

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Observatório do Valongo

# **DENSIDADES NUMÉRICAS E ESPECTRO DE POTÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DE GALÁXIAS**

**Amanda Reis Lopes**

Novembro/2011

---

Amanda Reis Lopes

**DENSIDADES NUMÉRICAS E ESPECTRO DE POTÊNCIA DA  
DISTRIBUIÇÃO DE GALÁXIAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa  
de Pós-graduação em Astronomia do Observatório  
Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
como parte dos requisitos necessários à obtenção  
do título de mestre em Astronomia.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Byrro Ribeiro

Rio de Janeiro  
Novembro de 2011

Lopes, Amanda R.

Densidades numéricas e espectro de potência da distribuição de galáxias / Amanda Reis Lopes - Rio de Janeiro: UFRJ/OV, 2011 xi, 76f.:il; 30cm.

Orientador: Marcelo B. Ribeiro

Dissertação (Mestrado em Astronomia) - UFRJ/ OV / Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2011.

Referências Bibliográficas: f: 77-83.

1. Cosmologia: Estrutura em grande escala do Universo 2. Galáxias: Função de Luminosidade 3. Cosmologia: Densidades radiais I. Ribeiro, Marcelo B. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório do Valongo, Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2011 III. Título.

*Dedicado à memória dos meus pais, John Milton da Silveira Lopes e Ademilde Barros Reis.  
A falta de vocês será sempre sentida.*

*“As vezes ouço passar o vento;  
e só de ouvir o vento passar, vale a pena ter nascido.”*

Fernando Pessoa

---

# Agradecimentos

---

Gostaria de agradecer aos meus familiares pelo apoio incondicional às minhas escolhas, pela paciência e compreensão as minhas ocasionais ausências em algumas datas de relativa importantes. Agradeço especialmente à minha irmã, Juliana Reis Lopes, pelo incentivo à minha carreira mesmo nós estando um pouco afastadas e à minha sobrinha, Indaiá Lopes Oliveira, pela fonte de inspiração.

Aos meus pais, John Milton da Silveira Lopes e Ademilde Barros Reis, pela educação e carinho, e por me ensinarem que por pior que os obstáculos sejam estes podem ser sempre ultrapassados com trabalho duro e perseverança. Apesar deles não estarem mais comigo, o seu profissionalismo e caráter servirão sempre como referência em minha vida.

Ao meu orientador, Marcelo Byrro Ribeiro, pela paciência e compreensão ao longo do desenvolvimento do presente trabalho. Pelos conselhos e incentivos em momentos de dúvida profissional e pelo apoio em um dos momentos mais difíceis pelo qual já passei.

À amiga Tatiana Moura pela enorme paciência em ouvir as minhas reclamação e desabafos. Pela atenção e apoio em diversos momentos de dúvida e desespero, fundamentados e não-fundamentados.

À amiga Érika Antônio de Souza pelo apoio e preocupação no momento que mais precisei, algo que jamais esquecerei.

Aos colegas de sala, Letícia Dutra Ferreira e Diego Lorenzo de Oliveira, pelas discussões produtivas, além dos muitos risos e momentos “sem noção” ao longo dos últimos dois anos, os quais tornaram esta experiência bem mais leve.

Aos demais colegas da pós-graduação do Observatório do Valongo (OV) pelas discussões e companheirismo.

A todas as pessoas que trabalham no OV, professores e funcionários, pelo ambiente acadêmico produtivo.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante os dois anos do mestrado.



---

# Resumo

---

O objetivo desse trabalho é estudar as densidades diferenciais  $\gamma$  e integrais  $n$ , definidas em Ribeiro (2005), no domínio dos números de ondas através do espectro de potência (EP). Tal é calculado através da transformada de Fourier dessas grandezas. Primeiro são calculados os EPs estritamente teóricos provindos dos modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM e Einstein-de Sitter (EdS) das densidades para quatro diferentes definições de distâncias cosmológicas  $d_i$  onde  $i = A, L, G, Z$ , de forma a estimar o provável comportamento observacional. Os índices denotam respectivamente as distâncias por área, de luminosidade, por área galáctica e de desvio para o vermelho. Comparando os EPs de ambas as densidades nas quatro distâncias para modelos cosmológicos diferentes, EdS e  $\Lambda$ CDM, verifica-se que de um modelo para o outro não há mudança de comportamento, mas apenas um deslocamento para números de onda maiores dos resultados de EdS em relação aos de  $\Lambda$ CDM. Segundo, aplicando a teoria desenvolvida por Ribeiro & Stoeger (2003), Albani et al. (2007) e Iribarrem et al. (2011), a qual conecta a contagem numérica relativística com os dados da função de luminosidade galáctica, calculam-se as densidades observacionais, e a partir delas pode-se calcular o EP observacional. Para tal foram utilizados os dados de Gabasch et al. (2004, 2006). Os resultados dos EPs observacionais de  $\gamma_A$  são similares aos previstos pela teoria, porém os EPs de  $\gamma_L$ ,  $\gamma_G$  e  $\gamma_Z$  apresentam um declínio abrupto não verificado no teórico para  $k_L \lesssim 0.0005 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $k_G \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  e  $k_Z \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  respectivamente. Este decréscimo inesperado pode ser devido a efeitos de seleção da amostra. Os EPs observacionais de  $n_i$  apresentam um comportamento similar ao esperado pela teoria para as quatro distâncias discutidas nesse trabalho. Esses resultados indicam que as densidades diferenciais são mais sensíveis do que as integrais à possíveis efeitos de seleção da amostra. Além disso, discutimos outra grandeza similar à função de correlação de dois pontos, chamada correlação radial, a qual muda com o tamanho da amostra. Porém, o EP dessa quantidade não muda significativamente com o tamanho da amostra.





---

# Abstract

---

The goal of this work is to study the differential and integral densities respectively denoted by  $\gamma$  and  $n$ , as defined by Ribeiro (2005), in the wavenumber domain through the power spectrum (PS). The PS is calculated performing the Fourier transform of these quantities. First, we compute the theoretical PS for the densities by adopting four different cosmological distances  $d_i$ , where  $i = A, L, G, Z$ , we assumed two cosmological models,  $\Lambda$ CDM and Einstein-de Sitter (EdS). The indexes stand for area, luminosity, galactic area and redshift distances, respectively. Comparing the PS of both densities for these distances in different cosmological models, we verified that the PS does not change its behavior from one model to another. However, the PS from EdS shifts to larger wavenumbers as compared with the PS from  $\Lambda$ CDM. Second, applying the theory developed by Ribeiro & Stoeger (2003), Albani et al. (2007) e Iribarrem et al. (2011), which connects the relativistic number counts with the galaxy luminosity function data, we compute these observational densities using the data from Gabasch et al. (2004, 2006). From these observational densities we calculate the observational PS. The results from the observational  $\gamma_A$  PS is similar to the one predicted by theory, but the observational  $\gamma_L$ ,  $\gamma_G$  and  $\gamma_Z$  PS exhibit a steep decline for  $k_L \lesssim 0.0005 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $k_G \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  and  $k_Z \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  respectively. This decrease is not seen in the theoretical PS, and may be due to selection effects in the galaxy sample. The observational  $n_i$  PS behaves similarly to the theoretical  $n_i$  PS for the four distances. These results suggest that the differential densities are more sensitive to possible selection effects of the sample than the integral densities. We also define a new quantity similar to the two-point correlation function, named radial correlation, and noted that this quantity changes with the sample size. However, its PS does not changes substantially with the sample size.

---

# Sumário

---

Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Estrutura em Grande Escala do Universo</b>	<b>7</b>
2.1 Observações da Distribuição de Galáxias . . . . .	7
2.2 A Descrição Estatística das Aglomerações Galácticas . . . . .	14
2.2.1 Função de Correlação . . . . .	14
2.2.2 Espectro de Potência da Função de Correlação . . . . .	18
2.2.3 Densidade Condicional . . . . .	20
<b>3 Observáveis Cosmológicos</b>	<b>23</b>
3.1 Fator de Escala . . . . .	23
3.2 Densidade Numérica de Fontes Cosmológicas . . . . .	25
3.3 Contagem Numérica Relativística . . . . .	25
3.4 Solução Numérica . . . . .	26
3.5 Contagem Numérica Diferencial . . . . .	27
3.6 Distâncias Cosmológicas . . . . .	30
<b>4 Conectando Teoria e Observação</b>	<b>37</b>
4.1 Função de Luminosidade Galáctica . . . . .	37
4.2 Função de Seleção . . . . .	40
4.2.1 <i>FORS Deep Field</i> (FDF) . . . . .	41
4.3 Contagem Numérica Observacional . . . . .	46
<b>5 Densidades Numéricas</b>	<b>51</b>
5.1 Densidades Diferenciais . . . . .	51
5.2 Densidades Integrais . . . . .	57
<b>6 Espectro de Potência</b>	<b>63</b>

<i>SUMÁRIO</i>	vii
6.1 Espectro de Potência das Densidades Diferenciais e Integrais . . . . .	63
6.2 Correlação Radial . . . . .	70
<b>7 Conclusões</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>77</b>
<b>A Programas em Python</b>	<b>85</b>
A.1 Função de Seleção . . . . .	86
A.2 Densidades Diferenciais e Integrais . . . . .	91

---

# Lista de Figuras

---

1.1	Ilustração do cone de luz passado e futuro em relação ao observador. . . . .	3
2.1	Levantamento da distribuição de galáxias nos anos da década de 1930. . . . .	8
2.2	Distribuição de galáxias para o catálogo RC3. . . . .	9
2.3	Distribuição de galáxias para o levantamento do CfA. . . . .	10
2.4	Estrutura em grande escala para o levantamento Las Campanas. . . . .	12
2.5	Estrutura em grande escala vista pelo <i>2MASS</i> , em uma projeção de áreas iguais em coordenadas Galácticas. . . . .	12
2.6	Ilustração das definições de $\vec{r}$ e $\delta V$ usadas nos estudos de correlação de galáxias.	15
2.7	Função de correlação de galáxias. . . . .	17
2.8	Função de correlação angular para a amostra do levantamento <i>Canadian Network for Observational Cosmology Field</i> . . . . .	18
2.9	Espectro de potência das flutuações de densidade medido a partir de diferentes técnicas. . . . .	20
2.10	Densidade condicional e densidade média condicional para diferentes amostras.	21
3.1	Ilustração das grandezas relativísticas no cone de luz. . . . .	26
3.2	Evolução da contagem numérica diferencial e da contagem numérica em função do desvio para o vermelho para os modelos cosmológicos de EdS e $\Lambda$ CDM. . .	29
3.3	Ilustrações das definições das distâncias $d_A$ $d_G$ . . . . .	30
3.4	Evolução das quatro distâncias discutidas neste trabalho em função do desvio para o vermelho para os modelos cosmológicos $\Lambda$ CDM e EdS. . . . .	34
4.1	Função de luminosidade para diferentes tipos espectroscópicos e morfológicos.	39
4.2	Evolução das funções de seleção com o desvio para o vermelho para os dados de G04 e G06. . . . .	46
4.3	Evolução da contagem numérica diferencial de galáxias com o desvio para o vermelho para os dados de G04 e G06. . . . .	48
5.1	Evolução das densidades diferenciais teóricas em função do desvio para o vermelho, para as quatro distâncias, considerando os modelos cosmológicos $\Lambda$ CDM e EdS. . . . .	52

5.2	Evolução das densidades diferenciais das bandas UV, ópticas e vermelhas em função do desvio para o vermelho para as quatro distâncias. . . . .	53
5.3	Evolução das densidades integrais teóricas em função do desvio para o vermelho para as quatro distâncias nos modelos cosmológicos $\Lambda$ CDM e EdS. . . . .	58
5.4	Evolução das densidades integrais das bandas UV, ópticas e vermelhas em função do desvio para o vermelho para as quatro distâncias. . . . .	59
6.1	Espectro de potência das densidades diferenciais teóricas dos modelos cosmológicos $\Lambda$ CDM e EdS com as quatro distâncias cosmológicas discutidas nesse trabalho. . . . .	64
6.2	Espectro de potência das densidades integrais teóricas nos modelos cosmológicos $\Lambda$ CDM e EdS com as quatro distâncias cosmológicas assumidas neste trabalho. . . . .	65
6.3	Espectro de potência das densidades diferenciais observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha para as distâncias $d_L$ e $d_Z$ assumindo o modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	66
6.4	Espectro de potência das densidades diferenciais observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha para as distâncias $d_A$ e $d_G$ assumindo o modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	67
6.5	Espectro de potência das densidades integrais observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha para as distâncias $d_L$ e $d_Z$ assumindo o modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	68
6.6	Espectro de potência das densidades integrais observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha para as distâncias $d_A$ e $d_G$ assumindo o modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	69
6.7	Correlação radial teórica da distância de luminosidade para diferentes tamanhos de amostra em EdS e em $\Lambda$ CDM. . . . .	70
6.8	Espectro de potência da correlação radial teórica da distância de luminosidade em diferentes tamanhos de amostra $R_L$ no modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	71
6.9	Correlação radial das densidades observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância de luminosidade $d_L$ no modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	71
6.10	Correlação radial das densidades observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância por desvio para o vermelho $d_Z$ no modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	72
6.11	Correlação radial das densidades observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância por área galáctica $d_G$ no modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	72
6.12	Espectro de potência da correlação radial observacional nas bandas UV, óptica e vermelha com $d_L$ e assumindo o modelo cosmológico $\Lambda$ CDM. . . . .	73
6.13	Espectro de potência da correlação radial observacional nas bandas UV, óptica e vermelha com $d_Z$ assumindo o modelo cosmológico $\Lambda$ CDM. . . . .	73
6.14	Espectro de potência da correlação radial observacional nas bandas UV, óptica e vermelha com $d_G$ assumindo o modelos cosmológico $\Lambda$ CDM. . . . .	74

---

# Lista de Tabelas

---

3.1	Distâncias cosmológicas para os modelos cosmológicos $\Lambda$ CDM e EdS. . . . .	33
4.1	Parâmetros livres de evolução da função de Schechter e os valores do limite inferior de magnitude absoluta para os dados de G04. . . . .	41
4.2	Parâmetros livres de evolução da função de Schechter e os valores do limite inferior de magnitude absoluta para os dados de G06. . . . .	42
4.3	Função de seleção para os dados de Gabasch et al. (2004). . . . .	43
4.4	Função de seleção para os dados de Gabasch et al. (2006). . . . .	44
4.5	Contagem numérica diferencial teórica e observacional em função do desvio para o vermelho para as bandas UV, ópticas e vermelhas. . . . .	48
5.1	Densidades diferenciais para as quatro diferentes distâncias, baseadas nos dados de G04. . . . .	54
5.2	Densidades diferenciais para as quatro diferentes distâncias, baseadas nos dados de G06. . . . .	55
5.3	Densidades integrais para as quatro diferentes distâncias, baseadas nos dados de G04. . . . .	60
5.4	Densidades integrais para as quatro diferentes distâncias, baseadas nos dados de G06. . . . .	61

# Capítulo 1

---

## Introdução

---

A cosmologia moderna é uma área da astronomia que estuda a origem, estrutura e evolução do universo. Observacionalmente, requer dados dos objetos mais distantes enquanto teoricamente demanda o máximo de extrapolações das leis básicas da física. Apesar dessas limitações, a cosmologia vem emergindo como um importante ramo da ciência onde previsões podem ser feitas e testadas.

Nessa área um tema de grande importância é o estudo da distribuição de matéria, mais conhecida como estrutura em grande escala. Ao se combinar as observações das distribuições das galáxias e dos aglomerados de galáxias com suas observações espectroscópicas e suas propriedades morfológicas, os astrofísicos investigam como esses sistemas são formados e evoluem, além de ajudar a elucidar a natureza da estrutura no universo. O estudo da distribuição de galáxias e aglomerados em diferentes faixas de distâncias e épocas tem, conseqüentemente, sido uma área de muita atividade nos últimos 30 anos. Apesar de ainda ter muito o que se saber sobre a distribuição de matéria no universo, um progresso substancial tem sido feito devido aos avanços na instrumentação astronômica e na tecnologia de detecção, nos softwares de reduções de dados e de simulação numérica e nos processadores de alta-velocidade.

O primeiro estudo sistemático da estrutura em grande escala foi feito por Hubble (1926), que usou uma amostra de 400 galáxias com magnitudes conhecidas. Pensava-se que tal amostra era completa até a magnitude 12.5. Ele encontrou que a sua contagem ajustava a relação

$$\log_{10} N(< m) = 0.6m + \text{const}$$

onde  $N$  é o número de objetos e concluiu que “a concordância entre o  $\log_{10} N$  observado e computado em uma faixa maior do que 8 mag é consistente com a suposição de luminosidade e distribuição uniforme ou, mais genericamente, indica que a função de densidade é independente da distância” (Hubble 1926). Ele então estudou os resíduos no seu gráfico e concluiu que eles talvez fossem devidos a “... aglomeração de nebulosas na vizinhança do sistema galáctico. A aglomeração em Virgem sozinha conta por uma parte considerável.”

Posteriormente, foram gerados os primeiros mapas bidimensionais da distribuição de galáxias em grande escala que reproduziam a distribuição galáctica no plano do céu. Esses

mapas já mostravam que a distribuição de galáxias é altamente não-aleatória.

Nas últimas décadas, os levantamentos de galáxias têm fornecido imagens reveladoras da estrutura em grande escala do universo, mostrando a existência de enormes vazios, filamentos e aglomerações de matéria luminosa. Essas observações combinadas com os resultados das não-homogeneidades da radiação cósmica de fundo, levaram alguns cosmólogos a questionar a validade do modelo cosmológico padrão, especialmente a suposição de um universo homogêneo. Assim, verificou-se a importância de testar observacionalmente a suposição de homogeneidade e determinar os limites de escalas do modelo. Isso poderia elucidar melhor a evolução da estrutura luminosa.

Com o advento dos levantamentos de galáxias fez-se necessário a criação e implementação de métodos para a descrição estatística desses resultados. A suposição mais simples para estas estatísticas é que as galáxias estariam distribuídas aleatoriamente. Nesse caso os aglomerados e os vazios seriam flutuações aleatórias e, em média, as galáxias não teriam uma probabilidade maior de serem encontradas próximas de outras galáxias do que em qualquer outro lugar. Entretanto, este não é o caso. Em geral, caracteriza-se os desvios da distribuição galáctica de uma certa distribuição. A abordagem estatística usualmente usada é a função de correlação. A princípio, usava-se apenas a segunda ordem desta função, a função de correlação de dois pontos, e a projeção dessa função no espaço, a função de correlação angular, entretanto atualmente também é muito usada a função de correlação de três pontos.

A função de correlação para descrever a estrutura cósmica foi introduzida por Rubin (1954) e Limber (1954) aos dados do levantamento Lick, sem o uso de computadores. Totsuji & Kihara (1969) usaram as contagem em células do Lick publicadas por Shane & Wirtanen (1967), enquanto Peebles (1974b) e colaboradores analisaram o *Reference Catalog of Bright Galaxies*, o catálogo Zwicky, o catálogo Lick e mais tarde o *Very Deep Jagellonian Field* (Peebles & Hauser 1974; Peebles 1975; Peebles & Groth 1975). Todos esses trabalhos foram desenvolvidos para a distribuição projetada de galáxias, pois pouca ou nenhuma informação sobre o desvio para o vermelho estava então disponível. A descoberta central era que a função de correlação de dois pontos, a qual descreve os desvios da distribuição galáctica da homogeneidade, escala como uma lei de potência simples em uma substancial faixa de distância.

Relacionando a função de correlação pela transformada de Fourier, tem-se o espectro de potência (EP). A informação do EP é complementar à função de correlação. Vários autores trataram desse tipo de análise (Sylos Labini et al. 1998; Martínez & Saar 2002; Tegmark et al. 2004, Gabrielli et al. 2004; Jones et al. 2004; Baryshev & Teerikorpi 2005; Tegmark et al. 2006). Em geral, o comportamento do EP é uma lei de potência.

Em 1987 L. Pietronero criticou o uso da função de correlação na abordagem de Peebles (1980), para o testar a homogeneidade, uma vez que esta assume por definição que a homogeneidade será alcançada em uma certa escala (Pietronero 1987). Posteriormente, Pietronero desenvolveu uma nova ferramenta estatística e a usou para analisar o catálogo *CfA* (Coleman, Pietronero & Saunders 1988). A ferramenta estatística, chamada de *densidade condicional média* por Pietronero, quantifica a distribuição de galáxias conforme uma lei de potência em função da escala.



Ribeiro (2001) propôs que a não-homogeneidade observada na distribuição de galáxias poderia ser um efeito puramente relativístico. O argumento principal se encontra na distinção entre homogeneidade espacial e homogeneidade observacional. Segundo o autor, a origem do debate está na confusão entre esses dois conceitos. O princípio cosmológico trata de uma homogeneidade espacial: a distribuição de matéria-energia do universo deve ser constante em cada hipersuperfície de tempo constante. Entretanto, as observações galácticas são feitas no cone de luz passado do observador. Portanto, uma não-homogeneidade observacional não acarreta uma não-homogeneidade espacial e vice-versa, pois são definidas em substratos diferentes da variedade. Essa diferença pode ser visualizada na figura 1.1. Rangel Lemos & Ribeiro (2008), utilizando uma inversão de raciocínio, mostraram que, em alguns casos uma homogeneidade observacional implicaria em uma não-homogeneidade espacial.

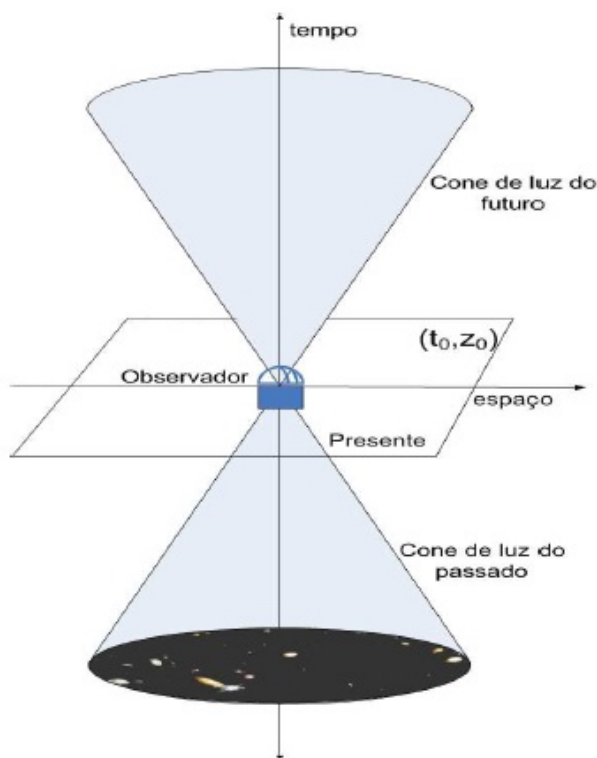


Figura 1.1: O observador situado no vértice do cone recebe a luz emitida por galáxias que situam-se no cone de luz passado. Em outras palavras, se observador estiver localizado em  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  todo objeto observável estará situado dentro do cone de luz passado. De modo semelhante, a luz emitida no presente por estes objetos formará o cone de luz futuro, que não será visto pelo observador.

Outra metodologia estatística que pode ser usada para o estudo da distribuição de galáxias é através das densidades radiais. Em Ribeiro (2005, doravante R05) foi definida uma grandeza chamada densidade diferencial seguindo a contribuição de Wertz (1970, 1971) e a sua função integrada no volume, a densidade integral. A definição da densidade diferencial é similar à densidade condicional, a diferença é que a primeira é radial e a segunda é estimada para todos os pontos em relação a todos. R05 também discutiu a dependência dessas densidades radiais em relação a quatro diferentes definições de distâncias cosmológicas, a distância por área  $d_A$ , a distância por área galáctica  $d_G$ , a distância de

luminosidade  $d_L$  e a distância por desvio para o vermelho  $d_Z$ . Posteriormente, Albani et al. (2007; doravante A07) mostraram que estas quantidades estatísticas radiais podem ser construídas a partir da função de luminosidade (FL).

Contudo uma investigação mais detalhada sobre a utilização da FL para obtenção de outras grandezas foi previamente desenvolvida por Ribeiro & Stoeger (2003, doravante RS03), onde foi estudado a conexão entre a FL, uma quantidade obtida a partir das observações de levantamentos de galáxias, e os resultados acerca da contagem numérica de galáxias da Cosmologia Relativística obtidos em Ellis (1971). Esta conexão consistia em obter grandezas físicas que pudessem ser comparadas com o que o modelo cosmológico suposto no cálculo da FL previa segundo os resultados de Ellis (1971). A análise era completamente relativística, mas podia ser feita para qualquer modelo cosmológico. Assim, os resultados obtidos podem ser aplicados para qualquer modelo cosmológico adotado no cálculo da FL de um catálogo selecionado. Neste mesmo trabalho, a abordagem foi aplicada ao levantamento *CNOC2* (Lin et al. 1999).

Em A07 a abordagem de RS03 foi mais desenvolvida de modo a remover o modelo cosmológico dos dados da FL, resultando em uma contagem numérica puramente observacional. Com esta técnica foi refeita a análise dos dados do *CNOC2* e estimadas as densidades introduzidas em R05. Entretanto, a análise desenvolvida em RS03 e A07 era restrita a FL obtida por Lin et al. (1999) cujo modelo cosmológico considerado era Einstein-de Sitter.

Iribarrem et al. (2011, doravante I11) generalizou as equações utilizadas em RS03 e A07 para aplicá-las às FLs que supunham as cosmologias de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e utilizou esse tratamento para conduzir análises similares a RS03 e A07 usando os dados de Gabasch et al. (2004, 2006) para as observações do *Fors Deep Field Redshift Survey*.

No presente trabalho são usadas as equações propostas por I11 para obter a contagem numérica de galáxias e, conseqüentemente, as densidades radiais, tanto teóricas para os modelo cosmológicos de Einstein-de Sitter e de  $\Lambda$ CDM, quanto observacionais para os dados de Gabasch et al. (2004, 2006). Os resultados dessas contagens numéricas e densidades estão compilados em I11. A partir dessas densidades diferenciais e integrais pode-se calcular os seus respectivos espectros de potências, os quais nos permitem fazer uma análise alternativa dessas densidades no espaço de Fourier para tentar extrair alguma informação que talvez não esteja tão óbvia na análise das densidades em função das distâncias. Para calcular todas as quantidades, tanto teóricas quanto observacionais, foram desenvolvidos programas na linguagem *Python*.

Os resultados dos EPs observacionais das densidades diferenciais relativas a  $d_A$  são similares aos previstos pela teoria, porém os EPs das densidades referentes as distâncias  $d_L$ ,  $d_G$  e  $d_Z$  apresentam um declínio abrupto, não verificado no respectivo valor teórico, para  $k_L \lesssim 0.0005 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $k_G \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  e  $k_Z \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  respectivamente. Este decréscimo inesperado pode ser devido a efeitos de seleção da amostra. Os EPs observacionais das densidades integrais apresentam um comportamento similar ao esperado pela teoria para as quatro distâncias. Esses resultados indicam que as densidades diferenciais são mais sensíveis do que as integrais a possíveis efeitos de seleção da amostra.

Outra análise introduzida aqui é a construção de uma nova quantidade chamada correlação radial. Esta foi criada seguindo a mesma lógica apresentada por Pietronero (1987) na qual a função de correlação é obtida através de uma relação entre a densidade condicional e a densidade numérica média; transportando esta idéia para as densidades radiais, pode-se definir a correlação radial como uma relação entre as densidades diferenciais e integrais (Ribeiro 1995). A correlação radial varia com o tamanho da amostra, porém o EP dessa quantidade não muda significativamente com o tamanho na amostra.

A dissertação se estrutura da seguinte forma. No capítulo 2 apresenta-se uma breve revisão histórica sobre as observações da distribuição de galáxias, bem como as ferramentas estatísticas utilizadas na sua análise. No capítulo 3 discute-se a teoria desenvolvida em RS03, A07 e I11, na qual são obtidas as grandezas teóricas de interesse para esse trabalho usando o modelo cosmológico de Einstein-de Sitter e  $\Lambda$ CDM. No capítulo 4 é feita uma revisão sobre a função de luminosidade e discute-se a sua implementação na obtenção da contagem numérica observacional de galáxias, grandeza fundamental para a obtenção das densidades. Além disso, apresenta-se os resultados referentes aos catálogos utilizados. No capítulo 5 discute-se as densidades diferenciais e integrais obtidas através da teoria e dos dados observacionais. No capítulo 6 são expostos os resultados dos espectros de potência e as suas respectivas discussões. Por fim, são apresentadas as conclusões do trabalho. No apêndice A estão as rotinas numéricas desenvolvidas na linguagem `Python`.



## Capítulo 2

---

# Estrutura em Grande Escala do Universo

---

Com a nova geração de telescópios e com as melhorias do processo fotométrico, astrônomos tem estudado cada vez mais profundamente e em detalhes a estrutura em grande escala do universo e o seu conteúdo. A seguir será apresentada uma breve revisão sobre a pesquisa observacional referente a distribuição de galáxias e posteriormente serão discutidas as descrições estatísticas para o estudo dos dados provenientes desses levantamentos.

### 2.1 Observações da Distribuição de Galáxias

Os primeiros levantamentos tinham o objetivo de mapear a distribuição projetada das galáxias no plano do céu. Até a metade do século XX, os levantamentos eram limitados espacialmente, ou seja, cobriam apenas uma pequena fração da esfera celeste, ou limitados em fluxo, como, por exemplo, o catálogo Shapley/Ames de galáxias (1932) que revelou o aglomerado de Virgem como característica dominante na distribuição de galáxias brilhantes. Nesse catálogo já estava claro que o aglomerado de Virgem era parte de um extenso super-aglomerado. Contudo, essa noção foi pouco discutida exceto por de Vaucouleurs (1953), cuja explicação era que esta era uma estrutura coerente achatada devido a rotação. A figura 2.1 mostra alguns dos resultados dessa distribuição de galáxias.

Em 1967 Shane & Wirtanen publicaram um catálogo com a contagem de galáxias de uma certa área do hemisfério norte usando placas fotográficas feitas no observatório de Lick (Shane & Wirtanen 1967). Este catálogo foi iniciado em 1948 e publicado parcialmente em 1954 (Shane & Wirtanen 1954). Deste trabalho resultaram os primeiros estudos quantitativos da distribuição de matéria em grande escala, particularmente a tendência de aglomerados de galáxias se juntarem em estruturas maiores. Estes dados foram analisados por Neyman et al. (1953), sendo esta análise estatística o ponto de partida do que ficou posteriormente conhecido na literatura estatística como processos Neyman-Scott. Ironicamente, apesar desses processos terem nascido a partir de dados astronômicos, eles tiveram um papel pequeno na astronomia.

No Simpósio 15 da IAU *International Astronomical Union*, Scott (1962) mencionou que claramente haviam grandes estruturas nessas contagens de galáxias, como Shane e Wirtanen (1954) já haviam notado. Eles argumentavam que as “grandes agregações” ou “nuvens” eram características gerais e não exceções. O levantamento Lick teve, posteriormente, um importante papel na abordagem estatística de Peebles ao problema da aglomeração de galáxias.

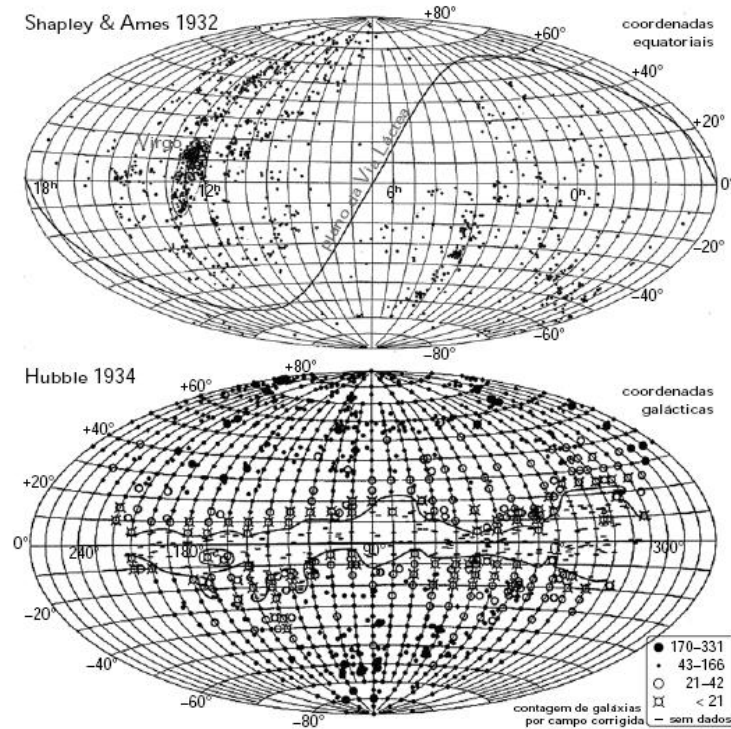


Figura 2.1: Levantamento da distribuição de galáxias nos anos da década de 1930. O diagrama superior é referente ao dados do levantamento de Harlow Shapley e Adelaide Ames com 1200 objetos de magnitude aparente  $m < 13$  e que coloca em evidência o aglomerado de Virgem. (Shapley & Ames 1932). O inferior é para o levantamento de Hubble e coloca em evidência a chamada 'Zona de Exclusão' devido à extinção pela poeira da Via Láctea. (Lima Neto 2011)

Dois dos principais catálogos de aglomerados derivados a partir do *Palomar Observatory Sky Survey* (POSS) foram o de Abell (1958) e o de Zwicky e seus colaboradores (Zwicky et al. 1961-1968). Abell afirmou que em seus dados havia uma ordem significativamente maior de aglomeração, dando, em 1958, uma escala para super-aglomeração de  $24 (H_0/180)^{-1}$  Mpc onde  $H_0$  é a constante de Hubble. Em 1961, Abell publicou uma lista desses super-aglomerados, obteve uma constante de Hubble de  $75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , massas estimadas de  $10^{16} - 10^{17} M_\odot$  e velocidades de dispersão na faixa de  $1000\text{-}3000 \text{ km s}^{-1}$ . Ao mesmo tempo, van den Bergh (1961) observou que os aglomerados mais distantes de Abell apresentavam estrutura no céu em uma escala de cerca de  $20^\circ$  ou cerca de  $300 \text{ Mpc}$ .

Zwicky explicitamente e repetidamente negou a existência de uma estrutura de ordem maior (Zwicky & Rudnick 1963, 1966; Zwicky & Berger 1965; Zwicky & Karpowicz 1966). Alguns de seus aglomerados tinham subestruturas significativas. Herzog, um dos colaboradores de Zwicky no catálogo de aglomerados, encontrou grandes agregações de aglomerados no catálogo e temia dizer publicamente em um colóquio de astronomia da

Caltech. A ele foi oferecido “asilo político” na Universidade da Califórnia-Los Angeles (UCLA) por George Abell (Jones et al. 2004). Karachentsev (1966) também encontrou grandes aglomerações no catálogo de Zwicky.

O *CfA2* (de Lapparent, Geller & Huchra 1986) foi o segundo levantamento do CfA (*Center for Astrophysics*) e consistiu no mapeamento da esfera celeste em duas fatias. O *CfA2* mostrou pela primeira vez a existência de grandes estruturas em três dimensões como a Grande Muralha e o filamento de galáxias na região de Perseu-Peixes. Antes desse, outros levantamentos menores, tais como o de Giovanelli & Haynes (1985) da região Perseus-Peixes e o de Chincarini et al. (1983) de Coma-A1367 revelaram ricas estruturas na distribuição de galáxias, com vazios e aglomerações. Porém como eram restritos a um volume em volta de um grande aglomerado de galáxias, não podiam ser considerados como representativos de todo o universo. A primeira vista, esta crítica pode ser aplicada ao CfA, pois a fatia de de Lapparente era centrada no aglomerado de Coma. Todavia, a largura desta (cerca de  $120^\circ$  no céu) tinha um volume muito maior e era bem profunda para o tempo em que foi desenvolvido.

O trabalho para melhorar e estender os levantamentos provenientes do CfA continuou. O *Century Survey* (Geller et al. 1997) cobria  $1^\circ$  da região central da faixa do *CfA2*, porém era muito mais profundo chegando a magnitude aparente na banda vermelha  $R = 16.1$ . Outro catálogo foi o *Updated Zwicky Catalog* (Falco et al. 1999), o qual incluiu medidas uniformes de quase todas (cerca de 19000) galáxias do catálogo Zwicky (com a magnitude limite de  $m \approx 15.5$ ) no céu do hemisfério norte. Os catálogos CfA são públicos e podem ser obtidos na página do Centro de Dados do Observatório Astronômico Smithsonian (<http://tcd-www.harvard.edu>).

No catálogo RC3 (*Third Reference Catalogue of Bright Galaxies*; de Vaucouleurs et al. 1991), com magnitude  $m_B < 15.5$  e desvio para o vermelho  $z < 0.05$ , as galáxias são representativas de um pequeno volume do Universo próximo, apesar dos limites intrínsecos do catálogo. A figura 2.2 ilustra que a distribuição de objetos do RC3 e nota-se que não é uniforme, apresentando aglomerados, super-aglomerados e vazios.

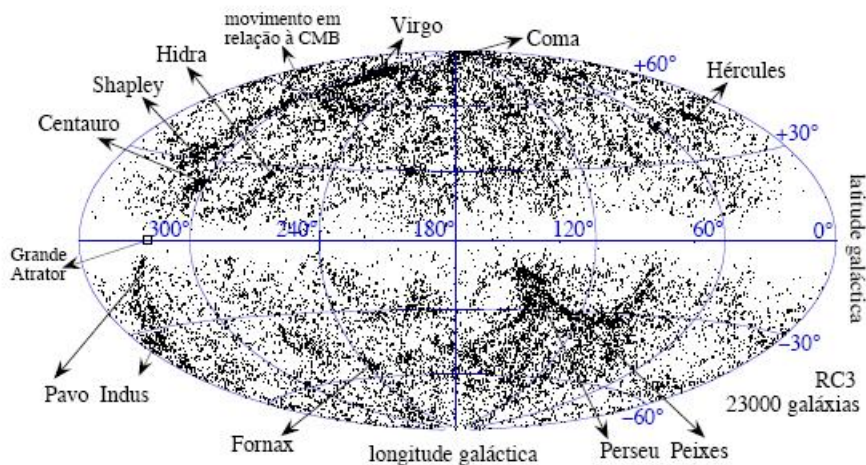


Figura 2.2: Distribuição das galáxias mais brilhantes que  $m_B = 15.5$  em toda a esfera celeste (catálogo RC3; de Vaucouleurs et al. 1991). É interessante notar a “zona de exclusão” devida ao obscurecimento causado pela poeira da Via Láctea no plano equatorial do gráfico.



A presença de estruturas é visível sobretudo nas galáxias mais brilhantes, ou seja, mais próximas, porém quando examinamos um volume maior do Universo a distribuição torna-se mais homogênea. Uma análise quantitativa disto foi feita em Maddox et al. (1990) para o levantamento *APM* (*Automatic Plate Measuring*) e revelou que havia mais estruturas que o previsto pela teoria do modelo cosmológico padrão.

O *Stromlo-APM redshift survey* (Loveday et al. 1996) foi um levantamento de 1800 galáxias selecionadas opticamente e mais brilhantes do que a magnitude limite aparente  $B \approx 17$  retiradas do levantamento *APM* do céu do hemisfério sul. Como o levantamento *APM* (Maddox et al. 1990), o *Stromlo-APM* foi uma importante fonte de dados e gerou importantes resultados da função de correlação no espaço real e do desvio para o vermelho, do espectro de potência, das distorções dos desvios para o vermelho, dos parâmetros cosmológicos, dos vieses observacionais, entre outros.

O levantamento *APM* também foi usado para gerar um catálogo de aglomerados de galáxias (Dalton et al. 1997), o qual propiciou importantes dados sobre a distribuição de aglomerados, além de reassegurar a confiança no catálogo de aglomerados de Abell.

A partir dos dados do Telescópio Durham/UK Schmidt foi desenvolvido um levantamento (Radcliffe et al. 1998) contendo a medida de desvios para o vermelho de 2500 galáxias ao redor do pólo sul Galáctico. A profundidade do levantamento era similar ao do levantamento *Stromlo-APM*.

O *Southern Sky Redshift Survey* (*SSRS*; da Costa et al. 1988, 1991) tinha o objetivo de completar o levantamento original do *CfA*, mapeando as galáxias no céu do hemisfério sul e incluiu cerca de 2000 desvios para o vermelho. A continuação desse levantamento, o *SSRS* Estendido (da Costa et al. 1998) tem cerca de 5400 desvios para o vermelho e espelha o segundo levantamento *CfA* para o céu do sul. Estes catálogos foram usados principalmente para comparação com os resultados dos levantamentos *CfA*, e estão disponíveis na base de dados Vizier (<http://vizier.ustrasbg.fr>). A figura 2.3 compara a distribuição de galáxias para o *CfA* no hemisfério Norte com a do *SSRS* no Sul.

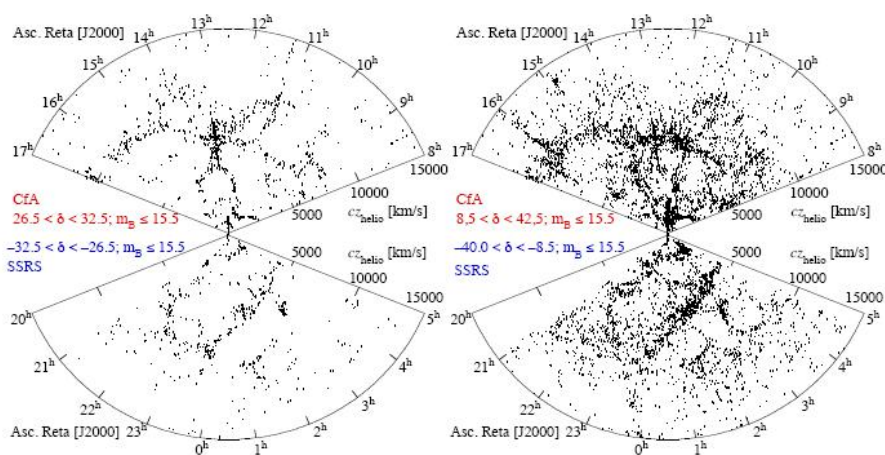


Figura 2.3: Distribuição de galáxias com  $m_B \leq 15.5$ . **Esquerda:** fatia de declinação de  $26^\circ.5 < |\delta| < 32^\circ.5$  para *CfA* no Norte; **Direita:** a fatia é maior,  $8^\circ.5 < |\delta| < 42^\circ.5$  ( $-40^\circ$  no Sul) para *SSRS* (da Costa et al. 1988) no Sul. No norte, a estrutura central é o aglomerado de Coma. A estrutura perpendicular a Coma é chamada Grande Muralha. No sul, vemos um vazio ( $\sim 23^h$  e 5000 km/s) e a Grande Muralha Sul.

O *Optical Redshift Survey* (Santiago et al. 1995) tinha como objetivo realizar uma



cobertura completa do céu, com exceção do equador galáctico e mediu cerca de 1300 novos desvios para o vermelho em um total de 8500 desvios para o vermelho. Este levantamento foi amplamente explorado para descrever os campos de densidade próximos, para estimar funções de luminosidade, correções galácticas, velocidades de dispersão, etc. O catálogo pode ser encontrado na página <http://www.astro.princeton.edu/~strauss/ors/>.

O Projeto Fatia do ESO (*European Southern Observatory*; Vettolani et al. 1998) mediu o desvio para o vermelho de 3300 galáxias com magnitude azul até  $b_J = 19.4$  no sistema fotométrico  $B_J, R, I$  (Gullixson et al. 1995). A região do levantamento é uma faixa de  $1^\circ \times 22^\circ$  com  $600h^{-1}$  Mpc de profundidade. Uma das discussões mais interessantes geradas por estes dados foi sobre a natureza fractal das distribuições de galáxias em grande escala, como por exemplo em Guzzo (1997) e Scaramella et al. (1998).

O levantamento de Las Campanas (Shectman et al. 1996) é composto por uma geometria com seis finas faixas paralelas ( $1.5^\circ \times 90^\circ$ ) com profundidade de  $z \approx 0.25$  e mediu o desvio para o vermelho de aproximadamente 24000 galáxias. Este foi o primeiro levantamento profundo com volume suficiente para testar se o conhecimento, até então, do universo próximo era suficiente para descrever as regiões mais distantes. Os testes mais usados foram as funções de luminosidades, que descobriu-se serem dependentes da morfologia e da densidade de galáxias, as funções de correlação de segunda e terceira ordem, o espectro de potência e as propriedades fractais. A partir dos dados de Las Campanas foi gerado um catálogo de grupos de galáxias. Os resultados desse levantamento tornaram-se públicos rapidamente, e centenas de artigos foram publicados baseados neles.

