluções periódicas lineares para vários satélites vinculados fixos. $\theta_0, \dot{\theta}_0$ e a coordenada x_0 devem estar na vizinhança do ponto de equilíbrio P_0 .

As órbitas dos subespaços $(y, \dot{y})$ e $(\theta, \dot{\theta})$ embora limitadas (os λ são imaginários puros) não formam uma órbita periódica do tipo spin-órbita, pois as frequências não são ressonantes e nem mesmo próximas como no caso $(y, \dot{y})$ e $(z, \dot{z})$ do PR3C que geram não linearmente as órbitas em forma de oito verticias, como pode ser visto em Szebehely [23].

l (km)	$\rho (\beta_1 = \beta_2)$	$\rho (\beta_1 = 9\beta_2)$	$\rho (\beta_1 = 99\beta_2)$
500	-5.425369281	-5.425231471	-5.425160839
1000	-5.426021134	-5.425474724	-5.425187791
1500	-5.427107555	-5.425889367	-5.425233991
2000	-5.428629105	-5.426482893	-5.425300406
2500	-5.430586263	-5.427263013	-5.425388138
3000	-5.432979460	-5.428237704	-5.425498173
3500	-5.435809626	-5.429414738	-5.425631636
4000	-5.439077620	-5.430802243	-5.425789576
4500	-5.442784468	-5.432408294	-5.425973089
5000	-5.446931205	-5.434241226	-5.426183295
5500	-5.451519277	-5.436309352	-5.426421348
6000	-5.456549974	-5.438621081	-5.426688308

Tabela 4.1: Coeficiente $\rho (\theta_0 = 0)$ para obtenção de OPL no sistema Terra-Lua

A obtenção de OPL(s) na vizinhança do segundo ponto de equilíbrio ($\beta_1 = \beta_2$) implica no cálculo de uma nova matriz jacobiana que quando diagonalizada pelos seus autovetores nos fornece a seguinte expressão:

$$P^{-1}(D_{\mathbf{x}}\mathbf{F})P \Big|_{P_{\pi/2}} = \begin{pmatrix} 2.158721320 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.158721320 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.862749783 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.862749783 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.093601653 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.093601653 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

A principal diferença em relação ao ponto de equilíbrio P_0 está na presença de outros 2 (dois) autovalores reais para θ_0 e $\dot{\theta}_0$, o que torna o sistema instável também para estas

duas coordenadas, como podemos observar nos retratos de fase da figura 4.3.

As soluções periódicas devem então anular o comportamento de 4 (quatro) autovalores e portanto a condição inicial para o sistema 4.11 deve ser da forma $\mathbf{y}_0 = (0, 0, y_{N0}, \dot{y}_{N0}, 0, 0)^T$. Usando a transformação de variável dada pela equação 4.12, temos que:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.3013967091y_{N0} & \dot{x}_0 &= 0.5614266533\dot{y}_{N0} \\ y_0 &= 0.8778413474\dot{y}_{N0} & \dot{y}_0 &= -1.635198782y_{N0} \\ \theta_0 &= 0 & \dot{\theta}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Note que aos valores acima devemos acrescentar $x^* = (-0.00000354407, 0, 0, 0, \frac{\pi}{2}, 0)^T$ de acordo com a equação 4.13.

Tomando $\dot{y}_{N0} = 0$ obtemos $(x_0, 0, 0, \rho x_0, 0, 0)$ com $\rho = -5.425403572$ como condição inicial em relação ao ponto de equilíbrio. A tabela 4.2 nos informa os valores de ρ na vizinhança de $P_{\pi/2}$ no sistema Terra-Lua para diversos comprimentos, porém somente no caso em que $\beta_1 = \beta_2$.

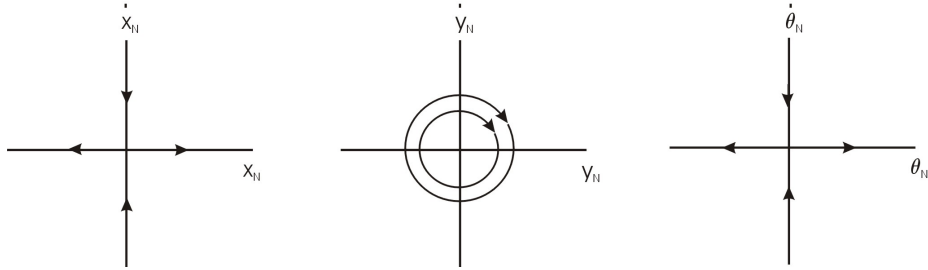


Figura 4.3: Diagrama de fases para $P_{\pi/2}$

l (km)	ρ ($\beta_1 = \beta_2$)
500	-5.425214969
1000	-5.425403572
1500	-5.425717932
2000	-5.426158106
2500	-5.426724001
3000	-5.427415629
3500	-5.428232948
4000	-5.429175995
4500	-5.430244840
5000	-5.431439309
5500	-5.432759540
6000	-5.434205441

Tabela 4.2: Coeficiente ρ ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$) para obtenção de OPL no sistema Terra-Lua

4.2.2 Aplicação ao Sol-Terra

Como já visto, a aplicação numérica neste sistema deve levar em consideração comprimentos de cabos relativamente maiores que os usados no sistema Terra-Lua. A análise da estabilidade dos possíveis pontos de equilíbrio P_0 e $P_{\pi/2}$ se mostrou semelhante a aplicação anterior. A tabela 4.3 nos informa as condições iniciais adequadas para comprimentos entre 5000 km e 10000 km, que fornecem órbitas periódicas lineares para o sistema Sol-Terra no caso em $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, tomando como solução a transformação 4.13.

Usando como exemplo um satélite de comprimento 6000 km e razão de massas 1 : 1, para cada um dos pontos de equilíbrio P_0 e $P_{\pi/2}$ mostramos a matriz jacobiana diagonalizada pelos seus autovetores. As coordenadas adimensionais destes pontos de equilíbrio foram obtidas a partir da tabela 3.1 e são dadas abaixo:

$$P_0(2.68850267 \cdot 10^{-8}, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ e } P_{\pi/2}(-1.34425133 \cdot 10^{-8}, 0, 0, 0, \frac{\pi}{2}, 0)$$

Matriz jacobiana para $\theta_0 = 0$

$$P^{-1}(D_{\mathbf{x}}\mathbf{F})P \Big|_{P_{\pi/2}} = \begin{pmatrix} 2.484435557 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.484435557 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.057076567 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.057076567 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.438368372 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.438368372 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Matriz jacobiana para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$P^{-1}(D_{\mathbf{x}}\mathbf{F})P \Big|_{P_{\pi/2}} = \begin{pmatrix} 2.484416622 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.484416622 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.057079800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.057079800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.438344234 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.438344234 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Verificamos um comportamento análogo ao obtido no sistema Terra-Lua com relação a forma diagonalizada da matriz jacobiana. Isto nos mostra que a análise anteriormente realizada para se obter condições iniciais adequadas para a geração de órbitas periódicas lineares pode ser igualmente aplicada nos sistemas Terra-Lua e Sol-Terra.

As condições iniciais dadas pelas tabelas 4.1 e 4.3 são geradoras de órbitas periódicas para o sistema em sua forma linearizada, e portanto não produzem órbitas periódicas quando o sistema 4.2 é integrado. Porém, essas condições são utilizadas como ponto inicial no processo de refinamento numérico que nos permite obter órbitas periódicas considerando o sistema em sua totalidade.

l (km)	$\theta_0 = 0$			$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$
	$\rho (\beta_1 = \beta_2)$	$\rho (\beta_1 = 9\beta_2)$	$\rho (\beta_1 = 99\beta_2)$	$\rho (\beta_1 = \beta_2)$
5000	-6.556581703	-6.556552076	-6.556536974	-6.556549090
5500	-6.556591506	-6.556555612	-6.556537382	-6.556551960
6000	-6.556602209	-6.556559534	-6.556537827	-6.556555251
6500	-6.556613857	-6.556563764	-6.556538305	-6.556558626
7000	-6.556626457	-6.556568314	-6.556538815	-6.556562436
7500	-6.556639998	-6.556573281	-6.556539310	-6.556566447
8000	-6.556654364	-6.556578552	-6.556539940	-6.556570736
8500	-6.556669727	-6.556584227	-6.556540515	-6.556575333
9000	-6.556686142	-6.556590249	-6.556541229	-6.556580212
9500	-6.556703333	-6.556596547	-6.556542109	-6.556585337
10000	-6.556721427	-6.556603140	-6.556542609	-6.556590836

Tabela 4.3: Coeficiente ρ para obtenção de OPL no sistema Sol-Terra

4.3 O método da continuação

Nesta seção o objetivo é calcular órbitas periódicas para os satélites vinculados fixos levando em consideração o sistema 4.2 de forma completa, ou seja, não usando a expansão de Taylor para o campo vetorial $\mathbf{F}$, dado pela equação 4.3, que o lineariza. Estas soluções periódicas são obtidas ao redor dos pontos de equilíbrio do sistema que descreve o modelo. Sabemos que em sistemas dinâmicos que possuem uma integral primeira as famílias de órbitas periódicas são parametrizadas pelos valores desta integral, no nosso caso tal integral primeira é a constante do movimento de Jacobi (C_J). Desejamos determinar a família de órbitas de Lyapunov que são continuação das órbitas periódicas lineares na vizinhança do ponto de equilíbrio determinadas na seção 4.2.

Poincaré mostrou que é possível obter uma família de soluções periódicas em um sistema dinâmico autônomo dependente de um parâmetro ϵ partindo-se de uma solução periódica para $\epsilon = 0$. O procedimento ficou conhecido na literatura científica como *Método de Continuação Analítica* e consiste em uma aplicação do *Teorema da Função Implícita*, conforme podemos ver em Siegel e Moser [19]. É conhecido que na vizinhança dos pontos colineares do PR3C plano existem famílias de órbitas periódicas planas conhecidas como órbitas de Lyapunov. Nosso objetivo consiste em determinar estas órbitas para o

problema dos satélites vinculados, obtendo uma família de soluções periódicas partindo, por exemplo, de uma órbita periódica encontrada na vizinhança do ponto de equilíbrio do sistema ou de qualquer órbita periódica já conhecida.

Lembrando que uma solução periódica de período T tem a seguinte propriedade:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.18)$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor que representa um ponto no espaço de fase com 6 (seis) dimensões, então a equação $\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t) = 0$ é a equação de periodicidade que necessitamos resolver.

Para computar órbitas periódicas de período T de um sistema autônomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ buscamos condições iniciais $\mathbf{x}_0$ tais que $G(\mathbf{x}_0) = \varphi(T, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0$. No entanto todos os pontos $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$, $t \in \mathbb{R}$ são soluções desta equação se $\mathbf{x}_0$ o é. Equivalentemente $DG(\mathbf{x}_0) = D\varphi(T, \mathbf{x}_0) - \mathbf{I}$ é singular porque $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$, o vetor tangente à órbita é outro valor da matriz de monodromia $D\varphi(T, \mathbf{x}_0)$. Isto nos impede a inversão da matriz para calcular $\mathbf{x}_0$.

Uma das soluções para evitar este problema é usar o método de seção de Poincaré. Desta forma considerando uma seção conveniente S , transversal ao fluxo, procuramos um ponto $\mathbf{x}_0 \in S$ de tal forma que $G\mathbf{x}_0 = P(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = 0$, onde P é o mapa de Poincaré associado a S . Desta forma o período T não é pré-fixado. O zero de G é procurado com o método de Newton-Raphson usando a diferencial da aplicação de Poincaré e em seguida usa-se o método da continuação. Com isso é eliminada a degenerescência da matriz de monodromia.

Vamos considerar uma seção de Poincaré definida por $y = 0$ e C_J fixa. Esta seção será uma superfície com 4 (quatro) dimensões no espaço de fase com dimensão 6 (seis) e um ponto dessa superfície é representado por $P(x, \dot{x}, 0, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}; c_J)$, uma vez que a constante do movimento de Jacobi é fixada.

Consideremos uma determinada órbita que inicie no ponto $P_0(x, \dot{x}, 0, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})_0$ e que após um tempo $T/2$ esteja sobre o ponto $P_f(x, \dot{x}, 0, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})_f$, ambos sobre a seção de Poincaré, conforme a figura 4.4.

Observando a equação 2.20 que nos fornece a lagrangiana do modelo, podemos verificar que:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}, t) = \mathcal{L}(x, -\dot{x}, -y, \dot{y}, -\theta, \dot{\theta}, -t) \quad (4.19)$$

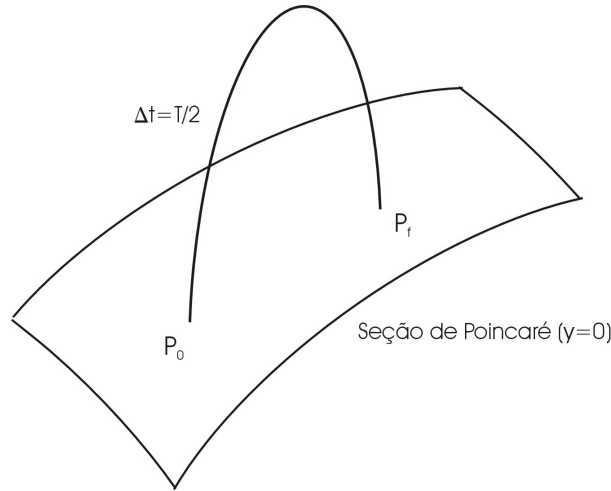


Figura 4.4: Representação de uma seção de Poincaré

A relação dada pela equação 4.19 nos informa uma das simetrias do problema e implica em uma economia de variáveis a serem determinadas, devido às relações a que estas devem satisfazer. Sendo assim, as coordenadas dos pontos P_0 e P_f devem ser tais que:

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_f = 0 \quad \text{e} \quad \theta_0 = \theta_f = \theta_{eq} \quad (4.20)$$

Notamos que $\theta_{eq} = 0$ devido a translação da origem para o equilíbrio. Lembramos também que as órbitas periódicas que buscamos são próximas aos pontos de equilíbrio e portanto $\theta = \dot{\theta} = 0$.

Desta forma teremos que se uma órbita cruza a seção ortogonalmente a solução será uma órbita fechada e de período T . Estas condições nos permitem passar para um espaço euclidiano tridimensional tornando mais simples a obtenção do ponto P_f a partir de P_0 . Assim podemos escrever:

$$\begin{cases} \dot{x}_f = \psi_1(x, \dot{y}, \dot{\theta})_0 \\ \theta_f = \psi_2(x, \dot{y}, \dot{\theta})_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1(x, \dot{y}, \dot{\theta})_0 = 0 \\ \psi_2(x, \dot{y}, \dot{\theta})_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Psi(\mathbf{u}) = 0 \quad (4.21)$$

onde os campos reduzidos são $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ e $\mathbf{u} = (x, \dot{y}, \dot{\theta})$.

O sistema 4.21 é não-linear e homogêneo com 2 (duas) equações e 3 (três) incógnitas e suas soluções descrevem uma curva característica no espaço tridimensional euclidiano formado pelos pontos $(x, \dot{y}, \dot{\theta})$, conforme a figura 4.5. Assim, cada ponto desta curva representa uma órbita periódica simples com período T . As coordenadas deste ponto

acrescidas de $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ nos permite estabelecer o ponto inicial $P_0(x, 0, 0, \dot{y}, 0, \dot{\theta})$ do espaço de fase para o qual existe uma solução periódica.

Consideremos a curva característica (Φ) do sistema 4.21 no espaço definido pelos pontos $(x, \dot{y}, \dot{\theta})$. Como sabemos, todos os pontos desta curva nos fornecem coordenadas que juntamente com a seção de Poincaré ($y = 0$) e com $\dot{x} = \dot{\theta} = 0$ originam órbitas periódicas para o SVF.

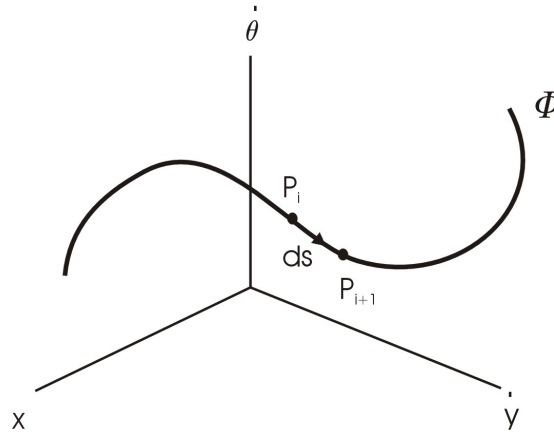


Figura 4.5: Arco ds entre duas órbitas periódicas

Sejam $P_i(x, \dot{y}, \dot{\theta})$ e $P_{i+1}(x + dx, \dot{y} + d\dot{y}, \dot{\theta} + d\dot{\theta})$ dois pontos vizinhos pertencentes a Φ e separados por um arco de comprimento ds , conforme a figura 4.5. O comprimento deste arco é definido pela métrica euclidiana como:

$$d^2s = d^2x + d^2\dot{y} + d^2\dot{\theta} \quad (4.22)$$

Como $P_i \in \Phi$ e $P_{i+1} \in \Phi$, as coordenadas $dx, d\dot{y}$ e $d\dot{\theta}$ satisfazem ao sistema variacional correspondente ao sistema 4.21. Assim temos que:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \dot{\theta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ d\dot{y} \\ d\dot{\theta} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \dot{\theta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ d\dot{\theta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \dot{y}} \end{pmatrix} \cdot d\dot{y} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Resolvendo o sistema 4.23 para dx e $d\dot{\theta}$ em função de $d\dot{y}$, obtemos:

$$dx = -\frac{A_1}{A_0}d\dot{y} \quad \text{e} \quad d\dot{\theta} = -\frac{A_2}{A_0}d\dot{y} \quad (4.24)$$

com os seguintes A_i (determinantes):

$$A_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \dot{\theta}} \end{vmatrix} \quad A_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \dot{\theta}} \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \dot{y}} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

Com as equações 4.22 e 4.24 podemos obter cada uma das variações das coordenadas como função dos A_i e do comprimento de arco ds , como se segue:

$$\begin{aligned} d\dot{y} &= \frac{A_0 ds}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2}} \\ dx &= \frac{-A_1 ds}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2}} \\ d\dot{\theta} &= \frac{-A_2 ds}{\sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

As equações 4.26 permitem a integração da curva Φ ao longo de um parâmetro de arco ds e assim podemos percorrer todos os seus pontos, ainda que sejam pontos de retorno, pois não há privilégio de nenhuma direção específica. A solução dessas equações nos fornece as coordenadas do vetor que permite levar do ponto P_i ao ponto P_{i+1} , ou seja $(dx, d\dot{y}, d\dot{\theta})$. Assim obtemos uma órbita periódica, conforme representado na figura 4.6, sempre a partir de outra que lhe é vizinha e cuja a precisão requerida será alcançada pelo refinamento numérico explicado a seguir.

Considerando o campo Ψ , o vetor $\mathbf{u}$, o sistema $\Psi(\mathbf{u}) = 0$ e estando $\mathbf{u}$ na vizinhança de $\mathbf{u}_0$, podemos escrever em primeira aproximação que:

$$\Psi(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}_0) + \underbrace{\mathbf{G}(\mathbf{u}_0)}_{\Delta \mathbf{u}^0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = 0 \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{G}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{G} = D_{\mathbf{u}}\Psi|_{\mathbf{u}_0}$ é a jacobiana do sistema 4.21 dada pela equação 4.28:

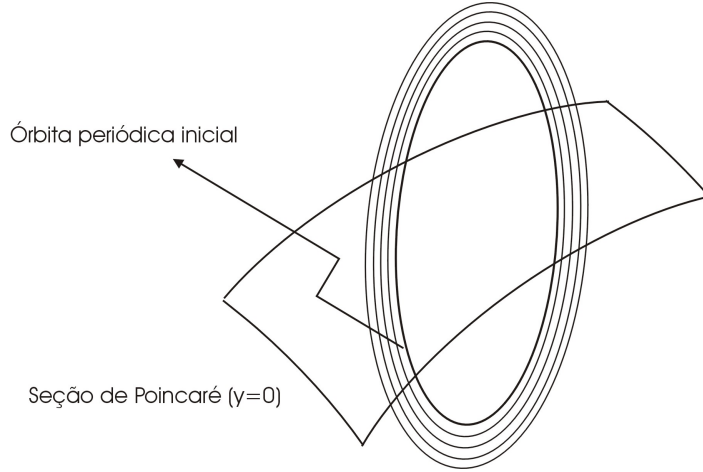


Figura 4.6: Família de órbitas periódicas

$$\mathbf{G} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \end{array} \right) \Big|_{\mathbf{u}_0} \quad (4.28)$$

A solução do sistema 4.21 consiste em se obter o zero do campo vetorial Ψ e para isso podemos usar um método de Newton-Raphson modificado com o cálculo da matriz $\mathbf{G}$ em cada iteração para que minimizemos a norma

$$\Delta \mathbf{u}^T \cdot \Delta \mathbf{u} = \Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 \theta$$

A equação 4.27 pode ser usada em um processo iterativo com

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1}) \Delta \mathbf{u}^{k-1} = -\Psi(\mathbf{u}^{k-1}) \quad (4.29)$$

de tal modo que o cálculo de $\Delta \mathbf{u}^{k-1}$ nos permite obter $\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} + \Delta \mathbf{u}^{k-1}$ com um erro cada vez menor. O vetor $\mathbf{u}^k$ representa a solução da k -ésima iteração para o refinamento da solução do sistema 4.21, fornecendo com a precisão escolhida as condições iniciais adequadas para a obtenção da órbita periódica.

