

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo

**A DISTRIBUIÇÃO FRACTAL DE GALÁXIAS EM
 $0,05 \leq z \leq 5,0$**

Gabriela Conde Saavedra

Junho 2011



Gabriela Conde Saavedra

**A Distribuição Fractal de Galáxias em
 $0,05 \leq z \leq 5,0$**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em Astronomia.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Byrro Ribeiro.

Rio de Janeiro
Junho de 2011

Conde, Saavedra Gabriela

A Distribuição Fractal de Galáxias em $0,05 \leq z \leq 5,0$ /
Gabriela Conde Saavedra. - Rio de Janeiro: UFRJ/OV, 2011.

xiii, 78f.:il; 30cm.

Orientador: Marcelo Byrro Ribeiro

Dissertação (Mestrado em Astronomia) - UFRJ/OV Programa
de Pós-graduação em Astronomia, 2011.

Referências Bibliográficas: f: 79-83.

1. Galáxias: Distribuição em grande escala. 2. Fractais: Di-
mensão fractal. 3. Cosmologia: Densidades radiais no modelo
padrão. I. Ribeiro, Marcelo B. II. Universidade Federal do Rio de
Janeiro, Observatório do Valongo, Programa de Pós-graduação
em Astronomia, 2011. III. Título.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é determinar a dimensão fractal de três catálogos de galáxias que cobrem diferentes desvios para o vermelho entre $0,05 \leq z \leq 5,0$. Caso de fato exista uma distribuição fractal de galáxias, esta será caracterizada por meio da densidade diferencial (γ_i) e a densidade integral (γ_i^*), as quais assumem uma função do tipo lei de potências com a distância observacional (d_i), onde $i = z, L$ e são calculadas no contexto do modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) com parâmetros $\Omega_m = 0,3$ e $\Omega_\Lambda = 0,7$. Portanto, no presente trabalho calculou-se o expoente da lei de potências ajustando uma reta aos dados observacionais, onde da inclinação da reta ajustada se obteve o valor da dimensão fractal. Os resultados indicam que a dimensão fractal é única em desvios para o vermelho próximos ($0,25 \leq z \leq 1,0$) com valor médio dado por $\langle D \rangle = 2,56 \pm 0,02$. Em desvios para o vermelho mais altos ($0,75 \leq z \leq 3,0$) as galáxias vermelhas forneceram um valor baixo de dimensão fractal $D = 0,84 \pm 0,09$. As galáxias azuis já em desvios para o vermelho mais altos ainda ($0,5 \leq z \leq 5,0$) evidenciaram um padrão no qual as densidades radiais diferenciais forneceram valores negativos de dimensão fractal, fato que sugere que a lei de potências deixa de governar a distribuição de galáxias. Assim, considerou-se melhor adotar as densidades integrais pois elas forneceram dimensões fractais sempre positivas. Então as galáxias azuis mostraram que é possível ajustar duas retas com a mudança de D em $z \sim 2$. No caso das galáxias azuis tanto no UV como no óptico forneceram uma mudança similar de dimensão fractal, por exemplo no óptico, a dimensão fractal muda de $D = 1,06 \pm 0,13$ a $D = 0,28 \pm 0,18$. Finalmente, o fato de ter obtido duas dimensões fractais pode sugerir que a distribuição é melhor descrita por um multi-fractal.

ABSTRACT

The aim of this work is to calculate the fractal dimension of three galaxy catalogues covering different redshift intervals between $0,05 \leq z \leq 5,0$. Supposing that there is a fractal distribution of galaxies, it will be characterized by means of the differential density (γ_i) and the integral density (γ_i^*) as power-law functions of the observational distance (d_i), where $i = z, L$ and which have been calculated in the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) cosmological model with parameters $\Omega_m = 0,3$ and $\Omega_\Lambda = 0,7$. Therefore, in the present work the exponent of the power-law was calculated by fitting a straight line to the data and from the slope of this fitted line we could get the fractal dimension. The results show the galaxy distribution is fractal for nearby redshifts ($0,25 \leq z \leq 1,0$) giving a mean fractal dimension of $\langle D \rangle = 2,56 \pm 0,02$. For higher redshifts ($0,75 \leq z \leq 3,0$), red galaxies give a low value of fractal dimension $D = 0,84 \pm 0,09$. In the case of blue galaxies at even higher redshifts ($0,5 \leq z \leq 5,0$) they show a pattern characterized by the fact that differential radial densities give negative values of the fractal dimension, which suggests that the power-law behaviour stops ruling. Therefore, we found it better to work with the integral radial densities because they always gave positive fractal dimensions. With this in mind, blue galaxies showed it is possible to fit two lines so the fractal dimension shows a transition at $z \sim 2$. In the case of UV blue galaxies as well as optical blue galaxies they have shown almost the same value of fractal dimension, for example for the blue optical galaxies, fractal dimension shifts from $D = 1,06 \pm 0,13$ to $D = 0,28 \pm 0,18$. Finally, the fact of having found two fractal dimensions could suggest the galaxy distribution at these higher redshifts is a multifractal.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à Professora Doutora Teresinha de Jesus Stuchi que desde os primeiros dias do mestrado se preocupou não só pelas questões acadêmicas mas também pelos outros detalhes que as pessoas passam quando chegam numa nova cidade. Sou muito grata também a todos os professores, alunos, colegas e funcionários do Observatório do Valongo por me darem uma mão amiga a qual fez com que esta experiência seja mais leve.

A meu orientador, o Professor Doutor Marcelo Byrro Ribeiro, com quem tive a agradável oportunidade de fazer este trabalho, lhe agradeço pelas reuniões sempre muito interessantes, informativas e realmente animadas.

Não posso esquecer dos meus prezados amigos Daniela, Mara, Manuel, Pablo, Victor, Sorge e ao Zuito que desde a distância ficaram sempre torcendo por mim, me encorajando e evitando que os fantasmas da dúvida e a insegurança se apoderassem de mim. Agradeço, é claro, a meus pais e irmão pela compreensão, o incentivo e por ter estado presentes em qualquer momento.

Um profundo e sentido agradecimento a meus amigos Marcelo Gonzales, Yolanda e Denzel por terem me dado ajudado quando mais precisava.

A todos meus novos amigos peruanos da UFES, estou muito grata pela maravilhosa amizade e pela excelente culinária de cada fim de semana.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante estes dois anos de mestrado.

1	INTRODUÇÃO	1
2	FRACTAIS	13
2.1	O que é um fractal?	13
2.1.1	Aplicações	15
2.2	O cálculo da dimensão fractal	20
3	FRACTAIS E A DISTRIBUIÇÃO DE GALÁXIAS	24
3.1	Modelos Hierárquicos (Fractais) Newtonianos	24
3.1.1	De Swedenborg (1734) a Carpenter (1938)	24
3.1.2	De de Vaucouleurs (1960) a Pietronero (1987)	28
3.2	Modelos Hierárquicos (Fractais) Relativísticos	36
3.2.1	O modelo relativístico de W. B. Bonnor (1972)	38
3.2.2	A evolução do modelo fractal relativístico desde 1992	39
3.3	Estatísticas radiais para caracterizar a fractalidade	43
3.3.1	Densidades relativísticas radiais	43
3.3.2	Contagem numérica diferencial teórica	46
3.3.3	Contagem numérica diferencial observacional	54
3.3.4	Conexão entre grandezas teóricas e observacionais	56
4	DIMENSÃO FRACTAL EM $0,05 \leq z \leq 5,0$	58
4.1	Qual levantamento será estudado?	58
4.1.1	Levantamento CNOC2: $0,05 \leq z \leq 1,0$	58
4.1.2	Levantamento FDF: $0,5 \leq z \leq 5,0$	59
4.2	Lei de potência: densidade radial vs. distância observacional	60
4.3	Razão entre as densidades γ e γ^*	63
4.4	O cálculo da dimensão fractal	66

4.5 Discussões	74
5 CONCLUSÕES	76
BIBLIOGRAFIA	79

Lista de Figuras

1.1	Sistemas que apresentam padrões característicos de processos fractais auto-organizados. Figuras obtidas de Pietronero & Labini (2005), Pietronero et al. (1998).	3
1.2	Nosso presente está representado por um observador situado no vértice do cone. Esse observador recebe a luz que foi emitida por galáxias que situam-se no cone de luz do passado. E a luz que é emitida no presente formará o cone de luz do futuro, mas que não pode ser observado por nós.	8
2.1	“Nuvens não são esferas, montanhas não são cones....nem a luz sequer viaja em linha reta”- (Mandelbrot, 1982).	14
2.2	Curvas que Mandelbrot conseguiu plotar. (Figuras obtidas de Peitgen et al. (2004)).	15
2.3	Estrutura fractal formada por aglomeração de partículas em uma interface de sulfato de zinco e acetato n-butyl sob um voltagem c.c. (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).	17
2.4	A curva de von Koch. Divide-se uma linha em três partes iguais, traça-se um triângulo equilátero no pedaço central e elimina-se a base. Aplica-se esse processo iterativamente em cada lado do triângulo (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).	19
2.5	Curva de von Koch com três partes congruentes. (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).	19
2.6	A curva de Koch lembra aos flocos de neve reais (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).	20
2.7	A medida que a escala diminui, precisa-se maior número de réguas para cobrir um litoral (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).	21

2.8	Calcula-se a dimensão de capacidade, ou “box counting” cobrindo a estrutura com o número N necessário de caixas de escala δ e relacionando estes termos mediante uma lei de potência (Figura obtida de Strogatz (1994)).	23
3.1	A distribuição de estrelas no mundo de Fournier. A massa dentro de cada esfera muda proporcionalmente com o raio (Figura obtida de Baryshev & Teerikorpi (2002)).	26
3.2	Primeiro mapa de galáxias do levantamento em desvio para o vermelho para o CfA em 1989 publicado por Geller e Huchra (Figura obtida de Geller & Huchra (1989)).	30
3.3	Distribuição autosimilar sobre a qual Pietronero desenvolveu o método da densidade condicional em 1987 (Figura obtida de Pietronero (1987)).	32
3.4	Modelo “polka-dot” usado por J. Wertz (1970). Esse modelo considera uma distribuição regular de pontos com massas iguais e dispostos como se fosse uma rede cristalina. (Figura obtida de Wertz (1970)).	34
3.5	Cone de luz do observador. O observador situa-se na origem, a linha vertical é o tempo e a coordenada espacial é perpendicular. A luz das galáxias vêm do passado percorrendo geodésicas nulas que formam o cone de luz do passado. Se no nosso tempo atual t_0 emitirmos uma luz, do mesmo modo ela viaja por um cone de luz do futuro.	37
3.6	Distância não é um conceito absoluto e afeta a densidade. Gráficos para o modelo EdS. (Figuras obtidas de Ribeiro (2001)).	42
3.7	Seção de um feixe de raios luminosos que subtendem um ângulo sólido $d\Omega_0$ visto pelo observador. O parâmetro afim de distância dy e a variação da distância local $(-k^a u_a)dy$ afetam a densidade numérica nesse feixe $n(y) = n(-k^a u_a)$ (Figura obtida de Ellis (1971)).	48
3.8	A distância angular d_A obtem-se ao relacionar a área da seção transversal intrínseca da fonte $d\sigma_A$ e o ângulo sólido $d\Omega_A$ medido pelo observador (Figura obtida de Ribeiro (2005)).	50
3.9	A distância por área da galáxia d_G obtem-se ao relacionar a área da seção transversal medida pelo observador $d\sigma_G$ e o ângulo sólido $d\Omega_A$ medido na galáxia (Figura obtida de Ribeiro (2005)).	52
4.1	A relação densidade-distância para galáxias do catálogo CNOC2.	61
4.2	A relação densidade-distância para galáxias azuis na banda do óptico do catálogo FDF.	61
4.3	A relação densidade-distância para galáxias azuis na banda UV do catálogo FDF.	62
4.4	A relação densidade-distância para galáxias vermelhas do catálogo FDF.	62
4.5	Levantamento CNOC2-Catálogo L99. Galáxias no intervalo $0,05 \leq z \leq 1,0$	64
4.6	Levantamento FDF-Catálogo G04. Galáxias vermelhas do intervalo $0,75 \leq z \leq 3,0$	64

4.7	Levantamento FDF-Catálogo G04. Galáxias azuis no óptico do intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$	65
4.8	Levantamento FDF-Catálogo G06. Galáxias azuis no UV do intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$	65
4.9	Catálogo L99. Ajuste linear das densidades radiais. As barras de erro são quase imperceptíveis e a dimensão fractal está em $2 < D < 3$	69
4.10	Levantamento FDF-Catálogo G04. Ajuste linear das densidades radiais das galáxias vermelhas selecionadas no intervalo $0,75 \leq z \leq 3,0$. A dimensão fractal é baixa, a média é $\langle D \rangle = 0,84 \pm 0,09$	70
4.11	Levantamento FDF-Catálogo G06. Ajuste total no intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$ para galáxias azuis no óptico. A dimensão fractal é negativa para as densidades diferenciais mas positiva para as densidades integrais.	71
4.12	Levantamento FDF-Catálogo G06. Ajuste linear das densidades radiais das galáxias azuis selecionadas no óptico no intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$. Podem-se ajustar duas retas. A dimensão fractal no primeiro intervalo é $\langle D \rangle = 1,06 \pm 0,13$. E no segundo intervalo é $\langle D \rangle = 0,28 \pm 0,18$	72
4.13	Levantamento FDF-Catálogo G06. Ajuste linear das densidades radiais das galáxias azuis selecionadas no UV no intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$. A dimensão fractal no primeiro intervalo é $\langle D \rangle = 1,02 \pm 0,11$. E no segundo intervalo é $\langle D \rangle = 0,22 \pm 0,12$	73

Lista de Tabelas

- 4.1 Estimativa grosseira da dimensão fractal para cada catálogo. 66
- 4.2 Dimensão fractal para cada catálogo obtida a partir do ajuste linear. . . 68

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os levantamentos galácticos em desvios para o vermelho realizados nas últimas décadas têm fornecido fascinantes imagens da estrutura em grande escala do universo. Essas imagens mostraram-nos a existência de enormes vazios que vão quebrando, de forma aparentemente aleatória e irregular, os filamentos e aglomerações de matéria luminosa. Isso pode se observar na figura 1.1(a). Essas observações junto com os resultados das leves inhomogeneidades da radiação cósmica de fundo, levaram a alguns cosmólogos a pensar sobre a validade do modelo cosmológico padrão, especialmente, pela suposição de um universo homogêneo. Em particular, viu-se a importância de determinar os limites de escala de um modelo e testar observacionalmente essa suposta homogeneidade. Isso poderia elucidar melhor como ocorre a evolução da estrutura, neste caso luminosa, e portanto, ajudaria a vislumbrar um pouco as condições iniciais do universo.

Por outro lado, é interessante como diferentes áreas da ciência podem convergir nos seus estudos, conseguindo desenvolver ferramentas muito versáteis e úteis. Por exemplo, aos olhos de um físico estatístico, a estrutura em grande escala do universo é uma imagem bem familiar pois é parecida com estruturas fractais auto-organizadas como

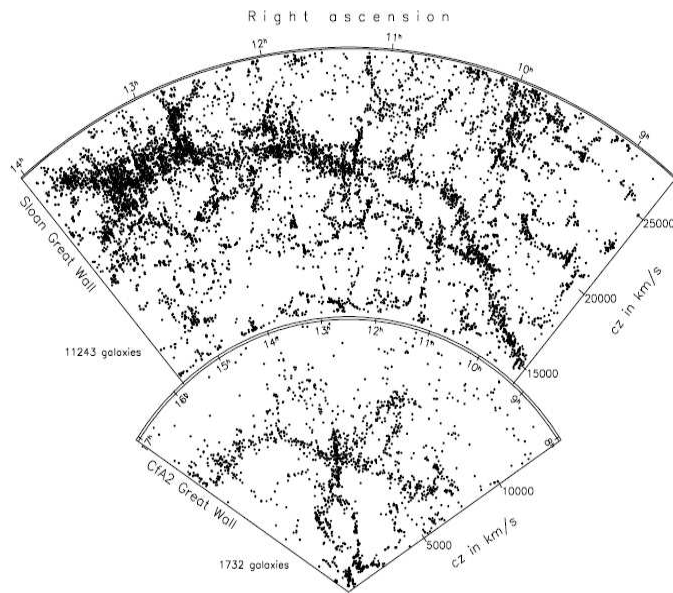
o modelo de agregação por difusão limitada (ver Fig.1.1(b)). Essa auto-organização é um dos mecanismos pelos quais surge a complexidade na natureza; é um processo em que muitos sistemas físicos, biológicos, sociais, etc, parecem se desenvolver espontaneamente.

Por outro lado, aos olhos de um matemático, essa imagem sugere uma estrutura irregular (*fractal*), provavelmente *auto-similar*, e cuja distribuição poderia ser descrita por uma *lei de potências*. Então, fenômenos tão dispares como um floco de neve ou um relâmpago poderiam ser vistos como semelhantes, pois eles têm em comum o fato de que não mudam sua estrutura à medida que mudamos de escala (auto-similaridade). Esse comportamento é conhecido também como *escalamento* ou *hierarquia*. E, finalmente, a irregularidade dessa estrutura seria caracterizada pelo conceito de *dimensão fractal*, a qual não necessariamente tem que ser inteira e governa o expoente de uma lei de potências que descreve tal distribuição.

Esse matemático foi justamente Benoît Mandelbrot que, entre os anos de 1950 a 1970, em um desejo de fornecer uma abordagem mais prática à matemática, desenvolveu conceitos e técnicas novas para tratar esses objetos irregulares, ou como eram denominados até aquele momento, “objetos monstruosos” ou “disformes”. Então, pela necessidade de distingui-los, lhes batizou com a palavra *fractal* por sua estrutura quebrada, inomogênea e irregular.

A aplicação desta área da matemática expandiu-se em diversos campos da ciência, incluindo a cosmologia e embora a fractalidade não tenha entusiasmado a comunidade astronômica, não faltaram estudos que seguiram esta linha, pois determinar a distribuição e a evolução da matéria tem sido uma das tarefas principais da cosmologia observacional.

O estudo da fractalidade na distribuição de galáxias teve suas origens na denominada *cosmologia hierárquica*, a qual surgiu há um século nos primórdios dos estudos sobre a distribuição de galáxias. Uma primeira tentativa de descrever matematicamente



(a) Levantamentos em desvio para o vermelho de galáxias. O pedaço de cima corresponde ao SDSS (2003) e o de embaixo, ao CfA2 (1986).



(b) Modelo de agregação por difusão limitada produzido em laboratório.

Figura 1.1: Sistemas que apresentam padrões característicos de processos fractais auto-organizados. Figuras obtidas de Pietronero & Labini (2005), Pietronero et al. (1998).

a possível distribuição hierárquica de estrelas foi divulgada por E. Fournier d'Albe (1907). Ele propunha que as estrelas estavam distribuídas infinitamente em uma hierarquia de esferas no espaço onde a quantidade de massa da distribuição incluída em uma esfera era diretamente proporcional ao seu raio $M(R) = R$ e a densidade média de matéria era zero. Este modelo apresentou-se como uma solução alternativa para resolver os paradoxos de Olber e de Seeliger *. Um ano após, C. Charlier apresentou outra alternativa a esses paradoxos, desenvolvendo modelos mais gerais de universos hierárquicos infinitos e apresentando um fator decisivo para a taxa de decréscimo da densidade entre os níveis de hierarquia. Seguindo essa linha, em 1920 K. Lundmark tentou compilar um catálogo de galáxias suficientemente extenso capaz de revelar uma estrutura hierárquica, porém não conseguiu o financiamento da comunidade astronômica. Independentemente, F. Selety em 1922 abordou a possibilidade de criar um universo hierárquico sem um centro definido. Essa foi uma das várias suposições que ele fez para esse universo infinito com densidade média de matéria zero conforme o decréscimo do tamanho da esfera. Neste ponto, convém mencionar que houve uma discussão entre Selety e A. Einstein sobre o modelo hierárquico de Charlier, pois Einstein defendia o modelo cosmológico uniforme que contemplava um universo espacialmente finito.

Em 1929, M. Amoroso Costa reconheceu as implicações da relatividade geral sobre a finitude espacial do universo. Nessa publicação, Costa examinou todas as possibilidades da densidade média, o potencial e a força gravitacional para um sistema unidimensional de estrelas tanto em um universo infinito quanto em um universo finito. Os resultados estavam de acordo com os obtidos por Fournier d'Albe, Charlier e Selety.

Após um intervalo sem novas pesquisas nesse contexto, houve uma publicação ap-

*Segundo o modelo Euclidiano, infinito, clássico e estático do Universo, as estrelas se distribuem uniformemente. Então pode se deduzir que o potencial gravitacional é indefinido e portanto, a força gravitacional é também indefinida. Essa é uma consequência da falta de um centro gravitacional nesse universo (Cucic, 2008).

resentada por Carpenter (1938). Ele detectou que a distribuição das nebulosas mais luminosas não era aleatória, mas seguiam uma regularidade especial. Porém, ainda faltava uma representação matemática apropriada do conceito de hierarquia. Por causa dessa ausência de interpretação apropriada os resultados de Carpenter e a cosmologia hierárquica foram abandonados. Tal foi a situação até 1970 quando G. de Vaucouleurs retomou e re-interpretou os resultados de Carpenter. de Vaucouleurs sugeriu a existência de uma *lei universal tamanho-densidade* do tipo lei de potências para a distribuição de galáxias. Aquele momento não pôde ser o mais adequado, pois esse resultado encontrou um ponto em comum com os conceitos introduzidos por Mandelbrot em 1965 e 1977 na teoria dos fractais.

Os conceitos de dimensão fractal, auto-similaridade e de comportamento de escalamento como características de um objeto ou uma distribuição irregular acabaram consolidando-se no livro *The fractal geometry of nature*, escrito por Mandelbrot em 1982, onde encontra-se uma variedade de exemplos de fenômenos naturais, nos quais a lei de potências é ubíqua e, como era de se esperar, esse livro tem uma seção dedicada à distribuição de galáxias.

Paralelamente, Wertz (1970) introduziu uma representação contínua de um universo hierárquico, definindo por primeira vez a *densidade diferencial* e apresentando o *postulado de densidade global zero*. Este estudo foi aplicado a um modelo mais ou menos realista, mas este trabalho (Wertz, 1971) recebeu menos atenção e permaneceu relegado. Porém, vale a pena referênciá-lo pois Wertz já estava introduzindo conceitos de fractalidade em uma época em que eles ainda não eram reconhecidos como tais.

Observacionalmente, a época dourada dos catálogos de galáxias em medida angular desenvolveu-se a partir da década dos anos 1950, portanto, as observações eram bi-dimensionais. Em 1980 apareceram os primeiros catálogos de galáxias medidas em desvio para o vermelho. A evidência definitiva de que a estrutura em grande escala do universo não se mostrava como uma distribuição suave e homogênea foi publicada

em de Lapparent et al. (1986) para o catálogo em desvio para o vermelho CfA. Estes dados e as definições de fractalidade ajudaram a que o físico estatístico L. Pietronero desenvolvesse uma nova estatística em 1987 e, junto com Coleman e Sanders, analisou o catálogo de galáxias CfA em 1988. Nessa estatística foi definida uma *densidade condicional média* que quantificava a distribuição de galáxias segundo uma lei de potências em função da escala. Aplicando aos dados observacionais, o grupo de Pietronero obteve a potência $\gamma = 1,5 \pm 0,2$ para escalas entre $1h_{100}^{-1}$ Mpc e $20h_{100}^{-1}$ Mpc sem nenhuma escala característica que evidenciasse o passo à homogeneidade. Pietronero também explicou porque a abordagem de Peebles (1980) sobre o cálculo da dimensão fractal utilizando a *função de correlação* não era apropriada, e portanto, a escala característica de $5h_{100}^{-1}$ Mpc para a homogeneidade discrepava das observações. Em anos posteriores outros autores confirmaram que o comportamento de lei de potências na distribuição de galáxias atingia distâncias ainda mais profundas e inclusive alguns autores chegaram a concluir que o universo não era um fractal simples, mas um multifractal por apresentar mais de um valor de dimensão fractal. Não obstante, esses trabalhos que evidenciavam a multifractalidade estavam baseados na função de correlação.

Posteriormente, Sylos Labini et al. (1998) decidiram estender os métodos estatísticos apresentados por Pietronero para analisar a contagem numérica a catálogos angulares. Com isso, conseguiram analisar todos os dados disponíveis em desvio para o vermelho (CfA, SRSS, LEDA, entre outros), e mostraram que a matéria visível tem dimensão fractal $D \sim 2$ até escalas de $1000 h^{-1}$ Mpc, sem mostrar uma transição à homogeneidade. Como os estudos de Wertz e Pietronero têm muitas semelhanças, se define a *relação Pietronero-Wertz* como uma lei de potências entre o número de objetos e o raio da esfera onde estes objetos se encontram.

