

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

**DIOGO TEIXEIRA BELLONI**

COLISÃO ENTRE AGLOMERADOS GLOBULARES

RIO DE JANEIRO

2014

Diogo Teixeira Belloni

## COLISÃO ENTRE AGLOMERADOS GLOBULARES

Dissertação de Mestrado apresentada  
ao Programa de Pós-graduação em Astronomia,  
Observatório do Valongo, da Universidade Federal  
do Rio de Janeiro, como requisito parcial  
necessário à obtenção do título de Mestre  
em Astronomia (Astronomia Dinâmica).

Orientador: Helio Jaques Rocha Pinto

Rio de Janeiro

2014

*Dedico este trabalho  
à minha esposa Paula Jorge  
como reconhecimento pelo  
imenso apoio recebido em boa parte  
das minhas trajetória acadêmica e vida!*

# Agradecimentos

A partir da ideia de que a construção da Ciência corresponde a uma pirâmide humana, estendo aqui tal asseveração à construção do ser humano e de sua identidade. Dessa forma, inicio meus agradecimentos com o seguinte provérbio africano: *Quando não souberes para onde ir, olha para trás e sabe pelo menos de onde vens*. Ele simplifica adequadamente a postura aqui adotada: se sou o que sou é porque sofri diversas influências, boas e ruins, de diversas pessoas, de diversos meios, que foram determinantes para moldar meu ser. E, neste apropriado espaço, lançarei meus olhares para aqueles que mais contribuíram para meu sucesso nesta árdua, porém gratificante (ao término), empreitada.

Ademais, como os agradecimentos não são leitura fundamental de uma dissertação, desobriço-me de ser econômico. Espero não ter esquecido, particularmente, de nenhuma pessoa que foi determinante em meu processo de desenvolvimento dos conhecimentos astronômicos na UFRJ, que se iniciou na graduação e parece terminar no mestrado.

Agradeço à minha mãe, Eda Maria Teixeira, por sua dedicação, seu amor e sua solidariedade. Sem ela não seria a pessoa que sou hoje. Certamente posso afirmar que minha mãe foi a pessoa que mais me ensinou, coisas tais como comer, vestir-me e como enfrentar a vida. Isso, sem dúvidas, foi resultado do seu esforço e da sua perseverança.

À minha esposa, Paula Jorge, que me ensinou a apreciar os dias como nunca pensei ser possível, não há algo mais importante a dizer senão que eu a amo. Sua amizade me define como pessoa e torna minha vida melhor, mais colorida. E isso é fundamental para o trabalho intelectual. Agradeço por sua contribuição altruísta no momento em que mais precisei neste percurso, sempre me fazendo acreditar que chegaria ao final. Serei eternamente grato a essa inenarrável pessoa que me levou a ser mestre de mim mesmo e, conseqüentemente, um ser humano melhor.

Ao meu orientador, prof. Helio J. Rocha Pinto, agradeço pela imensa generosidade e excepcional acolhida; por ter acompanhado meus passos como pesquisador durante o mestrado; por conferir a mim a liberdade e a confiança necessárias para que as pesquisas fossem levadas a bom termo; por ter sido bem mais que um orientador nos momentos de indecisão durante o percurso deste mestrado. Deixo aqui expresso meu reconhecimento pelo seu trabalho intelectual e pela importância acadêmica da sua atuação como docente da UFRJ e coordenador do Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório do Valongo.

Por estabelecer elevados padrões de sapiência e amizade, agradeço ao meu amigo inolvidável Felipe Pamplona, que já se tornou o mais recente *enfant terrible* da epistemologia contemporânea. Outrossim, suas amplas e visionárias concepções artísticas, provenientes *de um longo, imenso e sensato desregramento de todos os sentidos*, nas palavras de Rimbaud, por sua vez, influenciaram positivamente no meu processo de autoconhecimento.

Aos meus companheiros do *Grupo de Estrutura e Evolução da Galáxia*, Raquel Boesso, Hélio Perottoni e Felipe Fernandes, agradeço por toda a camaradagem neste caminho acadêmico. Em especial, a Raquel Boesso, que inumeráveis vezes esteve perto quando precisava apenas de alguém para me ouvir; sua amizade e suas valiosas contribuições, tanto para assuntos práticos da vida quanto acadêmicos, foram importantíssimos neste percurso.

Ao prof. Carlos Ziller Camenietzki, do Instituto de História da UFRJ, agradeço pela persistência em me dissuadir da ideia de abandonar a Academia. Certamente, sem seus conselhos, eu não prosseguiria nessa estrada. Agradeço, também, por conferir a mim fantásticas discussões políticas que muito contribuíram para meu entendimento acerca da Academia; agradeço por suas contribuições sobre História da Ciência que muito me motivaram a entender a Ciência como um processo histórico.

Meus agradecimentos à Profa. Teresa Stuchi, que desde o início da minha prática em pesquisa mostrou-me a importância dos detalhes, das minúcias no trabalho de pesquisa; por ter sido a pessoa que me orientou na graduação e fomentou todo o envolvimento e afabilidade que possuo com a teoria de sistemas dinâmicos, largamente utilizada em diversas áreas do conhecimento humano.

A todos os funcionários do Observatório do Valongo agradeço o apoio nas questões práticas da pós-graduação. A quantidade e a qualidade do trabalho dessas pessoas é instrumento de luta diante dos ataques que o funcionalismo público sofreu e sofre. Em especial, a Maria Alice, com quem tive aprazíveis conversas e a Cláudia Fortes, que muito se dedica a todos os pós-graduandos desta instituição. Agradeço também a todos os professores da casa, mesmo não tendo sido aluno de todos nos cursos que segui, que contribuíram enormemente para minha formação. Em especial, ao prof. Wagner Marcolino, que foi o grande responsável por minha paixão pelos aglomerados globulares, que correspondem ao objeto de estudo deste texto e também o serão em meu doutorado.

Agradeço aos professores Daniela Lazzaro, Fernando Roig e Roberto Martins, do Observatório Nacional, pelos notórios cursos concernentes a Sistemas Planetários. Posso endossar, sem dúvidas, que, desde então, passei a admirar tal área que fora desconhecida por mim.

Aos pesquisadores Douglas Heggie, Mirek Giersz, Pau Amaro Seoane e Sverre Aarseth agradeço por, sempre que possível, estarem disponíveis para minhas dúvidas referentes à metodologia adotada nesta dissertação e/ou a aglomerados globulares. Em especial, ao prof. Mirek que aceitou me orientar no programa de doutorado do *Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika*.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação.

*“[...] in stellar dynamics the emphasis is on the interpretation of the characteristic features of a stellar system in term of the forces which govern the motion of the individual stars in the system.”*

**Subramanyan Chandrasekhar (1910-1995)**

# Resumo

O estudo de aglomerados globulares desempenha um papel importante na nossa compreensão do Universo uma vez que estes sistemas são verdadeiros laboratórios para as teorias de dinâmica e evolução estelares. Embora o conhecimento astronômico tradicional sobre estes sistemas os represente constituídos de populações estelares simples, estudos fotométricos e marcações químicas de suas estrelas constituintes sugerem que estão longe de serem sistemas homogêneos. As discrepâncias da imagem canônica incluem sequências principais e/ou ramos de gigantes vermelhas duplos (ou mesmo triplos), e espalhamento de abundância química interna maior do que o esperado. Atualmente, alguns destes globulares vêm sendo considerados como resultado de fusão entre dois progenitores, especialmente aqueles que apresentam bimodalidades em sequências do diagrama cor–magnitude, como por exemplo, NGC 2419. No presente trabalho, este cenário foi estudado com o auxílio do código *NBODY6* a fim de verificar propriedades de dois globulares após uma colisão frontal. Verificou-se que é possível dividir o comportamento qualitativo dos modelos, após as interações em quatro, a saber: i) atravessam um ao outro sem grandes mudanças em sua estrutura interna, ii) o de menor massa é destruído — para os casos em que  $M_2/M_1 < 0.5$  e a velocidade relativa é maior que a velocidade crítica, iii) ficam ligados e formam um sistema binário, que após um dado intervalo de tempo, funde-se, quando a velocidade relativa é maior que 85% da velocidade crítica ou iv) fundem-se suavemente. Além disso, obtivemos uma expressão analítica para a velocidade crítica em que os modelos se fundem, como função das concentrações e massas deles. Observamos que modelos menos concentrados ou de menor massa sofrem perturbação mais intensa. Com exceção dos modelos que são destruídos, não observamos variações de massa maiores que 20%, com relação a suas massas iniciais. Por fim, analisamos os efeitos da colisão e fusão na evolução dinâmica de um globular. Observamos, em todas as fusões, uma aceleração dos processos dinâmicos. Além disso, tal aceleração não parece depender da massa ou mesmo da concentração fortemente. Concluímos que a causa mais provável para tal aceleração esteja associada à produção de binárias, imediatamente após à fusão. Ou seja, a produção de binárias nos estágios iniciais da evolução do globular fundido acelera a evolução dinâmica deste e a evaporação por meio da remoção efetiva de estrelas de seu halo, via efeito do potencial galáctico, e adição de energia no caroço, aumentando, dessa forma, a dispersão de velocidade nele, embora a dispersão de velocidade do modelo como um todo diminua com tempo.

**Palavras-chave:** Dinâmica Galáctica — Aglomerados Globulares — Problema de  $N$  Corpos

# Abstract

The study of globular clusters plays an important role on our understanding of the universe since these systems are true laboratories for theories of stellar dynamics and evolution. Although the traditional astronomical knowledge about these systems pictures them as homogeneous polytropes, made of single stellar populations, the detailed photometric study and chemical tagging of their constituent stars suggest that some are far from being homogeneous systems. The discrepancies from the canonical picture include double (or even triple) main sequences and/or red giant branches, larger than expected internal chemical abundance scatter. Currently, some of these globular have been considered as mergers of two parent clusters, particularly those having bimodal sequences in color-magnitude diagram (e.g., NGC 2419). In the present work, this scenario has been studied with the aid of the *NBODY6* direct  $N$ -body code in order to verify properties of two globulars after a head-on collision. It has been found that it is possible to divide the qualitative behavior of the models after the interactions in four, namely: i) they cross each other without major changes in their internal structures, ii) the model with lower mass is destroyed — in cases where  $M_2/M_1 < 0.5$  and the relative velocity is larger than the critical velocity, iii) they become attached and form a binary system which after a given timescale merge, when the relative velocity is greater than 85% of the critical speed or iv) they merge smoothly. Moreover, we obtained an analytical expression for the critical velocity at which the clusters merge, as a function of their concentrations and masses. We noticed that less concentrated or less massive models suffer more intense perturbations. With the exception of the globular that are destroyed, there were no changes greater than 20%, with respect to their initial masses. Finally, we analyzed the effects of the collision and merger in the dynamical evolution of a merger. We observed in all mergers, an acceleration of the dynamical processes. Furthermore, this acceleration does not appear to depend on mass or concentration strongly. We conclude that the most likely reason for such an acceleration is associated with the production of binary immediately after the merger. That is, the production of binary in the early stages of the evolution accelerates the dynamical process of this evolution and evaporation through the effective removal of stars from its halo via galactic potential effect, and adding energy at the core, increasing the velocity dispersion inside it, while the velocity dispersion of the model as a whole decreases with time.