Na figura 2.4 temos o resultado da estrutura em grande escala para uma faixa do céu mais profunda usando os dados do levantamento Las Campanas (Shectman et al., 1996), em um intervalo de magnitude de  $15.0 < R < 17.7$  para uma área de cerca de 1000 graus quadrados. Note que não aparecem estruturas maiores do que o Grande Muralha.

Um dos grandes impecilhos na observação de objetos extragalácticos no visível é a poeira da Galáxia. Porém, isto pode ser minimizado com observações no infravermelho. O *2MASS* (*2 Micron All Sky Survey*) fez um levantamento de toda a esfera celeste com um telescópio no Arizona, EUA, e outro em Cerro Tololo, Chile, em três bandas no infravermelho  $J(1.25\mu)$ ,  $H(1.65\mu)$  e  $K_s(2.17\mu)$  e produziu um catálogo de fontes extensas, a grande maioria galáxias, com mais de  $10^6$  objetos mapeando razoavelmente bem a “zona de exclusão” (Jarrett 2004). Mesmo não observando galáxias tão fracas quanto o *APM*, o *2MASS* tem a vantagem de cobrir toda a esfera celeste e mostrar a estrutura filamentar de galáxias no universo local, conforme a figura 2.5.

Também no infravermelho foram construídos os catálogos *IRAS* (*Infrared Astronomical Satellite*). A história destes catálogos mostra a importância de ter um bom catálogo fotométrico de base antes de começar a medir os desvios para o vermelho. Como a absorção galáctica no infravermelho é muito menor do que nas bandas ópticas, o Catálogo de Fontes Pontuais do *IRAS* (PSC) cobre uniformemente quase todo o céu. Este catálogo foi usado para selecionar galáxias para programas de desvio para o vermelho que eram estendidos para limites de fluxo menores: o levantamento de 2-Jy (unidade de medida de fluxo) de Strauss et al. (1992) com 2658 galáxias, o levantamento de de 1.2-Jy de Fisher

---

\* $h$  é o parâmetro adimensional da constante de Hubble  $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

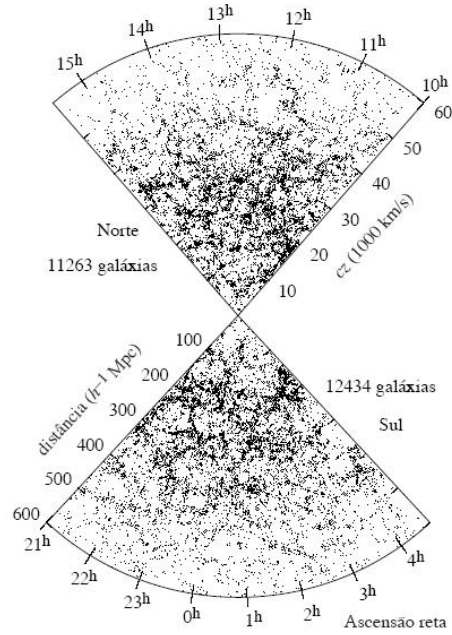


Figura 2.4: Resultado do levantamento Las Campanas. A parte Norte compreende as declinações  $-3^\circ \leq \delta \leq -12^\circ$ ; no Sul os limites são de  $-39^\circ \leq \delta \leq -45^\circ$  (Shectman et al. 1996).

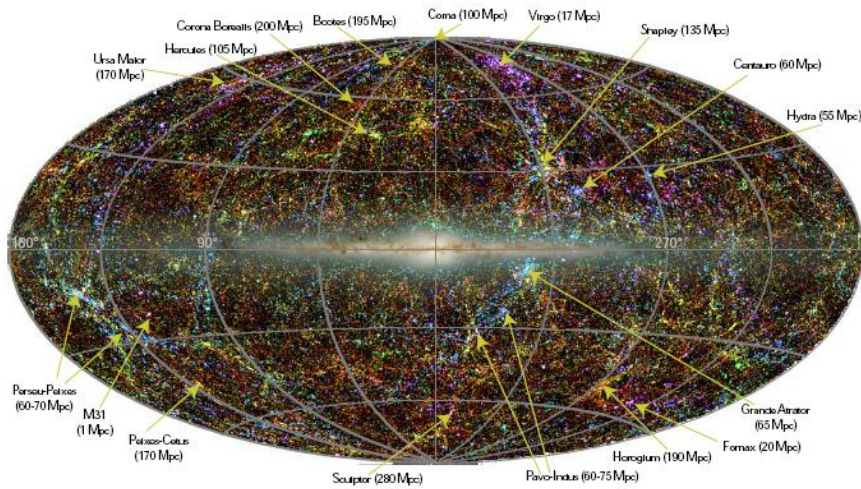


Figura 2.5: Estrutura em grande escala vista pelo 2MASS, em uma projeção de áreas iguais em coordenadas Galácticas. As cores representam diferentes intervalos de desvio para o vermelho. As distâncias de algumas estruturas estão indicadas entre parênteses. Figura original criada por T.Jarrett (IPAC/Caltech); Jarrett et al. (2004).

et al. (1995) com 2663 galáxias e o levantamento de 0.6-Jy amostrados de QDOT (Queen Mary and Westfield College, Durham, Oxford e Toronto) por Lawrence et al. (1999) com 2387 galáxias. Isso culminou no levantamento PSCz com cerca de 15000 por Saunders et al. (2000) o qual inclui praticamente todas galáxias *IRAS* com limite de fluxo de 0.6-Jy.

Os catálogos *IRAS* tem sido usados em estudos de estrutura em grande escala, mas a sua principal vantagem é a cobertura do céu de aproximadamente 84%. Isso permite o uso dos métodos de reconstrução do tipo-Wiener para derivar os verdadeiros campos de densidade e velocidade e para obter uma estimativa independente do parâmetro de bias.

O espectrógrafo multifibra *Two-Degree Field (2dF)* do Telescópio Anglo-Australiano

de 3.9 metros foi capaz de observar até 400 objetos simultaneamente em um campo de observação de dois graus de diâmetro. A amostra consiste em 250000 galáxias localizadas em regiões extensas ao redor do pólo sul e norte galáctico. As galáxias deste levantamento têm magnitudes até 19.45 . A mediana do desvio para o vermelho da amostra é  $z = 0.11$  e os valores estendem-se até  $z \simeq 0.3$ . Em meados de 2001, foram disponibilizados os dados de 100000 galáxias e publicado um relatório da análise de cerca 140000 galáxias (Peacock et al. 2001; Percival et al. 2001). Este levantamento foi completo e permitiu melhores estimativas para um grande número de parâmetro cosmológicos. Não só pode-se determinar as propriedades de aglomeração da amostra como um todo, como pode-se obter subamostras por brilho absoluto ou por tipo morfológico (Percival et al. 2004).

Um levantamento maior do que *2dF* é o *Sloan Digital Sky Survey (SDSS)*, que usa um telescópio de 2.5 metros do Observatório Apache Point, Novo México, equipado com uma câmera de 120 megapíxeis que capta uma imagem de 1.5 grau quadrado do céu e um par de espectrógrafos que mede o espectro de mais de 600 galáxias e quasares em uma única observação. Em oito anos de operação (SDSS-I, 2000-2005; SDSS-II, 2005-2008), foram obtidas imagens profundas, multi-coloridas que cobrem mais de um quarto do céu criando mapas tridimensionais contendo mais de 930000 galáxias e mais de 120000 quasares. Os dados do *SDSS* têm sido disponibilizados à comunidade científica e ao público em geral em incrementos anuais, sendo os últimos dados do SDSS-II disponibilizados em outubro de 2008, *Data Release 7*. Contudo, o *SDSS* continua com o SDSS-III, cujas observações começaram em julho de 2008 e os primeiros dados disponibilizados ao público como *Data Release 8* (<http://www.sdss.org/>). SDSS-III continuará em operação até 2014. Os dados de *SDSS* tem aplicação em grande faixa de disciplinas astronômicas, incluindo as propriedades de galáxias, a evolução dos quasares, a estrutura e população estelar da Via Láctea, as galáxias anãs companheiras da Via Láctea e M31, os asteróides e outros pequenos corpos do Sistema Solar e a Estrutura em Grande Escala e o conteúdo de matéria e energia do Universo.

O levantamento de galáxias *Six-Degree Field (6dFGS)*; Jones et al. 2004) tem observado quase que inteiramente o céu no hemisfério sul e mapeado o universo próximo. O nome 6dF é uma referência ao instrumento que possui um campo de observação com seis graus quadrados de área e usa fibras ópticas e tecnologia de posicionamento robótica. Este instrumento aumenta o poder observacional do Telescópio UK Schmidt do Observatório Anglo-Australiano em mais de 100 vezes em relação a sua capacidade original. O *6dFGS* permitiu a obtenção de 136304 espectros a partir dos quais foram obtidos 110256 novos desvios para o vermelho extragalácticos e um novo catálogo de 125071 galáxias. Todos os desvios para o vermelho e espectros estão armazenados no Banco de Dados Online do *6dFGS* do Observatório Real em Edinburgh (<http://www-wfau.roe.ac.uk/6dFGS/access.html>). Um atlas online do *6dFGS* está disponível através da Universidade da Cidade do Cabo (<http://mensa.ast.uct.ac.za/6df-survey/>).

Levantamentos espectrocópicos profundos como o *Canadian Network for Observational Cosmology* (Yee et al. 2000), *Deep Extragalactic Evolutionary Probe* (DEEP2; Davis et al. 2003) e o *Visible Imaging Multi-Object Spectrograph survey* (Le Fevre et al. 2003) permitiram o estudo da evolução das aglomerações com o desvio para o vermelho e com

várias propriedades morfológicas de galáxias (Carlberg et al. 2000; Coil & time DEEP2 2003). Entretanto, é extremamente difícil medir o desvio para o vermelho de objetos fracos.

Seguindo o trabalho pioneiro de Baum (1962) e Koo (1985), Fernández-Soto et al. (1999) mostraram que é possível estimar desvios para o vermelho confiáveis usando imagens de CCD (*charge-couple device*) em diferentes comprimentos de onda - os chamados desvios para o vermelho fotométricos. Esta técnica é particularmente útil quando mapeia-se o universo muito distante pois galáxias em levantamentos muito profundos não podem ser observadas espectroscopicamente. Nos últimos anos, as técnicas para o cálculo do desvio para o vermelho fotométrico têm melhorado e conseqüentemente a precisão dessas estimativas.

Além dos já mencionados, nos últimos anos, outros levantamentos chegando a profundidades muito grandes propiciam a análise da evolução de aglomeração com o tempo cósmico. Como exemplo pode-se citar o COMBO17 (*Classifying Objects by Medium-Band Observations*), com listas fotométricas em 17 bandas de passagem (Wolf et al. 2004), o *Calar Alto Deep Imaging Survey* (CADIS) usado por Phleps & Meisenheimer (2003) para mostrar como a aglomeração cresce de  $z = 1$  até a época presente e a sua dependência com o tipo morfológico, e o *Great Observatory Origins Deep Survey* (GOODS) descrito por Giavalisco et al. (2004).

## 2.2 A Descrição Estatística das Aglomerações Galácticas

Enquanto o catálogo de Shane & Wirtanen (1967) para o dados do Observatório de Lick estava em progresso, duas diferentes abordagens para a sua descrição estatística foram desenvolvidas: a abordagem Neyman-Scott e a função de correlação.

Jerzy Neyman e Elisabeth Scott (1952) formularam modelos estatísticos *a priori* para descrever a aglomeração de galáxias e mais tarde tentaram ajustar os parâmetros do modelo através da comparação com as observações. Dessa forma, eles modelaram a distribuição de aglomerados de galáxias criando o que hoje é conhecido em estatística espacial como o processo Neyman-Scott.

A segunda abordagem baseada na função de correlação foi prevista primeiro por Vera Rubin (1954) e por Nelson Limber (1954). Eles supuseram que a distribuição de galáxias era de fato um conjunto de pontos de uma distribuição de densidade contínua que mais tarde foi chamado de modelo de Poisson por Peebles (1980, 1993). Eles derivaram a função de auto-correlação a partir da variância da contagem numérica do levantamento do Observatório de Lick. Na próxima subseção, a função de correlação será discutida em maiores detalhes.

### 2.2.1 Função de Correlação

Considerando  $N$  pontos distribuídos aleatoriamente em um volume  $V$ , a probabilidade de encontrar um ponto em um elemento de volume  $dV$  é  $dP = ndV$ , onde  $n = N/V$  é a densidade numérica. A probabilidade de encontrar 2 objetos, cada um em um volume  $dV$

será então  $dP_{12} = n^2 dV_1 dV_2$ , independente da distância entre estes dois volumes. Porém, se houver aglomerações, então esta probabilidade passa a depender da separação entre os dois volumes.

Com isso em mente foi desenvolvido um método para quantificar as aglomerações no Universo, a chamada função de correlação. A função de correlação de dois pontos  $\xi(\vec{r})$  pode ser definida como (Jones et al. 2004),

$$dP_{12} = n^2 [1 + \xi(\vec{r})] dV_1 dV_2, \quad (2.1)$$

onde  $n$  é a densidade numérica média em um dado volume da amostra e  $\vec{r}$  é o vetor distância que separa os dois elementos de volume. Quando assume-se homogeneidade e isotropia,  $\xi(\vec{r})$  depende somente da distância  $r = |\vec{r}|$ . Considerando que há uma galáxia na origem de  $\vec{r}$ , figura 2.6, a probabilidade de encontrar uma galáxia presente em  $dV$  a uma distância  $r$ , derivada a partir da equação (2.1) é dada por

$$dP = n[1 + \xi(r)] dV. \quad (2.2)$$

$\xi(r)$  pode apresentar três casos:  $\xi = 0$  sendo uma distribuição de Poisson,  $\xi > 0$  uma distribuição aglomerada na qual as partículas encontram-se preferencialmente agrupadas e  $\xi < 0$  uma distribuição anti-aglomerada (segregada) onde as partículas estão preferencialmente distantes uma das outras, como na superfície de bolhas ou em uma rede cristalina.

Vale mencionar que em mecânica estatística, a função de correlação normalmente usada é  $g(r) = 1 + \xi(r)$ , chamada de função de distribuição radial (McQuarrie 1999). O número de galáxias, em média, a uma distância entre  $r$  e  $r + dr$  de uma dada galáxia é  $ng(r)4\pi r^2$ .

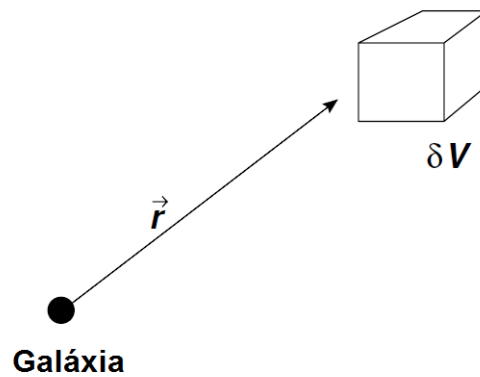


Figura 2.6: Ilustração das definições de  $\vec{r}$  e  $\delta V$  usadas nos estudos de correlação de galáxias. Um elemento de volume próximo a uma galáxia (Duric 2004).

Na prática são utilizados estimadores da função de correlação baseados na contagem de pares de objetos,  $N_{pares}$ , em função da distância, dada por

$$N_{pares} = \sum_{i \neq j} \phi_r(i, j), \quad \text{onde} \quad \phi_i(i, j) = \begin{cases} 1; & r \leq d(i, j) \leq r + \delta r \\ 0; & d(i, j) < r \text{ ou } d(i, j) > r + \delta r \end{cases}, \quad (2.3)$$

onde  $d(i, j)$  é a distância entre os pontos  $i$  e  $j$ . A contagem de pares pode ser feita através da base de dados estudada, como por exemplo, um catálogo de posições de galáxias, ou através de um catálogo de pontos simulados. Como exemplo de estimadores da função de correlação usados na literatura pode-se citar o de Davis & Peebles (1983), o de Hamilton (1993) e o de Landy & Szalay (1993), onde as fórmulas são aplicadas a uma amostra completa de galáxias em um dado volume com  $N$  objetos. Também considera-se um catálogo de Poisson, um processo binomial com  $N_{rd}$  pontos, gerado dentro dos mesmos limites. Para os casos das três citações acima temos,

$$\hat{\xi}_{DP}(r) = \frac{N_{rd} DD(r)}{N DR(r)} - 1, \quad (2.4)$$

$$\hat{\xi}_{HAM}(r) = \frac{DD(r) \cdot RR(r)}{[DR(r)]^2} - 1, \quad (2.5)$$

$$\hat{\xi}_{LS}(r) = 1 + \left(\frac{N_{rd}}{N}\right)^2 \frac{DD(r)}{RR(r)} - 2\frac{N_{rd} DR(r)}{N RR(r)}, \quad (2.6)$$

onde  $DD(r)$  é o número de pares de galáxias com separação dentro do intervalo  $[r - dr/2]$  e  $[r + dr/2]$ ,  $DR(r)$  o número de pares com separação entre uma galáxia e um ponto do catálogo de Poisson e  $RR(r)$  o número de pares com separação no mesmo intervalo no catálogo de Poisson. Em grandes escalas o desempenho dos estimadores de Hamilton e Landy & Szalay parece ser melhor (Pons-Bordería et al. 1999; Kerscher et al. 2000).

Uma grandeza similar pode ser definida para catálogos projetados, isto é, levantamentos que compilam as posições angulares das galáxias na esfera celeste. A função de correlação de dois pontos angular  $w(\theta)$  pode ser definida pela probabilidade condicional de encontrar uma galáxia dentro de um ângulo sólido  $d\Omega$  a uma distância angular  $\theta$  de uma dada galáxia escolhida arbitrariamente,

$$dP = \mathcal{N}[1 + w(\theta)]d\Omega, \quad (2.7)$$

onde  $\mathcal{N}$  é a densidade numérica média de galáxias por unidade de área nos catálogos projetados. Como os primeiros catálogos eram bidimensionais, sem informação de desvio para o vermelho, a medição direta de  $\xi(r)$  não era possível, então calculava-se  $w(\theta)$  e posteriormente inferia-se  $\xi(r)$  pela equação de Limber (Limber 1954; Peebles 1993), que estabelece uma relação entre as funções de correlação angular e espacial,

$$w(\theta) = \int_0^\infty y^4 \phi^2(y) dy \int_0^\infty \xi(\sqrt{x^2 + y^2 \theta^2}) dx, \quad (2.8)$$

onde  $y$  é a distância comóvel e  $\phi(y)$  a função de seleção radial do catálogo, isto é, a função que descreve a densidade numérica de objetos em função da distância radial levando-se em conta os critérios de seleção do catálogo (por exemplo, magnitude limite e função de luminosidade dos objetos). Se  $\xi(r) \propto r^{-\delta}$  então  $w(\theta) \propto \theta^{1-\delta}$ .

Totsuji & Kihara (1969) foram os primeiros a encontrar uma comportamento de lei de potência para a função de correlação espacial a partir dos dados obtidos para o levantamento Lick. Mais tarde, esta evidência do comportamento de lei de potência foi estendida



por Peebles (1974a,b) e demonstrada em Groth & Peebles (1977). Em geral, a forma da lei de potência observada para galáxias é descrita por

$$\xi(r) \propto \left(\frac{r}{r_0}\right)^\delta, \quad \text{com } \delta = -1.8 \text{ e } r_0 \simeq 5h^{-1}\text{Mpc}, \quad (2.9)$$

no intervalo de escalas entre  $\sim 50h^{-1}\text{kpc}$  e  $\sim 10h^{-1}\text{Mpc}$ . O comprimento de correlação  $r_0$  é a escala de distância na qual encontram-se duas vezes mais pares de objetos do que o esperado se a distribuição de objetos for completamente aleatória. Se a distribuição de galáxias fosse completamente aleatória esperaríamos encontrar  $\xi(r) = 0$  em todas as escalas. Todavia, como já mencionado, através das observação dos levantamentos em desvio para o vermelho sabe-se que a distribuição de galáxias é fortemente aglutinada e não aleatória. A figura 2.7 apresenta a função de correlação de galáxias para diferentes levantamentos. Nesta figura pode-se notar que  $\xi(r)$  vai a zero em  $r \sim 40 - 50h^{-1}\text{Mpc}$  e a partir deste ponto, oscila. Para pequenas escalas ( $r < 500h^{-1}\text{kpc}$ ),  $\xi(r)$  é bem descrita por uma lei de potência porém com um valor inferior ao determinado originalmente. O comprimento de correlação é praticamente o mesmo mas o expoente é menos negativo.

A função de correlação depende do tipo morfológico das galáxias conforme mostra a figura 2.8. As galáxias do tipo tardio<sup>†</sup> tendem a se aglomerar menos do que as do tipo anterior<sup>‡</sup>.

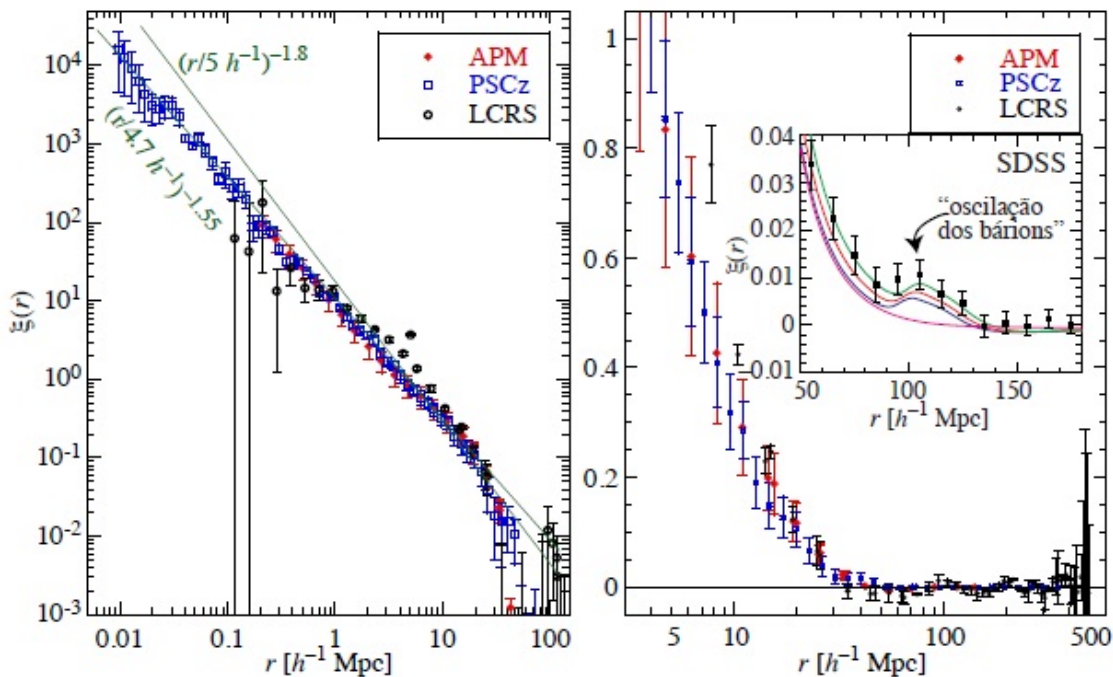


Figura 2.7: Função de correlação de galáxias. **Esquerda:** Para pequenas escalas; **Direita:** para escalas maiores de 5-500 Mpc. Os catálogos utilizados são o APM (Baugh 1996), o PSCz (Hamilton & Tegmark 2002), o Las Campanas (Tucker et al. 1997). No destaque, os dados são de galáxias vermelhas luminosas do SDSS (Eisenstein et al. 2005).

<sup>†</sup>As galáxias espirais (S) e irregulares (I) constituem a classe conhecida como de tipo tardio (*late-type*).

<sup>‡</sup>As galáxias lenticulares (S0) juntamente com as elípticas (E) constituem a classe denominada de tipo anterior (*early-type*).

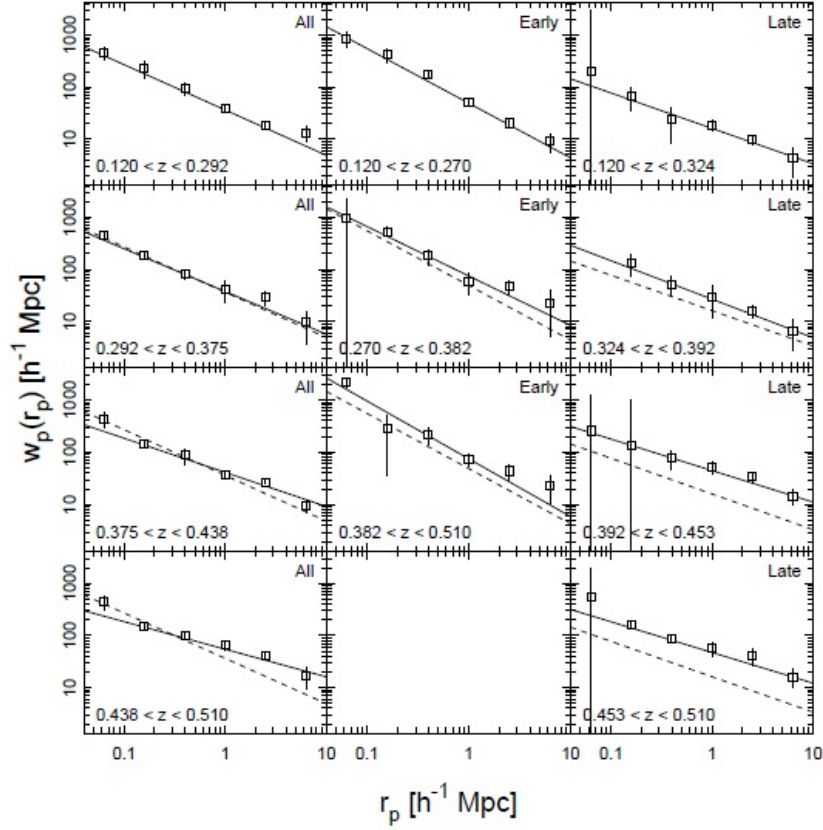


Figura 2.8: Função de correlação angular  $w_p(r_p)$  para diferentes faixas de desvio para o vermelho de galáxias da amostra do levantamento *Canadian Network for Observational Cosmology Field* (Shepherd et al. 2001). A análise é desenvolvida para todas as galáxias (painéis da esquerda), para as do tipo *early* (painéis centrais) e para as do tipo *late* (painéis da direita). A linha sólida em cada painel corresponde ao melhor ajuste aos dados, enquanto a tracejada mostra o melhor ajuste na menor faixa de desvio para o vermelho.

Para aglomerados de galáxias do catálogo de Abell, a função de correlação observada é semelhante a das galáxias,

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1.8} \quad \text{com } r_0 \simeq 20h^{-1}\text{Mpc}. \quad (2.10)$$

Utilizando outras amostras de aglomerados verificou-se que o valor do comprimento de correlação difere para cada catálogo, por exemplo para o *APM*,  $r_0 \approx 14h^{-1}\text{Mpc}$ , enquanto para o *ROSAT*  $r_0 = 21.5^{+3.4}_{-4.4}h^{-1}\text{Mpc}$ . Esta variação do comprimento de correlação pode ser devida a falta de completude dos catálogos.

## 2.2.2 Espectro de Potência da Função de Correlação

A função de correlação e o espectro de potência podem ser conectados através de um par de transformadas de Fourier,

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P_k \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3k, \quad (2.11)$$

$$P_k = \int \xi(r) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3r. \quad (2.12)$$



Assumindo a simetria esférica,  $d^3r = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$  e considerando apenas a parte real de  $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) + i \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})$  com  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos\theta$  pois  $\xi(r)$  é uma função real, e substituindo na equação (2.12) obtém-se

$$P_k = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos(kr \cos\theta) \xi(r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (2.13)$$

$$P_k = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \cos(kr \cos\theta) \xi(r) r^2 \sin\theta dr d\theta. \quad (2.14)$$

Fazendo a seguinte substituição de variáveis  $u = kr \cos\theta$  na relação anterior encontra-se

$$P_k = 2\pi \int_0^\infty \int_{kr}^{-kr} \cos(u) \xi(r) r^2 dr \left( -\frac{du}{kr} \right) = 2\pi \int_0^\infty \frac{2\sin(kr)}{kr} \xi(r) r^2 dr \quad (2.15)$$

$$P_k = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} \xi(r) r^2 dr. \quad (2.16)$$

Considerando as galáxias como um fluido galáctico e este sendo uma composição de ondas de densidade com vários números de onda  $k$ , o espectro de potência (doravante EP) quantifica a intensidade ou potência de cada uma dessas componentes.

Como o EP e a função de correlação estão relacionados apenas pela decomposição de Fourier, então as duas funções devem conter essencialmente a mesma informação e serem equivalentes. Porém como as funções são estimadas através de um número de dados finitos e estão sujeitas a erros sistemáticos, então elas contém informação não somente sobre efeitos físicos reais como também sobre erros desconhecidos. Tais erros podem aparecer de modos diferentes nas duas funções e a extração da informação estatística relevante pode ser obtida mais facilmente por uma ou por outra função. A informação do EP é complementar a função de correlação pois fornece importantes vínculos às propriedades de aglomeração das galáxias. Características que aparecem amplas na função de correlação, são estreitas no espaço de Fourier.

O EP para as escalas das estruturas observadas tem um comportamento de lei de potência do tipo

$$P_k \sim k^n. \quad (2.17)$$

A maioria das análises estatísticas das aglomerações são baseadas na função de correlação e/ou no espectro de potência e ambas revelaram uma dependência em lei de potência para a densidade numérica de galáxias na escala de tamanho e em número de onda, respectivamente, em escalas de 0.1-10 Mpc. Vários autores já trataram desse tipo de análise (Sylos Labini et al. 1998; Martínez & Saar 2002; Gabrielli et al. 2004; Jones et al. 2004; Baryshev & Teerikorpi 2005; Tegmark et al. 2004, 2006).

Análises da distribuição de galáxias para o levantamento de *Las Campanas* revelou que há um pico no EP em escalas próximas de 100 Mpc. Levantamentos com desvio para o vermelho mais altos também detectaram um excesso de aglomeração em escalas da ordem de 130 Mpc. A figura 2.9 mostra o comportamento do EP.

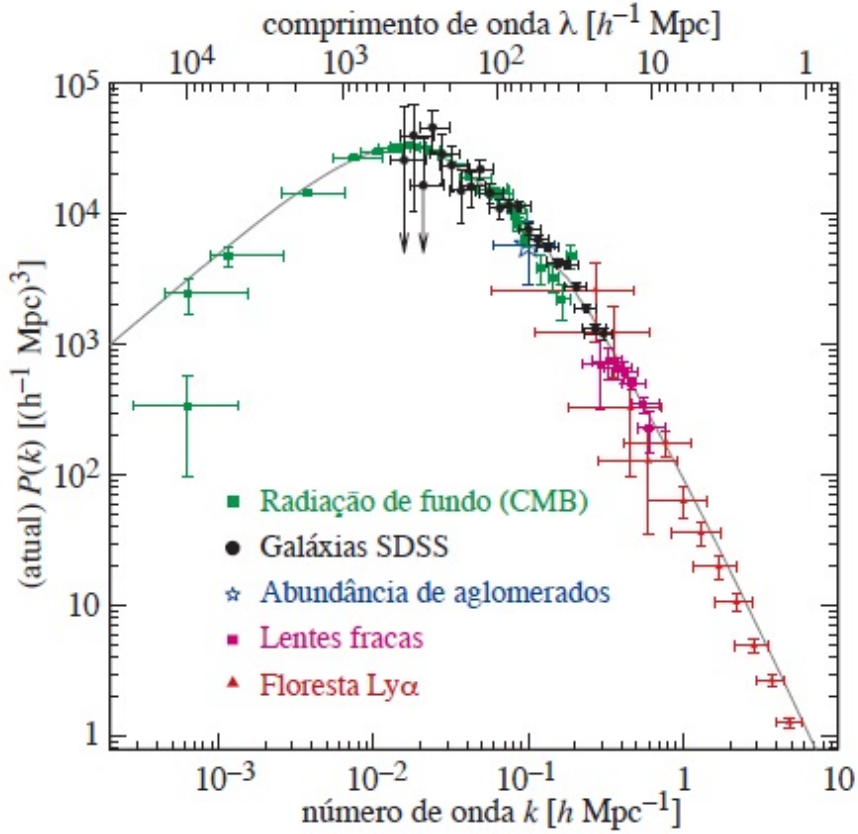


Figura 2.9: Espectro de potência das flutuações de densidade medido a partir de diferentes técnicas. A curva sólida representa um modelo com  $\Omega_\Lambda = 0.72$ ,  $\Omega_M = 0.28$  e  $h = 0.72$  (Tegmark et al. 2004).

### 2.2.3 Densidade Condicional

Em 1987 L. Pietronero argumentou que a utilização da função de correlação na abordagem de Peebles (1980) não era apropriada para a análise da distribuição de galáxias, uma vez que já assume por definição que a homogeneidade será alcançada em uma certa escala, sendo então incapaz de testar a hipótese de homogeneidade local (Pietronero 1987). Além disso, ele também criticou o uso da função de correlação no contexto da distribuição de galáxias alegando ser conceitualmente incorreto, pois esta poderia apenas ser aplicada a sistemas no qual as densidades médias são bem definidas. O problema é que se o sistema não é homogêneo dentro do tamanho da menor amostra, a densidade média não pode ser definida como uma quantidade intrínseca na medida em que varia de amostra para amostra. Como  $\xi(r)$  descreve as flutuações com respeito a densidade média, se esta varia de amostra para amostra com o seu tamanho então cria-se uma ambiguidade em  $\xi(r)$  pois o seu valor de referência muda. Assim, para investigar a distribuição de galáxias sem encontrar esses problemas, Pietronero (1987; ver também Coleman & Pietronero 1992) apresentou uma nova ferramenta estatística chamada de densidade condicional  $\Gamma$ , definida como,

$$\Gamma(r) = \frac{1}{S(r)} \frac{dN(r)}{dr}, \quad (2.18)$$

onde  $S(r) = 4\pi r^2$  é a casca esférica de raio  $r$  e  $N(r)$  o número de galáxias dentro de um raio  $r$ . Também pode-se definir a densidade média condicional (Pietronero 1987; Coleman & Pietronero 1992)

$$\Gamma^*(r) = \frac{1}{V} \int_V \Gamma(r) dV, \quad (2.19)$$

onde  $V = (4/3)\pi r^3$ . Pode-se relacionar  $\Gamma(r)$  com  $\xi(r)$  através da relação,

$$\xi(r) = \frac{\Gamma(r)}{\langle n \rangle} - 1, \quad (2.20)$$

no qual  $\langle n \rangle$  é a densidade média.

Este método tem sido aplicado com sucesso para catálogos 3D de galáxias, como por exemplo Coleman & Pietronero (1992), Sylos Labini, Montuori & Pietronero (1998), Gabrielli et al. (2004). A análise usando a densidade condicional tem a vantagem de fornecer uma estimativa sem distorções da lei de potência de correlação verdadeira e da dimensão fractal verdadeira. Ainda pode ser usada para encontrar um valor sem distorção da escala de homogeneidade de uma amostra de galáxias. A figura 2.10 ilustra o comportamento da densidade condicional calculada para diferentes amostras baseadas no levantamento 2dF.

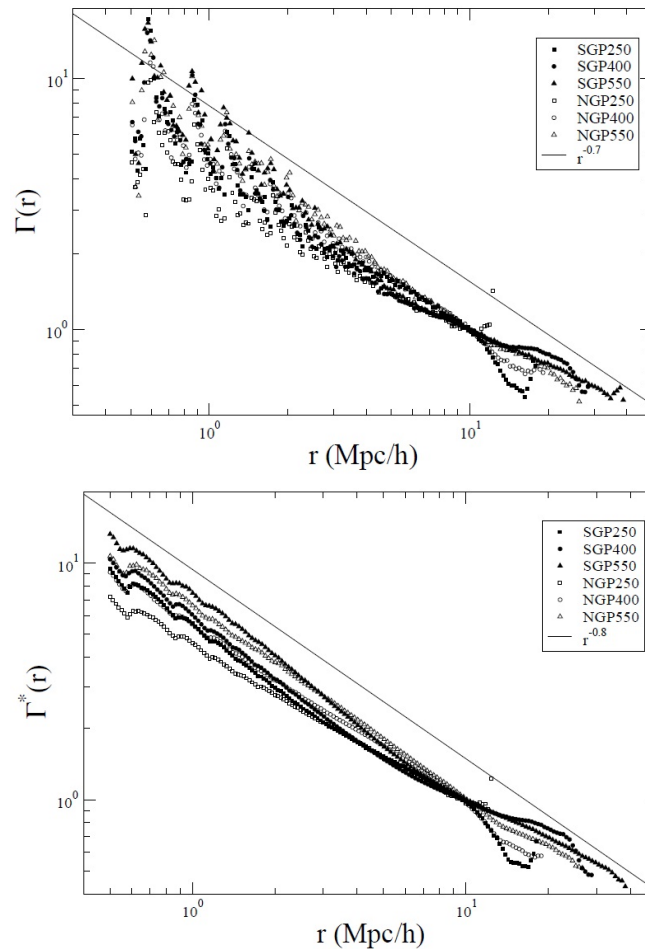


Figura 2.10: Superior: Densidade condicional  $\Gamma$  para diferentes amostras do levantamento 2dF. Inferior: Densidade média condicional  $\Gamma^*$  para diferentes amostras do levantamento 2dF. (Vasilyev et al. 2006).



## Capítulo 3

---

# Observáveis Cosmológicos

---

Nesse capítulo são apresentadas as grandezas teóricas relevantes para o presente trabalho e as equações usadas para calculá-las em cosmologias derivadas da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Primeiro serão obtidas as equações que descrevem as quantidades teóricas básicas para essa classe de modelos cosmológicos. Em seguida, a partir das grandezas apresentadas, é estabelecido o problema numérico. Com as soluções numéricas são escritas as equações para as demais grandezas que serão aplicadas no cálculo das densidades diferenciais e integrais, as quais são as quantidades fundamentais desse trabalho e serão discutidos no capítulo 5.

### 3.1 Fator de Escala

A métrica de FLRW pode ser escrita como,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.1)$$

onde  $a(t)$  é uma função chamada de *fator de escala cósmico* que depende do tempo cósmico  $t$ ,  $k$  é o parâmetro de curvatura ( $k = +1, 0, -1$ ),  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $r, \theta, \phi$  são as coordenadas esféricas. Combinando o elemento de linha acima com o postulado de Weyl, no qual considera-se um tensor energia-momento de fluido perfeito, obtém-se a solução das equações de campo de Einstein com constante cosmológica  $\Lambda$  dada por,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m a(t)^2 + \frac{\Lambda}{3} a(t)^2 - kc^2, \quad (3.2)$$

ou

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho_m}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (3.3)$$

onde  $\rho_m$  é a densidade de matéria e  $G$  é a constante de gravitação universal. Também pode-se definir a função de Hubble  $H(t)$  em termos do fator de escala,

$$H(t) \equiv \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt} \quad \Rightarrow \quad H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad (3.4)$$

onde  $t_0$  é definido como o tempo presente e  $H_0$  é a chamada constante de Hubble. Do-  
 ravante o índice zero será usado para indicar as quantidades no tempo presente. Na  
 literatura, em geral  $H_0$  é escrito como,

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \quad (3.5)$$

onde  $h$  é um parâmetro adimensional que reflete a incerteza associada a medição de  $H_0$ .  
 A partir da definição de  $H(t)$  pode-se reescrever a equação (3.3) como,

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G\rho_m}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (3.6)$$

Essa expressão é chamada de equação de Friedmann.

Além da densidade de matéria, outras densidades podem ser definidas, seja em termos  
 da constante cosmológica,

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (3.7)$$

que para o tempo presente torna-se,

$$\rho_{\Lambda,0} \equiv \frac{\Lambda_0}{8\pi G} \quad (3.8)$$

e é conhecida como densidade de energia cosmológica, seja em termos da densidade crítica  
 relacionada a um universo espacialmente plano ( $k = 0$ ) dada por,

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (3.9)$$

que para o tempo presente escreve-se como,

$$\rho_{c,0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (3.10)$$

Relativo à densidade crítica, pode-se definir os chamados parâmetros de densidade pela  
 seguinte relação,

$$\Omega_0 \equiv \sum_i \Omega_{i,0} = \sum_i \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{c,0}} \quad (3.11)$$

onde  $i$  especifica as constituintes do universo. Considerando-se apenas as densidades de  
 matéria e de energia cosmológica, ou seja,  $i = m, \Lambda$ , obtém-se

$$\Omega_0 \equiv \Omega_{m_0} + \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\rho_{m_0}}{\rho_{c,0}} + \frac{\rho_{\Lambda_0}}{\rho_{c,0}}. \quad (3.12)$$

Reescrevendo a equação (3.6) no tempo presente e considerando a definição (3.12), tem-se

$$kc^2 = H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1). \quad (3.13)$$

Aplicando a lei de conservação de energia na era dominada por matéria e pressão zero,  
 chega-se a relação,

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \Omega_{m_0} \frac{a_0^3 H_0^2}{a^3 H^2}. \quad (3.14)$$

Todas as expressões anteriores permitem reescrever a equação (3.6) como,

$$\frac{da(t)}{dt} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m_0} a_0^3}{a} + \Omega_{\Lambda_0} a^2 - (\Omega_0 - 1) a_0^2}. \quad (3.15)$$

## 3.2 Densidade Numérica de Fontes Cosmológicas

Pode-se definir uma densidade numérica de fontes  $n$  em volume próprio a partir da densidade de matéria  $\rho_m$  como

$$n = \frac{\rho_m}{\mathcal{M}_g}, \quad (3.16)$$

onde  $\mathcal{M}_g$  é a massa média para galáxias em repouso. Substituindo as equações (3.14) e (3.9) na relação anterior obtém-se,

$$n = \frac{\rho_c \Omega_m}{\mathcal{M}_g} = \left( \frac{3H_0^2 \Omega_{m0} a_0^3}{8\pi G \mathcal{M}_g} \right) \frac{1}{a^3}. \quad (3.17)$$

Segundo Elmegreen (1998) e Sparke & Gallagher (2000), galáxias de diferentes tipos morfológicos podem ter massas que variam de  $10^9$  a  $10^{12} \mathcal{M}_\odot$ , implicando em uma evolução com o desvio para o vermelho das proporções dos diferentes tipos morfológicos das galáxias. Assim pode-se escrever a seguinte expressão,

$$\mathcal{M}_g(z) = \sum_{\nu} P_{\nu}(z) \mathcal{M}_{\nu}(z), \quad (3.18)$$

onde  $P_{\nu}(z)$  é a proporção de galáxias do tipo morfológico  $\nu$  em relação ao total em dada época de desvio para o vermelho  $z$  e  $\mathcal{M}_{\nu}(z)$  a massa típica de repouso de galáxias daquele tipo. Contudo, nesse trabalho supõe-se *a priori* que a massa média de uma galáxia não varia com o desvio para o vermelho, isto é, os processos astrofísicos que influenciam a estimativa da massa de uma galáxia não são estatisticamente relevantes na escala cosmológica considerada neste trabalho ( $0.45 < z < 5.0$ ). Baseado nos dados de Sparke & Gallagher (2000) para a massa média das galáxias adota-se o valor  $\mathcal{M}_g \approx 10^{11} \mathcal{M}_\odot$ .

## 3.3 Contagem Numérica Relativística

Em 1971 G. F. R. Ellis derivou uma expressão geral independente de modelo cosmológico para a contagem numérica de fontes cosmológicas  $dN$  considerando efeitos relativísticos (Ellis 1971),

$$dN = (d_A)^2 d\omega_0 [n(-k^a u_a)]_P dy, \quad (3.19)$$

onde  $n$  é a densidade numérica de fontes cosmológicas por unidade de volume próprio subentendida em um ângulo sólido  $d\omega_0$  no referencial comóvel do observador,  $u^a$  a 4-velocidade do observador,  $k^a$  o vetor tangente da geodésica nula,  $y$  um parâmetro afim da geodésica nula e  $d_A$  a distância por área. A figura 3.1 ilustra a relação das observáveis cosmológicas apresentadas acima. Ainda pode-se obter a expressão acima em relação ao desvio para o vermelho (Ribeiro & Stoeger 2003),

$$dN = (d_A)^2 d\omega_0 n(1+z) dy. \quad (3.20)$$

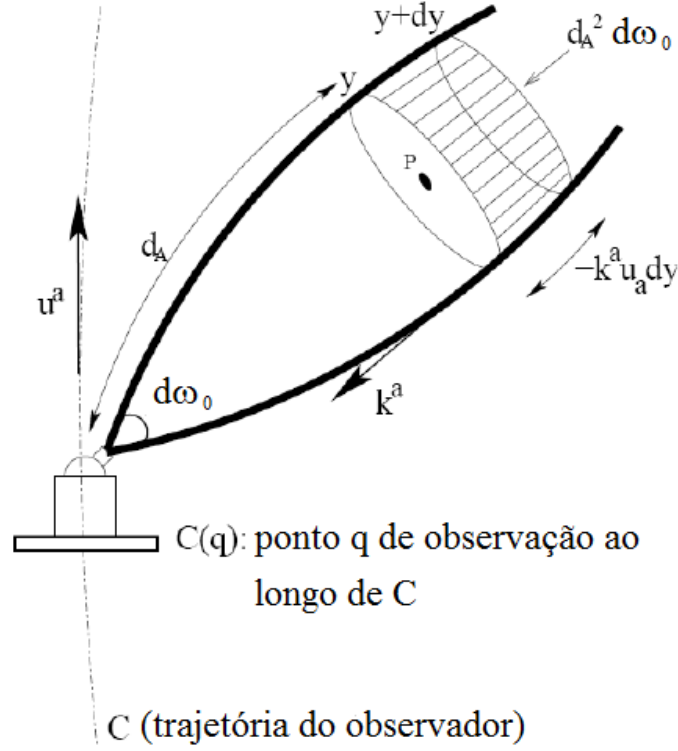


Figura 3.1: Ilustração das grandezas relativísticas no cone de luz:  $u^a$  é a 4-velocidade do observador no ponto  $q$ , tangente a sua trajetória  $C$ ;  $k^a$  é o vetor tangente da geodésica nula;  $dy$  é um deslocamento no parâmetro afim da geodésica nula;  $d_A$  a distância por área e  $d\omega_0$  o ângulo sólido correspondente à galáxia no ponto  $P$  (Ribeiro & Stoeger 2003).