Para calcularmos $\Delta \mathbf{u}^{k-1}$ a partir da equação 4.29 devemos observar que $\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})$ não é uma matriz quadrada, e portanto não admite inversa ($\nexists \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{u}^{k-1})$), sendo necessário usarmos $(\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1}))^{-1}$, uma vez que $(\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1}))$ é também uma matriz singular. Então, partindo da equação 4.29 temos:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1}) \Delta \mathbf{u}^{k-1} = -\Psi(\mathbf{u}^{k-1})$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1}))^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})\Delta\mathbf{u}^{k-1} = -(\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1}))^{-1}\Psi(\mathbf{u}^{k-1}) \\
& \underbrace{\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1})(\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1}))^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})}_I \Delta\mathbf{u}^{k-1} = -\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1})(\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1}))^{-1}\Psi(\mathbf{u}^{k-1}) \\
& \Delta\mathbf{u}^{k-1} = -\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1})(\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})\mathbf{G}^T(\mathbf{u}^{k-1}))^{-1}\Psi(\mathbf{u}^{k-1}) \tag{4.30}
\end{aligned}$$

A equação 4.30 nos fornece as componentes variacionais $\Delta\mathbf{u} = (\Delta x, \Delta\dot{y}, \Delta\dot{\theta})$ do vetor $\mathbf{u}$, e nos permite através de uma precisão pré-determinada refinar a órbita periódica a cada passo, fornecendo a solução do sistema 4.21. O processo está ilustrado na figura 4.7.

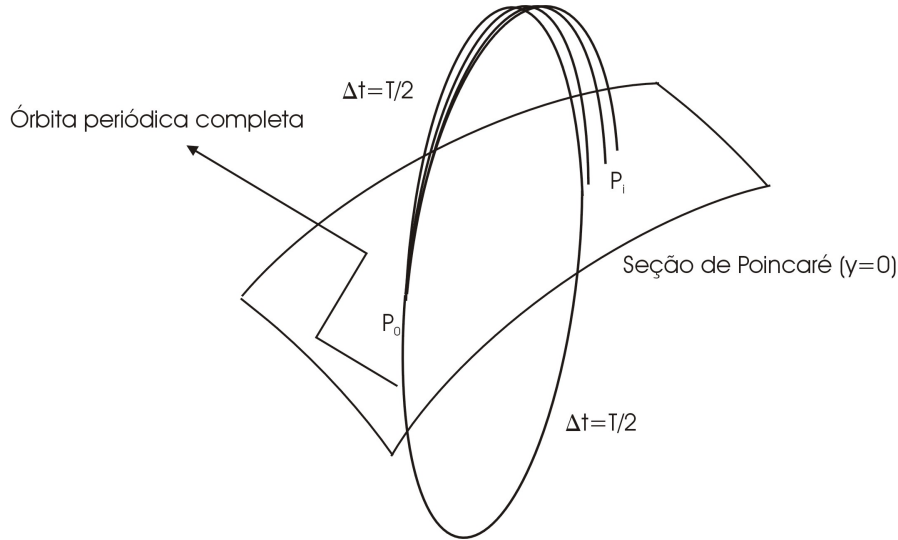


Figura 4.7: Refinamento da órbita periódica

Obtenção da matriz $\mathbf{G}$

Para usarmos a equação 4.30 temos que obter a matriz $\mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})$. Esta matriz deve ser calculada com base nas variações do campo vetorial completo $\mathbf{F}$, levando em consideração as variações dos 6 (seis) graus de liberdade do sistema 4.2. Para isso devemos escrever as equações variacionais como:

$$(\delta \mathbf{x})' = D_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot (\delta \mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \ddot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \ddot{y} \\ \delta \dot{\theta} \\ \delta \ddot{\theta} \end{pmatrix} = D_{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \\ \delta y \\ \delta \dot{y} \\ \delta \theta \\ \delta \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

O sistema 4.31 pode então ser resolvido para 6 (seis) condições iniciais diferentes, onde cada uma delas representa a variação inicial de uma única variável, definidas como na tabela 4.4.

variação	vetor inicial
δx	$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$
$\delta \dot{x}$	$(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$
δy	$(0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$
$\delta \dot{y}$	$(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$
$\delta \theta$	$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$
$\delta \dot{\theta}$	$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$

Tabela 4.4: Condições iniciais do sistema variacional

Para cada uma das soluções obtidas teremos um vetor com 6 (seis) coordenadas e com isso definimos a matriz Δ cujas colunas são dadas por estes vetores. Esta matriz representa todas as variações de todas as coordenadas com relação às condições iniciais de variações da tabela 4.4 e está representada a seguir:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Como o sistema que estamos tratando é hamiltoniano, embora não estejamos usando esta formulação, a área simplética é conservada pelo fluxo e isto implica que o determinante

das variacionais é 1. Este resultado foi usado, como será visto mais adiante, como medida da exatidão das variacionais.

$$\det(\Delta) = 1 \quad (4.33)$$

A variação completa para o vetor $\mathbf{x}$, ou seja $\delta\mathbf{x}$, quando consideramos as variações em todas as coordenadas deve ainda considerar a diferença de tempo Δt para se chegar à seção em diferentes iterações quando o sistema é integrado. Isto ocorre pois quando o sistema 4.31 é integrado, com qualquer que seja a condição inicial, ele nos fornece uma variação da órbita fiducial, que é obtida pela integração do sistema 4.2. Os tempos gastos para que a órbita fiducial e sua variação atinjam a seção ($y = 0$) são diferentes ($t_1 \neq t_2$), conforme ilustra a figura 4.8. Sendo assim, temos que acrescentar à variação $\delta\mathbf{x}$ o valor $\Delta t \cdot \mathbf{F}_0$ que representa a correção devido à diferença de tempo. Assim, temos que:

$$\delta\mathbf{x} \Leftrightarrow \Delta \cdot \delta\mathbf{x} + \Delta t \cdot \mathbf{F}_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \\ \delta y \\ \delta \dot{y} \\ \delta \theta \\ \delta \dot{\theta} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Delta \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \\ \delta y \\ \delta \dot{y} \\ \delta \theta \\ \delta \dot{\theta} \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

onde $\mathbf{F}_0$ representa o campo vetorial no ponto inicial P_0 .

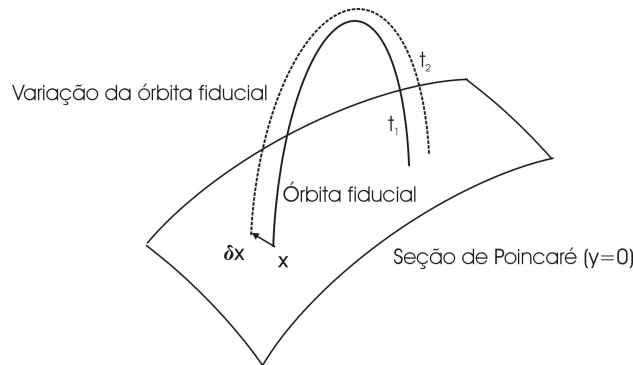


Figura 4.8: Correção temporal da variação da órbita fiducial

Temos, por imposição, que $\delta\dot{x} = \delta\dot{y} = \delta\dot{\theta} = 0$ na seção e com isso podemos calcular Δt a partir da terceira linha da equação 4.34 como sendo:

$$\Delta t = -\frac{1}{F_2(x_0)} [\Delta_{31}\delta x + \Delta_{34}\delta \dot{y} + \Delta_{36}\delta \dot{\theta}] \quad (4.35)$$

O valor de Δt é substituído na equação 4.34 e assim obtemos as correções temporais para as variações $\delta\dot{x}$ e $\delta\theta$, como se pode verificar pelo desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &\Leftrightarrow \delta\dot{x} - \frac{1}{F_2(x_0)} [\Delta_{31}\delta x + \Delta_{34}\delta\dot{y} + \Delta_{36}\delta\dot{\theta}] F_1(x_0) \\ \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} &\Leftrightarrow \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} - \frac{F_1(x_0)}{F_2(x_0)} \Delta_{31} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} - \frac{F_1(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial x}\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{y}} &\Leftrightarrow \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{y}} - \frac{F_1(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial\dot{y}} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{\theta}} &\Leftrightarrow \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{F_1(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial\dot{\theta}} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} &\Leftrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{F_4(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial\dot{y}} &\Leftrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial\dot{y}} - \frac{F_4(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial\dot{y}} \\ \frac{\partial\theta}{\partial\dot{\theta}} &\Leftrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial\dot{\theta}} - \frac{F_4(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial\dot{\theta}}\end{aligned}$$

Com isso é possível determinar a matriz $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}^{k-1})$ a partir da equação 4.28.

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} - \frac{F_1(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{y}} - \frac{F_1(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial\dot{y}} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{F_1(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial\dot{\theta}} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{F_4(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial\dot{y}} - \frac{F_4(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial\dot{y}} & \frac{\partial\theta}{\partial\dot{\theta}} - \frac{F_4(x_0)}{F_2(x_0)} \frac{\partial y}{\partial\dot{\theta}} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Os elementos da matriz $\mathbf{G}$ são determinados com a matriz $\mathbf{\Delta}$, o campo vetorial $\mathbf{F}$ e a devida correção temporal. Esta matriz é então levada à equação 4.30 para se prosseguir com o refinamento da OPN até se alcançar a precisão requerida.

4.4 Aplicações numéricas

A fim de obtermos numericamente órbitas periódicas não-lineares através dos métodos até aqui apresentados para os satélites vinculados fixos, escrevemos um código em C^{++} cujo o algoritmo pode ser resumido nos seguintes passos:

1. uma condição inicial $P_0(x, 0, 0, \dot{y}, 0, \dot{\theta})$ na seção de Poincaré ($y = 0$) é obtida através da solução de uma órbita periódica linear, conforme obtida na seção 4.2;
2. o sistema dinâmico que descreve o movimento dos satélites vinculados é integrado até que a órbita cruze novamente a seção considerada ($y = 0$). Um código baseado no método de Newton-Raphson, com as derivadas sendo calculadas por meio de um método de Runge-Kutta (ordem 7 com controle de passo em ordem 8) é usado para refinar o valor de y com precisão da ordem de 10^{-12} ;
3. simultaneamente, o sistema com as equações variacionais é integrado com as condições iniciais definidas na tabela 4.4, resultando em 36 (trinta e seis) equações diferenciais de primeira ordem. Com isso é possível obter a matriz Δ cujos elementos representam as variações de todas as coordenadas do espaço de fase do sistema. Para cada cálculo da matriz é verificada a condição $\det(\Delta) = 1$. O código faz a integração também pelo método de Runge-Kutta, como anteriormente;
4. a matriz G , cujos os elementos são obtidos a partir da matriz Δ , bem como as matrizes G^T e $(GG^T)^{-1}$ são escritas para uso no passo seguinte;
5. as variações Δx , $\Delta \dot{y}$ e $\Delta \dot{\theta}$ são calculadas através da equação 4.30 e uma avaliação da grandeza $\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 \dot{y} + \Delta^2 \dot{\theta}}$ é feita a fim de se verificar se a precisão desejada foi alcançada (10^{-12}). No caso de um valor superior a este, essas variações são incrementadas às coordenadas x , $\dot{y}$ e $\dot{\theta}$ e o algoritmo retorna ao passo 2;
6. uma vez alcançada a precisão desejada no passo anterior, temos estabelecido as condições iniciais de uma órbita periódica não-linear, representada por $P_i(x, 0, 0, \dot{y}, 0, \dot{\theta})$. Podemos então obter uma família associada a tal órbita e para tanto arbitramos um incremento ao arco ds que significa dar um passo ao longo da curva característica;
7. os determinantes A_i são obtidos a partir dos elementos da matriz Δ e assim as variações dx , $d\dot{y}$ e $d\dot{\theta}$ são calculadas e incrementadas às coordenadas x , $\dot{y}$ e $\dot{\theta}$;
8. para que a órbita vizinha de P_i seja refinada dentro da precisão requerida, o algoritmo retorna ao passo 2.

Observamos que como neste caso a solução linear para a rotação tem frequência muito diferente da translação, não houve acoplamento da oscilação rotacional com a

translacional.

A seguir representamos algumas simulações numéricas obtidas para o sistema Terra-Lua e Sol-Terra, com satélites vinculados fixos usados na obtenção das órbitas não-periódicas ao longo da seção 3.2.

4.4.1 Sistema Terra-Lua

No sistema Terra-Lua obtivemos órbitas periódicas apenas na vizinhança dos pontos de equilíbrio $P_0(x_{eq}, 0, 0)$ e $P_{\pi/2}(x_{eq}, 0, \frac{\pi}{2})$, este último quando existir ($\beta_1 = \beta_2$). Como já comentado o equilíbrio $P_\pi(x_{eq}, 0, \pi)$ corresponde a uma troca das massas dos satélites, sendo o processo análogo para se obter órbitas periódicas nas proximidades do ponto $P_0(x_{eq}, 0, 0)$.

Os parâmetros fixos usados para este sistema são os listados nas tabelas 3.2 e 3.3. A figura 4.9 (fora de escala) informa os valores adimensionais da coordenada x dos corpos primários e do centro de massa do sistema tomando a origem sobre o L_2 ($x_{L_2} = 0$) do PR3C.



Figura 4.9: Coordenadas adimensionais para o sistema Terra-Lua

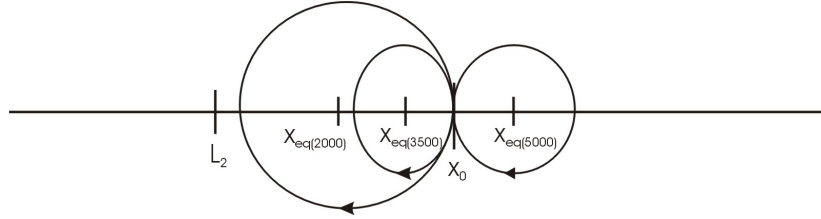
Obtenção de órbitas periódicas na vizinhança de $P_0(x_{eq}, 0, 0)$

Usamos 3 (três) SVF(s) com comprimentos de 2000 km, 3500 km e 5000 km, todos com inclinação inicial $\theta_0 = 0$ e taxa temporal de inclinação inicial $\dot{\theta}_0 = 0$. Para todas as simulações adotamos massas dos satélites adimensionais dadas por $\beta_1 = \beta_2$.

Em relação ao referencial adotado, onde $x_{L_2} = 0$, e tomando valores adimensionais a partir da tabela 3.1, as coordenadas x_{eq} dos pontos de equilíbrio para $\theta_0 = 0$ dos satélites usados nestas simulações estão dadas na tabela 4.5.

Tomemos $x_0 = 9.999999999 \cdot 10^{-5}$ como coordenada inicial e a partir do coeficiente ρ da tabela 4.1 podemos determinar condições iniciais para a obtenção de órbitas periódicas lineares para os três satélites considerados, conforme mostrado na tabela 4.6.

l (km)	x_{eq}
2000	$2.8344898483 \cdot 10^{-5}$
3500	$8.6725777435 \cdot 10^{-5}$
5000	$17.6723207401 \cdot 10^{-5}$

Tabela 4.5: Coordenada x_{eq} adimensional do ponto de equilíbrio para $\theta_0 = 0$ (Terra-Lua)Figura 4.10: Sentido do movimento de OPL para $x_0 = 9.9999999999 \cdot 10^{-5}$ (Terra-Lua)

	$l = 2000$ km	$l = 3500$ km	$l = 5000$ km
x_0	$9.9999999999 \cdot 10^{-5}$	$9.9999999999 \cdot 10^{-5}$	$9.9999999999 \cdot 10^{-5}$
$\dot{x}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
y_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{y}_0$	$-38.8982682380 \cdot 10^{-5}$	$-7.2159349701 \cdot 10^{-5}$	$41.7912633014 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{\theta}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
T	3.3729556430	3.3723332090	3.3713715020

Tabela 4.6: Condições iniciais e período para OPL com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Terra-Lua)

Em virtude das posições relativas entre os pontos de equilíbrio para os três comprimentos usados e a condição inicial $x_0 = 9.9999999999 \cdot 10^{-5}$ adotada ser a mesma em ambos os casos, ressaltamos a inversão do sinal da coordenada $\dot{y}_0$ para o SVF com comprimento de 5000 km em relação aos outros dois, conforme pode ser visto na quarta linha da tabela 4.6. Como podemos observar na figura 4.10 o ponto de equilíbrio para o SVF com comprimento de 5000 km está à direita da posição inicial. Sendo assim, o SVF deverá ter $\dot{y}_0 > 0$. Para os casos onde o SVF tem comprimentos de 2000 km e 3500 km, o ponto de equilíbrio está à esquerda da posição inicial, fazendo com que as órbitas tenham $\dot{y}_0 < 0$.

Comprimento de 2000 km

A partir da condição inicial para uma órbita periódica linear dada pela tabela 4.6, aplicamos o método de refinamento anteriormente explicado e com isso calculamos condições iniciais para uma órbita periódica não-linear. Estas condições estão mostradas na tabela 4.7.

O método ajusta em poucos passos as condições iniciais (que fornecem a OPL) para a obtenção de novas condições iniciais que fornecem a OPN.

O gráfico da figura 4.11 mostra a órbita periódica obtida integrada ao longo de todo o seu período $T = 3.3735104335$, para as coordenadas x e y . Lembramos que pelo analisado na seção 3.2 este SVF não apresenta variação nas coordenadas θ e $\dot{\theta}$, uma vez que tomamos $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$.

x_0	$10.0015964019 \cdot 10^{-5}$
$\dot{x}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
y_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{y}_0$	$-38.897974167 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{\theta}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
T	3.3735104335

Tabela 4.7: Condições iniciais e período para uma OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)

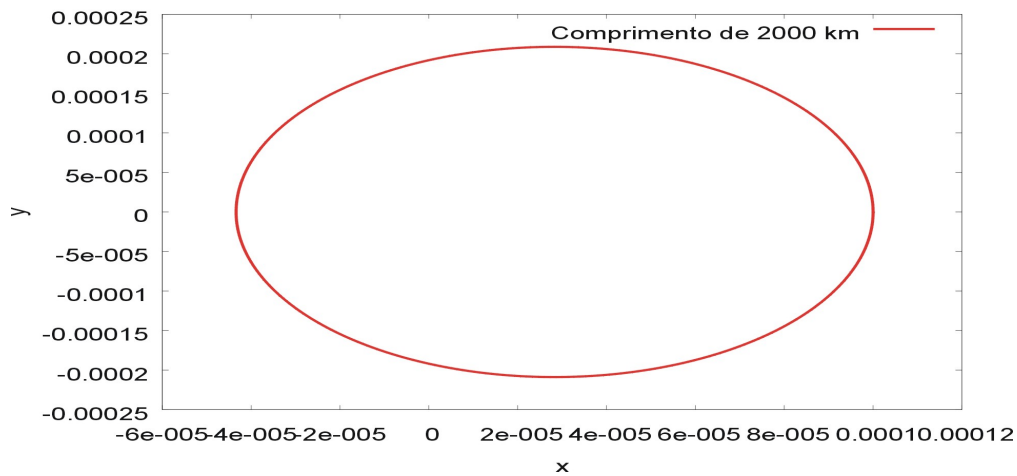


Figura 4.11: Órbita periódica com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)

Uma vez determinada uma órbita periódica não-linear, usamos o método da continuação numérica explicado na seção 4.3 para a obtenção de uma família de órbitas periódicas. O gráfico da figura 4.12 mostra uma família com 3800 órbitas de Lyapunov intercaladas de 200 em 200. Esta família foi obtida a partir das condições iniciais da tabela 4.7.

Voltando à figura 2.6, as aproximações que limitam a região onde podemos usar a nossa modelagem ($\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim 10^{-8}$) são de tal forma que o erro introduzido é nulo quando o SVF se desloca sobre a linha que une os primários, pois neste caso temos que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. À medida que o SVF percorre órbitas de Lyapunov na vizinhança do ponto de equilíbrio, que por sua vez está na vizinhança do L_2 do PR3C, os ângulos γ_1 e γ_2 tornam-se não nulos e a aproximação vai perdendo a validade à medida que γ_1 e γ_2 crescem.