**Keywords:** Galactic Dynamic — Globular Clusters —  $N$ -body Problem



# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>O Problema de <math>N</math> Corpos</b>                                     | <b>5</b>  |
| 2.1      | Definição do Problema . . . . .  | 7         |
| 2.2      | Integrabilidade . . . . .  | 11        |
| 2.2.1    | Teorema de Liouville . . . . .   | 11        |
| 2.2.2    | As Integrais Primeiras do Problema de $N$ Corpos . . . . .                     | 12        |
| 2.3      | Teorema do Virial . . . . .  | 14        |
| 2.4      | Sistemas Estelares . . . . .   | 15        |
| 2.4.1    | Aglomerados Estelares Globulares . . . . .                                     | 16        |
| 2.5      | Abordagem Numérica . . . . .   | 18        |
| 2.6      | Ad Astra per Aspera . . . . .  | 21        |
| <b>3</b> | <b>Propriedades dos Aglomerados Globulares</b>                                 | <b>22</b> |
| 3.1      | Fotometria e Diagrama Cor-Magnitude . . . . .                                  | 25        |
| 3.2      | Parâmetros Globais e Não Globais . . . . .                                     | 29        |
| 3.3      | Perfis Radiais . . . . .   | 31        |
| 3.3.1    | Contagem de Estrelas . . . . .   | 32        |
| 3.3.2    | Medida do Brilho Superficial . . . . .   | 33        |
| 3.3.3    | Contagem de Estrelas e Medida do Brilho Superficial a partir de CCDs . . . . . | 35        |
| 3.4      | Cinemática . . . . .   | 38        |
| 3.4.1    | Movimento Próprio . . . . .  | 38        |
| 3.4.2    | Velocidade Radial . . . . .  | 39        |
| 3.5      | Possibilidade de Matéria Escura em AG . . . . .                                | 40        |
| 3.6      | Populações Múltiplas . . . . .   | 42        |
| 3.6.1    | Sequência Principal . . . . .  | 42        |
| 3.6.2    | Ramo das Gigantes . . . . .  | 43        |
| 3.6.3    | Ramo das Gigantes Vermelhas . . . . .  | 45        |
| 3.7      | Origem e Formação . . . . .  | 45        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.8      | Evolução Dinâmica . . . . .                                  | 50         |
| 3.8.1    | Processos nos Estágios Iniciais . . . . .                    | 50         |
| 3.8.2    | Segregação de Massa . . . . .                                | 52         |
| 3.8.3    | Evolução do Carçoço . . . . .                                | 56         |
| 3.9      | Complicações e Efeitos Adicionais . . . . .                  | 58         |
| 3.10     | Sobrevivência Dinâmica dos Aglomerados . . . . .             | 64         |
| <b>4</b> | <b>Descrição do Modelo Estático</b>                          | <b>66</b>  |
| 4.1      | O Potencial Galáctico . . . . .                              | 67         |
| 4.2      | O Aglomerado Globular . . . . .                              | 68         |
| 4.2.1    | A Esfera de Plummer . . . . .                                | 72         |
| 4.3      | Função de Massa Inicial . . . . .                            | 77         |
| 4.3.1    | Forma Canônica . . . . .                                     | 80         |
| 4.3.2    | Forma das Multipotências . . . . .                           | 81         |
| 4.4      | Condições Iniciais Para as Simulações: MCluster . . . . .    | 84         |
| 4.4.1    | Distribuição Espacial . . . . .                              | 84         |
| 4.4.2    | Distribuição de Massa . . . . .                              | 85         |
| 4.4.3    | Modelos . . . . .  | 86         |
| <b>5</b> | <b>NBODY6: Simulação Gravitacional de N Corpos</b>           | <b>91</b>  |
| 5.1      | Estrutura e Parâmetros Iniciais . . . . .                    | 97         |
| 5.2      | Evolução Temporal: Método de Hermite . . . . .               | 102        |
| 5.3      | Cálculo da Força: Método de Ahmad-Cohen . . . . .            | 104        |
| 5.4      | Regularização Kustaanheimo-Stiefel . . . . .                 | 106        |
| 5.5      | Sistemas Hierárquicos e Regularização <i>Chain</i> . . . . . | 109        |
| 5.6      | Unidades de Hénon . . . . .                                  | 111        |
| 5.7      | Processos Astrofísicos . . . . .                             | 113        |
| 5.8      | Tomada de Decisão . . . . .                                  | 115        |
| <b>6</b> | <b>Colisão entre Dois Modelos de Plummer</b>                 | <b>118</b> |
| 6.1      | Fundamentos Físicos . . . . .                                | 119        |
| 6.2      | Aproximação Impulsiva . . . . .                              | 123        |
| 6.3      | Relação da Teoria com as Simulações Numéricas . . . . .      | 125        |
| 6.4      | Velocidade Limite para a Fusão . . . . .                     | 137        |
| 6.5      | Aquecimento Dinâmico devido a uma Colisão . . . . .          | 141        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões e Perspectivas</b>                             | <b>147</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b>   | <b>151</b> |

|                   |  |            |
|-------------------|--|------------|
| <b>APÊNDICE A</b> | <b>Demonstração do Teorema de Liouville</b>                  | <b>167</b> |
| <b>APÊNDICE B</b> | <b>Aglomerados Globulares vistos pela missão GAIA</b>        | <b>171</b> |
| <b>APÊNDICE C</b> | <b>A Função de Massa Inicial e a Epistemologia de Popper</b> | <b>177</b> |
| <b>APÊNDICE D</b> | <b>Critério de Escape do Código NBODY6</b>                   | <b>183</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

*“A História das Ciências é marcada pela descontinuidade, por erros superados, revoluções e refundições epistemológicas.”*

**Alexandre Koyré (1892 - 1964)**

Historicamente, o Problema de  $N$  Corpos intenta prever os movimentos individuais de um grupo de objetos celestes que interagem uns com os outros gravitacionalmente. Resolver tal problema é algo motivado pelo desejo de compreender os movimentos do Sol, da Lua, dos planetas e das estrelas visíveis. No século 20, a compreensão da dinâmica dos sistemas estelares, em particular dos aglomerados globulares, tornou-se uma importante aplicação do Problema de  $N$  corpos. Porém, seu estudo numérico só foi possível na segunda metade desse século.

O trabalho pioneiro de von Hoerner, no fim da década de 50, sobre simulações de  $N$  corpos *infant* com os primeiros computadores abriu um novo mundo de possibilidades no estudo de sistemas estelares, em geral. Este novo mundo cresceu e as técnicas computacionais melhoraram ao longo do tempo, as teorias dinâmicas foram refinadas e computadores mais rápidos foram construídos.

Conforme o tempo avançava, códigos numéricos evoluíram a fim de que levassem em conta um espectro de massa. No entanto, uma peça fundamental ainda estava faltando: estrelas intrinsecamente evoluem em uma escala de tempo comparável ou menor do que as escalas de tempo dinâmicas. De fato, os diferentes intervalos envolvidos são um aspecto fundamental no estudo de simulações numéricas de sistemas estelares: a escala de tempo dinâmico do sistema como um todo, escalas de tempo dinâmico de sistemas múltiplos (como binárias, sistemas triplos ou quádruplos) e a escala de tempo nuclear intrínseca das estrelas, para citar alguns.

No início dos anos 2000, os tratamentos para a evolução estelar de uma única estrela e de um sistema binário, devido a Hurley, foram adicionados em um dos mais famosos códigos colisionais de

$N$  corpos, *NBODY6*, um código sofisticado que incorpora todas as escalas de tempo pertinentes. Esta implementação foi baseada em esforços anteriores de incluir um tratamento concernente à evolução estelar simplificada e algoritmo de evolução de binárias em simulações dinâmicas. Ela permitiu a produção de modelos realista de aglomerados abertos compostos de cerca de 30000 estrelas e ajudou a nossa compreensão da evolução dinâmica dos aglomerados globulares.

A identificação de estrelas dentro de regiões de formação estelar, e particularmente aquelas que são membros de aglomerados jovens, foi melhorada nos últimos anos, especialmente com o uso de instrumentos infravermelhos de alta resolução, como o satélite Spitzer. Supunha-se, geralmente, que a maioria, se não todas, as estrelas nascem em aglomerados estelares ou associações de algum tipo. Porém, estudos recentes têm trazido novos olhares para tal cenário simplista de formação de aglomerados globulares.

No presente trabalho, intentamos estudar um dos possíveis cenários de formação de aglomerados globulares, a saber, o cenário da fusão de dois progenitores, que poderia explicar aglomerados que possuem distribuição bimodal em suas sequências do diagrama HR ou na metalicidade. Adotaremos que esses aglomerados habitam o disco da Galáxia, como primeira abordagem. A presença do campo imposto pela Galáxia, juntamente com a evolução estelar que cada estrela sofrerá e a interação dinâmica entre as estrelas, por exemplo, interações de dois corpos, irá determinar a evolução desses aglomerados progenitores. Além disso, este estudo realizará, em primeira instância, devido a tais efeitos incluídos nas simulações, um considerável *upgrade* nos estudos referentes às propriedades dinâmicas de dois globulares que colidem. Isso, porque os estudos anteriores, feitos para estudos de galáxias, não incluem um potencial dominante, tampouco evolução estelar. Logo, tais estudos não podem ser aplicados, diretamente, na busca pela compreensão dos mecanismos que governam a dinâmica proposta para o específico caso de globulares.

Em nossas simulações, incluímos a presença de uma galáxia modelada como um potencial de três componentes fixos. A órbita que escolhemos para os nossos aglomerados é circular. Cada um foi construído a partir da distribuição de Plummer para diferentes valores de concentração, massa e função de massa inicial. Esta última, até o presente, não foi contabilizada como um possível parâmetro alterador dos resultados da interação entre dois globulares.