### 3.4 Solução Numérica

Uma abordagem para solucionar o fator de escala, a contagem numérica relativística e as grandezas que podem ser construídas a partir delas é assumir a coordenada radial  $r$  como variável independente. O primeiro passo da solução dessas quantidades é escrever a equação da geodésica radial nula na geometria referente a métrica (3.1) como

$$\frac{dt}{dr} = - \left( \frac{a}{c\sqrt{1-kr^2}} \right). \quad (3.21)$$

O sinal negativo da expressão anterior garante que estamos tratando de geodésicas que convergem para o observador em  $t = t_0$ . Sendo as coordenadas  $r$  e  $t$  funções do parâmetro afim  $y$  ao longo de geodésicas nulas, tem-se

$$\frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dr} \frac{dr}{dy} = - \left( \frac{a}{c\sqrt{1-kr^2}} \right) \frac{dr}{dy}. \quad (3.22)$$

Considerando um referencial comóvel com o observador,  $u^a = c\delta_0^a$ , obtém-se

$$-k^a u_a = -k^a c\delta_0^a = -ck^0 = -c \frac{dt}{dy}, \quad (3.23)$$

substituindo a equação (3.22) na relação acima, chega-se a expressão abaixo,

$$-k^a u_a = \left( \frac{a}{\sqrt{1-kr^2}} \right) \frac{dr}{dy}. \quad (3.24)$$



A distância por área  $d_A$  é definida como a relação entre o elemento de área da seção transversal intrínseca da fonte  $d\sigma_A$  e o ângulo sólido observado  $d\Omega_A$ . Assim podemos escrever que

$$(d_A)^2 = \frac{d\sigma_A}{d\Omega_A} = \frac{a^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2} = (ar)^2, \quad (3.25)$$

ou

$$d_A = ar. \quad (3.26)$$

Para explicitar o fator de escala em função da coordenada radial, reescrevemos a equação (3.21) com a equação (3.13), obtendo,

$$\frac{dt}{dr} = - \left( \frac{a}{\sqrt{c^2 - kc^2 r^2}} \right) = - \left( \frac{a}{\sqrt{c^2 - a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}} \right) = - \left[ \frac{a^2}{c^2 - a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2} \right]^{1/2}. \quad (3.27)$$

Em seguida, escrevendo-se

$$\frac{da}{dr} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{dr}, \quad (3.28)$$

e combinando as expressões (3.15) e (3.27) na última equação chega-se a

$$\frac{da}{dr} = -H_0 \left[ \frac{\Omega_{\Lambda_0} a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + (\Omega_{m_0} a_0^3) a}{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2} \right]^{1/2}. \quad (3.29)$$

É necessário reescrever a equação (3.19) em termos de  $r$  usando as relações (3.17), (3.24), (3.26). Lembrando que a dependência é puramente radial,  $d\omega_0 = 4\pi$ , obtemos finalmente a expressão abaixo,

$$\frac{dN}{dr} = \left( \frac{3c\Omega_{m_0} H_0^2 a_0^3}{2G\mathcal{M}_g} \right) \left[ \frac{r^2}{\sqrt{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}} \right]. \quad (3.30)$$

Com as equações (3.29) e (3.30) e adotando os valores numéricos para  $\Omega_{m_0}$ ,  $\Omega_{\Lambda}$  e  $H_0$  referentes ao modelo cosmológico escolhido obtemos as soluções para  $a(r)$  e  $N(r)$ . A partir dessas duas grandezas podemos calcular todas as outras quantidades teóricas de interesse para o presente trabalho. As equações diferenciais (3.29) e (3.30) podem ser resolvidas simultaneamente por métodos numéricos, gerando tabelas para  $r$ ,  $a$  e  $N$ . Como essas expressões são relativamente simples, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é suficiente para resolver o problema. As condições iniciais são  $r_0$ ,  $N_0$  iguais a zero e  $a_0 = 1$ .

## 3.5 Contagem Numérica Diferencial

Partindo da mesma abordagem usada anteriormente para o cálculo numérico de  $a$  e  $N$ , pode-se calcular a contagem numérica diferencial  $dN/dz$  considerando  $z(r)$  e através da expressão,

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dr}{dz} \frac{dN}{dr}. \quad (3.31)$$

Sabendo-se que

$$z + 1 = \frac{a_0}{a}, \quad (3.32)$$

então pode-se escrever que,

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dr}{da} \frac{da}{dz}. \quad (3.33)$$

As relações (3.29) e de (3.32) permitem que se escreva a expressão acima como,

$$\frac{dr}{dz} = \frac{a^2}{a_0 H_0} \left[ \frac{\Omega_{\Lambda_0} a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + \Omega_{m_0} a_0^3 a}{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2} \right]^{-1/2}. \quad (3.34)$$

Finalmente, as equações (3.30) e (3.34) permitem que a equação (3.31) seja expressa como,

$$\frac{dN}{dz} = \left( \frac{3c\Omega_{m_0} H_0 a_0^2}{2G\mathcal{M}_g} \right) \left[ \frac{r^2 a^2}{\sqrt{\Omega_{\Lambda_0} a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + \Omega_{m_0} a_0^3 a}} \right]. \quad (3.35)$$

As equações apresentadas até agora são válidas para todos os modelos cosmológicos baseados na métrica de FLRW. Nesse trabalho são usados o modelo de Einstein-de Sitter, doravante EdS, cujo parâmetro de matéria  $\Omega_{m_0} = 1$  e o de constante cosmológica  $\Omega_{\Lambda} = 0$ , e o modelo  $\Lambda$ CDM (*Cold Dark Matter*) também conhecido como modelo de concordância cósmica, com  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ . Para este último só são possíveis soluções numéricas. Contudo, o modelo EdS permite que as relações para o fator de escala, a contagem numérica, a contagem numérica diferencial relativística e, conseqüentemente, outras grandezas derivadas possam ser escritas em formas analíticas como função do desvio para o vermelho. A seguir são apresentadas as relações analíticas das grandezas importantes para este trabalho.

Em EdS, o fator de escala em função do tempo é dado por

$$a(t) = \left( t + \frac{2}{3H_0} \right)^{2/3}. \quad (3.36)$$

A solução da equação do cone de luz passado,  $dt/dy = -a(t)dr/dy$  pode ser escrita como

$$3 \left[ t(y) + \frac{2}{3H_0} \right]^{1/3} = \left( \frac{18c}{H_0} \right)^{1/3} - r(y), \quad (3.37)$$

o que permite escrever a equação (3.36) ao longo da geodésica nula parametrizada por  $r$  como

$$a[t(r)] = \frac{1}{9} \left[ \left( \frac{18c}{H_0} \right)^{1/3} - r \right]^2. \quad (3.38)$$

Assumindo que  $z = z[r(y)]$ , obtem-se uma expressão para o desvio para o vermelho dada por

$$1 + z = \frac{a(t=0)}{a(t)} = \left( \frac{18c}{H_0} \right)^{2/3} \left[ \left( \frac{18c}{H_0} \right)^{1/3} - r \right]^{-2}. \quad (3.39)$$

A distância por área para EdS é dada por

$$d_A = ra(t) = \frac{2c}{H_0} \left[ \frac{1 + z - \sqrt{1 + z}}{(1 + z)^2} \right], \quad (3.40)$$

com o fator de escala ao longo da geodésica nula escrita como

$$a^{EdS} = \left( \frac{18c}{H_0} \right)^{2/3} \frac{1}{9(1+z)}. \quad (3.41)$$

A partir dessas expressões, pode-se encontrar, parametrizadas por  $z$ , a contagem numérica relativística (Ribeiro 2005; Rangel Lemos & Ribeiro 2008),

$$N^{EdS}(z) = \frac{4c^3}{H_0 \mathcal{M}_g G} \left( \frac{1+z - \sqrt{1+z}}{1+z} \right)^3, \quad (3.42)$$

e a contagem numérica diferencial relativística (Ribeiro 2005; Rangel Lemos & Ribeiro 2008)

$$\frac{dN^{EdS}}{dz} = \frac{6c^3}{H_0 \mathcal{M}_g G} \frac{(1+z - \sqrt{1+z})^2}{(1+z)^{7/2}}. \quad (3.43)$$

A figura 3.2 ilustra o comportamento da contagem numérica diferencial e da contagem numérica relativística para os modelos de EdS e de  $\Lambda$ CDM com parâmetros  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ .

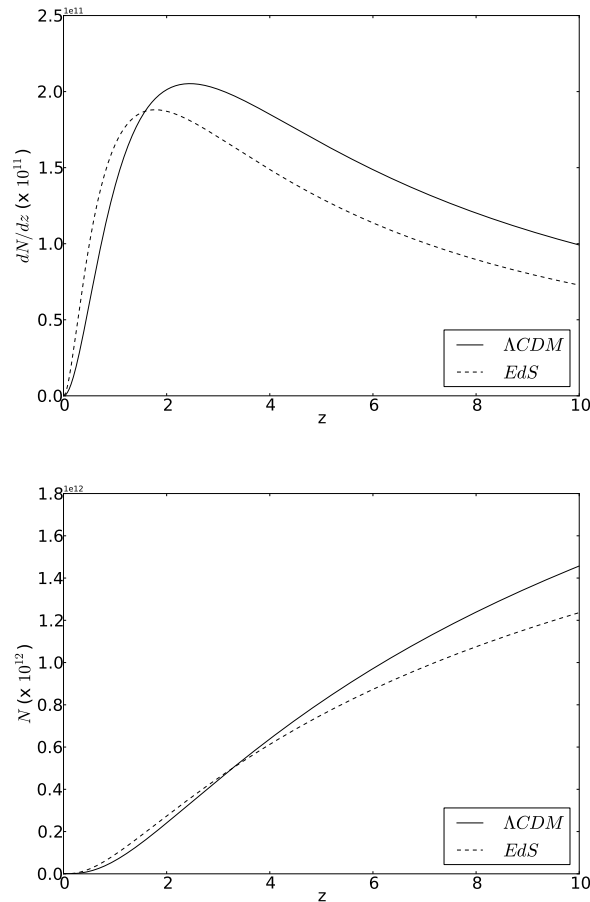


Figura 3.2: Evolução da contagem numérica diferencial  $dN/dz$  e da contagem numérica  $N$  em função do desvio para o vermelho, para os modelos cosmológicos EdS e  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.3$ . Note que para ambos os modelos  $dN/dz$  exibe o mesmo comportamento, porém com uma diferença na amplitude e no ponto de máximo.

### 3.6 Distâncias Cosmológicas

Em cosmologia as distâncias observacionais são definidas pelo método de medição. Isso significa que os dados astronômicos de relevância cosmológica, como o desvio para o vermelho de galáxias distantes e a magnitude aparente, quando relacionados de um modo particular um com o outro definem uma distância observacional particular. No espaço Euclidiano todos os métodos levam a uma única distância, entretanto, na cosmologia relativística isso não acontece e, portanto, o conceito de distância relativística não é absoluto.

A falta de um conceito único de distância implica que outras quantidades relacionadas a ela também não devem ser únicas, como é o caso da área, do volume, da densidade média. Para “pequenas distâncias” ( $z \lesssim 0.1$ ) as diferentes definições de distâncias são essencialmente equivalentes. Para grandes distâncias, contudo, a diferença entre estas distâncias podem ser utilizadas para verificar observacionalmente a expansão e curvatura do Universo nos chamados testes clássicos. Esses testes foram formalizados por Sandage (1961) que propôs quatro testes: relação magnitude-desvio para o vermelho, contagem de galáxias-magnitude limite, distância de diâmetro angular-desvio para o vermelho, idade do universo.

A distância por área  $d_A$ , já mencionada na seção anterior, também conhecida como distância por diâmetro angular, distância por luminosidade corrigida ou distância por área do observador, é definida pela equação (3.25) que relaciona o elemento de área da seção transversal  $d\sigma_A$  da fonte medida intrinsecamente e o ângulo sólido observado  $d\Omega_A$ , conforme mostra a figura 3.3.

Também pode-se definir a distância por área galáctica  $d_G$  através da relação entre o ângulo sólido  $d\Omega_G$  medido no referencial da galáxia e o elemento de área da seção transversal  $d\sigma_G$  medido pelo observador (vide figura 3.3),

$$d\sigma_G = d\Omega_G(d_G)^2. \quad (3.44)$$

Esta distância também é conhecida como distância efetiva, distância por tamanho angular, distância comóvel transversa ou distância de movimento próprio.

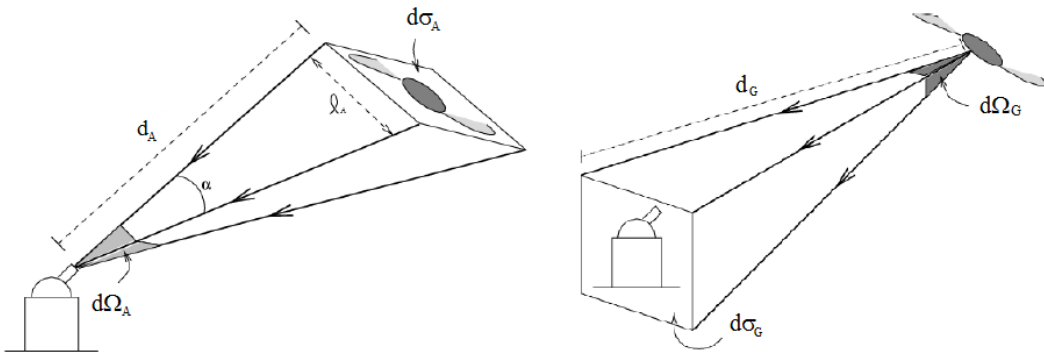


Figura 3.3: Esquerda: A distância por área  $d_A$  é definida pela relação entre o elemento de área da seção transversal  $d\sigma_A$  medido no referencial de repouso da fonte e o ângulo sólido  $d\Omega_A$  medido pelo observador. Direita: A distância por área galáctica  $d_G$  é determinada pela relação entre o elemento de área da seção transversal  $d\sigma_G$  medido pelo observador e o ângulo sólido  $d\Omega_G$  medido no referencial de repouso da fonte (Ribeiro 2005).

Uma das distâncias mais usadas em Astronomia é a distância de luminosidade  $d_L$ , definida como uma relação entre o fluxo observado  $F$  e a luminosidade intrínseca  $L$  de uma fonte astronômica em um universo plano e estático, descrita pela expressão,

$$F = \frac{L}{4\pi(d_L)^2}. \quad (3.45)$$

Alternativamente, esta distância pode ser relacionada com a magnitude aparente  $m$  e a magnitude absoluta  $M$  através da equação do módulo de distância  $\mu$ ,

$$\mu = m - M = 5 \log(d_L) - 5, \quad (3.46)$$

onde  $d_L$  é dado em parsec.

As três distâncias apresentadas acima estão relacionadas pelo teorema da reciprocidade de Etherington (1933; Ellis 1971, 2007) dado por,

$$d_L = (1 + z)^2 d_A = (1 + z) d_G. \quad (3.47)$$

Este teorema independe do modelo cosmológico adotado.

Ainda pode-se definir a distância por desvio para o vermelho segundo a relação

$$d_Z = \frac{cz}{H_0}, \quad (3.48)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. A expressão anterior é uma consequência da relação velocidade-distância. A equação (3.48) é estritamente válida para  $z < 1$  (Harrison 1993) embora possa ser adotada como uma definição de distância para todos os valores de  $z$ .

O cálculo teórico dessas distâncias nos modelos cosmológicos com métrica FLRW pode ser feito a partir das equações (3.26), (3.32), (3.47) e (3.48). Em termos do fator de escala e da coordenada radial elas são expressas como se segue,

$$d_A = a r, \quad (3.49)$$

$$d_L = a_0^2 \frac{r}{a}, \quad (3.50)$$

$$d_G = a_0 r, \quad (3.51)$$

$$d_Z = \frac{c}{H_0} \left( \frac{a_0}{a} - 1 \right). \quad (3.52)$$

Também pode-se calcular as derivadas das distâncias com respeito ao desvio para o vermelho. Começando com  $d_A$ , usando as equações (3.32) e (3.49) segue que,

$$\frac{d(d_A)}{dz} = \frac{d(d_A)}{dr} \frac{dr}{da} \frac{da}{dz} = -\frac{a^2}{a_0} \left[ \frac{da}{dr} r + a \right] \left( \frac{da}{dr} \right)^{-1}. \quad (3.53)$$

Substituindo a expressão (3.29) na equação acima obtemos,

$$\frac{d(d_A)}{dz} = \frac{a^2}{a_0} \left[ \frac{a}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{\Omega_\Lambda a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + (\Omega_{m_0} a_0^3) a}} \right]. \quad (3.54)$$

Através do teorema da reciprocidade (3.47) temos que,

$$\frac{d(d_L)}{dz} = 2(1+z)d_A + (1+z)^2 \frac{d(d_A)}{dz}, \quad (3.55)$$

$$\frac{d(d_G)}{dz} = d_A + (1+z) \frac{d(d_A)}{dz}. \quad (3.56)$$

Reescrevendo as equações das derivadas de  $d_L$  e  $d_G$  em termos do fator de escala com auxílio das equações (3.32), (3.49) e (3.54), tem-se que,

$$\frac{d(d_L)}{dz} = a_0 \left[ \frac{a}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{\Omega_\Lambda a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + \Omega_{m_0} a_0^3 a}} + r \right], \quad (3.57)$$

$$\frac{d(d_G)}{dz} = \frac{a^2}{H_0} \sqrt{\frac{c^2 - H_0^2 a_0^2 (\Omega_0 - 1) r^2}{\Omega_\Lambda a^4 - a_0^2 (\Omega_0 - 1) a^2 + \Omega_{m_0} a_0^3 a}}. \quad (3.58)$$

A derivada de  $d_Z$  é obtida diretamente da relação (3.48),

$$\frac{d(d_Z)}{dz} = \frac{c}{H_0}. \quad (3.59)$$

As equações apresentadas para as distâncias e as suas respectivas derivadas foram escritas em termos do fator de escala e da coordenada radial, que como discutido nas seções anteriores, podem ser calculadas numericamente para o modelo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0.7$ . Agora, serão apresentadas as distâncias e as suas derivadas analíticas para o modelo cosmológico de EdS, obtidas a partir da relação analítica de  $a$  mostrada na seção anterior como já foi feito, por exemplo, para  $d_A$  na equação (3.40) e do teorema da reciprocidade (3.47) (Rangel Lemos & Ribeiro 2008)

$$d_G^{EdS}(z) = \frac{2c}{H_0} \left( \frac{1+z - \sqrt{1+z}}{1+z} \right), \quad (3.60)$$

$$d_L^{EdS}(z) = \frac{2c}{H_0} (1+z - \sqrt{1+z}). \quad (3.61)$$

Então as derivadas das distâncias em função do desvio para o vermelho serão dadas por,

$$\frac{d(d_A^{EdS})}{dz} = \frac{c}{H_0} \frac{3\sqrt{1+z} - 2(1+z)}{(1+z)^3}, \quad (3.62)$$

$$\frac{d(d_G^{EdS})}{dz} = \frac{c}{H_0} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}, \quad (3.63)$$

$$\frac{d(d_L^{EdS})}{dz} = \frac{2c}{H_0} \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+z}} \right). \quad (3.64)$$

Na figura 3.4 compara-se o comportamento das quatro distâncias em termos do desvio para o vermelho nos modelos EdS e  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_\Lambda = 0.7$  e  $\Omega_{m_0} = 0.3$ . Na tabela 3.1 encontram-se os valores das quatro distâncias para ambos os modelos.

Tabela 3.1: Distâncias cosmológicas, em Mpc, para dois modelos cosmológicos,  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m_0} = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$  e EdS, nos valores de desvio para o vermelho de interesse nesse trabalho. Adotamos  $H_0 = 70 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

$z$	$d_A$ (Mpc)	$d_G$ (Mpc)	$d_L$ (Mpc)	$d_Z$ (Mpc)	$d_A^{EdS}$ (Mpc)	$d_G^{EdS}$ (Mpc)	$d_L^{EdS}$ (Mpc)	$d_Z^{EdS}$ (Mpc)
0.45	1188	1723	2498	1927	1002	1452	2106	1927
0.50	1259	1889	2833	2141	1048	1572	2358	2141
0.55	1322	2050	3177	2356	1087	1686	2613	2356
0.60	1379	2206	3530	2570	1121	1794	2870	2570
0.65	1429	2358	3891	2784	1150	1897	3130	2784
0.70	1474	2506	4260	2998	1174	1996	3393	2998
0.75	1514	2649	4635	3212	1195	2091	3659	3212
0.80	1549	2788	5018	3426	1212	2181	3926	3426
0.85	1580	2922	5407	3640	1226	2268	4196	3640
0.90	1607	3053	5801	3854	1238	2351	4468	3854
0.95	1631	3180	6202	4069	1247	2432	4742	4069
1.00	1652	3304	6608	4283	1254	2509	5018	4283
1.05	1670	3424	7019	4497	1260	2583	5295	4497
1.10	1686	3540	7434	4711	1264	2655	5575	4711
1.15	1699	3653	7855	4925	1267	2724	5856	4925
1.20	1711	3763	8280	5139	1268	2791	6139	5139
1.25	1720	3870	8708	5353	1269	2855	6424	5353
1.30	1728	3975	9141	5568	1268	2918	6710	5568
1.35	1734	4076	9578	5782	1267	2978	6998	5782
1.40	1739	4174	10019	5996	1265	3036	7288	5996
1.45	1743	4270	10462	6210	1263	3093	7578	6210
1.50	1746	4364	10910	6424	1259	3148	7871	6424
1.55	1747	4455	11360	6638	1256	3202	8164	6638
1.60	1748	4544	11814	6852	1251	3253	8459	6852
1.65	1747	4630	12270	7067	1247	3304	8755	7067
1.70	1746	4715	12729	7281	1242	3353	9052	7281
1.75	1744	4797	13191	7495	1236	3400	9351	7495
1.80	1742	4877	13656	7709	1231	3447	9651	7709
1.85	1739	4956	14123	7923	1225	3492	9951	7923
1.90	1735	5032	14593	8137	1219	3536	10253	8137
1.95	1731	5107	15065	8351	1213	3578	10556	8351
2.00	1727	5180	15540	8565	1207	3620	10861	8565
2.05	1722	5251	16016	8780	1200	3661	11166	8780
2.10	1716	5321	16495	8994	1194	3701	11472	8994
2.15	1711	5389	16976	9208	1187	3739	11779	9208
2.20	1705	5456	17459	9422	1180	3777	12087	9422
2.25	1699	5521	17943	9636	1174	3814	12396	9636
2.30	1692	5585	18431	9850	1167	3850	12706	9850
2.35	1686	5648	18920	10064	1160	3886	13017	10064
2.40	1679	5709	19410	10279	1153	3920	13329	10279
2.45	1672	5769	19902	10493	1146	3954	13641	10493
2.50	1665	5828	20396	10707	1139	3987	13955	10707
2.55	1658	5885	20892	10921	1132	4019	14269	10921
2.60	1650	5942	21389	11135	1125	4051	14584	11135
2.65	1643	5997	21888	11349	1118	4082	14900	11349
2.70	1635	6051	22389	11563	1111	4113	15216	11563
2.75	1628	6104	22891	11778	1105	4142	15534	11778
2.80	1620	6156	23395	11992	1098	4171	15852	11992
2.85	1612	6208	23900	12206	1091	4200	16170	12206
2.90	1605	6258	24406	12420	1084	4228	16490	12420
2.95	1597	6307	24914	12634	1077	4256	16810	12634
3.00	1589	6356	25423	12848	1071	4283	17131	12848
3.05	1581	6403	25933	13062	1064	4309	17453	13062
3.10	1573	6450	26445	13277	1057	4335	17775	13277
3.15	1565	6496	26958	13491	1051	4361	18098	13491
3.20	1557	6541	27472	13705	1044	4386	18421	13705
3.25	1549	6585	27988	13919	1038	4411	18745	13919

Tabela 3.1 continuação

$z$	$d_A$ (Mpc)	$d_G$ (Mpc)	$d_L$ (Mpc)	$d_Z$ (Mpc)	$d_A^{EdS}$ (Mpc)	$d_G^{EdS}$ (Mpc)	$d_L^{EdS}$ (Mpc)	$d_Z^{EdS}$ (Mpc)
3.30	1542	6629	28504	14133	1031	4435	19070	14133
3.35	1534	6672	29022	14347	1025	4459	19395	14347
3.40	1526	6714	29541	14561	1019	4482	19721	14561
3.45	1518	6755	30061	14776	1012	4505	20048	14775
3.50	1510	6796	30583	14990	1006	4528	20375	14990
3.55	1502	6836	31105	15204	1000	4550	20702	15204
3.60	1495	6876	31628	15418	994	4572	21030	15418
3.65	1487	6915	32153	15632	988	4593	21359	15632
3.70	1479	6953	32678	15846	982	4615	21688	15846
3.75	1472	6990	33205	16060	976	4635	22018	16060
3.80	1464	7028	33732	16274	970	4656	22348	16274
3.90	1449	7100	34790	16703	958	4696	23010	16703
4.00	1434	7170	35852	17131	947	4735	23674	17131
4.10	1419	7239	36917	17559	936	4773	24340	17559
4.20	1405	7305	37986	17988	925	4809	25008	17988
4.30	1390	7369	39058	18416	914	4845	25678	18416
4.40	1376	7432	40134	18844	904	4879	26349	18844
4.50	1362	7493	41213	19272	893	4913	27022	19272
4.60	1349	7553	42295	19701	883	4946	27697	19701
4.70	1335	7610	43380	20129	873	4978	28373	20129
4.80	1322	7667	44468	20557	864	5009	29051	20557
4.90	1309	7722	45559	20985	854	5039	29731	20985
5.00	1296	7775	46652	21414	845	5069	30412	21414

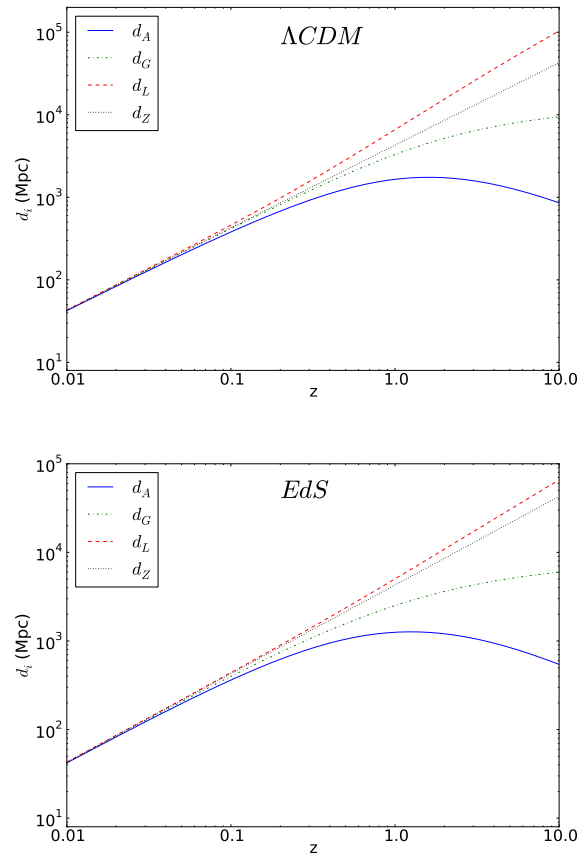


Figura 3.4: Evolução das quatro distâncias em função do desvio para o vermelho para o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM com parâmetros  $\Omega_\Lambda = 0.7$  e  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e para o modelo EdS.



Pode-se também definir distâncias provenientes estritamente da teoria, as distâncias comóvel e própria. O conceito de distância comóvel  $d_c$  refere-se a uma curva de conexão de tempo cosmológico constante entre dois pontos arbitrariamente distantes, enquanto a distância própria  $d_{Pr}$  é a distância entre dois pontos medidos simultaneamente. Em outras palavras,  $d_c$  varia com  $a(t)$  de modo a se manter constante e  $d_{Pr}$  depende do momento em que seja medida. Deve-se ressaltar que para a métrica de FLRW a distância própria é equivalente a distância por área  $d_A$  e a expressão para a distância comóvel é a mesma que para a distância por área galáctica  $d_G$ .



## Capítulo 4

---

# Conectando Teoria e Observação

---

O método de análise utilizado nesta dissertação consiste no uso de dados da literatura da função de luminosidade galáctica para o cálculo da *função de seleção* e, através desta, obter a contagem numérica de galáxias da amostra. Essa contagem é uma grandeza observacional que permite extrair as *densidades diferenciais*, que são as ferramentas fundamentais neste trabalho e serão discutidas no próximo capítulo. A seguir discutiremos em detalhes como obter a contagem numérica de galáxias a partir da função de luminosidade por meio de uma abordagem baseada na cosmologia relativística.

### 4.1 Função de Luminosidade Galáctica

A distribuição de galáxias no Universo pode ser expressa pelo observável chamado *função de luminosidade galáctica* (FL). A FL reflete a densidade numérica de galáxias em função da magnitude, podendo ser expressa na forma diferencial, em número de galáxias por unidade de magnitude (ou luminosidade), ou na forma integrada, número de galáxias com magnitude inferior a uma dada magnitude, ou luminosidade maior que uma dada luminosidade. A função de luminosidade  $\phi$  é uma função de distribuição de luminosidades de objetos de uma dada amostra. Na prática, são utilizadas luminosidades em uma dada banda e não luminosidades bolométricas, isto é, em todas as bandas. Seja  $\nu(r, M)$  a densidade numérica de galáxias com magnitude absoluta entre  $M$  e  $M + dM$ , localizadas entre o raio  $r$  e  $r + dr$ . Temos que  $\phi$  pode ser definida como,

$$\nu(r, M)dMdr = \phi(M)n(r)dMdr, \quad (4.1)$$

onde  $n(r)$  é a densidade numérica de galáxias de todas as magnitudes. A FL é em geral dada por unidade de volume ( $\text{Mpc}^{-3}$ ) e também pode ser escrita em função da luminosidade  $\phi(L)$  em um dado desvio para o vermelho  $z$ , como a seguir,

$$\frac{dN[L(z), z]}{dl} = V(z)\phi(l), \quad (4.2)$$

sendo

$$l \equiv \frac{L}{L^*},$$

onde  $L^*$  é o parâmetro de escala de luminosidade, também conhecido como luminosidade característica,  $dN$  é o número de galáxias em uma dada faixa de luminosidade e de desvio para o vermelho e  $V$  é o volume comóvel, em um certo  $z$ , onde a FL é calculada.

Estimar a FL a partir de um catálogo de galáxias não é trivial pois a observação acarreta em efeitos de seleção na amostragem devido a limitação em fluxo ou desvio para o vermelho. Assim, várias metodologias paramétricas e não paramétricas foram criadas.

Em 1936, Hubble (1936a,b) propôs que a FL podia ser ajustada analiticamente por uma distribuição gaussiana com parâmetro de dispersão  $\sigma = 0.84$  mag, baseando-se nas observações da época que apontavam que o desvio da relação velocidade-magnitude aparente era pequeno no estudo de galáxias de Humason (1936). Mais tarde, Zwicky (1957) propôs um ajuste monotônico,  $\phi(M) \propto 10^{0.2M}$ , ou  $\phi(L) \propto L^{-0.5}$ , utilizando galáxias de campo. Kiang (1961) argumentou que a discrepância entre os ajuste de Hubble e Zwicky tinha origem em efeitos de seleção na amostra de Hubble (1936b) que subamostravam as galáxias de baixa luminosidade. Assim, estudando tanto galáxias de campo quanto de aglomerados propôs a seguinte função para FL,

$$\phi(M) = \begin{cases} x^3 & ; 0 < x < 3 \\ 10^{0.2x} & ; 2.5 < x < 8 \end{cases} ; x \equiv M - M_0 ; M_0 = -22.0 - 5 \log h. \quad (4.3)$$

A partir dos dados de aglomerados de galáxias, Abell (1965) sugeriu uma FL integrada com uma divisão no ajuste entre os regimes de galáxias muito e pouco brilhantes segundo uma certa magnitude aparente  $m$  em relação à magnitude característica  $m_*$  no qual se observava uma mudança na inclinação da contagem logarítmica de galáxias,  $\log N(m)$ . A FL integrada sugerida tem a seguinte forma,

$$\Phi(< m) = \begin{cases} k_1 + s_1 m & ; m < m_* \\ k_2 + s_2 m & ; m > m_* \end{cases} ; \text{ para Coma: } m_* = 14.7, \begin{cases} k_1 = -9.2 & ; s_1 = 0.78 \\ k_2 = 1.4 & ; s_2 = 0.25. \end{cases} \quad (4.4)$$

Como a amostra usada por Abell é de aglomerados então podemos considerar as galáxias à mesma distância de modo que a utilização de  $m$  ou  $M$  é indiferente a menos de uma constante. Arakelyan & Kalloglyan (1970) propuseram um ajuste de três inclinações distintas para  $\log N(m)$ .

Schmidt (1968) propôs o estimador  $1/V_{max}$  em estudos de população de quasares. Este método foi aperfeiçoado por Felten (1976) e Eales (1993) e estima a FL diferencial através da seguinte expressão,

$$\phi(M)\Delta M = \sum_{i=1}^{N_{obs}} \frac{1}{V_{max}}, \quad (4.5)$$

onde  $N_{obs}$  é o número de galáxias da amostra com magnitudes absolutas entre  $M$  e  $M + \Delta M$  e  $V_{max}$  é o volume máximo em que um objeto de magnitude  $M$ , ou fluxo  $f_i$  a distância  $r_i$ , pode ser encontrado. Esta quantidade é dada por,

$$V_{max} \equiv \Omega_{amostra} \frac{r_{max}^3}{3} ; r_{max} = r_i \left( \frac{f_i}{f_{min}} \right)^{1/2}, \quad (4.6)$$

onde  $\Omega_{amostra}$  e  $f_{min}$  são o ângulo sólido e o menor fluxo coberto pela amostra, respectivamente. O método  $1/V_{max}$  apresenta, porém, uma limitação pois supõe que a densidade

numérica de objetos é constante. Isto pode ser aplicado em primeira aproximação, por exemplo, para galáxias de campo, mas não para aglomerados e grupos.

Um método independente da densidade foi proposto por Turner (1979) e Kirshner, Oemler & Schechter (1979), mais tarde aperfeiçoado por Yahil et al. (1991). Esta abordagem baseia-se na razão entre o número de galáxias com magnitude absoluta entre  $M$  e  $M + dM$  e o número total de galáxias com magnitude superior a  $M$  por unidade de volume.

Schechter (1976) propôs um ajuste analítico para a FL combinando a forma exponencial e a lei de potência e tendo como base o modelo estocástico autossimilar para a formação de galáxias (Press & Schechter 1974). Apesar de inicialmente ter sido motivada por um modelo simples de formação galáctica, essa parametrização provou ter uma aplicação muito mais ampla sendo bastante utilizada no estudo da FL de galáxias. Esta forma analítica, chamada de função de Schechter, pode ser apresentada como,

$$\begin{aligned} \phi(L)dL &= \phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha e^{-L/L^*} \frac{dL}{L^*} \quad \text{ou,} \\ \phi(M)dM &= (0.4 \ln 10) \phi^* 10^{-0.4(\alpha+1)(M-M^*)} \exp[-10^{-0.4(M-M^*)}] dM, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo  $L^*$ , ou  $M^*$ , o parâmetro que determina uma *luminosidade característica*, ou *magnitude característica*, correspondente a mudança de inclinação da contagem logarítmica de galáxias,  $\log N(m)$ ,  $\alpha$  a inclinação assintótica da função na região de baixa luminosidade e  $\phi^*$  um fator de normalização, cuja dimensão é de densidade numérica.

Ao estimarmos a FL devemos especificar o tipo de ambiente ao qual as galáxias pertencem, ou seja se são do campo, de aglomerados ou de grupos. Também podemos obter a FL em função do tipo morfológico. A figura 4.1 mostra a FL para diferentes classificações morfológicas.

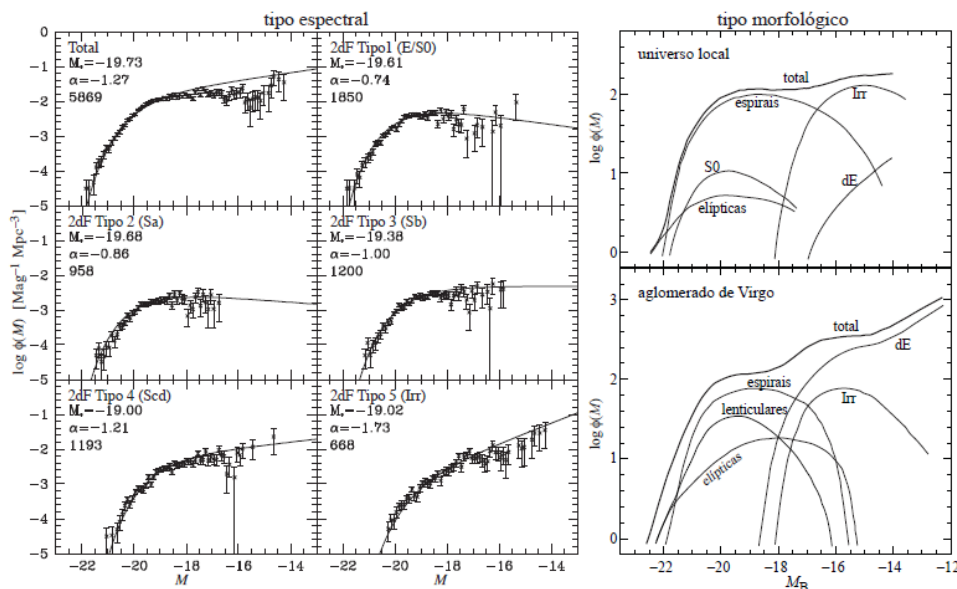


Figura 4.1: **Esquerda:** Função de luminosidade para diferentes tipos espectroscópicos. As linhas correspondem aos melhores ajustes da função de Schechter, e os dados são do levantamento 2dF (Folkes et al. 1999). **Direita:** Função de luminosidade de acordo com o tipo morfológico, para o campo (universo local) e para o aglomerado de Virgem (Fonte: Lima Neto 2011).

## 4.2 Função de Seleção

A função de seleção  $\psi$  é definida como a integral de  $\phi(L)$  acima de uma luminosidade limite de observação  $L_{lim}$  e pode ser escrita como (Peebles 1980, 1993),

$$\psi = \int_{L_{lim}}^{\infty} \phi(L) dL. \quad (4.8)$$

Por esta definição, a função de seleção é uma densidade numérica de galáxias com luminosidade acima de  $L_{lim}$ , estabelecida no mesmo volume da função de luminosidade correspondente. Como discutido anteriormente,  $\phi(L)$  pode obtida através de um perfil analítico, sendo que o mais amplamente usado é o de Schechter. Vários catálogos foram publicados investigando os parâmetros de Schechter, como por exemplo Lin et al. (1999), Fried et al. (2001), Blanton et al. (2003), Pozzetti et al. (2003), Bell et al. (2003), Poli et al. (2003), Rudnick et al. (2003), Norman et al. (2004), Gabasch et al. (2004, 2006), Wilmer et al. (2006), Ly et al. (2007), Bouwens et al. (2007, 2011), Tzanavaris & Georgantopoulos (2008). Nos catálogos mencionados foi constatado que a FL evolui com o desvio para o vermelho.

Em geral, estes catálogos analisam a FL para filtros em diferentes bandas e ainda podem considerar uma classificação morfológica. Conseqüentemente, a função de seleção referente à contagem de galáxias de um tipo morfológico  $\nu$  em um determinado filtro  $W$ ,  $\psi_{W,\nu}(z)$  é dada por

$$\psi_{W,\nu}(z) = \int_{L_{lim}^{W,\nu}}^{\infty} \phi_{W,\nu}(L, z) dL. \quad (4.9)$$

Expressando a FL em termos da magnitude absoluta, obtem-se a relação abaixo,

$$\psi_{W,\nu}(z) = 0.4 \ln 10 \int_{-\infty}^{M_{lim}^W(z)} \phi_{W,\nu}^*(z) 10^{0.4(\alpha+1)(M_{W,\nu}^*(z)-\bar{M})} \exp \left[ -10^{0.4(M_{W,\nu}^*(z)-\bar{M})} \right] d\bar{M}. \quad (4.10)$$

Ribeiro & Stoeger (2003) propuseram escrever a função de seleção a partir das  $\psi_{W,\nu}(z)$  segundo a média ponderada

$$\psi(z) = \sum_W a_W \frac{\sum_{\nu} P_{\nu} \mathcal{M}_{\nu} \psi_{W,\nu}(z)}{\sum_{\nu} P_{\nu} \mathcal{M}_{\nu}}, \quad (4.11)$$

onde  $P_{\nu}$  indica abundância de cada tipo morfológico  $\nu$  com respeito ao número total de galáxias contadas em cada intervalo de  $z$  e  $\mathcal{M}_{\nu}$  as diferentes massas estelares típicas que podem variar com o desvio para o vermelho devido às fusões e à formação estelar. As constantes  $a_W$  são introduzidas para evitar a contagem múltipla das mesmas galáxias em diferentes filtros, portanto,

$$a_W(z) = 1, \quad \text{para } W = 1, \quad (4.12)$$

e

$$a_W < 1, \quad \text{para } W > 1. \quad (4.13)$$

Para o presente trabalho foram calculadas as funções de seleção usando os parâmetros de Schechter apresentados em Gabasch et al. (2004) para as bandas azuis e Gabasch et

al. (2006) para as bandas vermelhas, a partir do levantamento *FORS Deep Field* (FDF). A seguir, são apresentadas as características gerais dos catálogos bem como os detalhes do cálculo das funções de seleção de ambos.

### 4.2.1 FORS Deep Field (FDF)

O FORS Deep Field (Appenzeller et al. 2000; Heidt et al. 2003) é um levantamento fotométrico e espectroscópico com diferentes cores de uma região de  $\sim 7' \times 7'$  próxima ao pólo sul galáctico cujo objetivo principal era a melhoria do conhecimento da formação e evolução das galáxias no Universo jovem. Os objetos foram observados no ESO VLT ("Very Large Telescope"). Desse levantamento foi selecionado um conjunto de 5558 galáxias com desvio para o vermelho fotométrico medido a partir da fotometria em 9 filtros e magnitude aparente limite na banda *I* no sistema de magnitudes AB de 26.8. A partir desta amostra dois catálogos foram publicados com os resultados da FL, um para galáxias nas bandas azuis (Gabasch et al. 2004, doravante G04) e outro para as bandas vermelhas (Gabasch et al. 2006, doravante G06).

Em G04 foram apresentados os parâmetros de Schechter ajustados considerando apenas galáxias azuis na faixa de desvio para o vermelho de  $0.5 \leq z \leq 5.0$ . Na determinação da FL, os autores supuseram o modelo cosmológico padrão, com parâmetros  $\Omega_{m0} = 0.3$ ,  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$  e constante de Hubble  $H_0 = 70 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Para quantificar a evolução dos parâmetros de Schechter com o desvio para o vermelho, os autores do catálogo assumiram as seguintes relações,

$$M_W^*(z) = M_{0,W}^* + A_W \ln(1+z), \quad (4.14)$$

$$\phi_W^*(z) = \phi_{0,W}^* (1+z)^{b_W}, \quad (4.15)$$

$$\alpha(z) = \alpha_0. \quad (4.16)$$

onde  $A_W$ ,  $b_W$ ,  $M_{0,W}^*$  e  $\phi_{0,W}^*$  são parâmetros livres de evolução ajustados aos dados de G04 para os diferentes filtros  $W$ . Os valores desses parâmetros encontram-se na tabela 4.1 para as três bandas no regime espectral ultravioleta (UV) - 1500Å, 2800Å, u' - e para as duas bandas no óptico - g', B.