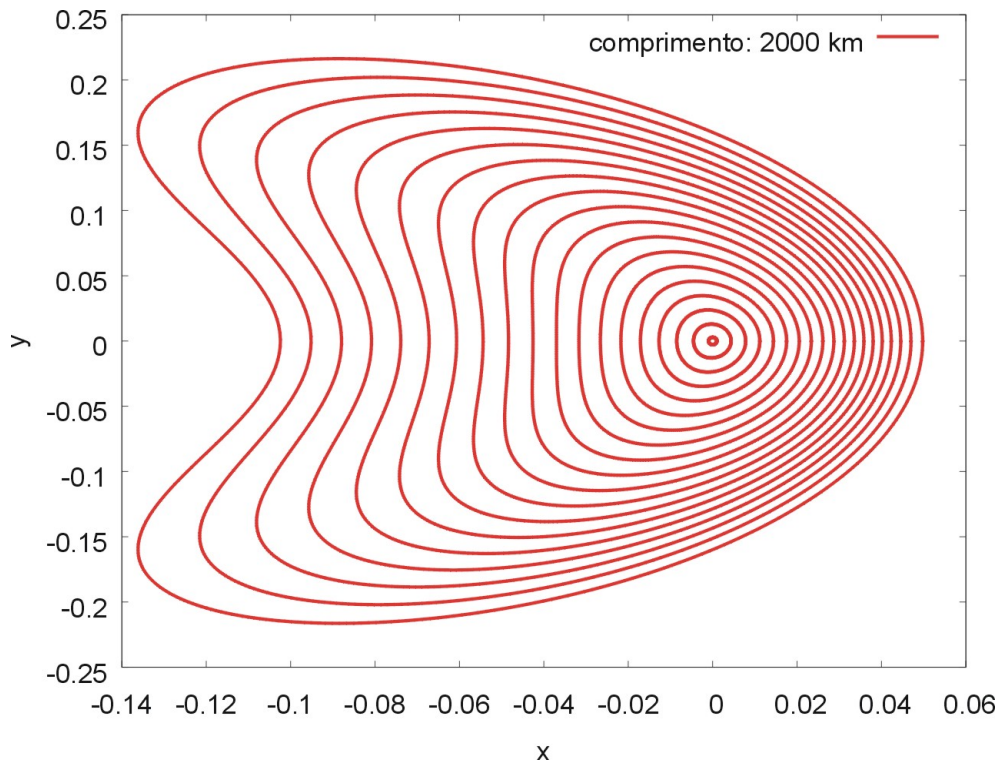


Figura 4.12: Família com 3800 órbitas periódicas intercaladas de 200 em 200 com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)

A ordem de grandeza do erro introduzido pela aproximação $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim 10^{-8}$ deve ser calculada na equação 2.19 que nos informa a lagrangiana do sistema. É importante observarmos que os valores de $(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})$ e $(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})$ que dependem diretamente da aproximação

dos ângulos γ_1 e γ_2 surgem em potências inteiras e crescentes sendo a menor potência a de expoente 2. Além disto, estes termos aparecem multiplicados por potências das razões $\frac{l}{R_1}$ e $\frac{l}{R_2}$ que também são de baixa ordem de grandeza e possuem expoentes iguais ou superiores a 2. Com isto o erro torna-se ainda menor, justificando o processo de aproximação usado.

A fim de mantermos a ordem de grandeza do erro entre 10^{-11} e 10^{-9} , devemos iniciar a uma distância da ordem de 10^{-4} do ponto de equilíbrio do SVF e gerar uma família com 500 órbitas obtidas com um passo da ordem também de 10^{-4} . Este último representa o incremento ds definido sobre a curva característica da família de órbitas periódicas.

Neste ponto cabe observarmos uma importante diferença entre o PR3C e o problema do SVF. No PR3C as equações de movimento são válidas para todo o plano definido pelos corpos primários, retiradas as singularidades. Portanto, podemos calcular órbitas de Lyapunov através do método da continuação numérica para regiões cada vez mais distantes do L_2 do PR3C, de tal forma que as famílias destas órbitas são limitadas apenas pela presença do corpo primário mais próximo do ponto lagrangiano. Em outras palavras, podemos aplicar o método da continuação numérica até que a órbita cruze o corpo primário menos massivo, que é onde acaba a família (Simó e Stuchi [21]).

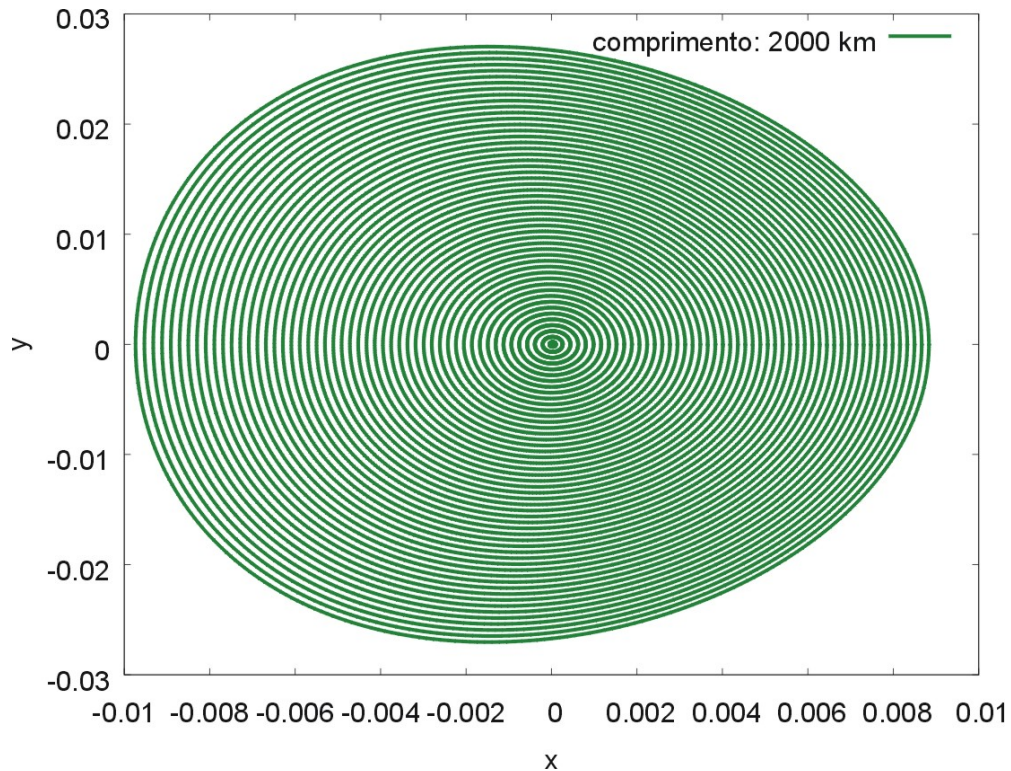


Figura 4.13: Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)

Como já visto, devido a aproximação $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim 10^{-8}$, no caso do SVF a modelagem está limitada à vizinhança dos pontos colineares do PR3C. Tal consideração é também observada nos trabalhos de Misra [12] e Peláez [15] que inclusive usam modelos diferentes para tratar o SVF na vizinhança dos pontos colineares e nos pontos triangulares do PR3C.

Portanto, a fim de mantermos a precisão do nosso modelo geramos uma família com 500 órbitas de Lyapunov a partir das condições iniciais dadas pela tabela 4.7. O gráfico da figura 4.13 mostra 50 dessas órbitas, intercaladas de 10 em 10, para melhor visualização devido a efeitos de escala. As órbitas plotadas neste gráfico representam uma região próxima do L_2 , o que equivale a limitar uma região do gráfico da figura 4.12, para mantermos a precisão entre 10^{-11} e 10^{-9} .

Comprimentos de 3500 km e 5000 km

A exemplo do que foi explicado para um SVF com comprimento de 2000 km, calculamos as condições iniciais para a obtenção de uma órbita periódica não-linear a partir dos dados da tabela 4.6, através do processo de refinamento numérico. A tabela 4.8 mostra estas condições iniciais.

	$l = 3500 \text{ km}$	$l = 5000 \text{ km}$
x_0	$10.0018706083 \cdot 10^{-5}$	$9.9750814823 \cdot 10^{-5}$
$\dot{x}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
y_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{y}_0$	$-7.2155904125 \cdot 10^{-5}$	$41.7866739584 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{\theta}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
T	3.3740303309	3.3748318657

Tabela 4.8: Condições iniciais e período para uma OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)

Também nestas simulações, a fim de mantermos as aproximações válidas, calculamos para ambos os satélites uma família com 500 órbitas de Lyapunov a partir das condições iniciais dadas pela tabela 4.8 com passo de 10^{-4} . Os gráficos das figuras 4.14 e 4.15 mostram 50 dessas órbitas periódicas intercaladas de 10 em 10, para os comprimentos de 3500 km e 5000 km, respectivamente. Como podemos observar as órbitas são muito

próximas, e o gráfico da figura 4.16 mostra uma região dessas órbitas ampliada.

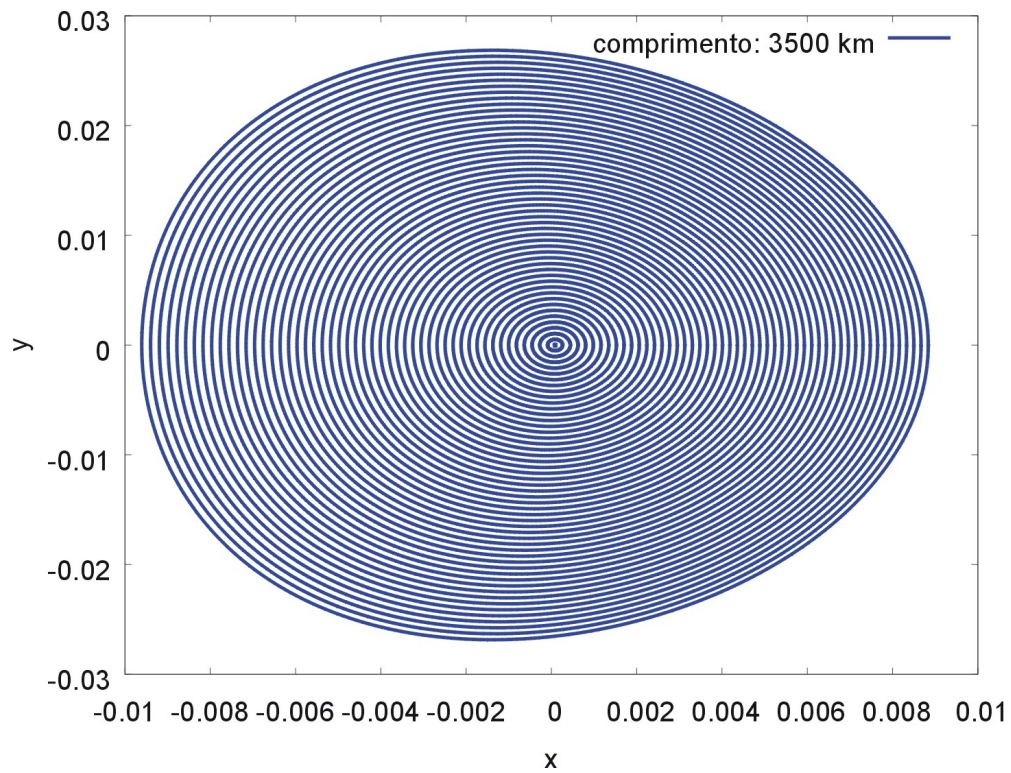


Figura 4.14: Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 3500 km - (Terra-Lua)

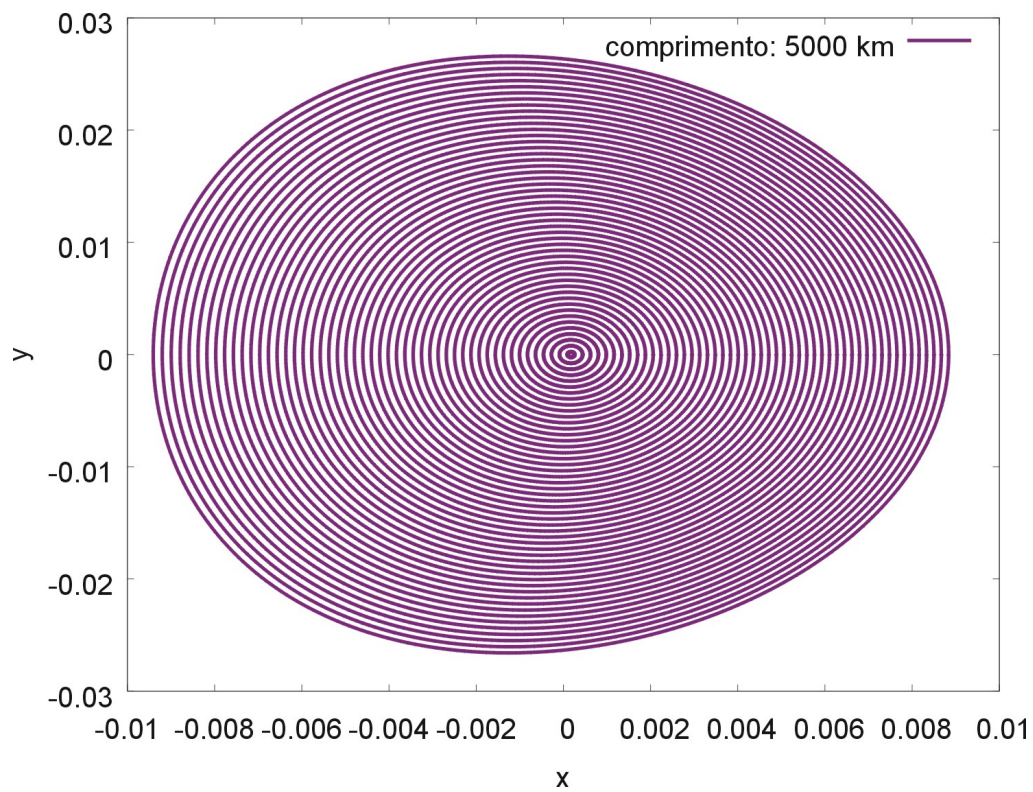


Figura 4.15: Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 5000 km - (Terra-Lua)

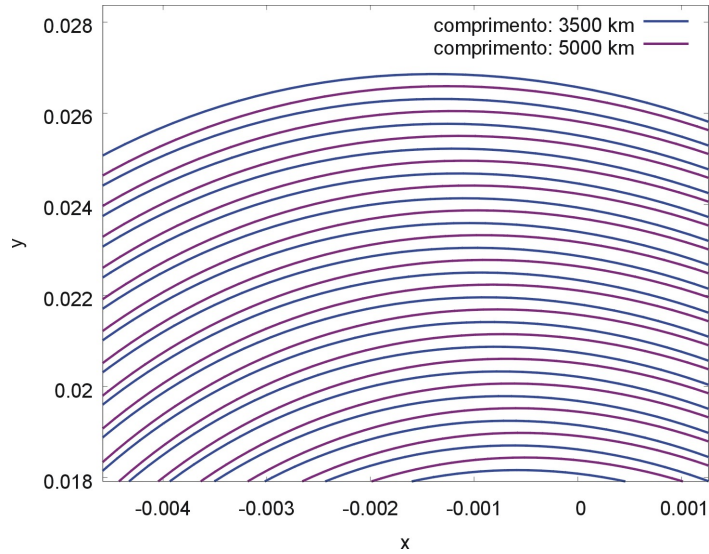


Figura 4.16: Ampliação da família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)

Podemos verificar no gráfico da figura 4.17 a primeira órbita periódica para os satélites vinculados fixos com cabos de comprimentos 2000 km, 3500 km e 5000 km, partindo das condições iniciais adequadas, dadas pela tabela 4.6, para a geração de uma OPL semente. A principal diferença está na velocidade vertical $\dot{y}$ e ocorre devido a variação dos pontos de equilíbrio em função dos comprimentos, conforme já analisado. Esta variação proporciona órbitas periódicas diferentes em função do comprimento do cabo que une os satélites, fazendo com que o período e a amplitude nas coordenadas espaciais também variem. Podemos ainda verificar que a integração numérica reproduz as órbitas previstas e representadas esquematicamente na figura 4.10.

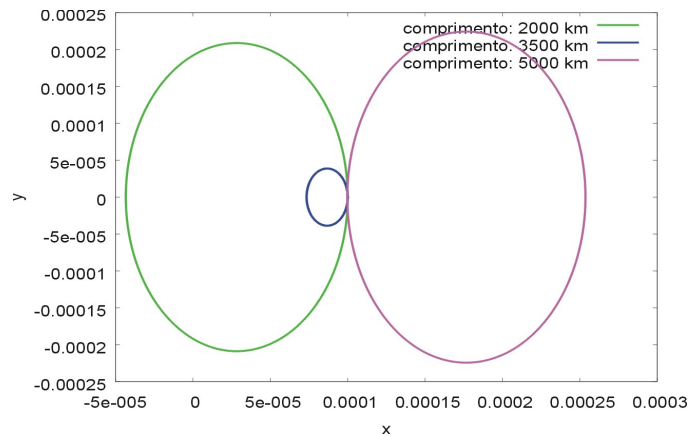


Figura 4.17: Comparação de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km, 3500 km e 5000 km - com condição inicial em relação ao L_2 do PR3C (Terra-Lua)

A curva característica pode ser descrita pela coordenada x_0 e pelo período T (ou pela constante do movimento de Jacobi C_J). No gráfico da figura 4.18 estão plotadas as curvas características de três famílias com 3000 órbitas periódicas de Lyapunov obtidas para o SVF com os comprimentos 2000 km, 3500 km e 5000 km. Este gráfico também mostra a curva descrita por um SVF de comprimento nulo, ou seja o PR3C. Ressaltamos que para todas as curvas tomamos a origem do nosso referencial no L_2 do PR3C.

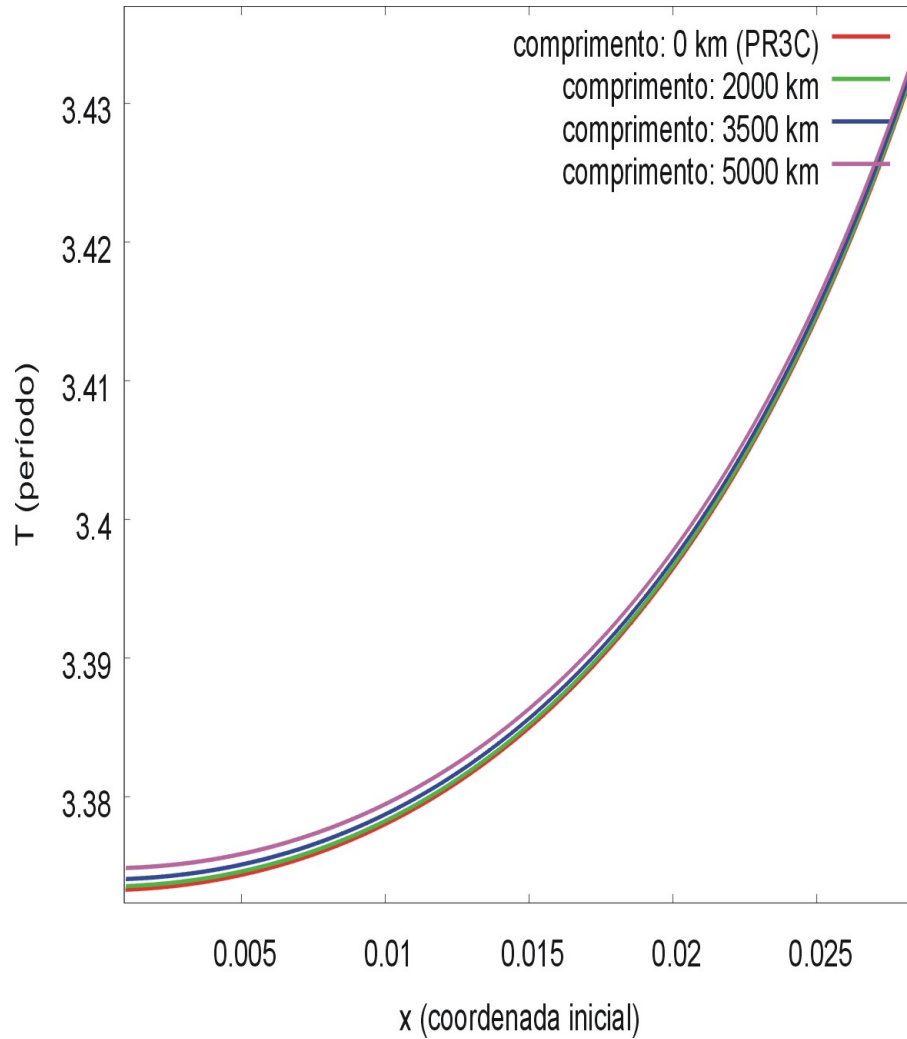


Figura 4.18: Curva característica para OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Terra-Lua)

Conforme já discutido, para mantermos a precisão do nosso modelo devemos manter os satélites na vizinhança dos pontos de equilíbrio. No gráfico da figura 4.19 estão plotadas as curvas das três famílias com 500 órbitas de Lyapunov anteriormente obtidas para os comprimentos 2000 km, 3500 km e 5000 km, além do caso em o comprimento é nulo (PR3C). Este gráfico também representa uma ampliação da região limitada pela coordenada x entre 0.001 e 0.009 do gráfico da figura 4.18.