A estrutura deste texto foi construída de tal forma que permitisse maior clareza referente aos assuntos abordados e hipóteses consideradas. Ademais, intentamos uma análise substantiva sobre a recorrente mudança paradigmática alusiva à formação de um aglomerado globular. Tema em voga e deveras relevante da Astronomia hodierna, propomos uma análise informacional sobre tal ponto polêmico. Embora uma dissertação não seja, necessariamente, uma defesa do resultado de uma pesquisa ou procure demonstrar evidências de algo novo para a uma dada área, também o fizemos. Para tal, estabelecemos diferentes linguagens de codificação das informações aqui tratadas. Dentre elas, podemos citar a linguagem matemática, apropriada em alguns contextos específicos desta dissertação, ou mesmo análises filosóficas e históricas de temas controversos e/ou verdadeiramente relevantes. Mas,

principalmente, o método descritivo, típico de assuntos astronômicos foi escolhido como norteador do texto. Por fim, oferecemos neste trabalho tanto uma revisão rica sobre o tema em questão, quanto resultados de algo novo, que, espera-se, contribua com pares da área. Com isso, propomos que seja um texto útil para um aluno de graduação que esteja interessado na área, além de subsidiar a escrita de um artigo científico a fim de que a comunidade científica internacional tenha acesso aos resultados aqui obtidos.

No que segue, o texto está dividido basicamente em uma introdução (Capítulo 2), uma revisão (Capítulo 3) alusiva a aspectos astrofísicos e dinâmicos dos aglomerados globulares, objeto de estudo desta dissertação. Ademais, uma descrição dos modelos (Capítulo 4) e da metodologia utilizada (Capítulo 5). Por fim, descreveremos os resultados (Capítulo 6) do estudo dos modelos, por meio da metodologia, e compararemos com os principais estudos desenvolvidos até a presente data.

A introdução contém definições referentes a um aglomerado globular sob os pontos de vista matemático, astrofísico e computacional. Tal capítulo também intenta direcionar o leitor para os demais capítulos da dissertação. Já o capítulo de revisão é o mais extenso do texto, pois abrange diferentes tópicos concernentes ao aglomerados globulares. O objetivo de tal revisão é subsidiar tanto a modelagem dos globulares aqui estudados quanto fornecer aparatos de comparação com o que se tem de mais bem estabelecido na área. O capítulo dos modelos descreve não só a distribuição de massa adotada, mas também a galáxia à qual o globular está submetido. Por fim, tal capítulo descreve também as funções de massa inicial adotadas e como contruir tais modelos a partir das hipóteses admitidas. O capítulo da modelagem é bem técnico e propõe-se a descrever os principais algoritmos do código *NBODY6*, principalmente aqueles referentes aos processos astrofísicos que devem ser incluídos em simulações mais realistas. Finalmente, o capítulo concernente aos resultados descreve-os resgatando os assuntos dos anteriores. Além disso, sugestões de possíveis causas para os resultados são fornecidas.

Além dos capítulos, a presente dissertação contém quatro apêndices. O Apêndice A contém a demonstração do Teorema de Liouville, que é deveras importante em qualquer análise qualitativa de problemas típicos abordados pela Teoria de Sistemas Dinâmicos. Outro ponto relevante que merece comentários é o satélite astrométrico GAIA. Muitos acreditam que após o GAIA, muitas teorias serão falseadas e uma grande mudança paradigmática ocorrerá. Veremos sucintamente alguns detalhes de tal missão no Apêndice B, com ênfase na sua contribuição para o objeto do estudo em questão. Já no Apêndice C, fizemos uma discussão filosófica com respeito a atual situação em que se encontram as teorias de formação estelar, bem como as teorias referentes à função de massa inicial. Notamos que há uma contradição dialética clara entre ambas, o que é totalmente compreensível sob o prisma da filosofia da ciência contemporânea. O último apêndice, D, trata de um dos mais obscuros e relevantes temas em simulações de aglomerados globulares. Refere-se ao problema da delimitação destes o qual apresenta controvérsia quanto à definição do raio mareal. Dessa forma, mais estudos devem ser feitos a fim de se chegar a um consenso, ainda mais porque adotar um dado raio para um globular, e não outro, muda significativamente a evolução secular de tais objetos.

Embora tenhamos feito uma revisão sobre o tema razoavelmente completa, dado o espaço apropriado aos moldes de uma dissertação, existem diversos excelentes livros referentes ao tema tanto de aglomerados quanto de dinâmica estelar, de forma geral. O mais completo certamente é a segunda edição de 2008 do livro *Galactic Dynamics* de Binney e Tremaine. Como já disse certa vez o prof. Paul McMillan, tal livro corresponde à bíblia da astronomia dinâmica. Não citaremos todas as referências aqui, embora uma lista bem completa e uma discussão referente à transição da ordem para o caos, em livros textos, pode ser encontrada no prefácio do livro *Order and Chaos in Dynamical Astronomy* de 2004 escrito por Contopoulos.

# Capítulo 2

## O Problema de $N$ Corpos

*“Ad Astra per Aspera”*

Quando nos referimos a um sistema constituído de  $N$  corpos interagindo através de suas atrações gravitacionais mútuas e confinados a uma dada região do espaço, falamos de um modelo matemático que pensamos ser apropriado para representar alguns aspectos de sistemas reais como o Sistema Solar e os sistemas estelares<sup>1</sup>. No primeiro exemplo, cujo valor de  $N$  é bem pequeno ( $N \sim 10$ ), estamos inseridos na área tradicionalmente chamada de **mecânica celeste**. Já no segundo caso, onde  $N > 10^4$ , tratamos da abordagem referente à **dinâmica estelar**. Naturalmente, o objetivo de ambas as áreas é entender se e como o modelo matemático de  $N$  massas puntiformes é conveniente para descrever o movimento de  $N$  corpos com tamanhos diferentes e finitos.

O campo da dinâmica estelar vem sendo dividido em dois, a saber **dinâmica estelar colisional** e **dinâmica estelar não colisional**. Aquela está preocupada com os efeitos a longo prazo de encontros próximos entre as estrelas, uma vez que a evolução de um conjunto de estrelas é governada pela difusão lenta de “calor” através do sistema, do interior para o exterior, e tal transporte de “calor” ocorre através de interações frequentes entre pares de estrelas. Já nesta, o fluxo de “calor” devido às interações entre pares de estrelas é negligenciado. Como veremos, o início da evolução de um aglomerado globular pode ser entendido por meio da dinâmica não colisional. Porém, quando os encontros próximos passam a ser importantes, esta deixa de ser válida. Note que o termo *não colisional* é usual e não representa uma colisão física; mas sim, um encontro próximo o suficiente para alterar as propriedades dinâmicas dos corpos envolvidos. Além disso, o termo “calor” é utilizado aqui como uma propriedade dinâmica, associado à velocidade das estrelas. No Capítulo 4, utilizaremos para a

---

<sup>1</sup>Binney & Tremaine (2008) consideram sistema estelar “*um conjunto de estrelas ou massas puntiformes ligadas gravitacionalmente*”. Porém, neste trabalho, consideraremos **sistemas estelares** apenas as grandes aglomerações de estrelas, tais como: aglomerados abertos e fechados, galáxias e aglomerados de galáxias.



Galáxia o tratamento não colisional, que é geralmente válido para sistemas estelares com muitas partículas mesmo em escalas de tempo comparáveis à idade do Universo (que, por sua vez, é comparável com a idade da maioria das galáxias).

De uma forma geral, o movimento de um conjunto de corpos celestes sob a ação gravitacional mútua é um problema de longa data, tanto no campo da dinâmica estelar quanto da mecânica celeste.

Em seu poderoso tratado sobre mecânica celeste, Tisserand (1889), ao dividir tal problema em dois subproblemas distintos (interno e externo), estabeleceu a questão da seguinte forma:

*Considerons l'un des corps de notre système; nous pouvons décomposer son mouvement en deux autres: le mouvement de son centre de gravité et le mouvement du corps autour de son centre de gravité. De là les deux principaux problèmes de la Mécanique Céleste:*

*i) Déterminer les mouvement des centres de gravité des corps célestes;*

*ii) Déterminer le mouvement des corps célestes autour de leurs centres de gravité.<sup>a</sup>*

---

<sup>a</sup>Consideremos um dos corpos de nosso sistema; nós podemos decompor seu movimento em dois outros: o movimento de seu centro de massa e o movimento do corpo em torno do seu centro de massa. Daí, os dois principais problemas da Mecânica Celeste: i) Determinar os movimentos dos centros de massa dos corpos celestes; ii) Determinar os movimentos dos corpos celestes em torno de seus centros de massa.

Note que a separação proposta por Tisserand é justificada, uma vez que as dimensões dos corpos, tanto no âmbito da mecânica celeste quanto da dinâmica estelar, são desprezíveis com relação à separação entre ambos. Dessa forma, os problemas interno e externo são separáveis. Além disso, podemos ignorar as estruturas internas dos corpos envolvidos. Com base em tais hipóteses, consideraremos o modelo matemático adequado aos casos reais mencionados, *a priori*.

Ao longo deste Capítulo, que por sua vez é o que possui maior rigor matemático, enunciaremos e/ou demonstraremos os resultados mais importantes associados ao **Problema de  $N$  Corpos<sup>2</sup> (PNC)**.

Primeiramente, formularemos o PNC e discutiremos acerca de sua integrabilidade. Em particular, demonstraremos como suas integrais primeiras podem ser obtidas e quais são suas naturezas físicas (Secções 2.1 e 2.2). A seguir, enunciaremos o Teorema do Virial (Secção 2.3) que, por conseguinte, será importantíssimo em Capítulos posteriores. Na Secção 2.4, relacionaremos o PNC com o objeto de estudos desta dissertação, a saber os aglomerados estelares globulares. Discutiremos como a evolução estelar altera a evolução dinâmica do sistema estudado. Por fim, como o PNC não é integrável (Subsecção 2.2.2), discorreremos sobre os avanços referentes às técnicas computacionais bem como à construção de computadores voltados para a obtenção de sua solução numérica (Secção 2.5).