Até este ponto, discutimos trabalhos que foram feitos dentro do contexto da cosmologia Newtoniana, mas um estudo completo em cosmologia necessita introduzir a

relatividade geral, pois esta modifica alguns conceitos acerca da distribuição da matéria no universo. Nesta teoria o espaço e o tempo estão interconectados de modo que formam o espaço-tempo, o qual é curvo devido ao efeito gravitacional da matéria distribuída nele. Assim, a trajetória de um objeto no espaço-tempo curvo é descrita por uma linha denominada *geodésica*. Como pode-se observar na figura 1.2, podemos representar o tempo por uma linha vertical e as coordenadas espaciais perpendiculares a ela. Então, a luz emitida no passado por uma galáxia observada no presente viaja através de uma geodésica específica com uma velocidade constante c . Essa é a *geodésica nula* construída pelos raios de luz emitidos no passado pelos objetos astrofísicos constituindo um cone ao convergir em nós. Esse é o denominado *cone de luz do passado*. Em outras palavras, se nos situarmos em um ponto (x_0, y_0, z_0, t_0) , todo objeto observável estará situado dentro do cone de luz do passado. Do mesmo modo, existirá um *cone de luz do futuro* que estará formado pelas geodésicas nulas dos raios de luz emitidas no tempo atual t_0 , mas com a diferença de que esse cone não pode ser observado por nós.

Assim, como a relatividade geral estabelece que toda observação astronômica é feita ao longo do cone de luz do passado, houve tentativas de incluir esta teoria nos modelos hierárquicos, mas tais tentativas esbarraram em dois problemas principais. Primeiro, não modelavam quantidades definidas ao longo do cone de luz do passado, ou seja *quantidades observáveis*, e segundo, que nem sempre era possível resolver a equação da geodésica nula.

Um dos trabalhos nesse contexto foi feito por W. B. Bonnor em 1972, que apresentou o primeiro modelo cosmológico hierárquico não uniforme para o espaço-tempo de Lemaître-Tolman. Essa análise foi conceitualmente precisa, mas devido às dificuldades analíticas, utilizou uma definição inapropriada de distância.

Outro aspecto importante que surge com a relatividade geral é que distância não é um conceito único. A distância depende da forma de realizar as medidas. Em 1971,

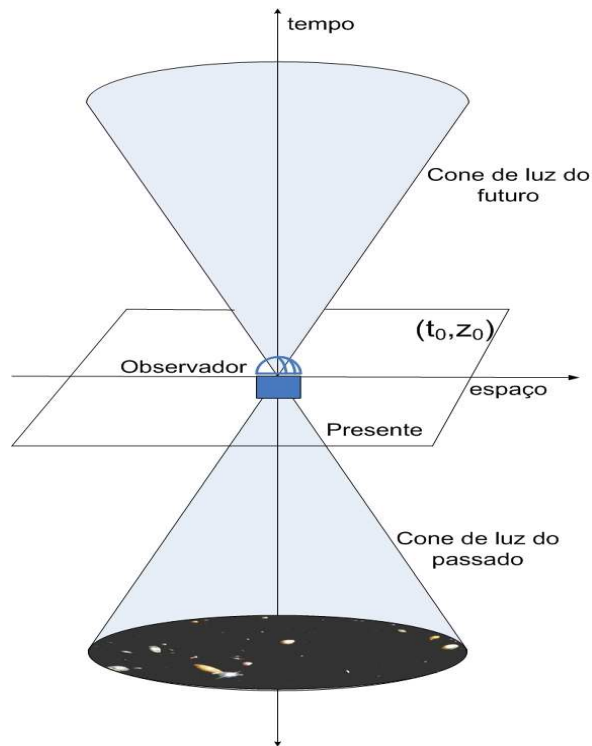


Figura 1.2: Nosso presente está representado por um observador situado no vértice do cone. Esse observador recebe a luz que foi emitida por galáxias que situam-se no cone de luz do passado. E a luz que é emitida no presente formará o cone de luz do futuro, mas que não pode ser observado por nós.

G.R.F. Ellis sumarizou as definições de *distância observacional*, como por exemplo, a distância definida pela luminosidade d_L , a distância definida pela área do observador d_A e a distância definida pela área da galáxia d_G . Além disso, enfatizou o teorema de Etherington (1930) que relaciona as distâncias com o desvio para o vermelho, o qual é válido para qualquer modelo cosmológico. Contudo, poucos levaram em conta essas considerações sobre a distância observacional.

Outro trabalho relacionado com um modelo relativístico na cosmologia hierárquica foi escrito por P. Wesson, publicado em 1978. O problema dessa abordagem foi que

terminou-se re-escrevendo a lei de densidade-tamanho de de Vaucouleurs utilizando a densidade local e uma distância coordenada, as quais não são quantidades observacionais, o que fez com que esse modelo se afaste totalmente da ideia de agrupamento hierárquico.

Os conceitos discutidos por Wertz e Pietronero sobre a relação densidade-tamanho na distribuição de galáxias e de Ellis sobre as definições para a distância na relatividade geral foram revistos por Ribeiro (1992a), que apresentou um modelo relativístico da estrutura em grande escala a qual foi considerada como um sistema fractal auto-similar em um espaço-tempo de Lemaître-Tolman. Nessa publicação reinterpretou-se a relação de Pietronero-Wertz no contexto do espaço-tempo inhomogêneo de Lemaître-Tolman conseguindo escrever as grandezas observáveis necessárias para comparar o modelo com as observações. Em Ribeiro (1995) estudou-se a função de correlação e a estatística de Pietronero no contexto da cosmologia de Einstein-de Sitter (EdS). Obteve-se que a *homogeneidade espacial* dessa cosmologia era observável só até um desvio para o vermelho próximo $z \sim 0,01$, o que sugeria que a estrutura fractal observada poderia se estender para valores maiores de z via um efeito geométrico devido ao fato das observações serem feitas ao longo do cone de luz do passado. Com esse resultado, a distribuição fractal observada não estaria mais em conflito com o *Princípio Cosmológico* sobre a homogeneidade espacial. Neste ponto vale a pena ressaltar que a relatividade geral permite diferenciar dois tipos de homogeneidade: a *homogeneidade observacional* (HO), definida no cone de luz do passado e que é justamente onde as medidas astronômicas são feitas e a homogeneidade espacial (HE), definida sobre a hipersuperfície espacial que é onde o termo de densidade-energia da equação de Einstein é constante. Portanto, quando fala-se de uma distribuição fractal de galáxias, está se falando de uma inhomogeneidade observacional.

Posteriormente, Ribeiro & Stoeger (2003) desenvolveram um método para relacionar grandezas teóricas com as observacionais levando em conta a contagem numérica

e a função de luminosidade. Essas grandezas são úteis para testar a inhomogeneidade na distribuição de matéria no universo. É assim que depois de realizar vários refinamentos, surgiu uma alternativa para estudar a distribuição de galáxias, a qual foi apresentada em Ribeiro (2005). Nesse trabalho, definiram-se duas ferramentas estatísticas para analisar a distribuição de matéria para o modelo Einstein-de Sitter (EdS). Essas ferramentas estatísticas definidas radialmente foram a *densidade diferencial* γ e a *densidade integral* γ^* . Mostrou-se também que o comportamento delas dependia da distância escolhida. Em Ribeiro (2005) as densidades que serviam para analisar a distribuição de galáxias foram γ_L e γ_z , as quais referem-se à densidade em função da distância definida pela luminosidade e à densidade em função da distância definida pelo desvio para o vermelho, respectivamente. Viu-se que essas densidades eram relevantes a partir de um desvio para o vermelho $z = 0, 1$ tanto para o modelo EdS quanto para o Λ CDM (modelo FLRW com $\Omega_m = 0, 3$ e $\Omega_\Lambda = 0, 7$).

Com essas definições, tais densidades foram calculadas a partir da *função de luminosidade* das galáxias em $0, 05 \leq z \leq 1, 0$ do levantamento Canadian Network for Observational Cosmology 2 (CNOC2) por Albani et al. (2007) para um modelo EdS. Posteriormente, e como uma extensão a esse trabalho, Iribarrem (2009) apresentou, entre outros resultados, os dados das densidades radiais para as galáxias intermediárias do mesmo catálogo só que a análise inclui o modelo de evolução completo apresentado em Lin et al. (1999), a *função de completudeza* e a cosmologia padrão Λ CDM. Iribarrem et al. (2011) apresentaram também resultados para galáxias azuis do catálogo Gabasch et al. (2004) que vão entre $0, 5 \leq z \leq 5, 0$. Com essa base, eles obtiveram as densidades radiais para o catálogo de Gabasch et al. (2006) correspondente às galáxias vermelhas em $0, 75 \leq z \leq 3, 0$ observadas pelo levantamento FORS Deep Field (FDF) com o modelo cosmológico Λ CDM. Como esperava-se da teoria, esses trabalhos mostraram-se que as densidades radiais seguem uma lei de potências em função da distância observacional e esses resultados asseguraram-nos que é válido aplicar o

modelo fractal relativístico com as estatísticas das densidades radiais nos dados observacionais dos levantamentos em desvio para o vermelho de galáxias.

Com respeito à dimensão fractal no contexto da cosmologia relativística fractal, Rangel Lemos & Ribeiro (2008) analisaram as consequências da distinção entre homogeneidade observacional e espacial, levando em conta as quatro distâncias cosmológicas d_i ($i = L, G, A, z$) e simulando o comportamento da contagem numérica com as diferentes distâncias para testar o possível comportamento fractal. Dessa forma encontraram primeiro, a forte dependência do comportamento das densidades radiais com a definição da distância e, segundo, a tendência da dimensão fractal aproximar-se a 3 quando $z \rightarrow 0$ para todas as distâncias e a tendência assintótica a 0 quando $z \rightarrow \infty$ para d_i ($i = A, G, L$). Essa análise foi feita para o modelo cosmológico espacialmente homogêneo EdS e foi interessante encontrar que uma cosmologia espacialmente homogênea não necessariamente apresenta uma homogeneidade observacional.

É sobre essas bases que este trabalho foi montado. Quisemos aproveitar os dados de densidades radiais e distâncias observacionais fornecidos por Iribarrem (2009) e Iribarrem et al. (2011) cobrindo um intervalo de desvio para o vermelho amplo, $0,05 \leq z \leq 5,0$. Com esses dados espera-se calcular a dimensão fractal mediante um ajuste de uma função de tipo lei de potências e assim determinar a existência de um valor para o desvio para o vermelho limite no qual a distribuição de galáxias deixa de ser homogênea ou inhomogênea.

Os nossos resultados sugerem que existe uma distribuição fractal de galáxias no intervalo de desvio para o vermelho $0,05 \leq z \leq 5,0$ especialmente quando consideramos as densidades radiais integrais, pois elas fornecem valores sempre positivos, fato que implica que a lei de potências continua governando nestes intervalos. As galáxias do catálogo CNOC2 e as galáxias vermelhas do catálogo G04 forneceram um só valor de dimensão fractal ao longo do seu correspondente intervalo de desvio para o vermelho. Na profundidade $0,25 \leq z \leq 1,0$ a dimensão é $D = 2,56 \pm 0,02$, no

entanto, na profundidade $0,75 \leq z \leq 3,0$ a dimensão é $D = 0,84 \pm 0,09$. Com esse resultado se verifica que a dimensão fractal em função do desvio para o vermelho diminui à medida em que z aumenta. Já no caso das galáxias azuis do catálogo G06, em desvios para o vermelho mais altos $0,5 \leq z \leq 5,0$, se apresenta um comportamento especial. Primeiro que é possível ajustar duas retas ao longo desse intervalo e segundo que a partir de $z \sim 2$ a dimensão fractal torna-se negativa para as densidades radiais diferenciais. Esse fato leva-nos a concluir que são mais úteis as densidades radiais integrais. Portanto, as galáxias azuis selecionadas no UV apresentam uma mudança na dimensão fractal de $D = 1,02 \pm 0,11$ a $D = 0,22 \pm 0,12$ e as galáxias azuis selecionadas no óptico fornecem uma mudança na dimensão de $D = 1,06 \pm 0,13$ a $D = 0,28 \pm 0,18$.

Tendo em vista estes resultados a dimensão fractal calculada a partir de quantidades observáveis mostra que o modelo fractal relativístico aplicado poderia ser válido para caracterizar a suposta irregularidade na distribuição de galáxias sem entrar em conflito com os postulados do modelo padrão. Além do mais, o fato de ter obtido mais de um valor de dimensão fractal num mesmo intervalo de desvio para o vermelho sugere que a distribuição poderia ser um multifractal.

O presente trabalho está dividido da seguinte forma, no capítulo 2 apresentam-se os conceitos de fractalidade desenvolvidos por Mandelbrot. No capítulo 3 apresenta-se a aplicação da fractalidade na distribuição de galáxias e, além disso, definimos as estatísticas radiais no contexto da relatividade geral e para a cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). O capítulo 4 mostra os resultados obtidos e as tentativas de análise das distribuições. Finalmente, apresentamos as conclusões e algumas perspectivas no capítulo 5.

2.1 O que é um fractal?

Poderia-se pensar que os fractais, ou a geometria fractal, são parte da matemática abstrata, e pelo que geralmente ensina-se na escola ficamos acostumados a pensar em formas geométricas euclidianas como quadrados, círculos, triângulos, etc. Esses objetos são caracterizados pela sua dimensão. Por exemplo, no caso de uma linha precisa-se de uma coordenada para ser definida, portanto, sua dimensão é 1. No caso do quadrado e do círculo precisam-se de duas coordenadas para serem definidos, então sua dimensão é 2 e no caso da esfera e do cilindro, sua dimensão é 3. Porém, dando uma olhada ao nosso redor, alguns objetos naturais apresentam formas complexas que para serem descritos de forma precisa a geometria euclidiana talvez não seja a mais apropriada. Os fractais podem-se encontrar nas folhas das árvores, nas núvens, nas linhas dos litorais, na distribuição do sistema circulatório no corpo humano, e tantos outros exemplos. E esses objetos naturais não são simples linhas, nem simples triângulos, nem simples esferas. Eles têm uma estrutura mais complexa e portanto, são outro tipo de objetos (ver Fig. 2.1).

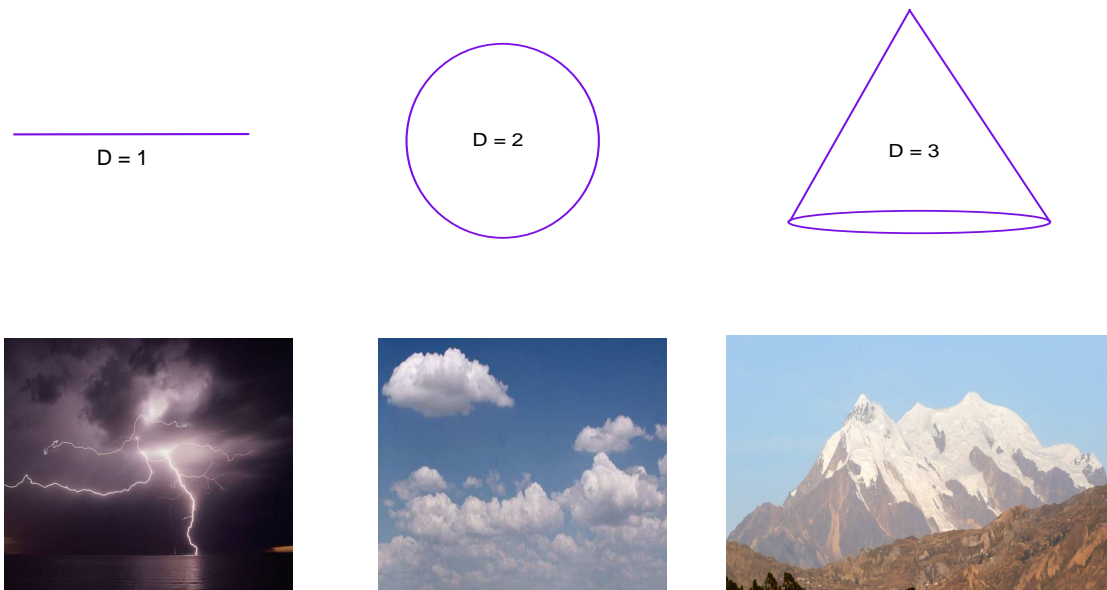


Figura 2.1: “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones....nem a luz sequer viaja em linha reta”- (Mandelbrot, 1982).

Em 1954 o matemático francês Benoit Mandelbrot (1924-2010) estudou o ruído presente nas transmissões telefônicas da IBM. Então, viu um padrão que repetia-se em diferentes escalas e isto lembrou-lhe as curvas de Cantor, de Peano, de von Koch, de Sierpinski e de Julia. Estas curvas eram conhecidas como “monstruosas” por satisfazerem algumas propriedades de curva, mas que não podiam ser representadas de forma gráfica. Felizmente Mandelbrot tinha acesso ao computador e só assim conseguiu plotar pela primeira vez o conjunto de Julia. Até criou sua própria equação iterativa que deu lugar ao conhecido conjunto de Mandelbrot (essas curvas mostraram-se na Fig. 2.2). Após ter estudado as características destes objetos, em 1975 os batizou como *fractais* devido à sua forma quebrada ou irregular.

O interesse dele sempre foi de explicar os fenômenos de forma visual ou geométrica, por isso reuniu vários exemplos da natureza que podiam ser caracterizados

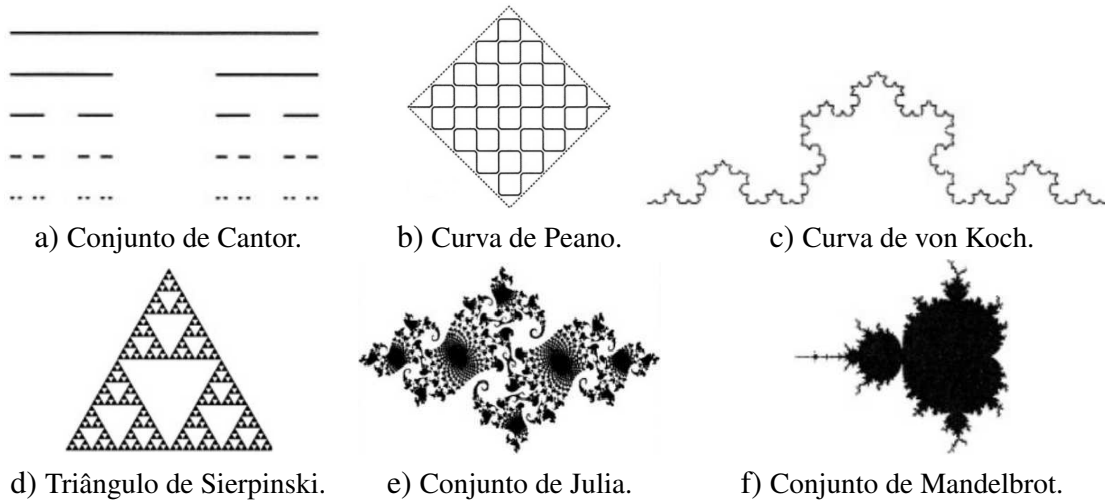


Figura 2.2: Curvas que Mandelbrot conseguiu plotar. (Figuras obtidas de Peitgen et al. (2004)).

pela geometria fractal no seu livro de 1982 *The Fractal Geometry of Nature*, onde mostrava-se que a nova ferramenta da geometria fractal possuía uma ampla utilidade. Embora os matemáticos da época não tivessem dado muito crédito a esse trabalho, cientistas de outras áreas acolheram essas ferramentas com entusiasmo e encontraram uma variedade de aplicações.

A definição de fractal não é direta, pois o mesmo Mandelbrot recusou-se a dar uma definição concreta porque seria muito restritiva. Portanto, seria melhor considerar os fractais como uma coleção de técnicas e métodos aplicados ao estudo de objetos irregulares, quebrados e com padrões geométricos auto-similares (Ribeiro & Miguelote, 1998).

2.1.1 Aplicações

A seguir descreveremos algumas aplicações em diversas áreas científicas para termos uma idéia da utilidade da fractalidade e introduziremos conceitos como a dimensão fractal, auto-similaridade e a sua relação com funções de tipo lei de potências.

No livro de Takayasu (1990) encontram-se aplicações na biologia. Por exemplo,

os pulmões apresentam repetidas ramificações e sua distribuição fractal contribui para a eficiência no intercâmbio de oxigênio e de dióxido de carbono na superfície. A dimensão fractal estimada é $D = 2,2$. O tamanho das veias sanguíneas distribuem-se com dimensão fractal $D = 2,3$. No caso das ramificações neuronais, a dimensão é $D = 1,5$ e dos brônquios é $D = 3,0$. Estas ramificações apresentam-se também nas árvores e sua dimensão fractal está entre $1,3 < D < 1,8$. Nos sistemas fluviais, a dimensão fractal está entre $1,1 < D < 1,3$.

No trabalho de Cross et al. (1993) estudam-se os vasos sanguíneos dos rins e mostram que eles se distribuem com $D = 1,61 \pm 0,06$.

No estudo dos relâmpagos, Sañudo et al. (1990) baseiam-se num modelo aleatório (estocástico) em três dimensões que recria a formação de relâmpagos e obtiveram uma dimensão fractal de $D = 1,51$.

Na física de materiais, como Stewart (1991) menciona, estuda-se o processo DLA (Diffusion Limited Aggregation) quando mistura-se um fluido pouco viscoso em outro altamente viscoso e observa-se que o fluido injetado forma uma estrutura dendrítica, a qual foi denominada como *dedos viscosos*. Como possível aplicação desse processo está a extração de petróleo onde bombeia-se água dentro da terra para conseguir que o fluido mais viscoso saia para fora. A dimensão fractal dos dedos viscosos é de $1,62$. A eficiência da extração de petróleo diminui quando a água distribui-se por uma estrutura fractal porque o petróleo fica entre as ramificações (Stewart, 1991). Esta estrutura é formada por aglomeração de partículas e pode ser reproduzida em laboratório mediante deposição electroquímica utilizando uma solução aquosa de sulfato de zinco e acetato n-butílica. Essa interface é submetida a um diferencial de voltagem d.c. como parâmetro de controle e de difusão (Peitgen et al., 2004). A estrutura formada se observa na Fig. 2.3.

Na geo-estatística, Mandelbrot (1967) propôs que as linhas costeiras podiam ser caracterizadas por dimensões que estavam entre $1,1 < D < 1,5$. Também introduziu,



Figura 2.3: Estrutura fractal formada por aglomeração de partículas em uma interface de sulfato de zinco e acetato n-butílic sob um voltagem c.c. (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).

de maneira didática, o conceito de auto-similaridade, que refere-se à existência de uma estrutura ou padrão que repete-se em diferentes escalas, como a linha costeira na qual encontra-se mais estrutura à medida que amplia-se qualquer parte dela.

Na economia, estudou-se a variação dos preços, os quais não são independentes nem aleatórios. Mandelbrot mostrou que o preço da produção de algodão seguia uma lei de potências na qual o expoente seria a dimensão fractal.

Na tecnologia de telecomunicações o radio-astrônomo Nathan Cohen em 1995, depois de assistir a uma conferência sobre a distribuição em grande escala do universo e ouvir de Mandelbrot sobre os fractais, decidiu construir uma antena com a forma da curva de von Koch e viu que recebia uma resposta de frequência de multi-banda e banda larga ocupando um espaço menor do que uma antena normal (Cohen, 2006). Além de ser fácil de construir mecânicamente, esta antena mantinha a eficiência e o ganho. Esta idéia foi aplicada nas antenas de telefone portátil da empresa Motorola além de outros artefactos de telecomunicações.

Na cosmologia, desde inícios de século passado, alguns cientistas já estavam desenvolvendo estudos sobre a hierarquia na distribuição de galáxias sem saber que estavam

falando sobre fractais. O astrônomo Edwin Carpenter, na década de 1930, encontrou que a densidade numérica de galáxias era menor quanto maior o tamanho do aglomerado, além de observar que essas aglomerações eram não uniformes e não aleatórias (Carpenter, 1938). Este conceito foi melhor interpretado por Gérard de Vaucouleurs em 1970 por meio de uma lei densidade-tamanho e sugerindo que a relação entre estes termos seguia uma lei de potências da forma (Baryshev & Teerikorpi, 2002):

$$\text{densidade} = \text{constante} \times \text{tamanho}^{1,7}.$$

Com estes exemplos, vimos que a dimensão fractal não necessariamente toma valores inteiros e indica o muito ou o pouco irregular que um objeto é. Um valor de 1, 2, por exemplo, indica que o objeto está entre um plano ou uma superfície e é mais regular do que um objeto com dimensão 1, 8.

Matematicamente, a dimensão fractal está ligada com o expoente de uma lei de potências que expressa a relação número-tamanho de um objeto irregular ou a densidade-tamanho de uma distribuição irregular de objetos.