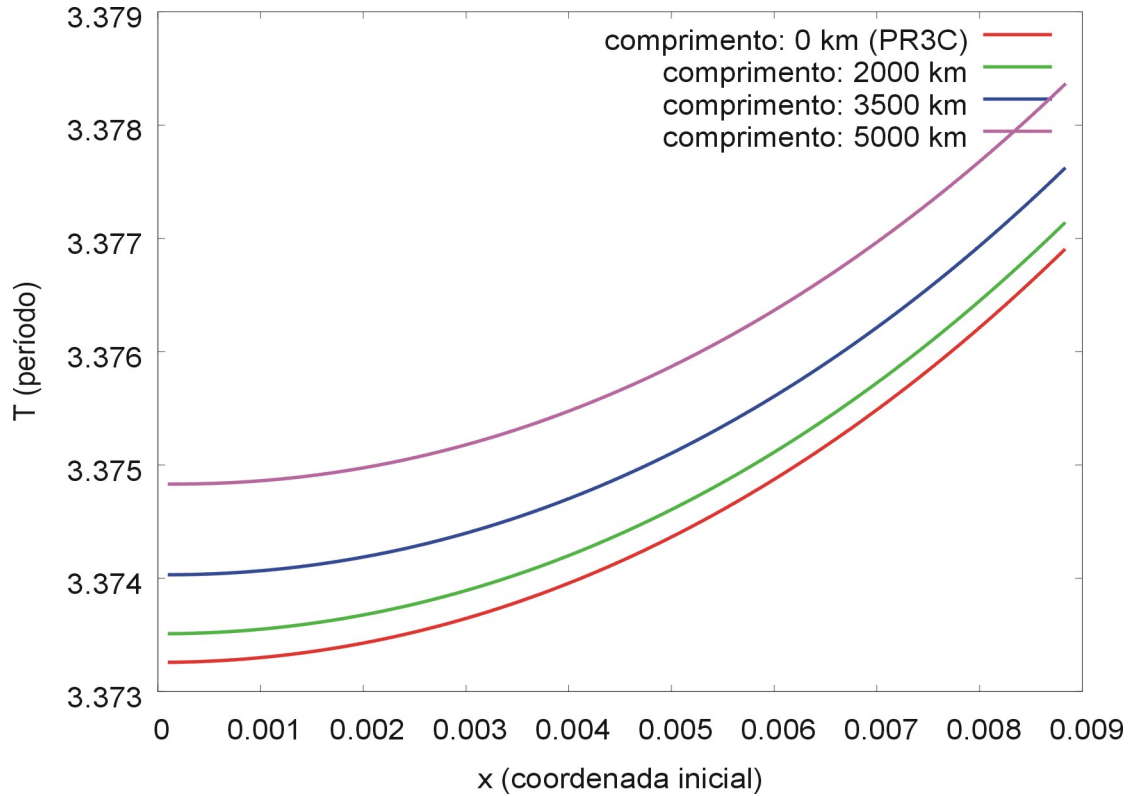


Figura 4.19: Curva característica (ampliada) para OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Terra-Lua)

Em uma segunda análise usamos o método de refinamento para obtermos uma órbita periódica para cada um dos três comprimentos usados nestas simulações, ou seja 2000 km, 3500 km e 5000 km, a partir de uma distância inicial $x_{0/Eq} = 9.999999999 \cdot 10^{-5}$ **do ponto de equilíbrio de cada SVF**, e não mais mantivemos a mesma coordenada em relação ao L_2 do PR3C como feito anteriormente e mostrado na figura 4.17. As condições iniciais das órbitas periódicas de Lyapunov obtidas bem como seus períodos podem ser vistos na tabela 4.9.

Como podemos ver no gráfico da figura 4.20 as órbitas periódicas variam em amplitude e período, mesmo quando o deslocamento inicial em relação ao ponto de equilíbrio é o mesmo para cada SVF, ou seja, as órbitas periódicas para comprimentos diferentes do SVF não são apenas translações em relação ao ponto de equilíbrio de cada sistema. Poderíamos ainda obter uma curva característica tendo l como parâmetro, desde que automatizássemos o método.

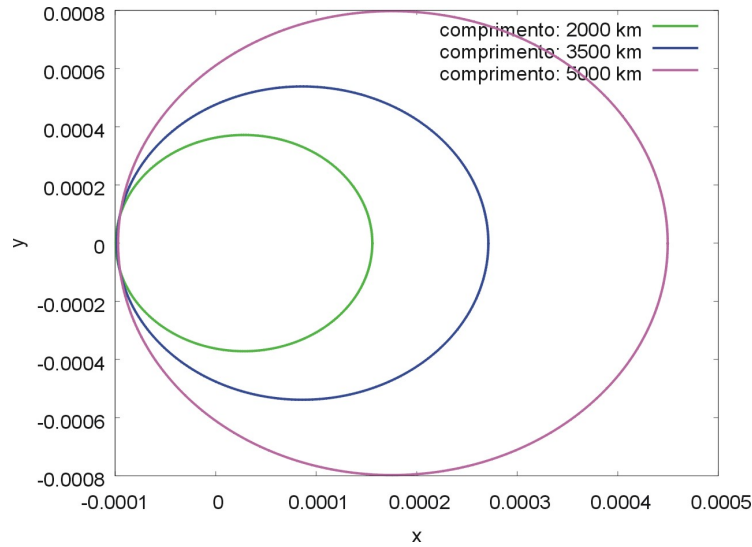


Figura 4.20: Comparação de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km, 3500 km e 5000 km - com condição inicial em relação ao ponto de equilíbrio (Terra-Lua)

	$l = 2000 \text{ km}$	$l = 3500 \text{ km}$	$l = 5000 \text{ km}$
x_0	$15.5843031491 \cdot 10^{-5}$	$27.1278763528 \cdot 10^{-5}$	$44.9702179416 \cdot 10^{-5}$
$\dot{x}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
y_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{y}_0$	$-69.2114968938 \cdot 10^{-5}$	$-100.2362455678 \cdot 10^{-5}$	$-148.3798762966 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{\theta}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
T	3.3735109806	3.3740321066	3.3748348287

Tabela 4.9: Condições iniciais e período de uma OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ iniciada a uma mesma distância do ponto de equilíbrio do SVF - 2000 km, 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)

Obtenção de órbitas periódicas na vizinhança de $P_{\pi/2}(x_{eq}, 0, \frac{\pi}{2})$

A exemplo do que foi feito anteriormente, usamos 3 (três) SVF(s) com comprimentos de 2000 km, 3500 km e 5000 km, agora porém todos com inclinação inicial $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e taxa temporal de inclinação inicial $\dot{\theta}_0 = 0$. Obviamente adotamos massas adimensionais dadas por $\beta_1 = \beta_2$, para garantir a existência deste equilíbrio.

A tabela 4.10 mostra as coordenadas x_{eq} adimensionais tomando $x_{L2} = 0$ como origem, para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, extraídas a partir da tabela 3.1.

l (km)	x_{eq}
2000	$-1.4184014392 \cdot 10^{-5}$
3500	$-4.3456694937 \cdot 10^{-5}$
5000	$-8.8753533795 \cdot 10^{-5}$

Tabela 4.10: Coordenada x_{eq} adimensional do ponto de equilíbrio para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (Terra-Lua)

Adotando uma coordenada inicial $x_{0/Eq} = 9.9999999999 \cdot 10^{-5}$ em **relação aos pontos de equilíbrio** e a partir do coeficiente ρ da tabela 4.1 determinamos as condições iniciais para a obtenção de órbitas periódicas lineares para os três satélites considerados, conforme mostrado na tabela 4.11. A tabela 4.12 informa as condições iniciais para a obtenção de órbitas periódicas de Lyapunov obtidas pelo método de refinamento.

	$l = 2000$ km	$l = 3500$ km	$l = 5000$ km
x_0	$9.9999999999 \cdot 10^{-5}$	$9.9999999999 \cdot 10^{-5}$	$9.9999999999 \cdot 10^{-5}$
$\dot{x}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
y_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{y}_0$	$-61.9575570276 \cdot 10^{-5}$	$-77.8718055595 \cdot 10^{-5}$	$-102.5211037033 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{\theta}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
T	3.37250761640	3.3709629313	3.3685806079

Tabela 4.11: Condições iniciais e período para uma OPL em relação ao equilíbrio com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Terra-Lua)

Os gráficos das figuras 4.21, 4.22 e 4.23 mostram famílias com 500 órbitas periódicas, intercaladas de 20 em 20, obtidas pela continuação das órbitas periódicas dadas pelas condições iniciais da tabela 4.12, para os satélites com cabos de comprimentos de 2000 km, 3500 km e 5000 km, respectivamente. Vale ressaltar que para mantermos a precisão o passo foi mantido em 10^{-4} , a exemplo da obtenção das órbitas periódicas na vizinhança de $P_0(x_{eq}, 0, 0)$.

	$l = 2000 \text{ km}$	$l = 3500 \text{ km}$	$l = 5000 \text{ km}$
x_0	$14.1293865993 \cdot 10^{-5}$	$22.7420175134 \cdot 10^{-5}$	$36.1689164468 \cdot 10^{-5}$
$\dot{x}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
y_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{y}_0$	$-61.3102617386 \cdot 10^{-5}$	$-76.4032075679 \cdot 10^{-5}$	$-100.5072693443 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$1.5707963267 \cdot 10^0$	$1.5707963267 \cdot 10^0$	$1.5707963267 \cdot 10^0$
$\dot{\theta}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
T	3.3735108182	3.3740315139	3.3748330924

Tabela 4.12: Condições iniciais e período de uma OPN com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ iniciada a uma mesma distância do ponto de equilíbrio do SVF - 2000 km, 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)

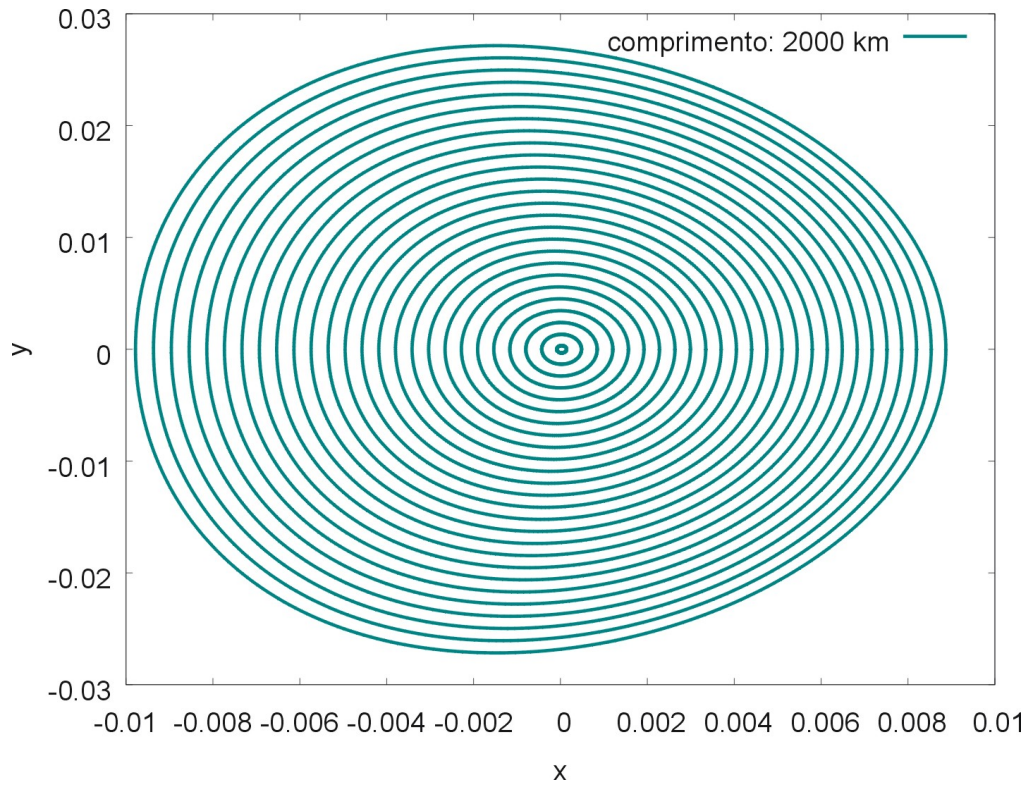


Figura 4.21: Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000 km - (Terra-Lua)

Pelo fato das órbitas serem muito próximas, mostramos no gráfico da figura 4.24 uma região ampliada das famílias de órbitas periódicas obtidas dos três satélites. Novamente podemos verificar que as órbitas não são translações uma das outras em relação a seus pontos de equilíbrio.

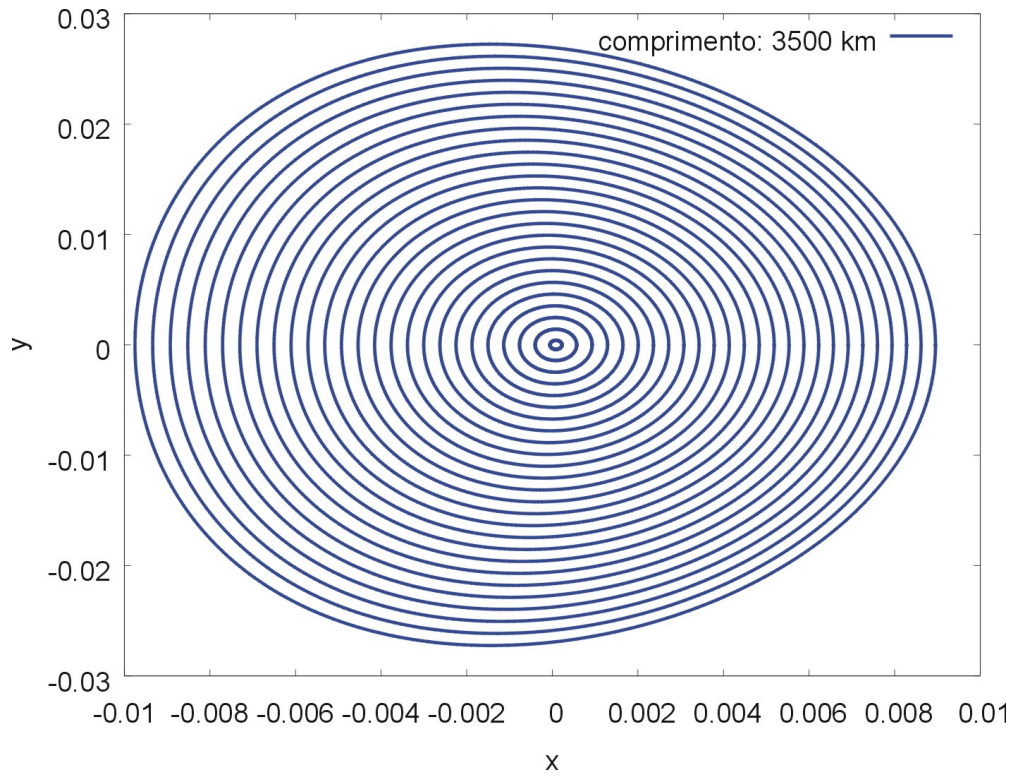


Figura 4.22: Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 3500 km - (Terra-Lua)

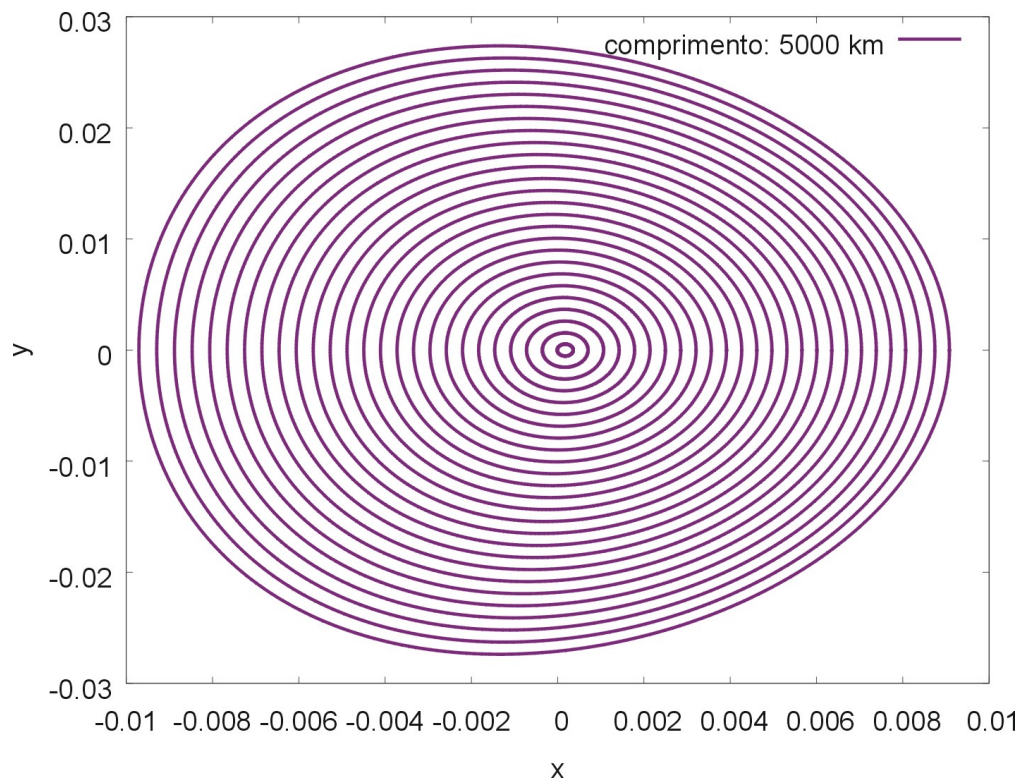


Figura 4.23: Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 5000 km - (Terra-Lua)

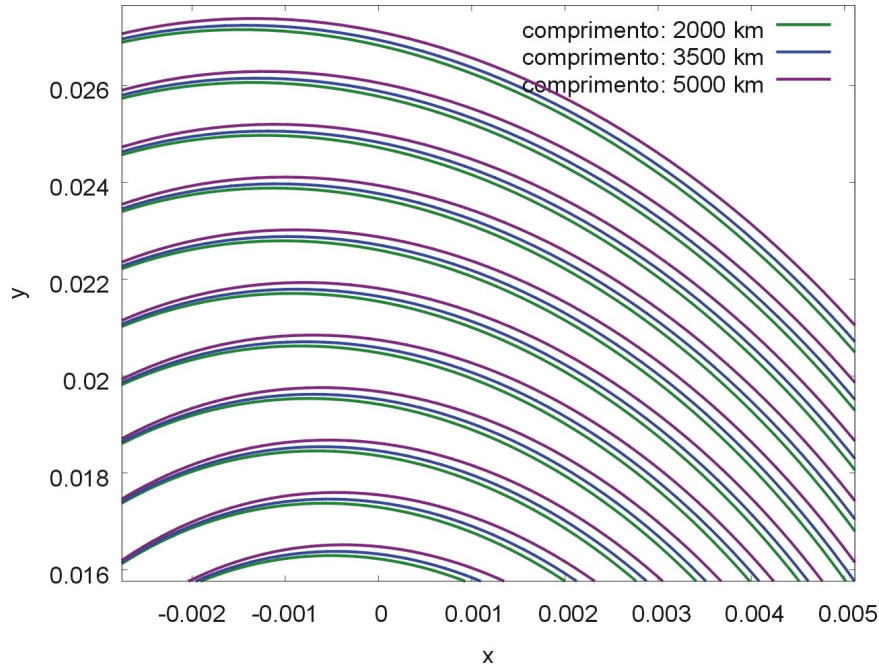


Figura 4.24: Ampliação da família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 2000km, 3500 km e 5000 km - (Terra-Lua)

4.4.2 Sistema Sol-Terra

Devido a análise realizada no capítulo anterior, no caso do sistema Sol-Terra calculamos órbitas periódicas para SVF(s) com comprimentos acima de 5000 km. Fixamos os parâmetros do sistema pelas tabelas 3.7 e 3.8. A figura 4.25 (fora de escala) informa os valores adimensionais da coordenada x dos corpos primários e do centro de massa do sistema tomando a origem sobre o L_2 ($x_{L_2} = 0$) do PR3C.