Resumidamente, abordaremos o PNC de três formas distintas neste Capítulo, uma concernente aos aspectos matemáticos: definição, existência de solução, integrabilidade, etc; outra alusiva aos

---

<sup>2</sup>Como bem colocam Heggie & Hut (2003), em Matemática, referimo-nos a temas específicos como *problemas*, contanto que eles não tenham sido resolvidos. No tempo de Newton, o mesmo termo problema foi usado para descrever o desafio de encontrar os movimentos de dois, três ou mais corpos sob a influência de sua atração gravitacional mútua: daí, o *Problema de Dois Corpos*, o *Problema de Três Corpos*, etc; mesmo para  $N = 2$ , em cujo caso o problema possui solução analítica.

aspectos astrofísicos: aplicabilidade a sistemas estelares, influência da evolução estelar, etc; já a última perspectiva considerada refere-se aos desafios computacionais relativos ao tratamento do PNC.

## 2.1 Definição do Problema

**Definição 2.1.** Um sistema dinâmico é definido por um conjunto de equações diferenciais ordinárias e uma condição inicial associada, i. e.,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ \vdots \\ x_n(0) = x_{n0} \end{cases}$$

Em notação matricial temos

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $E$  é um subespaço euclidiano  $n$ -dimensional qualquer de  $\mathbb{R}^n$

**Definição 2.2.** Um sistema dinâmico autônomo é aquele cujas equações diferenciais não dependem explicitamente do tempo. Ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $E$  é um subespaço euclidiano  $n$ -dimensional qualquer de  $\mathbb{R}^n$

Vamos considerar, neste texto, apenas sistemas autônomos. Note que tal hipótese não causa perda de generalidade, pois qualquer sistema dinâmico não autônomo pode ser facilmente convertido em um sistema dinâmico autônomo. Basta fazermos  $x_{n+1} = t$  e  $\dot{x}_{n+1} = 1$ .

Uma classificação conveniente dos sistemas dinâmicos é baseada na conservação do volume do espaço de fase (espaço formado pelas variáveis do sistema). Dessa forma, podemos dividir os sistemas dinâmicos em conservativos e não conservativos. **Sistemas conservativos** são aqueles que preservam seu volume no espaço de fase, bem como sua área simplética. Já nos **sistemas não conservativos**, tal volume pode crescer ou decrescer, em média, à medida que o tempo avança. Uma vasta classe de sistemas conservativos são os sistemas hamiltonianos autônomos.

**Definição 2.3.** Seja  $F$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{2n}$  e seja  $H \in C^2[F]$ , onde  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , com  $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ . Um sistema da forma

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.3)$$

onde

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left( \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right)^T \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)^T$$

é chamado de sistema hamiltoniano autônomo com  $n$  graus de liberdade sobre  $F$ . Além disso, (i) a função  $H$  é a hamiltoniana do sistema; (ii) as equações de movimento (2.3) são chamadas equações de Hamilton e (iii) o espaço das variáveis  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  é chamado espaço de fase.

**Proposição 2.1.** A hamiltoniana  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  associada ao sistema hamiltoniano autônomo (Eq. 2.3) é conservada ao longo das trajetórias do sistema.

### Demonstração

Com efeito, a derivada total da função  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ao longo das trajetórias  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{p}(t)$  de (2.3) é

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (2.4)$$

Portanto,  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  é constante ao longo de qualquer solução de (Eq. 2.3) e as trajetórias deste sistema estão sobre superfícies  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{constante}$ .

□

O espaço de fase do sistema dinâmico (Eq. 2.2) é  $n$ -dimensional, enquanto que o espaço de fase do sistema hamiltoniano (2.3) é  $2n$ -dimensional. Além disso, o espaço  $n$ -dimensional cujos eixos são as coordenadas generalizadas  $q_i$  é chamado de **espaço de configuração**. Observe que a dimensão do espaço de configuração é determinada pelos graus de liberdade do sistema.

Note que o sistema (2.3) é equivalente ao sistema (2.2), a menos de dimensão: este possui dimensão  $n$ , e aquele, dimensão  $2n$ . Com efeito, seja  $\omega = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , então (2.3) se torna  $\dot{\omega}_i = \chi_i(\omega_1, \dots, \omega_m)$ , onde  $i \in 1, \dots, m = 2n$ . Logo, o sistema (2.3) é idêntico ao sistema (2.2) de dimensão  $2n$ .

O Teorema 2.1 abaixo, demonstrado pelo matemático francês Charles Émile Picard (1856 - 1941), a partir do Método das Aproximações Sucessivas, garante a existência e unicidade das soluções dos sistemas (2.2) e (2.3). Dessa forma, a especificação do estado do sistema, em um instante  $t_o = 0$ ,

determina uma única solução de um sistema dinâmico. Logo, duas trajetórias dinâmicas distintas nunca se tocam no espaço de fase do sistema.

A demonstração do Teorema de Picard não pertence ao escopo desta dissertação e pode ser obtida em Perko (1991).

**Teorema 2.1. (Teorema de Picard)** *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $\mathbf{x}_0$  e suponha que  $\mathbf{f} \in C^1[E]$ . Então existe um  $a > 0$  tal que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

*possui uma única solução  $\mathbf{x}(t)$  no intervalo  $[-a, a]$ .*

Até agora, definimos um sistema dinâmico e demos especial atenção a uma classe de sistemas dinâmicos conservativos chamada sistemas hamiltonianos autônomos. Vimos que as soluções de tais sistemas existem e são únicas, dada uma condição inicial.

Dado esse apresto inicial, passemos, então, à definição do PNC. Uma vez que o PNC esteja inserido na teoria de sistemas dinâmicos, pode ser formulado como um sistema dinâmico. Daí, podemos utilizar todo o arcabouço desenvolvido até aqui para tratar tal modelo.

Consideremos, então,  $N$  partículas em movimento sob a ação da força gravitacional newtoniana. Logo, devemos especificar, conforme ilustra a Figura 2.1:

- i) as constantes positivas  $G, m_1, \dots, m_N$ ;
- ii) um sistema de coordenadas cartesiano, convenientemente escolhido no espaço euclidiano tridimensional;
- iii) uma variável independente  $t$ .

As equações de movimento são, então, em coordenadas cartesianas,

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{j=1}^N \frac{G m_j m_k}{r_{jk}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k), \quad (j \neq k), \quad r_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| \quad (2.5)$$

onde o vetor  $\mathbf{r}_k$  corresponde à posição da partícula  $k$ , i. e.,  $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ , e o lado direito de (2.5) é a resultante das forças atuantes em  $k$  devido as outras  $N - 1$  partículas<sup>3</sup>.

Vamos agora obter o sistema hamiltoniano autônomo equivalente às equações (2.5).

---

<sup>3</sup>Às vezes é conveniente substituir o lado direito das equações (2.5) pelo gradiente de um potencial suave. Isso será feito, como veremos no Capítulo 4, quando estudarmos o movimento de um aglomerado globular inserido em um potencial galáctico. Modelaremos o aglomerado como um PNC e a galáxia como um potencial suave.

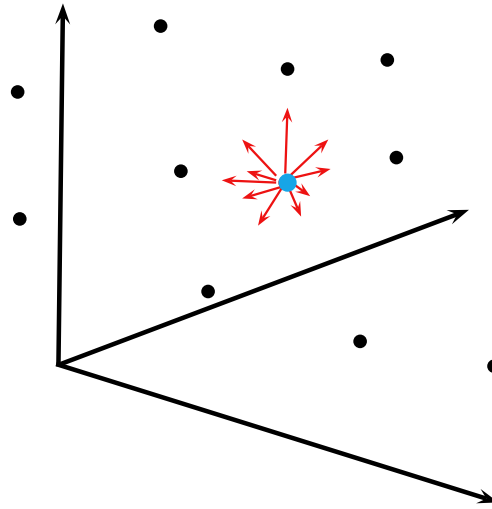


Figura 2.1: Forças atuantes em  $k$  (partícula azul) devido às outras  $N - 1$  partículas (pretas).

Sejam  $\mathbf{q}_k = (q_1, q_2, q_3)_k$  as coordenadas generalizadas de cada partícula do PNC. Então, a energia potencial do sistema é dada por

$$U = - \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{Gm_j m_k}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k|} \quad (2.6)$$

E a energia cinética é

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} \quad (2.7)$$

Logo,  $H = T + U$  e o sistema hamiltoniano associado ao PNC é

$$\dot{\mathbf{q}}_k = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_k} = \frac{\mathbf{p}_k}{m_k} \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_k = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_k} = \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{Gm_j m_k}{|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k|^3} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k) \quad (2.9)$$

Dessarte, o PNC corresponde a um sistema dinâmico conservativo com  $3N$  graus de liberdade. Do ponto de vista da teoria de sistemas dinâmicos, trata-se de um sistema de dimensão  $6N$ , ou seja, um sistema que possui  $6N$  equações diferenciais de primeira ordem.

Portanto, podemos nos valer do Teorema de Picard (2.1) e concluir que o PNC possui solução única. Infelizmente, o Teorema não nos diz como obter tal solução, uma vez que ela existe. Veremos na próxima Secção que obtê-la é algo impossível devido à ausência de integrais primeiras em número suficiente que permita construir sua solução por meio do Método da Redução por Quadratura.

## 2.2 Integrabilidade

Na Secção 2.1 apresentamos as equações de movimento do PNC em sua formulação hamiltoniana. No entanto, nada foi dito sobre o procedimento a fim de resolvê-las. Em geral, este é um problema meramente matemático. Um sistema hamiltoniano com  $n$  graus de liberdade (isto é, com um espaço de fase  $2n$ -dimensional) possui  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem. A resolução de cada equação exige uma integração, dando assim origem a  $2n$  constantes de integração. Em um problema específico, estas constantes são determinadas através das condições iniciais do sistema, i. e., através dos valores iniciais das posições e *momenta* das partículas que dele fazem parte.

De uma forma mais sofisticada e útil para os nossos propósitos futuros, há uma técnica que permite obter a solução de um sistema dinâmico a partir de funções conhecidas e que são preservadas ao longo do tempo. Tal técnica recebe o nome de **Integração por Quadraturas** (Tabor, 1989). A integração por quadraturas de um sistema dinâmico consiste na procura de suas soluções por meio de um número finito de operações algébricas, cálculo de integrais de funções conhecidas e inversões de funções conhecidas<sup>4</sup>.

Tal técnica se torna mais natural quando os métodos convencionais não se aplicam. Ademais, está diretamente relacionada ao Teorema de Liouville sobre integrabilidade de sistemas hamiltonianos (Subsecção 2.2.1), devido à redução da ordem do sistema via integrais primeiras.

### 2.2.1 Teorema de Liouville

A fim de iniciarmos a discussão sobre integrabilidade, definiremos o que é uma integral primeira<sup>5</sup> (Tabor, 1989).