Viu-se também a *auto-similaridade*, denominada às vezes como *invariança de escala*. Esse aspecto indica a permanência de uma estrutura ou um padrão à medida que amplia-se uma parte do objeto, de modo que em escalas pequenas a forma é aproximadamente a mesma do que a forma do objeto todo. Isso faz com que o objeto não tenha uma única escala característica.

Para ilustrar esse conceito, vamos descrever a *curva de Koch*, introduzida por Helge von Koch em 1904. Como estrutura inicial temos uma linha reta, a qual é dividida em três partes iguais. Logo, no pedaço central traça-se um triângulo equilátero e tira-se a base do triângulo. Esse processo é o gerador. Posteriormente, em cada um dos lados do triângulo se faz a divisão em três partes, traçando um triângulo equilátero no pedaço central e eliminando sua base. Aplicando este processo de forma iterativa consegue-se uma estrutura como da Fig. 2.4. Se no passo 4 pedirmos que o algoritmo junte essas

estruturas de modo a conseguir uma forma como se observa na figura 2.5, ela lembra algo parecido com os flocos de neve reais (ver Fig. 2.6) (Peitgen et al., 2004). A diferença fundamental é que a estrutura matemática pode ser iterada infinitamente, no entanto, um floco de neve terá um limite na sua auto-similaridade.

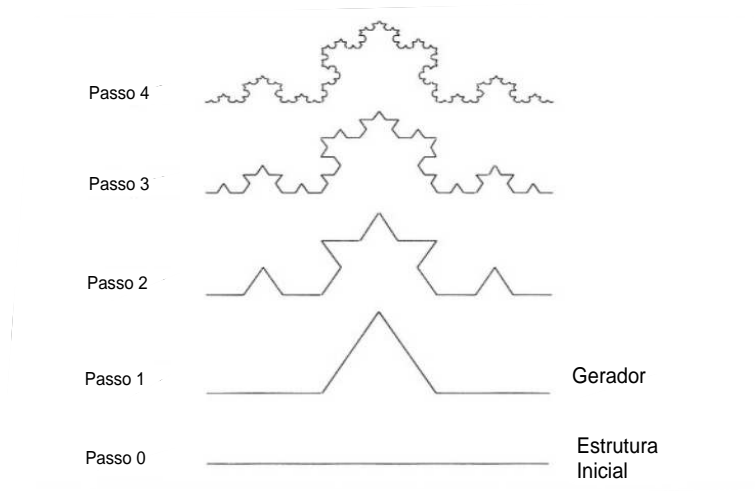


Figura 2.4: A curva de von Koch. Divide-se uma linha em três partes iguais, traça-se um triângulo equilátero no pedaço central e elimina-se a base. Aplica-se esse processo iterativamente em cada lado do triângulo (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).

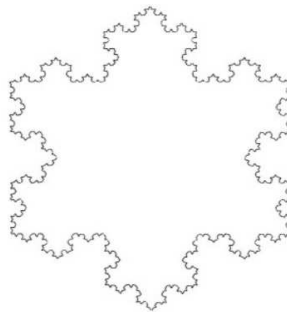


Figura 2.5: Curva de von Koch com três partes congruentes. (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).



Figura 2.6: A curva de Koch lembra aos flocos de neve reais (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).

2.2 O cálculo da dimensão fractal

Introduzidas a dimensão fractal e a auto-similaridade, agora perguntamo-nos como calcular essa dimensão fractal.

Ao contrário do que poderia-se pensar, o conceito de dimensão não é bem definido. Mesmo os matemáticos concordam que existem várias formas de calculá-la e em alguns casos elas não necessariamente coincidem. Por isso, de acordo com o caso, é preciso primeiro definir como será medida a dimensão.

Contudo, para entender a ideia de dimensão fractal vamos pegar o caso conhecido dos litorais apresentado no artigo de Mandelbrot em 1967.

O problema dos litorais, na realidade, tinha sido já revelado por L. F. Richardson (1881-1953), que mostrou que existia uma arbitrariedade na medida dos litorais devido a que estes dependiam da escala utilizada, tornando-se um problema na hora de comparar comprimentos entre fronteiras geográficas (Mandelbrot, 1967).

Se nós escolhermos uma régua de comprimento δ e cobrirmos o litoral de Grã-Bretanha, obteríamos um número $N(\delta)$ de réguas. Porém, se trabalhássemos com uma régua de comprimento menor, cobriríamos o litoral com melhor precisão e obteríamos um número maior de réguas. Tornando seu comprimento menor ainda, e devido à

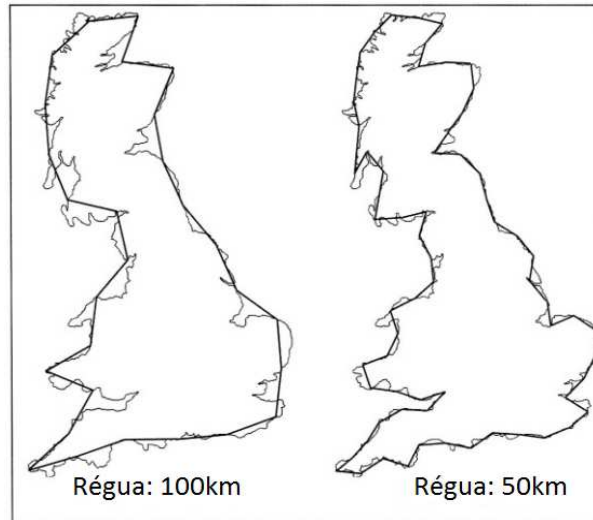


Figura 2.7: A medida que a escala diminui, precisa-se maior número de réguas para cobrir um litoral (Figura obtida de Peitgen et al. (2004)).

auto-similaridade do litoral, vamos encontrando mais e mais estruturas para cobrir e, portanto, um maior número de réguas serão necessárias (ver Fig. 2.7). Dessa descrição, parece que a relação entre o número de réguas e a escala é,

$$N(\delta) \propto \frac{1}{\delta}. \quad (2.2.1)$$

Então o perímetro é,

$$L(\delta) = \delta N(\delta). \quad (2.2.2)$$

No caso de um objeto regular o perímetro seria sempre finito, no entanto, uma figura irregular apresentaria um perímetro infinito pela existência de mais estrutura em escalas cada vez menores. Por isso, falar do comprimento dos litorais apresentou um problema conceitual e viu-se necessária outra ferramenta matemática para serem caracterizados. A proposta de Mandelbrot foi cobrir o litoral com linhas quebradas ao invés de utilizar linhas uni-dimensionais. Nesse caso, a relação entre o número de réguas e a escala seria,

$$N(\delta) \propto \delta^{-D}, \quad (2.2.3)$$

onde D não precisa ser inteiro. Assim, define-se D como a *dimensão fractal*.

Finalmente, o comprimento do litoral estaria expressado como:

$$L(\delta) \propto \delta^{1-D}. \quad (2.2.4)$$

Repare-se que o número de réguas necessárias para cobrir o litoral comporta-se como uma *lei de potência* da escala. Richardson tinha apresentado o comprimento estimado e a escala em um gráfico log-log, mas foi Mandelbrot quem assinalou que $(1 - D)$, a inclinação da reta que passa por esses pontos, determina a dimensão fractal D e diz-nos o quão irregular um litoral é.

Com este método foi calculada a dimensão fractal do litoral de Grã-Bretanha, obtendo $D = 1,31$. Comparando com o litoral de Noruega $D = 1,52$, o valor maior indica que o litoral de Noruega é mais irregular, pois ele tem mais baías e promontórios do que o litoral de Grã-Bretanha. Além disso, esses valores estão entre $D = 1$ e $D = 2$, o que indica-nos que o litoral não é nem uma linha reta nem uma superfície.

Outra forma de medir a dimensão fractal é por meio do método denominado *box-counting*. Esse método é aplicado a qualquer estrutura situada sobre o plano e consiste em cobrir uma estrutura com uma rede feita de quadrados de lado δ e contar o número de caixas N que contêm alguma parte da estrutura (ver Fig. 2.8). A relação entre o número de quadrados e o tamanho do lado é também uma lei de potência da forma já vista: $N \propto \delta^{-1}$, a qual nos diz que a medida que o tamanho dos quadrados diminui, o número de quadrados para cobrir a estrutura aumenta. Se por exemplo, tivéssemos uma curva suave de comprimento L , a relação entre δ e N seria:

$$N(\delta) \propto L\delta^{-1}. \quad (2.2.5)$$

Para uma região de área A limitada por uma curva suave, a relação seria:

$$N(\delta) \propto A\delta^{-2}. \quad (2.2.6)$$

E no caso de uma estrutura tridimensional, usariam-se cubos e o expoente seria 3.

Com isto, reparemos que a dimensão da curva ou da estrutura a estudar é igual ao expoente D na lei de potência:

$$N(\delta) \propto 1/\delta^D. \quad (2.2.7)$$

Portanto, esta lei de potência é válida para a maioria das estruturas fractais, com a condição de que D não precisa ser inteiro. Assim, D é a dimensão denominada *box dimension* ou dimensão de capacidade e é definida como:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)}. \quad (2.2.8)$$

É importante assinalar que este método é um dos mais utilizados devido à sua facilidade de cálculo computacional. E é especialmente usado em figuras que não são totalmente auto-similares.

As limitações destes métodos surgem do fato de que uma estrutura poderia ser composta de vários fractais, cada um deles com uma dimensão diferente. Nesse caso, estamos tratando com multifractais e precisa-se de um método de estudo diferente. A dimensão fractal de um multifractal só representaria a componente com dimensão fractal maior. Por isso, prefere-se ter um espectro de dimensões fractais.

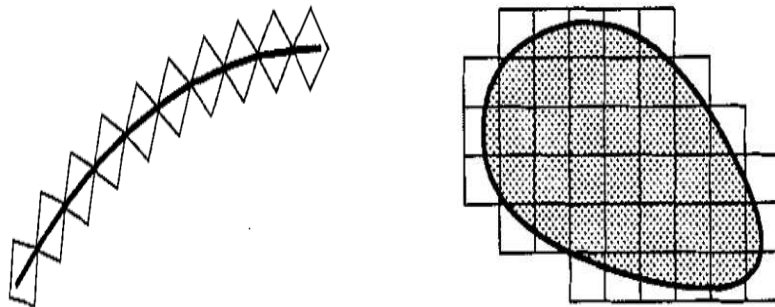


Figura 2.8: Calcula-se a dimensão de capacidade, ou “box counting” cobrindo a estrutura com o número N necessário de caixas de escala δ e relacionando estes termos mediante uma lei de potência (Figura obtida de Strogatz (1994)).

FRACATAIS E A DISTRIBUIÇÃO DE GALÁXIAS

3.1 Modelos Hierárquicos (Fractais) Newtonianos

3.1.1 De Swedenborg (1734) a Carpenter (1938)

Os primórdios da fractalidade na distribuição de galáxias advém da cosmologia hierárquica desenvolvida desde o século XVIII. Emmanuel Swedenborg (1688-1772) foi um cientista que escreveu trabalhos em várias áreas da ciência e em 1734 escreveu suas ideias sobre a estrutura do universo no livro *Principia*. Nessa publicação, Swedenborg expôs a ideia de hierarquia cósmica, expressando que as partículas elementares formavam corpos celestes os quais formavam sistemas que por sua vez eram elementos de sistemas de maior hierarquia e assim por diante. E a visão de que o microcosmos estava formado por partículas cada vez menores não estendia-se *ad infinitum*, senão que existia um *ponto natural* do qual começava a geometria e de onde as estruturas iam-se formando até chegar ao macrocosmos. Esta ideia refletia sua opinião geral de que tudo no mundo, tanto o grande quanto o pequeno, estaria construído conforme os mesmos princípios. Assim, para ele a Via Láctea, formada por outros sóis, era só um elemento de um sistema maior o qual era outro elemento de um outro sistema maior

ainda. Swedenborg também propôs que a formação do sistema solar originava-se na rotação da massa solar e por causa disto as partes externas eram expulsas formando um anel de matéria, o qual após condensar-se, formaram os planetas e as luas.

Quase uma década depois, Johann Lambert (1728-1777) observou que as estrelas da faixa da Via Láctea estavam distribuídas em profundidade e, similarmente, Immanuel Kant (1724-1804) propôs que a Via Láctea era uma nuvem achatada de estrelas, sendo o sol parte dela, e apresentou a hipótese de que as nebulosas elípticas eram outras Vias Lácteas. Lambert e Kant sugeriram que os sistemas estelares formavam uma estrutura hierárquica de tal modo que não estavam distribuídos uniformemente. Contudo, a diferença entre estes modelos era que Swedenborg e Kant pensavam que a hierarquia era infinita, enquanto que para Lambert após um número finito de passos, a hierarquia acabava.

O estudo de nebulosas iniciou-se com Sir William Herschel (1738-1822) quando ele descobriu o que achou que fosse um cometa em 1781. Não obstante, foi demonstrado por Anders Lexell (1740-1784) que a órbita era quase circular e, conseqüentemente não era um cometa, mas um planeta, que foi nomeado como Urano. Herschel, com ajuda de a sua irmã Caroline Herschel (1750-1848), descobriu 2500 novas nebulosas e aglomerados de estrelas, iniciando a construção de um banco de dados de todo o céu. John Herschel (1792-1871), filho de William, encontrou 1700 novas nebulosas e aglomerados no céu do hemisfério sul e em 1839 foi o primeiro a sugerir que se tirassem fotografias do Sol para gravar as posições e tamanhos das manchas solares. Além disso, John Herschel também tinha em mente uma forma de sistema hierárquico dando como exemplo os satélites dos planetas do sistema solar e as enormes distâncias entre estrelas. Afirmava que o princípio de uma aglomeração hierárquica admitia a característica e a importância de uma lei cósmica.

Alguns anos depois a ideia de estrutura hierárquica voltou à cena com Edmund Fournier d'Albe (1868-1933), quem em 1907 publicou o livro *Two New Worlds*, onde

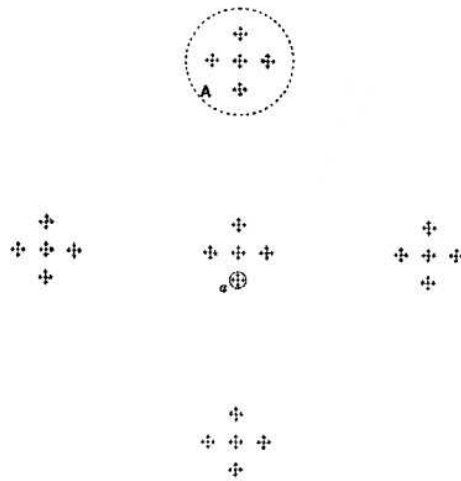


Figura 3.1: A distribuição de estrelas no mundo de Fournier. A massa dentro de cada esfera muda proporcionalmente com o raio (Figura obtida de Baryshev & Teerikorpi (2002)).

encontra-se a primeira descrição matemática de uma possível distribuição hierárquica de estrelas. No mundo de Fournier (ver Fig. 3.1), as estrelas encontram-se distribuídas em uma hierarquia de esferas em um espaço infinito, com o aumento da massa dentro de qualquer esfera sendo diretamente proporcional ao raio, $M(R) \propto R$. Esta proposta não era comum porque para uma distribuição esféricamente uniforme a massa aumenta com o cubo do raio, $M(R) \propto R^3$.

Um fato interessante que Fournier analisou foi a velocidade relativamente lenta das estrelas. Ele concluiu que estrelas muito distantes não atingiam altas velocidades porque a densidade diminuía rapidamente com a distância. Quer dizer, o potencial gravitacional na superfície de uma esfera de estrelas seria o mesmo sem importar o tamanho da esfera desde que a massa dentro dessa esfera aumentasse com o raio e não com o volume.

Posteriormente, Carl Charlier (1862-1934) deu continuidade ao conceito de hierarquia cósmica e foi o primeiro a desenvolver modelos mais gerais que resolviam o

paradoxo de Olbers e o problema do potencial infinito (paradoxo de Seeliger). Charlier encontrou um critério no qual a hierarquia devia estar presente para resolver esses dois problemas. O fator decisivo foi a taxa com a qual a densidade diminuía de um nível (i) a outro ($i + 1$). Isto dependia da taxa entre os tamanhos dos elementos e o número de elementos do nível superior $N_{(i+1)}$. O critério de Charlier pode ser escrito como,

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} \geq N_{i+1}.$$

A sua ideia foi modificada em 1922 após uma carta que Selety enviou para ele. A relação entre a taxa de tamanhos e o número de elementos ficaria como:

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} \geq \sqrt{N_{i+1}}. \quad (3.1.1)$$

Estes trabalhos de Charlier chamaram a atenção de Knut Lundmark (1889-1958), que em 1920 aplicou o modelo de Charlier a dados de galáxias e concluiu que os três sistemas de diferentes ordens que conheciam-se na época, estrelas, galáxias e metagaláxias, encontravam-se organizadas de tal forma que satisfaziam a condição dada pela eq. (3.1.1). Em termos atuais, Lundmark estimou, embora grosseiramente, a dimensão fractal da distribuição de galáxias obtendo um valor ao redor de 2. Contudo, os dados eram insuficientes. O sonho de Lundmark era construir uma base de dados que contivesse toda a informação possível de galáxias para poder estudar, especialmente, sua organização no espaço. Infelizmente, ele não conseguiu financiamento para este projeto. Lundmark foi o precursor de importantes construções de catálogos os quais conseguiram realizar o sonho de Lundmark com o desenvolvimento da base de dados do LEDA (**L**yon-**M**eudon **E**xtragalactic **D**Atabase) e a descoberta da Supergaláxia Local por de Vaucouleurs em 1950, a qual era só parte de uma hipergaláxia maior.

Após Lundmark, a cosmologia hierárquica foi quase abandonada até que na década de 1960 Mandelbrot e Gerard de Vaucouleurs (1918-1995) convergiram com suas pesquisas. Mas antes, o astrônomo Edwin Carpenter (1898-1963) ao inspecionar a for-

mação de nuvens e aglomerados de nebulosas, encontrou que essas não-uniformidades não eram aleatórias, pois possuíam uma regularidade especial. Com esses dados ele encontrou uma relação entre a densidade numérica e o tamanho do aglomerado, sendo que a relação era inversamente proporcional (Carpenter (1938)). Ele reconheceu que existia uma conexão entre os aglomerados de galáxias.

3.1.2 De de Vaucouleurs (1960) a Pietronero (1987)

Baseado no trabalho de Carpenter, de Vaucouleurs desenvolveu uma lei de densidade-tamanho utilizando dados reais de vários aglomerados conhecidos até aquele momento. Essa lei expressa-se como a seguir,

$$\log \rho_M^* \simeq -1,9(\log R - 10,7), \quad (3.1.2)$$

onde ρ_M^* é a densidade média de um aglomerado com raio R . Essa equação aplica-se ao intervalo observável $10^{23} < R < 10^{26}$ cm (de Vaucouleurs (1960)). de Vaucouleurs conectou esta lei com a ideia de que o agrupamento hierárquico era fundamental na cosmologia, mas sugeriu que devia utilizar-se um modelo mais geral que considerasse flutuações estatísticas na densidade. Escrevendo a fórmula de de Vaucouleurs sem logaritmos, teríamos, $M(R) \propto R^{3-D}$.

Esta fórmula faz lembrar aquela de uma esfera de raio R em um espaço euclidiano de dimensão E com volume $V \propto R^E$. Comparando com as estruturas vistas na seção (§ 2.1), esta fórmula parece sugerir que D é a dimensão fractal.

Voltando a de Vaucouleurs, ele se deu conta de três pontos importantes: primeiro, que não existia um ponto privilegiado no universo, segundo, que de certo modo a distribuição hierárquica de matéria era uniforme porque dois volumes, um grande e outro pequeno, continham a mesma massa e terceiro, que um observador situado em qualquer lugar, encontraria uma densidade média decrescente quando a profundidade de observação aumentasse ao redor dele.

Apesar de todos esses trabalhos, os astrônomos não mostraram entusiasmo devido a que o conceito de hierarquia carecia de um formalismo matemático.

Contudo, 1960 foi a época certa para de Vaucouleurs porque em outra área, Mandelbrot estava começando a estudar a distribuição de galáxias no universo com sua nova matemática fractal. Ao saber sobre o trabalho de de Vaucouleurs, sentiu-se muito motivado para desenvolver a geometria fractal. Assim, ele escreveu o livro *Fractals: form, chance and dimension* em 1977 e *The fractal geometry of nature* em 1982, onde deu uma descrição matemática das propriedades fractais da distribuição de galáxias. Nesses trabalhos, Mandelbrot generalizou o princípio cosmológico de Einstein, onde $D = 3$ (distribuição esféricamente homogênea), para obter uma distribuição de galáxias não-uniforme com $D < 3$. Propôs o “Princípio Cosmográfico Condicional”, que afirmava que todo observador veria a mesma estrutura ao redor dele, mas só se ele estivesse observando desde um ponto material como uma galáxia. Isto significava que um observador poderia verificar a fractalidade na distribuição de matéria se estivesse em uma estrutura, mas se ele estiver em um vácuo, então a detecção de decréscimo da densidade teria que ser feita a escalas maiores do que o tamanho do vácuo.

Os dados observacionais com os quais, inicialmente, de Vaucouleurs trabalhou não eram muito profundos. Porém, com o tempo, desenvolveram-se projetos para construir catálogos de levantamento com o desvio para vermelho de galáxias como o Center for Astrophysics Survey (CfA), Southern Sky Redshift Survey (SSRS), Las Campanas Redshift Survey (LCRS), European Observatory Slice Project (ESP) e assim por diante. Com essas observações confirmou-se que a distribuição de galáxias não era homogênea, como mostra-se na figura 3.2, a qual corresponde ao primeiro conjunto de dados obtidos para o levantamento em desvio para o vermelho do CfA em 1986 por Valerie de Lapparent, Geller e Jhon Huchra. Observa-se também uma região contínua de galáxias, denominada posteriormente de Grande Muralha (Geller & Huchra, 1989).

Até então acreditava-se que a distribuição de galáxias podia ser estudada pela teoria

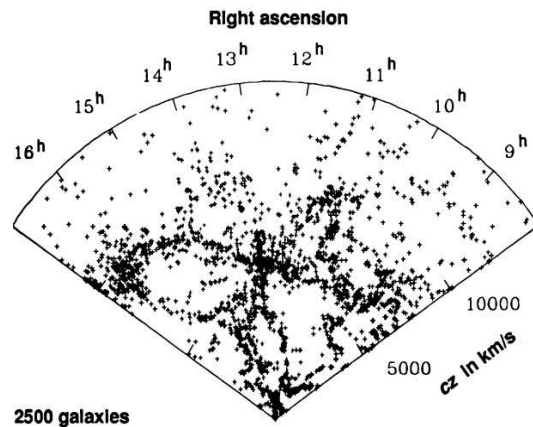


Figura 3.2: Primeiro mapa de galáxias do levantamento em desvio para o vermelho para o CfA em 1989 publicado por Geller e Huchra (Figura obtida de Geller & Huchra (1989)).

de pequenas flutuações ao redor de uma densidade média definida. Mas, as imagens tridimensionais obtidas pelo CfA mostraram a existência de grandes vazios e estruturas que espalhavam-se por todo o mapa. Usando o método estatístico da *função de correlação* (ξ), encontrou-se o valor de 5 Mpc para a escala a partir da qual a distribuição tornava-se homogênea, um resultado estranho pois as observações mostravam vazios a 50 Mpc e estruturas de aglomerados e filamentos de matéria até além de 100 Mpc.

Coube ao físico estatístico Luciano Pietronero resolver essa incoerência entre as observações e o resultado do método da função de correlação ao propor uma modificação desse método estatístico.

O problema da função de correlação está no fato de que ela é uma medida da flutuação de densidade ao redor de uma distribuição uniforme. Se em uma amostra de galáxias o número observado de pares de galáxias é maior do que o número esperado por uma distribuição uniforme aleatória tipo Poisson, então existe uma correlação entre as galáxias. Além disso, a função de correlação mede a dependência entre o número excedente de pares com a sua separação, assim, a correlação é maior a escalas menores e debilita-se a escalas maiores. A distância na qual o número excedente de pares de

galáxias deixa de ser maior que a aleatória é denominada *comprimento de correlação* e a partir dela a distribuição começa a ser uniforme. A função de correlação fornece uma caracterização correta só em sistemas para os quais é possível definir uma densidade média única e intrínseca independentemente da posição e do tamanho do volume da amostra estudada. Essa condição é satisfeita por líquidos mas não pela estrutura em grande escala do universo.

Para superar este problema, Pietronero propôs reescrever a função de correlação para um sistema sem densidade média intrínseca. Essa é a *densidade condicional* Γ , que mede o comportamento da densidade média com o incremento da escala. Vamos imaginar que um astrônomo obtém uma mapa tridimensional de uma parte do céu e logo mede, para cada galáxia, sua posição (direção) e sua distância. Situado sobre uma galáxia ele conta o número de galáxias que o rodeiam dentro de esferas de raios diferentes, como 1 Mpc, 2 Mpc, etc. Após isto, nosso astrônomo vai para outra galáxia e faz a mesma contagem. Ao final, faz uma média aritmética do número de galáxias para cada esfera. Essa contagem média dividida pelo volume dá a densidade condicional e se ela diminuir com o raio como uma lei de potência com expoente $D - 3$, então a distribuição é fractal e sua dimensão é D .