Figura 4.25: Coordenadas adimensionais para o sistema Sol-Terra

O afastamento inicial x_0 em relação ao L_2 do PR3C foi fixado em $1.0000000000 \cdot 10^{-5}$. Usamos para x_0 uma ordem de grandeza a menos que o usado no sistema Terra-Lua (10^{-4}). Isto é necessário para mantermos o SVF na vizinhança do ponto de equilíbrio do sistema e ao mesmo tempo afastado da Terra, que neste caso representa o corpo primário menos massivo. Comparando as figuras 4.9 e 4.25 verificamos que no caso do sistema Sol-Terra o

ponto lagrangiano está relativamente mais próximo da Terra, do que o ponto lagrangiano do sistema Terra-Lua está da Lua. Assim, para mantermos as aproximações angulares ($\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim 10^{-8}$) válidas, conforme já visto, e dentro dos limites de 10^{-11} e 10^{-9} devemos usar coordenadas iniciais e passo para obtenção da família de órbitas de Lyapunov da ordem de 10^{-5} .

Usamos um satélite com razão de massas 1 : 1 e cabo de comprimento 7500 km com as condições listadas nas tabelas 4.13 ($\theta_0 = 0$) e 4.14 ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$). Para cada vizinhança de equilíbrio, ou seja, $P_0(x_{eq}, 0, 0)$ e $P_{\pi/2}(x_{eq}, 0, \frac{\pi}{2})$, obtivemos uma família com 300 órbitas periódicas que está mostrada, intercalada de 20 em 20, nos gráficos das figuras 4.26 e 4.27.

	OPL	OPN
x_0	$1.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.9991911649 \cdot 10^{-5}$
$\dot{x}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
y_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{y}_0$	$-6.5290969101 \cdot 10^{-5}$	$-6.5292200948 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$1.5707963267 \cdot 10^{-5}$	$1.5707963267 \cdot 10^0$
$\dot{\theta}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
T	3.0544189806	3.0544362936

Tabela 4.13: Condições iniciais para uma OPL e uma OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 7500 km (Sol-Terra)

	OPL	OPN
x_0	$1.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$1.0053282617 \cdot 10^{-5}$
$\dot{x}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
y_0	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
$\dot{y}_0$	$-6.5703380942 \cdot 10^{-5}$	$-6.5695281306 \cdot 10^{-5}$
θ_0	$1.5707963267 \cdot 10^{-5}$	$1.5707963267 \cdot 10^0$
$\dot{\theta}_0$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$	$0.0000000000 \cdot 10^{-5}$
T	3.0544140444	3.0544351763

Tabela 4.14: Condições iniciais para uma OPL e uma OPN com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 7500 km (Sol-Terra)

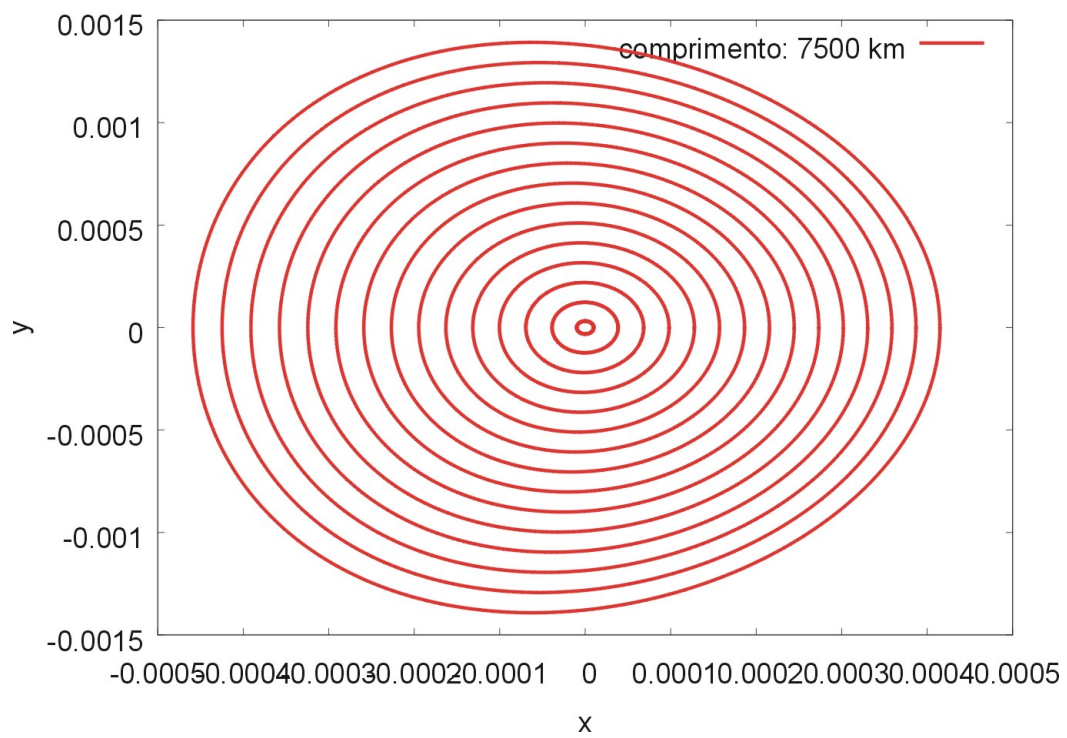


Figura 4.26: Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 7500 km (Sol-Terra)

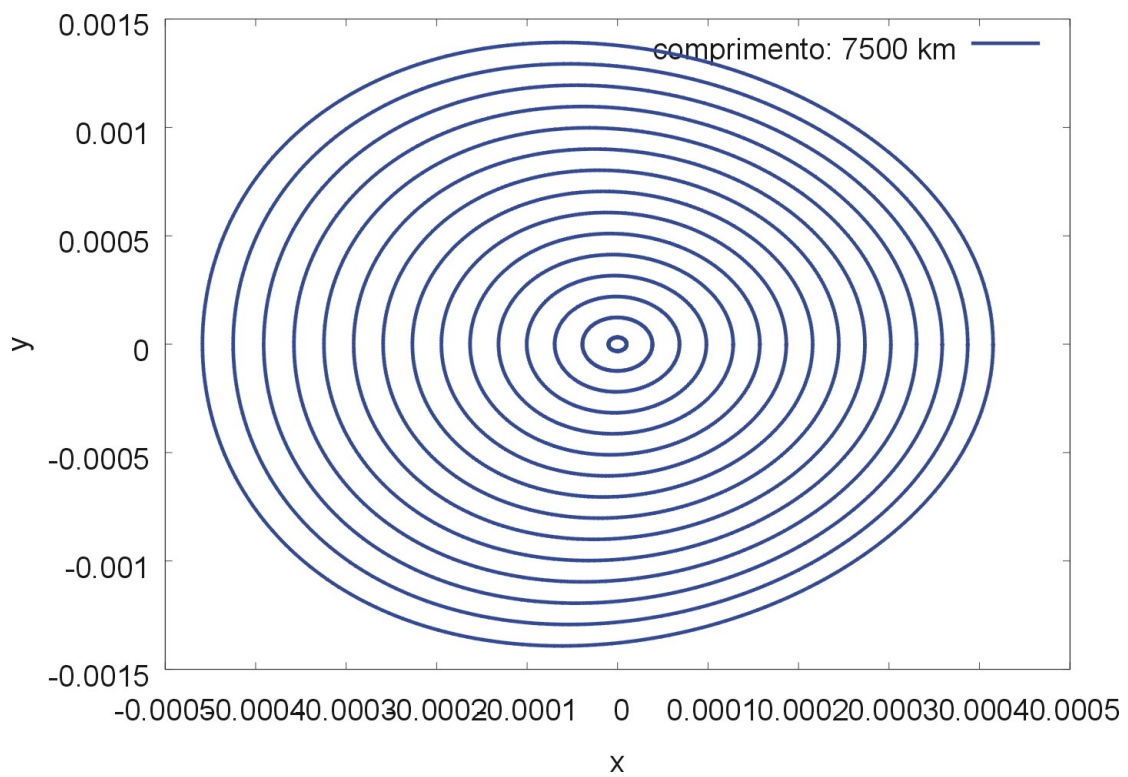


Figura 4.27: Família de órbitas periódicas com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ - 7500 km (Sol-Terra)

A exemplo do que ocorreu nas simulações usando o sistema Terra-Lua, as órbitas são muito próximas porém não são meras translações.

O gráfico da figura 4.28 mostra a curva característica dos pontos (x_0, T) para a família de órbitas periódicas determinada na vizinhança de $P_0(x_{eq}, 0, 0)$. Neste gráfico também está plotada a curva que representa um SVF com comprimento nulo, ou seja, o PR3C para o sistema Sol-Terra. Como podemos observar o satélite evolui em órbitas muito próximas a do PR3C, quando comparados ao sistema Terra-Lua, pois apesar da grande diferença dada pelo comprimento do cabo do satélite, os corpos primários do primeiro sistema estão mais afastados e são mais massivos, fazendo com que as órbitas de Lyapunov do SVF pouco se diferenciem das do PR3C para o caso do sistema Sol-Terra. O gráfico da figura 4.29 representa uma ampliação da região limitada para a coordenada x entre 0.00001 e 0.00007 do gráfico da figura 4.28.

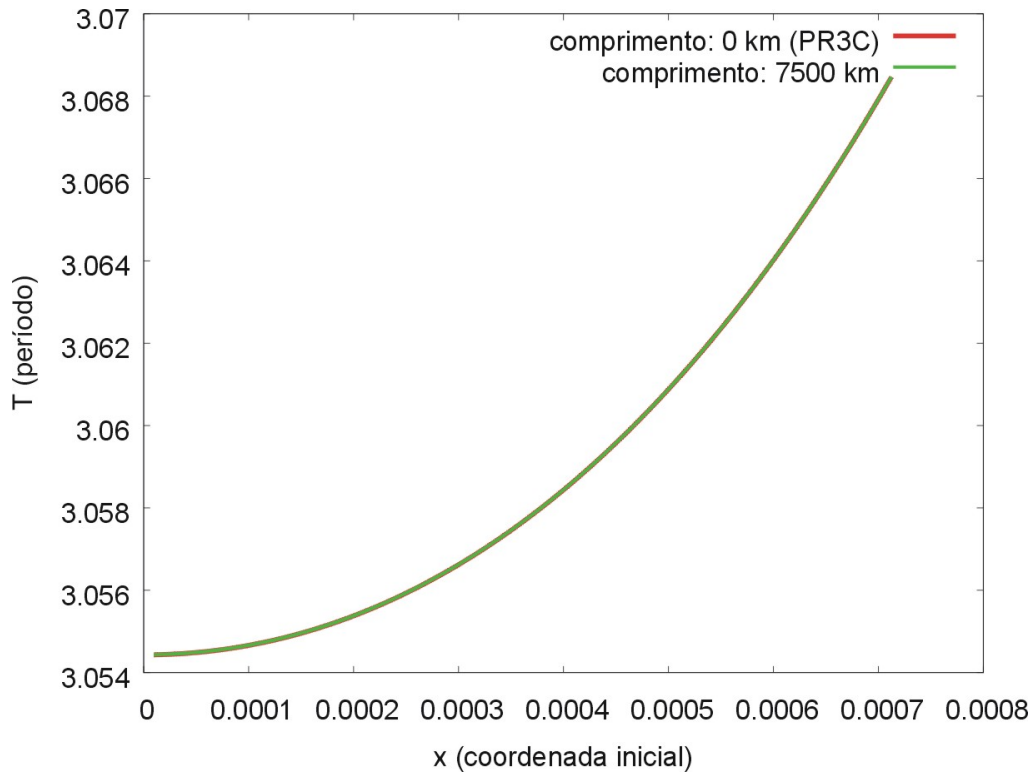


Figura 4.28: Curva característica para OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Sol-Terra)

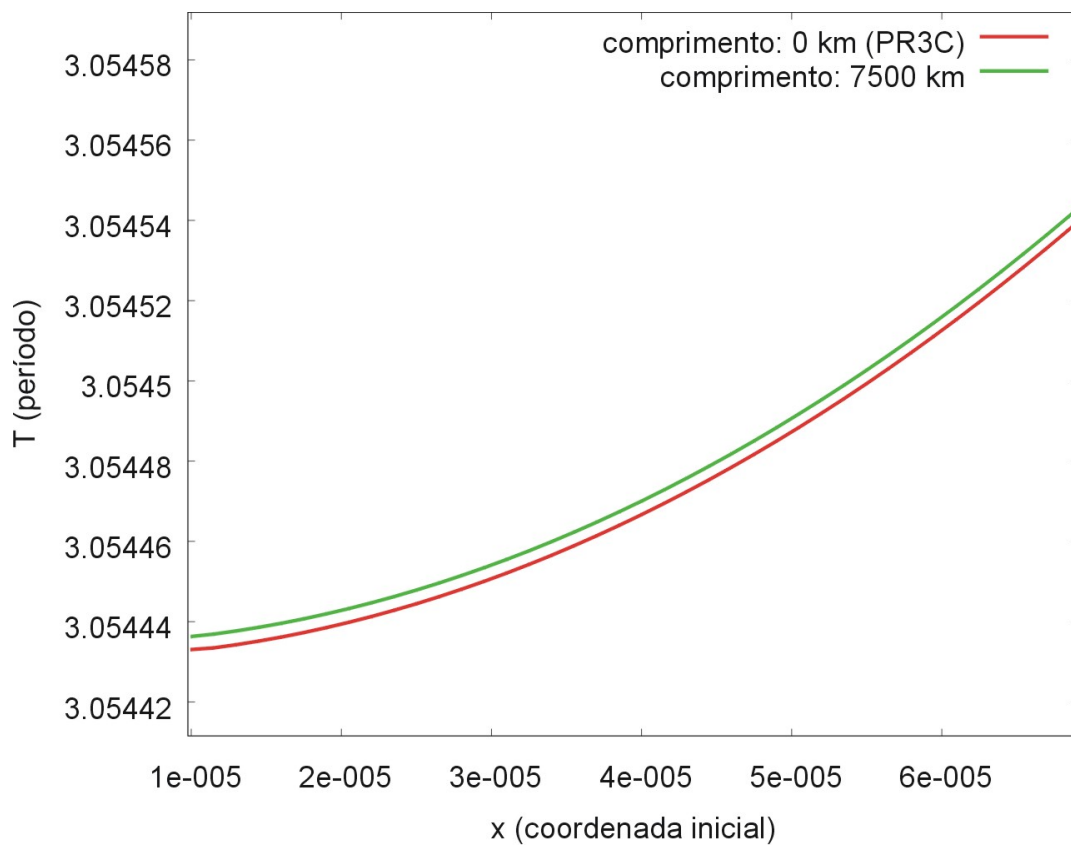


Figura 4.29: Curva característica (ampliada) para OPN com $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ (Sol-Terra)

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Como descrito no primeiro capítulo deste trabalho, o nosso principal objetivo foi obter equações de movimento para satélites vinculados na vizinhança dos pontos colineares do PR3C. É importante lembrarmos que na literatura científica um tratamento mais geral, ou seja, equações de movimento para satélites vinculados que permaneçam válidas em qualquer ponto do espaço ainda não foram obtidas, sendo a modelagem feita separadamente para a vizinhança dos colineares e dos triangulares.

No capítulo 2, a partir das restrições impostas ao modelo obtivemos a lagrangiana do sistema e com isso chegamos às equações de movimento. Verificamos que o nosso modelo se reduz completamente ao PR3C quando o comprimento do cabo que une os satélites for nulo, e isto ocorreu como consequência da forma como a expansão do potencial em polinômios de Legendre foi introduzida. Como já salientamos a modelagem de Misra [12] não se reduz ao PR3C quando $l = 0$.

Obtivemos as equações para os pontos de equilíbrio que são polinômios de grau 7, reduzindo-se a quártica de Euler quando o comprimento é nulo.

No capítulo 3 implementamos aplicações numéricas usando os sistemas Terra-Lua e Sol-Terra a fim de determinarmos a localização dos pontos de equilíbrio na vizinhança do L_2 do PR3C. Deste ponto em diante passamos a considerar o cabo rígido que une os satélites não variável com o tempo, ou seja, com comprimento fixo, e assim definimos um SVF (sistema vinculado fixo).

Foi possível verificarmos a grande diferença entre os sistemas Terra-Lua e Sol-Terra, sob o ponto de vista da variação do ponto de equilíbrio do SVF em relação ao L_2 do PR3C, devido às características dos corpos primários. Notamos que, por exemplo, para

um comprimento de 6000 km no Sol-Terra a variação é de apenas 4.022 km, enquanto que no Terra-Lua a variação correspondente foi de 98.891 km. Desta forma podemos concluir que para o sistema Sol-Terra o SVF é mais próximo a um corpo sem estrutura, mas mesmo assim se diferencia do corpo único, o que é importante para possíveis aplicações usando leis de controle com variação do comprimento.

Para compreendermos como a variação de alguns parâmetros do SVF influencia na evolução dinâmica do mesmo, fizemos uma análise baseada em simulações e verificamos algumas das principais características do sistema, tais como:

- a consistência numérica das equações de movimento por nós obtidas no que diz respeito à evolução temporal da situação de equilíbrio, isto é, a simulação numérica confirma o ponto de equilíbrio encontrado;
- a estabilidade com relação as variáveis angulares do SVF quando as condições iniciais são favoráveis, ou seja, os satélites permanecem librando em torno do seu centro de massa, mesmo quando se afastam espacialmente da posição de equilíbrio, apenas oscilando em torno do equilíbrio $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- a velocidade angular mantém-se em média com amplitude próxima ao valor inicial, pelo menos nas simulações realizadas;
- a pequena influência tanto do comprimento do cabo como das massas dos satélites com relação à evolução angular de um SVF, pois a atitude do satélite é pouco influenciada por estes parâmetros;
- a expressiva influência do comprimento do cabo na evolução temporal das variáveis espaciais, principalmente quando aplicado ao sistema Terra-Lua, em virtude de um afastamento relativo considerável do ponto de equilíbrio do SVF em relação ao L_2 do PR3C e
- para que o SVF se diferencie de um corpo único as massas m_1 e m_2 devem ser próximas.

No capítulo 4 iniciamos com a linearização do sistema de equações diferenciais que descrevem o SVF na vizinhança do equilíbrio. Calculamos analiticamente a matriz jacobiana e aplicamos aos sistemas Terra-Lua e Sol-Terra.

Usando o método de continuação numérica calculamos famílias de órbitas periódicas de Lyapunov para alguns comprimentos l do SVF. Tal método foi implementado com um algoritmo do tipo preditor-corretor escrito em C^{++} , que usa as condições iniciais de órbitas periódicas lineares, anteriormente obtidas.

Algumas sugestões para a continuação deste trabalho podem ser dadas principalmente no que se refere às restrições por nós impostas ao modelo. Podemos:

- incluir a massa do cabo que une os satélites e não mais considerá-lo ideal e rígido, considerando a possibilidade deste cabo sofrer tensões negativas, deformações e torções;
- incluir a excentricidade da órbita dos corpos primários, tornando a velocidade de rotação do referencial sinódico variável e
- incluir condições iniciais que não mais mantenham os satélites no plano definido pelos corpos primários, fazendo com que a modelagem inclua as variáveis z e $\dot{z}$, além de mais 2 (dois) ângulos para descrever a atitude dos satélites, tornando o problema tridimensional. Neste caso as órbitas periódicas de Lyapunov podem se bifurcar em órbitas periódicas do tipo halo, isto é, quando o w_h e w_v forem ressonantes. Teremos ainda, para este caso, órbitas periódicas de Lyapunov do tipo oito.

Tanto no caso plano como no espacial merecem ser estudadas as órbitas periódicas de Lyapunov parametrizadas pelo comprimento l .

Podemos também incluir nos modelos os efeitos fotogravitacionais oriundos da pressão de radiação solar. Outra modificação importante que pode ser realizada é a inclusão de efeitos eletromagnéticos sobre o cabo que une os satélites. Esta ação introduz, através da força de Lorentz, uma componente a mais na lagrangiana do sistema e deve ser considerada em sistemas primários onde o plasma está ionizado, como por exemplo na colocação de um satélite vinculado para a exploração do sistema Júpiter-Io.

Cabe ainda um estudo impondo uma lei de controle para o comprimento tornando o sistema um SVV ($\dot{l} \neq 0$) e averiguar a estabilização com o nosso modelo para diferentes leis de controle $l(t)$. Aventamos também a possibilidade de mediante controle estabilizarmos o SVV em órbitas periódicas.