**Definição 2.4.** *Uma função  $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  associada a um sistema hamiltoniano é chamado integral primeira se se mantém constante ao longo de qualquer solução do sistema (no tempo), i. e., se sua derivada temporal é nula.*

**Definição 2.5.** *Sejam  $F_1$  e  $F_2$  duas funções de  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  quaisquer. A quantidade*

$$[F_1, F_2] := \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \frac{\partial F_2}{\partial p_i} - \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \quad (2.10)$$

<sup>4</sup>Para mais detalhes sobre integrabilidade de sistemas dinâmicos por meio de quadraturas, recomendamos o livro de Tabor (1989).

<sup>5</sup>Binney & Tremaine (2008) diferenciam *constante de movimento* (dependente do tempo) de *integral de movimento* (independente do tempo); porém, nesta dissertação, não faremos tal distinção. Ou seja, não trabalharemos com constantes que variam com o tempo. Isso se deve a que o que importa, em termos de integrabilidade, são as constantes que não variem com o tempo, de acordo com o Teorema 2.2.

é chamada colchete de Poisson. Além disso, quando (2.10) é nulo dizemos que  $F_1$  e  $F_2$  estão em involução.

Note que, da definição 2.4 e da regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (2.11)$$

e da definição 2.5, segue trivialmente que qualquer integral primeira de um sistema hamiltoniano autônomo deve estar em involução com a hamiltoniana  $H$  do sistema.

Um sistema hamiltoniano autônomo pode possuir quantas integrais primeiras a natureza do sistema permitir, porém há um número mínimo destas que permitem a solução daquele por quadraturas. Essa quantidade é estabelecida pelo Teorema 2.2, o qual também fornece a definição de sistema integrável, i. e., um sistema que pode ser integrado por quadraturas.

Finalmente, enunciaremos o Teorema de Liouville sobre integrabilidade, sem demonstração. Devido a esse Teorema ser deveras importante no estudo de sistemas hamiltonianos autônomos, incluímos sua demonstração no apêndice A desta dissertação, seguindo<sup>6</sup> Boccaletti & Pucacco (1996).

**Teorema 2.2. (Teorema de Liouville)** *Dado um sistema hamiltoniano autônomo com  $N$  graus de liberdade, se existem  $N$  integrais primeiras funcionalmente independentes e em involução, então o sistema é completamente integrável, i. e., é integrável por quadraturas.*

Note que, para os sistemas integráveis, as trajetórias no espaço de fase estão confinadas em uma variedade  $N$ -dimensional, chamada **torus invariante**. O *torus* invariante recebe esse nome porque uma trajetória, que ali se origine, permanece nele indefinidamente.

Do Teorema 2.2, segue que o PNC será integrável se, e somente se, possuir  $3N$  integrais primeiras em involução.

Apenas uma pessoa bastante otimista esperaria encontrar tantas integrais para  $N > 2$ . Dessa forma, na Subsecção seguinte, provaremos que há apenas 10 integrais primeiras associadas ao PNC. Portanto, trata-se de um problema não integrável. Daí a necessidade de se utilizar técnicas numéricas (i. e., computacionais) e Teoria de Perturbação para se estudar tal sistema (Secção 2.5).

## 2.2.2 As Integrais Primeiras do Problema de N Corpos

Podemos dizer, até agora, que a solução do PNC depende de dois fatores, a saber

1. se o Teorema da existência e unicidade (de Picard) pode ser aplicado (existência de singularidades);

---

<sup>6</sup>A demonstração original foi dada por Joseph Liouville (1809-1882) em um artigo intitulado *Note sur les équations de la Dynamique*, publicado no *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* em 1855.

2. se a solução pode ser construída (aplicabilidade do Teorema de Liouville).

Sobre o primeiro item, se as singularidades forem eliminadas, então o PNC possui solução única<sup>7</sup>. Já acerca do segundo ponto em questão, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) foi o primeiro a atingir um marco apreciável (Lagrange, 1772). No referido trabalho, Lagrange mostrou que, para o problema de três corpos (18 equações diferenciais de primeira ordem), havia 10 integrais primeiras (nem todas em involução entre si), i. e., mostrou que se tratava de um sistema não integrável. De uma forma mais geral, para o PNC, esse é o máximo de integrais que existe. Isso se deve a que a existência das integrais primeiras não depende de  $N$ , mas da natureza das forças envolvidas. Outrossim, Ernst Heinrich Bruns (1848-1919) demonstrou que esse é o número máximo de integrais primeiras que podem ser obtidas (Bruns, 1887).

Passemos, então, à obtenção das nove integrais primeiras que faltam, uma vez que a hamiltoniana (energia, neste caso) é uma integral primeira.

Primeiramente, somemos sobre  $k$  a equação (2.5), i. e.,

$$\sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_k \sum_{j \neq k} \frac{Gm_j m_k}{r_{jk}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$$

Note que tal equação é nula devido à Terceira Lei de Newton, i. e., para cada par  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$  há um corresponde  $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j$  que é igual em módulo e com sinal contrário.

Logo,

$$\sum_k m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = 0 \quad (2.12)$$

Agora, como

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{\sum_k m_k} \sum_k m_k \mathbf{r}_k \quad (2.13)$$

é o centro de massa do sistema, temos que o momento linear total do sistema é conservado, ou seja,

$$\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{a}t + \mathbf{b} \quad (2.14)$$

Portanto, acabamos de obter mais 6 integrais primeiras do PNC, a saber  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ .

Novamente, iniciemos pela Equação (2.5). Multiplicando-a vetorialmente por  $\mathbf{r}_k$  e somando sobre  $k$ , obtemos

$$\sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \ddot{\mathbf{r}}_k) = \sum_k \sum_{j \neq k} \frac{Gm_j m_k}{r_{jk}^3} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{r}_j)$$

<sup>7</sup>Alternativamente, Boccaletti & Pucacco (1996) provam a existência e a unicidade das soluções do PNC sem colisão por meio do Teorema de Cauchy.



Note que o lado direito da equação anterior é nulo, devido à propriedade de antissimetria do produto vetorial. Logo,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \right) = 0 \quad (2.15)$$

Como o argumento da derivada de (2.15) é o momento angular total do sistema, temos que o vetor  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ , definido por

$$\mathbf{c} = \sum_k m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k), \quad (2.16)$$

corresponde a mais três integrais primeiras. Portanto, é possível reduzir a ordem do sistema para  $6N - 10$ . De mais a mais, é possível utilizar dois procedimentos (*eliminação do tempo* e *eliminação dos nodos*) a fim de reduzir a ordem do sistema para  $6N - 12$  (Boccaletti & Pucacco, 1996).

O conhecimento das integrais primeiras será importante na análise das interação entre dois aglomerados globulares (Capítulo 6), que é o tema desta dissertação.

A fim de finalizarmos a descrição físico-matemática do PNC, enunciaremos e discutiremos, na próxima Secção, o Teorema do Virial, que será deveras importante nas análises energéticas concernentes ao PNC.

## 2.3 Teorema do Virial

Às vezes, alguns teoremas formulados em um dado contexto apresentam extensões e aplicações a áreas, aparentemente, não correlatas. Esse é o caso do chamado **Teorema do Virial**<sup>8</sup>. Clausius (1870) formulou tal Teorema com o intuito de relacionar o calor, até então estranho aos olhos da época, com o conhecimento paradigmático vigente, i. e., a mecânica clássica. Na referida *lecture*, Rudolf Clausius (1822-1888) enunciou o resultado obtido da seguinte forma:

*Die mittlere lebendige Kraft des Systems ist gleich seinem Virial.*<sup>a</sup>

<sup>a</sup>A energia cinética média do sistema é idêntica ao seu virial.

Gradativamente, no entanto, sua importância foi apreciada em aplicações ao problema de  $N$  corpos, com especial atenção à dinâmica estelar, por Sir Arthur Stanley Eddington (1882-1944), Sir James Hopwood Jeans (1877-1946) e Henri Poincaré (1854-1912), por exemplo, no começo do século XX.

Como se trata de um resultado bem estabelecido e demonstrável por diversos meios, mesmo devido à sua importância em fins práticos, optamos por apenas enunciá-lo. Porém, demonstrações de

<sup>8</sup>A palavra *virial* foi criada em alemão a partir do latim *vis*, que significa força, relacionada ao grego *is*, que também significa força.

tal resultado podem ser obtidas, por exemplo, em Binney & Tremaine (2008), Boccaletti & Pucacco (1996) ou Contopoulos (1966).

**Teorema 2.3.** *Considere um sistema de partículas interagindo gravitacionalmente. Sejam  $T$  a energia cinética e  $U$  a energia potencial do sistema. Se a energia cinética média do sistema e a energia potencial média do sistema não variam significativamente com o tempo, então a energia cinética média é igual à metade da energia potencial média. Ou seja,*

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0 \quad (2.17)$$

Note que (2.17) representa o Teorema do Virial em sua formulação escalar, aplicada à força gravitacional<sup>9</sup>. Naturalmente, os trabalhos supracitados oferecem a generalização desse resultado conhecido como **Teorema do Virial Tensorial**.

O Teorema do Virial possui diversas aplicações. Algumas delas ficarão claras ao longo da descrição das propriedades dinâmicas dos aglomerados globulares (Secções 3.8 e 3.9), bem como na exposição dos resultados concernentes à colisão de sistemas estelares esféricos isolados (Capítulo 6). Para outras aplicações, sugerimos o texto de Collins (1978).

Após a formulação do PNC e de algumas discussões preliminares, estamos aptos a inseri-lo nos tópicos alusivos a questões práticas da dinâmica estelar. Portanto, prossigamos no texto por meio da contextualização dos sistemas estelares, em especial dos aglomerados estelares globulares.

## 2.4 Sistemas Estelares

Acertadamente, Heggie & Hut (2003) expõem que o sistema (2.5) surgiu como uma tentativa de modelar o Sistema Solar. A origem da mecânica celeste, bem como da teoria de sistemas dinâmicos está associada à descrição dos corpos do Sistema Solar. Passados mais de três séculos, podemos sustentar a ideia de que os astrônomos estudam o PNC, também, por motivações distintas. Naturalmente, o Sistema Solar não perdeu seu esplendor; porém, ele compete com o estudo de sistemas estelares, devido à atual conjuntura concernente ao crescimento tecnológico que nos permite inferir melhores informações desses sistemas, bem como melhor representá-los em simulações.