Repare que a característica da fractalidade é que a densidade numérica (número/volume) diminui ao redor de cada ponto conforme uma lei típica. Assim, o grupo de Pietronero aplicou esse método a dados observacionais e encontrou que a dimensão era de $D \approx 2$, e a escala a partir da qual existia uniformidade era $R_{max} > 100$ Mpc. Esse resultado estava de acordo com as imagens da distribuição de galáxias (Sylos Labini et al., 1998).

Pietronero partiu de uma estrutura fractal determinista (não estocástica) representada na figura 3.3. Se dentro um raio r_0 existem N_0 objetos, então dentro de $r_1 = kr_0$ existirão $N_1 = \tilde{k}N_0$ objetos. Assim como dentro de $r_2 = kr_1 = k^2r_0$ existirão $N_2 = \tilde{k}N_1 = \tilde{k}^2N_0$. Em geral temos,

$$N(n) = \tilde{k}^n N_0, \quad (3.1.3)$$

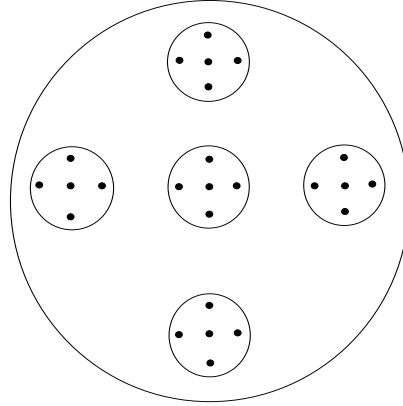


Figura 3.3: Distribuição autosimilar sobre a qual Pietronero desenvolveu o método da densidade condicional em 1987 (Figura obtida de Pietronero (1987)).

$$r(n) = k^n r_0, \quad (3.1.4)$$

onde \tilde{k} e k são constantes. Se das Eqs. 3.1.3 e 3.1.4 resolvermos para \tilde{k} e k e os dividirmos temos,

$$\frac{\log \tilde{k}}{\log k} = \frac{\log N_1/N_0}{\log r_1/r_0}. \quad (3.1.5)$$

Definindo $\frac{\log \tilde{k}}{\log k} = D$ temos,

$$\log(r_1/r_0)^D = \log N_1/N_0. \quad (3.1.6)$$

Aplicando o exponencial, obtemos N_1 que se escreve como,

$$N_1 = \left(\frac{N_0}{r_0^D} \right) r_1^D. \quad (3.1.7)$$

Definindo $B = \frac{N_0}{r_0^D}$ e generalizando temos a relação número-tamanho,

$$N(r) = Br^D. \quad (3.1.8)$$

Dessa equação calcula-se a densidade média $\langle n \rangle$ para uma amostra de raio R_s que contém uma parte do sistema fractal. Assume-se que o volume da amostra é de uma

esfera $V(R_s) = 4\pi/3R_s^3$, portanto,

$$\langle n \rangle = \frac{N(R_s)}{V(R_s)} = \left(\frac{3B}{4\pi} \right) R_s^{-\gamma} = \left(\frac{3B}{4\pi} \right) R_s^{-(3-D)}. \quad (3.1.9)$$

Esta densidade média tem a forma da densidade de de Vaucouleurs (Eq. (3.1.2)), só que na análise de Pietronero o expoente γ está relacionada com a dimensão fractal. Como pode se observar, a densidade média é dependente do tamanho da amostra e justamente para evitar essa dependência (Pietronero, 1987) definiu a densidade condicional como,

$$\Gamma(r) = \frac{1}{S(r)} \frac{dN(r)}{dr} = \left(\frac{D}{4\pi} \right) B r^{-(3-D)}, \quad (3.1.10)$$

onde $S(r)$ é a área de uma esfera de raio r . Dessa forma $\Gamma(r)$ mede a densidade média numa distância r desde um ponto ocupado, independentemente do tamanho da amostra.

Por outro lado, em 1970 quando o conceito de fractalidade não era ainda familiar para os cientistas, James R. Wertz introduziu uma representação contínua de um universo hierárquico sob a cosmologia Newtoniana. Wertz (1971) propôs que uma estrutura hierárquica existe quando aglomerados de ordem i formam um aglomerado de ordem $i + 1$ e assumiu que a relação universal densidade-raio de de Vaucouleurs era fundamental para desenvolver uma cosmologia hierárquica. Em seguida, se $M(x, r)$ fosse a massa dentro de uma esfera de raio r com centro em x , a densidade de volume ρ_V seria uma média sobre uma esfera com volume que contenha a massa M . Por conseguinte,

$$\rho_V(x, r) \equiv \frac{3M(x, r)}{4\pi r^3}. \quad (3.1.11)$$

A densidade global foi definida como,

$$\rho_g \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_V(x, r), \quad (3.1.12)$$

A densidade diferencial definida como,

$$\rho_d(x, r) \equiv \frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_x = \frac{1}{3r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^3 \rho_V) \right]_x. \quad (3.1.13)$$

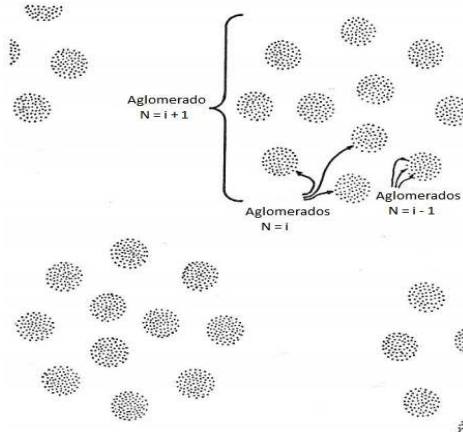


Figura 3.4: Modelo “polka-dot” usado por J. Wertz (1970). Esse modelo considera uma distribuição regular de pontos com massas iguais e dispostos como se fosse uma rede cristalina. (Figura obtida de Wertz (1970)).

Um modelo no qual as estruturas dispostas em hierarquia discreta têm a mesma massa e encontram-se distribuídas regularmente como pontos de uma rede de cristal, denomina-se *modelo “polka-dot”* (ver Fig.3.4). Considerando esse modelo, obtemos algumas propriedades médias. Supõe-se que um aglomerado (i) com massa M_i , diâmetro D_i e componentes n_i , cada uma com massa m_i e diâmetro d_i , tem a densidade,

$$\rho_i = \frac{6M_i}{\pi D_i^3}. \quad (3.1.14)$$

Com respeito às massas,

$$M_{i-1} = n_{i-1}m_{i-1} = m_i. \quad (3.1.15)$$

A relação entre os diâmetros é dado por,

$$a_i \equiv \frac{D_i}{d_i} = \frac{D_i}{D_{i-1}}. \quad (3.1.16)$$

A taxa de rarefação de matéria θ_i (“thinning rate”) se define como,

$$\theta_i = \frac{\log(\rho_{i-1}/\rho_i)}{\log(D_i/D_{i-1})}. \quad (3.1.17)$$

Para satisfazer um modelo “polka-dot”, o número n_i de componentes por aglomerado e a taxa a_i entre diâmetros devem ser constantes e, portanto, independentes de i . Assim, θ_i é também uma constante.

Para passar a um modelo hierárquico contínuo, precisa-se definir um raio r de uma esfera centrado em uma origem como a variável contínua. Nesse contexto, seja N a ordem do aglomerado e r_0 e ρ_0 o raio e a densidade do aglomerado de ordem zero. A relação entre r e N é,

$$r = a^N r_0 = (D_i/D_{i-1})^N r_0. \quad (3.1.18)$$

Repare-se que essa equação é similar à eq. (3.1.4) no modelo de Pietronero.

Do mesmo modo a relação entre as massas fica,

$$M = n^N M_0, \quad (3.1.19)$$

que é similar à eq. (3.1.3) no modelo de Pietronero.

No caso da densidade volumar,

$$\rho_V = \frac{M}{V} = \rho_0 \left(\frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} \right)^{-N} = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\theta}, \quad (3.1.20)$$

onde θ é a taxa rarefação, cuja forma é dada por,

$$\theta = 3 - \left(\frac{\log n}{\log a} \right). \quad (3.1.21)$$

Essa equação é similar à eq. (3.1.9) definida por Pietronero, onde o expoente $\gamma = 3 - D$ é o contraparte de θ .

Finalmente, a densidade diferencial é definida por,

$$\rho_D(x, r) \equiv \frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_x = \left(1 - \frac{\theta}{3} \right) \rho_V, \quad (3.1.22)$$

é a contra-parte da densidade condicional (eq. 3.1.10) de Pietronero.

É interessante ver que a representação contínua do modelo regular “polka-dot” que Wertz desenvolveu em 1970 tem termos equivalentes ao modelo fractal que Pietronero

apresentou em 1987. As bases teóricas são semelhantes por considerar a relação densidade-tamanho de de Vaucouleurs como fundamental. O único problema do modelo de Wertz, era que a constante θ carecia de significado físico, porém o modelo é uma boa representação do modelo de Charlier.

Um outro estudo interessante dentro da abordagem newtoniana foi feita por Abdalla et al. (1998), onde considerou um universo autosemelhante cuja dinâmica é governada pela gravidade newtoniana. Para esse universo escreveu o Lagrangiano e da resolução numérica obteve a evolução da dimensão fractal sendo que para várias condições iniciais a dimensão fractal é $D = 3$ no início do universo e evolui a $D = 2$ em nosso presente, oscilando ao redor desse valor para o futuro.

No entanto, cabe perguntar se é possível construir um modelo hierárquico (fractal) relativístico.

3.2 Modelos Hierárquicos (Fractais) Relativísticos

Na caracterização de uma distribuição de objetos, a densidade da distribuição depende do tamanho ou o raio da esfera que se supõe inclui esses objetos. Portanto, se desde o ponto de vista do observador traçamos uma esfera que contenha um número de galáxias, o tamanho dessa esfera pode considerar-se como uma distância.

A geometria na abordagem Newtoniana é euclidiana, portanto, o conceito de distância é absoluto. Porém, o universo está se expandindo e da teoria que o descreve, a relatividade geral, sabemos que os eventos ocorrem em um espaço-tempo, o qual é curvado pela presença da matéria. O universo que observamos pode ser representado como na figura 3.5. A linha vertical é o tempo e a linha perpendicular é a coordenada espacial. O observador situa-se na origem e forma um plano, ou hipersuperfície, puramente espacial, pois neste plano a coordenada temporal é constante $t_0 (z_0)$.

Por outro lado, a luz que vem das galáxias foi emitida em um passado. Essa luz

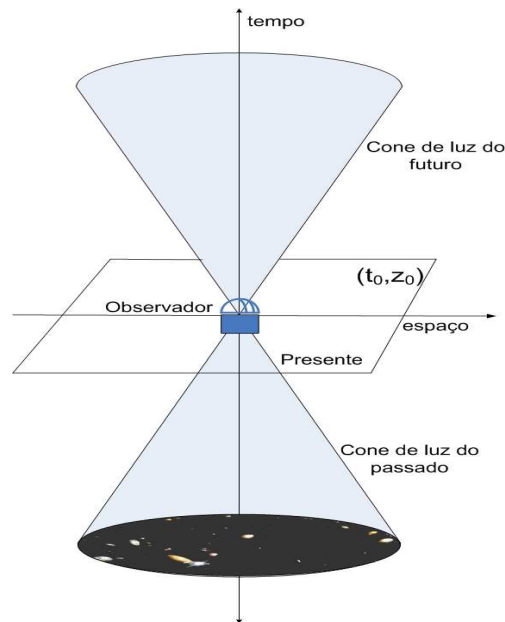


Figura 3.5: Cone de luz do observador. O observador situa-se na origem, a linha vertical é o tempo e a coordenada espacial é perpendicular. A luz das galáxias vêm do passado percorrendo geodésicas nulas que formam o cone de luz do passado. Se no nosso tempo atual t_0 emitirmos uma luz, do mesmo modo ela viaja por um cone de luz do futuro.

converge no observador ou origem, formando um cone de luz que corresponde ao passado. Do mesmo modo, se nós emitirmos uma luz, ela viajará por uma curva ou geodésica nula que formará parte do cone de luz do futuro. Assim, a relatividade geral faz-nos reparar que todo objeto observado situa-se no cone de luz do passado, não sobre a hipersuperfície espacial. Além do mais, devido ao espaço-tempo a distância têm várias definições dependendo do método de medida.

Em relação aos modelos cosmológicos, temos o modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) como o mais utilizado atualmente. Por motivos de simplicidade, esse modelo fundamenta-se em duas suposições: o universo é espacialmente homogêneo e isotrópico. A suposição de homogeneidade é aceita só a partir de alguma escala, pois as observações mostram que o universo é inhomogêneo em escalas

pequenas pois, de outro modo, nem galáxias nem estrelas existiriam. E por outro lado temos as pequenas inhomogeneidades na radiação cósmica de fundo a distâncias do ordem $z = 1000$. O descobrimento de inhomogeneidades em grandes escalas leva a se perguntar se existe uma escala na qual em média a matéria no universo poderia ser homogênea. Determinar essa escala é um dado importante para que os modelos cosmológicos homogêneos forneçam uma descrição realista do universo.

Repare que os fundamentos do modelo FLRW sobre a homogeneidade não discordam de um modelo fractal porque na métrica de FLRW a homogeneidade está confinada à hipersuperfície espacial. No entanto, o modelo fractal trata observáveis, portanto, sobre a geodésica nula ou cone de luz do passado. Seguindo o ponto de vista discutido em Ribeiro (2001); Rangel Lemos & Ribeiro (2008), podemos definir dois tipos de homogeneidade: homogeneidade espacial (HE) e homogeneidade observacional (HO).

Dito isso, vamos realizar agora uma revisão dos modelos relativísticos da cosmologia hierárquica.

3.2.1 O modelo relativístico de W. B. Bonnor (1972)

A publicação mais representativa do século passado de um modelo hierárquico relativístico foi provavelmente a do físico britânico W. B. Bonnor em 1972 (Bonnor, 1972). Ele utilizou a densidade de de Vaucouleurs como uma condição inicial no modelo de Lemaître-Tolman (LT) e, embora trabalhasse sobre uma hipersuperfície espacial, deu-se conta de que deveria trabalhar sobre o cone de luz que, como vimos, é onde se situam os observáveis. Não obstante, não o fez por causa de dificuldades matemáticas. Bonnor também distinguiu entre a densidade volumar ρ_V , que é uma média sobre uma esfera de volume dado, e a densidade local ρ , a qual está incluída no tensor de energia-momento das equações de Einstein.

Como discutido em Ribeiro (2001), os problemas na análise de Bonnor foram,

primeiro, que para relacionar a densidade média com as observações, precisava-se integrar a densidade local sobre o cone de luz passado. Isto implicava resolver a equação da geodésica nula, o qual era ainda mais complicado que resolver as equações de campo de Einstein. Como segundo defeito, não era apropriado utilizar a coordenada radial como distância já que as coordenadas representam rótulos de um evento.

Depois deste trabalho não se produziu uma outra tentativa de abordar o problema relativístico até 1992, quando M. Ribeiro seguiu os passos de Bonnor, Wertz e Pietronero para construir um modelo fractal relativístico que levou em conta quantidades observáveis em um espaço-tempo inhomogêneo de LT (Ribeiro, 1992a). Porém, existem outras abordagens relativísticas como por exemplo a publicação de Abdalla & Chirenti (2004), na qual parte de uma métrica hierárquica para obter a distribuição de matéria e mostra que ela apresenta inhomogeneidades, mas tal distribuição inhomogênea não resulta ser descrita por um fractal.

Agora, continuaremos descrevendo a seqüência de trabalhos que levaram à formulação do modelo fractal relativístico onde são descritas as quantidades observáveis que nos interessa analisar.

3.2.2 A evolução do modelo fractal relativístico desde 1992

Como continuação do trabalho de Ribeiro (1992a), em Ribeiro (1992b) derivaram-se alguns observáveis necessários para testar a homogeneidade nos modelos de EdS e de LT. Também estudou-se em Ribeiro (1995) a influência dos efeitos relativísticos em ferramentas estatísticas como a função de correlação (ξ) e as densidades condicionais (Γ, Γ^*) de Pietronero para o modelo não perturbado de Einstein-de Sitter (EdS). Resulta interessante mencionar que o autor conseguiu escrever essas estatísticas no cone de luz do passado e obter o mesmo resultado com respeito à função de correlação que Pietronero tinha encontrado anteriormente. Outro resultado importante é que devido à não linearidade das equações da Relatividade Geral, consegue-se distinguir uma ho-

homogeneidade espacial (HE) de uma homogeneidade observacional (HO) em desvios para o vermelho, em teoria, menores a $z \lesssim 0,1$ dependendo do modelo e da quantidade observacional estudada (Ribeiro, 1995). Com isto, a análise da homogeneidade é basicamente dependente da estatística utilizada e não da profundidade de observação que fornecem os levantamentos.

Um resultado interessante é que para a cosmologia EdS, a densidade média definida pela distância de luminosidade d_L comporta-se como segue,

$$\lim_{d_L \rightarrow \infty} \langle \rho \rangle = 0. \quad (3.2.23)$$

Esse limite é semelhante a aquele que Wertz tinha introduzido como condição para seu modelo hierárquico e indica que para uma hierarquia pura, a densidade global existe e é zero em qualquer lugar. Em termos de Pietronero, esse comportamento é natural no seu modelo fractal. Assim, vemos que apesar do modelo EdS ser espacialmente homogêneo, ainda apresenta características de fractalidade.

Um dos resultados importantes em toda essa análise é que o comportamento das densidades depende da distância utilizada, pois ela não é um conceito absoluto por causa da curvatura do espaço-tempo, conforme discutido em Ribeiro (1992b, 1995, 2001, 2005).

Como consequência destes resultados, Abdalla et al. (1999) fez a análise para um modelo cosmológico EdS perturbado. Os resultados mostraram que esse modelo pode ser descrito por um perfil de densidade média de tipo lei de potências. Além do mais, discutiu sobre a coexistência entre a Lei de Hubble, válida para desvios para o vermelho próximos, e a invariância de escala na densidade média em desvios para o vermelho altos.

A seguir discutiremos o resultado apresentado em Ribeiro (2001) em relação à dependência da distância e a densidade em relação ao desvio para o vermelho para o modelo EdS.

A figura 3.6(a) ilustra o comportamento das distâncias com o desvio para o vermelho e mostra que a distância definida pela luminosidade d_L e a distância definida pelo desvio para o vermelho d_z crescem infinitamente, enquanto que a distância por área do observador d_A tende a zero e a distância por área galáctica d_G tende ao valor finito $2c/H_0$ *. Portanto, qualquer quantidade em função da distância terá comportamentos diferentes. Isto observa-se na figura 3.6(b) onde pode-se ver um gráfico da densidade média em função do desvio para o vermelho e mostra que a densidade de luminosidade $\langle \rho_L \rangle$ e a densidade de desvio para o vermelho $\langle \rho_z \rangle$ tendem a zero, enquanto que a densidade por área do observador $\langle \rho_A \rangle$ diverge em desvios para o vermelho altos. A densidade por área galáctica $\langle \rho_G \rangle$ permanece constante, sendo igual a $\rho_0 = 3H_0^2/8\pi$.

Em resumo e conforme discutido em Ribeiro (2001), as distâncias na época do Big Bang (r_b) mostram o seguinte comportamento,

$$\lim_{r \rightarrow r_b} d_z = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow r_b} d_L = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow r_b} d_A = 0, \quad \lim_{r \rightarrow r_b} d_G = 2/H_0. \quad (3.2.24)$$

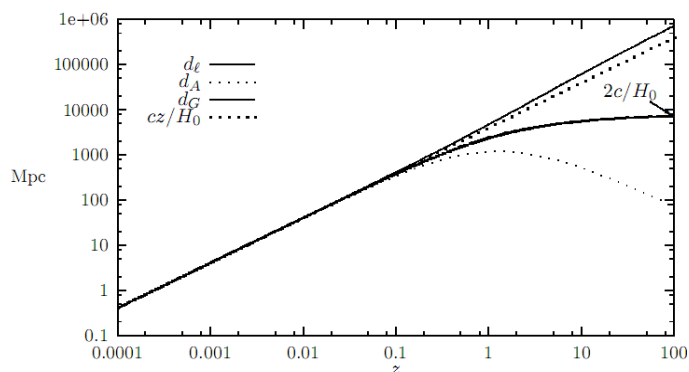
E a densidade média para o desvio para o vermelho alto ou na época do Big Bang,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \langle \rho_L \rangle &= 0, & \lim_{z \rightarrow \infty} \langle \rho_G \rangle &= \rho_0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \langle \rho_A \rangle &= \infty, & \lim_{z \rightarrow \infty} \langle \rho_z \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

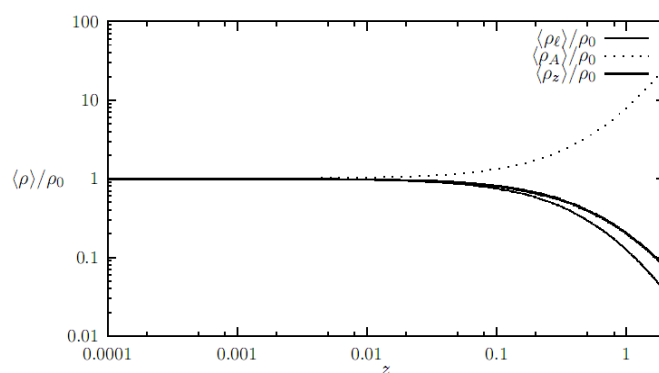
Novamente, satisfaz-se o limite do postulado de densidade global zero, o que leva a conferir que é possível que um modelo cosmológico padrão apresente características de fractalidade.

Agora precisa-se conectar o modelo com os dados observacionais. Para isso, a contagem numérica de galáxias ou a função de luminosidade galáctica, resultou ser uma ferramenta importante pois fornece a informação observacional de como a densidade local de galáxias varia para os diferentes tipos de galáxias e com diferentes ambientes cósmicos, assim como a variação da densidade com o tempo cósmico. Porém,

*Estas distâncias serão definidas em § 3.3.2, por enquanto, nos interessa a forma de influenciar o comportamento das densidades.



(a) Distância vs. desvio para o vermelho



(b) Densidade vs. desvio para o vermelho.

Figura 3.6: Distância não é um conceito absoluto e afeta a densidade. Gráficos para o modelo EdS. (Figuras obtidas de Ribeiro (2001)).

deve-se considerar que existem processos astrofísicos como a evolução de número e luminosidade de galáxias que estão incluídas nas observações astronômicas. Assim, não é possível determinar quantidades como o desvio para o vermelho, a contagem numérica de galáxias e a distância de luminosidade sem antes considerar um modelo específico, e que leve em conta os processos astrofísicos (evolução das galáxias, fusões de galáxias).

Com isso em mente, desenvolveu-se uma teoria que conecta a contagem numérica relativística com a função de luminosidade vinda do catálogo em desvio para o vermelho de galáxias CNOC2. Em Ribeiro & Stoeger (2003) os autores começaram

com um tratamento relativístico geral da contagem numérica de fontes em um espaço-tempo geral e derivaram expressões para a densidade de massa-energia e a densidade de massa-energia por fonte em função da função de luminosidade e a função de seleção, que explicaremos adiante. Essas relações foram aplicadas para testar se os parâmetros da função de luminosidade determinadas por Lin et al. (1999) eram consistentes com o modelo EdS. Assim, os autores encontraram que os parâmetros da função de luminosidade eram grosseiramente consistentes com as previsões teóricas. No entanto, a contagem numérica de galáxias afastava-se do modelo em $0,1 \lesssim z \lesssim 0,4$. Num trabalho posterior Albani et al. (2007) mostraram os passos para obter as estatísticas de densidade que caracterizam a distribuição de galáxias a partir dos parâmetros da função de luminosidade do levantamento em desvio para o vermelho de galáxias CNOC2 ($0 < z < 1$). Trabalharam com o modelo EdS e o modelo padrão com $\Omega_{m_0} = 0,3$, $\Omega_{\Lambda_0} = 0,7$, comprovando a forte dependência das estatísticas com as distâncias, pois as densidades médias seguiam uma lei de potência só com a distância definida pela luminosidade e a distância definida pelo desvio para o vermelho em $z > 0,1$.

A seguir mostraremos os passos e as considerações para obter as densidades e as distâncias que foram utilizadas no presente trabalho conforme desenvolvidas por Albani et al. (2007); Rangel Lemos & Ribeiro (2008); Iribarrem (2009); Iribarrem et al. (2011).