Tabela 4.1: Parâmetros livres de evolução das equações (4.14), (4.15) e (4.16) para os dados de G04 e os valores de magnitude absoluta limite inferior (obtida via comunicação privada com A. Gabasch).

Filtro	$A$	$b$	$M_0^*$ (mag)	$\phi_0^*$ ( $10^{-2} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\alpha$	$M_{inf}$
1500Å	$-2.19^{+0.19}_{-0.19}$	$-1.76^{+0.15}_{-0.15}$	$-17.40^{+0.25}_{-0.22}$	$2.71^{+0.47}_{-0.38}$	$-1.07 \pm 0.04$	-28.77
2800Å	$-2.05^{+0.23}_{-0.24}$	$-1.74^{+0.15}_{-0.16}$	$-18.16^{+0.27}_{-0.26}$	$2.46^{+0.39}_{-0.37}$	$-1.07 \pm 0.04$	-28.77
u'	$-1.80^{+0.24}_{-0.21}$	$-1.70^{+0.14}_{-0.15}$	$-18.95^{+0.24}_{-0.26}$	$2.19^{+0.37}_{-0.28}$	$-1.07 \pm 0.04$	-28.77
g'	$-1.08^{+0.30}_{-0.28}$	$-1.29^{+0.18}_{-0.18}$	$-21.00^{+0.32}_{-0.31}$	$0.83^{+0.15}_{-0.21}$	$-1.25 \pm 0.03$	-28.77
B	$-1.03^{+0.23}_{-0.28}$	$-1.27^{+0.16}_{-0.19}$	$-20.92^{+0.32}_{-0.25}$	$0.82^{+0.14}_{-0.12}$	$-1.25 \pm 0.03$	-28.77

Seguindo a equação (4.10), as funções de seleção para cada um dos filtros podem ser reduzidas a

$$\psi^W(z) = 0.4 \ln 10 \phi_W^*(z) \int_{M_{inf}}^{M_{lim}(z)} 10^{0.4(1+\alpha)(M_W^*(z)-\bar{M})} \exp[-10^{0.4(M_W^*(z)-\bar{M})}] d\bar{M}, \quad (4.17)$$

com

$$M_{lim}(z) = m_{lim} - 5 \log d_L(z) - 25 + A_v, \quad (4.18)$$

onde  $m_{lim} = 26.8$  é a magnitude aparente limite,  $A_v = 0.035$  o avermelhamento e  $d_L$  a distância de luminosidade em Mpc, já discutida e calculada no capítulo anterior. As funções de seleção para os cinco filtros foram integradas numericamente com espaçamento de 0.1 de desvio para o vermelho. Conforme a equação (4.11), foram calculados as funções de seleção para o regime UV, ao combinar os valores de  $\psi$  para 1500Å, 2800Å e u', e óptico, combinando g' e B. Como em G04 não há classificação morfológica, a expressão (4.11) se resume a

$$\psi(z) = \sum_W a_W \psi_W(z), \quad (4.19)$$

com  $a_W = 1/3$  para as bandas UV e  $a_W = 1/2$  para as bandas ópticas. Os resultados das funções de seleção e os seus respectivos erros encontram-se na tabela 4.3.

Em G06 foram ajustados os parâmetros de Schechter para a mesma amostra de galáxias nas bandas r', i' e z' em um intervalo de desvio para o vermelho de  $0.45 \leq z \leq 3.81$ , conforme as equações (4.14), (4.15) e (4.16). Os parâmetros livres dessas expressões estão reproduzidos na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros livres de evolução das equações (4.14), (4.15) e (4.16) para os dados de G06 e os valores de magnitude absoluta limite inferior obtida via comunicação privada com A. Gabasch.

Filtro	A	b	$M_0^*$ (mag)	$\phi_0^*$ ( $10^{-2} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\alpha$	$M_{inf}$
r'	$-0.77^{+0.30}_{-0.28}$	$-0.68 \pm 0.17$	$-21.92 \pm 0.30$	$0.0037 \pm 0.0005$	$-1.33 \pm 0.05$	-30
i'	$-0.38^{+0.26}_{-0.25}$	$-0.60^{+0.15}_{-0.16}$	$-22.45 \pm 0.30$	$0.0032 \pm 0.0004$	$-1.33 \pm 0.05$	-30
z'	$-0.49^{+0.29}_{-0.31}$	$-0.70^{+0.17}_{-0.19}$	$-22.62^{+0.38}_{-0.32}$	$0.0035 \pm 0.0006$	$-1.33 \pm 0.05$	-30

A partir da expressão (4.17) podemos calcular a função de seleção para cada uma das três bandas vermelhas com espaçamento de 0.1 no desvio de desvio para o vermelho. Seguindo a mesma abordagem usada para G04, obtemos  $\psi$  total para as bandas vermelhas através da relação (4.19) com  $a_W = 1/3$ . Na tabela 4.4 estão os resultados das bandas vermelhas individuais e combinadas. Todos os erros foram propagados quadraticamente. Para resolver as equações aqui mencionadas e obter as funções de seleção e suas respectivas incertezas foram escritos programas em Python, que estão apresentados e comentados no apêndice A.

A figura 4.2 mostra a evolução das funções de seleção para as bandas ultravioletas, ópticas e vermelhas. Verifica-se o mesmo comportamento em  $\psi$  para as três bandas, porém a amplitude das curvas decresce na seguinte ordem: vermelhas, ópticas e UV.



Tabela 4.3: Função de seleção para os dados de Gabasch et al. (2004). Na coluna 5 encontram-se os valores de  $\psi$  total das bandas UV referente a combinação das colunas 2, 3 e 4. Na coluna 8 encontram-se os valores de  $\psi$  total das bandas ópticas referente a combinação das colunas 6 e 7. As colunas 5 e 8 foram obtidas pela equação (4.19).

$z$	$\psi^{1500}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{2800}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{u'}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{UV}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^g$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^B$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{opt}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )
0.5	$31.0^{+6.9}_{-5.9}$	$37.5^{+7.9}_{-7.4}$	$42.7^{+9.1}_{-7.9}$	$37.1^{+8.0}_{-7.2}$	$54.5^{+13.6}_{-12.1}$	$52.5^{+12.5}_{-11.3}$	$53.5^{+13.0}_{-11.7}$
0.6	$23.6^{+4.8}_{-4.5}$	$29.4^{+6.4}_{-6.2}$	$34.1^{+7.4}_{-6.4}$	$29.1^{+6.4}_{-5.8}$	$43.7^{+9.9}_{-9.2}$	$42.1^{+10.1}_{-9.2}$	$42.9^{+10.6}_{-9.6}$
0.7	$18.4^{+3.9}_{-3.7}$	$23.6^{+5.3}_{-5.2}$	$27.7^{+6.1}_{-5.4}$	$23.2^{+5.3}_{-4.8}$	$35.9^{+8.3}_{-7.9}$	$34.5^{+8.4}_{-7.7}$	$35.2^{+8.8}_{-8.0}$
0.8	$14.6^{+3.3}_{-3.2}$	$19.2^{+4.4}_{-4.4}$	$22.9^{+5.2}_{-4.6}$	$18.9^{+4.5}_{-4.1}$	$29.9^{+7.9}_{-7.1}$	$28.7^{+7.1}_{-6.6}$	$29.3^{+7.5}_{-6.9}$
0.9	$11.8^{+2.8}_{-2.8}$	$15.8^{+3.9}_{-3.8}$	$19.2^{+4.4}_{-4.0}$	$15.6^{+3.8}_{-3.5}$	$25.3^{+6.8}_{-6.2}$	$24.3^{+6.2}_{-5.8}$	$24.8^{+6.5}_{-6.0}$
1.0	$9.6^{+2.7}_{-2.4}$	$13.2^{+3.4}_{-3.3}$	$16.2^{+3.9}_{-3.5}$	$13.0^{+3.3}_{-3.1}$	$21.7^{+6.0}_{-5.5}$	$20.7^{+5.4}_{-5.1}$	$21.2^{+5.7}_{-5.3}$
1.1	$7.9^{+2.3}_{-2.1}$	$11.1^{+3.0}_{-2.9}$	$13.9^{+3.4}_{-3.1}$	$11.0^{+2.7}_{-2.6}$	$18.8^{+5.3}_{-4.8}$	$17.9^{+4.8}_{-4.6}$	$18.3^{+5.1}_{-4.5}$
1.2	$6.6^{+2.0}_{-1.8}$	$9.5^{+2.6}_{-2.4}$	$11.9^{+2.8}_{-2.5}$	$9.4^{+2.4}_{-2.3}$	$16.4^{+4.4}_{-4.0}$	$15.6^{+4.3}_{-4.1}$	$16.0^{+4.2}_{-4.1}$
1.3	$5.6^{+1.8}_{-1.6}$	$8.1^{+2.3}_{-2.1}$	$10.4^{+2.5}_{-2.2}$	$8.0^{+2.2}_{-2.1}$	$14.4^{+4.0}_{-3.6}$	$13.7^{+3.8}_{-3.5}$	$14.0^{+3.8}_{-3.5}$
1.4	$4.7^{+1.6}_{-1.4}$	$7.0^{+2.1}_{-1.9}$	$9.1^{+2.3}_{-2.1}$	$7.0^{+1.9}_{-1.8}$	$12.7^{+3.9}_{-3.6}$	$12.1^{+3.4}_{-3.1}$	$12.4^{+3.7}_{-3.4}$
1.5	$4.1^{+1.4}_{-1.3}$	$6.1^{+1.9}_{-1.8}$	$8.0^{+2.2}_{-2.1}$	$6.1^{+1.9}_{-1.8}$	$11.3^{+3.6}_{-3.3}$	$10.7^{+3.2}_{-3.1}$	$11.0^{+3.4}_{-3.2}$
1.6	$3.5^{+1.3}_{-1.2}$	$5.4^{+1.8}_{-1.6}$	$7.0^{+2.0}_{-1.9}$	$5.3^{+1.7}_{-1.5}$	$10.1^{+3.3}_{-3.1}$	$9.6^{+2.9}_{-2.9}$	$9.8^{+3.1}_{-3.0}$
1.7	$3.0^{+1.2}_{-1.1}$	$4.7^{+1.6}_{-1.5}$	$6.3^{+1.9}_{-1.7}$	$4.7^{+1.5}_{-1.4}$	$9.1^{+3.1}_{-2.8}$	$8.6^{+2.7}_{-2.6}$	$8.8^{+2.9}_{-2.7}$
1.8	$2.65^{+1.05}_{-0.95}$	$4.2^{+1.5}_{-1.3}$	$5.6^{+1.7}_{-1.6}$	$4.1^{+1.4}_{-1.3}$	$8.2^{+2.8}_{-2.6}$	$7.7^{+2.5}_{-2.3}$	$8.0^{+2.6}_{-2.4}$
1.9	$2.32^{+0.88}_{-0.87}$	$3.7^{+1.4}_{-1.3}$	$5.0^{+1.5}_{-1.5}$	$3.7^{+1.2}_{-1.2}$	$7.4^{+2.9}_{-2.5}$	$7.0^{+2.3}_{-2.3}$	$7.2^{+2.4}_{-2.4}$
2.0	$2.05^{+0.80}_{-0.80}$	$3.3^{+1.3}_{-1.2}$	$4.5^{+1.5}_{-1.4}$	$3.3^{+1.1}_{-1.1}$	$6.8^{+2.5}_{-2.3}$	$6.3^{+2.1}_{-2.1}$	$6.6^{+2.2}_{-2.2}$
2.1	$1.81^{+0.80}_{-0.74}$	$3.0^{+1.2}_{-1.1}$	$4.1^{+1.4}_{-1.3}$	$3.0^{+1.1}_{-1.1}$	$6.2^{+2.3}_{-2.1}$	$5.8^{+1.97}_{-2.0}$	$6.0^{+2.1}_{-2.1}$
2.2	$1.61^{+0.73}_{-0.68}$	$2.7^{+1.1}_{-1.0}$	$3.7^{+1.3}_{-1.2}$	$2.67^{+1.03}_{-0.99}$	$5.6^{+2.2}_{-2.0}$	$5.3^{+1.8}_{-1.9}$	$5.5^{+2.0}_{-1.9}$
2.3	$1.44^{+0.68}_{-0.63}$	$2.4^{+1.0}_{-0.94}$	$3.4^{+1.2}_{-1.1}$	$2.41^{+0.96}_{-0.92}$	$5.2^{+2.0}_{-1.9}$	$4.8^{+1.7}_{-1.8}$	$5.0^{+1.9}_{-1.8}$
2.4	$1.29^{+0.63}_{-0.58}$	$2.22^{+0.94}_{-0.88}$	$3.1^{+1.1}_{-1.1}$	$2.19^{+0.89}_{-0.86}$	$4.8^{+1.9}_{-1.8}$	$4.4^{+1.6}_{-1.7}$	$4.6^{+1.8}_{-1.7}$
2.5	$1.17^{+0.58}_{-0.54}$	$2.02^{+0.88}_{-0.83}$	$2.80^{+1.04}_{-0.98}$	$1.99^{+0.84}_{-0.78}$	$4.4^{+1.8}_{-1.7}$	$4.1^{+1.5}_{-1.6}$	$4.2^{+1.7}_{-1.6}$
2.6	$1.05^{+0.50}_{-0.50}$	$1.85^{+0.84}_{-0.78}$	$2.56^{+0.98}_{-0.93}$	$1.82^{+0.76}_{-0.74}$	$4.0^{+1.6}_{-1.6}$	$3.8^{+1.5}_{-1.5}$	$3.9^{+1.5}_{-1.5}$
2.7	$0.95^{+0.47}_{-0.47}$	$1.69^{+0.78}_{-0.73}$	$2.30^{+0.93}_{-0.88}$	$1.67^{+0.74}_{-0.71}$	$3.7^{+1.6}_{-1.5}$	$3.5^{+1.4}_{-1.4}$	$3.6^{+1.5}_{-1.5}$
2.8	$0.87^{+0.44}_{-0.44}$	$1.55^{+0.74}_{-0.69}$	$2.17^{+0.87}_{-0.83}$	$1.53^{+0.69}_{-0.65}$	$3.5^{+1.5}_{-1.4}$	$3.2^{+1.3}_{-1.3}$	$3.3^{+1.4}_{-1.4}$
2.9	$0.79^{+0.41}_{-0.41}$	$1.43^{+0.69}_{-0.65}$	$2.00^{+0.83}_{-0.79}$	$1.41^{+0.65}_{-0.63}$	$3.2^{+1.4}_{-1.4}$	$3.0^{+1.2}_{-1.2}$	$3.1^{+1.3}_{-1.3}$
3.0	$0.72^{+0.39}_{-0.39}$	$1.32^{+0.65}_{-0.62}$	$1.85^{+0.78}_{-0.74}$	$1.30^{+0.62}_{-0.60}$	$3.0^{+1.4}_{-1.3}$	$2.8^{+1.1}_{-1.2}$	$2.9^{+1.3}_{-1.2}$
3.1	$0.66^{+0.39}_{-0.36}$	$1.22^{+0.62}_{-0.59}$	$1.72^{+0.74}_{-0.71}$	$1.20^{+0.58}_{-0.57}$	$2.8^{+1.3}_{-1.2}$	$2.6^{+1.1}_{-1.1}$	$2.7^{+1.2}_{-1.2}$
3.2	$0.61^{+0.36}_{-0.34}$	$1.13^{+0.59}_{-0.56}$	$1.59^{+0.71}_{-0.67}$	$1.11^{+0.57}_{-0.52}$	$2.6^{+1.2}_{-1.2}$	$2.4^{+1.0}_{-1.1}$	$2.5^{+1.1}_{-1.1}$
3.3	$0.56^{+0.32}_{-0.32}$	$1.05^{+0.57}_{-0.53}$	$1.48^{+0.67}_{-0.64}$	$1.03^{+0.51}_{-0.50}$	$2.4^{+1.1}_{-1.1}$	$2.24^{+0.98}_{-1.04}$	$2.3^{+1.1}_{-1.1}$
3.4	$0.52^{+0.30}_{-0.30}$	$0.97^{+0.54}_{-0.51}$	$1.38^{+0.64}_{-0.61}$	$0.96^{+0.50}_{-0.47}$	$2.3^{+1.1}_{-1.1}$	$2.09^{+0.99}_{-0.89}$	$2.2^{+1.0}_{-1.0}$
3.5	$0.48^{+0.29}_{-0.29}$	$0.91^{+0.50}_{-0.48}$	$1.29^{+0.61}_{-0.58}$	$0.89^{+0.46}_{-0.45}$	$2.1^{+1.1}_{-1.0}$	$1.90^{+0.89}_{-0.95}$	$2.05^{+0.99}_{-0.95}$
3.6	$0.44^{+0.27}_{-0.27}$	$0.85^{+0.48}_{-0.49}$	$1.21^{+0.58}_{-0.55}$	$0.83^{+0.45}_{-0.44}$	$2.02^{+1.04}_{-0.98}$	$1.83^{+0.85}_{-0.91}$	$1.93^{+0.95}_{-0.94}$
3.7	$0.41^{+0.26}_{-0.26}$	$0.79^{+0.46}_{-0.47}$	$1.13^{+0.55}_{-0.53}$	$0.78^{+0.43}_{-0.42}$	$1.90^{+1.00}_{-0.94}$	$1.72^{+0.81}_{-0.87}$	$1.81^{+0.91}_{-0.90}$
3.8	$0.38^{+0.26}_{-0.25}$	$0.74^{+0.44}_{-0.44}$	$1.06^{+0.53}_{-0.50}$	$0.73^{+0.41}_{-0.40}$	$1.78^{+0.96}_{-0.90}$	$1.61^{+0.78}_{-0.83}$	$1.70^{+0.87}_{-0.87}$
3.9	$0.36^{+0.23}_{-0.23}$	$0.69^{+0.42}_{-0.43}$	$0.99^{+0.51}_{-0.48}$	$0.68^{+0.39}_{-0.38}$	$1.68^{+0.87}_{-0.87}$	$1.52^{+0.74}_{-0.80}$	$1.60^{+0.85}_{-0.85}$

Tabela 4.3 continuação

$z$	$\psi^{1500}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{2800}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{v^*}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{UV}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{d'}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^B$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{opt}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )
4.0	$0.33^{+0.23}_{-0.22}$	$0.65^{+0.40}_{-0.41}$	$0.93^{+0.49}_{-0.46}$	$0.64^{+0.37}_{-0.36}$	$1.59^{+0.88}_{-0.83}$	$1.43^{+0.71}_{-0.76}$	$1.51^{+0.80}_{-0.80}$
4.1	$0.31^{+0.22}_{-0.21}$	$0.61^{+0.38}_{-0.39}$	$0.88^{+0.47}_{-0.44}$	$0.60^{+0.36}_{-0.35}$	$1.50^{+0.85}_{-0.80}$	$1.34^{+0.68}_{-0.73}$	$1.42^{+0.77}_{-0.77}$
4.2	$0.29^{+0.21}_{-0.20}$	$0.58^{+0.37}_{-0.35}$	$0.83^{+0.45}_{-0.43}$	$0.57^{+0.34}_{-0.33}$	$1.41^{+0.81}_{-0.78}$	$1.27^{+0.76}_{-0.63}$	$1.34^{+0.74}_{-0.74}$
4.3	$0.27^{+0.20}_{-0.19}$	$0.54^{+0.36}_{-0.34}$	$0.78^{+0.43}_{-0.41}$	$0.53^{+0.32}_{-0.31}$	$1.34^{+0.74}_{-0.71}$	$1.20^{+0.68}_{-0.60}$	$1.27^{+0.71}_{-0.71}$
4.4	$0.26^{+0.19}_{-0.18}$	$0.51^{+0.34}_{-0.32}$	$0.74^{+0.41}_{-0.39}$	$0.50^{+0.31}_{-0.30}$	$1.27^{+0.75}_{-0.71}$	$1.13^{+0.65}_{-0.58}$	$1.20^{+0.68}_{-0.65}$
4.5	$0.24^{+0.18}_{-0.17}$	$0.48^{+0.32}_{-0.31}$	$0.70^{+0.40}_{-0.37}$	$0.47^{+0.30}_{-0.29}$	$1.20^{+0.73}_{-0.69}$	$1.07^{+0.58}_{-0.56}$	$1.13^{+0.65}_{-0.63}$
4.6	$0.23^{+0.17}_{-0.16}$	$0.46^{+0.31}_{-0.30}$	$0.66^{+0.38}_{-0.36}$	$0.45^{+0.29}_{-0.28}$	$1.14^{+0.70}_{-0.66}$	$1.01^{+0.56}_{-0.54}$	$1.07^{+0.63}_{-0.63}$
4.7	$0.21^{+0.16}_{-0.15}$	$0.43^{+0.30}_{-0.29}$	$0.62^{+0.37}_{-0.35}$	$0.42^{+0.28}_{-0.27}$	$1.08^{+0.68}_{-0.64}$	$0.95^{+0.54}_{-0.52}$	$1.02^{+0.61}_{-0.61}$
4.8	$0.20^{+0.15}_{-0.14}$	$0.41^{+0.29}_{-0.28}$	$0.59^{+0.35}_{-0.33}$	$0.40^{+0.26}_{-0.25}$	$1.02^{+0.65}_{-0.62}$	$0.90^{+0.52}_{-0.50}$	$0.96^{+0.58}_{-0.59}$
4.9	$0.19^{+0.15}_{-0.14}$	$0.39^{+0.28}_{-0.27}$	$0.56^{+0.34}_{-0.32}$	$0.38^{+0.25}_{-0.24}$	$0.97^{+0.63}_{-0.61}$	$0.86^{+0.50}_{-0.48}$	$0.91^{+0.56}_{-0.54}$
5.0	$0.18^{+0.14}_{-0.14}$	$0.37^{+0.27}_{-0.26}$	$0.53^{+0.33}_{-0.31}$	$0.36^{+0.25}_{-0.24}$	$0.92^{+0.61}_{-0.58}$	$0.81^{+0.48}_{-0.52}$	$0.87^{+0.54}_{-0.55}$

Tabela 4.4: Função de seleção para os dados de Gabasch et al. (2006). A coluna 5 apresenta os valores de  $\psi$  total das bandas vermelhas referente a combinação das colunas 2, 3 e 4 pela equação (4.19).

$z$	$\psi^{r'}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{i'}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{z'}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$\psi^{red}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )
0.45	$62.6^{+14.5}_{-14.4}$	$64.0^{+14.5}_{-14.5}$	$72.6^{+19.8}_{-19.2}$	$66.4^{+16.2}_{-16.1}$
0.55	$50.4^{+11.7}_{-11.6}$	$51.5^{+11.6}_{-11.6}$	$58.3^{+15.8}_{-15.3}$	$53.4^{+13.0}_{-12.8}$
0.65	$41.7^{+9.8}_{-9.7}$	$42.6^{+9.7}_{-9.7}$	$48.1^{+13.5}_{-13.2}$	$44.1^{+10.7}_{-10.7}$
0.75	$35.2^{+8.4}_{-8.4}$	$35.9^{+8.2}_{-8.2}$	$40.5^{+11.2}_{-11.0}$	$37.2^{+9.3}_{-9.2}$
0.85	$30.2^{+7.4}_{-7.3}$	$30.8^{+7.1}_{-7.2}$	$34.7^{+9.6}_{-9.6}$	$31.9^{+8.1}_{-8.0}$
0.95	$26.3^{+6.5}_{-6.5}$	$26.7^{+6.3}_{-6.3}$	$30.1^{+8.6}_{-8.5}$	$27.7^{+7.1}_{-7.1}$
1.05	$23.1^{+5.9}_{-5.9}$	$23.4^{+5.6}_{-5.7}$	$26.4^{+7.7}_{-7.6}$	$24.3^{+6.4}_{-6.4}$
1.15	$20.4^{+5.4}_{-5.3}$	$20.7^{+5.1}_{-5.1}$	$23.3^{+6.9}_{-6.9}$	$21.5^{+5.8}_{-5.8}$
1.25	$18.3^{+4.9}_{-4.8}$	$18.5^{+4.6}_{-4.6}$	$20.8^{+6.3}_{-6.3}$	$19.2^{+5.3}_{-5.3}$
1.35	$16.4^{+4.5}_{-4.5}$	$16.6^{+4.3}_{-4.3}$	$18.7^{+5.7}_{-5.7}$	$17.2^{+4.9}_{-4.9}$
1.45	$14.8^{+4.2}_{-4.2}$	$15.0^{+4.0}_{-4.0}$	$16.8^{+5.3}_{-5.3}$	$15.5^{+4.5}_{-4.5}$
1.55	$13.5^{+3.9}_{-3.9}$	$13.6^{+3.7}_{-3.7}$	$15.3^{+4.9}_{-4.9}$	$14.1^{+4.2}_{-4.2}$
1.65	$12.3^{+3.7}_{-3.7}$	$12.3^{+3.4}_{-3.4}$	$13.9^{+4.6}_{-4.6}$	$12.9^{+3.9}_{-3.9}$
1.75	$11.3^{+3.5}_{-3.4}$	$11.3^{+3.2}_{-3.2}$	$12.7^{+4.3}_{-4.3}$	$11.8^{+3.7}_{-3.7}$
1.85	$10.4^{+3.3}_{-3.2}$	$10.3^{+3.0}_{-3.0}$	$11.7^{+4.0}_{-4.0}$	$10.9^{+3.4}_{-3.4}$
1.95	$9.6^{+3.1}_{-3.0}$	$9.5^{+2.8}_{-2.9}$	$10.8^{+3.8}_{-3.8}$	$9.9^{+3.2}_{-3.2}$
2.05	$8.8^{+2.9}_{-2.9}$	$8.8^{+2.7}_{-2.7}$	$9.9^{+3.6}_{-3.6}$	$9.2^{+3.1}_{-3.1}$
2.15	$8.2^{+2.8}_{-2.8}$	$8.1^{+2.6}_{-2.6}$	$9.2^{+3.4}_{-3.4}$	$8.5^{+2.9}_{-2.9}$
2.25	$7.6^{+2.7}_{-2.6}$	$7.5^{+2.4}_{-2.4}$	$8.5^{+3.2}_{-3.2}$	$7.9^{+2.8}_{-2.8}$

Tabela 4.4 continuação

$z$	$\psi^r$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )	$\psi^i$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )	$\psi^z$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )	$\psi^{red}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )
2.35	$7.1^{+2.6}_{-2.5}$	$7.0^{+2.3}_{-2.3}$	$7.9^{+3.0}_{-3.1}$	$7.4^{+2.6}_{-2.6}$
2.45	$6.6^{+2.4}_{-2.3}$	$6.5^{+2.2}_{-2.2}$	$7.4^{+2.9}_{-2.9}$	$6.9^{+2.5}_{-2.5}$
2.55	$6.2^{+2.3}_{-2.3}$	$6.1^{+2.1}_{-2.1}$	$6.9^{+2.7}_{-2.8}$	$6.4^{+2.4}_{-2.4}$
2.65	$5.8^{+2.2}_{-2.2}$	$5.7^{+2.0}_{-2.0}$	$6.5^{+2.6}_{-2.7}$	$6.0^{+2.3}_{-2.3}$
2.75	$5.5^{+2.1}_{-2.1}$	$5.3^{+1.9}_{-1.9}$	$6.1^{+2.5}_{-2.6}$	$5.6^{+2.2}_{-2.2}$
2.85	$5.1^{+2.0}_{-2.0}$	$5.0^{+1.8}_{-1.8}$	$5.7^{+2.4}_{-2.4}$	$5.3^{+2.1}_{-2.1}$
2.95	$4.8^{+1.9}_{-1.9}$	$4.7^{+1.7}_{-1.7}$	$5.4^{+2.3}_{-2.3}$	$5.0^{+2.0}_{-2.0}$
3.05	$4.6^{+1.9}_{-1.8}$	$4.4^{+1.7}_{-1.7}$	$5.1^{+2.3}_{-2.3}$	$4.7^{+1.9}_{-1.9}$
3.15	$4.3^{+1.8}_{-1.8}$	$4.1^{+1.6}_{-1.6}$	$4.8^{+2.1}_{-2.2}$	$4.4^{+1.9}_{-1.9}$
3.25	$4.1^{+1.7}_{-1.7}$	$3.9^{+1.6}_{-1.6}$	$4.5^{+2.0}_{-2.0}$	$4.2^{+1.8}_{-1.8}$
3.35	$3.9^{+1.7}_{-1.7}$	$3.7^{+1.5}_{-1.5}$	$4.2^{+2.0}_{-2.0}$	$3.9^{+1.7}_{-1.7}$
3.45	$3.7^{+1.6}_{-1.6}$	$3.4^{+1.4}_{-1.4}$	$4.0^{+1.9}_{-1.9}$	$3.7^{+1.7}_{-1.7}$
3.55	$3.5^{+1.6}_{-1.6}$	$3.3^{+1.4}_{-1.4}$	$3.8^{+1.8}_{-1.8}$	$3.5^{+1.6}_{-1.6}$
3.65	$3.3^{+1.5}_{-1.5}$	$3.1^{+1.3}_{-1.3}$	$3.6^{+1.8}_{-1.8}$	$3.3^{+1.6}_{-1.6}$
3.75	$3.1^{+1.5}_{-1.5}$	$2.9^{+1.3}_{-1.3}$	$3.4^{+1.7}_{-1.7}$	$3.2^{+1.5}_{-1.5}$

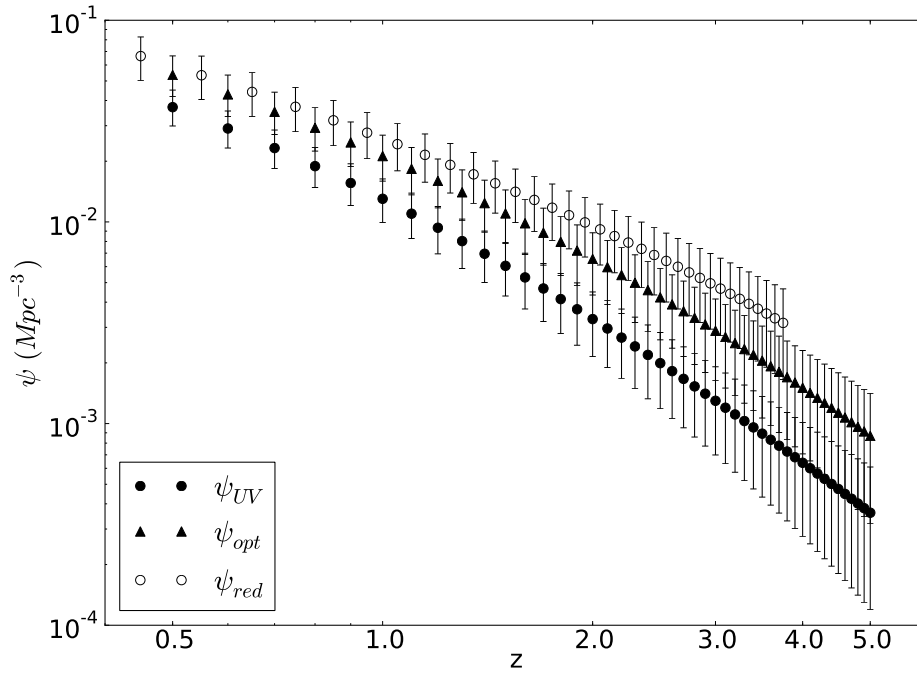


Figura 4.2: Evolução das funções de seleção com o desvio para o vermelho das bandas ultravioletas, ópticas e vermelhas, calculadas para os dados apresentados em G04 e G06. É interessante notar que a amplitude das vermelhas é levemente maior do que a das ópticas que por sua vez é maior do que a UV.

### 4.3 Contagem Numérica Observacional

Para estabelecer uma conexão entre a previsão teórica de uma grandeza  $T(\zeta)$  em um dado valor do parâmetro  $\zeta$  e a correspondente observação  $[T(\zeta)]_{obs}$  para o mesmo valor de  $\zeta$ , assume-se que estas quantidades estejam relacionadas através de uma *função de completudeza*  $J(\zeta)$  conforme (Ribeiro & Stoeger 2003, Albani et al. 2007, Iribarrem et al. 2011),

$$[T(\zeta)]_{obs} = J(\zeta)T(\zeta). \quad (4.20)$$

Tal função  $J(\zeta)$  explicita a proximidade entre a previsão teórica e o comportamento observacional para a grandeza  $T(\zeta)$  considerada.

Partindo dessa concepção pode-se relacionar a função de seleção obtida a partir dos dados observacionais com a densidade numérica em volume comóvel  $n_c$  proveniente do modelo cosmológico assumido, escrevendo-se

$$\psi(z) = J(z)n_c, \quad (4.21)$$

em que

$$n_c = N/V_c \quad (4.22)$$

onde  $N$  é o número de galáxias e  $V_c$  o volume comóvel. Na relação anterior utiliza-se a densidade numérica comóvel pois é usual que a FL seja expressa usando o volume comóvel.

De forma similar pode-se definir a contagem numérica observacional  $[dN/dz]_{obs}$  partindo de uma relação do tipo (4.20). Assim, a contagem numérica relativística  $dN/dz$ , pode ser obtida como na equação (4.21), isto é,

$$\left[ \frac{dN}{dz} \right]_{obs} = J(z) \frac{dN}{dz} = \frac{\psi(z)}{n_c(z)} \frac{dN}{dz}. \quad (4.23)$$

A equação 4.23 pode ser reescrita como,

$$\left[ \frac{dN}{dz} \right]_{obs} = \frac{V_c}{V_{Pr}} \frac{\psi}{n} \frac{dN}{dz}, \quad (4.24)$$

sendo  $n$  a densidade numérica em volume próprio, dada por,

$$n = \frac{N}{V_{Pr}}. \quad (4.25)$$

A relação (4.24) foi expressa de modo que  $[dN/dz]_{obs}$  seja independente de volume.

Conforme discutido no capítulo 2, a contagem numérica diferencial teórica apresentada em Ellis (1971) pode ser reescrita como (Ribeiro & Stoeger 2003),

$$\left[ \frac{dN}{dz} \right] = n (d_A)^2 (1+z) d\Omega \frac{dy}{dz}. \quad (4.26)$$

Substituindo a expressão (4.26) na equação (4.24) obtém-se,

$$\left[ \frac{dN}{dz} \right]_{obs} = \left[ \frac{V_c}{V_{Pr}} (d_A)^2 (1+z) d\Omega \frac{dy}{dz} \right] \psi, \quad (4.27)$$

onde  $d\Omega$  é o ângulo sólido igual a  $4\pi$  para todo o céu e  $y$  um parâmetro afim da métrica considerada. Deve-se ressaltar que esta expressão é geral e pode ser aplicada para qualquer modelo cosmológico. A cosmologia aparece nos termos dentro dos colchetes. Ademais, pode-se considerar que o levantamento tenha sido efetuado em mais de uma banda e com tipos morfológicos diferentes, o que nos remete à relação (4.11) para  $\psi$ . Assim  $[dN/dz]_{obs}$  torna-se (Albani et al. 2007, Iribarrem et al. 2011),

$$\left[ \frac{dN}{dz} \right]_{obs} = \left[ \frac{V_c}{V_{Pr}} (d_A)^2 (1+z) d\Omega \frac{dy}{dz} \right] \sum_W a_W \frac{\sum_\nu P_\nu M_\nu \psi_\nu^W}{\sum_\nu P_\nu M_\nu}. \quad (4.28)$$

As equações (4.23), (4.24), (4.27) e (4.28) são equivalentes, sendo as duas primeiras formas mais compactas, a terceira explicita os parâmetros relativísticos e a quarta, além de mostrar os termos relativísticos expande para diferentes tipos morfológicos e bandas de observação.

No presente trabalho foi usada a expressão (4.23) devido a sua simplicidade, contudo o cálculo poderia ter sido feito com qualquer uma das outras relações apresentadas. Na tabela 4.5 encontram-se os resultados de  $dN/dz$  observacional baseados nos dados de G04 e G06. Por motivo de comparação também são apresentados os valores de  $dN/dz$  teórico e verifica-se uma diferença de aproximadamente uma ordem de grandeza entre os valores providos da observação e os previstos pela teoria.

A figura 4.3 ilustra o comportamento da contagem numérica observacional de galáxias para as bandas UV, ópticas e vermelhas. Nas três bandas percebe-se um comportamento parecido, todavia a amplitude da curva para as vermelhas é ligeiramente maior do que para as ópticas e esta é maior do que para as UV.

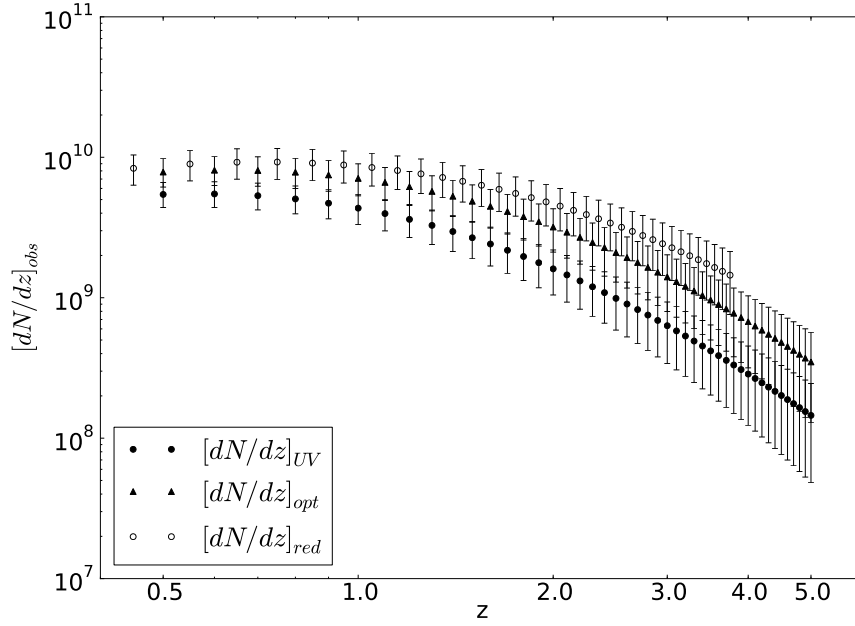


Figura 4.3: Evolução da contagem numérica diferencial de galáxias com o desvio para o vermelho das bandas UV, ópticas e vermelhas, calculadas para os dados apresentados em G04 e G06. Similarmente às funções de seleção, verifica-se que a amplitude de  $[dN/dz]_{obs}$  para as galáxias das bandas vermelhas é levemente maior do que a das ópticas que por sua vez é maior do que a das UV.

Tabela 4.5: Contagem numérica diferencial teórica e observacional em função do desvio para o vermelho, assumindo o modelo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ . Nas colunas 2 e 6 estão os valores teóricos referentes ao desvio para o vermelho da coluna 1 e 5, respectivamente. As colunas 3, 4 e 7 apresentam observacionais de  $dN/dz$  para as bandas UV, óptica e vermelhas, respectivamente.

$z$	$dN/dz$ ( $\times 10^{10}$ )	$[dN/dz]_{UV}$ ( $\times 10^9$ )	$[dN/dz]_{opt}$ ( $\times 10^9$ )	$z$	$dN/dz$ ( $\times 10^{10}$ )	$[dN/dz]_{red}$ ( $\times 10^9$ )
0.5	6.07	$5.44^{+1.17}_{-1.05}$	$7.85^{+1.91}_{-1.72}$	0.45	5.20	$8.35^{+2.04}_{-2.02}$
0.6	7.80	$5.48^{+1.21}_{-1.10}$	$8.09^{+2.00}_{-1.80}$	0.55	6.94	$8.96^{+2.19}_{-2.16}$
0.7	9.48	$5.33^{+1.22}_{-1.11}$	$8.06^{+2.02}_{-1.84}$	0.65	8.65	$9.23^{+2.27}_{-2.25}$
0.8	11.05	$5.05^{+1.19}_{-1.09}$	$7.83^{+2.01}_{-1.84}$	0.75	10.28	$9.25^{+2.30}_{-2.28}$
0.9	12.49	$4.71^{+1.16}_{-1.07}$	$7.49^{+1.97}_{-1.81}$	0.85	11.79	$9.09^{+2.30}_{-2.28}$
1.0	13.80	$4.34^{+1.11}_{-1.03}$	$7.08^{+1.91}_{-1.76}$	0.95	13.16	$8.81^{+2.27}_{-2.26}$
1.1	14.95	$3.97^{+1.05}_{-0.98}$	$6.63^{+1.83}_{-1.70}$	1.05	14.39	$8.46^{+2.23}_{-2.22}$
1.2	15.97	$3.61^{+0.99}_{-0.93}$	$6.17^{+1.75}_{-1.64}$	1.15	15.48	$8.05^{+2.17}_{-2.16}$
1.3	16.85	$3.27^{+0.93}_{-0.88}$	$5.72^{+1.66}_{-1.57}$	1.25	16.43	$7.62^{+2.10}_{-2.10}$
1.4	17.61	$2.96^{+0.88}_{-0.83}$	$5.28^{+1.58}_{-1.49}$	1.35	17.25	$7.18^{+2.03}_{-2.02}$
1.5	18.26	$2.67^{+0.82}_{-0.78}$	$4.87^{+1.49}_{-1.42}$	1.45	17.95	$6.75^{+1.95}_{-1.95}$
1.6	18.80	$2.41^{+0.77}_{-0.73}$	$4.48^{+1.41}_{-1.35}$	1.55	18.54	$6.32^{+1.87}_{-1.87}$
1.7	19.25	$2.18^{+0.72}_{-0.68}$	$4.12^{+1.33}_{-1.27}$	1.65	19.03	$5.92^{+1.80}_{-1.80}$
1.8	19.61	$1.97^{+0.67}_{-0.64}$	$3.78^{+1.25}_{-1.21}$	1.75	19.44	$5.53^{+1.72}_{-1.72}$
1.9	19.90	$1.78^{+0.62}_{-0.60}$	$3.47^{+1.18}_{-1.14}$	1.85	19.76	$5.16^{+1.64}_{-1.65}$
2.0	20.13	$1.61^{+0.58}_{-0.56}$	$3.19^{+1.11}_{-1.08}$	1.95	20.02	$4.82^{+1.57}_{-1.57}$
2.1	20.29	$1.45^{+0.54}_{-0.52}$	$2.93^{+1.05}_{-1.02}$	2.05	20.22	$4.49^{+1.50}_{-1.50}$
2.2	20.41	$1.32^{+0.51}_{-0.49}$	$2.69^{+0.98}_{-0.96}$	2.15	20.36	$4.19^{+1.43}_{-1.43}$
2.3	20.49	$1.20^{+0.47}_{-0.46}$	$2.48^{+0.93}_{-0.91}$	2.25	20.45	$3.91^{+1.37}_{-1.37}$
2.4	20.53	$1.09^{+0.44}_{-0.43}$	$2.28^{+0.87}_{-0.85}$	2.35	20.51	$3.65^{+1.30}_{-1.31}$
2.5	20.52	$0.99^{+0.41}_{-0.40}$	$2.10^{+0.82}_{-0.81}$	2.45	20.52	$3.40^{+1.24}_{-1.25}$
2.6	20.49	$0.90^{+0.39}_{-0.38}$	$1.93^{+0.78}_{-0.76}$	2.55	20.51	$3.18^{+1.19}_{-1.19}$
2.7	20.44	$0.82^{+0.36}_{-0.35}$	$1.78^{+0.73}_{-0.72}$	2.65	20.47	$2.97^{+1.13}_{-1.13}$
2.8	20.36	$0.75^{+0.34}_{-0.33}$	$1.65^{+0.69}_{-0.68}$	2.75	20.40	$2.77^{+1.08}_{-1.08}$

Tabela 4.5 continuação

$z$	$dN/dz$ ( $\times 10^{10}$ )	$[dN/dz]_{UV}$ ( $\times 10^9$ )	$[dN/dz]_{opt}$ ( $\times 10^9$ )	$z$	$dN/dz$ ( $\times 10^{10}$ )	$[dN/dz]_{red}$ ( $\times 10^9$ )
2.9	20.26	$0.69^{+0.32}_{-0.31}$	$1.52^{+0.65}_{-0.64}$	2.85	20.31	$2.59^{+1.03}_{-1.03}$
3.0	20.15	$0.63^{+0.30}_{-0.29}$	$1.41^{+0.61}_{-0.61}$	2.95	20.21	$2.42^{+0.99}_{-0.99}$
3.1	20.02	$0.58^{+0.28}_{-0.27}$	$1.30^{+0.58}_{-0.58}$	3.05	20.09	$2.27^{+0.94}_{-0.94}$
3.2	19.88	$0.53^{+0.27}_{-0.26}$	$1.21^{+0.55}_{-0.54}$	3.15	19.95	$2.12^{+0.90}_{-0.90}$
3.3	19.73	$0.49^{+0.25}_{-0.24}$	$1.12^{+0.52}_{-0.52}$	3.25	19.81	$1.99^{+0.86}_{-0.86}$
3.4	19.58	$0.45^{+0.24}_{-0.23}$	$1.04^{+0.49}_{-0.49}$	3.35	19.66	$1.87^{+0.82}_{-0.82}$
3.5	19.41	$0.42^{+0.22}_{-0.22}$	$0.96^{+0.47}_{-0.46}$	3.45	19.49	$1.75^{+0.79}_{-0.79}$
3.6	19.24	$0.39^{+0.21}_{-0.20}$	$0.90^{+0.44}_{-0.44}$	3.55	19.32	$1.64^{+0.75}_{-0.75}$
3.7	19.06	$0.36^{+0.20}_{-0.19}$	$0.83^{+0.42}_{-0.42}$	3.65	19.15	$1.54^{+0.72}_{-0.72}$
3.8	18.88	$0.33^{+0.19}_{-0.18}$	$0.78^{+0.40}_{-0.40}$	3.75	18.97	$1.45^{+0.69}_{-0.69}$
3.9	18.70	$0.31^{+0.18}_{-0.17}$	$0.72^{+0.38}_{-0.38}$			
4.0	18.51	$0.29^{+0.17}_{-0.16}$	$0.67^{+0.36}_{-0.36}$			
4.1	18.32	$0.27^{+0.16}_{-0.15}$	$0.63^{+0.34}_{-0.34}$			
4.2	18.13	$0.25^{+0.15}_{-0.15}$	$0.59^{+0.32}_{-0.32}$			
4.3	17.94	$0.23^{+0.14}_{-0.14}$	$0.55^{+0.31}_{-0.31}$			
4.4	17.75	$0.22^{+0.13}_{-0.13}$	$0.51^{+0.29}_{-0.29}$			
4.5	17.56	$0.20^{+0.13}_{-0.12}$	$0.48^{+0.28}_{-0.28}$			
4.6	17.37	$0.19^{+0.12}_{-0.12}$	$0.45^{+0.26}_{-0.27}$			
4.7	17.18	$0.18^{+0.12}_{-0.11}$	$0.42^{+0.25}_{-0.25}$			
4.8	16.99	$0.17^{+0.11}_{-0.11}$	$0.40^{+0.24}_{-0.24}$			
4.9	16.81	$0.15^{+0.10}_{-0.10}$	$0.37^{+0.23}_{-0.23}$			
5.0	16.62	$0.145^{+0.100}_{-0.097}$	$0.35^{+0.22}_{-0.22}$			





## Capítulo 5

---

# Densidades Numéricas

---

Para facilitar a notação, a partir de agora, uma determinada distância observacional será chamada genericamente  $d_i$ , que pode se referir a qualquer uma das quatro definidas anteriormente ( $i = A, G, L, Z$ ). A seguir serão apresentadas as densidades diferenciais e integrais, grandezas fundamentais para o presente trabalho, uma vez que o espectro de potência será obtido a partir delas.