Não é de se estranhar que o sistema (2.5) corresponda a uma boa primeira aproximação na modelagem de diversos sistemas astrofísicos que variam em várias ordens de grandeza: do Sistema Solar a aglomerados de galáxias. Indubitavelmente, isso se deve à abrangência da força gravitacional. Isso porque a gravidade é a força mais abrangente do Universo<sup>10</sup>, ou seja, o domínio da gravidade em

<sup>9</sup>O resultado original é mais geral, como se vê na formulação já apresentada, onde o virial é calculado a partir das forças envolvidas no sistema e é expresso por  $-\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle / 2$ .

<sup>10</sup>Outras forças estão presentes no Universo, como a eletromagnética e a pressão de gás, porém, em sistemas estelares, elas são desprezíveis. O mesmo não ocorre em nuvens moleculares gigantes, onde ambas possuem um papel importante.

escala cósmica é uma característica afortunada de nosso Universo. Sob tal prisma, podemos afirmar que a lei da gravitação é um “*milagre perpétuo*”<sup>11</sup>.

Assim sendo, podemos definir dinâmica estelar como *o estudo das consequências do sistema (2.5) em contextos astrofísicos (em larga escala)*. Tradicionalmente, como já foi dito, tais equações foram utilizadas, principalmente, no estudo do Sistema Solar. O Sistema Solar, no entanto, é um sistema muito regular. Todos os planetas se movem em órbitas próximas à eclíptica, e todos giram na mesma direção. As órbitas são bem separadas e, conseqüentemente, nenhum encontro acontece<sup>12</sup>. Quando atentamos a largas escalas, a de sistemas estelares, tal regularidade não se aplica. Em nossa Galáxia, por exemplo, a maioria das estrelas se movem no disco galáctico, girando no mesmo sentido que o Sol, mas encontros próximos não são proibidos. Em muitos aglomerados globulares, não há uma direção preferencial de rotação, e todas as estrelas se movem em qualquer direção.

Até o momento, temos falado sobre o PNC em um contexto astrofísico bastante genérico. Temos lidado com estrelas em movimento no campo gravitacional gerado por elas próprias e ignoramos sua estrutura interna; porém, não nos concentramos em um tipo particular de sistema em que tais idealizações podem ser aplicadas. Felizmente, existem sistemas na natureza que se aproximam das idealizações da dinâmica estelar em um grau notável.

### 2.4.1 Aglomerados Estelares Globulares

Os **aglomerados globulares (AG)**, ou simplesmente **globulares**, têm sido considerados os objetos astrofísicos ideais para explorar vários aspectos da dinâmica estelar, uma vez que são associações de  $10^4$  a  $10^6$  estrelas ligadas gravitacionalmente. Eles estão entre os componentes mais velhos da Via Láctea e possuem a forma aproximadamente esférica. Como eles estão suficientemente distantes do disco, não sofrem perturbações do mesmo (Heggie & Hut, 2003). Logo, correspondem a verdadeiros laboratórios para a dinâmica estelar.

Outras galáxias também possuem AG. Em algumas delas, eles são os componentes mais jovens (Lançon & Boily, 2000). A percepção de que a formação de AG ainda ocorre no Universo é relativamente recente e ajudou a rejuvenescer o estudo desses sistemas estelares. Nesta dissertação, porém, concentrar-nos-emos apenas nos mais antigos e mais bem observados sistemas em nossa Galáxia, i. e., os **aglomerados globulares Galácticos**.

---

<sup>11</sup>Gottfried Leibniz (1646-1716) expressou sua insatisfação referente à lei gravitacional proposta por Newton argumentando que se tratava de um *milagre perpétuo*. Isso porque ele admitiria apenas uma força tal que atuasse por meio de contato direto entre os corpos. Como resultado, rejeitou a crença de Newton associada a uma força que atuasse ao longo do espaço vazio, entre o Sol e um planeta a 100.000.000 milhas de distância. Ele considerou a ideia inteiramente inaceitável. Daí o termo em questão (Toulmin & Goodfield, 1962). A proposta de Newton não só se mostrou aplicável, mas também tem sido utilizada largamente desde então.

<sup>12</sup>Quando nos referimos ao Sistema Solar, estamos interessados apenas no movimento dos planetas com relação ao Sol. Excluimos, dessa forma, os pequenos corpos. Quando os incluímos, naturalmente, encontros podem ocorrer; além disso, são importantíssimos para determinadas classes de objetos, como os Objetos Transnetunianos.

Atualmente, há cerca de 157 globulares catalogados (Harris, 1996, edição 2010). Para ilustrar tais sistemas, a Figura 2.2 exibe a distribuição dos mesmos.

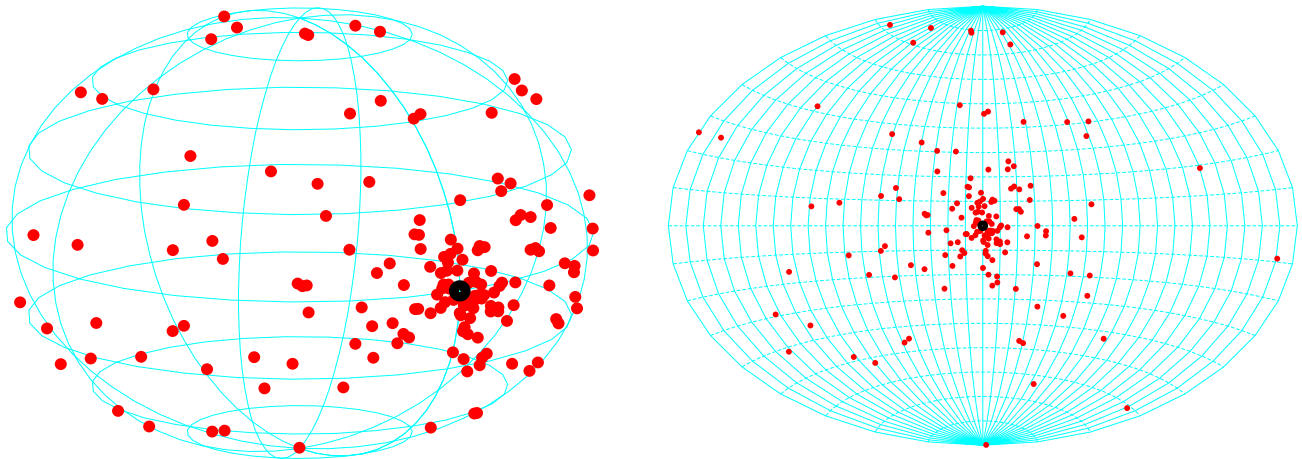


Figura 2.2: Distribuição dos AG em coordenadas galácticas (esquerda) e sua projeção de Aitoff (direita). Note que há uma densidade maior de globulares, aparentemente esférica, em torno da origem (ponto preto), que corresponde à localização do centro da Galáxia. As posições deles foram obtidas em (Harris, 1996, edição 2010).

No Capítulo 3, faremos uma breve revisão sobre os principais tópicos concernentes às propriedades físicas dos AG, inferidas de estudos observacionais; bem como uma revisão concernente aos seus principais aspectos dinâmicos. Tal capítulo servirá como alicerce para o Capítulo 6, onde compararemos os aspectos dinâmicos da evolução de um globular resultante de uma colisão com aqueles provenientes da evolução de um AG que não se formou por meio da colisão de dois anteriores, além de fomentar a construção dos modelos no Capítulo 4.

Finalizaremos esta Secção verificando a aplicabilidade do PNC ao caso dos AG.

Note, primeiramente, que os AG são formados por estrelas. Sabe-se, há muito tempo, que as estrelas evoluem. Antropomorficamente falando, as estrelas nascem, evoluem e morrem. E quando fazem isso, suas propriedades são alteradas, algumas delas sofrendo significativas perdas de massa. Dessa forma, a hipótese de que as massas são constantes no PNC falha. Além disso, as densidades das regiões centrais dos AG (e também dos núcleos galácticos) podem facilmente exceder a da vizinhança solar por um fator de um milhão (ou até mais). Se o tempo de evolução do AG é curto, em relação ao seu tempo de vida, então tratar as estrelas como partículas é deveras satisfatório. Porém, se o tempo é suficientemente longo, as colisões físicas entre as estrelas deixam de ser improváveis. Dessa forma, a hipótese de que os corpos sejam partículas, no PNC, falha.

Portanto, salientamos aqui dois pontos importantes que nos motivam a buscar formas complementares ao PNC. Primeiro, a evolução estelar, e segundo, a dimensão finita das estrelas.

Em geral, o tratamento que soluciona as debilidades do PNC é dividida em dois passos:

1. tratamento da evolução secular do PNC;

2. tratamento da complexidade introduzida pelas características dos globulares, tais como evolução estelar, colisões físicas entre as estrelas, perda de massa, etc.

A metodologia aqui abordada vale-se de tal complexidade, uma vez que o integrador utilizado é o *NBODY6* (Aarseth, 2003). Como veremos no Capítulo 5, tal código permite a análise de vários processos astrofísicos e é considerado, atualmente, um dos principais integradores de AG que existem (Heggie & Hut, 2003).

Isto finaliza a discussão das relações entre o PNC e a astrofísica. Prossigamos com a última abordagem aqui considerada, ou seja, como tratar computacionalmente o PNC como modelo para os AG.

## 2.5 Abordagem Numérica

Acompanhar a evolução de um AG é um dos problemas mais delicados e custosos na ciência. Os principais desafios correspondem a lidar com a extrema discrepância de escalas de comprimento e tempo, à necessidade de resolver os sutis desvios do equilíbrio termodinâmico que impulsionam a evolução do sistema, bem como ao número de cálculos envolvidos devido à interação entre as partículas.

Simultâneos encontros próximos entre três ou mais estrelas tem que ser modelados com precisão, uma vez que determinam as trocas de energia e momento angular entre os graus de liberdade internos e externos. Especialmente o fluxo de energia é importante, uma vez que a geração de energia por estrelas binárias proporciona o calor necessário para impulsionar a evolução de todo o sistema, pelo menos em seus estágios mais avançados (Secção 3.9). Infelizmente, o tamanho das estrelas é bem menor que o tamanho típico dos AG. Para estrelas típicas, o fator é de  $10^9$ , e para estrelas de nêutrons, o fator é de  $10^{14}$ . As escalas de tempo são ainda piores. Um encontro próximo entre duas estrelas ocorre em um intervalo de horas (milissegundos para estrelas de nêutrons). Em contraste, um globular evolui em bilhões de anos. Dessa forma, a discrepância é da ordem de  $10^{14}$  ( $10^{20}$ , para estrelas de nêutrons).