3.3 Estatísticas radiais para caracterizar a fractalidade

3.3.1 Densidades relativísticas radiais

Conforme em Ribeiro & Miguelote (1998) e Rangel Lemos & Ribeiro (2008), partimos de uma relação geral entre o número ou contagem numérica de galáxias N e a distância observacional d_i cujo subíndice define a distância escolhida $i = L, A, G, z$. Então a

relação adota a forma,

$$N_i = (Bd_i)^D. \quad (3.3.26)$$

B é uma constante não específica e D é a dimensão fractal que indica o grau de inhomogeneidade observacional na distribuição de galáxias. Quando $D = 3$ temos uma distribuição observacionalmente homogênea e quando $D < 3$ a contagem de galáxias é observacionalmente inhomogênea. Seguindo a denominação de Rangel Lemos & Ribeiro (2008), a Eq. (3.3.26) é a *relação número-distância de Pietronero-Wertz*, ou mais simples a *relação generalizada número-distância*. Seguindo Wertz (1971), em Ribeiro (2005) se define a *densidade relativística diferencial* $\gamma(d_i) = \gamma_i$ a uma determinada distância d_i com a expressão,

$$\gamma_i = \frac{1}{S_i} \frac{d(N_i)}{d(d_i)}, \quad (3.3.27)$$

onde N_i é a contagem numérica radial. S_i é a área de uma casca esférica observada de raio d_i e é escrita como,

$$S_i = 4\pi(d_i)^2. \quad (3.3.28)$$

A densidade relativística diferencial é uma medida da taxa de crescimento na densidade numérica quando a distância observacional incrementa ou quando movemos-nos ao longo do cone de luz do passado.

A outra estatística definida é a *densidade relativística integral* $\gamma^*(d_i) = \gamma_i^*$, a qual é uma integração de γ_i sobre um volume observacional V_i , evitando assim as flutuações em γ_i . Então a densidade integral escreve-se como,

$$\gamma_i^* = \frac{1}{V_i} \int_V \gamma_i dV_i, \quad (3.3.29)$$

onde o volume escreve-se como,

$$V_i = \frac{4}{3}\pi(d_i)^3. \quad (3.3.30)$$

A densidade integral pode ser também definida como a *densidade numérica radial* escrita como,

$$[n_i] = \frac{N_i}{V_i} = \gamma_i^*. \quad (3.3.31)$$

Essa densidade considera a contagem numérica de objetos como uma função da distância a partir de um ponto. Vamos ressaltar que a Eq. (3.3.26) é uma distribuição de matéria radial que poderia ser dada pela aproximação de um fluido perfeito com soluções cosmológicas às equações de campo de Einstein. Dito isto, as Eqs. (3.3.27), (3.3.29), (3.3.31) são quantidades radiais também e medem como a densidade se escala como uma função de distância.

Então derivando a Eq. (3.3.26) e substituindo em Eq. (3.3.27) e (3.3.29), além de utilizar as Eqs. (3.3.28) e (3.3.30), a densidade relativística radial diferencial adota a forma,

$$\gamma_i = \frac{DB^D}{4\pi} d_i^{D-3}, \quad (3.3.32)$$

e a densidade relativística radial integral,

$$\gamma_i^* = \frac{3B^D}{4\pi} d_i^{D-3}. \quad (3.3.33)$$

A relação entre essas densidades relativísticas radiais fornece diretamente a dimensão fractal dividida por 3, como se vê abaixo,

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_i^*} = \frac{D}{3}. \quad (3.3.34)$$

Agora, para calcular as densidades radiais é mais útil escrevê-las em função do desvio para o vermelho usando a relação,

$$\frac{d(N_i)}{d(d_i)} = \frac{d(N_i)}{dz} \frac{dz}{d(d_i)}. \quad (3.3.35)$$

Assim substituindo a Eq. (3.3.35) na Eq. (3.3.27) a densidade relativística radial diferencial em termos do desvio para o vermelho adota a forma,

$$\gamma_i(z) = \frac{1}{S_i} \frac{d(N_i)}{dz} \frac{dz}{d(d_i)} = \frac{d(N_i)}{dz} \left[S_i \frac{d}{dz}(d_i) \right]^{-1}. \quad (3.3.36)$$

Em conseqüência a densidade relativística radial integral escreve-se como,

$$\gamma_i^*(z) = \frac{1}{V_i} \int_0^z \gamma_i \left(\frac{dV_i}{dz'} \right) dz' = \frac{N_i(z)}{V_i(z)}, \quad (3.3.37)$$

que é a densidade numérica radial da Eq. (3.3.31). Nestas densidades, os termos $d_i(z)$, $S_i(z)$, $V_i(z)$ e suas derivadas são funções de z e representam a parte geométrica da análise. A sua forma depende da métrica que se usa. Por outro lado, a contagem numérica $N_i(z)$ e sua diferencial $d[N_i(z)]/dz$ podem ser determinadas tanto teoricamente, a partir do modelo cosmológico escolhido, quanto observacionalmente, a partir da função de luminosidade fornecidas pelos levantamentos em desvio para o vermelho de galáxias.

A seguir vamos ver os passos para obter a contagem numérica diferencial primeiro teoricamente e depois se mostrará a conexão com a sua contraparte observacional. Também se mostrará como calcular as distâncias e suas derivadas em função do desvio para o vermelho. Com isto será possível calcular as densidades relativísticas radiais das Eqs. (3.3.36) e (3.3.37). Estas quantidades foram desenvolvidas nos trabalhos de Ribeiro & Stoeger (2003), Ribeiro (2005), Albani et al. (2007), Iribarrem et al. (2011).

3.3.2 Contagem numérica diferencial teórica

O fator de escala

No modelo cosmológico padrão de FLRW com constante cosmológica diferente de zero escreve-se o elemento de linha como,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.3.38)$$

onde $a(t) = a$ é o fator de escala, k é o parâmetro de curvatura ($k = +1, 0, -1$) e c a velocidade da luz.

Considerando as expressões como o fator de escala em função do parâmetro de Hubble,

$$H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt}, \quad (3.3.39)$$

a densidade de energia no vácuo,

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (3.3.40)$$

a densidade crítica,

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (3.3.41)$$

a relação de parâmetros de densidade,

$$\Omega_0 \equiv \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_c} + \frac{\rho_{\Lambda0}}{\rho_c}, \quad (3.3.42)$$

e a lei de conservação de energia aplicada na era dominada por matéria e pressão zero,

$$\Omega_m = \Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a^3}, \quad (3.3.43)$$

a equação de Friedmann adota as três formas a seguir,

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_m}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (3.3.44a)$$

$$kc^2 = a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1), \quad (3.3.44b)$$

$$\frac{da(t)}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a^3} + \Omega_{\Lambda0} a^2 - a_0^2 (\Omega_0 - 1)}. \quad (3.3.44c)$$

As contagens numéricas relativísticas

Derivado por Ellis (1971), a expressão geral independente do modelo cosmológico para a contagem numérica de fontes cosmológicas levando em conta efeitos relativísticos é escrita como,

$$dN = (d_A)^2 d\Omega_0 [n(-k^a u_a)]_P dy, \quad (3.3.45)$$

onde dN é o número de fontes cosmológicas em uma seção de volume ao longo do cone de luz, n é a densidade numérica de fontes luminosas por unidade de volume próprio em uma seção de um feixe de raios luminosos que convergem no observador e subtendem o ângulo sólido $d\Omega_0$ na posição do observador, d_A é a distância por área da seção medida pelo observador, u^a é a 4-velocidade, k^a é o vetor tangente ao longo dos

raios de luz, y é um parâmetro afim de distância sobre o cone de raios luminosos e z é o desvio para o vermelho (ver Fig.3.7). A seguir vamos especificar cada termo da Eq. (3.3.45).

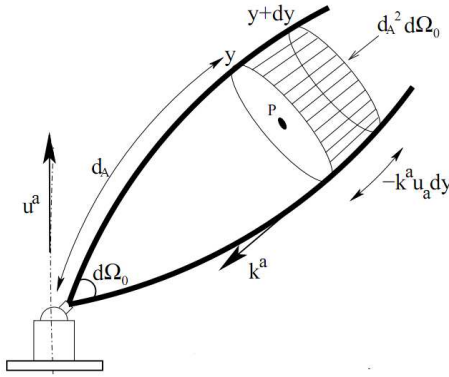


Figura 3.7: Seção de um feixe de raios luminosos que subtendem um ângulo sólido $d\Omega_0$ visto pelo observador. O parâmetro afim de distância dy e a variação da distância local $(-k^a u_a)dy$ afetam a densidade numérica nesse feixe $n(y) = n(-k^a u_a)$ (Figura obtida de Ellis (1971)).

A densidade numérica das fontes cosmológicas

Esta densidade numérica está definida como,

$$n = \frac{\rho_m}{M_g}, \quad (3.3.46)$$

onde M_g é a massa média da galáxia em repouso incluindo a matéria escura e cujo valor $M_g \approx 10^{11} M_\odot$ se adota de Sparke & Gallagher (2000). A Eq. (3.3.46) junto com as Eqs. (3.3.41) e (3.3.43) adota a forma,

$$n = \frac{\rho_m}{M_g} = \frac{\rho_c \Omega_m}{M_g} = \frac{\rho_c \Omega_{m0} a_0^3}{M_g a^3}, \quad (3.3.47)$$

$$n = \left(\frac{3\Omega_{m0} H_0^2 a_0^3}{8\pi G M_g} \right) \frac{1}{a^3}. \quad (3.3.48)$$

A equação da geodésica do cone de luz do passado

Para a métrica da Eq. (3.3.38) a equação da geodésica nula é,

$$\frac{dt}{dr} = - \left(\frac{a}{c\sqrt{1-kr^2}} \right), \quad (3.3.49)$$

a qual, em função do parâmetro afim, torna-se,

$$\frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dr} \frac{dr}{dy} = - \left(\frac{a}{c\sqrt{1-kr^2}} \right) \frac{dr}{dy}. \quad (3.3.50)$$

Sendo a fonte e o observador comóveis $u^a = c\delta_0^a$, o termo contendo a 4-velocidade e o vetor tangente adota a forma,

$$-k^a u_a = -k^a c\delta_0^a = -ck^0 = -c \frac{dt}{dy}, \quad (3.3.51)$$

$$-k^a u_a = \left(\frac{a}{c\sqrt{1-kr^2}} \right) \frac{dr}{dy}. \quad (3.3.52)$$

A distância por área

Na métrica do modelo cosmológico padrão a distância por área d_A está em função do elemento de área da seção transversal $d\sigma$ no ponto P da figura 3.7 correspondente a um feixe de geodésicas nulas convergentes no observador e o seu ângulo sólido delimitado $d\Omega_0$ (ver Fig. 3.8). Esta distância escreve-se como,

$$(d_A)^2 = \frac{d\sigma_A}{d\Omega_A} = \frac{a^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2}, \quad (3.3.53)$$

$$d_A = ar. \quad (3.3.54)$$

Esta distância é conhecida também como a *distância por diâmetro angular*, *distância de luminosidade corrigida* e *distância por área do observador*.

A Eq. (3.3.54) é a definição de uma distância estritamente observacional e é igual à distância própria d_{pr} . Usando as Eqs. (3.3.44b), (3.3.48), (3.3.52) e (3.3.54) o número

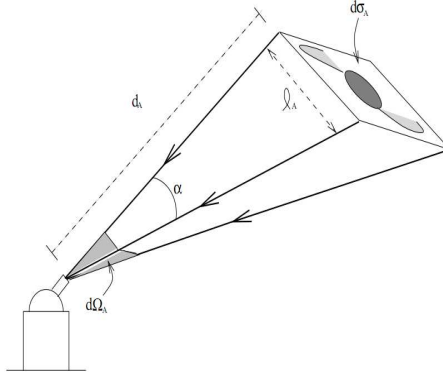


Figura 3.8: A distância angular d_A obtém-se ao relacionar a área da seção transversal intrínseca da fonte $d\sigma_A$ e o ângulo sólido $d\Omega_A$ medido pelo observador (Figura obtida de Ribeiro (2005)).

de fontes ao longo do cone de luz do passado da Eq.(3.3.45) em termos da coordenada radial r , além de assumirmos $d\Omega_0 = 4\pi$, escreve-se como,

$$\frac{dN}{dr} = \frac{3c\Omega_{m0}H_0^2a_0^3}{2GM_g} \left[\frac{r^2}{\sqrt{c^2 - H_0^2a_0^2(\Omega_0 - 1)r^2}} \right]. \quad (3.3.55)$$

A resolução numérica

As equações escritas até este ponto se resolvem numericamente. Para isso se adota a coordenada r como a variável independente. Então escreve-se primeiro o fator de escala como função de r substituindo a Eq. (3.3.44b) na Eq. (3.3.49) e fazendo uma transformação,

$$\frac{dt}{dr} = - \left[\frac{a^2}{c^2 - H_0^2a_0^2(\Omega_0 - 1)r^2} \right]^{1/2}, \quad (3.3.56)$$

$$\frac{da}{dr} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{dr}, \quad (3.3.57)$$

$$\frac{da}{dr} = -H_0 \left[\frac{\Omega_{m0}a_0^3a + \Omega_{\Lambda 0}a^4 - a_0^2a^2(\Omega_0 - 1)}{c^2 - H_0^2a_0^2(\Omega_0 - 1)r^2} \right]^{1/2}. \quad (3.3.58)$$

Assim para encontrar $a(r)$ assume-se um valor para os termos Ω_{m0} , $\Omega_{\Lambda 0}$ e H_0 . As Eqs. (3.3.55) e (3.3.58) fornecem uma tabela de dados que contem r , a e N . O método que

os autores utilizam é o de Runge-Kutta4 com condições iniciais $r_0 = N_0 = 0$, $k = 0$ e $a_0 = 1$.

A contagem numérica diferencial

O fator de escala em função do desvio para o vermelho é dado por,

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (3.3.59)$$

Com a Eq. (3.3.59) a solução numérica de $a(r)$ fornece uma solução numérica para $z(r)$. Com ajuda das transformações,

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dN}{dr} \frac{dr}{dz}, \quad (3.3.60)$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dr}{da} \frac{da}{dz}, \quad (3.3.61)$$

a contagem numérica diferencial em função do desvio para o vermelho adota a forma,

$$\frac{dN}{dz} = \frac{3c\Omega_{m0}H_0a_0^2}{2GM_g} \frac{a^2r^2}{\sqrt{\Omega_{m0}a_0^3a + \Omega_{\Lambda 0}a^4 - a_0^2a^2(\Omega_0 - 1)}}. \quad (3.3.62)$$

Derivando as distâncias observacionais

Até agora se utilizou a distância por área d_A (início de § 3.3.2). Porém existem outras distâncias que podem ser facilmente obtidas a partir da *lei de reciprocidade de Etherington* (1933), discutido em Ellis (1971) e Ellis (2007). A lei é definida como,

$$d_L = (1 + z)^2 d_A = (1 + z) d_G, \quad (3.3.63)$$

onde d_L é a distância definida pela luminosidade. Esta é uma relação entre a magnitude aparente, ou fluxo observado F , de uma fonte e sua luminosidade intrínseca L sobre um espaço plano e estático,

$$F = \frac{L}{4\pi(d_L)^2}. \quad (3.3.64)$$

3.3. Estatísticas radiais para caracterizar a fractalidade

Observacionalmente, a distância definida pela luminosidade pode ser obtida da relação entre magnitude aparente m e magnitude absoluta M ,

$$m - M = 5 \log(d_L) - 5. \quad (3.3.65)$$

Também temos a distância por área galáctica d_G definida como a relação entre o ângulo sólido medido na galáxia $d\Omega_A$ e o elemento de área intrínseca do observador $d\sigma_G$. Como d_G implica medir o ângulo sólido na galáxia, então não é observável. Esta distância é conhecida também como *distância efetiva*, *distância por tamanho angular*, *distância comóvel transversa* ou *distância de movimento próprio* (ver fig. 3.9),

$$d\sigma_G = d\Omega_G (d_G)^2. \quad (3.3.66)$$

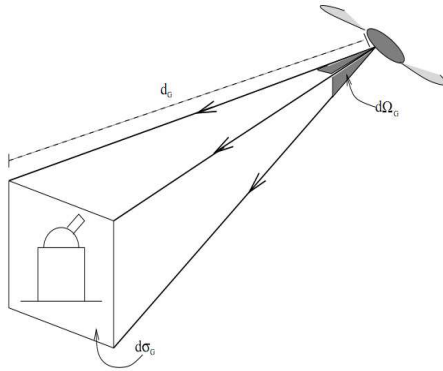


Figura 3.9: A distância por área da galáxia d_G obtem-se ao relacionar a área da seção transversal medida pelo observador $d\sigma_G$ e o ângulo sólido $d\Omega_A$ medido na galáxia (Figura obtida de Ribeiro (2005)).

Além do mais, temos também a distância definida pelo desvio para o vermelho,

$$d_z = \frac{cz}{H_0}. \quad (3.3.67)$$

Assim as distâncias em termos do fator de escala são escritas a partir das Eqs. (3.3.54),

(3.3.59), (3.3.63) e (3.3.67) conforme,

$$d_A = ar, \quad (3.3.68a)$$

$$d_L = a_0^2 \frac{r}{a}, \quad (3.3.68b)$$

$$d_G = a_0 r, \quad (3.3.68c)$$

$$d_z = \frac{c}{H_0} \left(\frac{a_0}{a} - 1 \right). \quad (3.3.68d)$$

Agora podemos construir outra tabela de dados pois a partir de r é possível obter-se z , d_i , dN/dz . Finalmente para calcular as Eqs. (3.3.36) e (3.3.37) precisa-se das derivadas das distâncias com respeito ao desvio para o vermelho. Utilizando as Eqs. (3.3.54), (3.3.59) e a transformação,

$$\frac{d(d_A)}{dz} = \frac{d(d_A)}{dr} \frac{dr}{da} \frac{da}{dz}, \quad (3.3.69)$$

As derivadas das distâncias (Eqs. (3.3.68)) adotam a forma,

$$\frac{d(d_A)}{dz} = \frac{a^2}{a_0^2} \left[\frac{a}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{\Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 - a_0^2 (\Omega_0 - 1)}} - r \right], \quad (3.3.70a)$$

$$\frac{d(d_L)}{dz} = a_0 \left[\frac{a}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{\Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 - a_0^2 (\Omega_0 - 1)}} + r \right], \quad (3.3.70b)$$

$$\frac{d(d_G)}{dz} = \frac{a^2}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{\Omega_{m0} \frac{a_0^3}{a} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 - a_0^2 (\Omega_0 - 1)}}, \quad (3.3.70c)$$

$$\frac{d(d_z)}{dz} = \frac{c}{H_0} \left(\frac{a_0}{a} - 1 \right). \quad (3.3.70d)$$

Relembramos que para a densidade relativística integral Eq. (3.3.37), N é calculado através da resolução numérica da equação (3.3.55) e o volume é obtido com as Eqs. (3.3.30) e (3.3.70). Como último ponto discutido em Ribeiro & Stoeger (2003) a maioria das densidades cosmológicas obtidas das observações astronômicas assumem um volume comóvel, enquanto as densidades derivadas da teoria muitas vezes assumem um volume local ou próprio de tal modo que é preciso uma transformação do tipo,

$$dV_{pr} = a^3 dV_c. \quad (3.3.71)$$

3.3.3 Contagem numérica diferencial observacional

A função de luminosidade

A *função de luminosidade* (FL) ϕ é uma das principais ferramentas para descrever estatisticamente a população de galáxias. A FL define-se como a densidade numérica comóvel de objetos num intervalo de luminosidade L e $L + dL$ num desvio para o vermelho z e leva em conta os diferentes tipos morfológicos de galáxias, a sua dependência com o ambiente e a mudança com a época cósmica (Peebles, 1993; Peacock, 1998). Essa definição está expressa como,

$$dn = \phi(l)dl, \quad (3.3.72)$$

onde $l = L/L_*$ e L_* é a luminosidade característica da galáxia. Se ϕ for integrada acima de uma luminosidade limite em função do desvio para o vermelho $l(z)$ obtemos a definição da *função de seleção* ψ ,

$$\psi[l(z)] = \frac{N}{V} = \int_{l(z)}^{\infty} \phi(l) dl. \quad (3.3.73)$$

A forma ajustada da função de luminosidade na maioria dos levantamentos em desvio para o vermelho é dada pela função de Schechter (Schechter (1976)) dada por,

$$\phi(l) = \phi_* l^\alpha \exp^{-l}, \quad (3.3.74)$$

onde ϕ_* caracteriza a densidade espacial de galáxias, α é a inclinação assintótica da parte final da função de luminosidade e $l = L/L_*$ é a escala de luminosidade que informa o valor de luminosidade além do qual as galáxias são raras. É importante que, para levar em conta a possível evolução da luminosidade, os parâmetros do ajuste variem com o desvio para o vermelho. Por outro lado, a morfologia fará mudar o valor do parâmetro α . Estes três parâmetros são observacionalmente determinados e são robustos até $z \approx 1$ com respeito ao modelo, i.e. eles não serão afetados por modelos diferentes da métrica FLRW, incluindo aqueles que consideram a constante cosmológica diferente de zero.

A função de luminosidade ϕ e a função de seleção ψ indicam que para que uma galáxia seja contada e detectada, esta deve ter uma luminosidade aparente mínima L .

Os levantamentos em desvio para o vermelho costumam apresentar o parâmetro ajustado L_* em termos de sua magnitude absoluta característica M_* . Assim, a Eq. (3.3.72) deve ser re-escrita como sendo a densidade numérica de todas as galáxias entre magnitudes absolutas M e $M + dM$. Então a forma de Schechter é escrita como,

$$\begin{aligned}\phi(l)dl &= \phi_* l^\alpha \exp[-l]dl \\ &= (0,4 \ln 10) \phi_* 10^{0,4(1+\alpha)(M_*-M)} \exp[-10^{0,4(M_*-M)}]dM \\ &= \phi(M)dM,\end{aligned}\tag{3.3.75}$$

onde a definição de magnitude absoluta faz com que $l = 10^{0,4(M_*-M)}$.

Outro detalhe a ser considerado na função de luminosidade por causa dos levantamentos em desvio para o vermelho das galáxias é o termo W que representa o filtro de banda de passagem. Assim a Eq. (3.3.73) adota a forma,

$$\psi^W(z) = \int_{-\infty}^{M_W(z)} (0,4 \ln 10) \phi_* 10^{0,4(1+\alpha)(M_*-\bar{M}_W)} \exp \left[-10^{0,4(M_*-\bar{M}_W)} \right] d\bar{M}_W.\tag{3.3.76}$$

Esses levantamentos também estão limitados por uma magnitude superior e inferior, portanto, os limites de integração da Eq. (3.3.76) ficam como,

$$\psi^W(z) = \int_{M_s}^{M_i(z)} (0,4 \ln 10) \phi_* 10^{0,4(1+\alpha)(M_*-\bar{M}_W)} \exp \left[-10^{0,4(M_*-\bar{M}_W)} \right] d\bar{M}_W.\tag{3.3.77}$$

Às vezes realiza-se uma classificação morfológica espectral das galáxias observadas, mas freqüentemente essa classificação é feita com base na distribuição espectral de energia, que não necessariamente tem uma relação direta com o esquema de classificação de Hubble. Portanto, a classificação feita nos levantamentos é, a grosso modo, constituída por três tipos: $v = 1$ que corresponde a galáxias anteriores, aproximadamente as de tipo E/S0; $v = 2$ corresponde a galáxias intermediárias, aproximadamente Sa-Sb; e $v = 3$ corresponde a galáxias posteriores, aproximadamente as de tipo Sc I. Então se

quisermos introduzir os tipos morfológicos v , a função de seleção conforme definido em Albani et al. (2007) modifica-se conforme abaixo,

$$\psi(z) = \sum_W a_W \frac{\sum_v P_v M_v \psi_v^W(z)}{\sum_v P_v M_v}, \quad (3.3.78)$$

onde P_v indica a abundância de cada tipo morfológico v de galáxia com respeito ao número total da galáxias contadas em cada intervalo de desvio para o vermelho (Ribeiro & Stoeger, 2003). M_v é a massa das galáxias de tipo v e a_W é uma constante que se introduz para evitar a contagem dupla da mesma galáxia e está definida como,

$$a_W(z) = \begin{cases} 1, & \text{para } W = 1, \\ b_W(z) < 1, & \text{para } W > 1. \end{cases} \quad (3.3.79)$$

Sendo $b_W(z)$ a fração de galáxias na faixa de frequência $W > 1$ que não são contadas nas bandas 1, 2, ... ($W - 1$).

3.3.4 Conexão entre grandezas teóricas e observacionais

Em geral, uma quantidade observacional pode-se relacionar com a sua contraparte teórica através da função de completeza J . Por exemplo, conforme visto em Ribeiro & Stoeger (2003); Albani et al. (2007); Iribarrem et al. (2011) a função de seleção $\psi(z)$, uma grandeza observacional, está relacionada com a densidade numérica radial $n_c(z)$, a sua contraparte teórica como,

$$\psi(z) = J(z)n_c(z), \quad (3.3.80)$$

onde o índice c indica que a densidade numérica utiliza o volume comóvel em sua definição.