### 5.1 Densidades Diferenciais

Seguindo Wertz (1971), Ribeiro (2005) define a densidade diferencial relativística  $\gamma(d_i) = \gamma_i$  a uma certa distância  $d_i$  segundo

$$\gamma_i = \frac{1}{S_i} \frac{dN}{d(d_i)}, \quad (5.1)$$

onde  $N$  é a contagem numérica e  $S_i$  a área de uma casca esférica observada de raio  $d_i$  escrita como,

$$S_i = 4\pi(d_i)^2. \quad (5.2)$$

Tal grandeza essencialmente fornece a taxa de crescimento na contagem numérica de galáxias a uma distância observável  $d_i$ . É conveniente do ponto de vista numérico escrever  $\gamma_i$  em termos de  $z$ ,

$$\gamma_i = \frac{dN}{dz} \left\{ S_i \frac{d(d_i)}{dz} \right\}^{-1}. \quad (5.3)$$

pois pode-se obter numericamente  $z$ ,  $d_i$ ,  $\frac{d(d_i)}{dz}$  e  $dN/dz$  em função de  $r$  para o modelo  $\Lambda$ CDM, conforme foi mostrado no capítulo 2.

As densidades diferenciais para o modelo EdS podem ser obtidas através das equações (3.40), (3.43), (3.48), (3.60), (3.61) juntamente com a relação (5.3) resultando em (Rangel Lemos & Ribeiro 2008),

$$\gamma_A^{EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{M}_g G} \left[ \frac{(1+z)^3}{3 - 2\sqrt{1+z}} \right], \quad (5.4)$$

$$\gamma_G^{EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{M}_g G}, \quad (5.5)$$

$$\gamma_L^{EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{M}_g G} \left[ \frac{1}{(2\sqrt{1+z}-1)(1+z)^3} \right], \quad (5.6)$$

$$\gamma_Z^{EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{M}_g G} \left[ \frac{4(1+z-\sqrt{1+z})^2}{z^2(1+z)^{7/2}} \right]. \quad (5.7)$$

A figura 5.1 ilustra o comportamento das densidades diferenciais para dois modelos cosmológicos discutidos nesta dissertação,  $\Lambda$ CDM e EdS.

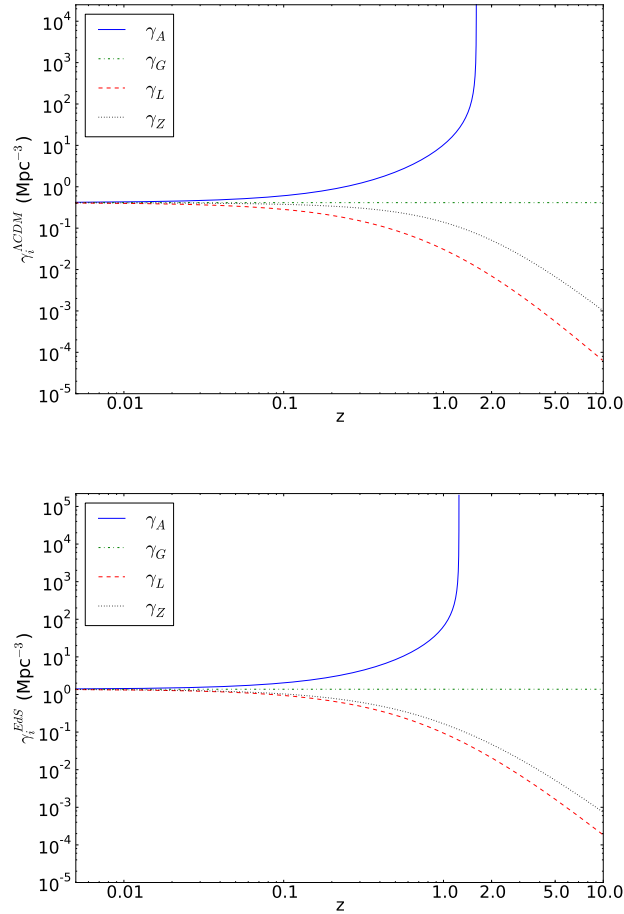


Figura 5.1: Evolução das densidades diferenciais teóricas para as quatro distâncias, assumindo os modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM e EdS. O comportamento dessas grandezas é similar para ambos os modelos, porém a amplitude é diferente como pode ser notado ao se comparar a escala dos gráficos.

As densidades diferenciais observacionais podem ser obtidas quando se substitui na equação (5.3) o  $dN/dz$  relativístico pelo  $dN/dz$  observacional proveniente dos dados da função de luminosidade, que se encontram na tabela 4.5. Os resultados observacionais de  $\gamma_i$  estão nas tabelas 5.1 e 5.2 para as bandas UV e ópticas e vermelhas, respectivamente. A figura 5.2 mostra o comportamento dessas densidades observacionais para os três tipos de bandas. Note que os valores de  $\gamma_i$  observacionais são menores do que os teóricos, e em especial  $[\gamma_G]_{obs}$  que decresce com  $z$  enquanto que o da teoria se mantém constante.

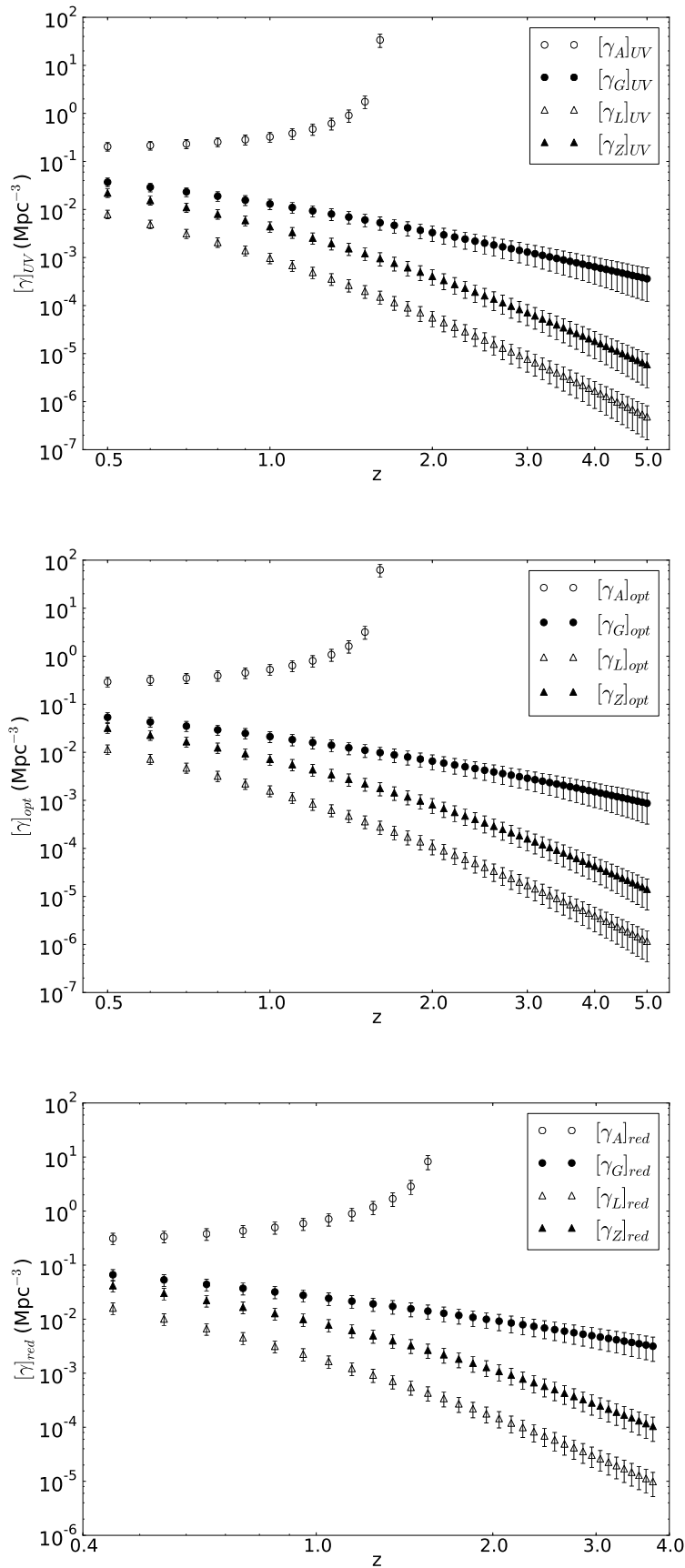


Figura 5.2: Evolução das densidades diferenciais das bandas UV, ópticas e vermelhas em função do desvio para o vermelho para as quatro distâncias baseadas no modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ .

Tabela 5.1: Densidades diferenciais  $\gamma$  para as quatro diferentes distâncias discutidas nesta dissertação, considerando o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$  e os dados de G04. Nas colunas 2, 3, 4 e 5 encontram-se os valores de  $\gamma$  referente às bandas UV. Enquanto as colunas 6, 7, 8 e 9 apresentam os valores de  $\gamma$  das bandas ópticas. Essas densidades foram obtidas pela equação (5.3).

$z$	$[\gamma_A]_{UV}$ ( $10^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_L]_{UV}$ ( $10^{-5} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_G]_{UV}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_Z]_{UV}$ ( $10^{-4} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_A]_{opt}$ ( $10^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_L]_{opt}$ ( $10^{-4} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_G]_{opt}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_Z]_{opt}$ ( $10^{-4} \text{ Mpc}^{-3}$ )
0.50	$2.03^{+0.44}_{-0.48}$	$793.4^{+170.6}_{-153.5}$	$37.1^{+7.0}_{-6.2}$	$220.4^{+47.4}_{-34.9}$	$2.94^{+0.71}_{-0.78}$	$114.6^{+27.9}_{-26.1}$	$53.5^{+13.7}_{-10.6}$	$318.3^{+77.4}_{-58.9}$
0.60	$2.15^{+0.43}_{-0.53}$	$490.3^{+98.0}_{-71.6}$	$29.1^{+5.8}_{-5.3}$	$154.3^{+30.8}_{-25.1}$	$3.18^{+0.78}_{-0.88}$	$72.4^{+16.1}_{-11.9}$	$42.9^{+8.6}_{-8.0}$	$227.8^{+50.7}_{-41.8}$
0.70	$2.32^{+0.48}_{-0.55}$	$313.9^{+65.2}_{-48.9}$	$23.2^{+4.8}_{-4.1}$	$110.1^{+22.9}_{-17.3}$	$3.51^{+0.80}_{-0.92}$	$47.5^{+10.8}_{-7.5}$	$35.2^{+8.8}_{-6.9}$	$166.6^{+41.8}_{-31.8}$
0.80	$2.54^{+0.60}_{-0.70}$	$207.0^{+44.9}_{-34.4}$	$18.9^{+3.8}_{-3.3}$	$80.0^{+18.9}_{-14.5}$	$3.94^{+1.01}_{-1.1}$	$32.1^{+8.2}_{-5.8}$	$29.3^{+7.5}_{-6.0}$	$124.0^{+29.1}_{-24.6}$
0.90	$2.84^{+0.64}_{-0.77}$	$140.1^{+34.7}_{-24.7}$	$15.6^{+3.8}_{-3.1}$	$58.9^{+14.5}_{-11.2}$	$4.5^{+1.1}_{-1.3}$	$22.3^{+5.8}_{-4.3}$	$24.8^{+6.5}_{-5.3}$	$93.7^{+24.6}_{-19.3}$
1.00	$3.25^{+0.83}_{-0.94}$	$96.9^{+24.7}_{-18.1}$	$13.0^{+3.3}_{-2.7}$	$44.0^{+11.2}_{-10.4}$	$5.3^{+1.4}_{-1.8}$	$15.8^{+4.3}_{-3.2}$	$21.2^{+5.7}_{-4.7}$	$71.7^{+19.3}_{-17.9}$
1.10	$3.83^{+1.01}_{-1.13}$	$68.4^{+18.1}_{-16.9}$	$11.0^{+2.9}_{-2.6}$	$33.3^{+8.8}_{-8.2}$	$6.4^{+1.8}_{-2.4}$	$11.4^{+3.2}_{-2.9}$	$18.3^{+5.3}_{-4.7}$	$55.5^{+15.3}_{-14.3}$
1.20	$4.7^{+1.3}_{-1.8}$	$49.1^{+15.7}_{-10.2}$	$9.4^{+2.6}_{-2.3}$	$25.4^{+7.4}_{-6.6}$	$8.0^{+2.9}_{-3.1}$	$8.4^{+2.4}_{-2.2}$	$16.0^{+4.5}_{-4.2}$	$43.4^{+12.3}_{-10.0}$
1.30	$6.2^{+1.7}_{-2.1}$	$35.9^{+9.6}_{-7.9}$	$8.0^{+2.2}_{-1.9}$	$19.6^{+5.3}_{-4.3}$	$10.8^{+3.0}_{-4.8}$	$6.3^{+1.7}_{-1.4}$	$14.0^{+3.8}_{-3.5}$	$34.3^{+9.4}_{-8.2}$
1.40	$9.1^{+2.7}_{-3.5}$	$26.5^{+7.4}_{-5.8}$	$7.0^{+2.1}_{-1.8}$	$15.3^{+4.3}_{-3.5}$	$16.2^{+4.6}_{-3.3}$	$4.7^{+1.3}_{-1.1}$	$12.4^{+3.7}_{-3.2}$	$27.3^{+7.7}_{-6.4}$
1.50	$17.5^{+5.4}_{-7.1}$	$19.9^{+6.1}_{-4.8}$	$6.1^{+1.9}_{-1.6}$	$12.0^{+3.7}_{-3.5}$	$31.9^{+9.8}_{-9.3}$	$3.6^{+1.1}_{-0.8}$	$11.0^{+3.4}_{-3.2}$	$21.9^{+6.7}_{-5.6}$
1.60	$338.3^{+107.6}_{-102.3}$	$15.1^{+4.8}_{-3.6}$	$5.3^{+1.6}_{-1.5}$	$9.5^{+3.0}_{-2.9}$	$627.8^{+197.8}_{-188.7}$	$2.81^{+0.88}_{-0.71}$	$9.8^{+3.0}_{-2.7}$	$17.7^{+5.6}_{-5.3}$
1.70	$-19.3^{+6.3}_{-6.0}$	$11.6^{+3.8}_{-3.6}$	$4.7^{+1.5}_{-1.4}$	$7.6^{+2.5}_{-2.4}$	$-36.4^{+11.8}_{-11.3}$	$2.19^{+0.71}_{-0.68}$	$8.8^{+2.9}_{-2.7}$	$14.4^{+4.7}_{-4.5}$
1.80	$-9.3^{+3.2}_{-3.0}$	$9.0^{+3.1}_{-2.9}$	$4.1^{+1.4}_{-1.3}$	$6.1^{+2.1}_{-2.0}$	$-17.9^{+5.9}_{-5.7}$	$1.73^{+0.57}_{-0.52}$	$8.0^{+2.6}_{-2.5}$	$11.8^{+3.9}_{-3.8}$
1.90	$-6.1^{+2.1}_{-2.5}$	$7.0^{+2.5}_{-2.4}$	$3.7^{+1.3}_{-1.2}$	$5.0^{+1.8}_{-1.5}$	$-12.0^{+3.1}_{-3.9}$	$1.38^{+0.47}_{-0.49}$	$7.2^{+2.5}_{-2.3}$	$9.7^{+3.3}_{-3.2}$
2.00	$-4.5^{+1.6}_{-1.9}$	$5.6^{+2.0}_{-1.9}$	$3.3^{+1.2}_{-1.1}$	$4.1^{+1.4}_{-1.2}$	$-9.0^{+3.0}_{-3.2}$	$1.10^{+0.37}_{-0.32}$	$6.6^{+2.2}_{-2.1}$	$8.1^{+2.7}_{-2.3}$
2.10	$-3.6^{+1.4}_{-1.2}$	$4.4^{+1.7}_{-1.6}$	$3.0^{+1.1}_{-1.1}$	$3.3^{+1.2}_{-1.0}$	$-7.3^{+2.5}_{-2.2}$	$0.89^{+0.32}_{-0.31}$	$6.0^{+2.1}_{-2.0}$	$6.7^{+2.4}_{-2.3}$
2.20	$-3.0^{+1.2}_{-1.1}$	$3.6^{+1.4}_{-1.3}$	$2.67^{+1.03}_{-0.99}$	$2.8^{+1.1}_{-1.0}$	$-6.1^{+2.2}_{-2.0}$	$0.73^{+0.27}_{-0.22}$	$5.5^{+2.0}_{-1.9}$	$5.6^{+2.1}_{-2.0}$
2.30	$-2.56^{+1.01}_{-0.98}$	$2.9^{+1.1}_{-1.1}$	$2.41^{+0.96}_{-0.88}$	$2.29^{+0.91}_{-0.88}$	$-5.3^{+2.0}_{-1.9}$	$0.59^{+0.22}_{-0.22}$	$5.0^{+1.9}_{-1.8}$	$4.7^{+1.8}_{-1.7}$
2.40	$-2.23^{+0.91}_{-0.88}$	$2.34^{+0.95}_{-0.92}$	$2.19^{+0.89}_{-0.86}$	$1.91^{+0.78}_{-0.75}$	$-4.7^{+1.8}_{-1.8}$	$0.49^{+0.19}_{-0.18}$	$4.6^{+1.8}_{-1.7}$	$4.0^{+1.5}_{-1.5}$
2.50	$-1.98^{+0.83}_{-0.80}$	$1.91^{+0.80}_{-0.78}$	$1.99^{+0.84}_{-0.81}$	$1.60^{+0.67}_{-0.65}$	$-4.2^{+1.6}_{-1.6}$	$0.41^{+0.16}_{-0.16}$	$4.2^{+1.7}_{-1.6}$	$3.4^{+1.3}_{-1.3}$
2.60	$-1.78^{+0.77}_{-0.74}$	$1.57^{+0.68}_{-0.66}$	$1.82^{+0.78}_{-0.74}$	$1.35^{+0.58}_{-0.56}$	$-3.8^{+1.5}_{-1.5}$	$0.34^{+0.14}_{-0.13}$	$3.9^{+1.9}_{-1.5}$	$2.9^{+1.2}_{-1.0}$
2.70	$-1.62^{+0.69}_{-0.67}$	$1.30^{+0.56}_{-0.54}$	$1.67^{+0.71}_{-0.69}$	$1.14^{+0.49}_{-0.47}$	$-3.5^{+1.4}_{-1.4}$	$0.28^{+0.11}_{-0.11}$	$3.6^{+1.5}_{-1.5}$	$2.5^{+1.0}_{-1.0}$
2.80	$-1.48^{+0.65}_{-0.63}$	$1.09^{+0.49}_{-0.48}$	$1.53^{+0.69}_{-0.65}$	$0.97^{+0.44}_{-0.43}$	$-3.2^{+1.4}_{-1.4}$	$0.237^{+0.099}_{-0.098}$	$3.3^{+1.4}_{-1.4}$	$2.13^{+0.89}_{-0.88}$
2.90	$-1.36^{+0.61}_{-0.60}$	$0.91^{+0.42}_{-0.41}$	$1.41^{+0.65}_{-0.62}$	$0.83^{+0.39}_{-0.37}$	$-3.0^{+1.3}_{-1.3}$	$0.200^{+0.086}_{-0.085}$	$3.1^{+1.3}_{-1.3}$	$1.83^{+0.78}_{-0.77}$
3.00	$-1.27^{+0.60}_{-0.58}$	$0.76^{+0.36}_{-0.35}$	$1.30^{+0.62}_{-0.60}$	$0.71^{+0.33}_{-0.33}$	$-2.8^{+1.2}_{-1.2}$	$0.170^{+0.074}_{-0.073}$	$2.9^{+1.3}_{-1.2}$	$1.58^{+0.69}_{-0.68}$
3.10	$-1.18^{+0.57}_{-0.56}$	$0.64^{+0.31}_{-0.30}$	$1.20^{+0.58}_{-0.57}$	$0.61^{+0.30}_{-0.29}$	$-2.7^{+1.2}_{-1.2}$	$0.145^{+0.064}_{-0.064}$	$2.7^{+1.2}_{-1.2}$	$1.37^{+0.61}_{-0.61}$
3.20	$-1.11^{+0.55}_{-0.54}$	$0.55^{+0.27}_{-0.26}$	$1.11^{+0.55}_{-0.54}$	$0.53^{+0.26}_{-0.26}$	$-2.5^{+1.1}_{-1.1}$	$0.123^{+0.056}_{-0.056}$	$2.5^{+1.1}_{-1.1}$	$1.19^{+0.54}_{-0.54}$
3.30	$-1.04^{+0.53}_{-0.51}$	$0.47^{+0.24}_{-0.23}$	$1.03^{+0.52}_{-0.50}$	$0.46^{+0.23}_{-0.23}$	$-2.4^{+1.1}_{-1.1}$	$0.106^{+0.049}_{-0.049}$	$2.3^{+1.1}_{-1.0}$	$1.04^{+0.48}_{-0.48}$
3.40	$-0.99^{+0.50}_{-0.50}$	$0.40^{+0.21}_{-0.21}$	$0.96^{+0.48}_{-0.47}$	$0.40^{+0.20}_{-0.20}$	$-2.3^{+1.0}_{-1.0}$	$0.091^{+0.043}_{-0.043}$	$2.2^{+1.0}_{-0.99}$	$0.91^{+0.43}_{-0.43}$
3.50	$-0.94^{+0.48}_{-0.48}$	$0.34^{+0.18}_{-0.18}$	$0.89^{+0.46}_{-0.45}$	$0.35^{+0.18}_{-0.18}$	$-2.2^{+1.0}_{-1.0}$	$0.079^{+0.038}_{-0.038}$	$2.05^{+0.99}_{-0.99}$	$0.80^{+0.38}_{-0.38}$
3.60	$-0.89^{+0.47}_{-0.47}$	$0.29^{+0.16}_{-0.15}$	$0.83^{+0.44}_{-0.44}$	$0.30^{+0.16}_{-0.16}$	$-2.1^{+1.0}_{-1.0}$	$0.068^{+0.033}_{-0.033}$	$1.93^{+0.95}_{-0.94}$	$0.70^{+0.34}_{-0.34}$
3.70	$-0.85^{+0.46}_{-0.46}$	$0.25^{+0.14}_{-0.14}$	$0.78^{+0.43}_{-0.42}$	$0.26^{+0.14}_{-0.14}$	$-1.98^{+0.39}_{-0.39}$	$0.059^{+0.030}_{-0.030}$	$1.81^{+0.91}_{-0.90}$	$0.62^{+0.31}_{-0.31}$
3.80	$-0.81^{+0.46}_{-0.44}$	$0.22^{+0.12}_{-0.12}$	$0.73^{+0.41}_{-0.40}$	$0.23^{+0.13}_{-0.13}$	$-1.90^{+0.37}_{-0.37}$	$0.051^{+0.026}_{-0.026}$	$1.70^{+0.87}_{-0.87}$	$0.54^{+0.28}_{-0.28}$

Tabela 5.1 continuação

$z$	$[\gamma_A]_{UV}$ ( $10^{-1}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_L]_{UV}$ ( $10^{-5}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_G]_{UV}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_Z]_{UV}$ ( $10^{-4}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_A]_{opt}$ ( $10^{-1}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_L]_{opt}$ ( $10^{-4}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_G]_{opt}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_Z]_{opt}$ ( $10^{-4}$ Mpc $^{-3}$ )
3.90	-0.78 $^{+0.45}_{-0.43}$	0.19 $^{+0.11}_{-0.11}$	0.68 $^{+0.39}_{-0.38}$	0.21 $^{+0.12}_{-0.11}$	-1.83 $^{+0.95}_{-0.95}$	0.045 $^{+0.023}_{-0.023}$	1.60 $^{+0.83}_{-0.83}$	0.48 $^{+0.25}_{-0.25}$
4.00	-0.75 $^{+0.44}_{-0.42}$	0.167 $^{+0.097}_{-0.095}$	0.64 $^{+0.37}_{-0.36}$	0.18 $^{+0.11}_{-0.10}$	-1.76 $^{+0.93}_{-0.93}$	0.039 $^{+0.021}_{-0.021}$	1.51 $^{+0.80}_{-0.80}$	0.43 $^{+0.23}_{-0.23}$
4.10	-0.72 $^{+0.43}_{-0.42}$	0.146 $^{+0.086}_{-0.084}$	0.60 $^{+0.36}_{-0.35}$	0.160 $^{+0.095}_{-0.093}$	-1.70 $^{+0.92}_{-0.92}$	0.034 $^{+0.019}_{-0.019}$	1.42 $^{+0.77}_{-0.77}$	0.38 $^{+0.20}_{-0.20}$
4.20	-0.69 $^{+0.42}_{-0.41}$	0.128 $^{+0.077}_{-0.075}$	0.57 $^{+0.34}_{-0.33}$	0.142 $^{+0.086}_{-0.084}$	-1.64 $^{+0.90}_{-0.90}$	0.030 $^{+0.017}_{-0.017}$	1.34 $^{+0.74}_{-0.74}$	0.34 $^{+0.19}_{-0.19}$
4.30	-0.67 $^{+0.40}_{-0.40}$	0.112 $^{+0.067}_{-0.067}$	0.53 $^{+0.32}_{-0.32}$	0.127 $^{+0.078}_{-0.076}$	-1.59 $^{+0.89}_{-0.89}$	0.027 $^{+0.015}_{-0.015}$	1.27 $^{+0.71}_{-0.71}$	0.30 $^{+0.17}_{-0.17}$
4.40	-0.65 $^{+0.39}_{-0.39}$	0.099 $^{+0.060}_{-0.060}$	0.50 $^{+0.31}_{-0.31}$	0.113 $^{+0.069}_{-0.069}$	-1.54 $^{+0.87}_{-0.87}$	0.024 $^{+0.013}_{-0.013}$	1.20 $^{+0.68}_{-0.68}$	0.27 $^{+0.15}_{-0.15}$
4.50	-0.62 $^{+0.40}_{-0.39}$	0.087 $^{+0.055}_{-0.055}$	0.47 $^{+0.29}_{-0.29}$	0.101 $^{+0.064}_{-0.062}$	-1.49 $^{+0.86}_{-0.86}$	0.021 $^{+0.012}_{-0.012}$	1.13 $^{+0.65}_{-0.65}$	0.24 $^{+0.14}_{-0.14}$
4.60	-0.60 $^{+0.39}_{-0.38}$	0.077 $^{+0.049}_{-0.049}$	0.45 $^{+0.28}_{-0.28}$	0.090 $^{+0.058}_{-0.057}$	-1.45 $^{+0.85}_{-0.85}$	0.018 $^{+0.011}_{-0.011}$	1.07 $^{+0.63}_{-0.63}$	0.22 $^{+0.13}_{-0.13}$
4.70	-0.59 $^{+0.38}_{-0.37}$	0.069 $^{+0.045}_{-0.044}$	0.42 $^{+0.27}_{-0.27}$	0.081 $^{+0.053}_{-0.052}$	-1.41 $^{+0.84}_{-0.84}$	0.0164 $^{+0.0098}_{-0.0098}$	1.02 $^{+0.61}_{-0.61}$	0.19 $^{+0.12}_{-0.12}$
4.80	-0.57 $^{+0.37}_{-0.37}$	0.061 $^{+0.041}_{-0.040}$	0.40 $^{+0.26}_{-0.26}$	0.073 $^{+0.048}_{-0.047}$	-1.37 $^{+0.83}_{-0.83}$	0.0146 $^{+0.0089}_{-0.0089}$	0.96 $^{+0.58}_{-0.58}$	0.17 $^{+0.11}_{-0.11}$
4.90	-0.55 $^{+0.36}_{-0.36}$	0.054 $^{+0.037}_{-0.036}$	0.38 $^{+0.25}_{-0.25}$	0.065 $^{+0.044}_{-0.043}$	-1.33 $^{+0.82}_{-0.82}$	0.0130 $^{+0.0080}_{-0.0080}$	0.91 $^{+0.56}_{-0.56}$	0.157 $^{+0.097}_{-0.097}$
5.00	-0.54 $^{+0.36}_{-0.36}$	0.048 $^{+0.033}_{-0.032}$	0.36 $^{+0.24}_{-0.24}$	0.059 $^{+0.040}_{-0.039}$	-1.29 $^{+0.82}_{-0.82}$	0.0117 $^{+0.0073}_{-0.0073}$	0.87 $^{+0.54}_{-0.54}$	0.141 $^{+0.089}_{-0.089}$

Tabela 5.2: Densidades diferenciais  $\gamma$  para as quatro diferentes distâncias discutidas nesta dissertação, considerando o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$  e os dados de G06. Essas densidades são obtidas pela equação (5.3).

$z$	$[\gamma_A]_{red}$ ( $10^{-1}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_L]_{red}$ ( $10^{-4}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_G]_{red}$ ( $10^{-2}$ Mpc $^{-3}$ )	$[\gamma_Z]_{red}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )
0.45	3.13 $^{+0.76}_{-0.76}$	161.1 $^{+39.4}_{-39.4}$	6.6 $^{+1.6}_{-1.6}$	41.8 $^{+10.2}_{-10.1}$
0.55	3.41 $^{+0.82}_{-0.82}$	101.2 $^{+24.5}_{-24.5}$	5.3 $^{+1.3}_{-1.3}$	30.0 $^{+7.2}_{-7.2}$
0.65	3.79 $^{+0.92}_{-0.92}$	66.5 $^{+16.3}_{-16.2}$	4.4 $^{+1.1}_{-1.1}$	22.1 $^{+5.4}_{-5.4}$
0.75	4.3 $^{+1.1}_{-1.1}$	45.2 $^{+11.2}_{-11.2}$	3.72 $^{+0.93}_{-0.92}$	16.7 $^{+4.1}_{-4.1}$
0.85	5.0 $^{+1.3}_{-1.3}$	31.6 $^{+8.0}_{-8.0}$	3.19 $^{+0.81}_{-0.80}$	12.7 $^{+3.2}_{-3.2}$
0.95	5.9 $^{+1.5}_{-1.5}$	22.6 $^{+5.8}_{-5.8}$	2.77 $^{+0.71}_{-0.71}$	9.9 $^{+2.6}_{-2.5}$
1.05	7.1 $^{+1.9}_{-1.9}$	16.5 $^{+4.4}_{-4.3}$	2.43 $^{+0.64}_{-0.64}$	7.8 $^{+2.0}_{-2.0}$
1.15	9.0 $^{+2.4}_{-2.4}$	12.3 $^{+3.3}_{-3.3}$	2.15 $^{+0.58}_{-0.58}$	6.2 $^{+1.7}_{-1.7}$
1.25	11.8 $^{+3.3}_{-3.3}$	9.3 $^{+2.6}_{-2.6}$	1.92 $^{+0.53}_{-0.53}$	4.9 $^{+1.4}_{-1.4}$
1.35	16.9 $^{+4.8}_{-4.8}$	7.1 $^{+2.0}_{-2.0}$	1.72 $^{+0.49}_{-0.49}$	4.0 $^{+1.1}_{-1.1}$
1.45	28.6 $^{+8.3}_{-8.3}$	5.5 $^{+1.6}_{-1.6}$	1.55 $^{+0.45}_{-0.45}$	3.25 $^{+0.94}_{-0.94}$
1.55	82.7 $^{+24.5}_{-24.5}$	4.3 $^{+1.3}_{-1.3}$	1.41 $^{+0.42}_{-0.42}$	2.67 $^{+0.79}_{-0.79}$
1.65	-105.8 $^{+32.1}_{-32.1}$	3.4 $^{+1.0}_{-1.0}$	1.29 $^{+0.39}_{-0.39}$	2.20 $^{+0.67}_{-0.67}$
1.75	-33.6 $^{+10.4}_{-10.4}$	2.73 $^{+0.85}_{-0.85}$	1.18 $^{+0.37}_{-0.37}$	1.83 $^{+0.57}_{-0.57}$
1.85	-20.4 $^{+6.5}_{-6.5}$	2.20 $^{+0.70}_{-0.70}$	1.08 $^{+0.34}_{-0.34}$	1.53 $^{+0.49}_{-0.49}$
1.95	-14.9 $^{+4.9}_{-4.9}$	1.78 $^{+0.58}_{-0.58}$	0.99 $^{+0.32}_{-0.32}$	1.28 $^{+0.42}_{-0.42}$
2.05	-11.8 $^{+4.0}_{-4.0}$	1.46 $^{+0.49}_{-0.49}$	0.92 $^{+0.31}_{-0.31}$	1.08 $^{+0.36}_{-0.36}$
2.15	-9.9 $^{+3.4}_{-3.4}$	1.20 $^{+0.41}_{-0.41}$	0.85 $^{+0.29}_{-0.29}$	0.92 $^{+0.31}_{-0.31}$
2.25	-8.6 $^{+3.0}_{-3.0}$	0.99 $^{+0.35}_{-0.35}$	0.79 $^{+0.28}_{-0.28}$	0.78 $^{+0.27}_{-0.27}$

Tabela 5.2 continuação

$z$	$[\gamma_A]_{red}$ ( $10^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_L]_{red}$ ( $10^{-4} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_G]_{red}$ ( $10^{-2} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[\gamma_Z]_{red}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )
2.35	$-7.6^{+2.7}$	$0.83^{+0.30}$	$0.74^{+0.26}$	$0.67^{+0.24}$
2.45	$-6.9^{+2.5}$	$0.69^{+0.25}$	$0.69^{+0.25}$	$0.57^{+0.21}$
2.55	$-6.3^{+2.4}$	$0.58^{+0.22}$	$0.64^{+0.24}$	$0.49^{+0.18}$
2.65	$-5.8^{+2.2}$	$0.49^{+0.20}$	$0.60^{+0.23}$	$0.43^{+0.16}$
2.75	$-5.4^{+2.1}$	$0.42^{+0.16}$	$0.56^{+0.22}$	$0.37^{+0.14}$
2.85	$-5.1^{+2.0}$	$0.36^{+0.14}$	$0.53^{+0.21}$	$0.32^{+0.13}$
2.95	$-4.8^{+2.0}$	$0.31^{+0.12}$	$0.50^{+0.20}$	$0.28^{+0.11}$
3.05	$-4.6^{+1.9}$	$0.26^{+0.11}$	$0.47^{+0.19}$	$0.25^{+0.10}$
3.15	$-4.4^{+1.9}$	$0.226^{+0.096}$	$0.44^{+0.19}$	$0.217^{+0.092}$
3.25	$-4.2^{+1.8}$	$0.196^{+0.085}$	$0.42^{+0.18}$	$0.191^{+0.082}$
3.35	$-4.0^{+1.8}$	$0.170^{+0.075}$	$0.39^{+0.17}$	$0.168^{+0.074}$
3.45	$-3.9^{+1.7}$	$0.148^{+0.066}$	$0.37^{+0.17}$	$0.149^{+0.067}$
3.55	$-3.7^{+1.7}$	$0.129^{+0.059}$	$0.35^{+0.16}$	$0.132^{+0.060}$
3.65	$-3.6^{+1.7}$	$0.113^{+0.053}$	$0.33^{+0.16}$	$0.117^{+0.055}$
3.75	$-3.5^{+1.7}$	$0.099^{+0.047}$	$0.32^{+0.15}$	$0.104^{+0.050}$

## 5.2 Densidades Integrais

A densidade integral  $\gamma^*(d_i) = \gamma_i^*$  definida por Ribeiro (2005) é a integral de  $\gamma_i$  no volume observado  $V_i$ ,

$$n_i = \gamma_i^* = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \gamma_i dV_i, \quad (5.8)$$

onde o volume observado de raio  $d_i$  é dado por

$$V_i = \frac{4\pi}{3}(d_i)^3. \quad (5.9)$$

A forma mais simples de calcular numericamente essa grandeza é reescrevendo a expressão acima em termos de  $z$ ,

$$n_i(z) = \frac{1}{V_i} \int_0^z \gamma_i \frac{dV_i}{dz} dz. \quad (5.10)$$

Como  $V_i$  é dado pela relação (5.9), tem-se que,

$$\frac{dV_i}{dz} = \frac{d}{dz} \left[ \frac{4}{3}\pi(d_i)^3 \right] = 4\pi(d_i)^2 \frac{d(d_i)}{dz} = S_i \frac{d(d_i)}{dz}. \quad (5.11)$$

Substituindo as expressões (5.3) e (5.11) na equação (5.10), encontra-se que,

$$n_i(z) = \frac{1}{V_i} \int_0^z \frac{dN}{dz} dz, \quad (5.12)$$

ou

$$n_i = \frac{N}{V_i}. \quad (5.13)$$

A densidade integral expressa a densidade numérica de galáxias em um certo volume. Conforme já discutido anteriormente, para o modelo  $\Lambda$ CDM somente são possíveis soluções numéricas para as grandezas relativísticas, assim pode-se construir tabelas com  $z$ ,  $V_i$  e  $N$  em função de  $r$ . Porém o modelo EdS permite escrever  $n_i$  analiticamente como função do desvio para o vermelho, pois, como já apresentado, tem-se expressões analíticas para  $d_i(z)$  e para  $N(z)$ . Dessa forma, ao substituir essas relações na definição de  $n_i$  dado pela equação (5.13), obtém-se

$$n_A^{EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{M}_g G} (1+z)^3, \quad (5.14)$$

$$n_G^{EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{M}_g G}, \quad (5.15)$$

$$n_L^{EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{M}_g G} (1+z)^{-3}, \quad (5.16)$$

$$n_Z^{EdS}(z) = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{M}_g G} \left[ \frac{2(1+z - \sqrt{1+z})}{z(1+z)} \right]^3. \quad (5.17)$$

A figura 5.3 ilustra o comportamento das densidades integrais teóricas para os modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM e EdS.

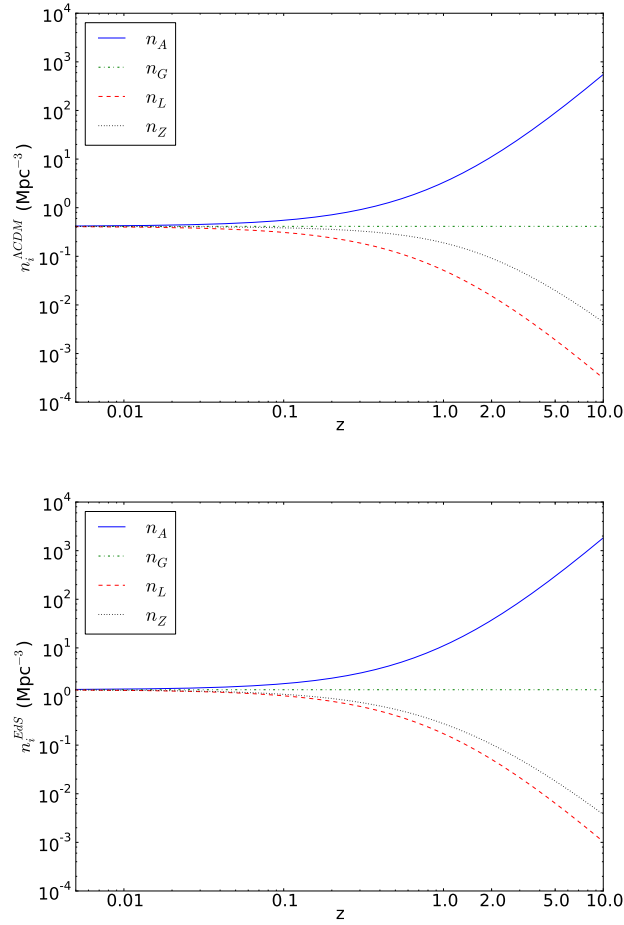


Figura 5.3: Evolução das densidades integrais teóricas em função do desvio para o vermelho para as quatro distâncias nos modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM e EdS. O comportamento dessas grandezas é similar para ambos os modelos, porém a amplitude é diferente como pode ser notado ao se comparar a escala dos gráficos.

As densidades integrais observacionais podem ser obtidas quando se substitui na equação (5.12) o  $dN/dz$  relativístico pelo  $dN/dz$  observacional proveniente dos dados da função de luminosidade, que se encontram na tabela 4.5. Como a contagem numérica observacional é discreta, então primeiro se faz necessário encontrar uma equação para  $[dN/dz]_{obs}$  em termos de  $z$ . Para tal fez-se uma interpolação polinomial que posteriormente é integrada conforme a equação (5.12). Os resultados observacionais de  $n_i$  estão nas tabelas 5.3 e 5.4 para as bandas UV e ópticas e vermelhas, respectivamente. A figura 5.4 mostra o comportamento dessas densidades observacionais para os três tipos de bandas. Note que os valores de  $n_i$  observacionais são menores do que os teóricos, e em especial  $[n_G]_{obs}$  que decresce com  $z$  enquanto que o da teoria se mantém constante.



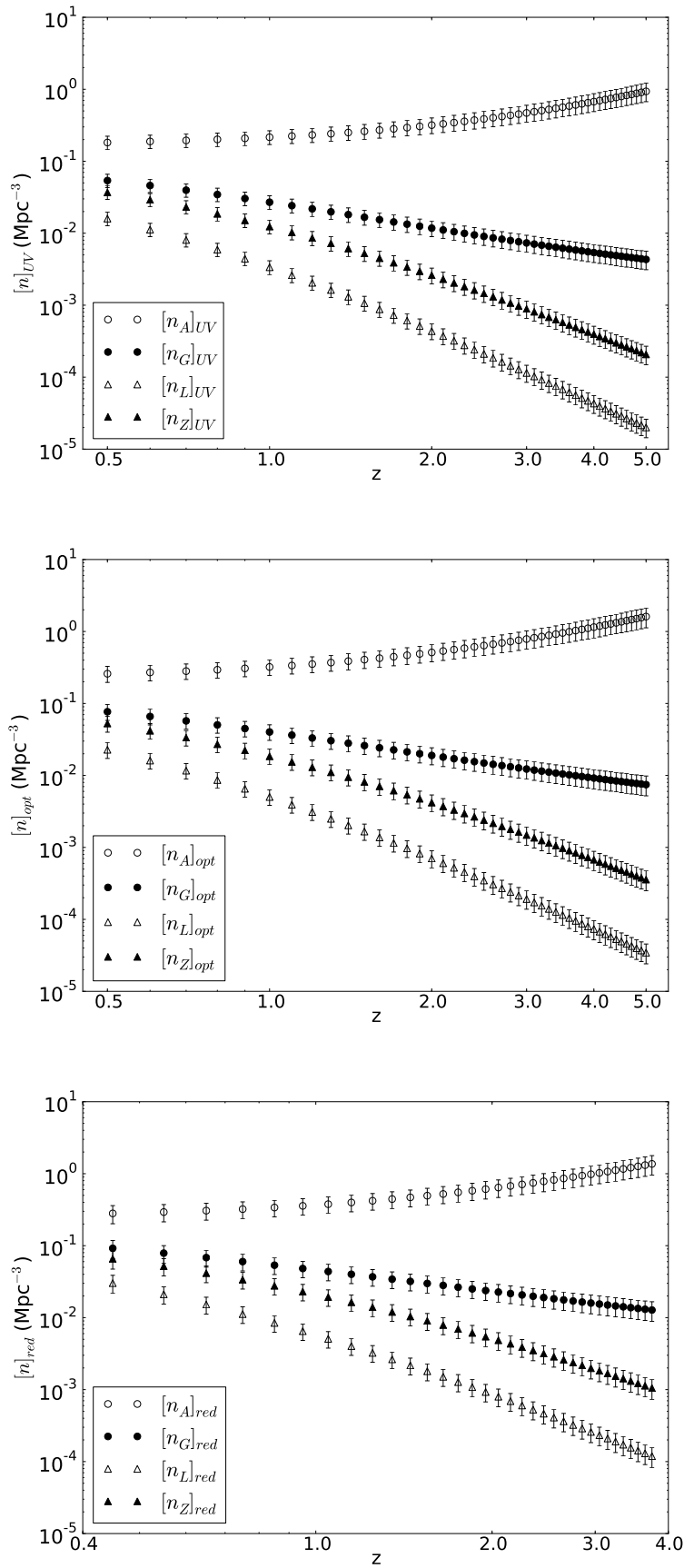


Figura 5.4: Evolução das densidades integrais das bandas UV, ópticas e vermelhas em função do desvio para o vermelho para as quatro distâncias no modelo cosmológico  $\Lambda\text{CDM}$  com  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ .

Tabela 5.3: Densidades integrais  $n_i$  para as quatro diferentes distâncias cosmológicas consideradas nesse trabalho no modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM e nos dados de G04. Nas colunas 2, 3, 4 e 5 encontram-se os valores de  $n_i$  das bandas UV. As colunas 6, 7, 8 e 9 apresentam-se os valores de  $n_i$  das bandas ópticas. Essas densidades foram obtidas pela equação (5.12) após devida interpolação numérica que forneceu a função  $[dN/dz]_{obs}(z)$ .

$z$	$[n_A]_{UV}$ ( $10^{-1}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_L]_{UV}$ ( $10^{-4}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_G]_{UV}$ ( $10^{-2}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_Z]_{UV}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_A]_{opt}$ ( $10^{-1}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_L]_{opt}$ ( $10^{-4}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_G]_{opt}$ ( $10^{-2}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_Z]_{opt}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )
0.50	1.83 $^{+0.41}_{-0.37}$	159.7 $^{+35.8}_{-32.0}$	5.4 $^{+1.2}_{-1.02}$	37.0 $^{+8.3}_{-6.5}$	2.59 $^{+0.68}_{-0.70}$	227.4 $^{+60.0}_{-41.7}$	7.8 $^{+2.0}_{-1.7}$	52.6 $^{+13.9}_{-10.8}$
0.60	1.88 $^{+0.42}_{-0.38}$	112.3 $^{+22.0}_{-22.6}$	4.60 $^{+0.93}_{-0.88}$	29.1 $^{+6.5}_{-5.9}$	2.70 $^{+0.64}_{-0.72}$	160.9 $^{+38.1}_{-29.9}$	6.6 $^{+1.6}_{-1.5}$	41.7 $^{+9.9}_{-8.6}$
0.70	1.95 $^{+0.43}_{-0.39}$	80.6 $^{+18.0}_{-16.3}$	3.96 $^{+0.80}_{-0.77}$	23.1 $^{+5.2}_{-4.7}$	2.81 $^{+0.62}_{-0.66}$	116.6 $^{+28.9}_{-27.3}$	5.7 $^{+1.3}_{-1.3}$	33.4 $^{+7.8}_{-7.8}$
0.80	2.01 $^{+0.45}_{-0.41}$	59.1 $^{+13.3}_{-12.1}$	3.45 $^{+0.70}_{-0.69}$	18.6 $^{+4.2}_{-3.8}$	2.94 $^{+0.75}_{-0.79}$	86.4 $^{+22.3}_{-20.2}$	5.0 $^{+1.2}_{-1.2}$	27.1 $^{+6.9}_{-6.3}$
0.90	2.08 $^{+0.47}_{-0.43}$	44.2 $^{+10.0}_{-9.1}$	3.04 $^{+0.63}_{-0.62}$	15.1 $^{+3.4}_{-3.1}$	3.07 $^{+0.79}_{-0.72}$	65.3 $^{+16.7}_{-15.3}$	4.5 $^{+1.1}_{-1.0}$	22.3 $^{+5.7}_{-5.2}$
1.00	2.16 $^{+0.49}_{-0.45}$	33.7 $^{+7.7}_{-7.0}$	2.70 $^{+0.62}_{-0.56}$	12.4 $^{+2.8}_{-2.6}$	3.21 $^{+0.83}_{-0.76}$	50.2 $^{+12.9}_{-11.8}$	4.02 $^{+1.04}_{-0.95}$	18.4 $^{+4.8}_{-4.3}$
1.10	2.24 $^{+0.52}_{-0.47}$	26.1 $^{+6.1}_{-5.5}$	2.41 $^{+0.56}_{-0.51}$	10.2 $^{+2.4}_{-2.2}$	3.36 $^{+0.87}_{-0.80}$	39.2 $^{+10.2}_{-9.3}$	3.63 $^{+0.94}_{-0.86}$	15.4 $^{+4.0}_{-3.7}$
1.20	2.32 $^{+0.56}_{-0.52}$	20.5 $^{+4.8}_{-4.3}$	2.18 $^{+0.51}_{-0.47}$	8.6 $^{+2.0}_{-1.9}$	3.53 $^{+0.92}_{-0.84}$	31.1 $^{+8.1}_{-7.4}$	3.31 $^{+0.86}_{-0.80}$	13.0 $^{+3.4}_{-3.0}$
1.30	2.41 $^{+0.57}_{-0.53}$	16.3 $^{+3.9}_{-3.2}$	1.98 $^{+0.47}_{-0.44}$	7.2 $^{+1.6}_{-1.5}$	3.70 $^{+0.97}_{-0.89}$	25.0 $^{+6.4}_{-5.4}$	3.04 $^{+0.73}_{-0.74}$	11.0 $^{+2.7}_{-2.7}$
1.40	2.51 $^{+0.60}_{-0.55}$	13.1 $^{+3.2}_{-2.9}$	1.81 $^{+0.44}_{-0.40}$	6.1 $^{+1.5}_{-1.4}$	3.87 $^{+1.03}_{-0.94}$	20.3 $^{+6.0}_{-4.9}$	2.80 $^{+0.68}_{-0.64}$	9.5 $^{+2.5}_{-2.3}$
1.50	2.61 $^{+0.64}_{-0.58}$	10.7 $^{+2.6}_{-2.4}$	1.67 $^{+0.41}_{-0.38}$	5.2 $^{+1.3}_{-1.2}$	4.1 $^{+1.1}_{-1.0}$	16.6 $^{+4.4}_{-3.7}$	2.60 $^{+0.69}_{-0.65}$	8.1 $^{+2.2}_{-1.9}$
1.60	2.71 $^{+0.67}_{-0.62}$	8.8 $^{+2.2}_{-2.0}$	1.54 $^{+0.38}_{-0.35}$	4.5 $^{+1.1}_{-1.0}$	4.3 $^{+1.1}_{-1.1}$	13.8 $^{+3.7}_{-3.4}$	2.42 $^{+0.65}_{-0.60}$	7.1 $^{+1.9}_{-1.8}$
1.70	2.82 $^{+0.70}_{-0.65}$	7.3 $^{+1.8}_{-1.7}$	1.43 $^{+0.36}_{-0.33}$	3.89 $^{+0.97}_{-0.90}$	4.5 $^{+1.2}_{-1.1}$	11.5 $^{+3.1}_{-2.9}$	2.26 $^{+0.61}_{-0.57}$	6.1 $^{+1.7}_{-1.5}$
1.80	2.93 $^{+0.74}_{-0.68}$	6.1 $^{+1.5}_{-1.4}$	1.34 $^{+0.34}_{-0.31}$	3.38 $^{+0.85}_{-0.79}$	4.7 $^{+1.3}_{-1.2}$	9.7 $^{+2.7}_{-2.5}$	2.13 $^{+0.58}_{-0.54}$	5.4 $^{+1.5}_{-1.4}$
1.90	3.05 $^{+0.78}_{-0.72}$	5.1 $^{+1.3}_{-1.2}$	1.25 $^{+0.32}_{-0.30}$	2.96 $^{+0.75}_{-0.67}$	4.9 $^{+1.3}_{-1.2}$	8.2 $^{+2.3}_{-2.0}$	2.00 $^{+0.55}_{-0.53}$	4.7 $^{+1.3}_{-1.2}$
2.00	3.18 $^{+0.82}_{-0.77}$	4.4 $^{+1.1}_{-1.0}$	1.18 $^{+0.30}_{-0.28}$	2.60 $^{+0.62}_{-0.55}$	5.1 $^{+1.4}_{-1.3}$	7.0 $^{+1.7}_{-1.7}$	1.89 $^{+0.50}_{-0.49}$	4.2 $^{+1.1}_{-1.0}$
2.10	3.31 $^{+0.86}_{-0.80}$	3.73 $^{+0.97}_{-0.90}$	1.11 $^{+0.29}_{-0.27}$	2.30 $^{+0.60}_{-0.53}$	5.4 $^{+1.5}_{-1.4}$	6.0 $^{+1.7}_{-1.6}$	1.80 $^{+0.50}_{-0.47}$	3.72 $^{+1.04}_{-0.97}$
2.20	3.44 $^{+0.90}_{-0.84}$	3.20 $^{+0.84}_{-0.78}$	1.05 $^{+0.28}_{-0.26}$	2.04 $^{+0.53}_{-0.48}$	5.6 $^{+1.6}_{-1.5}$	5.2 $^{+1.5}_{-1.3}$	1.71 $^{+0.48}_{-0.45}$	3.32 $^{+0.93}_{-0.87}$
2.30	3.58 $^{+0.95}_{-0.88}$	2.77 $^{+0.73}_{-0.68}$	1.00 $^{+0.26}_{-0.24}$	1.82 $^{+0.45}_{-0.43}$	5.8 $^{+1.7}_{-1.5}$	4.5 $^{+1.3}_{-1.2}$	1.63 $^{+0.43}_{-0.43}$	2.97 $^{+0.84}_{-0.79}$
2.40	3.72 $^{+0.99}_{-0.92}$	2.41 $^{+0.64}_{-0.61}$	0.95 $^{+0.25}_{-0.23}$	1.62 $^{+0.43}_{-0.40}$	6.1 $^{+1.7}_{-1.6}$	4.0 $^{+1.1}_{-1.1}$	1.55 $^{+0.44}_{-0.41}$	2.66 $^{+0.76}_{-0.71}$
2.50	3.87 $^{+1.04}_{-0.97}$	2.11 $^{+0.57}_{-0.53}$	0.90 $^{+0.24}_{-0.23}$	1.46 $^{+0.39}_{-0.36}$	6.4 $^{+1.8}_{-1.7}$	3.47 $^{+1.00}_{-0.93}$	1.49 $^{+0.43}_{-0.40}$	2.40 $^{+0.69}_{-0.65}$
2.60	4.0 $^{+1.1}_{-1.0}$	1.85 $^{+0.50}_{-0.44}$	0.86 $^{+0.23}_{-0.22}$	1.31 $^{+0.33}_{-0.32}$	6.7 $^{+1.9}_{-1.8}$	3.06 $^{+0.88}_{-0.80}$	1.43 $^{+0.41}_{-0.37}$	2.17 $^{+0.63}_{-0.57}$
2.70	4.2 $^{+1.1}_{-1.0}$	1.63 $^{+0.44}_{-0.40}$	0.83 $^{+0.22}_{-0.21}$	1.18 $^{+0.32}_{-0.30}$	6.9 $^{+2.0}_{-1.9}$	2.71 $^{+0.79}_{-0.70}$	1.37 $^{+0.40}_{-0.36}$	1.96 $^{+0.54}_{-0.51}$
2.80	4.3 $^{+1.1}_{-1.0}$	1.44 $^{+0.40}_{-0.37}$	0.79 $^{+0.22}_{-0.20}$	1.07 $^{+0.30}_{-0.27}$	7.2 $^{+2.1}_{-2.0}$	2.40 $^{+0.70}_{-0.66}$	1.32 $^{+0.39}_{-0.36}$	1.78 $^{+0.52}_{-0.49}$
2.90	4.5 $^{+1.2}_{-1.1}$	1.28 $^{+0.35}_{-0.33}$	0.76 $^{+0.21}_{-0.20}$	0.97 $^{+0.27}_{-0.25}$	7.5 $^{+2.2}_{-2.1}$	2.14 $^{+0.63}_{-0.59}$	1.27 $^{+0.37}_{-0.35}$	1.63 $^{+0.48}_{-0.45}$
3.00	4.7 $^{+1.3}_{-1.2}$	1.15 $^{+0.32}_{-0.30}$	0.73 $^{+0.20}_{-0.19}$	0.89 $^{+0.25}_{-0.23}$	7.9 $^{+2.3}_{-2.2}$	1.92 $^{+0.57}_{-0.53}$	1.23 $^{+0.36}_{-0.34}$	1.49 $^{+0.44}_{-0.41}$
3.10	5.0 $^{+1.4}_{-1.3}$	1.03 $^{+0.29}_{-0.27}$	0.71 $^{+0.20}_{-0.18}$	0.81 $^{+0.23}_{-0.21}$	8.2 $^{+2.4}_{-2.3}$	1.72 $^{+0.51}_{-0.48}$	1.19 $^{+0.35}_{-0.33}$	1.36 $^{+0.40}_{-0.38}$
3.20	5.1 $^{+1.4}_{-1.3}$	0.92 $^{+0.26}_{-0.24}$	0.68 $^{+0.20}_{-0.18}$	0.74 $^{+0.21}_{-0.19}$	8.5 $^{+2.5}_{-2.4}$	1.55 $^{+0.46}_{-0.44}$	1.15 $^{+0.34}_{-0.32}$	1.25 $^{+0.37}_{-0.35}$
3.30	5.2 $^{+1.5}_{-1.4}$	0.83 $^{+0.23}_{-0.21}$	0.66 $^{+0.19}_{-0.17}$	0.68 $^{+0.19}_{-0.18}$	8.8 $^{+2.6}_{-2.5}$	1.40 $^{+0.42}_{-0.38}$	1.11 $^{+0.33}_{-0.31}$	1.15 $^{+0.35}_{-0.32}$
3.40	5.4 $^{+1.5}_{-1.4}$	0.75 $^{+0.21}_{-0.20}$	0.64 $^{+0.18}_{-0.17}$	0.63 $^{+0.18}_{-0.17}$	9.2 $^{+2.7}_{-2.6}$	1.27 $^{+0.36}_{-0.33}$	1.08 $^{+0.31}_{-0.30}$	1.06 $^{+0.30}_{-0.30}$
3.50	5.6 $^{+1.6}_{-1.5}$	0.68 $^{+0.19}_{-0.18}$	0.62 $^{+0.17}_{-0.16}$	0.58 $^{+0.16}_{-0.15}$	9.5 $^{+2.9}_{-2.7}$	1.15 $^{+0.35}_{-0.32}$	1.05 $^{+0.32}_{-0.30}$	0.98 $^{+0.30}_{-0.28}$
3.60	5.8 $^{+1.7}_{-1.6}$	0.62 $^{+0.18}_{-0.17}$	0.60 $^{+0.17}_{-0.16}$	0.53 $^{+0.15}_{-0.14}$	9.9 $^{+3.0}_{-2.8}$	1.05 $^{+0.33}_{-0.30}$	1.02 $^{+0.31}_{-0.29}$	0.90 $^{+0.27}_{-0.26}$
3.70	6.1 $^{+1.7}_{-1.6}$	0.56 $^{+0.16}_{-0.15}$	0.58 $^{+0.16}_{-0.15}$	0.49 $^{+0.14}_{-0.13}$	10.3 $^{+3.1}_{-3.0}$	0.95 $^{+0.29}_{-0.28}$	0.99 $^{+0.30}_{-0.29}$	0.84 $^{+0.26}_{-0.24}$
3.80	6.3 $^{+1.8}_{-1.7}$	0.51 $^{+0.15}_{-0.14}$	0.57 $^{+0.16}_{-0.15}$	0.46 $^{+0.13}_{-0.12}$	10.7 $^{+3.3}_{-3.1}$	0.87 $^{+0.27}_{-0.25}$	0.97 $^{+0.30}_{-0.28}$	0.78 $^{+0.24}_{-0.23}$

Tabela 5.3 continuação

$z$	$[n_A]_{UV}$ ( $10^{-1}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_L]_{UV}$ ( $10^{-4}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_G]_{UV}$ ( $10^{-2}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_Z]_{UV}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_A]_{opt}$ ( $10^{-1}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_L]_{opt}$ ( $10^{-4}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_G]_{opt}$ ( $10^{-2}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_Z]_{opt}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )
3.90	6.5 $^{+1.9}_{-1.8}$	0.47 $^{+0.14}_{-0.13}$	0.55 $^{+0.16}_{-0.15}$	0.42 $^{+0.12}_{-0.12}$	11.1 $^{+3.4}_{-3.2}$	0.80 $^{+0.25}_{-0.23}$	0.94 $^{+0.29}_{-0.27}$	0.72 $^{+0.22}_{-0.21}$
4.00	6.7 $^{+2.0}_{-1.8}$	0.43 $^{+0.12}_{-0.12}$	0.54 $^{+0.16}_{-0.15}$	0.39 $^{+0.11}_{-0.11}$	11.5 $^{+3.5}_{-3.3}$	0.73 $^{+0.23}_{-0.21}$	0.92 $^{+0.28}_{-0.27}$	0.67 $^{+0.21}_{-0.20}$
4.10	7.0 $^{+2.0}_{-1.9}$	0.41 $^{+0.12}_{-0.11}$	0.53 $^{+0.15}_{-0.14}$	0.37 $^{+0.11}_{-0.10}$	11.9 $^{+3.7}_{-3.5}$	0.68 $^{+0.21}_{-0.20}$	0.90 $^{+0.28}_{-0.26}$	0.63 $^{+0.19}_{-0.18}$
4.20	7.2 $^{+2.1}_{-2.0}$	0.36 $^{+0.11}_{-0.10}$	0.51 $^{+0.15}_{-0.14}$	0.343 $^{+0.10}_{-0.094}$	12.3 $^{+3.8}_{-3.6}$	0.62 $^{+0.19}_{-0.18}$	0.88 $^{+0.27}_{-0.25}$	0.59 $^{+0.18}_{-0.17}$
4.30	7.5 $^{+2.2}_{-2.3}$	0.336 $^{+0.098}_{-0.091}$	0.50 $^{+0.15}_{-0.14}$	0.321 $^{+0.094}_{-0.088}$	12.8 $^{+4.0}_{-3.8}$	0.58 $^{+0.18}_{-0.17}$	0.86 $^{+0.27}_{-0.26}$	0.55 $^{+0.17}_{-0.16}$
4.40	7.7 $^{+2.3}_{-2.1}$	0.311 $^{+0.091}_{-0.085}$	0.49 $^{+0.14}_{-0.14}$	0.300 $^{+0.088}_{-0.083}$	13.2 $^{+4.1}_{-3.9}$	0.53 $^{+0.17}_{-0.16}$	0.84 $^{+0.26}_{-0.25}$	0.51 $^{+0.16}_{-0.15}$
4.50	8.0 $^{+2.3}_{-2.2}$	0.288 $^{+0.085}_{-0.080}$	0.48 $^{+0.14}_{-0.13}$	0.281 $^{+0.083}_{-0.078}$	13.7 $^{+4.3}_{-4.1}$	0.49 $^{+0.15}_{-0.14}$	0.82 $^{+0.26}_{-0.25}$	0.48 $^{+0.15}_{-0.14}$
4.60	8.2 $^{+2.4}_{-2.3}$	0.267 $^{+0.079}_{-0.074}$	0.47 $^{+0.14}_{-0.13}$	0.264 $^{+0.078}_{-0.073}$	14.1 $^{+4.4}_{-4.2}$	0.46 $^{+0.14}_{-0.13}$	0.80 $^{+0.25}_{-0.24}$	0.45 $^{+0.14}_{-0.13}$
4.70	8.5 $^{+2.4}_{-2.4}$	0.248 $^{+0.073}_{-0.069}$	0.46 $^{+0.14}_{-0.13}$	0.248 $^{+0.073}_{-0.069}$	14.6 $^{+4.6}_{-4.4}$	0.43 $^{+0.13}_{-0.13}$	0.79 $^{+0.25}_{-0.24}$	0.43 $^{+0.13}_{-0.13}$
4.80	8.8 $^{+2.6}_{-2.4}$	0.230 $^{+0.068}_{-0.064}$	0.45 $^{+0.13}_{-0.13}$	0.233 $^{+0.069}_{-0.065}$	15.1 $^{+4.8}_{-4.5}$	0.40 $^{+0.13}_{-0.12}$	0.77 $^{+0.24}_{-0.23}$	0.40 $^{+0.13}_{-0.12}$
4.90	9.1 $^{+2.7}_{-2.5}$	0.215 $^{+0.064}_{-0.060}$	0.44 $^{+0.13}_{-0.12}$	0.220 $^{+0.065}_{-0.061}$	15.6 $^{+4.9}_{-4.7}$	0.37 $^{+0.12}_{-0.11}$	0.76 $^{+0.24}_{-0.23}$	0.38 $^{+0.12}_{-0.11}$
5.00	9.3 $^{+2.8}_{-2.6}$	0.200 $^{+0.060}_{-0.056}$	0.43 $^{+0.13}_{-0.12}$	0.207 $^{+0.062}_{-0.058}$	16.1 $^{+5.1}_{-4.8}$	0.35 $^{+0.11}_{-0.10}$	0.75 $^{+0.24}_{-0.22}$	0.36 $^{+0.11}_{-0.11}$

Tabela 5.4: Densidades integrais  $n_i$  para as quatro diferentes distâncias cosmológicas considerandas nesse trabalho no modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_{m0} = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0.7$ . Nas colunas 2, 3, 4 e 5 encontram-se os valores de  $n_i$  obtidos dos dados de G06. Essas densidades foram obtidas pela equação (5.12) após devida interpolação numérica dos dados da tabela 4.5 para fornecer a função  $[dN/dz]_{obs}(z)$ .

$z$	$[n_A]_{red}$ ( $10^{-1}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_L]_{red}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_G]_{red}$ ( $10^{-2}$ Mpc $^{-3}$ )	$[n_Z]_{red}$ ( $10^{-3}$ Mpc $^{-3}$ )
0.45	2.81 $^{+0.79}_{-0.79}$	30.2 $^{+8.6}_{-8.5}$	9.2 $^{+2.6}_{-2.6}$	65.7 $^{+18.6}_{-18.5}$
0.55	2.93 $^{+0.79}_{-0.79}$	21.1 $^{+5.7}_{-5.7}$	7.9 $^{+2.1}_{-2.1}$	51.9 $^{+14.1}_{-14.0}$
0.65	3.07 $^{+0.81}_{-0.81}$	15.2 $^{+4.0}_{-4.0}$	6.8 $^{+1.8}_{-1.8}$	41.5 $^{+11.0}_{-10.9}$
0.75	3.22 $^{+0.84}_{-0.83}$	11.2 $^{+2.9}_{-2.9}$	6.0 $^{+1.6}_{-1.6}$	33.7 $^{+8.8}_{-8.7}$
0.85	3.39 $^{+0.88}_{-0.87}$	8.5 $^{+2.2}_{-2.2}$	5.4 $^{+1.4}_{-1.4}$	27.7 $^{+7.2}_{-7.1}$
0.95	3.57 $^{+0.93}_{-0.92}$	6.5 $^{+1.7}_{-1.7}$	4.8 $^{+1.2}_{-1.2}$	23.0 $^{+6.0}_{-5.9}$
1.05	3.77 $^{+0.98}_{-0.97}$	5.1 $^{+1.3}_{-1.3}$	4.4 $^{+1.1}_{-1.1}$	19.3 $^{+5.0}_{-4.9}$
1.15	4.0 $^{+1.0}_{-1.0}$	4.0 $^{+1.0}_{-1.0}$	4.0 $^{+1.0}_{-1.0}$	16.3 $^{+4.2}_{-4.2}$
1.25	4.2 $^{+1.1}_{-1.1}$	3.24 $^{+0.85}_{-0.84}$	3.69 $^{+0.96}_{-0.96}$	13.9 $^{+3.6}_{-3.6}$
1.35	4.4 $^{+1.2}_{-1.2}$	2.64 $^{+0.69}_{-0.69}$	3.42 $^{+0.90}_{-0.89}$	12.0 $^{+3.1}_{-3.1}$
1.45	4.7 $^{+1.2}_{-1.2}$	2.17 $^{+0.57}_{-0.57}$	3.19 $^{+0.84}_{-0.84}$	10.4 $^{+2.7}_{-2.7}$
1.55	4.9 $^{+1.3}_{-1.3}$	1.80 $^{+0.48}_{-0.48}$	2.98 $^{+0.79}_{-0.79}$	9.0 $^{+2.4}_{-2.4}$
1.65	5.2 $^{+1.4}_{-1.4}$	1.51 $^{+0.40}_{-0.40}$	2.81 $^{+0.75}_{-0.75}$	7.9 $^{+2.1}_{-2.1}$
1.75	5.5 $^{+1.5}_{-1.5}$	1.27 $^{+0.34}_{-0.34}$	2.65 $^{+0.71}_{-0.71}$	6.9 $^{+1.9}_{-1.9}$
1.85	5.8 $^{+1.6}_{-1.6}$	1.08 $^{+0.29}_{-0.29}$	2.51 $^{+0.68}_{-0.68}$	6.1 $^{+1.7}_{-1.7}$
1.95	6.1 $^{+1.7}_{-1.7}$	0.93 $^{+0.25}_{-0.25}$	2.38 $^{+0.65}_{-0.65}$	5.4 $^{+1.5}_{-1.5}$
2.05	6.4 $^{+1.8}_{-1.8}$	0.80 $^{+0.22}_{-0.22}$	2.26 $^{+0.62}_{-0.62}$	4.8 $^{+1.3}_{-1.3}$
2.15	6.8 $^{+1.9}_{-1.9}$	0.69 $^{+0.19}_{-0.19}$	2.16 $^{+0.60}_{-0.60}$	4.3 $^{+1.2}_{-1.2}$

Tabela 5.4 continuação

$z$	$[n_A]_{red}$ ( $10^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[n_L]_{red}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[n_G]_{red}$ ( $10^{-2} \text{ Mpc}^{-3}$ )	$[n_Z]_{red}$ ( $10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$ )
2.25	$7.1^{+2.0}_{-2.0}$	$0.60^{+0.17}_{-0.17}$	$2.07^{+0.58}_{-0.57}$	$3.9^{+1.1}_{-0.9}$
2.35	$7.5^{+2.1}_{-2.1}$	$0.53^{+0.15}_{-0.15}$	$1.98^{+0.55}_{-0.54}$	$3.50^{+0.98}_{-0.89}$
2.45	$7.8^{+2.2}_{-2.2}$	$0.46^{+0.13}_{-0.13}$	$1.90^{+0.54}_{-0.52}$	$3.16^{+0.89}_{-0.81}$
2.55	$8.2^{+2.3}_{-2.3}$	$0.41^{+0.12}_{-0.12}$	$1.83^{+0.52}_{-0.51}$	$2.87^{+0.81}_{-0.74}$
2.65	$8.6^{+2.4}_{-2.4}$	$0.36^{+0.10}_{-0.10}$	$1.76^{+0.50}_{-0.49}$	$2.60^{+0.75}_{-0.68}$
2.75	$9.0^{+2.6}_{-2.6}$	$0.323^{+0.093}_{-0.093}$	$1.70^{+0.49}_{-0.48}$	$2.37^{+0.68}_{-0.63}$
2.85	$9.4^{+2.7}_{-2.7}$	$0.288^{+0.084}_{-0.083}$	$1.65^{+0.48}_{-0.46}$	$2.17^{+0.63}_{-0.58}$
2.95	$9.8^{+2.9}_{-2.9}$	$0.259^{+0.075}_{-0.075}$	$1.59^{+0.46}_{-0.45}$	$1.98^{+0.58}_{-0.53}$
3.05	$10.3^{+3.0}_{-3.0}$	$0.232^{+0.068}_{-0.068}$	$1.54^{+0.45}_{-0.44}$	$1.82^{+0.53}_{-0.49}$
3.15	$10.7^{+3.1}_{-3.1}$	$0.210^{+0.062}_{-0.062}$	$1.50^{+0.44}_{-0.43}$	$1.67^{+0.49}_{-0.46}$
3.25	$11.2^{+3.3}_{-3.3}$	$0.190^{+0.056}_{-0.056}$	$1.46^{+0.43}_{-0.42}$	$1.54^{+0.46}_{-0.42}$
3.35	$11.6^{+3.5}_{-3.5}$	$0.172^{+0.051}_{-0.051}$	$1.41^{+0.42}_{-0.41}$	$1.42^{+0.42}_{-0.39}$
3.45	$12.1^{+3.6}_{-3.6}$	$0.156^{+0.047}_{-0.047}$	$1.38^{+0.41}_{-0.40}$	$1.32^{+0.39}_{-0.37}$
3.55	$12.6^{+3.8}_{-3.8}$	$0.142^{+0.043}_{-0.043}$	$1.34^{+0.40}_{-0.40}$	$1.22^{+0.37}_{-0.34}$
3.65	$13.1^{+4.0}_{-4.0}$	$0.130^{+0.039}_{-0.039}$	$1.31^{+0.40}_{-0.39}$	$1.13^{+0.34}_{-0.32}$
3.75	$13.7^{+4.1}_{-4.1}$	$0.119^{+0.036}_{-0.036}$	$1.28^{+0.39}_{-0.39}$	$1.05^{+0.32}_{-0.32}$

## Capítulo 6

---

# Espectro de Potência

---

Neste capítulo será apresentada a metodologia e os resultados relativos ao espectro de potência das densidades diferenciais e integrais teóricas e observacionais nos modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM e EdS. Também será definida e calculada uma nova grandeza de trabalho, chamada de correlação radial, similar à função de correlação de dois pontos.

### 6.1 Espectro de Potência das Densidades Diferenciais e Integrais

Conforme já discutido no capítulo 2, a definição do espectro de potência (EP) da função de correlação  $\xi(r)$  dada por,

$$P_k = \int \xi(r) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3r = 4\pi \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kr)}{kr} \xi(r) r^2 dr, \quad (6.1)$$

descreve as aglomerações em termos do número de ondas  $k$  que separa os efeitos de diferentes escalas. Para estudar as densidades diferenciais  $\gamma_i$  no espaço dos números de ondas, iremos usar a definição acima, mas trocando  $\xi(r)$  por  $\gamma_i$  e  $r$  por  $d_i$ . Dessa forma obtemos,

$$P_k(\gamma_i) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\text{sen}(k_i d_i)}{k_i d_i} \gamma_i d_i^2 d(d_i), \quad (6.2)$$

onde  $k_i = 2\pi/d_i$ . Substituindo a definição de  $\gamma_i$  (equação 5.1) na relação (6.2) encontramos,

$$P_k(\gamma_i) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\text{sen}(k_i d_i)}{k_i d_i} \frac{1}{4\pi d_i^2} \frac{dN}{d(d_i)} d_i^2 d(d_i) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(k_i d_i)}{k_i d_i} \frac{dN}{d(d_i)} d(d_i). \quad (6.3)$$

Os resultados dos EPs das densidades diferenciais teóricas para as quatro distâncias consideradas nesse trabalho nos modelos cosmológicos EdS e  $\Lambda$ CDM encontra-se ilustrado na figura 6.1. Comparando o EP de  $\gamma_i$  para ambos os modelos verifica-se que seus comportamentos são similares, porém os EPs para o modelo EdS encontram-se deslocados

para números de ondas maiores em relação aos da cosmologia  $\Lambda$ CDM. O EP de  $\gamma_A$  pode ser descrito como uma lei de potência para  $k_A \gtrsim 0.005$  em EdS e  $k_A \gtrsim 0.0035$  em  $\Lambda$ CDM. Em valores menores  $P_k(\gamma_A)$  torna-se descontínuo em ambas as cosmologias. Este comportamento era esperado uma vez que  $\gamma_A$  torna-se descontínuo a partir de  $d_A \simeq 1748$ Mpc em  $\Lambda$ CDM e  $d_A \simeq 1269$  Mpc em EdS.  $P_k(\gamma_G)$ ,  $P_k(\gamma_L)$  e  $P_k(\gamma_Z)$  também comportam-se como uma lei de potência, porém os dois últimos apresentam uma leve mudança em sua inclinação para  $k_L \lesssim 0.0005$  e  $k_Z \lesssim 0.001$ , respectivamente. Deve-se ressaltar que a mudança de inclinação de  $P_k(\gamma_L)$  e  $P_k(\gamma_Z)$  ocorre no mesmo ponto tanto para EdS quanto para  $\Lambda$ CDM.

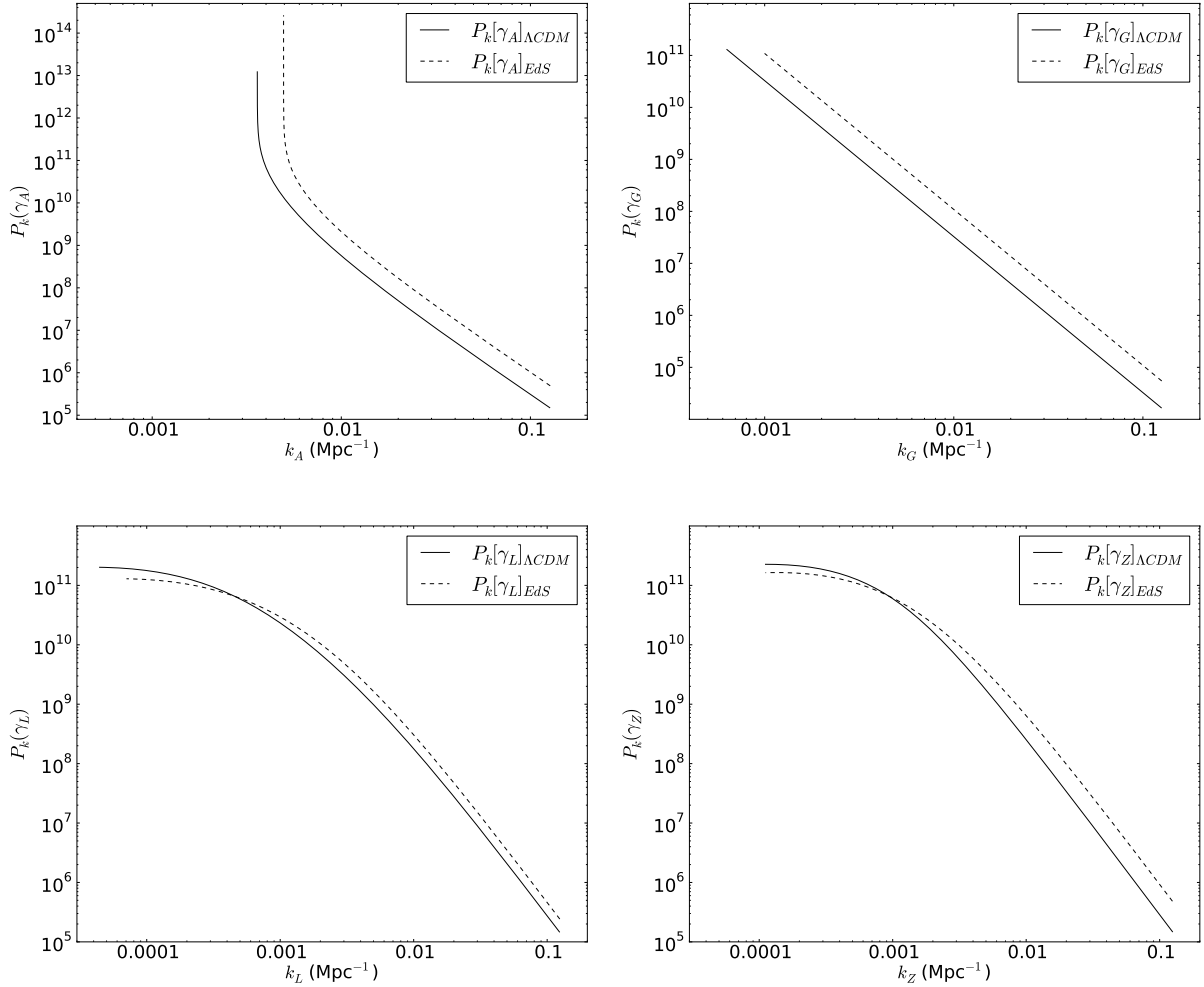


Figura 6.1: Espectro de potência das densidades diferenciais teóricas dos modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM e EdS com as quatro distâncias cosmológicas discutidas nesse trabalho.

Para o estudo do espectro de potência das densidades integrais  $n(d_i) = n_i$  iremos proceder de forma similar a equação (6.2), ou seja,

$$P_k(n_i) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\text{sen}(k_i d_i)}{k_i d_i} n_i d_i^2 d(d_i). \quad (6.4)$$

Substituindo a equação (5.13) na expressão anterior tem-se

$$P_k(n_i) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\text{sen}(k_i d_i)}{k_i d_i} \frac{3N}{4\pi d_i^3} d_i^2 d(d_i) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(k_i d_i)}{k_i d_i^2} 3N d(d_i). \quad (6.5)$$

A figura 6.2 apresenta os resultados do EP de  $n_i$  teórico para os dois modelos cosmológicos assumidos. Em geral, o comportamento do EP dessas grandezas não muda de um modelo para outro. Para EdS, o EP aparece deslocado para a direita, ou seja, no sentido crescente de  $k_i$  em relação ao de  $\Lambda$ CDM. O EP de  $n_A$  comporta-se como uma lei de potência com expoente positivo para  $k_A \gtrsim 0.0036$  em  $\Lambda$ CDM e  $k_A \gtrsim 0.005$  em EdS. Esses pontos são os valores mínimos de  $k_A$  para cada modelo, respectivamente, e neles observa-se a brusca mudança da inclinação para um expoente positivo.  $P_k(n_G)$ ,  $P_k(n_L)$  e  $P_k(n_Z)$  comportam-se como uma lei de potência para todos os valores de  $k_G$  e para  $k_L, k_Z \gtrsim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$ . Para  $k_L, k_Z \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  o EP de  $n_L$  e  $n_Z$  muda de inclinação.

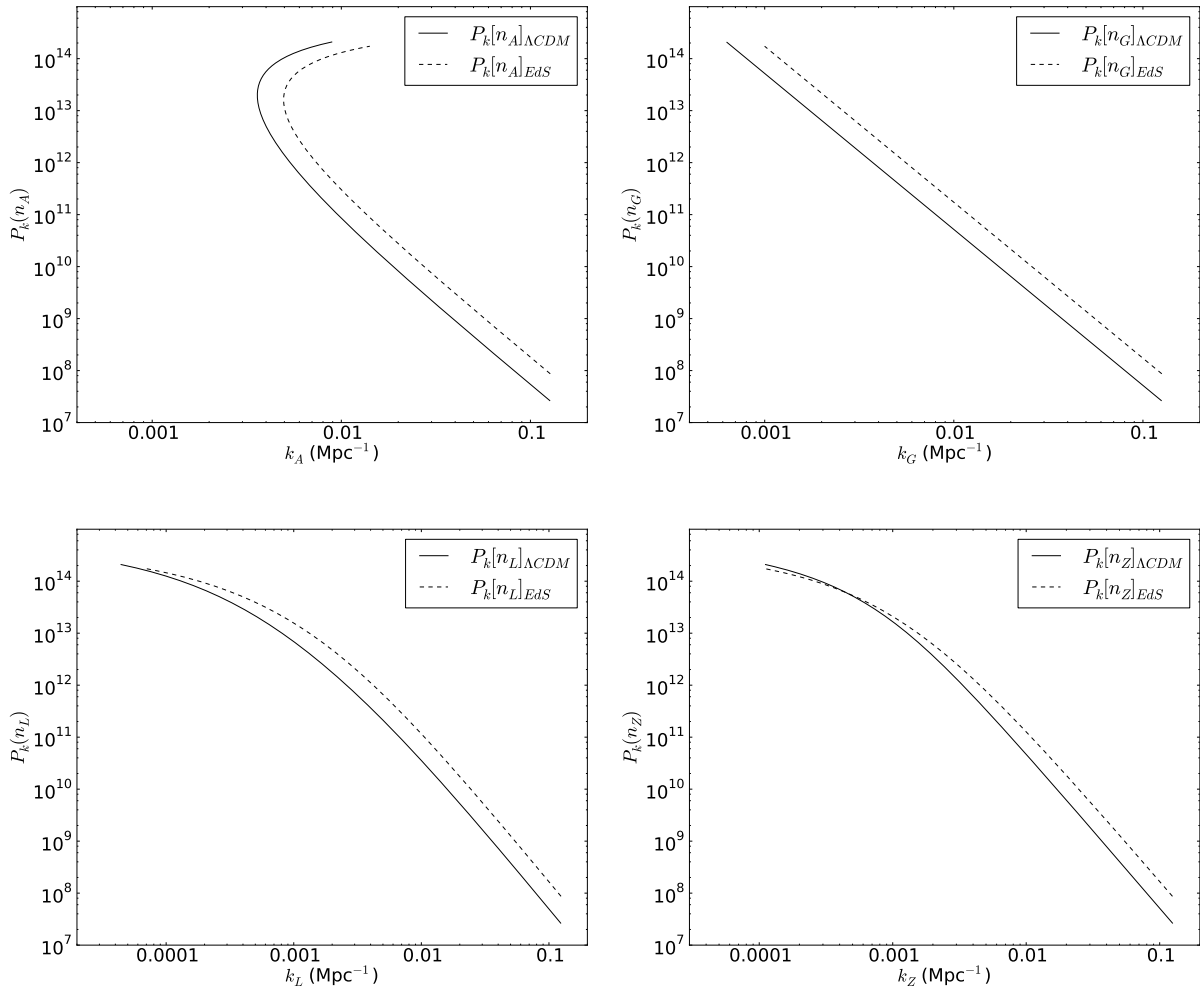


Figura 6.2: Espectro de potência das densidades integrais teóricas nos modelos cosmológicos  $\Lambda$ CDM e EdS com as quatro distâncias cosmológicas assumidas neste trabalho.

Verificar o comportamento do EP para as densidades teóricas é um passo importante, pois como é a primeira vez que a análise através da transformada de Fourier é aplicada

às densidades diferenciais e integrais o estudo dos EPs de  $\gamma_i$  e  $n_i$  teóricos indica o tipo de comportamento que se pode esperar para as respectivas quantidades observacionais.

O EP das densidades diferenciais observacionais foi calculado através da equação (6.2), ao se trocar a grandeza teórica pela observacional. O resultado do EP de  $\gamma_L$  e  $\gamma_Z$  para as três bandas, UV, óptica e vermelha, encontra-se na figura 6.3. Observa-se que para  $k_L \lesssim 0.0005 \text{Mpc}^{-1}$  e  $k_Z \lesssim 0.001 \text{Mpc}^{-1}$  a inclinação muda bruscamente, o que é surpreendente quando se compara com o resultado esperado pela teoria na figura 6.1. Isso pode ser devido a efeitos de seleção na amostra de galáxias pois os catálogos utilizados são muito profundos,  $0.45 < z < 5.0$ , e a essas distâncias galáxias mais tênues podem não estar sendo observadas. Ainda verifica-se que este decréscimo abrupto no  $P_k(\gamma_L)$  e  $P_k(\gamma_Z)$  é visivelmente menor na banda vermelha.