Como veremos posteriormente, o equilíbrio termodinâmico em um AG é mantido em um grau consideravelmente alto. Como são os desvios de tal equilíbrio o que alavanca a evolução de um AG, é extremamente difícil ser relapso no cálculo dos encontros próximos. Se qualquer tipo de erro sistemático ocorrer nesta etapa, mesmo à ordem de, digamos,  $10^{-6}$ , o resultado poderia facilmente invalidar todo o cálculo. É por esta razão que nenhum dos métodos rápidos, recentemente desenvolvidos para cálculos aproximados da força, têm sido adotados nesta área, por exemplo, *tree codes*, *P<sup>3</sup>M codes*, etc. Tais métodos ganham velocidade em detrimento de erros no cálculo da força. O resultado é que as simulações de  $N$  corpos em dinâmica estelar apenas conseguem suportar poucas partículas, se comparadas com as simulações cosmológicas, por exemplo.

O tempo gasto por uma CPU, em um cálculo direto das equações do PNC, é proporcional a  $N^2$ . Já para se simular um AG, há um aumento de  $N$ , devido ao cálculo da condução de calor. Logo, o tempo gasto é uma simulação típica é proporcional a  $N^3$  (Heggie & Hut, 2003). Por isso, o progresso concernente às simulações de  $N$  corpos de AG tem sido dolorosamente lento, desde o primeiro trabalho publicado, devido a von Hoerner (1960), como mostra a Figura 2.3.

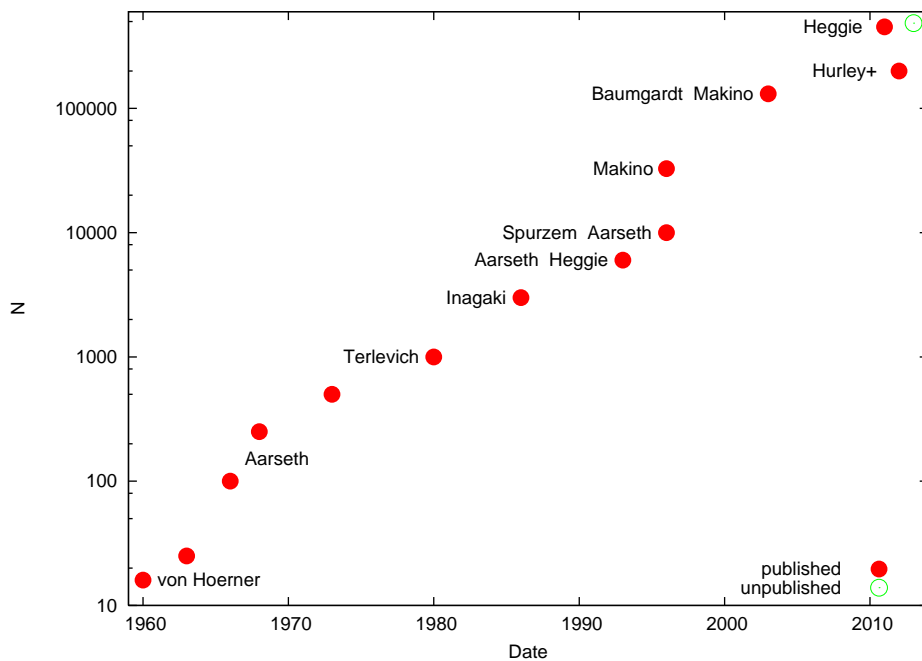


Figura 2.3: O lento progresso das simulações de  $N$  corpos. Gráfico fornecido pelo Dr. Douglas Heggie e inserido aqui com permissão.

Conforme já salientamos, o código *NBODY6* (Capítulo 5) é um dos mais bem sucedidos na tentativa de modelar sistemas tão complexos. De um forma geral, os códigos *NBODYX*, onde  $X = 1, 2, 3, 4, 5$  ou 6, são os integradores de  $N$  corpos mais importantes dos dias atuais. Para uma visão da construção dessa “indústria”, sugerimos o texto de Aarseth (1999), intitulado *From NBODY1 to NBODY6: The Growth of an Industry*.

Além dos códigos *NBODYX*, existem ambientes repletos de ferramentas e *softwares* que possibilitam realizar simulações de AG chamados **Nemo** e **Starlab** ([www.manybody.org](http://www.manybody.org), 2014). Eles são resultado de uma colaboração internacional chamada **MODEST** (*Modeling and Observing DENSE Stellar Systems*), que é uma iniciativa, criada em 2002, de alguns grupos de pesquisa em dinâmica estelar, evolução estelar, hidrodinâmica estelar e observações de sistemas estelares densos, de criar uma colaboração internacional; cujo objetivo é fornecer um quadro abrangente de *softwares* para simulações em larga escala de sistemas estelares densos, em que os códigos existentes para a dinâmica, evolução estelar e hidrodinâmica possam ser facilmente acoplados e comparados com os resultados observacionais (Hut et al., 2003).

Os avanços mais recentes nas simulações são devidos a *hardwares* criados especialmente para

atender às demandas do PNC. Isso foi feito na década de 1990 pelo grupo de astrofísicos da Universidade de Tóquio (Sugimoto et al., 1990; Makino, 1996; Makino & Taiji, 1998, entre outros), com o desenvolvimento da série GRAPE (*GRA*avity *PipE*) de computadores *special-purpose*. Tais computadores alcançam velocidades espetaculares através da aplicação do cálculo da força no *hardware*, a partir da inserção de vários *pipelines* de força em um único *chip*. A Figura 2.4 ilustra o *chip* mais atual da série (GRAPE-8).

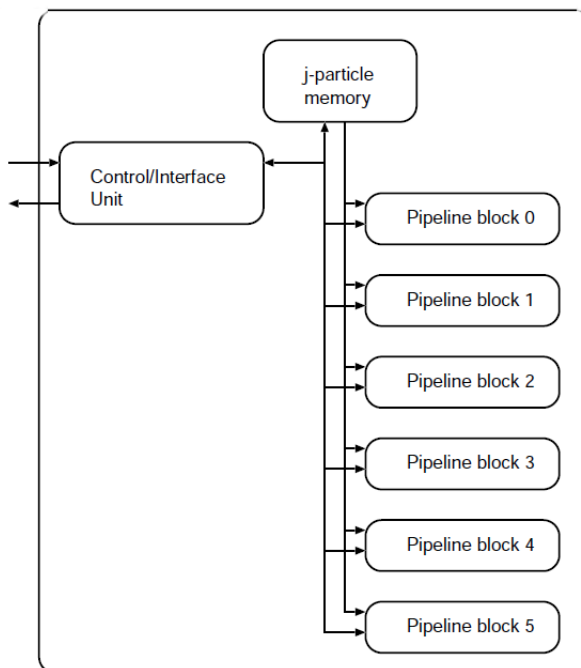


Figura 2.4: Esquema de chip GRAPE (Makino & Daisaka, 2012). É constituído por uma unidade de controle/interface, uma memória associada à  $j$ -partícula (DDR2) e seis blocos de *pipeline*. A unidade de controle gerencia a comunicação com o computador *host* através do *chip* de interface FPGA. Há uma entrada e uma porta de saída, cada uma com uma largura de dados de 32 bits. Eles operam com o *clock* sincronizado com o *clock* interno de 250 MHz. Assim, a largura de banda da comunicação é 1 GB/s.

Para ter-se uma ideia da discrepância entre o início da simulação de  $N$  corpos e o avanço atual, compararemos as velocidades entre os processadores utilizados por von Hoerner (1960) e Makino & Daisaka (2012). von Hoerner (2001) narra como foi o desenvolvimento do primeiro trabalho na literatura sobre tais simulações. Ele nos conta que o processador, por ele usado, foi um Siemens 2002 (primeiro computador totalmente transistorizado produzido em série), cuja velocidade é de  $2 \times 10^3$  operações de ponto flutuante por segundo (flop/s). Já o *chip* GRAPE-8 possui velocidade de  $4.8 \times 10^{11}$  flop/s. Um diferença da ordem de  $10^8$  operações por segundo.

Modelos estatísticos previam um certo tipo de oscilação de densidade nos núcleos dos globulares; porém, até 1996, era impossível provar que tal fenômeno físico, semelhante à condução de calor em sistemas gasosos, existia em um PNC, cujas partículas são estrelas. Com os *chips* GRAPE, as oscilações foram detectadas pela primeira vez por Makino (1996), utilizando o código *NBODY4* adaptado a

tal tecnologia.

Devido aos requisitos do GRAPE, no entanto, os cientistas foram forçados a usar algoritmos menos eficientes, que aqueles comumente usados. Nos códigos *NBODY4* e *NBODY5*, já foram feitas adaptações que permitem utilizá-los em um computador com GRAPE. A implementação paralela do *NBODY6*, existe, mas só para computadores paralelos de uso geral; o algoritmo ainda não foi adaptado para sistemas com GRAPE.

Há várias razões para o sucesso dos *hardwares* GRAPE. Primeiramente, foi desenvolvido rapidamente, mantendo-se sempre à frente dos computadores usuais. Em segundo lugar, o PNC é bem estabelecido. Por fim, o grupo GRAPE garantiu que os dispositivos poderiam ser disponibilizados para os potenciais usuários em todo o mundo, o que maximizou a contribuição científica. Para mais, como corretamente salientam Heggie & Hut (2003), a introdução de *hardwares* para fins especiais tem sido um avanço verdadeiramente revolucionário, e não apenas na velocidade. Antes do GRAPE e seu antecessor, o Digital Orrery, a ferramenta utilizada pelos teóricos era comprada em prateleiras de lojas de computadores. Em contraste, observacionais sempre construíram suas próprias ferramentas (telescópios). A partir desta perspectiva, a tecnologia GRAPE representa uma mudança cultural notável na forma como os teóricos podem fazer ciência. Em retrospecto, não é surpreendente que ocorrera na área da astronomia dinâmica, uma vez que as equações, e conseqüentemente os sistemas envolvidos nessa, são mais estáveis.

Além da tecnologia GRAPE, muitas outras são usadas, como os GPU (*Graphical Processing Units*) ou os GPGPU (*General Purpose Graphics Processing Unit*) pela arquitetura CUDA (*Compute Unified Device Architecture*), ou mesmo os dispositivos reconfiguráveis FPGA (*Field Programmable Gate Array*). Infelizmente, o fito deste texto impede-nos de prosseguir em tal discussão, embora seja verdadeiramente aprazível.