A função de seleção é escrita em termos da função de luminosidade $\phi(l)$ como visto na Eq. (3.3.73). A densidade numérica radial é a grandeza teórica escrita como,

$$n_c(z) = \frac{N}{V_c} = \frac{3N(r)}{4\pi r^3}. \quad (3.3.81)$$

Como nosso interesse é obter as densidades radiais observacionais $[\gamma_i]_{obs}$ e $[\gamma_i^*]_{obs}$, precisa-se da contagem numérica diferencial observacional $[dN/dz]_{obs}$. Por isso, utilizamos a relação entre grandezas observacionais e teóricas para a contagem numérica,

$$\left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} = J(z) \left[\frac{dN}{dz} \right]_{teo}. \quad (3.3.82)$$

Com as Eqs. (3.3.80), (3.3.81) e a densidade numérica definida no volume próprio $n = N/V_{pr}$, a contagem numérica diferencial observacional adota a forma,

$$\left[\frac{dN}{dz} \right]_{obs} = \frac{V_c}{V_{pr}} \frac{\psi(z)}{n} \left[\frac{dN}{dz} \right]_{teo}. \quad (3.3.83)$$

Conseqüentemente, a contagem numérica observacional é escrita como,

$$[N(z)]_{obs} = \int_0^z \left[\frac{dN}{dz'} \right]_{obs} dz'. \quad (3.3.84)$$

Finalmente, com as Eqs. (3.3.83) e (3.3.84) é possível calcular as densidades relativísticas radiais necessárias para estudar a inomogeneidade na distribuição de galáxias (Eqs. (3.3.36) e (3.3.37)). Devido a que as distâncias variam de forma diferente com respeito ao desvio para vermelho, as densidades relativísticas radiais também variam de forma diferente com z . Conforme os resultados de Iribarrem et al. (2011), as densidades diferenciais ($[\gamma]_{obs}$) não parecem seguir uma lei de potências tão bem quanto as densidades integrais $[\gamma^*]_{obs}$. Portanto, vamos verificar o quanto esse comportamento afeta os nossos resultados.

DIMENSÃO FRACTAL EM $0,05 \leq z \leq 5,0$

4.1 Qual levantamento será estudado?

Trabalhamos com dados de dois levantamentos de galáxias em desvios para o vermelho, o *Canadian Network for Observational Cosmology* (CNOC2) e o *FORS Deep Field* (FDF). Eles cobrem diferentes intervalos de desvio para o vermelho. A seguir veremos em detalhe cada um deles.

4.1.1 Levantamento CNOC2: $0,05 \leq z \leq 1,0$

Os dados de densidades radiais e distâncias são o produto de uma seqüência de trabalhos que desenvolveram toda a teoria para calculá-los. Nesse contexto, o primeiro trabalho que tenta testar a teoria com dados observacionais começou com Ribeiro & Stoeger (2003), o qual utilizaram os dados do levantamento *Canadian Network for Observational Cosmology* (CNOC2), pois na época, era o levantamento mais amplo em desvio para o vermelho intermediário. A amostra correspondente à determinação da função de luminosidade estava composta de 2000 galáxias no intervalo $0,12 < z < 0,55$ e com magnitude aparente na banda vermelha no intervalo $17,0 < R_c < 21,5$.

Os parâmetros ajustados foram obtidos por Lin et al. (1999) (L99), que mostraram que o ajuste era válido com pouca diferença em $0 < z < 1$. Os dados do CNOC2 foram obtidos e ajustados por Lin et al. (1999) para três feixes de banda, B_{AB} , R_C , U e utilizaram o modelo EdS, com parâmetro de Hubble $H_0 = 100 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Os parâmetros foram conferidos por outros autores que analisaram dados de outros levantamentos, o que leva a ter certeza que são dados confiáveis.

Iribarrem (2009) calculou os dados no intervalo $0,05 \leq z \leq 1,0$ para a métrica FLRW. Em relação à função de luminosidade, seguiu a parametrização da magnitude característica proposta em Lin et al. (1999),

$$M_*(z) = M'_* - Q(z - 0,3), \quad (4.1.1)$$

onde M'_* e Q são parâmetros para a equação linear da evolução em escala de luminosidade característica.

Para calcular as funções de seleção, os limites de integração corresponderam às três bandas: $-23,0 < M_{R_C} < -17,0$, $-22,0 < M_U < -16,0$, e $-22,0 < M_B < -16,0$. Finalmente, como todas as galáxias foram contadas nessas três bandas, $b_W = 1/3$.

4.1.2 Levantamento FDF: $0,5 \leq z \leq 5,0$

O levantamento da câmara profunda do Hubble FDF fornece dados para desvios para o vermelho altos. Em Gabasch et al. (2004) (G04) e Gabasch et al. (2006) (G06) se fez o ajuste de parâmetros de Schechter para 5558 galáxias selecionadas em azuis (G06) e vermelhas (G04). As observações foram obtidas por fotometria até magnitude 26.8 na banda I , em um intervalo de desvio para o vermelho $0,5 \leq z \leq 5,0$. Os autores investigaram a evolução das funções de luminosidade avaliadas em cinco bandas, UV(1500Åe 2800Å), u' , B e g' e a evolução dos parâmetros de Schechter para o intervalo de desvio para o vermelho $0 < z < 5$. Adotaram o modelo padrão com métrica FLRW e parâmetros $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $H_0 = 70 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Em Iribarrem et al. (2011) se calcularam as densidades e distâncias para as galáxias vermelhas em $0,75 \leq z \leq 3,0$ e para as galáxias azuis em $0,5 \leq z \leq 5,0$ tendo-as dividido em dois grupos: as azuis no óptico (g', B) e as azuis no UV (1500Å, 2800Å, u').

4.2 Lei de potência: densidade radial vs. distância observacional

Para a análise da dimensão fractal utilizam-se os pares de dados (d_i, γ_i) e (d_i, γ_i^*) em cada catálogo, os quais são representados graficamente com o objetivo de visualizar estes dados. Para as galáxias de ambos catálogos (CNOC2, FDF), observa-se nas figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 que as densidades decaem na medida que a distância aumenta. As densidades integrais do catálogo FDF mostram uma inclinação mais uniforme em relação a suas densidades diferenciais. No entanto, todas as densidades do catálogo CNOC2 têm uma inclinação menos uniforme.

Claramente, o comportamento das densidades radiais em relação à distância observacional é do tipo lei de potências. Isso permite-nos aplicar a relação número-distância, desenvolvida originalmente por Pietronero-Wertz e reescrita no contexto relativístico por Rangel Lemos & Ribeiro (2008), como uma relação densidade-distância que caracteriza o comportamento fractal. As figuras estão expressas em escala logarítmica para poder realizar o ajuste linear.

► Densidade em função da distância (CNOC2 e FDF-Azuis Óptico)

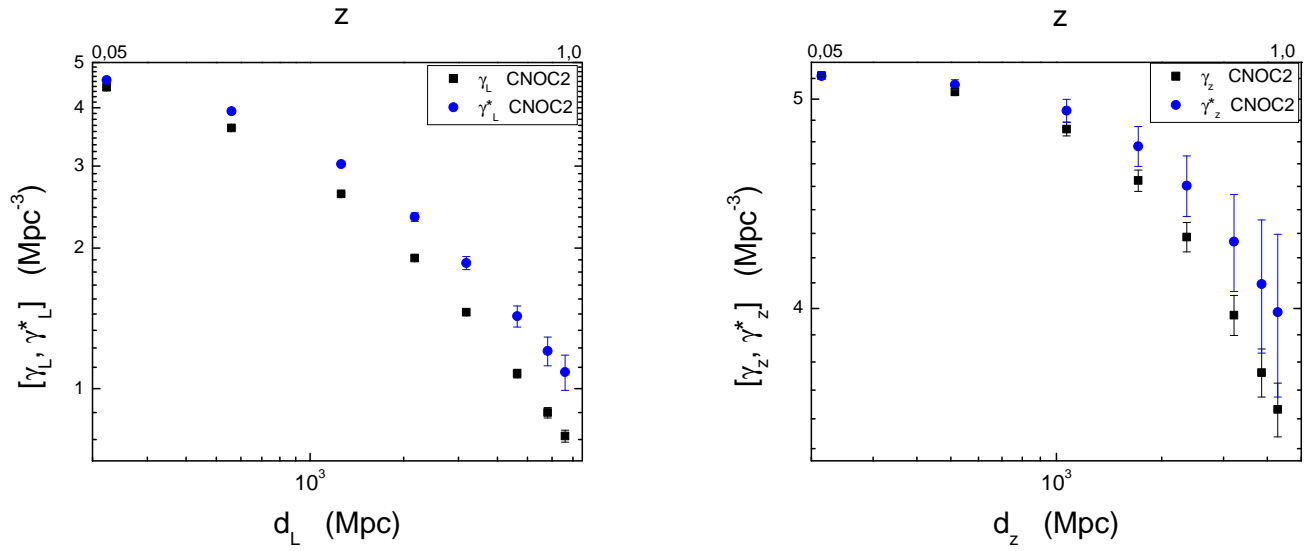


Figura 4.1: A relação densidade-distância para galáxias do catálogo CNOC2.

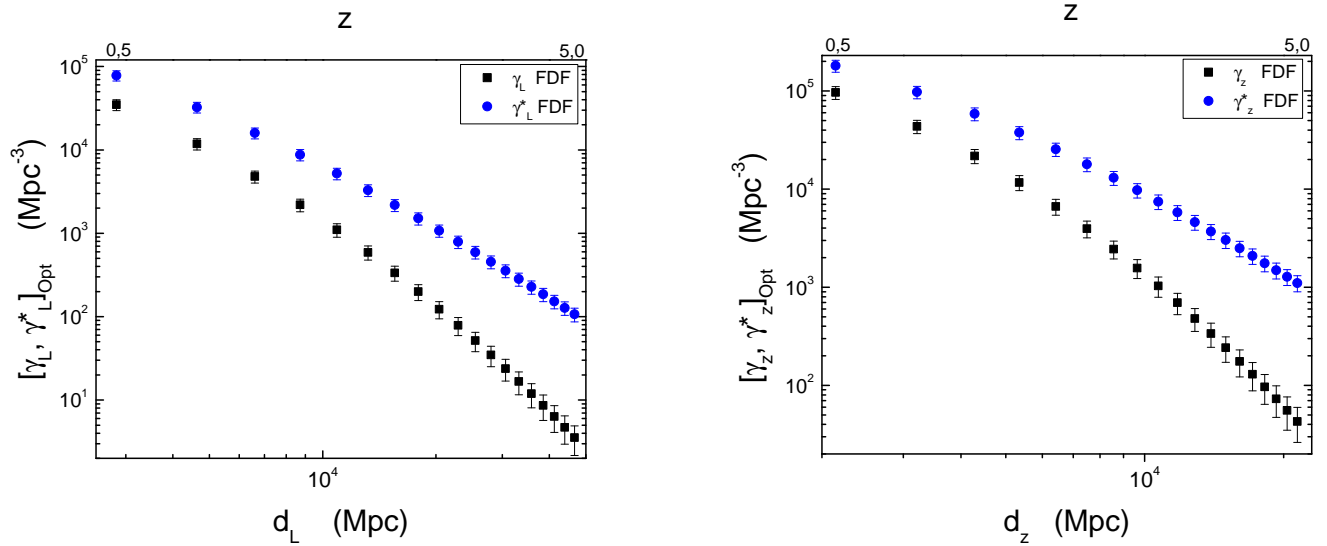


Figura 4.2: A relação densidade-distância para galáxias azuis na banda do óptico do catálogo FDF.

► Densidade em função da distância (FDF-Azuis UV e FDF-G04-Vermelhas)

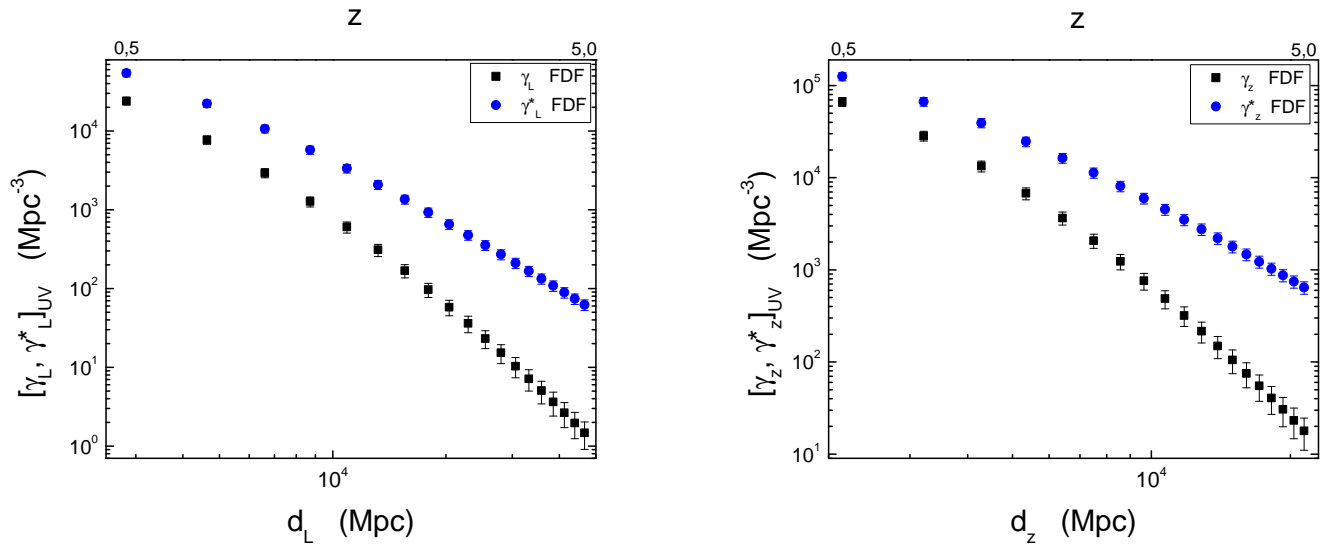


Figura 4.3: A relação densidade-distância para galáxias azuis na banda UV do catálogo FDF.

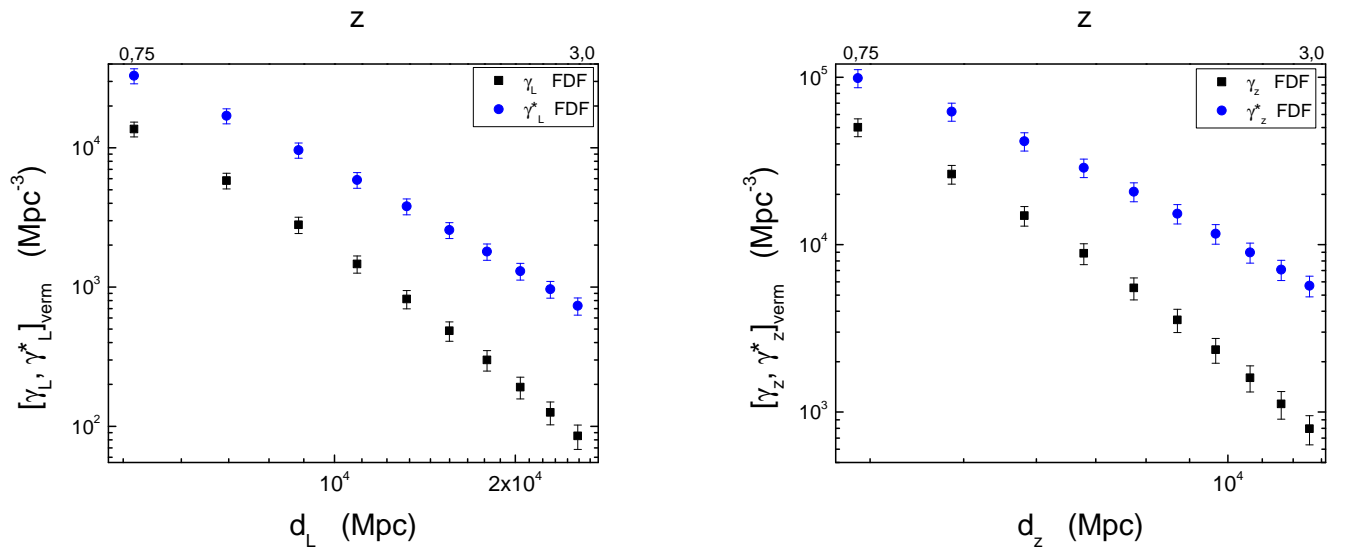


Figura 4.4: A relação densidade-distância para galáxias vermelhas do catálogo FDF.

4.3 Razão entre as densidades γ e γ^*

Como foi visto na teoria, em uma distribuição fractal de galáxias o quociente entre as densidades radiais γ_i e γ_i^* com respeito ao desvio para o vermelho z é igual à constante $D/3$. Se multiplicarmos por 3, obtemos diretamente a dimensão fractal, $D = 3(\gamma_i/\gamma_i^*)$. A análise desta taxa pode dar-nos uma primeira estimativa do valor da dimensão fractal em relação ao desvio para o vermelho.

Observa-se nas figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 que em todos os catálogos o valor da dimensão não é constante e diminui conforme o desvio para o vermelho aumenta. Esse comportamento traz suporte a um dos resultados teóricos apresentados por Rangel Lemos & Ribeiro (2008) de que a dimensão fractal D diminui com o aumento de z quando usamos as distâncias d_L e d_z .

Se quisermos estimar um valor para a dimensão fractal em cada intervalo de desvio para o vermelho, podemos obter um valor médio considerando os extremos de cada conjunto de dados para a dimensão fractal. Por exemplo, para γ_L do catálogo CNOC2 se estima que a dimensão é $D \sim 2,5 \pm 0,3$. E para γ_z , se estima que $D \sim 2,8 \pm 0,2$. Apresentamos na tabela 4.1 os valores estimados para cada catálogo. Nessa tabela podemos ver que em desvios para o vermelho próximos correspondentes ao CNOC2 a dimensão está ao redor de $D \sim 2$ e é a mais uniforme. No entanto, o catálogo FDF mostra que o valor da dimensão fractal cai notoriamente, além de os valores estarem mais dispersos. O valor da dimensão fractal em desvios para o vermelho a partir de $z = 0,75$ está ao redor de $D \sim 0,8$.

Repare-se que esta estimativa é muito grosseira, mas começa a dar-nos uma idéia do comportamento da dimensão fractal, especialmente, quando existe a possibilidade de que o valor da dimensão não seja constante, o que implica que poderia se tratar de uma distribuição multifractal de galáxias.

► Taxa de densidades (CNOC2 e FDF-G04-Vermelhas)

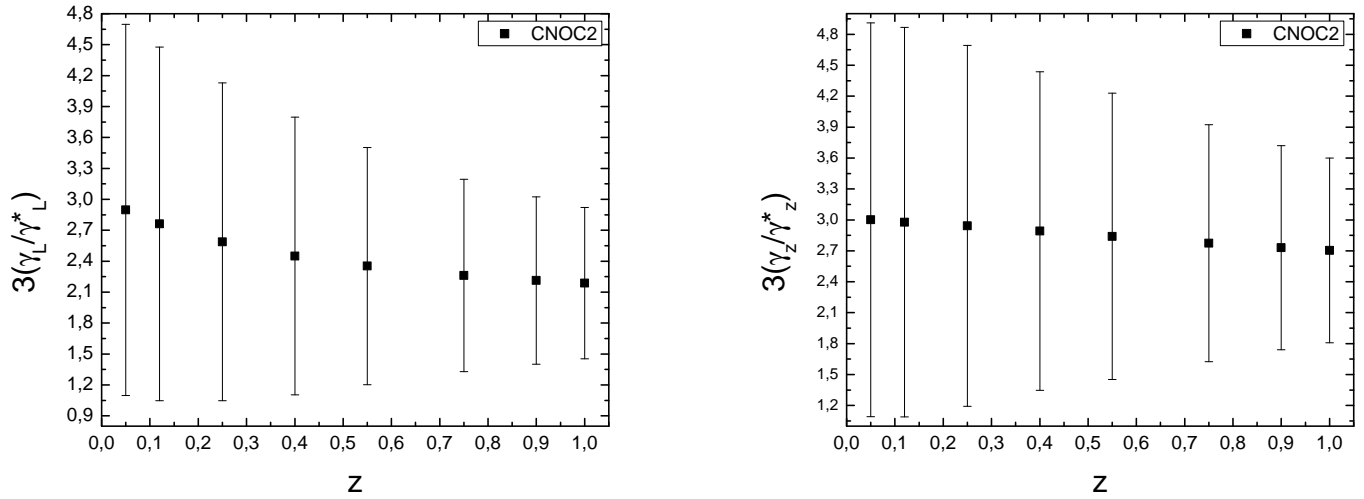


Figura 4.5: Levantamento CNOC2-Catálogo L99. Galáxias no intervalo $0,05 \leq z \leq 1,0$.

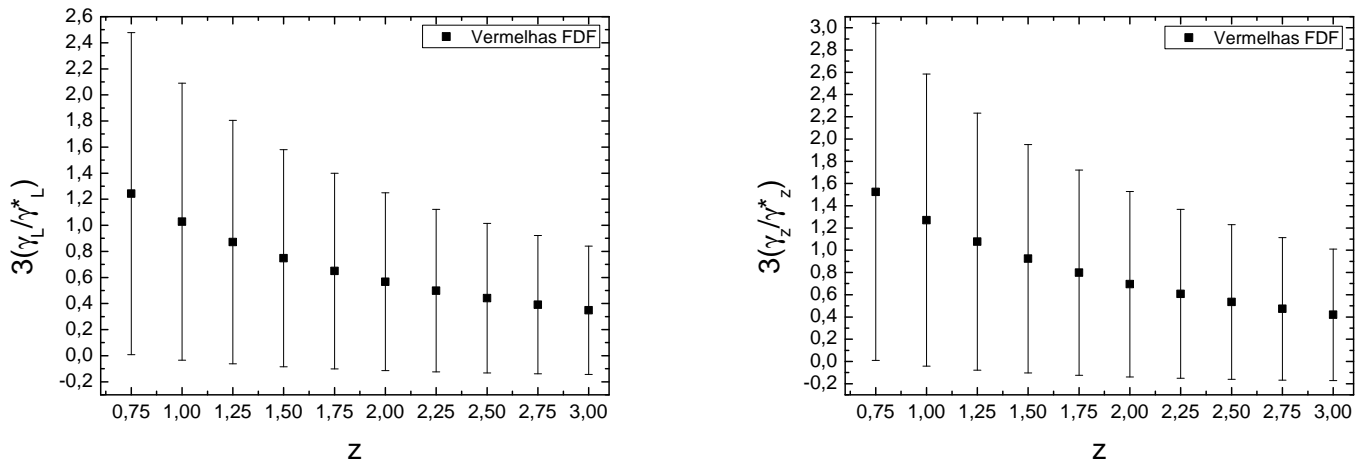


Figura 4.6: Levantamento FDF-Catálogo G04. Galáxias vermelhas do intervalo $0,75 \leq z \leq 3,0$.

► Taxa de densidades (FDF-G06 Azuis Óptico e Azuis UV)

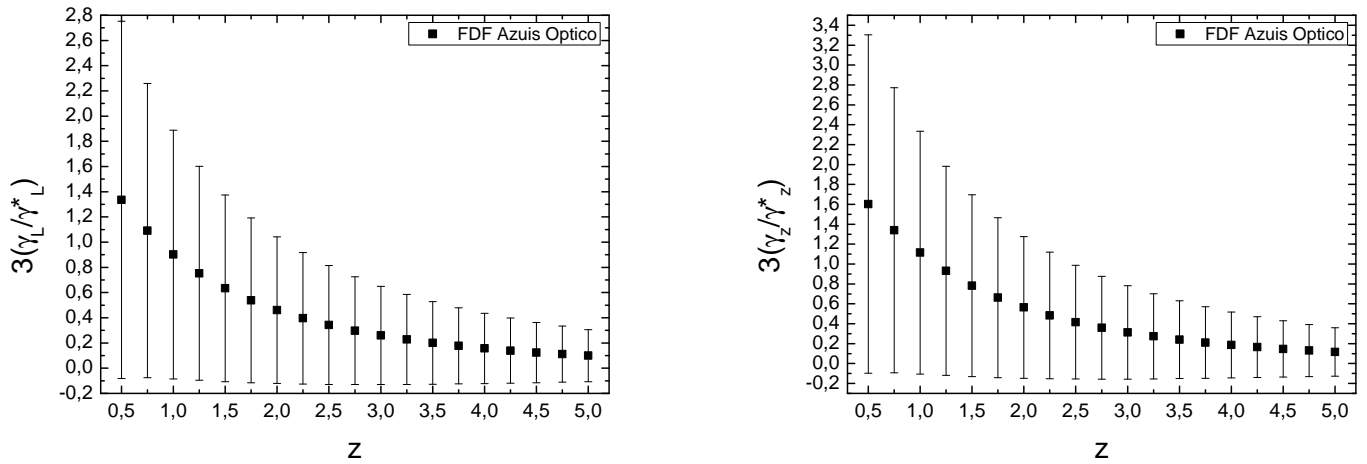


Figura 4.7: Levantamento FDF-Catálogo G04. Galáxias azuis no óptico do intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$.