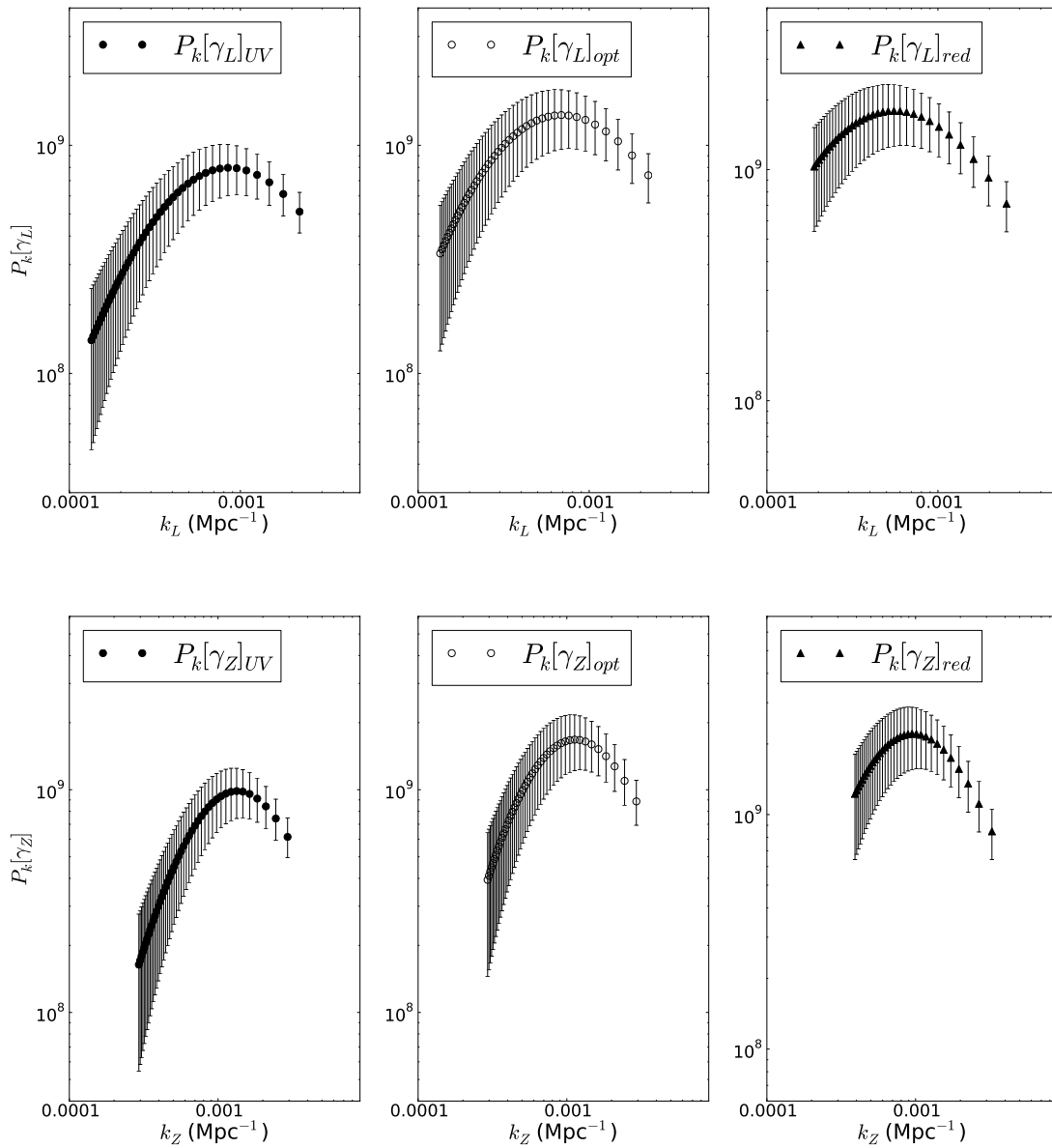


Figura 6.3: Espectro de potência das densidades diferenciais observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha para as distâncias  $d_L$  e  $d_Z$  assumindo o modelo  $\Lambda$ CDM.



A figura 6.4 ilustra o comportamento do EP de  $\gamma_A$  e  $\gamma_G$  observacional também para as três bandas consideradas. O comportamento do EP de  $\gamma_A$  é similar ao descrito pela teoria, isso deve ocorrer porque  $\gamma_A$  é descontínuo para valores altos de  $d_A$ , somente baixos  $d_A$  ou altos  $k_A$ , aparecem no gráfico, que é onde as observações são melhores (baixo  $z$ ). Enquanto o EP de  $\gamma_G$  exibe um decréscimo para  $k_G \lesssim 0.001$  não observado no EP teórico.

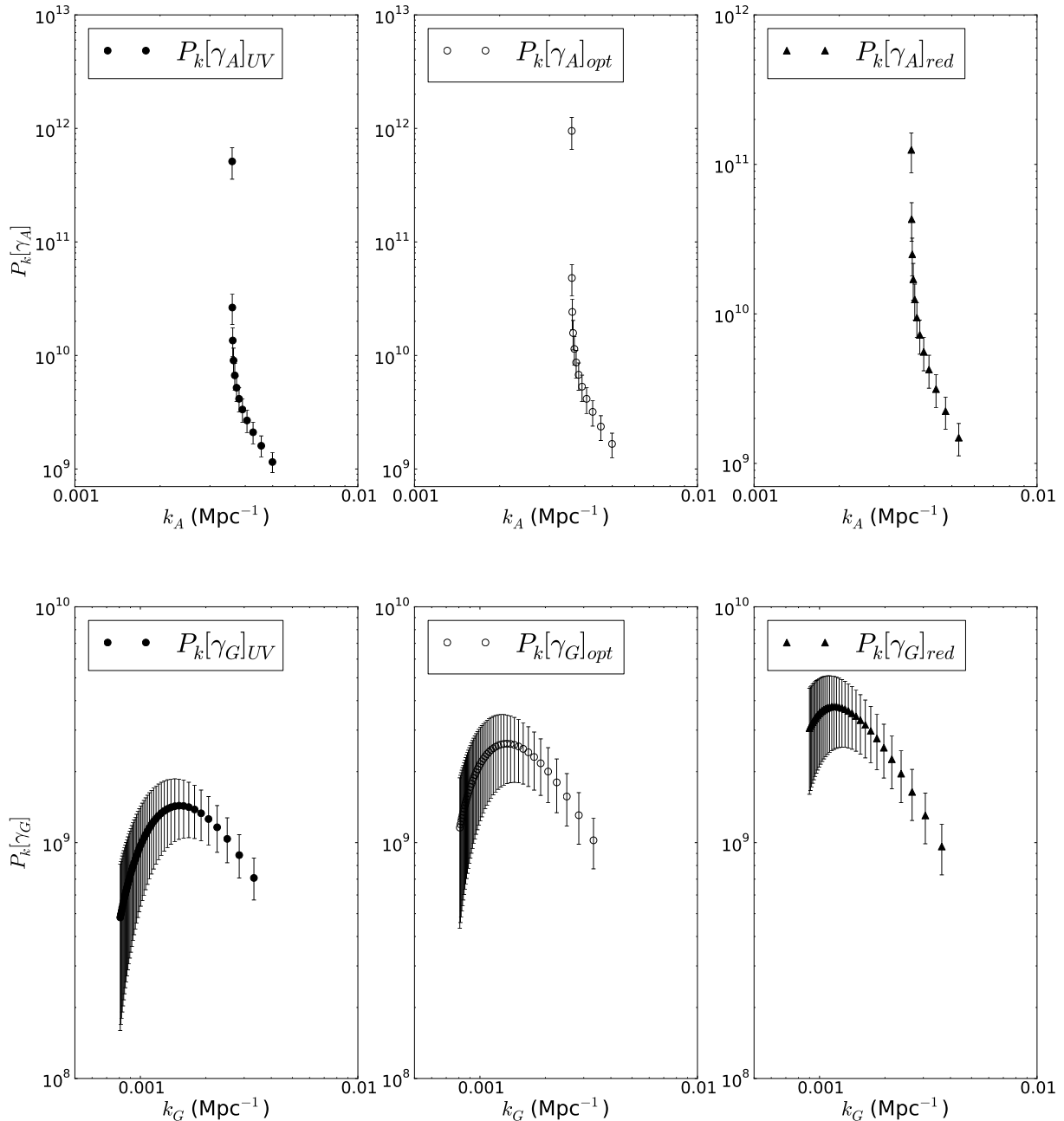


Figura 6.4: Espectro de potência das densidades diferenciais observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha para as distâncias  $d_A$  e  $d_G$  assumindo o modelo  $\Lambda$ CDM.

A comparação entre o EP esperado pela teoria e o obtido através dos dados observacionais revela que quanto menor o número de onda mais a observação se afasta da teoria.

Além disso, a amplitude do EP observacional é aproximadamente 4 ordens de magnitude menor do que o teórico em pequenos valores de  $k$ .

O EP das densidade integrais observacionais é calculado através da equação (6.5) ao se trocar a grandeza teórica pela observacional. O resultado dos EP de  $n_L$  e  $n_Z$  nas bandas UV, óptica e vermelha encontra-se na figura 6.5, na qual observa-se um padrão de lei de potência similar ao teórico tanto para  $P_k(n_L)$  quanto para  $P_k(n_Z)$ . Nota-se que a amplitude do EP aumenta de acordo com a banda de observação na seguinte ordem, UV, óptica e vermelha.

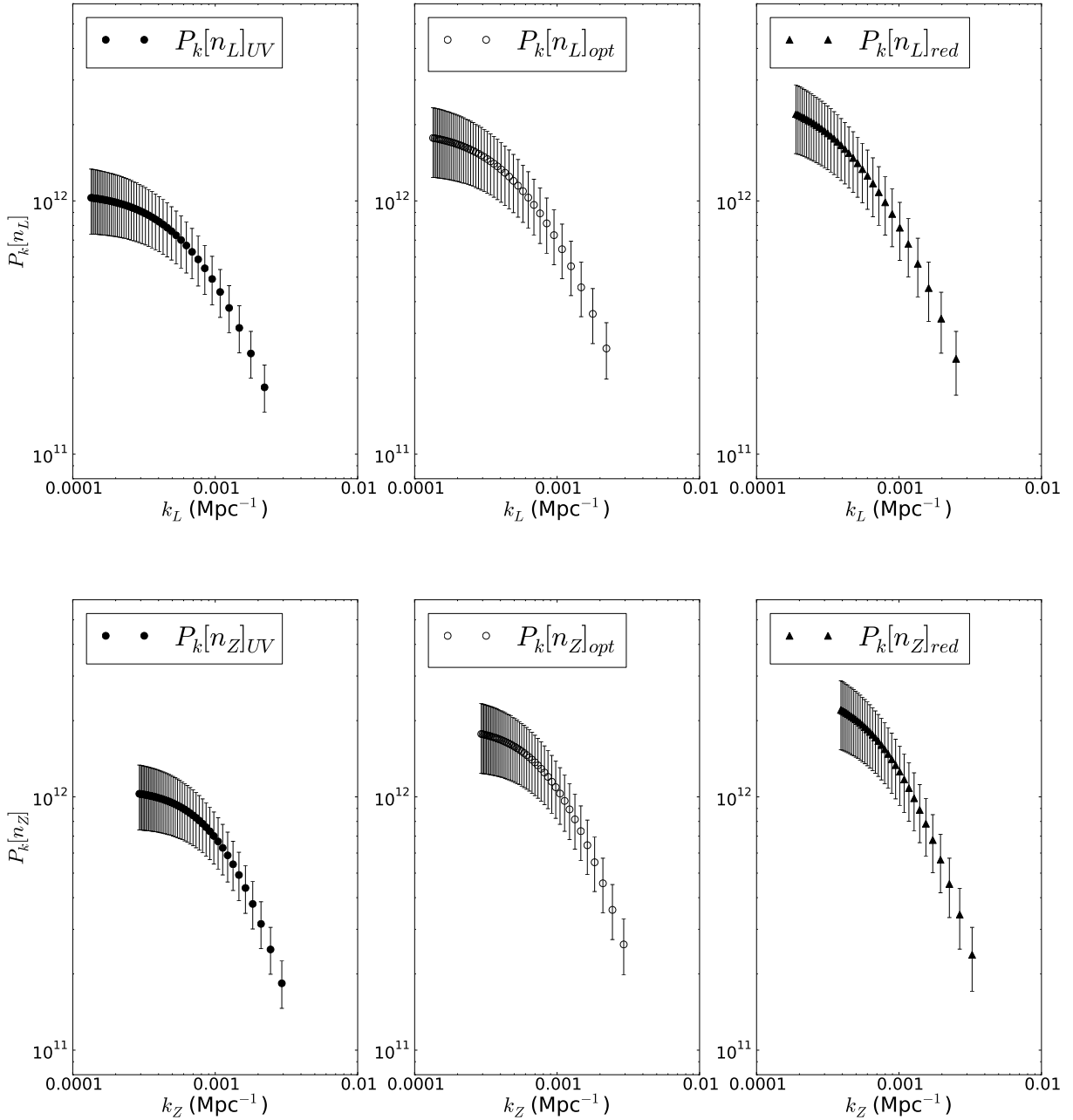


Figura 6.5: Espectro de potência das densidades integrais observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha para as distâncias  $d_L$  e  $d_Z$  assumindo o modelo  $\Lambda$ CDM.

Na figura 6.6 encontra-se o resultado dos EPs usando  $n_A$  e  $n_G$  para as bandas UV, óptica e vermelha. Observa-se um padrão de comportamento similar ao teórico tanto para  $P_k(n_A)$  quanto para  $P_k(n_G)$ . Para os EPs de ambas densidades verifica-se um aumento na amplitude de acordo com a banda de observação na seguinte ordem: UV, óptica e vermelha.

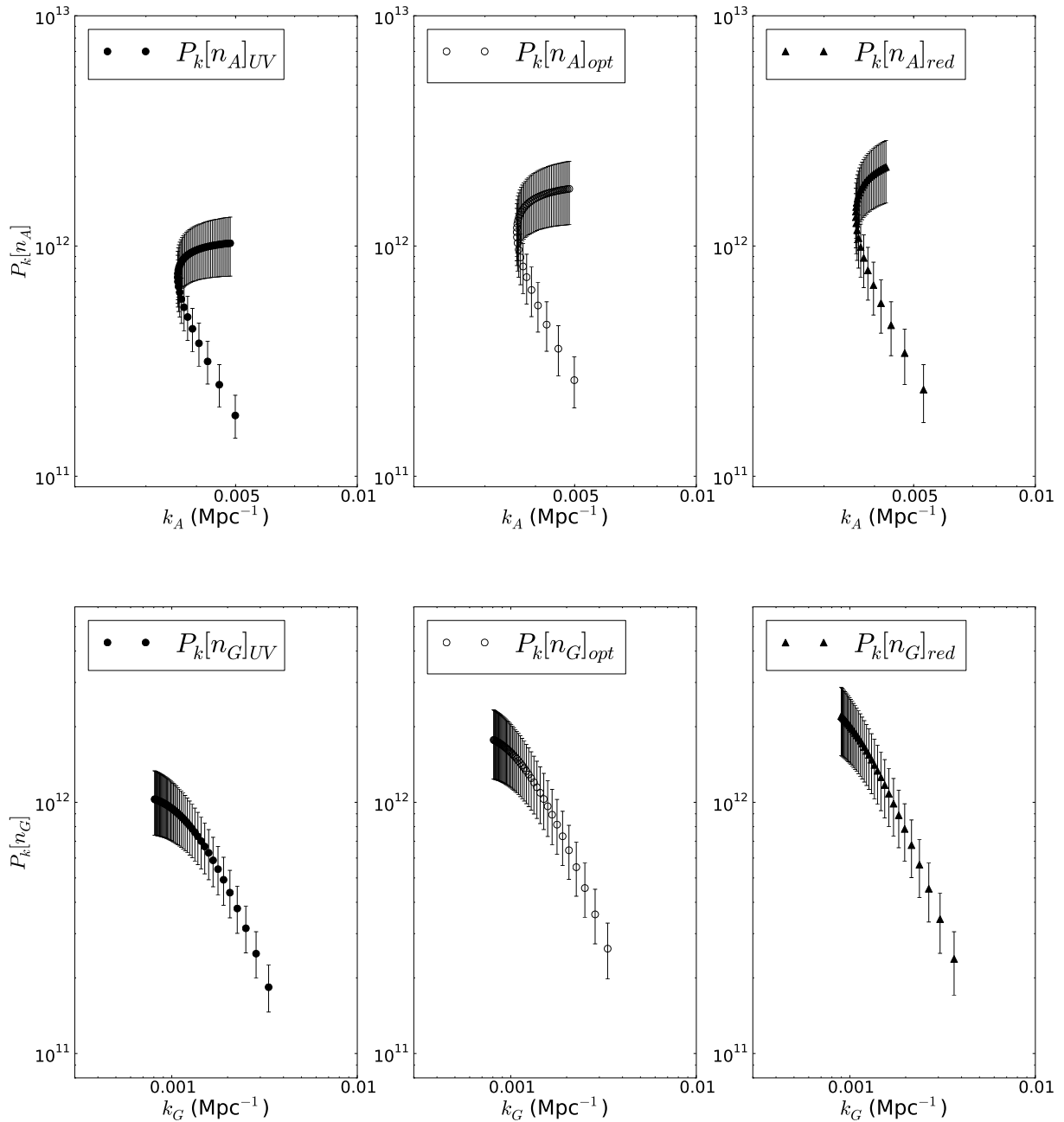


Figura 6.6: Espectro de potência das densidades integrais observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha para as distâncias  $d_A$  e  $d_G$  assumindo o modelo  $\Lambda$ CDM.

## 6.2 Correlação Radial

Com o objetivo de avançar o estudo, iremos agora analisar as quantidades discutidas até agora por meio de uma nova grandeza chamada de *correlação radial*  $\Xi$ . A sua definição é similar à função de correlação de dois pontos introduzida por Pietronero (1987) conforme a equação (2.20). Assim, podemos escreve-la como,

$$\Xi_i = \frac{\gamma_i}{n_i(R_i)} - 1, \quad (6.6)$$

onde  $\gamma_i$  e  $n_i$  são as densidades diferenciais e integrais, respectivamente, e  $R_i$  corresponde ao tamanho da amostra, ou seja, é o raio do volume ocupado pela amostra.

Ribeiro (1995) estudou a correlação radial no modelo de Einstein-de Sitter através da equação acima, mas somente para a distância de luminosidade  $d_L$ , e encontrou uma clara dependência desta grandeza com o tamanho da amostra. Esse resultado é também encontrado quando usa-se a correlação radial para  $d_L$  no modelo  $\Lambda$ CDM, figura 6.7.

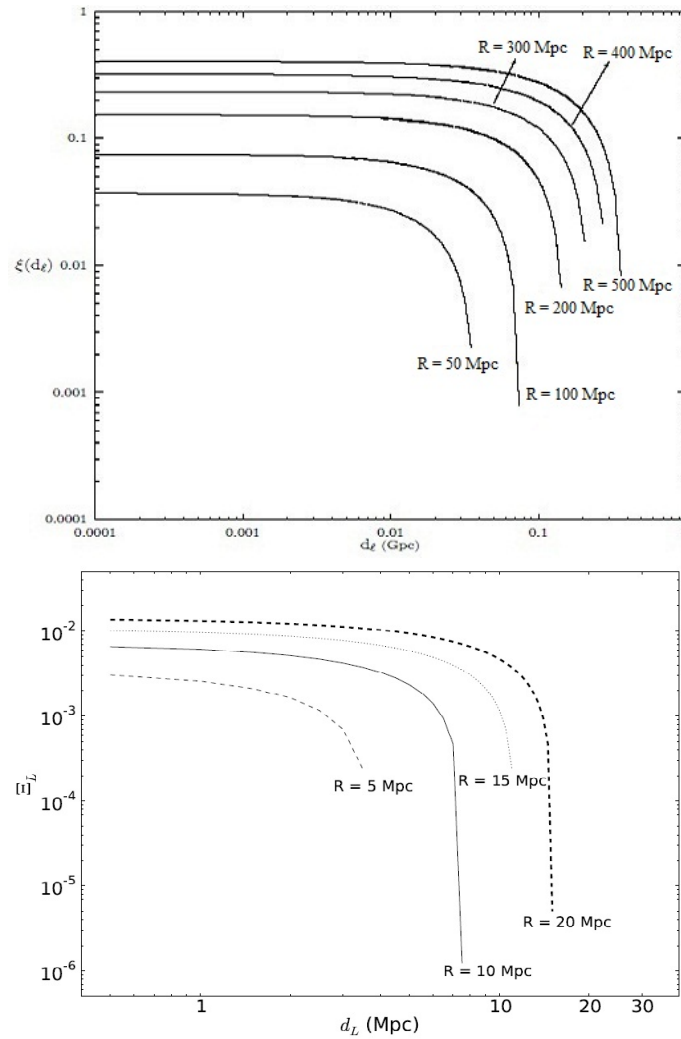


Figura 6.7: **Superior:** Correlação radial teórica da distância de luminosidade para diferentes tamanhos de amostra  $R$  no modelo EdS (Ribeiro 1995). **Inferior:** Correlação radial da distância de luminosidade para diferentes tamanhos de amostra  $R$  no modelo  $\Lambda$ CDM. Ambos os gráficos ilustram que a amplitude dessas funções aumenta com  $R$ .

O EP da correlação radial com a distância  $d_L$  para o modelo  $\Lambda$ CDM apresenta um comportamento de lei de potência conforme ilustra a figura 6.8. Apesar de  $\Xi_L$  variar com o tamanho da amostra como mostra a figura 6.7, o seu EP não apresenta diferença significativa com o tamanho da amostra como pode ser notado na figura abaixo.

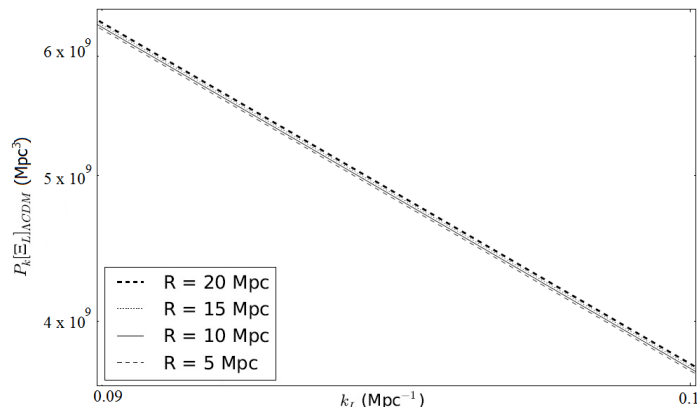


Figura 6.8: Espectro de potência da correlação radial teórica da distância de luminosidade em diferentes tamanhos de amostra  $R_L$  no modelo  $\Lambda$ CDM.

O cálculo da correlação radial observacional foi feito através da equação (6.6) considerando  $n_i(R_i)$  como o valor respectivo a maior distância. Para as bandas UV e óptica cuja amostra possui galáxias até  $z = 5$ , tem-se que  $R_i = d_i(z = 5)$  enquanto para as bandas vermelhas  $R_i = d_i(z = 3.75)$ . Os resultados de  $\Xi_i$  para as distâncias  $d_L$ ,  $d_Z$  e  $d_G$  encontram-se nas figuras 6.9, 6.10 e 6.11, respectivamente. Pode-se notar que a correlação radial relativa às três distâncias e para todas as bandas comporta-se como uma lei de potência. Não foi desenvolvida a correlação radial para  $d_A$  pois esta distância apresenta uma descontinuidade em  $z \approx 1.5$ .

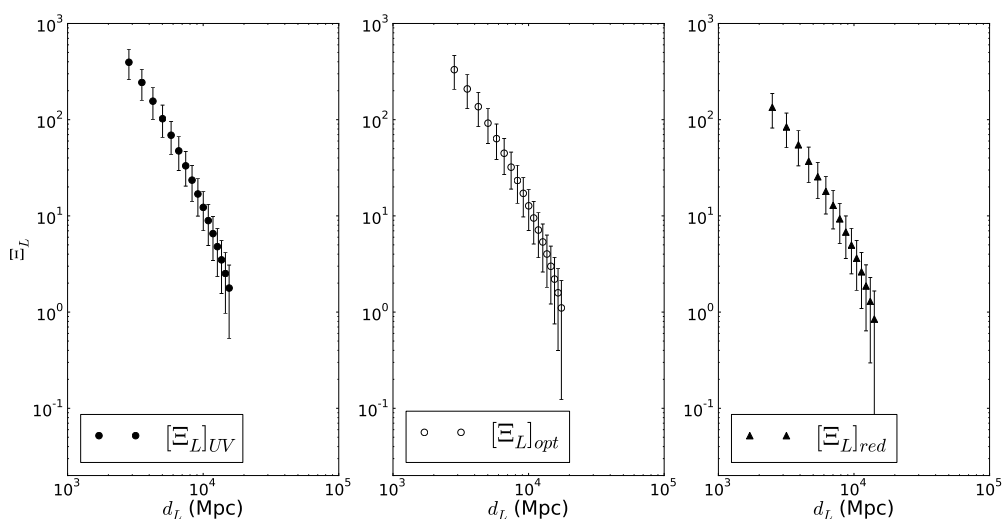


Figura 6.9: Correlação radial das densidades observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância de luminosidade  $d_L$  no modelo  $\Lambda$ CDM. Para as bandas UV e óptica foi considerada uma amostra onde  $R_L = 46652$  Mpc, enquanto para as bandas vermelhas  $R_L = 33205$  Mpc.

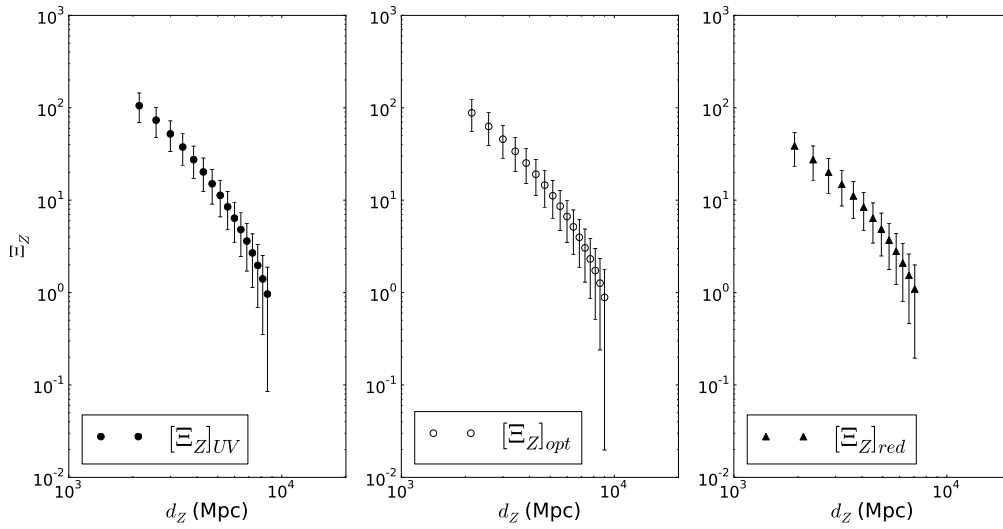


Figura 6.10: Correlação radial das densidades observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância por desvio para o vermelho  $d_Z$  no modelo  $\Lambda$ CDM. Para as bandas UV e óptica foi considerada uma amostra onde  $R_Z = 21414$  Mpc, enquanto para as bandas vermelhas  $R_Z = 16060$  Mpc.

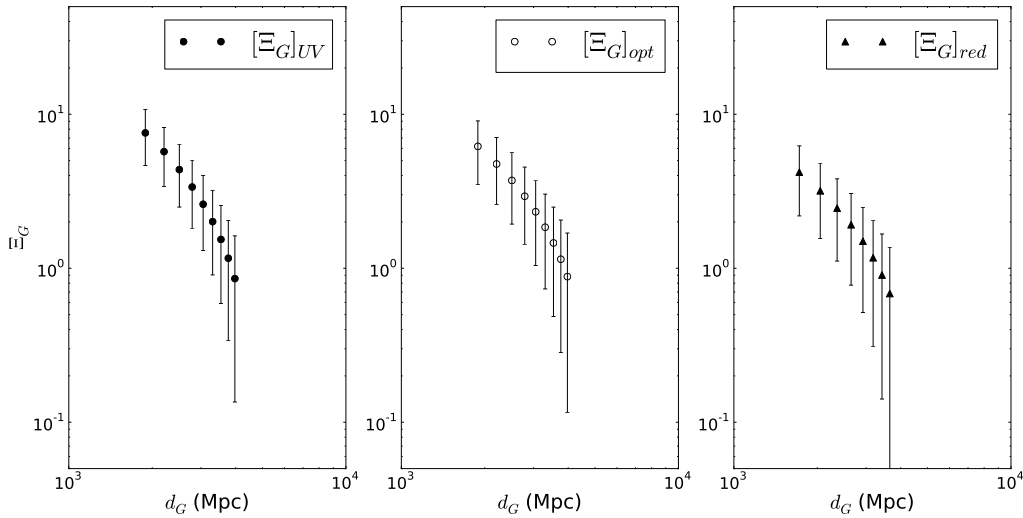


Figura 6.11: Correlação radial das densidades observacionais nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância por área galáctica  $d_G$  no modelo  $\Lambda$ CDM. Para as bandas UV e óptica foi considerada uma amostra onde  $R_G = 7775$  Mpc, enquanto para as bandas vermelhas  $R_G = 6990$  Mpc.

Também podemos analisar os resultados acima da correlação radial em comparação à função de correlação de dois pontos da figura 2.7. Nesta análise verificamos o mesmo comportamento de lei de potência com expoente negativo tanto para a função de correlação de dois pontos quanto para a correlação radial.

Os EPs de  $\Xi_L$ ,  $\Xi_Z$  e  $\Xi_G$  observacional podem ser vistos nas figuras 6.12, 6.13 e 6.14, respectivamente. O comportamento dos EPs são similares para as três bandas nas três distâncias cosmológicas  $d_L$ ,  $d_Z$  e  $d_G$ , porém o valor máximo dos EPs encontra-se levemente deslocado para números de ondas menores nas bandas vermelhas quando comparado aos

resultados nas bandas UV e ópticas. Também podemos comparar esses EPs derivados da correlação radial com o EP da função de correlação de dois pontos da figura 2.9. Nesta comparação, verificamos que o EP de  $\Xi_i$  comporta-se de forma similar ao EP da função de correlação, contudo o primeiro apresenta um máximo em  $k_i \approx 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  enquanto o segundo tem o máximo em  $k \approx 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$ .

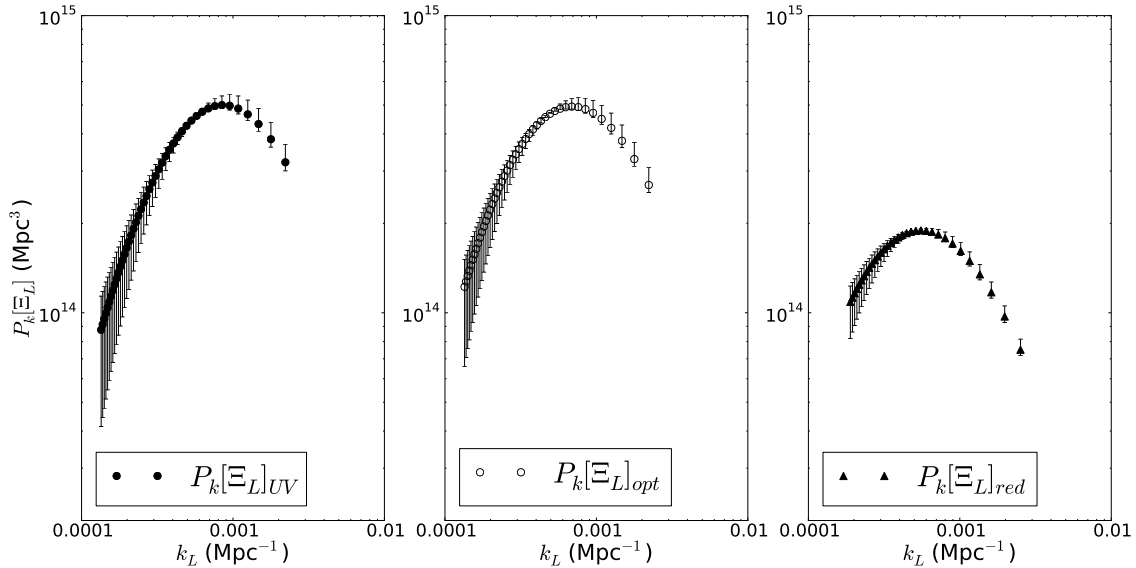


Figura 6.12: Espectro de potência da correlação radial observacional nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância de luminosidade  $d_L$  e assumindo o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM.

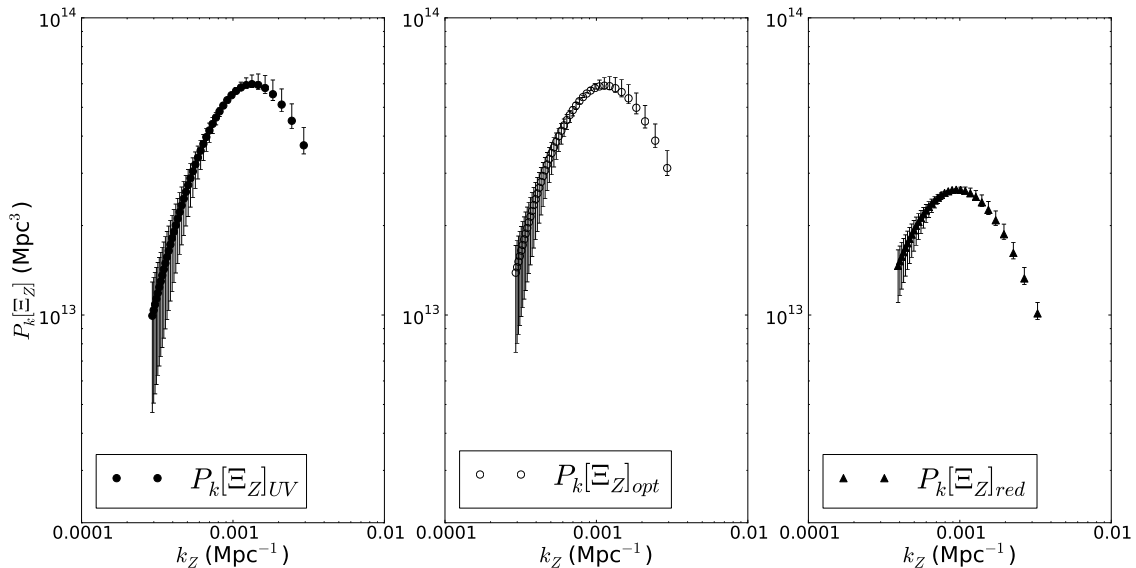


Figura 6.13: Espectro de potência da correlação radial observacional nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância por desvio para o vermelho  $d_Z$  assumindo o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM.

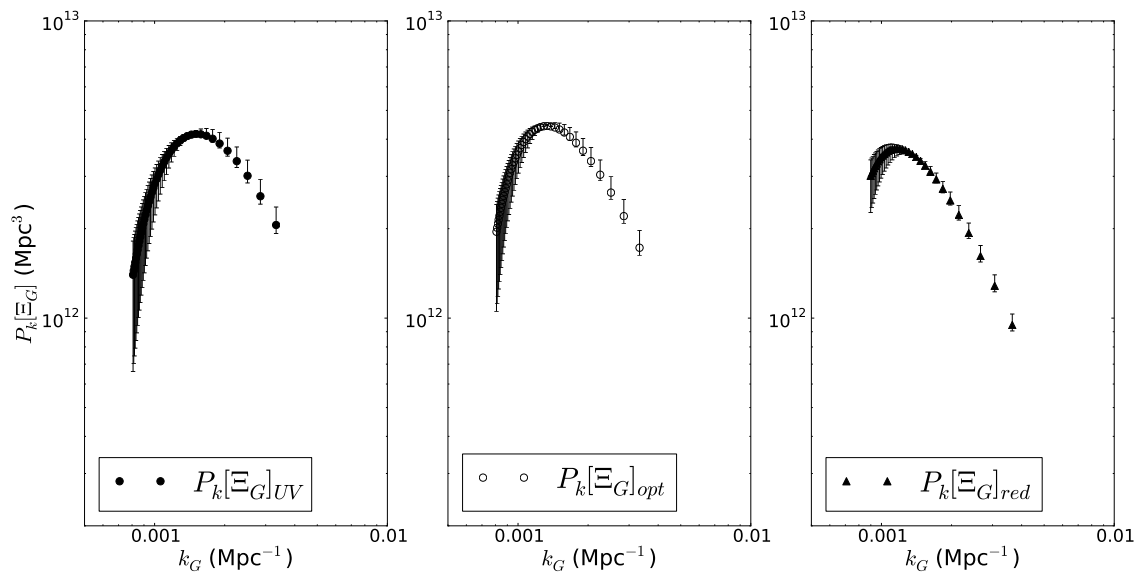


Figura 6.14: Espectro de potência da correlação radial observacional nas bandas UV, óptica e vermelha com a distância por área galáctica  $d_G$  assumindo o modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM.



## Capítulo 7

---

### Conclusões

---

Nesse trabalho foi analisado o espectro de potência obtido por meio das densidades diferenciais  $\gamma_i$  e integrais  $n_i$ , as quais são definidas em relação às distâncias cosmológicas  $d_i$ , onde  $i = A, L, G, Z$ , que correspondem respectivamente a distância por área, distância de luminosidade, distância por área galáctica e distância por desvio para o vermelho. Essas densidades foram calculadas em duas abordagens, uma usando apenas grandezas da teoria e outra observacional usando dados da função de luminosidade galáctica (FL). Primeiro apresentou-se o arcabouço cosmológico necessário para o desenvolvimento das quantidades teóricas para a classe de modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, mais especificamente para os modelos  $\Lambda$ CDM com parâmetros  $\Omega_{m_0} = 0.3$  e  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ , e Einstein-de Sitter (EdS).

Posteriormente, discutiu-se a conexão entre a teoria relativística e a observação através da utilização dos dados da FL conforme modelo proposto por Ribeiro & Stoeger (2003). Por esta metodologia consegue-se extrair desses dados a contagem numérica diferencial  $dN/dz$  observada, um observável primário a partir do qual todas as outras grandezas observacionais podem ser construídas. Foram escolhidos os dados de Gabasch et al. (2004, 2006) cujos desvios para o vermelho variam de  $0.5 \leq z \leq 5.0$  e  $0.45 \leq z \leq 3.81$ , respectivamente. Esses catálogos foram escolhidos por terem seus dados ajustados por um perfil de Schechter parametrizado com o desvio para o vermelho. Todas as grandezas, sejam teóricas ou observacionais, foram calculadas a partir de um programa escrito na linguagem de programação *Python*, apresentado no apêndice A.

Com o arcabouço discutido acima foi possível obter as quantidades de principal interesse,  $\gamma_i$  e  $n_i$ . Quando se compara os resultados dessas grandezas provenientes da teoria com os da observação, verifica-se que as observacionais decaem mais com o desvio para o vermelho do que as teóricas.

De posse das densidades diferenciais e integrais pode-se, finalmente, calcular os seus espectros de potência (EP)  $P_k$ , os quais permitem estudar essas grandezas no espaço dos números de ondas onde podem aparecer de forma mais pronunciada características dessas densidades. Ao se comparar os EPs de ambas as densidades nas quatro distâncias e em modelos cosmológicos diferentes, EdS e  $\Lambda$ CDM, verifica-se que de um modelo para

o outro não há mudança de comportamento, mas apenas um deslocamento para números de onda maiores dos resultados da cosmologia EdS em relação aos de  $\Lambda$ CDM.  $P_k(\gamma_L)$  e  $P_k(\gamma_Z)$  teóricos para o modelo  $\Lambda$ CDM comportam-se como uma lei de potência com expoente negativo para  $k_L \gtrsim 0.0005 \text{ Mpc}^{-1}$  e  $k_Z \gtrsim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$ , respectivamente, e para  $k_L \lesssim 0.0005 \text{ Mpc}^{-1}$  e  $k_Z \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  torna-se praticamente constante.  $P_k(n_L)$  e  $P_k(n_Z)$  para o modelo  $\Lambda$ CDM apresentam um comportamento de lei de potência com expoente negativo para  $k_L, k_Z \gtrsim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  e para  $k_L, k_Z \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  o comportamento muda para uma inclinação menor.  $P_k(\gamma_A)$  e  $P_k(n_A)$  seguem uma lei de potência em  $k_A \gtrsim 0.0036 \text{ Mpc}^{-1}$ .  $P_k(\gamma_G)$  e  $P_k(n_G)$  comportam-se sempre como uma lei de potência.

Os resultados dos EPs observacionais de  $\gamma_A$  são similares ao previsto pela teoria, porém os EPs de  $\gamma_L$ ,  $\gamma_G$  e  $\gamma_Z$  apresentam um declínio abrupto não verificado no teórico para  $k_L \lesssim 0.0005 \text{ Mpc}^{-1}$ ,  $k_G \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$  e  $k_Z \lesssim 0.001 \text{ Mpc}^{-1}$ , respectivamente. Este decréscimo inesperado pode ser devido a efeitos de seleção da amostra. A amplitude do EP das densidades diferenciais aumenta com as bandas na seguinte ordem: UV, óptica e vermelha, o que era esperado pois os valores de  $\gamma_i$  também aumentam nessa ordem, como pode ser visto nas tabelas e gráficos do capítulo 5. Os EPs observacionais de  $n_i$  apresentam um comportamento similar ao esperado pela teoria para as quatro distâncias e a amplitude do EP dessas grandezas também aumenta com as diferentes bandas na mesma ordem mencionada anteriormente. Esses resultados indicam que as densidades diferenciais são mais sensíveis do que as integrais a possíveis efeitos de seleção da amostra.

Também foi discutida uma nova grandeza chamada correlação radial  $\Xi_i$ , similar à função de correlação de dois pontos. Esta nova função apresenta uma dependência com o tamanho da amostra  $R_i$  considerada para a análise: quanto maior  $R_i$  maior a amplitude da função. Entretanto, quando calcula-se o espectro de potência dessa grandeza encontra-se uma lei de potência independente do tamanho da amostra considerada. Foram calculadas as correlações radiais das distâncias  $d_L$ ,  $d_G$  e  $d_Z$  para os dados observacionais e pode-se observar um decaimento com o aumento da distância e os seus respectivos EPs. O EP de  $\Xi_i$  comporta-se como uma lei de potência com expoente negativo até um valor máximo de EP relativo a um certo valor de  $k_i$  e para valores menores do que este  $k_i$  o expoente torna-se positivo. Este comportamento aparece para as três distâncias e é similar para as três bandas, porém o valor máximo do EP mostra-se levemente deslocado para números de ondas menores nas bandas vermelhas quando comparado com o resultado para as bandas UV e ópticas.

Apesar de não ter sido desenvolvido neste trabalho, os EPs calculados têm uma aplicação direta no estudo da distribuição de galáxias vistas como um sistema fractal, pois nesse caso a distribuição de galáxias é descrita através de leis de potência.

A análise e todos os resultados mostrados no capítulo 6 são inéditos e fazem parte de um artigo em preparação (Lopes & Ribeiro 2011).