Apêndice A

Energia cinética

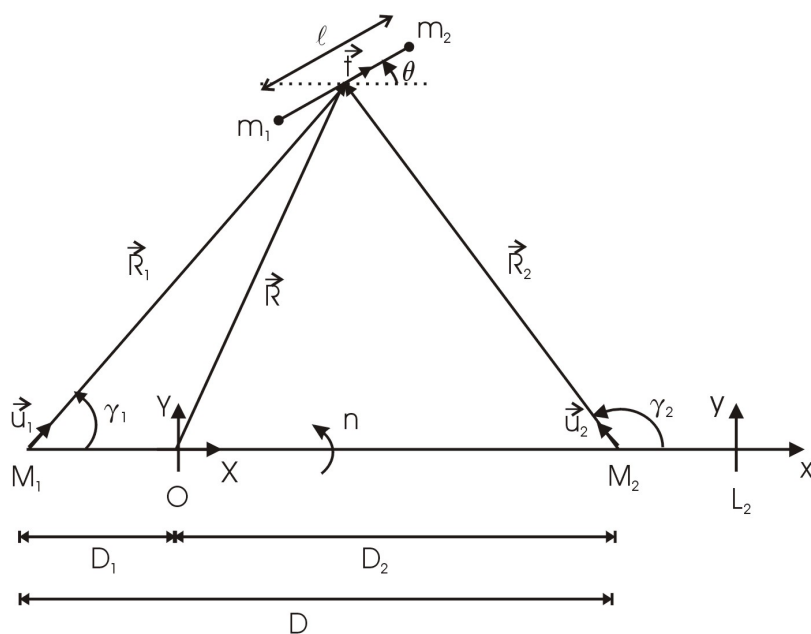


Figura A.1: Representação básica do modelo

$$d_1 = \beta_2 l \quad d_2 = \beta_1 l \quad \beta_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \beta_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$D_1 = \mu D \quad D_2 = (1 - \mu) D \quad \mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad 1 - \mu = \frac{M_1}{M_1 + M_2}$$

$$\vec{t} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad n = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{D^3}} \quad X = X_o + x \quad Y = Y_o + y$$

$$\begin{aligned}\vec{R} &= X\vec{i} + Y\vec{j} = (X_o + x)\vec{i} + (Y_o + y)\vec{j} \\ \vec{R}_1 &= (X + D_1)\vec{i} + Y\vec{j} = (D_1 + X_o + x)\vec{i} + (Y_o + y)\vec{j} \\ \vec{R}_2 &= (X - D_2)\vec{i} + Y\vec{j} = (-D_2 + X_o + x)\vec{i} + (Y_o + y)\vec{j}\end{aligned}$$

- vetores posição de m_1 e m_2 em relação a O (fixo)

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - d_1\vec{t} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + d_2\vec{t}$$

- vetores velocidades de m_1 e m_2 em relação a O (fixo)

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \frac{d}{dt}(\vec{R} - d_1\vec{t}) = \dot{\vec{R}} - \dot{d}_1\vec{t} - d_1\dot{\vec{t}} = \vec{R} - \dot{d}_1\vec{t} - d_1(\vec{\omega}_f \times \vec{t}) \\ \vec{V}_1 &= \vec{R} + \vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t}) - \dot{d}_1\vec{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_2 &= \frac{d}{dt}(\vec{R} + d_2\vec{t}) = \dot{\vec{R}} + \dot{d}_2\vec{t} + d_2\dot{\vec{t}} = \vec{R} + \dot{d}_2\vec{t} + d_2(\vec{\omega}_f \times \vec{t}) \\ \vec{V}_2 &= \vec{R} + \vec{\omega}_f \times d_2\vec{t} + \dot{d}_2\vec{t}\end{aligned}$$

$$\text{com } \vec{\omega}_f = (n + \dot{\theta})\vec{k}$$

- energia cinética de m_1 e m_2

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m_1(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1) + \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2)$$

- cálculo de $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1$

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 &= [\dot{\vec{R}} + \vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t}) - \dot{d}_1\vec{t}] \cdot [\dot{\vec{R}} + \vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t}) - \dot{d}_1\vec{t}] \\ \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 &= \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}} \cdot (-\dot{d}_1\vec{t}) + \dot{\vec{R}} \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})] + \dot{\vec{R}} \cdot (-\dot{d}_1\vec{t}) + \dot{d}_1^2\vec{t} \cdot \vec{t} - \\ &\quad (\dot{d}_1\vec{t}) \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})] + \dot{\vec{R}} \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})] - (\dot{d}_1\vec{t}) \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})] + \\ &\quad [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})] \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})] \\ \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 &= \underbrace{\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}}_{(A)} + \underbrace{2\dot{\vec{R}} \cdot (-\dot{d}_1\vec{t})}_{(B)} + \underbrace{2\dot{\vec{R}} \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})]}_{(C)} + \underbrace{2(-\dot{d}_1\vec{t}) \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})]}_{(D)} + \\ &\quad \underbrace{[\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})] \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})]}_{(E)} + \underbrace{\dot{d}_1^2\vec{t} \cdot \vec{t}}_{(F)}\end{aligned} \tag{A.1}$$

- cálculo de $\dot{\vec{R}}$: $\vec{R} = (X_o + x)\vec{i} + (Y_o + y)\vec{j}$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{R}} &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + (X_o + x)\dot{\vec{i}} + (Y_o + y)\dot{\vec{j}} \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + (X_o + x)[n\vec{k} \times \vec{i}] + (Y_o + y)[n\vec{k} \times \vec{j}] \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + n(X_o + x)\vec{j} - n(Y_o + y)\vec{i} \\ \dot{\vec{R}} &= [\dot{x} - n(Y_o + y)]\vec{i} + [\dot{y} + n(X_o + x)]\vec{j}\end{aligned}$$

- cálculo de (A) : $A = \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}$

$$\begin{aligned}A &= \{[\dot{x} - n(Y_o + y)]\vec{i} + [\dot{y} + n(X_o + x)]\vec{j}\} \cdot \{[\dot{x} - n(Y_o + y)]\vec{i} + [\dot{y} + n(X_o + x)]\vec{j}\} \\ A &= [\dot{x} - n(Y_o + y)]^2 + [\dot{y} + n(X_o + x)]^2 \\ A &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n(Y_o + y)\dot{x} + 2n(X_o + x)\dot{y} + n^2[(Y_o + y)^2 + (X_o + x)^2]\end{aligned}$$

- cálculo de (B) : $B = 2\dot{\vec{R}} \cdot (-\dot{d}_1)\vec{t}$

$$\begin{aligned}B &= 2[(\dot{x} - n(Y_o + y))\vec{i} + (\dot{y} + n(X_o + x))\vec{j}] \cdot [-\dot{d}_1 \cos \theta \vec{i} - \dot{d}_1 \sin \theta \vec{j}] \\ B &= -2\dot{d}_1 \cos \theta [\dot{x} - n(Y_o + y)] - 2\dot{d}_1 \sin \theta [\dot{y} + n(X_o + x)] \\ B &= -2\dot{d}_1 \cos \theta \dot{x} - 2\dot{d}_1 \sin \theta \dot{y} + 2\dot{d}_1 \cos \theta n(Y_o + y) - 2\dot{d}_1 \sin \theta n(X_o + x)\end{aligned}$$

- cálculo de (C) : $C = 2\dot{\vec{R}} \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})]$

$$\begin{aligned}C &= 2[(\dot{x} - n(Y_o + y))\vec{i} + (\dot{y} + n(X_o + x))\vec{j}] \cdot [(n + \dot{\theta})\vec{k} \times (-d_1 \cos \theta \vec{i} - d_1 \sin \theta \vec{j})] \\ C &= 2[(\dot{x} - n(Y_o + y))\vec{i} + (\dot{y} + n(X_o + x))\vec{j}] \cdot [-(n + \dot{\theta})d_1 \cos \theta \vec{j} + (n + \dot{\theta})d_1 \sin \theta \vec{i}] \\ C &= 2(\dot{x} - n(Y_o + y))(n + \dot{\theta})d_1 \sin \theta - 2(\dot{y} + n(X_o + x))(n + \dot{\theta})d_1 \cos \theta\end{aligned}$$

- cálculo de (D) : $D = 2(-\dot{d}_1\vec{t}) \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})]$

$$\begin{aligned}D &= 2[-\dot{d}_1 \cos \theta \vec{i} - \dot{d}_1 \sin \theta \vec{j}] \cdot [-(n + \dot{\theta})d_1 \cos \theta \vec{j} + (n + \dot{\theta})d_1 \sin \theta \vec{i}] \\ D &= -2\dot{d}_1 d_1 \cos \theta \sin \theta (n + \dot{\theta}) + 2\dot{d}_1 d_1 \sin \theta \cos \theta (n + \dot{\theta}) \\ D &= 0\end{aligned}$$

- cálculo de (E) : $E = [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})] \cdot [\vec{\omega}_f \times (-d_1\vec{t})]$

$$\begin{aligned}E &= [-(n + \dot{\theta})d_1 \cos \theta \vec{j} + (n + \dot{\theta})d_1 \sin \theta \vec{i}] \cdot [-(n + \dot{\theta})d_1 \cos \theta \vec{j} + (n + \dot{\theta})d_1 \sin \theta \vec{i}] \\ E &= (n + \dot{\theta})^2 d_1^2 (\sin \theta)^2 + (n + \dot{\theta})^2 d_1^2 (\cos \theta)^2 \\ E &= (n + \dot{\theta})^2 d_1^2\end{aligned}$$

- cálculo de (F) : $F = \dot{d}_1^2 \vec{t} \cdot \vec{t}$

$$F = \dot{d}_1^2 (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

$$F = \dot{d}_1^2 [(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2]$$

$$F = \dot{d}_1^2$$

Voltando a equação (A.1), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = & \{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n(Y_o + y)\dot{x} + 2n(X_o + x)\dot{y} + n^2[(Y_o + y)^2 + (X_o + x)^2] - \\ & 2\dot{d}_1 \cos \theta \dot{x} - 2\dot{d}_1 \sin \theta \dot{y} + 2\dot{d}_1 \cos \theta n(Y_o + y) - 2\dot{d}_1 \sin \theta n(X_o + x) + \\ & 2[\dot{x} - n(Y_o + y)](n + \dot{\theta})\dot{d}_1 \sin \theta - 2[\dot{y} - n(X_o + x)](n + \dot{\theta})\dot{d}_1 \cos \theta + \\ & (n + \dot{\theta})^2 \dot{d}_1^2 + \dot{d}_1^2 \} \end{aligned} \quad (A.2)$$

- cálculo de $\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2$

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = [\dot{\vec{R}} + \vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t}) + \dot{d}_2 \vec{t}] \cdot [\dot{\vec{R}} + \vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t}) + \dot{d}_2 \vec{t}]$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = & \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}} \cdot (\dot{d}_2 \vec{t}) + \dot{\vec{R}} \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})] + \dot{\vec{R}} \cdot (\dot{d}_2 \vec{t}) + \dot{d}_2^2 \vec{t} \cdot \vec{t} + \\ & (\dot{d}_2 \vec{t}) \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})] + \dot{\vec{R}} \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})] + (\dot{d}_2 \vec{t}) \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})] + \\ & [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})] \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = & \underbrace{\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}}_{(G)} + \underbrace{2\dot{\vec{R}} \cdot (\dot{d}_2 \vec{t})}_{(H)} + \underbrace{2\dot{\vec{R}} \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})]}_{(I)} + \underbrace{2(\dot{d}_2 \vec{t}) \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})]}_{(J)} + \\ & \underbrace{[\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})] \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})]}_{(L)} + \underbrace{\dot{d}_2^2 \vec{t} \cdot \vec{t}}_{(M)} \end{aligned} \quad (A.3)$$

- cálculo de (G) : $G = A$

- cálculo de (H) : $H = 2\dot{\vec{R}} \cdot (\dot{d}_2 \vec{t})$

$$H = 2[(\dot{x} - n(Y_o + y))\vec{i} + (\dot{y} + n(X_o + x))\vec{j}] \cdot [\dot{d}_2 \cos \theta \vec{i} + \dot{d}_2 \sin \theta \vec{j}]$$

$$H = 2\dot{d}_2 \cos \theta [\dot{x} - n(Y_o + y)] + 2\dot{d}_2 \sin \theta [\dot{y} + n(X_o + x)]$$

$$H = 2\dot{d}_2 \cos \theta \dot{x} + 2\dot{d}_2 \sin \theta \dot{y} - 2\dot{d}_2 \cos \theta n(Y_o + y) + 2\dot{d}_2 \sin \theta n(X_o + x)$$

- cálculo de (I) : $I = 2\dot{\vec{R}} \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})]$

$$I = 2[(\dot{x} - n(Y_o + y))\vec{i} + (\dot{y} + n(X_o + x))\vec{j}] \cdot [(n + \dot{\theta})\vec{k} \times (d_2 \cos \theta \vec{i} + d_2 \sin \theta \vec{j})]$$

$$I = 2[(\dot{x} - n(Y_o + y))\vec{i} + (\dot{y} + n(X_o + x))\vec{j}] \cdot [(n + \dot{\theta})d_2 \cos \theta \vec{j} - (n + \dot{\theta})d_2 \sin \theta \vec{i}]$$

$$I = -2(\dot{x} - n(Y_o + y))(n + \dot{\theta})d_2 \sin \theta + 2(\dot{y} + n(X_o + x))(n + \dot{\theta})d_2 \cos \theta$$

- cálculo de (J) : $J = 2(\dot{d}_2 \vec{t}) \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})]$

$$J = 2[\dot{d}_2 \cos \theta \vec{i} + \dot{d}_2 \sin \theta \vec{j}] \cdot [(n + \dot{\theta}) d_2 \cos \theta \vec{j} - (n + \dot{\theta}) d_2 \sin \theta \vec{i}]$$

$$J = 2\dot{d}_2 d_2 \cos \theta \sin \theta (n + \dot{\theta}) - 2\dot{d}_2 d_2 \sin \theta \cos \theta (n + \dot{\theta})$$

$$J = 0$$

- cálculo de (L) : $L = [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})] \cdot [\vec{\omega}_f \times (d_2 \vec{t})]$

$$L = [(n + \dot{\theta}) d_2 \cos \theta \vec{j} - (n + \dot{\theta}) d_2 \sin \theta \vec{i}] \cdot [(n + \dot{\theta}) d_2 \cos \theta \vec{j} - (n + \dot{\theta}) d_2 \sin \theta \vec{i}]$$

$$L = (n + \dot{\theta})^2 d_2^2 (\sin \theta)^2 + (n + \dot{\theta})^2 d_2^2 (\cos \theta)^2$$

$$L = (n + \dot{\theta})^2 d_2^2$$

- cálculo de (M) : $M = \dot{d}_2^2 \vec{t} \cdot \vec{t}$

$$M = \dot{d}_2^2 (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \cdot (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

$$M = \dot{d}_2^2 [(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2]$$

$$M = \dot{d}_2^2$$

Voltando a equação (A.3), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = & \{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n(Y_o + y)\dot{x} + 2n(X_o + x)\dot{y} + n^2[(Y_o + y)^2 + (X_o + x)^2] + \\ & 2\dot{d}_2 \cos \theta \dot{x} + 2\dot{d}_2 \sin \theta \dot{y} - 2\dot{d}_2 \cos \theta n(Y_o + y) + 2\dot{d}_2 \sin \theta n(X_o + x) - \\ & 2[\dot{x} - n(Y_o + y)](n + \dot{\theta}) d_2 \sin \theta + 2[\dot{y} + n(X_o + x)](n + \dot{\theta}) d_2 \cos \theta + \\ & (n + \dot{\theta})^2 d_2^2 + \dot{d}_2^2 \} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Com as equações (A.2) e (A.4) obtemos uma equação para a energia cinética total do sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n(Y_o + y)\dot{x} + 2n(X_o + x)\dot{y} + n^2[(X_o + x)^2 + (Y_o + y)^2]\} + \\ & \underline{(-m_1 \dot{d}_1 + m_2 \dot{d}_2) \cos \theta \dot{x}} + \underline{(-m_1 \dot{d}_1 + m_2 \dot{d}_2) \sin \theta \dot{y}} + \underline{(m_1 \dot{d}_1 - m_2 \dot{d}_2) \cos \theta n(Y_o + y)} + \\ & \underline{(-m_1 \dot{d}_1 + m_2 \dot{d}_2) \sin \theta n(X_o + x)} + \underline{2(m_1 d_1 - m_2 d_2)(\dot{x} - n(Y_o + y))(n + \dot{\theta}) \sin \theta} + \\ & \underline{2(-m_1 d_1 + m_2 d_2)(\dot{y} + n(Y_o + y))(n + \dot{\theta}) \cos \theta} + (n + \dot{\theta})^2 \left[\frac{1}{2} m_1 d_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 \right] + \\ & \frac{1}{2} m_1 \dot{d}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Como d_1 e d_2 são tomados em relação ao centro de massa de m_1 e m_2 , temos que $-m_1 d_1 + m_2 d_2 = 0$ e $-m_1 \dot{d}_1 + m_2 \dot{d}_2 = 0$, anulando a parte destacada da equação (A.5).

Usando as definições de β_1 e β_2 , temos

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n(Y_o + y)\dot{x} + 2n(X_o + x)\dot{y} + n^2[(X_o + x)^2 + (Y_o + y)^2]\} + \underbrace{(n + \dot{\theta})^2\left[\frac{1}{2}m_1\beta_2^2 l^2 + \frac{1}{2}m_2\beta_1^2 l^2\right] + \frac{1}{2}m_1\dot{\beta}_2^2 \dot{l}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\beta}_1^2 \dot{l}^2}_{(N)}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{l^2(n + \dot{\theta})^2}{2}[m_1\beta_2^2 + m_2\beta_1^2] + \frac{\dot{l}^2}{2}[m_1\beta_2^2 + m_2\beta_1^2] \\ N &= [m_1\beta_2^2 + m_2\beta_1^2] \left[\frac{l^2(n + \dot{\theta})^2}{2} + \frac{\dot{l}^2}{2} \right] \\ N &= \left[m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \frac{1}{2}[l^2(n + \dot{\theta})^2 + \dot{l}^2] \\ N &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\beta_1\beta_2[l^2(n + \dot{\theta})^2 + \dot{l}^2] \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2n\dot{x}(Y_o + y) + 2n\dot{y}(X_o + x) + n^2[(X_o + x)^2 + (Y_o + y)^2] + \beta_1\beta_2[(n + \dot{\theta})^2 l^2 + \dot{l}^2]\right\} \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Energia potencial

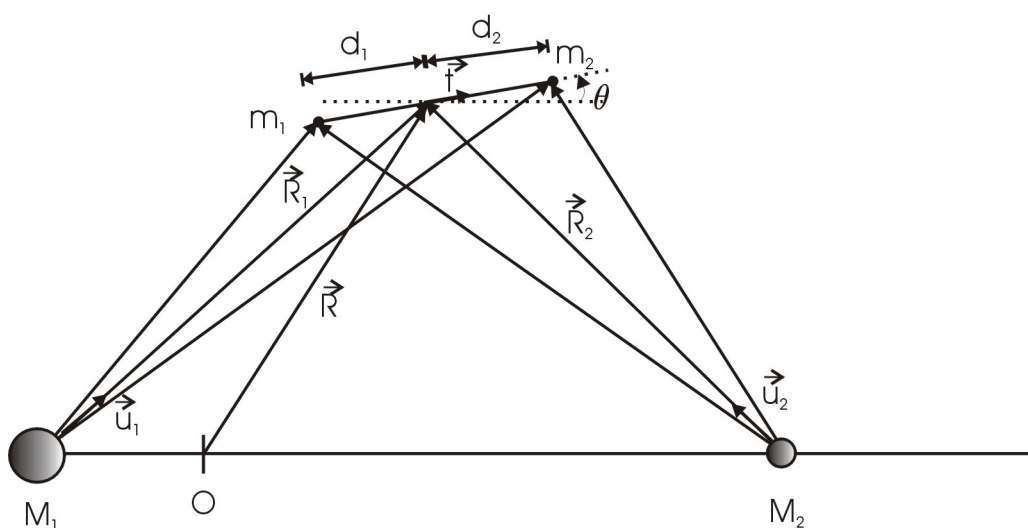


Figura B.1: Vetores posição

$$\vec{R}_1 = R_1 \vec{u}_1 \quad \vec{R}_2 = R_2 \vec{u}_2 \quad \vec{d}_1 = -d_1 \vec{t} \quad \vec{d}_2 = d_2 \vec{t}$$

A equação 2.17 pode ser expandida através de séries de potência usando como coeficientes os polinômios de Legendre como pode ser visto em Butkov [4]. Os primeiros cinco polinômios são dados a seguir.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Partindo da clássica expansão em série

$$\frac{1}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{A^{n+1}} P_n\left(\frac{\vec{A}}{A} \cdot \frac{\vec{B}}{B}\right)$$

chegamos a uma forma adequada para expandir cada um dos quatro termos da equação 2.17.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R}_1 - d_1 \vec{t}|} &= \frac{d_1^0}{R_1^1} P_0(\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \frac{d_1^1}{R_1^2} P_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \frac{d_1^2}{R_1^3} P_2(\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \\ &\quad \frac{d_1^3}{R_1^4} P_3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \frac{d_1^4}{R_1^5} P_4(\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R}_1 - d_1 \vec{t}|} &= \frac{1}{R_1} + \frac{d_1^1}{R_1^2} (\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \frac{d_1^2}{R_1^3} \frac{1}{2} [3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 - 1] + \\ &\quad \frac{d_1^3}{R_1^4} \frac{1}{2} [5(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})] + \frac{d_1^4}{R_1^5} \frac{1}{8} [35(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 + 3] \end{aligned}$$

analogamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R}_2 - d_1 \vec{t}|} &= \frac{1}{R_2} + \frac{d_1^1}{R_2^2}(\vec{u}_2 \cdot \vec{t}) + \frac{d_1^2}{R_2^3} \frac{1}{2} [3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 - 1] + \\ &\quad \frac{d_1^3}{R_2^4} \frac{1}{2} [5(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})] + \frac{d_1^4}{R_2^5} \frac{1}{8} [35(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 + 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R}_1 + d_2 \vec{t}|} &= \frac{1}{R_1} - \frac{d_2^1}{R_1^2}(\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \frac{d_2^2}{R_1^3} \frac{1}{2} [3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 - 1] - \\ &\quad \frac{d_2^3}{R_1^4} \frac{1}{2} [5(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})] + \frac{d_2^4}{R_1^5} \frac{1}{8} [35(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 + 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{R}_2 + d_2 \vec{t}|} &= \frac{1}{R_2} - \frac{d_2^1}{R_2^2}(\vec{u}_2 \cdot \vec{t}) + \frac{d_2^2}{R_2^3} \frac{1}{2} [3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 - 1] - \\ &\quad \frac{d_2^3}{R_2^4} \frac{1}{2} [5(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})] + \frac{d_2^4}{R_2^5} \frac{1}{8} [35(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 + 3] \end{aligned}$$

A energia potencial pode então ser obtida a partir da equação 2.17.