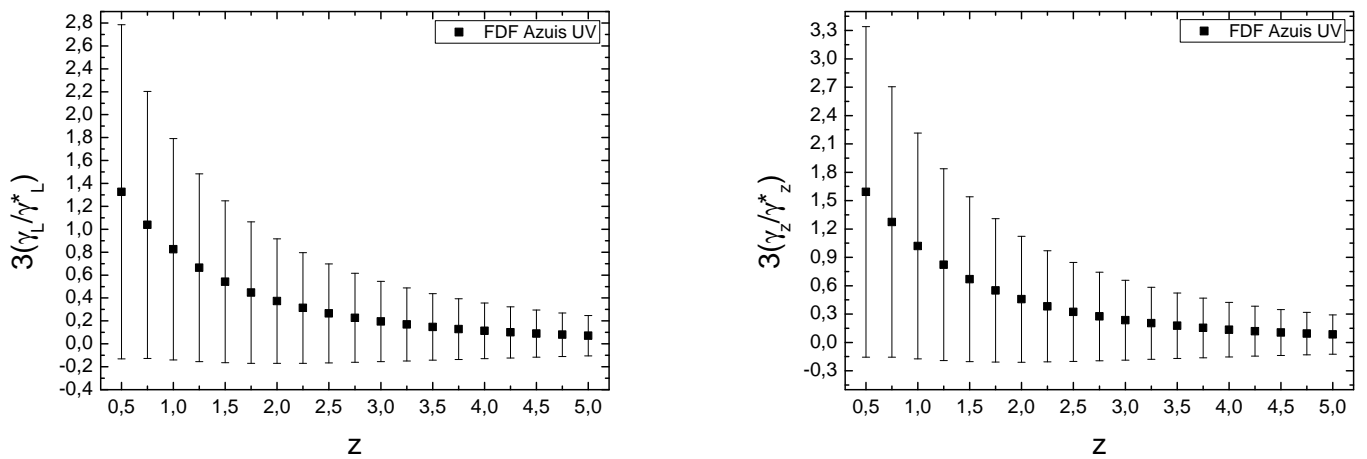


Figura 4.8: Levantamento FDF-Catálogo G06. Galáxias azuis no UV do intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$.

	z	$D = 3(\gamma_L/\gamma_L^*)$	$D = 3(\gamma_z/\gamma_z^*)$	$\langle D \rangle$
CNOC2	0,05-1,0	$2,53 \pm 1,26$	$2,85 \pm 1,40$	$2,69 \pm 1,33$
FDF (Verm)	0,75-3,0	$0,97 \pm 1,05$	$0,79 \pm 0,86$	$0,88 \pm 0,95$
FDF (UV)	0,5-5,0	$0,77 \pm 0,91$	$0,93 \pm 1,1$	$0,85 \pm 1,0$
FDF (Opt)	0,5-5,0	$0,71 \pm 0,80$	$0,85 \pm 0,97$	$0,78 \pm 0,88$

Tabela 4.1: Estimativa grosseira da dimensão fractal para cada catálogo.

4.4 O cálculo da dimensão fractal

Agora passamos à análise quantitativa. Conforme os resultados de Rangel Lemos & Ribeiro (2008) as densidades radiais relativísticas que dão conta da possível inhomogeneidade ou fractalidade na distribuição de galáxias são aquelas que estão em função da distância definida pela luminosidade (d_L) e da distância definida pelo desvio para o vermelho (d_z). Utilizamos o gráfico log-log dos pares de dados (d_i, γ_i) , (d_i, γ_i^*) com $i = z, L$ e o ajuste da reta aos dados é feito com o Origin7.5.

Para o levantamento CNOC2 a figura 4.9 mostra o ajuste das equações (3.3.32) e (3.3.33) fornecendo uma dimensão fractal com valor entre $2 < D < 3$ o que sugere que em desvios para o vermelho próximos ($0,25 \leq z \leq 1,0$) a distribuição de galáxias é um fractal homogêneo.

No caso do levantamento FDF, a figura 4.10 apresenta o ajuste linear às densidades radiais obtidas do catálogo G04 para as galáxias vermelhas no intervalo $0,75 \leq z \leq 3,0$. Observa-se que as densidades diferenciais fornecem o mesmo valor de dimensão fractal $\langle D(\gamma_i) \rangle = 0,06 \pm 0,10$, no entanto as densidades integrais fornecem uma dimensão ao redor de $\langle D(\gamma_i^*) \rangle \sim 0,84 \pm 0,09$.

Para as galáxias azuis do catálogo G06 no óptico se fez um ajuste total (4.11) e se observa que as densidades diferenciais fornecem dimensões negativas, no entanto as

densidades integrais fornecem dimensões positivas, então tentamos ver o que aconteceria se ajustássemos duas retas. A figura 4.13 apresenta o ajuste às densidades radiais para as galáxias azuis UV no intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$. Dos 19 dados, os 6 primeiros que vão até $z = 1,75$ fornecem dimensões ao redor de $\langle D(\gamma_i) \rangle \sim 0,56 \pm 0,10$ para as densidades diferenciais. Os 13 dados restantes fornecem dimensões negativas ao redor de $\langle D(\gamma_i) \rangle \sim -1,42 \pm 0,38$. No entanto, as densidades integrais fornecem dimensões sempre positivas de $\langle D(\gamma_i^*) \rangle \sim 1,02 \pm 0,11$ a $\langle D(\gamma_i^*) \rangle \sim 0,22 \pm 0,12$.

A figura 4.12 mostra o ajuste às densidades das galáxias azuis selecionadas no óptico no intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$. Neste caso, o padrão é similar às galáxias azuis em UV (Fig. 4.13) pois existe a possibilidade de ajustar duas retas. Dos 19 dados, os 6 primeiros que vão até $z = 1,75$ representam um conjunto de dados que fornecem dimensões ao redor de $\langle D(\gamma_i) \rangle \sim 0,44 \pm 0,15$ para as densidades diferenciais. Os 13 dados restantes fornecem dimensões negativas ao redor de $\langle D(\gamma_i) \rangle \sim -1,22 \pm 0,30$. No caso das densidades integrais as dimensões são sempre positivas mesmo ajustando duas retas. Até $z = 1,75$ a dimensão está ao redor de $\langle D(\gamma_i^*) \rangle \sim 1,06 \pm 0,13$ e para o restante a dimensão é $\langle D(\gamma_i^*) \rangle \sim 0,28 \pm 0,18$. Em geral, neste catálogo a dimensão está entre $0 < D < 2$.

As galáxias vermelhas fornecem dimensões positivas o que poderia indicar que essa banda fornece uma amostra mais completa. Nas bandas azuis a perda de galáxias pode se evidenciar pelos valores negativos na dimensão fractal, pois o valor negativo de D significaria que a lei de potências não é mais válida. Por outro lado, as dimensões obtidas a partir das densidades integrais (γ_i^*) são sempre positivas, e com isto poderíamos concluir que essas densidades são mais confiáveis para a nossa análise pois elas representam uma integração no volume. Finalmente, o fato de conseguir mais de um valor de dimensão fractal poderia indicar que a distribuição é multifractal.

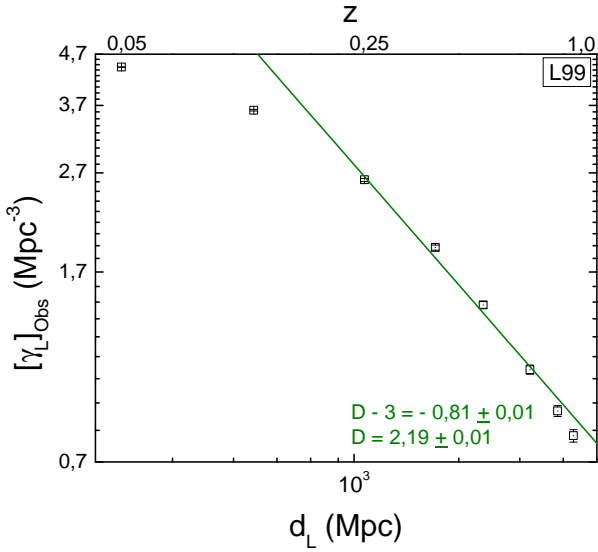
A tabela 4.2 sumariza a dimensão fractal para cada intervalo de desvio para o vermelho e mostra para o caso das galáxias azuis as dimensões fractais obtidas a partir do

	z	$D(\gamma_L)$	$D(\gamma_z)$	$D(\gamma_L^*)$	$D(\gamma_z^*)$	$\langle D(\gamma_i) \rangle$	$\langle D(\gamma_i^*) \rangle$	$\langle D \rangle$
CNOC2	0,25 - 1,0	$2,19 \pm 0,01$	$2,82 \pm 0,01$	$2,34 \pm 0,03$	$2,88 \pm 0,03$	$2,50 \pm 0,01$	$2,61 \pm 0,03$	$2,56 \pm 0,02$
FDF	0,75 - 3,0	$0,06 \pm 0,10$	$0,06 \pm 0,12$	$0,76 \pm 0,08$	$0,93 \pm 0,10$	$0,06 \pm 0,11$	$0,84 \pm 0,09$	$0,45 \pm 0,10$
Vermelhas	0,5 - 5,0	$-0,17 \pm 0,07$	$-0,22 \pm 0,09$	$0,60 \pm 0,05$	$0,73 \pm 0,06$	$-0,20 \pm 0,08$	$0,67 \pm 0,05$	$0,23 \pm 0,07$
Azuis Opt	0,5 - 1,75	$0,39 \pm 0,14$	$0,50 \pm 0,17$	$0,95 \pm 0,12$	$1,17 \pm 0,15$	$0,44 \pm 0,15$	$1,06 \pm 0,13$	$0,75 \pm 0,14$
Azuis Opt	2,0 - 5,0	$-1,09 \pm 0,27$	$-1,36 \pm 0,32$	$0,25 \pm 0,16$	$0,30 \pm 0,19$	$-1,22 \pm 0,30$	$0,28 \pm 0,18$	$0,48 \pm 0,23$
Azuis UV	0,5 - 5,0	$-0,31 \pm 0,06$	$-0,38 \pm 0,07$	$0,55 \pm 0,04$	$0,66 \pm 0,05$	$-0,34 \pm 0,06$	$0,60 \pm 0,04$	$0,13 \pm 0,05$
Azuis UV	0,5 - 1,75	$0,23 \pm 0,11$	$0,31 \pm 0,14$	$0,89 \pm 0,09$	$1,16 \pm 0,13$	$0,56 \pm 0,10$	$1,02 \pm 0,11$	$0,65 \pm 0,12$
Azuis UV	2,0 - 5,0	$-1,27 \pm 0,25$	$-1,58 \pm 0,30$	$0,19 \pm 0,12$	$0,26 \pm 0,12$	$-1,42 \pm 0,28$	$0,22 \pm 0,12$	$0,60 \pm 0,20$

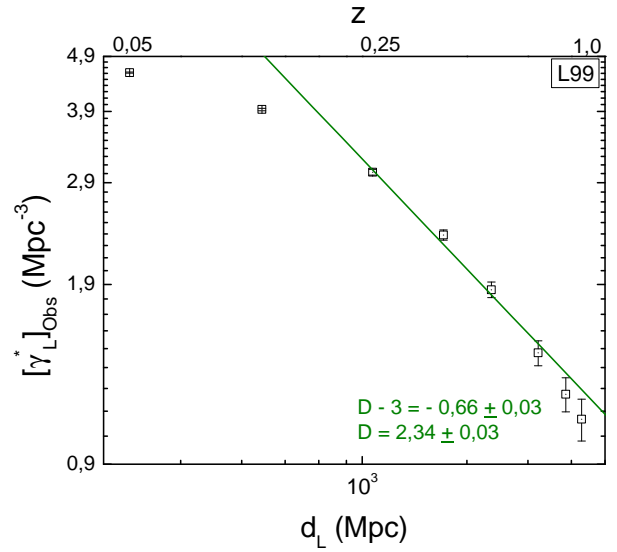
Tabela 4.2: Dimensão fractal para cada catálogo obtida a partir do ajuste linear.

ajuste total em todo o intervalo de z e a partir do ajuste de duas retas.

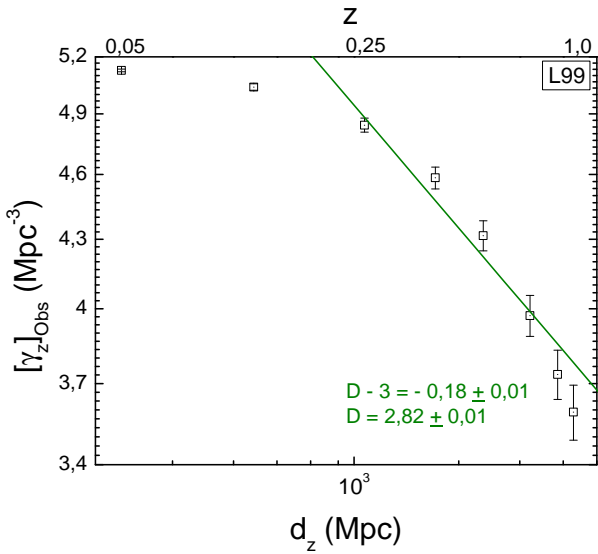
► **Ajuste no levantamento CNOC2 - L99** ($0,05 < z < 1,0$)



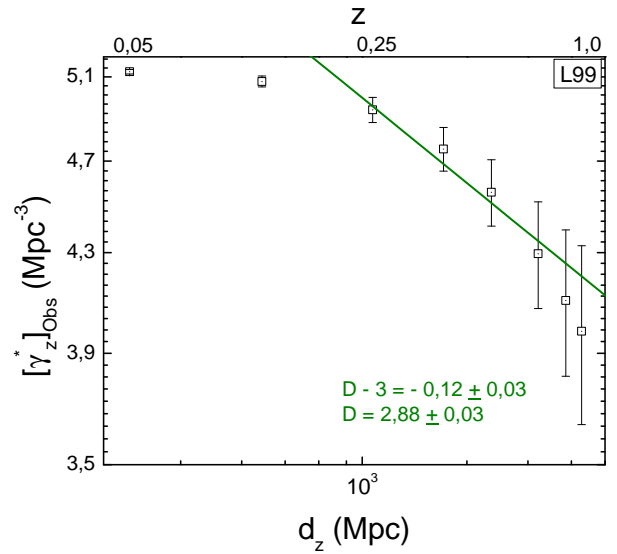
(a) γ_L vs. d_L



(b) γ_L^* vs. d_L



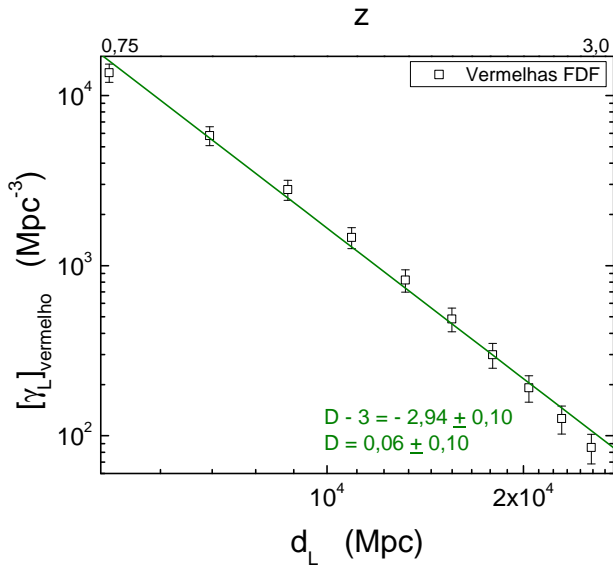
(c) γ_z vs. d_z



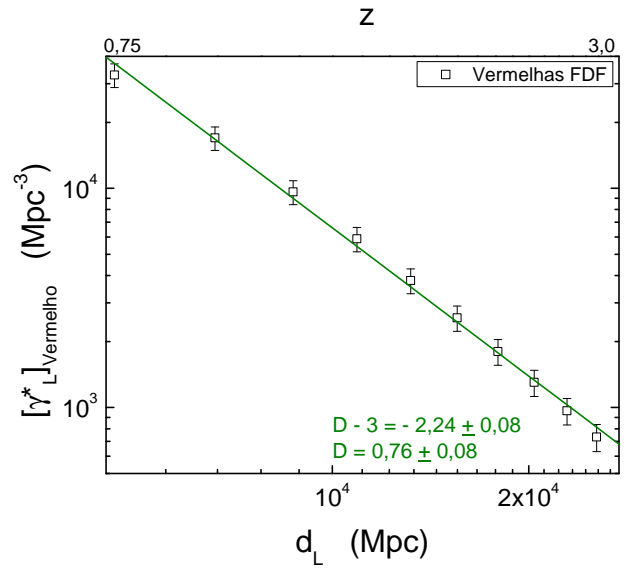
(d) γ_z^* vs. d_z

Figura 4.9: Catálogo L99. Ajuste linear das densidades radiais. As barras de erro são quase imperceptíveis e a dimensão fractal está em $2 < D < 3$.

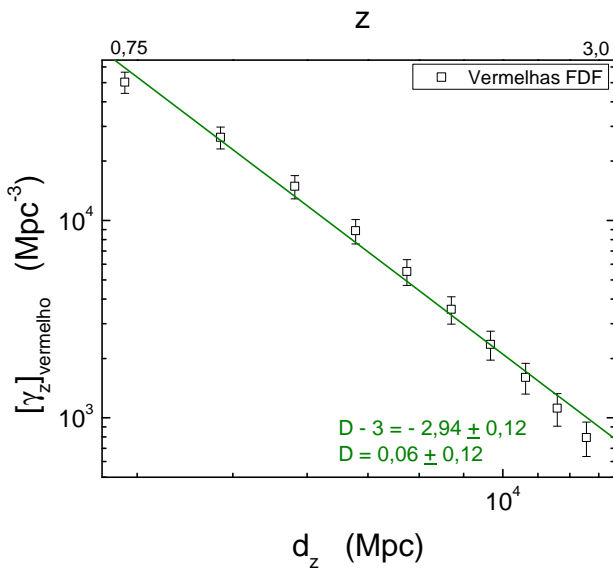
► Ajuste no levantamento FDF - G04 vermelhas ($0,75 < z < 3,0$)



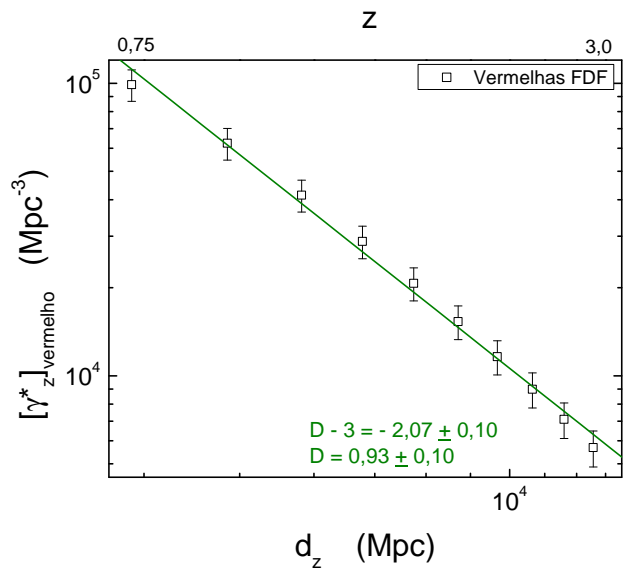
(a) γ_L vs. d_L



(b) γ_L^* vs. d_L



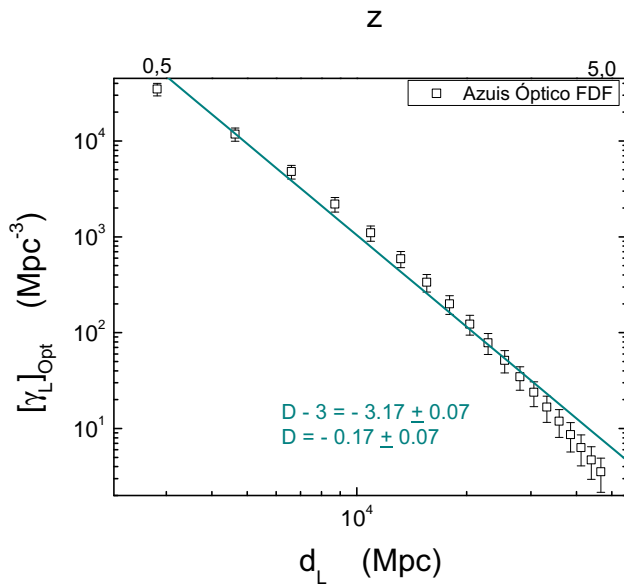
(c) γ_z vs. d_z



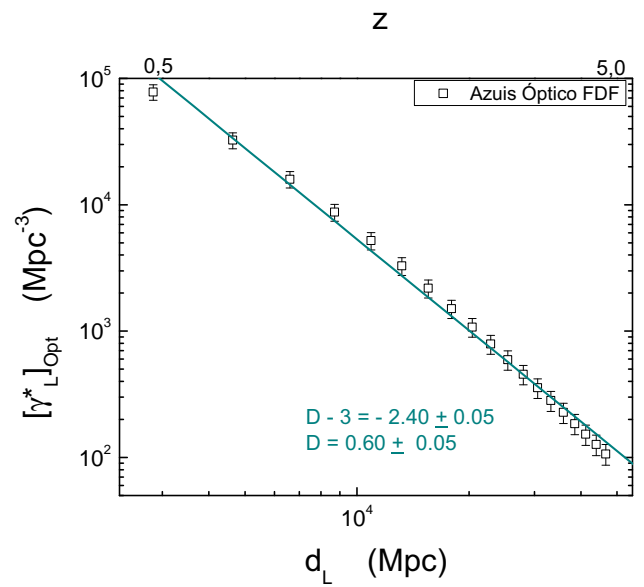
(d) γ_z^* vs. d_z

Figura 4.10: Levantamento FDF-Catálogo G04. Ajuste linear das densidades radiais das galáxias vermelhas selecionadas no intervalo $0,75 \leq z \leq 3,0$. A dimensão fractal é baixa, a média é $\langle D \rangle = 0,84 \pm 0,09$.

► Ajuste total no levantamento FDF - G06 azuis óptico ($0,5 < z < 5,0$)



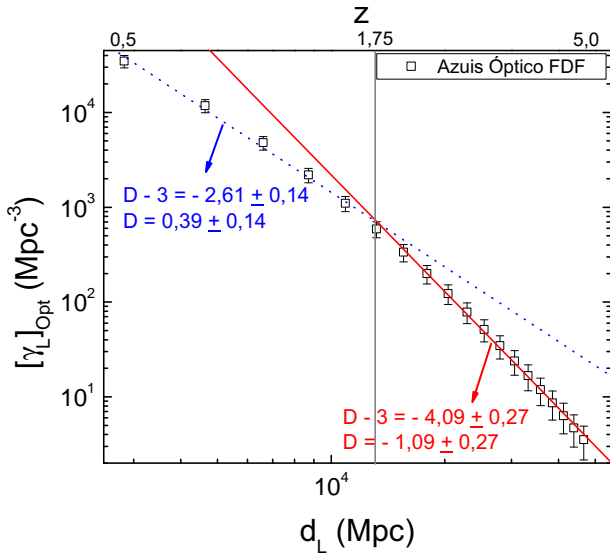
(a) γ_L vs. d_L



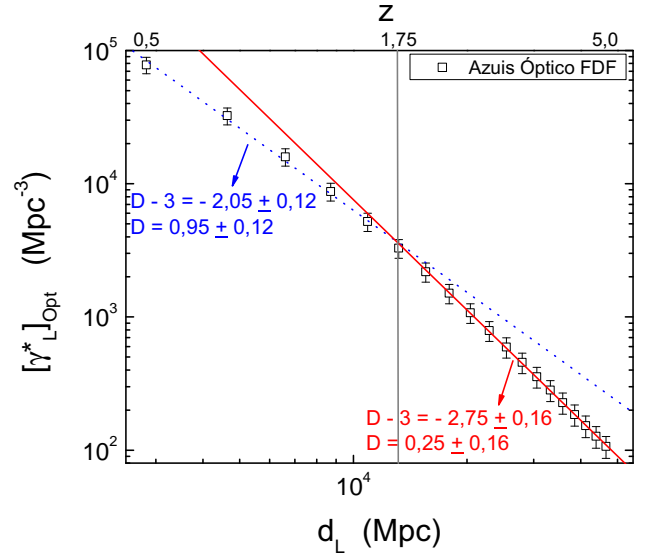
(b) γ^*_L vs. d_L

Figura 4.11: Levantamento FDF-Catálogo G06. Ajuste total no intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$ para galáxias azuis no óptico. A dimensão fractal é negativa para as densidades diferenciais mas positiva para as densidades integrais.