---

# Bibliografia

---

- [1] Abell, G.O., 1958, *ApJS*, 3, 211
- [2] Abell, G.O., 1961, *Astron. J.* 66, 607
- [3] Abell, G.O., 1965, *ARA&A*, 3, 1
- [4] Albani, V.V.L., Iribarrem, A.S., Ribeiro, M.B. & Stoeger, W.R., 2007, *ApJ*, 657, 760, arXiv:astro-ph/0611032v1 (**A07**)
- [5] Appenzeller, I., Bender, R., Böhm, A. et al., 2000, *The Messenger*, 100, 44
- [6] Arakelyan, M.A. & Kalloglyan, A.T., 1970, *SvA*, 13, 953
- [7] Baryshev, Y. & Teerikorpi, P., 2005, *Bull. Spec. Astrophys. Obs. Russian Academy of Sciences*, 59, arXiv:astro-ph/0505185
- [8] Baum, W.A., 1962, *Problems of Extra-Galactic Research*, Simpósio IAU No. 15, ed. G.C. McVittie (Macmillan, New York), 390
- [9] Baugh C.M., 1996, *MNRAS* 280, 267, astro-ph/9512011
- [10] Bell, E.F. et al., 2003, *ApJs*, 149, 289
- [11] Binggeli, B., Sandage, A. & Tammann, G.A., 1988, *ARA&A*, 26, 509
- [12] Blanton, M.R. et al., 2003, *ApJ*, 592, 819
- [13] Bok, B. J., 1934, *Harvard College Obs. Bull.*, 895, 1
- [14] Bouwens, R.J., Illingworth, G.D., Franx, M. & Ford, H., 2007, *ApJ*, 670, 928, arXiv:0707.2080
- [15] Bouwens, R.J., Illingworth, G.D., Oesch, P.A. et al., 2011, *ApJ*, 737, 90, arXiv:1006.4360
- [16] Carlberg, R.G., Yee, H.K.C., Morris, S.L., et al., 2000, *ApJ*, 542, 57
- [17] Chincarini, G.L., Giovanelli, R. & Haynes, M.P., 1983, *ApJ*, 269, 13

- [18] Coil, A. L. & time *DEEP2*, 2003, *Am. Astron. Soc. Meeting Abstract* 203
- [19] Coleman, P.H., & Pietronero, L., 1992, *Phys.Rev.*, 213, 311
- [20] Coleman, P.H., Pietronero, L. & Sanders, R.H., 1988, *A&A* 200, 32
- [21] da Costa, L.N., Pellegrini, P.S., Davis, M. et al., 1991, *ApJS*, 75, 935
- [22] da Costa, L.N., Pellegrini, P.S., Sargent, W.L.W., et al., 1988, *ApJ*, 327, 544
- [23] da Costa, L.N., Willmer, C.N.A., Pellegrini, P. S. et al., 1998, *Astron. J.*, 116, 1
- [24] Dalton, G. B., Maddox, S.J., Sutherland, W.J. & Efstathiou, G., 1997, *MNRAS*, 289, 263
- [25] Davis, M., Faber, S.M., Newman, J., et al., 2003, *Discoveries and Research Prospects from 6- to 10-Meter-Class Telescopes II, Proceedings of the SPIE*, Vol. 4834, ed. Puragra Guhathakurta (SPIE, Bellingham, WA), 161
- [26] Davis, M. & Peebles, P.J.E., 1983, *ApJ*, 267, 465
- [27] de Lapparent, V., Geller, M. J. & Huchra, J. P., 1986, *ApJL*, 302, L1
- [28] de Vaucouleurs, G., 1953, *Astron. J.*, 58, 30
- [29] de Vaucouleurs G., de Vaucouleurs A., Corwin H.G., et al., 1991, *Third Reference Catalogue of Bright Galaxies (RC3)*, Springer-Verlag: New York
- [30] Duric, N., 2004, *Advanced astrophysics*, Cambridge, UK: Cambridge University Press
- [31] Eales, S., 1993, *ApJ*, 404, 51
- [32] Eisenstein D.J., Zehavi I., Hogg D.W., Scoccamarro R., et al., 2005, *ApJ* 633, 560, arXiv: astro-ph/0501171
- [33] Ellis, G.F.R., 1971, *General Relativity and Cosmology*, Proc. of the International School of Physics "Enrico Fermi", ed. R.K. Sachs, New York, Academic Press, 104
- [34] Ellis, G.F.R., 2007, *Gen. Rel. Grav.*, 39, 1047
- [35] Elmegreen, D.M., 1998, *Galaxies and Galactic Structure*, Upper Saddle River, Prentice Hall
- [36] Etherington, I.M.H., 1933, *Phil. Mag.*, 15, 761; reimpresso em *Gen. Relat. Grav.*, 2007, 39, 1055
- [37] Falco, E. E., Kurtz, M. J., Geller, M. J. et al., 1999, *Publ. Astron. Soc. Pac.* 111, 438
- [38] Felten, J.E., 1976, *ApJ*, 207, 700
- [39] Fernández-Soto, A., Lanzetta, K.M. & Yahil, A., 1999, *ApJ*, 513, 34

- [40] Fisher, K.B., Huchra, J.P., Strauss, M.A. et al., 1995, ApJS, 100, 69
- [41] Folkes S., Ronen S., Price I., Lahav O., et al., 1999, MNRAS 308, 459
- [42] Fried, J.W. et al., 2001, A&A, 367, 788
- [43] Gabasch, A. et al., 2004, A & A, 421, 41, arXiv:astro-ph/0403535
- [44] Gabasch, A. et al., 2006, A & A, 448, 101, arXiv:astro-ph/0510339v1
- [45] Gabrielli, A., Sylos Labini, F., Joyce, M., Pietronero, L., 2004, *Statistical Physics for Cosmic Structures*, Springer Verlag
- [46] Geller, M.J., Kurtz, M.J., Wegner, G. et al., 1997, Astron. J. 114, 2205
- [47] Giavalisco, M., Ferguson, H.C., Koekemoer, A.M., et al., 2004, ApJL, 600, L93
- [48] Giovanelli, R. & Haynes, M.P., 1985, Astron. J. 90, 2445
- [49] Groth, E.J. & Peebles, P.J.E., 1977, ApJ, 217, 385
- [50] Gullixson, C.A., Boeshaar, P.C., Tyson, J.A. & Seitzer, P., 1995, ApJS, 99, 281
- [51] Guzzo, L., 1997, *New Astron.*, 2, 517
- [52] Hamilton, A.J.S., 1993, ApJ, 417, 19
- [53] Hamilton A.J.S., Tegmark M., 2002, MNRAS 330, 506, astro-ph/0008392
- [54] Harrison, E., 1993, ApJ, 403, 28
- [55] Heidt, J., Appenzeller, I., Gabasch, A. et al., 2003, Ap&SS, 284, 285
- [56] Hubble, E.P., 1926, ApJ, 64, 321
- [57] Hubble, E., 1936a, ApJ, 84, 158
- [58] Hubble, E., 1936b, ApJ, 84, 270
- [59] Humason, M.L., 1936, ApJ, 83, 10
- [60] Iribarrem, A.S., **Lopes, A.R.**, Ribeiro, M.B. & Stoeger, W. R., 2011, submetido (I11)
- [61] Jarrett, T., 2004, *Publ. Astron. Soc. Aust.*, 21, 396
- [62] Jarrett T.H., Chester T., Cutri R., et al., 2004, AJ, 125, 525
- [63] Jones, B.J., Martínez, V.J., Saar, E. & Trimble, V., 2004, RvMP, 76, 1211, arXiv:astro-ph/0406086
- [64] Karachentsev, I. D., 1966, *Astrofizika*, 307, 159
- [65] Kerscher, M., Szapudi, I. & Szalay, A.S., 2000, ApJL, 535, L13

- [66] Kiang, T., 1961, MNRAS, 122, 263
- [67] Kirshner, R.P., Oemler, A., Schechter, P.L., 1979, AJ, 84, 951
- [68] Koo, D. C., 1985, AJ, 90, 418
- [69] Landy, S.D. & Szalay, A.S., 1993, ApJ, 412, 64
- [70] Lawrence, A., Rowan-Robinson, M., Ellis, R.S. et al., 1999, MNRAS, 308, 897
- [71] Le Fèvre, O., Vettolani, G., Maccagni, D., et al., 2003, *The Messenger*, 111, 18
- [72] Limber, D.N., 1954, ApJ, 119, 655
- [73] Lima Neto, G.B., 2011, *Astrofísica Extragaláctica - Notas de Aulas*, IAG, USP, <http://www.astro.iag.usp.br/gastao> (acessado em 11/04/2011)
- [74] Lin, H. et al., 1999, ApJ, 518, 533
- [75] **Lopes, A.R.** & Ribeiro, M.B., 2011, em preparação
- [76] Loveday, J., Peterson, B.A., Maddox, S.J. & Efstathiou, G., 1996, ApJS, 107, 201
- [77] Ly, C. et al., 2007, ApJ, 657, 738
- [78] Maddox, S. J., Efstathiou, G., Sutherland, W.J. & Loveday, J., 1990, MNRAS, 243, 692
- [79] Martínez, V.J., Portilla, M., Jones, B.J.T. & Paredes, S., 1993, A&A, 280, 5
- [80] Martínez, V.J. & Saar, E., 2002, *Statistics of the Galaxy Distribution*, Chapman & Hall/CRC
- [81] McQuarrie, D.A., 1999, *Statistical Mechanics* (Harper & Row, New York)
- [82] Mowbray, A.G., 1938, *Publ. Astron. Soc. Pac.*, 50, 275
- [83] Neyman, J. & Scott, E.L., 1952, ApJ, 116, 144
- [84] Neyman, J., Scott, E.L. & Shane, C.D., 1953, ApJ, 117, 92
- [85] Norman, C. et al., 2004, ApJ, 607, 721
- [86] Peacock, J.A., Cole, S., P. Norberg, P., et al., 2001, *Nature (London)* 410, 169
- [87] Peebles, P.J.E., 1974a, Ap&SS, 31, 403
- [88] Peebles, P.J.E., 1974b, ApJL, 189, 51
- [89] Peebles, P.J.E., 1975, ApJ, 196, 647
- [90] Peebles, P.J.E. , 1980, *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton Univ. Press. Princeton

- [91] Peebles, P.J.E., 1993, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University, Princeton)
- [92] Peebles, P.J.E. & Groth, E.J., 1975, *ApJ*, 196, 1
- [93] Peebles, P.J.E. & Hauser, M.G., 1974, *ApJS*, 28, 19
- [94] Percival, W.J., Baugh, C.M., Bland-Hawthorn, J., et al., 2001, *MNRAS*, 327, 1297
- [95] Percival, W.J., Verde, L. & Peacock, J.A., 2004, *MNRAS*, 347, 645
- [96] Phleps, S. & Meisenheimer, K., 2003, *A&A*, 407, 855
- [97] Pietronero, L., 1987, *PhyA.*, 144, 257
- [98] Poli, F. et al., 2003, *ApJL*, 593, 1
- [99] Pons-Bordería, M.-J., Martínez, V.J., Stoyan, D., Stoyan, H. & Saar, E., 1999, *ApJ*, 523, 480
- [100] Pozzetti, L. et al. 2003, *A&A*, 402, 837
- [101] Press, W.H., Schechter, P., 1974, *ApJ*, 187, 425
- [102] Rangel Lemos, L.J. & Ribeiro, M.B., 2008, *A&A*, 488, 55, arXiv:0805.3336
- [103] Ratcliffe, A., Shanks, T., Parker, Q.A. et al., 1998, *MNRAS*, 300, 417
- [104] Ribeiro, M.B., 1995, *ApJ*, 441, 477
- [105] Ribeiro, M.B., 2001, *GReGr*, 33, 1699, arXiv:astro-ph/0104181
- [106] Ribeiro, M.B., 2005, *A & A*, 429, 65 (**R05**)
- [107] Ribeiro, M.B. & Stoeger, W. R., 2003, *ApJ*, 592, 1, arXiv: astro-ph/0304094 (**RS03**)
- [108] Rubin, V.C., 1954, *Proceedings of the National Academy of Science*, 40, 541
- [109] Rudnick, G. et al., 2003, *ApJ*, 599, 847
- [110] Sandage, A., 1961, *ApJ*, 133, 355
- [111] Santiago, B.X., Strauss, M.A., Lahav, O., et al., 1995, *ApJ*, 446, 457
- [112] Saunders, W., Sutherland, W.J., Maddox, S.J., et al., 2000, *MNRAS*, 317, 55
- [113] Scaramella, R., Guzzo, L., Zamorani, G., et al., 1998, *A&A*, 334, 404
- [114] Schechter, P., 1976, *ApJ*, 203, 297
- [115] Schmidt, M., 1968, *ApJ*, 151, 393
- [116] Scott, E.L., 1962, *in Problems of Extra-Galactic Research*, IAU Simpósio No. 15, ed. G.C. McVittie (Macmillan, New York), 269

- [117] Shane, C.D. & Wirtanen, C.A., 1954, *Astron. J.* 59, 285
- [118] Shane, C.D & Wirtanen, C.A., 1967, *Publications of the Lick Observatory* 22, 1
- [119] Shapley H. & Ames A., 1932, *Ann. Harvard Obs.*, 88, 41
- [120] Shectman, S.A., Landy, S.D., Oemler, A., et al., 1996, *ApJ*, 470, 172
- [121] Shepherd, C.W., Carlberg, R.G., Yee, H.K.C., et al., 2001, *ApJ*, 560, 72
- [122] Sparke, L.S., & Gallagher, J.S. 2000, *Galaxies in the Universe*, Cambridge, Cambridge University Press
- [123] Strauss, M. A., Huchra, J. P., Davis, M. et al., 1992, *ApJS*, 83, 29
- [124] Sylos Labini, F., Montuori, M. & Pietronero, L., 1998, *PhR*, 293, 61, arXiv:astro-ph/9711073
- [125] Tegmark, M., Blanton, M.R., Strauss, M.A., et al., 2004, *ApJ*, 606, 702, arXiv:astro-ph/0310725
- [126] Tegmark, M., Eisenstein, D.J., Strauss, M.A., et al., 2006, *PhRvD*, 74, 123507
- [127] Totsuji, H. & Kihara, T., 1969, *PASJ*, 21, 221
- [128] Tucker D., Oemler A., Jr., Kirshner R.P., Lin H., et al., 1997, *MNRAS* 285, L5
- [129] Turner, E.L., 1979, *ApJ*, 231, 645
- [130] Tzanavaris, P. & Georgantopoulos, I., 2008, *A&A*, 480, 663
- [131] van den Bergh, S., 1961, *Publ. Astron. Soc. Pac.* 73, 135
- [132] Vasilyev, N.L., Baryshev, Y.V. & Sylos Labini, F., 2006, *A&A*, 447, 431
- [133] Vettolani, G., Zucca, E., Merighi, R., et al., 1998, *A & A*, 130, 323
- [134] Wertz, J.R., 1970, *Newtonian Hierarchical Cosmology*, Ph.D.Thesis, Austin, Universidade do Texas
- [135] Wertz, J.R., 1971, *ApJ*, 164, 227
- [136] Wilmer, C.N.A. et al., 2006, *ApJ*, 647, 853
- [137] Wolf, C., Meisenheimer, K., Kleinheinrich, M., et al., 2004, *A&A*, 421, 913
- [138] Yahil, A., Strauss, M.A., Davis, M. & Huchra, J.P., 1991, *ApJ*, 372, 380
- [139] Yee, H.K.C., Morris, S.L., Lin, H., et al., 2000, *ApJS*, 129, 475
- [140] Zwicky, F., 1957, *Morphological Astronomy*, Springer, pp. 166-176, 222-228
- [141] Zwicky, F. & Berger, J., 1965, *ApJ*, 141, 34



- [142] Zwicky, F., Herzog, E. & Wild, P., 1961 - 1968, *Catalogue of Galaxies and of Clusters of Galaxies* (California Institute of Technology, Pasadena)
- [143] Zwicky, F. & Karpowicz, M., 1966, *ApJ*, 146, 43
- [144] Zwicky, F. & Rudnicki, K., 1963, *ApJ*, 137, 707
- [145] Zwicky, F. & Rudnicki, K., 1966, *Z. Astrophys.*, 64, 246



# Apêndice A

---

## Programas em Python

---

O formalismo geral apresentado nesse trabalho consiste em primeiro obter, para um determinado modelo cosmológico, uma equação para  $da/dr$  que resulta da combinação de  $da/dt$  obtida de uma equação de Friedmann com  $dt/dr$  obtida através das geodésicas nulas para a métrica desse modelo. Em seguida,  $dN/dr$  pode ser obtida usando a equação (3.30). A sua derivada em relação ao desvio para o vermelho é obtida pela regra da cadeia a partir de sua correspondente derivada em função da coordenada radial  $r$ , determinada pela equação (3.31). Com o auxílio da equação (3.32), pode-se construir uma lista com os valores  $z[a(r)]$ . De posse dos valores numéricos para o fator de escala com dependência da coordenada radial pode-se obter a distância por área  $d_A$  via equação (3.49) e, conseqüentemente, as demais distâncias,  $d_L$ ,  $d_G$  e  $d_Z$ , utilizando o teorema da reciprocidade (3.47) e  $z[a(r)]$ . A derivada com o desvio para o vermelho de  $d_A$  na equação (3.54) pode ser obtida usando  $dr/dz$  e  $da/dr$  das equações (3.34) e (3.28). As derivadas com o desvio para o vermelho para as outras distâncias podem ser calculadas, seguindo as equações (3.56) e (3.55). Isso, então, permite calcular as diferentes densidades diferenciais  $\gamma$  através da equação (5.3). Os volumes são facilmente obtidos pela equação (5.9) e com eles as densidades integrais  $n_i$ , utilizando a equação (5.12).

A função de seleção  $\psi(z)$  é calculada segundo a equação (4.11) considerando os dados da função de luminosidade de um determinado catálogo. A partir dos resultados de  $\psi(z)$  pode-se obter a contagem numérica observacional  $[dN/dz]_{obs}$  com auxílio da equação (4.23) e de  $dN/dz$  relativístico. Uma vez obtida  $[dN/dz]_{obs}$  e suas incertezas, pode-se determinar os valores observacionais de qualquer grandeza proporcional a ela, tal com  $[\gamma_i]_{obs}$  e  $[n_i]_{obs}$ .

Seguem os programas usados no trabalho e escritos em Python. Aqui serão apresentados apenas os programas referentes aos dados de G06, porém os procedimentos para são similares para G04.

## A.1 Função de Seleção

```
#!/usr/bin/env python
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import math
import scipy
from matplotlib.ticker import FuncFormatter
import asciidata
from scipy import integrate
import sympy as sy
def label_form(x, pos):
    return str(float(x))

#Parametros do catalogo G06 para as bandas vermelhas na ordem r', i' e z':
a_red = np.array([-0.77, -0.38, -0.49]) ; errosup_ared = np.array([0.30,
0.26, 0.29]); erroinf_ared = np.array([0.28, 0.25, 0.31])
b_red = np.array([-0.68, -0.60, -0.70]) ; errosup_bred = np.array([0.17,
0.15, 0.17]); erroinf_bred = np.array([0.17, 0.16, 0.19])
M0_red = np.array([-21.92, -22.45, -22.62]); errosup_M0red = np.array([0.30,
0.30, 0.38]);
erroinf_M0red = np.array([0.30, 0.30, 0.32])
phi0_red = np.array([0.0037, 0.0032, 0.0035]); errosup_phi0red = np.array
([0.0005, 0.0004, 0.0006]); erroinf_phi0red = np.array([0.0005, 0.0004,
0.0006])

#Constantes nas unidades Mpc, s e M_sol:
OmegaM=0.3 ; OmegaLambda=0.7 ; h = 0.7
H0= h*0.324077927e-17 ; c = 0.971561183e-14 ; G = 0.4457179e-47 ; Mg = 1e11

#Avermelhamento, magnitude absoluta limite inferior e superior:
Av = 0.035 ; m = 26.8 ; Minf = -30
z = np.arange(0.45, 3.81, 0.1)
dL1 = []
for k1 in z:
    res = integrate.quad(lambda x: 1 / (math.sqrt(OmegaM*((1+x)**3) +
OmegaLambda)), 0, k1)
    dL1.append((c*(1+k1)/H0) * res[0])
dL = np.array(dL1)
Msup = m - 5* np.log10(dL) - 25 + Av
```

```

#Parametros da funcao de luminosidade e os erros associados:
M_estrela_r = M0_red[0] + a_red[0] * np.log(1+z)
M_estrela_i = M0_red[1] + a_red[1] * np.log(1+z)
M_estrela_z = M0_red[2] + a_red[2] * np.log(1+z)
phi_estrela_r = phi0_red[0] * ((1+z)**b_red[0])
phi_estrela_i = phi0_red[1] * ((1+z)**b_red[1])
phi_estrela_z = phi0_red[2] * ((1+z)**b_red[2])
alpha_red = np.array([-1.33, -1.33, -1.33])
erro_alphared = np.array([0.03, 0.03, 0.03])
#p0 corresponde a M0, phi0; p1 corresponde a a,b, para o calculo do erro
p0, p1, z1 = sy.symbols('p0 p1 z1')
p2 = sy.diff(p0 + p1 * sy.log(1+z1), p0)
p3 = sy.diff(p0 + p1 * sy.log(1+z1), p1)
p4 = sy.diff(p0 * ((1+z1)**p1), p0)
p5 = sy.diff(p0 * ((1+z1)**p1), p1)
errosupM_estrela_r = [ ]; erroinfM_estrela_r = [ ];
errosupPhi_estrela_r = [ ]; erroinfPhi_estrela_r = [ ];
errosupM_estrela_i = [ ]; erroinfM_estrela_i = [ ];
errosupPhi_estrela_i = [ ]; erroinfPhi_estrela_i = [ ];
errosupM_estrela_z = [ ]; erroinfM_estrela_z = [ ];
errosupPhi_estrela_z = [ ]; erroinfPhi_estrela_z = [ ]
for u in z:
    ev =sy.sqrt(((p2.subs(p0, M0_red[0])).subs(p1, a_red[0])).subs(z1, u))
**2)*(errosup_M0red[0]**2) + ((p3.subs(p0, M0_red[0])).subs(p1, a_red[0])).
subs(z1, u)**2)*(errosup_ared[0]**2))
    errosupM_estrela_r.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p2.subs(p0, M0_red[0])).subs(p1, a_red[0])).subs(z1, u))
**2)*(erroinf_M0red[0]**2) + ((p3.subs(p0, M0_red[0])).subs(p1, a_red[0])).
subs(z1, u)**2)*(erroinf_ared[0]**2))
    erroinfM_estrela_r.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p2.subs(p0, M0_red[1])).subs(p1, a_red[1])).subs(z1, u))
**2)*(errosup_M0red[1]**2) + ((p3.subs(p0, M0_red[1])).subs(p1, a_red[1])).
subs(z1, u)**2)*(errosup_ared[1]**2))
    errosupM_estrela_i.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p2.subs(p0, M0_red[1])).subs(p1, a_red[1])).subs(z1, u))
**2)*(erroinf_M0red[1]**2) + ((p3.subs(p0, M0_red[1])).subs(p1, a_red[1])).
subs(z1, u)**2)*(erroinf_ared[1]**2))
    erroinfM_estrela_i.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p2.subs(p0, M0_red[2])).subs(p1, a_red[2])).subs(z1, u))
**2)*(errosup_M0red[2]**2) + ((p3.subs(p0, M0_red[2])).subs(p1, a_red[2])).
subs(z1, u)**2)*(errosup_ared[2]**2))
    errosupM_estrela_z.append(ev.evalf())

```

```

    ev =sy.sqrt(((p2.subs(p0, M0_red[2])).subs(p1, a_red[2])).subs(z1, u))
**2)*(erroinf_M0red[2]**2) + ((p3.subs(p0, M0_red[2])).subs(p1, a_red[2]).
subs(z1, u)**2)*(erroinf_ared[2]**2))
    erroinfM_estrela_z.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p4.subs(p0, phi0_red[0])).subs(p1, b_red[0])).subs(z1,u))
**2)*(errosup_phi0red[0]**2) + ((p5.subs(p0, phi0_red[0])).subs(p1, b_red[0]).
subs(z1, u)**2)*(errosup_bred[0]**2))
    errosupPhi_estrela_r.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p4.subs(p0, phi0_red[0])).subs(p1, b_red[0])).subs(z1,u))
**2)*(erroinf_phi0red[0]**2) + ((p5.subs(p0, phi0_red[0])).subs(p1, b_red[0]).
subs(z1, u)**2)*(erroinf_bred[0]**2))
    erroinfPhi_estrela_r.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p4.subs(p0, phi0_red[1])).subs(p1, b_red[1])).subs(z1,u))
**2)*(errosup_phi0red[1]**2) + ((p5.subs(p0, phi0_red[1])).subs(p1, b_red[1]).
subs(z1, u)**2)*(errosup_bred[1]**2))
    errosupPhi_estrela_i.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p4.subs(p0, phi0_red[1])).subs(p1, b_red[1])).subs(z1,u))
**2)*(erroinf_phi0red[1]**2) + ((p5.subs(p0, phi0_red[1])).subs(p1, b_red[1]).
subs(z1, u)**2)*(erroinf_bred[1]**2))
    erroinfPhi_estrela_i.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p4.subs(p0, phi0_red[2])).subs(p1, b_red[2])).subs(z1,u))
**2)*(errosup_phi0red[2]**2) + ((p5.subs(p0, phi0_red[2])).subs(p1, b_red[2]).
subs(z1, u)**2)*(errosup_bred[2]**2))
    errosupPhi_estrela_z.append(ev.evalf())
    ev =sy.sqrt(((p4.subs(p0, phi0_red[2])).subs(p1, b_red[2])).subs(z1,u))
**2)*(erroinf_phi0red[2]**2) + ((p5.subs(p0, phi0_red[2])).subs(p1, b_red[2]).
subs(z1, u)**2)*(erroinf_bred[2]**2))
    erroinfPhi_estrela_z.append(ev.evalf())

#Calculo de psi
psi_r = [ ] ; psi_i = [ ] ; psi_z = [ ]
for k3 in range(0, len(z)):
    res1 = integrate.quad(lambda x:0.4* math.log(10)*phi_estrela_r[k3]*
(10**(0.4*(1+alpha_red[0])*(M_estrela_r[k3]-x)))*(math.exp(-10**(0.4*
(M_estrela_r[k3] - x))))), Minf, Msup[k3])
    psi_r.append(res1[0])
    res2 = integrate.quad(lambda x: 0.4* math.log(10)*phi_estrela_i[k3]*
(10**(0.4*(1+alpha_red[1])*(M_estrela_i[k3]-x)))*(math.exp(-10**(0.4*
(M_estrela_i[k3] - x))))), Minf, Msup[k3])
    psi_i.append(res2[0])
    res3 = integrate.quad(lambda x: 0.4* math.log(10)*phi_estrela_z[k3]*
(10**(0.4*(1+alpha_red[2])*(M_estrela_z[k3]-x)))*(math.exp(-10**(0.4*
(M_estrela_z[k3] - x))))), Minf, Msup[k3])

```

```

        psi_z.append(res3[0])
psi_r = np.array(psi_r) ; psi_i = np.array(psi_i) ; psi_z = np.array(psi_z)
psi = ((psi_r + psi_i + psi_z)/3)

#Estimativa do erro de psi
#Na notacao aqui usada, p0 corresponde a phi_estrela, p1 a alpha e p2
a M_estrela:
errosup_psi_r = [ ]; erroinf_psi_r = [ ]; errosup_psi_i = [ ];
erroinf_psi_i = [ ]; errosup_psi_z = [ ]; erroinf_psi_z = [ ]
psi_sup = [] ; psi_inf = []
p0, p1, p2, x = sy.symbols('p0 p1 p2 x')
p3 = 0.4* sy.log(10)* p0 *(10**(0.4*(1+p1)*(p2 - x)))*(sy.exp(-10**(0.4*(p2
- x))))
p4 = sy.diff(p3, p0)
p4 = p4.evalf()
p5 = sy.diff(p3, p1)
p5 = p5.evalf()
p6 = sy.diff(p3, p2)
p6 = p6.evalf()
for u in range(0,len(z)):
    ev1=p4.subs(p0,phi_estrela_r[u]).subs(p1,alpha_red[0]).subs(p2,
M_estrela_r[u])
    ev1 = sy.integrate(ev1, (x, Minf, Msup[u]))
    partephi_r = (ev1.evalf())
    ev2=p5.subs(p0,phi_estrela_r[u]).subs(p1,alpha_red[0]).subs(p2,
M_estrela_r[u])
    ev2 = sy.integrate(ev2, (x, Minf, Msup[u]))
    partealpha_r = (ev2.evalf())
    ev3=p6.subs(p0,phi_estrela_r[u]).subs(p1,alpha_red[0]).subs(p2,
M_estrela_r[u])
    ev3 = sy.integrate(ev3, (x, Minf, Msup[u]))
    parteM_r = (ev3.evalf())
    ev1=p4.subs(p0,phi_estrela_i[u]).subs(p1,alpha_red[1]).subs(p2,
M_estrela_i[u])
    ev1 = sy.integrate(ev1, (x, Minf, Msup[u]))
    partephi_i = (ev1.evalf())
    ev2=p5.subs(p0,phi_estrela_i[u]).subs(p1,alpha_red[1]).subs(p2,
M_estrela_i[u])
    ev2 = sy.integrate(ev2, (x, Minf, Msup[u]))
    partealpha_i = (ev2.evalf())
    ev3=p6.subs(p0,phi_estrela_i[u]).subs(p1,alpha_red[1]).subs(p2,
M_estrela_i[u])
    ev3 = sy.integrate(ev3, (x, Minf, Msup[u]))

```

```

    parteM_i = (ev3.evalf())
    ev1=p4.subs(p0,phi_estrela_z[u]).subs(p1,alpha_red[2]).subs(p2,
M_estrela_z[u])
    ev1 = sy.integrate(ev1, (x, Minf, Msup[u]))
    partephi_z = (ev1.evalf())
    ev2=p5.subs(p0,phi_estrela_z[u]).subs(p1,alpha_red[2]).subs(p2,
M_estrela_z[u])
    ev2 = sy.integrate(ev2, (x, Minf, Msup[u]))
    partealpha_z = (ev2.evalf())
    ev3=p6.subs(p0,phi_estrela_z[u]).subs(p1,alpha_red[2]).subs(p2,
M_estrela_z[u])
    ev3 = sy.integrate(ev3, (x, Minf, Msup[u]))
    parteM_z = (ev3.evalf())
    errosup_psi_r.append(math.sqrt(((partephi_r * errosupPhi_estrela_r[u])
**2) + ((partealpha_r * erro_alphared[0])**2) + ((parteM_r *
errosupM_estrela_r[u])**2)))
    erroinf_psi_r.append(math.sqrt(((partephi_r * erroinfPhi_estrela_r[u])
**2) + ((partealpha_r * erro_alphared[0])**2) + ((parteM_r *
erroinfM_estrela_r[u])**2)))
    errosup_psi_i.append(math.sqrt(((partephi_i * errosupPhi_estrela_i[u])
**2) + ((partealpha_i * erro_alphared[1])**2) + ((parteM_i *
errosupM_estrela_i[u])**2)))
    erroinf_psi_i.append(math.sqrt(((partephi_i * erroinfPhi_estrela_i[u])
**2) + ((partealpha_i * erro_alphared[1])**2) + ((parteM_i *
erroinfM_estrela_i[u])**2)))
    errosup_psi_z.append(math.sqrt(((partephi_z * errosupPhi_estrela_z[u])
**2) + ((partealpha_z * erro_alphared[2])**2) + ((parteM_z *
errosupM_estrela_z[u])**2)))
    erroinf_psi_z.append(math.sqrt(((partephi_z * erroinfPhi_estrela_z[u])
**2) + ((partealpha_z * erro_alphared[2])**2) + ((parteM_z *
erroinfM_estrela_z[u])**2)))
    psi_sup.append((errosup_psi_r[u] + errosup_psi_i[u] +
errosup_psi_z[u])/3)
    psi_inf.append((erroinf_psi_r[u] + erroinf_psi_i[u] +
erroinf_psi_z[u])/3)

# Escrevendo os resultados em tabelas no formato .tex e .dat :
arquivo1 = asciidata.create(13,len(z))
for index in range(arquivo1.nrows):
arquivo1[0][index]= z[index]
    arquivo1[1][index]= (".7f"% psi_r[index])
    arquivo1[2][index]= (".7f"% errosup_psi_r[index])
    arquivo1[3][index]= (".7f"% erroinf_psi_r[index])

```



```

arquivo1[4][index]=("%.7f"% psi_i[index])
arquivo1[5][index]=("%.7f"% errosup_psi_i[index])
arquivo1[6][index]=("%.7f"% erroinf_psi_i[index])
arquivo1[7][index]=("%.7f"% psi_z[index])
arquivo1[8][index]=("%.7f"% errosup_psi_z[index])
arquivo1[9][index]=("%.7f"% erroinf_psi_z[index])
arquivo1[10][index]=("%.7f"% psi[index])
arquivo1[11][index]=("%.7f"% psi_sup[index])
arquivo1[12][index]=("%.7f"% psi_inf[index])
arquivo1.writeto("psi_fors06_v2.dat")
arquivo1.writetolatex("psi_fors06_v2.tex")

```

## A.2 Densidades Diferenciais e Integrais

```

#!/usr/bin/env python
import numpy as np
from numpy import *
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
import math
import scipy
from matplotlib.ticker import FuncFormatter
import asciidata
from scipy import integrate
import sympy as sy
import matplotlib.font_manager
from matplotlib.font_manager import fontManager, FontProperties
def label_form(x, pos):
    return str(float(x))

#Lendo as tabelas com os valores de psi e separando em vetores:
tabela = asciidata.open("/media/AMANDA/Trabalho/ultimos_resultados/
psi_fors06_v2.dat", "r")
z = np.array(tabela[0])
psi_total = np.array(tabela[10]); UpError_psi_total = np.array(tabela[11]);
DnError_psi_total = np.array(tabela[12])

#Definindo parametros de interesse:
Omega_m = 0.3 ; h = 0.7 ; Omega_Lambda = 0.7
Omega = Omega_m + Omega_Lambda

```

```
Mg = 1e11 ; c = 9.71561183e-15 ; G = 4.457179e-48 ; H0 = h*3.24077927e-18
```

```
#Condicoes iniciais do problema:
```

```
a0=1 ; t0 = 0 ; N0 = 0
```

```
r_array=scipy.linspace(0, 7100, num=710001)
```

```
#Resolvendo as equacoes diferenciais de dadr, dtdr, dNdr:
```

```
y = integrate.odeint(lambda (a, t, N), r: (-H0*math.sqrt(((Omega_Lambda*
(a**4)) + (Omega_m*(a0**3)*a))/(c**2)), - math.sqrt((a**2) / (c**2)),
(3*c*Omega_m*(H0**2)* (a0**3)*(r**2)) / (2*G*Mg* math.sqrt((c**2)))),
(a0, t0, N0), r_array)
```

```
a = [ ] ; t = [ ] ; N = [ ]
```

```
for u in range(0,len(r_array)):
```

```
    a.append(y[u][0])
```

```
    t.append(y[u][1])
```

```
    N.append(y[u][2])
```

```
a = np.array(a)
```

```
z1 = np.round(1.0 / a - 1, 4)
```

```
z2 = 1.0 / a - 1
```

```
z_t = [ ] ; a1 = [ ] ; t1 = [ ] ; N1 = [ ] ; r = [ ]
```

```
for j in range(0, len(z)):
```

```
    x = where(z[j]==z1)
```

```
    d = np.asarray(x)
```

```
    z_t.append(z2[x[0][len(d[0])//2]])
```

```
    a1.append(a[x[0][len(d[0])//2]])
```

```
    N1.append(N[x[0][len(d[0])//2]])
```

```
    t1.append(t[x[0][len(d[0])//2]])
```

```
    r.append(r_array[x[0][len(d[0])//2]])
```

```
z_t = np.array(z_t); a1 = np.array(a1); N1 = np.array(N1); r = np.array(r)
```

```
#Calculo das distancias cosmologicas dA, dL, dG, dZ e suas respectivas
derivadas:
```

```
dadr = ((-H0*(a1**2)*np.sqrt(Omega_Lambda + Omega_m*(a1**-3))/c))
```

```
dA = r * a1
```

```
dL = ((1+z_t)**2)*dA
```

```
dG = (1+z_t)*dA
```

```
dZ = (c*z_t) / H0
```

```
ddAdz = (((dadr*r + a1)*(-a1**2 / dadr)))
```

```
ddLdz = 2*(1+z_t)*dA + ((1+z_t)**2)*ddAdz
```

```
ddZdz = (np.repeat([c/H0], len(z)))
```

```
ddGdz = (-a1**2) / (dadr)
```

```
#Volumes:
```

```
Va = 4*math.pi*(dA**3)/ 3
```

```

Vl = 4*math.pi*(dL**3)/ 3
Vg = 4*math.pi*(dG**3)/ 3
Vz = 4*math.pi*(dZ**3)/ 3
Vc = 4*math.pi*(r**3)/ 3 #Volume comovel
Vpr = (a1**3) * Vc #Volume proprio
#Derivadas dos volumes em relacao desvio para o vermelho:
dVa_dz = 4*math.pi*(dA**2)*ddAdz
dVl_dz = 4*math.pi*(dL**2)*ddLdz
dVg_dz = 4*math.pi*(dG**2)*ddGdz
dVz_dz = 4*math.pi*(dZ**2)*ddZdz
#Densidade numerica comovel
n_c = N1 / Vc
#Contagem numerica relativistica de galaxias :
dNdz = (- (a1**2) / (a0*dadr)) * 3*c*Omega_m*(H0**2)*(a0**3)*(r**2) /
(2*G*Mg* math.sqrt((c**2)))
#Densidades diferenciais relativisticas:
gA = (dNdz / dVa_dz)
gL = (dNdz / dVl_dz)
gG = (dNdz / dVg_dz)
gZ = (dNdz / dVz_dz)
#Calculo das densidades integrais relativisticas:
nA = (N1/Va)
nL = (N1/Vl)
nG = (N1/Vg)
nZ = (N1/Vz)

##### Parte Observacional #####
#Contagem numerica de galaxias observacional:
dNdz_obs = dNdz * psi_total / n_c
UpError_dNdz_obs = np.sqrt(((dNdz / n_c)**2)*(UpError_psi_total**2))
DnError_dNdz_obs = np.sqrt(((dNdz / n_c)**2)*(DnError_psi_total**2))

#Densidade diferencial observacional:
gA_obs = (dNdz_obs / dVa_dz); UpError_gA_obs = UpError_dNdz_obs / dVa_dz;
DnError_gA_obs = DnError_dNdz_obs / dVa_dz
gL_obs = (dNdz_obs / dVl_dz); UpError_gL_obs = UpError_dNdz_obs / dVl_dz;
DnError_gL_obs = DnError_dNdz_obs / dVl_dz
gG_obs = (dNdz_obs / dVg_dz); UpError_gG_obs = UpError_dNdz_obs / dVg_dz;
DnError_gG_obs = DnError_dNdz_obs / dVg_dz
gZ_obs = (dNdz_obs / dVz_dz); UpError_gZ_obs = UpError_dNdz_obs / dVz_dz;
DnError_gZ_obs = DnError_dNdz_obs / dVz_dz

#Calculo das densidades integrais observacionais obtidas pela integral

```

```

da contagem numerica observacional:
pol0 = np.polyfit(z, dNdz_obs, 8)
x0 = np.linspace(0.45, 3.75)
x1 = np.polyval(pol0, x0)
ErUp_obs = dNdz_obs + UpError_dNdz_obs
pol1 = np.polyfit(z, ErUp_obs, 8)
x0 = np.linspace(0.45, 3.75)
x2 = np.polyval(pol1, x0)
ErDn_obs = dNdz_obs - DnError_dNdz_obs
pol2 = np.polyfit(z, ErDn_obs, 8)
x0 = np.linspace(0.45, 3.75)
x3 = np.polyval(pol2, x0)
nA_obs = [ ] ; nL_obs = [ ] ; nG_obs = [ ] ; nZ_obs = [ ]
Up_nA = [ ] ; Up_nL = [ ] ; Up_nG = [ ] ; Up_nZ = [ ]
Dn_nA = [ ] ; Dn_nL = [ ] ; Dn_nG = [ ] ; Dn_nZ = [ ]
for q in range(0,len(z)):
    int0 = integrate.quad(lambda x: pol0[0]*(x**8) + pol0[1]*(x**7) +
pol0[2]*(x**6) + pol0[3]*(x**5) + pol0[4]*(x**4) + pol0[5]*(x**3) +
pol0[6]*(x**2) + pol0[7]*x + pol0[8], 0, z[q])
    nA_obs.append(int0[0] / Va[q])
    nL_obs.append(int0[0] / Vl[q])
    nG_obs.append(int0[0] / Vg[q])
    nZ_obs.append(int0[0] / Vz[q])
    int1 = integrate.quad(lambda x: pol1[0]*(x**8) + pol1[1]*(x**7) +
pol1[2]*(x**6) + pol1[3]*(x**5) + pol1[4]*(x**4) + pol1[5]*(x**3) +
pol1[6]*(x**2) + pol1[7]*x + pol1[8], 0, z[q])
    Up_nA.append((int1[0] / Va[q]) - (int0[0] / Va[q]))
    Up_nL.append((int1[0] / Vl[q]) - (int0[0] / Vl[q]))
    Up_nG.append((int1[0] / Vg[q]) - (int0[0] / Vg[q]))
    Up_nZ.append((int1[0] / Vz[q]) - (int0[0] / Vz[q]))
    int2 = integrate.quad(lambda x: pol2[0]*(x**8) + pol2[1]*(x**7) +
pol2[2]*(x**6) + pol2[3]*(x**5) + pol2[4]*(x**4) + pol2[5]*(x**3) +
pol2[6]*(x**2) + pol2[7]*x + pol2[8], 0, z[q])
    Dn_nA.append((int0[0] / Va[q]) - (int2[0] / Va[q]))
    Dn_nL.append((int0[0] / Vl[q]) - (int2[0] / Vl[q]))
    Dn_nG.append((int0[0] / Vg[q]) - (int2[0] / Vg[q]))
    Dn_nZ.append((int0[0] / Vz[q]) - (int2[0] / Vz[q]))

#####Graficos dos resultados #####

font= FontProperties(size='28')
plt.figure(figsize=(14,10))
plt.errorbar(z, gA_obs, yerr=[DnError_gA_obs, UpError_gA_obs], fmt= 'ko',

```

```

mfc='None', label='$[\gamma_A]_red$')
plt.errorbar(z, gG_obs, yerr=[DnError_gG_obs, UpError_gG_obs], fmt= 'ko',
label='$[\gamma_G]_red$')
plt.errorbar(z, gL_obs, yerr=[DnError_gL_obs, UpError_gL_obs], fmt= 'k^ ',
mfc='None', label='$[\gamma_L]_red$')
plt.errorbar(z, gZ_obs, yerr=[DnError_gZ_obs, UpError_gZ_obs], fmt= 'k^ ',
label='$[\gamma_Z]_red$')
plt.loglog(basex=10)
plt.ylabel("$[\gamma]_red$ (Mpc$^{-3}$)", fontsize=26)
plt.xlabel("z", fontsize=25)
plt.xticks([0.4, 1, 2, 3, 4], fontsize=24)
plt.yticks(fontsize=26)
plt.gca().xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(label_form))
plt.legend(loc=3, prop = font)
plt.xlim(0.4,4.0)
plt.savefig('gamas_red_v2.eps', transparent=False, dpi=1000)
plt.clf()
plt.figure(figsize=(14,10))
plt.errorbar(z, nA_obs, yerr=[Dn_nA, Up_nA], fmt= 'ko', mfc='None',
label='$[n_A]_red$')
plt.errorbar(z, nG_obs, yerr=[Dn_nG, Up_nG], fmt= 'ko', label='$[n_G]_red$')
plt.errorbar(z, nL_obs, yerr=[Dn_nL, Up_nL], fmt= 'k^ ', mfc='None',
label='$[n_L]_red$')
plt.errorbar(z, nZ_obs, yerr=[Dn_nZ, Up_nZ], fmt= 'k^ ', label='$[n_Z]_red$')
plt.loglog(basex=10)
plt.ylabel("$[n_i]_red$ (Mpc$^{-3}$)", fontsize=26)
plt.xlabel("z", fontsize=25)
plt.xticks([0.4, 1, 2, 3, 4], fontsize=24)
plt.yticks(fontsize=26)
plt.gca().xaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(label_form))
plt.legend(loc=3, prop = font)
plt.xlim(0.4,4.0)
plt.savefig('n_red_v2.eps', transparent=False, dpi=1000)

##### Escrevendo os resultados em tabelas do tipo .dat e .tex #####
arquivo0 = asciidata.create(5,len(z))
for index in range(arquivo0.nrows):
    arquivo0[0][index]= z[index]
    arquivo0[1][index]= ("% .7e"% dNdz[index])
    arquivo0[2][index]= ("% .7e"% dNdz_obs[index])
    arquivo0[3][index]= ("% .7e"% UpError_dNdz_obs[index])
    arquivo0[4][index]= ("% .7e"% DnError_dNdz_obs[index])
arquivo0.writeto("dNdz_red_v2.dat")

```

```
arquivo0.writetolatex("dNdz_red_v2.tex")
arquivo1 = asciidata.create(13,len(z))
for index in range(arquivo1.nrows):
    arquivo1[0][index]= z[index]
    arquivo1[1][index]= ("% .5e"% gA_obs[index])
    arquivo1[2][index]= ("% .5e"% UpError_gA_obs[index])
    arquivo1[3][index]= ("% .5e"% DnError_gA_obs[index])
    arquivo1[4][index]= ("% .5e"% gL_obs[index])
    arquivo1[5][index]= ("% .5e"% UpError_gL_obs[index])
    arquivo1[6][index]= ("% .5e"% DnError_gL_obs[index])
    arquivo1[7][index]= ("% .5e"% gG_obs[index])
    arquivo1[8][index]= ("% .5e"% UpError_gG_obs[index])
    arquivo1[9][index]= ("% .5e"% DnError_gG_obs[index])
    arquivo1[10][index]= ("% .5e"% gZ_obs[index])
    arquivo1[11][index]= ("% .5e"% UpError_gZ_obs[index])
    arquivo1[12][index]= ("% .5e"% DnError_gZ_obs[index])
arquivo1.writeto("gamas_red_v2.dat")
arquivo1.writetolatex("gamas_red_v2.tex")
arquivo2 = asciidata.create(13,len(z))
for index in range(arquivo2.nrows):
    arquivo2[0][index]= z[index]
    arquivo2[1][index]= ("% .5e"% nA_obs[index])
    arquivo2[2][index]= ("% .5e"% Up_nA[index])
    arquivo2[3][index]= ("% .5e"% Dn_nA[index])
    arquivo2[4][index]= ("% .5e"% nL_obs[index])
    arquivo2[5][index]= ("% .5e"% Up_nL[index])
    arquivo2[6][index]= ("% .5e"% Dn_nL[index])
    arquivo2[7][index]= ("% .5e"% nG_obs[index])
    arquivo2[8][index]= ("% .5e"% Up_nG[index])
    arquivo2[9][index]= ("% .5e"% Dn_nG[index])
    arquivo2[10][index]= ("% .5e"% nZ_obs[index])
    arquivo2[11][index]= ("% .5e"% Up_nZ[index])
    arquivo2[12][index]= ("% .5e"% Dn_nZ[index])
arquivo2.writeto("n_red_v2.dat")
arquivo2.writetolatex("n_red_v2.tex")
```