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{-GM_1 m_1}{R_1} \left[1 + \frac{d_1}{R_1}(\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \underbrace{\left(\frac{d_1}{R_1} \right)^2 \frac{1}{2} [3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 - 1]}_{(A_1)} + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\left(\frac{d_1}{R_1} \right)^3 \frac{1}{2} [5(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})]}_{(B_1)} + \underbrace{\left(\frac{d_1}{R_1} \right)^4 \frac{1}{8} [35(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 + 3]}_{(C_1)} \right] + \\ &\quad \frac{-GM_2 m_1}{R_2} \left[1 + \frac{d_1}{R_2}(\vec{u}_2 \cdot \vec{t}) + \underbrace{\left(\frac{d_1}{R_2} \right)^2 \frac{1}{2} [3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 - 1]}_{(A_2)} + \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\left(\frac{d_1}{R_2} \right)^3 \frac{1}{2} [5(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})]}_{(B_2)} + \underbrace{\left(\frac{d_1}{R_2} \right)^4 \frac{1}{8} [35(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 + 3]}_{(C_2)} \right] + \\ &\quad \frac{-GM_1 m_2}{R_1} \left[1 - \frac{d_2}{R_1}(\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \underbrace{\left(\frac{d_2}{R_1} \right)^2 \frac{1}{2} [3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 - 1]}_{(A_1)} - \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\left(\frac{d_2}{R_1} \right)^3 \frac{1}{2} [5(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})]}_{(B_1)} + \underbrace{\left(\frac{d_2}{R_1} \right)^4 \frac{1}{8} [35(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 + 3]}_{(C_1)} \right] + \\ &\quad \frac{-GM_2 m_2}{R_2} \left[1 - \frac{d_2}{R_2}(\vec{u}_2 \cdot \vec{t}) + \underbrace{\left(\frac{d_2}{R_2} \right)^2 \frac{1}{2} [3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 - 1]}_{(A_2)} - \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\left(\frac{d_2}{R_2} \right)^3 \frac{1}{2} [5(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})]}_{(B_2)} + \underbrace{\left(\frac{d_2}{R_2} \right)^4 \frac{1}{8} [35(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 + 3]}_{(C_2)} \right] \end{aligned}$$

Admitindo uma mudança de variáveis de tal forma a considerar a energia potencial decomposta em ordens crescentes da razão $\frac{d_i}{R_j}$, com $i, j \in \{1, 2\}$, temos:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4 \quad (\text{B.1})$$

- cálculo de $\mathcal{V}_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \frac{-GM_1 m_1}{R_1} + \frac{-GM_2 m_1}{R_2} + \frac{-GM_1 m_2}{R_1} + \frac{-GM_2 m_2}{R_2} \\ \mathcal{V}_0 &= -(m_1 + m_2) \left(\frac{GM_1}{R_1} + \frac{GM_2}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

- cálculo de $\mathcal{V}_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \frac{-GM_1 m_1}{R_1} \frac{d_1}{R_1} (\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \frac{-GM_2 m_1}{R_2} \frac{d_1}{R_2} (\vec{u}_2 \cdot \vec{t}) + \frac{-GM_1 m_2}{R_1} \frac{-d_2}{R_1} (\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) + \\ &\quad \frac{-GM_2 m_2}{R_2} \frac{-d_2}{R_2} (\vec{u}_2 \cdot \vec{t}) \\ \mathcal{V}_1 &= \frac{-GM_1}{R_1^2} [m_1 d_1 - m_2 d_2] (\vec{u}_1 \cdot \vec{t}) - \frac{GM_2}{R_2^2} [m_1 d_1 - m_2 d_2] (\vec{u}_2 \cdot \vec{t}) \\ \mathcal{V}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

- cálculo de $\mathcal{V}_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \left[\frac{-GM_1 m_1}{R_1} \left(\frac{d_1}{R_1} \right)^2 \frac{1}{2} + \frac{-GM_1 m_2}{R_1} \left(\frac{d_2}{R_1} \right)^2 \frac{1}{2} \right] A_1 + \\ &\quad \left[\frac{-GM_2 m_1}{R_2} \left(\frac{d_1}{R_2} \right)^2 \frac{1}{2} + \frac{-GM_2 m_2}{R_2} \left(\frac{d_2}{R_2} \right)^2 \frac{1}{2} \right] A_2 \\ \mathcal{V}_2 &= - \left[\frac{GM_1 m_1}{R_1} \beta_2^2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 \frac{1}{2} + \frac{GM_1 m_2}{R_1} \beta_1^2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 \frac{1}{2} \right] A_1 - \\ &\quad \left[\frac{GM_2 m_1}{R_2} \beta_2^2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 \frac{1}{2} + \frac{GM_2 m_2}{R_2} \beta_1^2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 \frac{1}{2} \right] A_2 \\ \mathcal{V}_2 &= - \left[\frac{GM_1}{R_1} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 A_1 + \frac{GM_2}{R_2} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 A_2 \right] \left(\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right) \\ \mathcal{V}_2 &= -(m_1 + m_2) \beta_1 \beta_2 \left[\frac{GM_1}{R_1} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 A_1 + \frac{GM_2}{R_2} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 A_2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

- cálculo de $\mathcal{V}_3$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_3 &= \left[\frac{-GM_1 m_1}{R_1} \left(\frac{d_1}{R_1} \right)^3 \frac{1}{2} + \frac{GM_1 m_2}{R_1} \left(\frac{d_2}{R_1} \right)^3 \frac{1}{2} \right] B_1 + \\
&\quad \left[\frac{-GM_2 m_1}{R_2} \left(\frac{d_1}{R_2} \right)^3 \frac{1}{2} + \frac{GM_2 m_2}{R_2} \left(\frac{d_2}{R_2} \right)^3 \frac{1}{2} \right] B_2 \\
\mathcal{V}_3 &= - \left[\frac{GM_1 m_1}{R_1} \beta_2^3 \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 \frac{1}{2} - \frac{GM_1 m_2}{R_1} \beta_1^3 \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 \frac{1}{2} \right] B_1 - \\
&\quad \left[\frac{GM_2 m_1}{R_2} \beta_2^3 \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 \frac{1}{2} - \frac{GM_2 m_2}{R_2} \beta_1^3 \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 \frac{1}{2} \right] B_2 \\
\mathcal{V}_3 &= - \left[\frac{GM_1}{R_1} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 B_1 + \frac{GM_2}{R_2} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 B_2 \right] \left(\frac{m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} - \frac{m_2 m_1^3}{(m_1 + m_2)^3} \right) \\
\mathcal{V}_3 &= -(m_1 + m_2) \beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) \left[\frac{GM_1}{R_1} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 B_1 + \frac{GM_2}{R_2} \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 B_2 \right] \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

- cálculo de $\mathcal{V}_4$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_4 &= \left[\frac{-GM_1 m_1}{R_1} \left(\frac{d_1}{R_1} \right)^4 \frac{1}{8} - \frac{GM_1 m_2}{R_1} \left(\frac{d_2}{R_1} \right)^4 \frac{1}{8} \right] C_1 + \\
&\quad \left[\frac{-GM_2 m_1}{R_2} \left(\frac{d_1}{R_2} \right)^4 \frac{1}{8} - \frac{GM_2 m_2}{R_2} \left(\frac{d_2}{R_2} \right)^4 \frac{1}{8} \right] C_2 \\
\mathcal{V}_4 &= - \left[\frac{GM_1 m_1}{R_1} \beta_2^4 \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 \frac{1}{8} + \frac{GM_1 m_2}{R_1} \beta_1^4 \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 \frac{1}{8} \right] C_1 - \\
&\quad \left[\frac{GM_2 m_1}{R_2} \beta_2^4 \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 \frac{1}{8} + \frac{GM_2 m_2}{R_2} \beta_1^4 \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 \frac{1}{8} \right] C_2 \\
\mathcal{V}_4 &= - \left[\frac{GM_1}{R_1} \frac{1}{8} \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 C_1 + \frac{GM_2}{R_2} \frac{1}{8} \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 C_2 \right] \left(\frac{m_1 m_2^4}{(m_1 + m_2)^4} + \frac{m_2 m_1^4}{(m_1 + m_2)^4} \right) \\
\mathcal{V}_4 &= -(m_1 + m_2) \beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) \left[\frac{GM_1}{R_1} \frac{1}{8} \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 C_1 + \frac{GM_2}{R_2} \frac{1}{8} \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 C_2 \right] \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (B.2), (B.3), (B.4), (B.5) e (B.6) na equação (B.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} = -(m_1 + m_2) & \left\{ \frac{GM_1}{R_1} \left[1 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 [3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 - 1] + \right. \right. \\
& \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 [5(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})] + \\
& \left. \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 [35(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_1 \cdot \vec{t})^2 + 3] \right] + \\
& \frac{GM_2}{R_2} \left[1 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 [3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 - 1] + \right. \\
& \frac{1}{2}\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 [5(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^3 - 3(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})] + \\
& \left. \left. \frac{1}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 [35(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^4 - 30(\vec{u}_2 \cdot \vec{t})^2 + 3] \right] \right\} \\
& \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Apêndice C

Equações de movimento

As equações de movimento são determinadas pela substituição da lagrangiana do sistema dada pela equação 2.20 na equação de Euler-Lagrange (equação 2.1).

- coordenada x : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= \frac{m_1 + m_2}{2} [2\dot{x} - 2ny] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)(\dot{x} - ny) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{d}{dt} \left((m_1 + m_2)(\dot{x} - ny) \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = (m_1 + m_2)(\ddot{x} - n\dot{y}) \quad (C.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left\{ 2n\dot{y} + n^2 [2(X_0 + x)] \right\} + G(m_1 + m_2) \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M_1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right] \right\}}_{A_1^*} + \\ &\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]}_{B_1^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} \right]}_{C_1^*} + \\ &\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right]}_{D_1^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M_2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right]}_{A_2^*} + \\ &\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]}_{B_2^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^2} \right]}_{C_2^*} + \\ &\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right]}_{D_2^*} \left\} \quad (C.2) \end{aligned}$$

Cálculo de A_1^* :

$$A_1^* = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M_1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right] \Rightarrow$$

$$A_1^* = \frac{-M_1(X_0 + D_1 + x)}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad (\text{C.3})$$

Cálculo de B_1^* :

$$B_1^* = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right] \Rightarrow$$

$$B_1^* = \frac{-3\beta_1 \beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} (X_0 + D_1 + x) \quad (\text{C.4})$$

Cálculo de C_1^* :

$$C_1^* = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} \right] \Rightarrow$$

$$C_1^* = \frac{-2\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^3} (X_0 + D_1 + x) \quad (\text{C.5})$$

Cálculo de D_1^* :

$$D_1^* = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right] \Rightarrow$$

$$D_1^* = \frac{-5\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{7/2}} (X_0 + D_1 + x) \quad (\text{C.6})$$

Cálculo de A_2^* :

$$A_2^* = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{M_2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right] \Rightarrow$$

$$A_2^* = \frac{-M_2(X_0 - D_2 + x)}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad (\text{C.7})$$

Cálculo de B_2^* :

$$B_2^* = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right] \Rightarrow$$

$$B_2^* = \frac{-3\beta_1 \beta_2 M_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} (X_0 - D_2 + x) \quad (\text{C.8})$$

Cálculo de C_2^* :

$$C_2^* = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^2} \right] \Rightarrow$$

$$C_2^* = \frac{-2\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^3} (X_0 - D_2 + x) \quad (C.9)$$

Cálculo de D_2^* :

$$D_2^* = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right] \Rightarrow$$

$$D_2^* = \frac{-5\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{7/2}} (X_0 - D_2 + x) \quad (C.10)$$

Substituindo as equações (C.3)...(C.10) em (C.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = & \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left\{ 2n\dot{y} + n^2 \left[2(X_0 + x) \right] \right\} + G(m_1 + m_2) \left\{ \left[\left(\frac{-M_1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right) + \right. \right. \\ & \left(\frac{-3\beta_1 \beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right) + \left(\frac{-2\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^3} \right) + \\ & \left. \left(\frac{-5\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta - 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{7/2}} \right) \right] (X_0 + D_1 + x) + \\ & \left[\left(\frac{-M_2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right) + \right. \\ & \left(\frac{-3\beta_1 \beta_2 M_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right) + \left(\frac{-2\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^3} \right) + \\ & \left. \left(\frac{-5\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta - 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{7/2}} \right) \right] (X_0 - D_2 + x) \left. \right\} \quad (C.11) \end{aligned}$$

As equações (C.1) e (C.11) são substituídas na equação 2.1 com os módulos dos vetores posição R_1 e R_2 definidos pelas equações 2.6. Com isso obtemos:

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2)(\ddot{x} - n\dot{y}) = (m_1 + m_2) \Bigg\{ & \left[n\dot{y} + n^2(X_0 + x) \right] - GM_1 \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \frac{l^2}{R_1^5} (3\cos^2\theta - 1) + \right. \\
& 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \frac{l^3}{R_1^6} (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \\
& \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \frac{l^4}{R_1^7} (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] (X_0 + D_1 + x) + \\
& - GM_2 \left[\frac{1}{R_2^3} + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \frac{l^2}{R_2^5} (3\cos^2\theta - 1) + \right. \\
& 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \frac{l^3}{R_2^6} (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \\
& \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \frac{l^4}{R_2^7} (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] (X_0 - D_2 + x) \Bigg\}
\end{aligned}$$

Considerando que a soma $m_1 + m_2$ é não nula e ordenando em potências crescentes de l/R_1 e l/R_2 , obtemos:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} = & 2n\dot{y} + n^2(X_0 + x) - \frac{GM_1}{R_1^3} \left[1 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \right. \\
& 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \\
& \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] (X_0 + D_1 + x) + \\
& - \frac{GM_2}{R_2^3} \left[1 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \right. \\
& 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \\
& \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] (X_0 - D_2 + x) \quad (C.12)
\end{aligned}$$

• coordenada y : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{m_1 + m_2}{2} \left[2\dot{y} + 2n(X_0 + x) \right] & \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)[\dot{y} + n(X_0 + x)] \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} \left((m_1 + m_2)[\dot{y} + n(X_0 + x)] \right) & \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = (m_1 + m_2)(\ddot{y} + n\dot{x})
\end{aligned} \quad (C.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = & \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left\{ -2n\dot{x} + 2n^2 y \right\} + G(m_1 + m_2) \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{M_1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right] \right.}_{E_1^*} + \\
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]}_{F_1^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} \right]}_{G_1^*} + \\
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta - 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right]}_{H_1^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{M_2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right]}_{E_2^*} + \\
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]}_{F_2^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^2} \right]}_{G_2^*} + \\
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta - 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right]}_{H_2^*} \quad (C.14)
\end{aligned}$$

Cálculo de E_1^* :

$$\begin{aligned}
E_1^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{M_1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right] & \Rightarrow \\
E_1^* = \frac{-M_1(y)}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} & \quad (C.15)
\end{aligned}$$

Cálculo de F_1^* :

$$\begin{aligned}
F_1^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right] & \Rightarrow \\
F_1^* = \frac{-3\beta_1 \beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}}(y) & \quad (C.16)
\end{aligned}$$

Cálculo de G_1^* :

$$\begin{aligned}
G_1^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} \right] & \Rightarrow \\
G_1^* = \frac{-2\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^3}(y) & \quad (C.17)
\end{aligned}$$

Cálculo de H_1^* :

$$\begin{aligned}
H_1^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right] & \Rightarrow \\
H_1^* = \frac{-5\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{7/2}}(y) & \quad (C.18)
\end{aligned}$$

Cálculo de E_2^* :

$$E_2^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{M_2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right] \Rightarrow$$

$$E_2^* = \frac{-M_2(y)}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad (\text{C.19})$$

Cálculo de F_2^* :

$$F_2^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right] \Rightarrow$$

$$F_2^* = \frac{-3\beta_1 \beta_2 M_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}}(y) \quad (\text{C.20})$$

Cálculo de G_2^* :

$$G_2^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^2} \right] \Rightarrow$$

$$G_2^* = \frac{-2\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^3}(y) \quad (\text{C.21})$$

Cálculo de H_2^* :

$$H_2^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right] \Rightarrow$$

$$H_2^* = \frac{-5\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{7/2}}(y) \quad (\text{C.22})$$

Substituindo as equações (C.15)...(C.22) em (C.14) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = & \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left\{ -2n\dot{x} + 2n^2y \right\} + G(m_1 + m_2) \left\{ \left[\left(\frac{-M_1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right) + \right. \right. \\
& \left(\frac{-3\beta_1\beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right) + \left(\frac{-2\beta_1\beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^3} \right) + \\
& \left. \left(\frac{-5\beta_1\beta_2 (1 - 3\beta_1\beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta - 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{7/2}} \right) \right] (y) + \\
& \left[\left(\frac{-M_2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right) + \right. \\
& \left(\frac{-3\beta_1\beta_2 M_2 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right) + \left(\frac{-2\beta_1\beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^3} \right) + \\
& \left. \left(\frac{-5\beta_1\beta_2 (1 - 3\beta_1\beta_2) M_2 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta - 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{7/2}} \right) \right] (y) \left. \right\} \quad (C.23)
\end{aligned}$$

As equações (C.13) e (C.23) são substituídas na equação 2.1 com os módulos dos vetores posição R_1 e R_2 definidos pelas equações 2.6. Com isso obtemos:

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2)(\ddot{y} + n\dot{x}) = & (m_1 + m_2) \left\{ \left[-n\dot{x} + n^2y \right] - GM_1 \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \frac{l^2}{R_1^5} (3 \cos^2 \theta - 1) + \right. \right. \\
& 2\beta_1\beta_2 (\beta_2 - \beta_1) \frac{l^3}{R_1^6} (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta + \\
& \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2 (1 - 3\beta_1\beta_2) \frac{l^4}{R_1^7} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \right] (y) + \\
& - GM_2 \left[\frac{1}{R_2^3} + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \frac{l^2}{R_2^5} (3 \cos^2 \theta - 1) + \right. \\
& 2\beta_1\beta_2 (\beta_2 - \beta_1) \frac{l^3}{R_2^6} (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta + \\
& \left. \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2 (1 - 3\beta_1\beta_2) \frac{l^4}{R_2^7} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \right] (y) \right\}
\end{aligned}$$