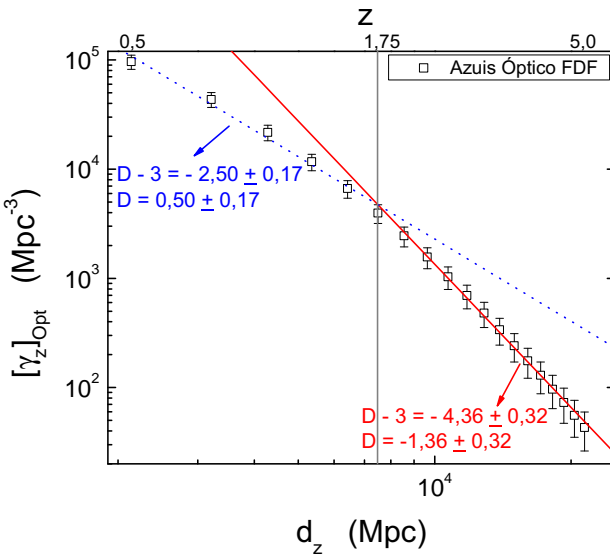
► Dois ajustes no levantamento FDF - G06 azuis óptico ($0,5 < z < 5,0$)



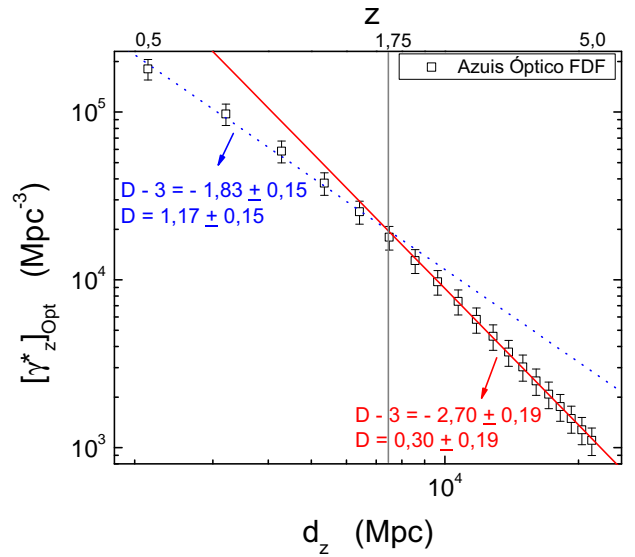
(a) γ_L vs. d_L



(b) γ_L^* vs. d_L



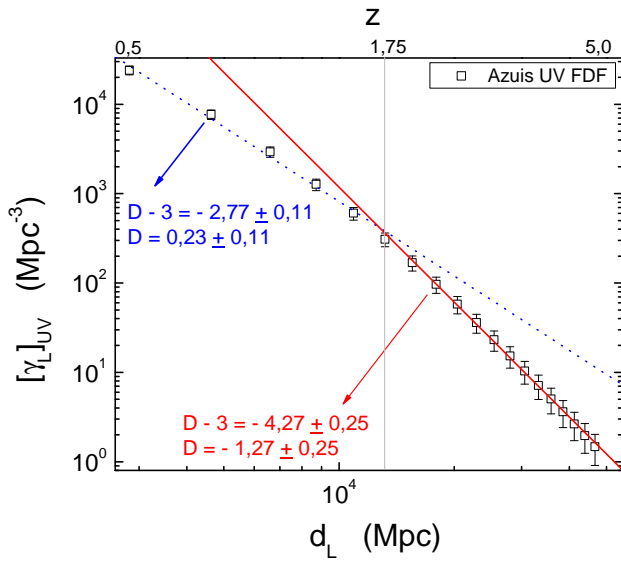
(c) γ_z vs. d_z



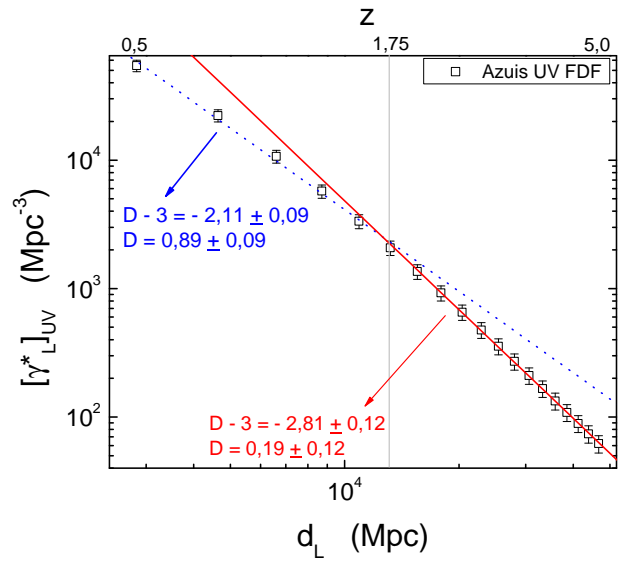
(d) γ_z^* vs. d_z

Figura 4.12: Levantamento FDF-Catálogo G06. Ajuste linear das densidades radiais das galáxias azuis selecionadas no óptico no intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$. Podem-se ajustar duas retas. A dimensão fractal no primeiro intervalo é $\langle D \rangle = 1,06 \pm 0,13$. E no segundo intervalo é $\langle D \rangle = 0,28 \pm 0,18$.

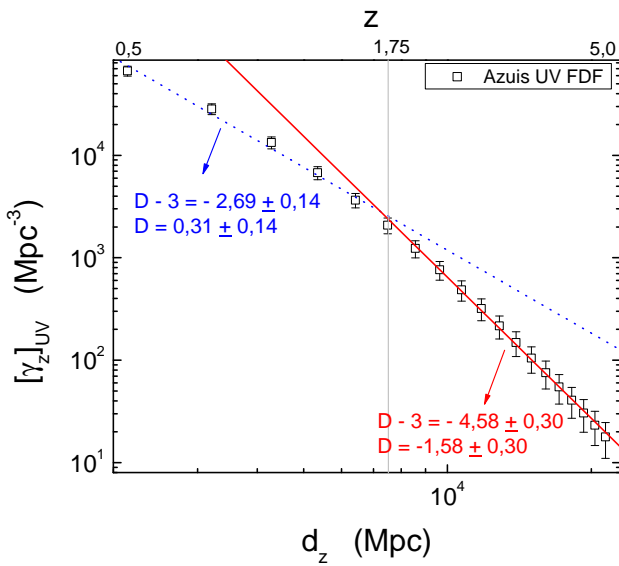
► Dois ajustes no levantamento FDF - G06 azuis UV ($0,5 < z < 5,0$)



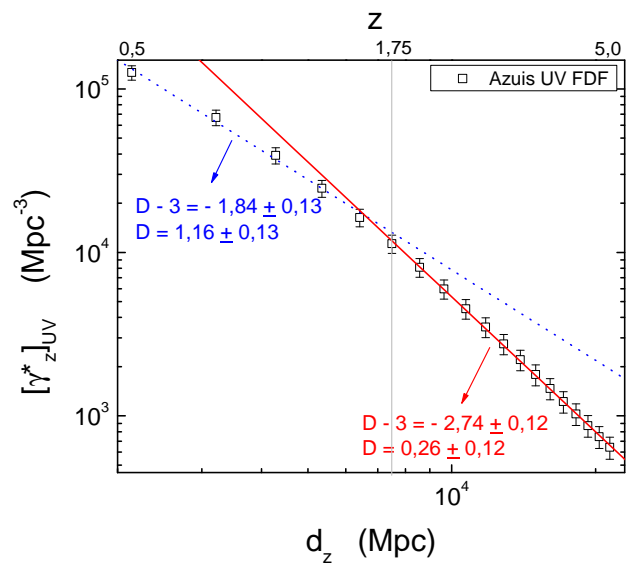
(a) γ_L vs. d_L



(b) γ_L^* vs. d_L



(c) γ_z vs. d_z



(d) γ_z^* vs. d_z

Figura 4.13: Levantamento FDF-Catálogo G06. Ajuste linear das densidades radiais das galáxias azuis selecionadas no UV no intervalo $0,5 \leq z \leq 5,0$. A dimensão fractal no primeiro intervalo é $\langle D \rangle = 1,02 \pm 0,11$. E no segundo intervalo é $\langle D \rangle = 0,22 \pm 0,12$.

4.5 Discussões

Com os dados observacionais dos levantamentos CNOC2 e FDF foi possível verificar o comportamento do tipo lei de potências para as densidades radiais relativísticas γ_i e γ_i^* em função das distâncias definidas pela luminosidade d_L e pelo desvio para o vermelho d_z . Uma estimativa da dimensão fractal foi feita calculando diretamente da equação $D = 3(\gamma_i/\gamma_i^*)$. O comportamento de D em função do desvio para o vermelho z mostra que em geral D não é uma constante. Em desvios para o vermelho mais próximos ($0,05 \leq z \leq 1,0$) correspondentes ao CNOC2, a dimensão parece ser mais uniforme e o valor, em média, está ao redor de $D \sim 2$. No caso de desvios mais altos ($0,5 \leq z \leq 5,0$) correspondentes ao FDF, a dimensão varia de forma notável ao longo de todo o intervalo. Em média o valor da dimensão está ao redor de $D \sim 0,8$. Porém, uma análise mais confiável é a obtida através do ajuste linear da função de tipo lei de potências $\gamma_i \propto d_i^{D-3}$ com $i = z, L$. O ajuste para o levantamento CNOC2 no intervalo $0,05 \leq z \leq 1,0$ fornece em média uma dimensão fractal $D = 2,56 \pm 0,02$ mesmo trabalhando com poucos dados. Desse catálogo os dois primeiros pontos foram tirados para fora porque pertencem a desvios para o vermelho até $z = 0,1$, e como foi visto em Ribeiro (1995); Rangel Lemos & Ribeiro (2008) as densidades radiais começam a variar dependendo da medida da distância observacional a partir desse desvio para o vermelho. No caso do FDF, as galáxias vermelhas no intervalo $0,75 \leq z \leq 3,0$ fornecem uma dimensão menor ao redor de $D = 0,84 \pm 0,09$. No entanto, as galáxias azuis selecionadas no UV em $0,5 \leq z \leq 5,0$ fornecem resultados que levam a considerar a densidade radial integral como a mais útil para o nosso estudo, pois ela fornece valores de dimensão fractal sempre positivos. No entanto, as densidades radiais diferenciais a partir de $z \sim 2$ fornecem dimensões negativas o que faz com que a lei de potências pare de governar. Assim, levando em conta só os resultados das densidades radiais integrais, se vê que é possível ajustar duas retas e fazendo isso

em média a dimensão fractal muda de $D = 1,06 \pm 0,13$ a $D = 0,28 \pm 0,18$ para as galáxias azuis no óptico. E para as galáxias azuis no UV a dimensão fractal muda de $D = 1,02 \pm 0,11$ a $D = 0,22 \pm 0,12$. Em geral as dimensões fractais nestes desvios para o vermelho altos são muito baixas. Com estes resultados, vemos que é possível que um modelo relativístico fractal baseado no modelo cosmológico FLRW com constantes $\Omega_{m0} = 0,3$ e $\Omega_{\Lambda} = 0,7$ ajude a evidenciar uma distribuição fractal das galáxias com diferentes valores de dimensão fractal dentro do intervalo $0,05 \leq z \leq 5,0$. Destes resultados vemos também que as densidades mais úteis são as densidades radiais integrais porque fornecem dimensões sempre positivas garantindo com isso que a lei de potências governe a distribuição de galáxias. Os dados também sugerem que a distribuição pode ser caracterizada por mais de um valor de dimensão fractal, o que poderia implicar que um estudo multifractal em intervalos de desvio para o vermelho altos seria interessante.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi caracterizada a possível fractalidade na distribuição de galáxias para um amplo intervalo de desvio para o vermelho e no contexto de um modelo fractal relativístico que define grandezas no cone de luz do passado. Como ferramenta de caracterização da irregularidade tem se utilizado a *dimensão fractal*, calculada a partir do ajuste de uma expressão tipo lei de potência para as estatísticas radiais γ_i (*densidade diferencial*) e γ_i^* (*densidade integral*) em relação às distâncias d_i , onde $i = z, L$, ou seja, a distância definida pelo desvio para o vermelho d_z e a distância definida pela luminosidade d_L , com as quais as densidades radiais seguem o comportamento $\lim_{d \rightarrow \infty} \rho = 0$, típico de uma distribuição fractal. Essas densidades descrevem a taxa de crescimento no número de galáxias à medida que vamos-nos afastando no cone de luz do passado e neste modelo fractal relativístico, as galáxias são consideradas como fontes pontuais de luz confinadas em um volume que muda com a distância medida a partir do observador.

Utilizaram-se os dados de densidade radial e distância observacional obtidos por Iribarrem (2009) para o catálogo L99 do levantamento CNOC2 em $0,05 \leq z \leq 1$ e por Iribarrem et al. (2011) para galáxias vermelhas do catálogo G04 e galáxias azuis

do catálogo G06 correspondentes ao levantamento FDF em $0,75 \leq z \leq 3,0$ e $0,5 \leq z \leq 5,0$ respectivamente. Neste trabalho vimos que:

- As densidades radiais para os três catálogos decaem à medida que a distância aumenta. Esse comportamento satisfaz uma relação do tipo *lei de potências* implicando a invariância de escala de uma distribuição fractal.
- Para o catálogo L99 do levantamento CNOC2 em $0,05 \leq z \leq 1$, ajustou-se uma reta a todas as densidades radiais exceto as duas primeiras por serem densidades em desvios para o vermelho fora da validade do modelo fractal relativístico. Obteve-se a dimensão fractal $D = 2,56 \pm 0,02$. Esse valor é próximo ao valor obtido por Pietronero e Sylos-Labini ($D \sim 2$).
- Para as galáxias vermelhas no catálogo G04 do levantamento FDF em $0,75 \leq z \leq 3,0$ foi possível ajustar uma reta cuja inclinação fornecia uma dimensão fractal menor ao obtido para o CNOC2. As dimensões fractais obtidas a partir das densidades diferenciais (γ_i) forneceram o mesmo valor mas com erro muito alto, no entanto, as densidades integrais (γ_i^*) pareceram fornecer melhores resultados. Portanto, a dimensão fractal é $D = 0,84 \pm 0,09$ e poderia implicar que a estrutura fractal é rarefeita em desvios para o vermelho mais altos.
- As galáxias azuis no catálogo G06 do FDF e no intervalo de desvio para o vermelho $0,5 \leq z \leq 5,0$ apresentaram um padrão característico. Ajustando uma reta encontrou-se que a dimensão fractal obtida a partir das densidades diferenciais é sempre negativa, no entanto, as densidades integrais forneceram valores sempre positivos. Além do mais, tentamos verificar a possibilidade de ajustar duas retas e com isso observou-se que a dimensão fractal diminuía conforme o aumento da distância.
- Ajustando duas retas aos dados das galáxias azuis, a dimensão fractal tornava-se

negativa a partir de $z \sim 2$ no caso das densidades diferenciais. Isto sugere que a distribuição de galáxias deixa de ser governada por uma lei de potências e isso poderia ser causado pela perda de galáxias nesses desvios para o vermelho altos. No entanto, as densidades integrais mostraram que a dimensão diminui de valor em $z \sim 2$ mas conserva-se positiva.

- A variação da dimensão fractal no desvio para o vermelho poderia sugerir que a distribuição de galáxias é um fractal não homogêneo. Considerando só os resultados das densidades integrais temos que a dimensão muda de $D = 1,02 \pm 0,11$ a $D = 0,22 \pm 0,12$ para galáxias azuis no UV (1500\AA , 2800\AA , u') e para as galáxias azuis no óptico (g' , B), a dimensão fractal muda de $D = 1,06 \pm 0,13$ a $D = 0,28 \pm 0,18$.
- O fato da distribuição de galáxias apresentar mais de um valor de dimensão fractal poderia indicar que se trata de um multifractal em desvios para o vermelho altos e cuja análise é diferente.

As dimensões negativas foram um resultado inesperado sugerindo que para a nossa análise de inhomogeneidade na distribuição de galáxias é mais confiável utilizar as densidades integrais pois elas são uma integração no volume e evitam as flutuações das densidades diferenciais. Além disso o catálogo de galáxias vermelhas é mais completo do que das galáxias azuis. Assim, este modelo fractal relativístico baseado no modelo padrão com parâmetros $\Omega_{m_0} = 0,3$ e $\Omega_{\Lambda} = 0,7$ e construído nos postulados de isotropia e *homogeneidade espacial*, descobre que é possível encontrar *inhomogeneidade observacional* no intervalo de desvio para o vermelho $0,05 < z < 5,0$.

Bibliografia

- Abdalla, E., Afshordi, N., Khodjasteh, K., & Mohayaee, R. (1998). A Dynamical Approach to a Self-similar Universe. *arXiv:astro-ph/9803187*, (pp. 1–21).
- Abdalla, E. & Chirenti, C. B. M. H. (2004). A model displaying extremely inhomogeneous matter distribution in general relativity. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 337(1-2), 117–122.
- Abdalla, E., Mohayaee, R., & Ribeiro, M. B. (1999). Scale Invariance in a Perturbed Einstein-de Sitter Cosmology. *arXiv:astro-ph/9910003*, (pp. 1–18).
- Albani, V. V. L., Iribarrem, A. S., Ribeiro, M. B., & Stoeger, W. R. (2007). Differential Density Statistics of the Galaxy Distribution and the Luminosity Function. *Astrophysical Journal*, 657, 760–772.
- Baryshev, I. & Teerikorpi, P. (2002). *Discovery of cosmic Fractals*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Bonnor, W. B. (1972). A non-uniform relativistic cosmological model. *Monthly Notes of the R.A.S.*, 159, 261–268.

- Carpenter, E. F. (1938). Some Characteristics of Associated Galaxies. I. a. Density Restriction in the Metagalaxy. *Astrophysical Journal*, 88, 344–355.
- Cohen, N. (2006). Fractals' new era in military antenna design. *Electronics Defense*, August, 12–17.
- Cross, S. S., Start, R. D., Silcocks, P. B., Bull, A. D., Cotton, D. W. K., & Underwood, J. C. E. (1993). Quantitation of the renal arterial tree by fractal analysis. *The Journal of Pathology*, 170, 479–484.
- Cucic, D. A. (2008). Astrophysical Paradoxes, long version. *ArXiv e-prints*. *arXiv:0812.1679*.
- de Lapparent, V., Geller, M. J., & Huchra, J. P. (1986). A slice of the universe. *Astrophysical Journal*, 302, L1–L5.
- de Vaucouleurs, G. (1960). The apparent density of matter in groups and clusters of galaxies. *ApJ*, 131, 585–597.
- Ellis, G. F. R. (1971). Relativistic Cosmology. In R. K. Sachs (Ed.), *General Relativity and Cosmology* (pp. 104–182).
- Ellis, G. F. R. (2007). On the definition of distance in general relativity: I. M. H. Etherington (Philosophical Magazine ser. 7, vol. 15, 761 (1933)). *General Relativity and Gravitation*, 39, 1047–1052.
- Gabasch, A., Bender, R., Seitz, S., Hopp, U., Saglia, R. P., Feulner, G., Snigula, J., Drory, N., Appenzeller, I., Heidt, J., Mehlert, D., Noll, S., Böhm, A., Jäger, K., Ziegler, B., & Fricke, K. J. (2004). The evolution of the luminosity functions in the FORS Deep Field from low to high redshift. I. The blue bands. *Astronomy & Astrophysics*, 421, 41–58.

- Gabasch, A., Hopp, U., Feulner, G., Bender, R., Seitz, S., Saglia, R. P., Snigula, J., Drory, N., Appenzeller, I., Heidt, J., Mehlert, D., Noll, S., Böhm, A., Jäger, K., & Ziegler, B. (2006). The evolution of the luminosity functions in the FORS deep field from low to high redshift. II. The red bands. *Astronomy & Astrophysics*, 448, 101–121.
- Geller, M. J. & Huchra, J. P. (1989). Mapping the Universe. *Science*, 246, 897–903.
- Iribarrem, A. S. (2009). Contagem relativística de fontes cosmológicas e a função de luminosidade galáctica. Dissertação de Mestrado, Observatório do Valongo, CCMN, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Iribarrem, A. S., Lopes, A. R., Ribeiro, M. R., & Stoeger, W. R. (2011). Relativistic Cosmology Number Densities and the Luminosity Function. *Astronomy & Astrophysics*, 25 feb.
- Lin, H., Yee, H. K. C., Carlberg, R. G., Morris, S. L., Sawicki, M., Patton, D. R., Wirth, G., & Shepherd, C. W. (1999). The CNOC2 Field Galaxy Luminosity Function. I. A Description of Luminosity Function Evolution. *Astrophysical Journal*, 518, 533–561.
- Mandelbrot, B. (1967). How long is the coastline of Britain? *Science*, 156, 636–638.
- Mandelbrot, B. (1982). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Longseller S.A.
- Peacock, J. A. (1998). *Cosmological Physics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Peebles, P. J. E. (1980). *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton Univ. Press, Princeton.
- Peebles, P. J. E. (1993). *Principles of Physical Cosmology*. Princeton: Princeton Univ. Press.

- Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag New York Inc.
- Pietronero, L. (1987). The fractal structure of the universe: Correlations of galaxies and clusters and the average mass density. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 144, 257–284.
- Pietronero, L. & Labini, F. S. (2005). Statistical Physics for Cosmic Structures. In C. Beck, G. Benedek, A. Rapisarda, & C. Tsallis (Ed.), *Complexity, Metastability and Nonextensivity* (pp. 91–101).
- Pietronero, L., Montuori, M., & Sylos Labini, F. (1998). La struttura frattale dell'universo. *Le scienze*, 354, 42–49.
- Rangel Lemos, L. J. & Ribeiro, M. B. (2008). Spatial and observational homogeneities of the galaxy distribution in standard cosmologies. *Astronomy & Astrophysics*, 488, 55–66.
- Ribeiro, M. B. (1992a). On modeling a relativistic hierarchical (fractal) cosmology by Tolman's spacetime. I - Theory. *Astrophysical Journal*, 388, 1–8.
- Ribeiro, M. B. (1992b). On modeling a relativistic hierarchical (fractal) cosmology by Tolman's spacetime. II - Analysis of the Einstein-de Sitter model. *Astrophysical Journal*, 395, 29–33.
- Ribeiro, M. B. (1995). Observations in the Einstein-De Sitter cosmology: Dust statistics and limits of apparent homogeneity. *Astrophysical Journal*, 441, 477–487.
- Ribeiro, M. B. (2001). The Apparent Fractal Conjecture: Scaling Features in Standard Cosmologies. *General Relativity and Gravitation*, 33, 1699–1730.
- Ribeiro, M. B. (2005). Cosmological distances and fractal statistics of galaxy distribution. *Astronomy & Astrophysics*, 429, 65–74.

- Ribeiro, M. B. & Miguelote, A. Y. (1998). Fractals and the distribution of galaxies. *Braz. J. Phys.*, 28, 132.
- Ribeiro, M. B. & Stoeger, W. R. (2003). Relativistic cosmology number counts and the luminosity function. *The Astrophysical Journal*, 592, 1–16.
- Sañudo, J., Gómez, J. B., Castaño, F., & Pacheco, A. F. (1990). Fractal dimension of lightning discharge. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2, 101–106.
- Schechter, P. (1976). An analytic expression for the luminosity function for galaxies. *Astrophysical Journal*, 203, 297–306.
- Sparke, L. S. & Gallagher, J. S. (2000). *Galaxies in the Universe: An Introduction*. Cambridge University Press.
- Stewart, I. (1991). *Será que Deus Joga aos Dados?* Jorge Zahar Editor Ltda.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley.
- Sylos Labini, F., Montuori, M., & Pietronero, L. (1998). Comment on the paper by L. Guzzo "Is the Universe homogeneous?". *ArXiv Astrophysics e-prints*. *arXiv:astro-ph/9801151*.
- Sylos Labini, F., Montuori, M., & Pietronero, L. (1998). Scale-invariance of galaxy clustering. *Phys. Rept.*, 293, 61–226.
- Takayasu, H. (1990). *Fractals in the Physical Sciences*. Manchester University Press.
- Wertz, J. R. (1970). *Newtonian Hierarchical Cosmology*. Ph. D. Thesis. Dept. of Astronomy, University of Texas (Austin).
- Wertz, J. R. (1971). A Newtonian Big-Bang Hierarchical Cosmological Model. *Astrophysical Journal*, 164, 227–236.