Considerando que a soma $m_1 + m_2$ é não nula e ordenando em potências crescentes de l/R_1 e l/R_2 , obtemos:

$$\begin{aligned}
\ddot{y} = & -2n\dot{x} + n^2y - \frac{GM_1}{R_1^3} \left[1 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \right. \\
& 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \\
& \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] (y) + \\
& - \frac{GM_2}{R_2^3} \left[1 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \right. \\
& 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \\
& \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] (y)
\end{aligned} \tag{C.24}$$

• coordenada θ : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{m_1 + m_2}{2} \left[\beta_1\beta_2 \cdot 2(n + \dot{\theta})l^2 \right] \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 + m_2) \left[\beta_1\beta_2 \cdot (n + \dot{\theta})l^2 \right] \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{d}{dt} \left((m_1 + m_2) \left[\beta_1\beta_2(n + \dot{\theta})l^2 \right] \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = (m_1 + m_2)\beta_1\beta_2 \left[l^2\ddot{\theta} + 2l\dot{l}(n + \dot{\theta}) \right]
\end{aligned} \tag{C.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = & G(m_1 + m_2) \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{M_1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right]}_{I_1^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1\beta_2 M_1 l^2 (3\cos^2\theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]}_{J_1^*} + \right. \\
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} \right]}_{L_1^*} + \\
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) M_1 l^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta - 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right]}_{M_1^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{M_2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right]}_{I_2^*} + \\
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1\beta_2 M_2 l^2 (3\cos^2\theta - 1)}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right]}_{J_2^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta}{2[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^2} \right]}_{L_2^*} + \\
& \left. \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) M_2 l^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta - 3)}{8[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right]}_{M_2^*} \right\}
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Cálculo de I_1^* e I_2^* :

$$I_1^* = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{M_1}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{1/2}} \right] \Rightarrow$$

$$I_1^* = 0 \quad \text{e} \quad I_2^* = 0 \quad (\text{C.27})$$

Cálculo de J_1^* e J_2^* :

$$J_1^* = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M_1 l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \right] \Rightarrow$$

$$J_1^* = -\frac{3}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 M_1 l^2}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} (\text{sen} 2\theta)$$

$$\text{analogamente} \quad J_2^* = -\frac{3}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 M_2 l^2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} (\text{sen} 2\theta) \quad (\text{C.28})$$

Cálculo de L_1^* e L_2^* :

$$L_1^* = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} \right] \Rightarrow$$

$$L_1^* = \frac{3}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta$$

$$\text{analogamente} \quad L_2^* = \frac{3}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta \quad (\text{C.29})$$

Cálculo de M_1^* e M_2^* :

$$M_1^* = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)}{8[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} \right] \Rightarrow$$

$$M_1^* = \frac{5}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} (3 - 7 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta \cos \theta$$

$$\text{analogamente} \quad M_2^* = \frac{5}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} (3 - 7 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta \cos \theta \quad (\text{C.30})$$

Substituindo as equações (C.27)...(C.30) em (C.26) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = G(m_1 + m_2) \Bigg\{ & -\frac{3}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 M_1 l^2}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \text{sen} 2\theta + \\
& \frac{3}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_1 l^3}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta + \\
& \frac{5}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_1 l^4}{[(X_0 + D_1 + x)^2 + y^2]^{5/2}} (3 - 7 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta \cos \theta \\
& - \frac{3}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 M_2 l^2}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{3/2}} \text{sen} 2\theta + \\
& \frac{3}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1) M_2 l^3}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta + \\
& \frac{5}{2} \frac{\beta_1 \beta_2 (1 - 3\beta_1 \beta_2) M_2 l^4}{[(X_0 - D_2 + x)^2 + y^2]^{5/2}} (3 - 7 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta \cos \theta \Bigg\} \quad (\text{C.31})
\end{aligned}$$

As equações (C.25) e (C.31) são substituídas na equação 2.1 com os módulos dos vetores posição R_1 e R_2 definidos pelas equações 2.6. Com isso obtemos:

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2) \beta_1 \beta_2 [l^2 \ddot{\theta} + 2l\dot{l}(n + \dot{\theta})] = (m_1 + m_2) \beta_1 \beta_2 \Bigg\{ & -GM_1 \left[\frac{3}{2} \frac{l^2}{R_1^3} \text{sen} 2\theta + \right. \\
& \left. - \frac{3}{2} (\beta_2 - \beta_1) \frac{l^3}{R_1^4} (1 - 5 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta - \frac{5}{2} (1 - 3\beta_1 \beta_2) \frac{l^4}{R_1^5} (3 - 7 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta \cos \theta \right] \\
& - GM_2 \left[\frac{3}{2} \frac{l^2}{R_2^3} \text{sen} 2\theta + \right. \\
& \left. - \frac{3}{2} (\beta_2 - \beta_1) \frac{l^3}{R_2^4} (1 - 5 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta - \frac{5}{2} (1 - 3\beta_1 \beta_2) \frac{l^4}{R_2^5} (3 - 7 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta \cos \theta \right] \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = -2(\dot{l}/l)(\dot{\theta} + n) - \frac{GM_1}{R_1^3} \Bigg[& \frac{3}{2} \text{sen} 2\theta - \frac{3}{2} (\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right) (1 - 5 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta + \\
& - \frac{5}{2} (1 - 3\beta_1 \beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 (3 - 7 \cos^2 \theta) \cos \theta \text{sen} \theta \Bigg] + \\
& - \frac{GM_2}{R_2^3} \Bigg[\frac{3}{2} \text{sen} 2\theta - \frac{3}{2} (\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right) (1 - 5 \cos^2 \theta) \text{sen} \theta + \\
& - \frac{5}{2} (1 - 3\beta_1 \beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 (3 - 7 \cos^2 \theta) \cos \theta \text{sen} \theta \Bigg] \quad (\text{C.32})
\end{aligned}$$

Com as definições dos coeficientes $\Lambda_i^{l,\theta}$ e $\Omega_i^{l,\theta}$ com $i \in \{1, 2\}$ através das equações 2.29 sendo substituídas nas equações (C.12), (C.24) e (C.32), obtemos as equações de movimento nas coordenadas generalizadas, conforme a seguir.

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= +2n\dot{y} + n^2(X_0 + x) - \frac{GM_1}{R_1^3}\Lambda_1^{l,\theta}(X_0 + D_1 + x) - \frac{GM_2}{R_2^3}\Lambda_2^{l,\theta}(X_0 - D_2 + x) \\
\ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2y - \frac{GM_1}{R_1^3}\Lambda_1^{l,\theta}y - \frac{GM_2}{R_2^3}\Lambda_2^{l,\theta}y \\
\ddot{\theta} &= -2(\dot{l}/l)(\dot{\theta} + n) - \frac{GM_1}{R_1^3}\Omega_1^{l,\theta} - \frac{GM_2}{R_2^3}\Omega_2^{l,\theta}
\end{aligned}$$

Introduzindo as variáveis adimensionais conforme as equações 2.30, podemos calcular as derivadas temporais das coordenadas generalizadas em função da variável τ , afim de tornar as equações de movimento normalizadas.

Cálculo de $\dot{x}$ e $\dot{y}$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}' = \frac{d\hat{x}}{d\tau} \Rightarrow \hat{x}' = \frac{d\hat{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \hat{x}' = \frac{1}{n} \dot{\hat{x}} \quad \therefore \quad \dot{\hat{x}} = \frac{d\hat{x}}{dt} \Rightarrow \dot{\hat{x}} = \frac{d\hat{x}}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \dot{\hat{x}} = \frac{\dot{x}}{D} \\
\text{logo} \quad \dot{x} = nD\hat{x}' \quad (C.33)
\end{aligned}$$

$$\text{analogamente} \quad \dot{y} = nD\hat{y}' \quad (C.34)$$

Cálculo de $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} = \frac{d}{dt}(nD\hat{x}') \Rightarrow \ddot{x} = nD \frac{d\hat{x}'}{dt} \Rightarrow \ddot{x} = nD \frac{d\hat{x}'}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \Rightarrow \ddot{x} = n^2 D \hat{x}'' \\
\text{logo} \quad \ddot{x} = n^2 D \hat{x}'' \quad (C.35)
\end{aligned}$$

$$\text{analogamente} \quad \ddot{y} = n^2 D \hat{y}'' \quad (C.36)$$

Cálculo de $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\
\text{logo} \quad \dot{\theta} = n\theta' \quad (C.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(n\theta') \Rightarrow \ddot{\theta} = n \frac{d\theta'}{dt} \Rightarrow \ddot{\theta} = n \frac{d\theta'}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\
\text{logo} \quad \ddot{\theta} = n^2 \theta'' \quad (C.38)
\end{aligned}$$

Cálculo de $\dot{l}$:

$$\begin{aligned}
\dot{l} = \frac{dl}{dt} \Rightarrow \dot{l} = \frac{d}{dt}(D\hat{l}) \Rightarrow \dot{l} = D \frac{d\hat{l}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \Rightarrow \dot{l} = D\hat{l}'n \\
\text{logo} \quad \dot{l} = nD\hat{l}' \quad (C.39)
\end{aligned}$$

Verificamos pelas equações 2.30 que podemos escrever

$$\frac{l}{R_1} = \frac{\hat{l}}{\hat{R}_1} \quad \frac{l}{R_2} = \frac{\hat{l}}{\hat{R}_2} \quad (\text{C.40})$$

dessa forma os coeficientes definidos nas equações 2.29 podem ser usados com base adimensional.

Substituindo as equações (C.33)...(C.40) nas equações 2.26, 2.27 e 2.28, usando as equações 2.3 que definem a massa reduzida do sistema primário e a equação 2.4, encontramos as equações de movimento normalizadas.

- Cálculo de $\hat{x}''$:

$$\begin{aligned} n^2 D\hat{x}'' &= +2nnD\hat{y}' + n^2 D(\hat{X}_0 + \hat{x}) - \frac{G}{\hat{R}_1^3 D^3} (M_1 + M_2)(1 - \mu) \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} D(\hat{X}_0 + \hat{D}_1 + \hat{x}) + \\ &\quad - \frac{G}{\hat{R}_2^3 D^3} (M_1 + M_2)(\mu) \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} D(\hat{X}_0 - \hat{D}_2 + \hat{x}) \\ n^2 D\hat{x}'' &= +2n^2 D\hat{y}' + n^2 D(\hat{X}_0 + \hat{x}) - \frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3} n^2 \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} D(\hat{X}_0 + \hat{D}_1 + \hat{x}) + \\ &\quad - \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} n^2 \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} D(\hat{X}_0 - \hat{D}_2 + \hat{x}) \\ \hat{x}'' &= +2\hat{y}' + (\hat{X}_0 + \hat{x}) - \frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3} \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} (\hat{X}_0 + \mu + \hat{x}) + \\ &\quad - \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} (\hat{X}_0 + \mu - 1 + \hat{x}) \\ \hat{x}'' &= +2\hat{y}' - \left(\frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3} \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} - 1 \right) (\hat{X}_0 + \hat{x}) - \mu(1 - \mu) \left(\frac{\mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta}}{\hat{R}_1^3} - \frac{\mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta}}{\hat{R}_2^3} \right) \end{aligned}$$

- Cálculo de $\hat{y}''$:

$$\begin{aligned} n^2 D\hat{y}'' &= -2nnD\hat{x}' + n^2 D\hat{y} - \frac{G}{\hat{R}_1^3 D^3} (M_1 + M_2)(1 - \mu) \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} D\hat{y} + \\ &\quad - \frac{G}{\hat{R}_2^3 D^3} (M_1 + M_2)(\mu) \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} D\hat{y} \\ n^2 D\hat{y}'' &= -2n^2 D\hat{x}' + n^2 D\hat{y} - \frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3} n^2 \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} D\hat{y} - \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} n^2 \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} D\hat{y} \\ \hat{y}'' &= -2\hat{x}' + \hat{y} - \frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3} \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} \hat{y} - \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} \hat{y} \\ \hat{y}'' &= -2\hat{x}' - \left(\frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3} \mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3} \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} - 1 \right) \hat{y} \end{aligned}$$

- Cálculo de θ'' :

$$n^2\theta'' = -2(\hat{l}'/\hat{l})(n)(n\theta' + n) - \frac{G}{\hat{R}_1^3 D^3}(M_1 + M_2)(1 - \mu)\mathbf{\Omega}_1^{l,\theta} - \frac{G}{\hat{R}_2^3 D^3}(M_1 + M_2)(\mu)\mathbf{\Omega}_2^{l,\theta}$$

$$\theta'' = -2(\hat{l}'/\hat{l})(\theta' + 1) - \frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3}\mathbf{\Omega}_1^{l,\theta} - \frac{\mu}{\hat{R}_2^3}\mathbf{\Omega}_2^{l,\theta}$$

Resumo das equações de movimento normalizadas:

$$\begin{aligned}\hat{x}'' &= +2\hat{y}' - \left(\frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3}\mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3}\mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} - 1 \right) (\hat{X}_0 + \hat{x}) - \mu(1 - \mu) \left(\frac{\mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta}}{\hat{R}_1^3} - \frac{\mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta}}{\hat{R}_2^3} \right) \\ \hat{y}'' &= -2\hat{x}' - \left(\frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3}\mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} + \frac{\mu}{\hat{R}_2^3}\mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} - 1 \right) \hat{y} \\ \theta'' &= -2(\hat{l}'/\hat{l})(\theta' + 1) - \frac{1 - \mu}{\hat{R}_1^3}\mathbf{\Omega}_1^{l,\theta} - \frac{\mu}{\hat{R}_2^3}\mathbf{\Omega}_2^{l,\theta}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}_1^{l,\theta} &= \left[1 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right)^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] \\ \mathbf{\Lambda}_2^{l,\theta} &= \left[1 + \frac{3}{2}\beta_1\beta_2 \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + 2\beta_1\beta_2(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right)^3 (5\cos^2\theta - 3)\cos\theta + \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{8}\beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^4 (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) \right] \\ \mathbf{\Omega}_1^{l,\theta} &= \left[\frac{3}{2}\sin 2\theta - \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_1} \right) (1 - 5\cos^2\theta)\sin\theta - \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_1} \right)^2 (3 - 7\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta \right] \\ \mathbf{\Omega}_2^{l,\theta} &= \left[\frac{3}{2}\sin 2\theta - \frac{3}{2}(\beta_2 - \beta_1) \left(\frac{l}{R_2} \right) (1 - 5\cos^2\theta)\sin\theta - \right. \\ &\quad \left. \frac{5}{2}(1 - 3\beta_1\beta_2) \left(\frac{l}{R_2} \right)^2 (3 - 7\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta \right]\end{aligned}$$

$$\hat{R}_1 = \sqrt{(\hat{X}_0 + \hat{D}_1 + \hat{x})^2 + \hat{y}^2}$$

$$\hat{R}_2 = \sqrt{(\hat{X}_0 - \hat{D}_2 + \hat{x})^2 + \hat{y}^2}$$

Apêndice D

Dados do sistema solar

Sistema Sol-Planetas ¹

massa do Sol: $1.989 \cdot 10^{30}$ kg

planeta	massa (kg)	distância (km)	x_{L_1} (km)	x_{L_2} (km)
Mercúrio	$3.302 \cdot 10^{23}$	$5.791 \cdot 10^7$	$2.204 \cdot 10^5$	$2.210 \cdot 10^5$
Vênus	$4.869 \cdot 10^{24}$	$1.082 \cdot 10^8$	$1.008 \cdot 10^6$	$1.014 \cdot 10^6$
Terra	$5.974 \cdot 10^{24}$	$1.496 \cdot 10^8$	$1.492 \cdot 10^6$	$1.502 \cdot 10^6$
Marte	$6.419 \cdot 10^{23}$	$2.279 \cdot 10^8$	$1.083 \cdot 10^6$	$1.086 \cdot 10^6$
Júpiter	$1.899 \cdot 10^{27}$	$7.791 \cdot 10^8$	$5.200 \cdot 10^7$	$5.437 \cdot 10^7$
Saturno	$5.685 \cdot 10^{26}$	$1.427 \cdot 10^9$	$6.424 \cdot 10^7$	$6.616 \cdot 10^7$
Urano	$8.662 \cdot 10^{25}$	$2.871 \cdot 10^9$	$6.951 \cdot 10^7$	$7.060 \cdot 10^7$
Netuno	$1.028 \cdot 10^{26}$	$4.499 \cdot 10^9$	$1.153 \cdot 10^8$	$1.172 \cdot 10^8$

Tabela D.1: Sistema Sol-Planetas

Sistema Terra-Lua

massa da Terra: $5.874 \cdot 10^{24}$ kg

satélite	massa (kg)	distância (km)	x_{L_1} (km)	x_{L_2} (km)
Lua	$7.348 \cdot 10^{22}$	$3.891 \cdot 10^5$	$5.874 \cdot 10^4$	$6.531 \cdot 10^4$

Tabela D.2: Sistema Terra-Lua

x_{L_1} é a distância entre o centro de massa do corpo menos massivo ao L_1

x_{L_2} é a distância entre o centro de massa do corpo menos massivo ao L_2

¹Ver referência [15]

Referências Bibliográficas

- [1] Breakwell, J. V. and Gearhart, J.W. *Pumping a Tethered Configuration to Boost its Orbit Around an Oblate Planet* – The Journal of the Astronautical Sciences, Vol 35, No 1, January-March 1987, p. 19-39.
- [2] Birkhoff, G. D. *Dynamical System* – American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol 9, 1927, p. 423.
- [3] Boccaletti, D. and Pucacco, G. *Theory of Orbits*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [4] Butkov, E. *Mathematical Physics*, Califórnia, USA, 1968, p. 345-352.
- [5] Colombo, G. *The Stabilization of an Artificial Satellite at the Inferior Conjunction Point Earth-Moon System* – Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report Number 80, November 1, 1961.
- [6] Corrêa, A. A. *Transferências orbitais e dinâmicas na vizinhança dos pontos lagrangianos $L1$ e $L2$* , São José dos Campos, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Brasil, 2005.
- [7] Farquhar, R.W. *Tether Stabilization at a Collinear Libration Point* – The Journal of the Astronautical Sciences, Vol 49, No 1, January-March 2001, p. 91-106.
- [8] Farquhar, R.W. *The flight of ISEE-3/ICE: origins, mission history and a legacy* – The Journal of the Astronautical Sciences, Vol 49, No 1, January-March 2001, p. 23-73.
- [9] Goldstein H., Poole C. and Safko J, *Classical Mechanics*, Third Edition, Addison-Wesley.

- [10] Landau, L.D. and Lifshitz E.M. *Mechanics*, Moscow, URSS, 1976.
- [11] Lorenzini, E.C. *A Three-Mass Tethered System for Micro-g/Variable-g Applications* - Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol 10, 1987, p. 242-249.
- [12] Misra, A.K. *Dynamics of a tethered system near the Earth-Moon Lagrangian point L2* - Proceedings of the International Symposium on the Systems and Structures in Space, Cambridge University, England, July 2002, p. 291-300.
- [13] Monteiro, L. H.A. *Sistemas dinâmicos*, Segunda edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, Brasil, 2006.
- [14] Murray, C.D. and Dermott S.F. *Solar System Dynamics*, Cambridge University, England, 1999, p. 67-83.
- [15] Peláez, J. and et al *Dynamics and Stability of Tethered Satellitas at Lagrangian Points* - *Final Report*, Universidad Politécnica de Madrid, Spain, 2008, p. 41-52
- [16] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical System*, Springer-Verlag, New York, 1991, p
- [17] Rajan, M. and Anderson, T.J. *First Integrals of Motion in the Dynamics of Tethered Satellites* - The Journal of the Astronautical Sciences, Vol 34, No 3, July-September 1986, p. 331-339.
- [18] Robinson, W.J. *The Restricted Problem of Three Bodies with Rigid Dumb-Bell Satellite* - Celestial Mechanics, Vol 8, 1973, p. 323-331.
- [19] Siegel, C. L. and Moser, J. K., *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York, USA, 1971.
- [20] Simó, C., *On the analitical and numerical approximation of invariant manifolds*, In: Benest, D.; Froeschlé, C. (ed). *Modern methods in celestial mechanics*, Goutelas: Éditions Frontière, 1990.
- [21] Simó, C. and Stuchi, T. J., *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem*, Physica D, 140, 1-32, 2000.

- [22] Stuchi, T. J., *KAM tori in the center manifold of the 3D hill problem*, In: Winter, O.C.; Prado, A.F.B.A. (ed) *Advances in space dynamics 2*, São José dos Campos, CAPES, 2002, p. 112-127.
- [23] Szebehely, V. *Theory of Orbits*, Academic Press, New York, USA, 1967.
- [24] William H. P., Saul A. T., William T. V. and Brian P. Flannery *NUMERICAL RECIPES - The Art of Scientific Computing*, Third Edition, Cambridge University, England, 2007.