## 2.6 Ad Astra per Aspera

Neste Capítulo, vimos como o “milagre perpétuo” da Lei da Gravitação de Newton pode subsidiar uma descrição tão bela em se tratando de aglomerados globulares. Vimos que um sistema regido por tal lei pode ser aproximado pelo problema de  $N$  corpos composto por corpos finitos que evoluem, diferentemente da formulação original. Apesar de que este sistema não seja integrável, do ponto de vista da teoria de sistemas dinâmicos; ele o é, certamente, à luz da astrofísica computacional. E mesmo diante de tantas dificuldades, matemáticas, físicas ou computacionais, podemos avançar na ciência, podemos nos aproximar paulatinamente da verdade acerca do nosso Universo. E isto justifica o *motto* deste Capítulo: “**ad astra per aspera**” (até as estrelas pelas dificuldades).



## Capítulo 3

# Propriedades dos Aglomerados Globulares

*“Temos hoje o telescópio;  
Telescópio refletor.  
Temos também a luneta;  
Telescópio refrator.  
Tipos muito utilizados  
Por cientistas renomados  
Ou leigo observador.”*

Trecho do cordel **Astronomia, a maravilhosa ciência celeste** de **Lorena Braga Sales**.

Conforme vimos no Capítulo 2, a evolução dinâmica de um AG pode ser aproximado pelo PNC, se incluídas também as complicações provenientes da evolução estelar e da finitude dos componentes. Ou seja, não conseguimos modelar tão bem um AG se os processos astrofísicos estelares não figurarem entre as considerações do modelo<sup>1</sup>.

Analogamente a culturas da Antiguidade, que costumavam se valer do antropomorfismo em suas concepções teológicas, a comunidade astronômica corriqueiramente atribui características da evolução humana às estrelas. Dessa forma, costuma-se pensar as estrelas como estruturas que nascem, evoluem e morrem. Cada estágio evolutivo de uma estrela pode ser inferido a partir de grandezas observáveis, tais como a luminosidade. Isso implica que um dado grupo de estrelas pode ser parametrizado a fim de que os estágios evolutivos se evidenciem. Essa é a ideia do **diagrama Hertzsprung-Russell** ou do **diagrama cor-magnitude (DCM)**<sup>2</sup>. Aquele parametriza a distribuição das estrelas por

---

<sup>1</sup>Como veremos no Capítulo 4, os astrônomos teóricos estudam, em geral, modelos que tentam descrever objetos observáveis. É nesse sentido que o termo aqui é utilizado.

<sup>2</sup>Ejnar Hertzsprung (1873-1967) e Henry Norris Russell (1877-1957) notaram, na primeira metade do século XX, que as estrelas não se distribuíam aleatoriamente em um gráfico que representasse a magnitude absoluta visual e o tipo espectral.

meio de suas temperaturas efetivas e de suas luminosidades, enquanto este por meio da magnitude e da cor. Ambos foram bastante estudados ao longo do século XX e permitiram um salto qualitativo tempestuoso na Astronomia. Em verdade, podemos sugerir que a *raison d'être* da astrofísica contemporânea é o estudo dos referidos diagramas.

Um exemplo de avanço é devido a que grupos distintos de estrelas podem exibir distribuições distintas em tais diagramas. Novamente, seguindo a tradição do antropomorfismo, esses grupos foram denominados *populações*. O conceito de populações estelares foi introduzido por Baade (1944), em um estudo da região central de M 31 e seus satélites M 32 e NGC 205. As estrelas do estudo foram resolvidas em placas fotográficas sensíveis ao vermelho, mas não ao azul. Elas o permitiram concluir que não se tratavam de estrelas quentes e luminosas como as da vizinhança solar. Ele as identificou como sendo homólogas às estrelas mais brilhantes de globulares. A Figura 3.1 exibe as diferenças entre os *loci* das estrelas nas duas situações e corresponde à base da separação das estrelas conhecidas em duas populações:

**População I** : são estrelas similares às da vizinhança solar;

**População II** : são estrelas similares às de globulares;

Tais populações se diferenciam principalmente, devido às idades e metalicidades de cada uma.

A partir dos aspectos históricos, podemos definir, de forma mais geral, uma população estelar.

**Definição 3.1.** *Uma população estelar corresponde a um conjunto de estrelas que possuem um locus bem definido no diagrama HR, ou seja, um conjunto de estrelas com distribuições de idades e metalicidades (abundâncias químicas) bem definidas.*

**Definição 3.2.** *Uma população estelar simples corresponde a uma população estelar formada por uma única geração de estrelas, a partir de uma função de massa inicial (Definição 4.13). Daí, todas as estrelas de uma população estelar simples possuem as mesmas idades e metalicidades (abundâncias químicas) e diferentes massas.*

**Definição 3.3.** *Uma população estelar múltipla corresponde a uma população estelar que engloba várias gerações de estrelas, i. e., corresponde a várias populações estelares simples em um único sistema estelar. Além disso, tais populações podem ser distinguidas tanto a partir de seus respectivos espectros quanto de suas múltiplas sequências no DCM.*

**Definição 3.4.** *Uma síntese de população estelar é o processo que combina várias populações estelares simples a fim de ajustar as populações estelares múltiplas observadas, fotométrica e espectroscopicamente, em sistemas estelares, tais como AG e galáxias.*

---

Muito esforço foi feito para entender tais distribuições, que atualmente são explicadas por meio da taxa de geração de energia, via fusão nuclear, no interior das estrelas e da estrutura interna dessas.

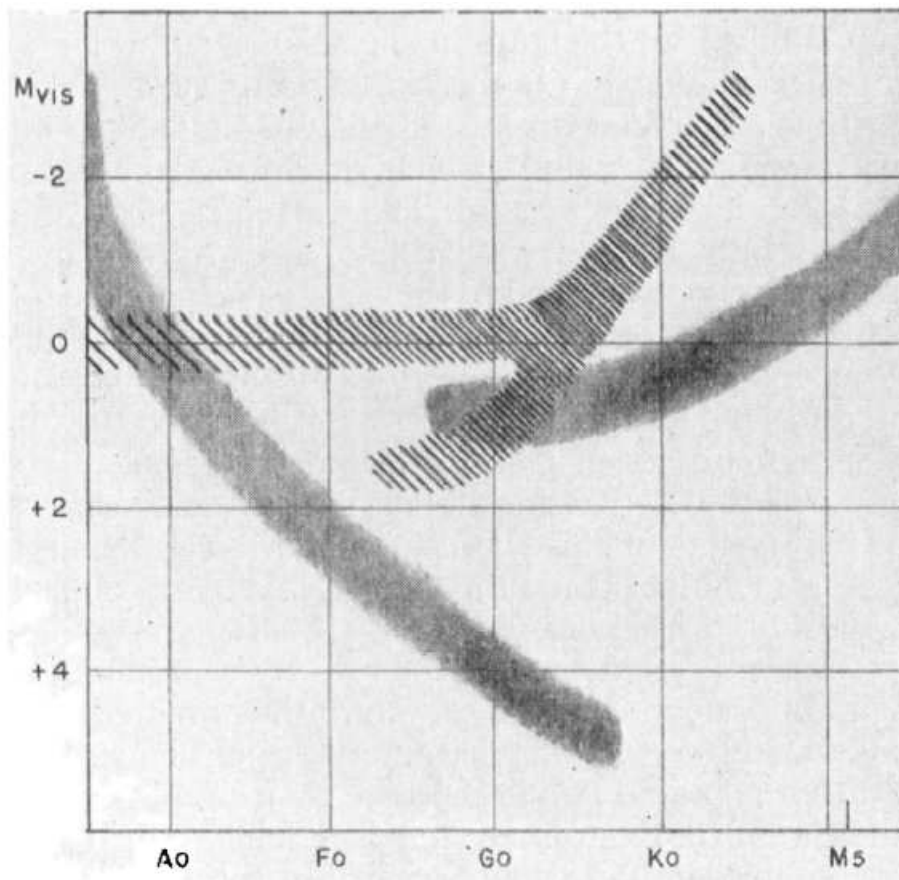


Figura 3.1: Diagrama Hertzsprung-Russell esquemático usado por Baade (1944) a fim de ilustrar as definições de suas duas populações. O *locus* da população I, estrelas da vizinhança solar, é representado pelas áreas preenchidas; enquanto que o *locus* da população II, estrelas dos globulares, é representado pelas áreas hachuradas. As diferenças ocorrem em virtude das diferenças entre as idades e metalicidades das estrelas de cada população.

Os AG, até recentemente, foram considerados sistemas estelares compostos de população estelar simples. Porém, devido aos excelentes dados provenientes da *Advanced Camera for Surveys*<sup>3</sup> (ACS) do *Hubble Space Telescope*<sup>4</sup> (HST), tem sido descoberto que vários AG possuem populações estelares múltiplas, além do paradigmático  $\omega$  Centauri (vide Figura 3.2).

Atualmente, há o projeto SUMO (SURvey of Multiple pOpulations in Globular Clusters), que propõe um estudo sistemático dos AG a fim entender melhor o que ocorre em tais sistemas estelares que apresentam populações estelares múltiplas (Monelli et al., 2013). Até o momento não há um bom entendimento de como as estrelas se formam em um AG e a causa deste apresentar populações múltiplas. Na Secção 3.7, finalizaremos a descrição astrofísica do Capítulo por meio de uma sucinta discussão concernente às teorias que existem e que tentam explicar tal fenômeno. Até lá percorreremos o seguinte caminho. Na Secção 3.1, descreveremos os principais aspectos associados às populações estelares simples, com particular atenção a dados fotométricos e aos DCM construídos a

<sup>3</sup>Câmara Avançada para Levantamentos.

<sup>4</sup>Telescópio Espacial Hubble

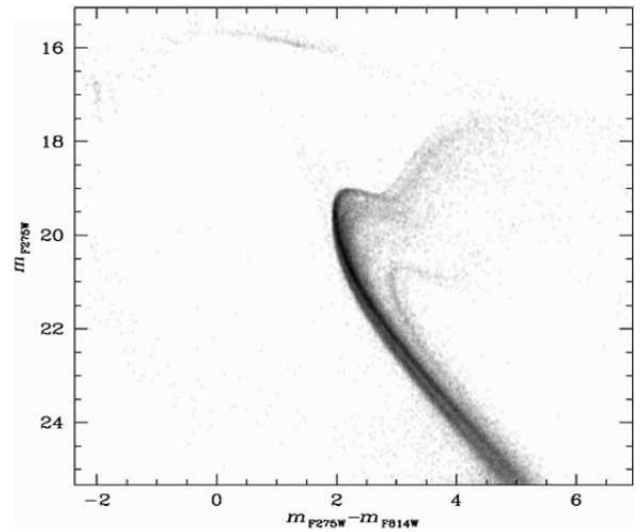
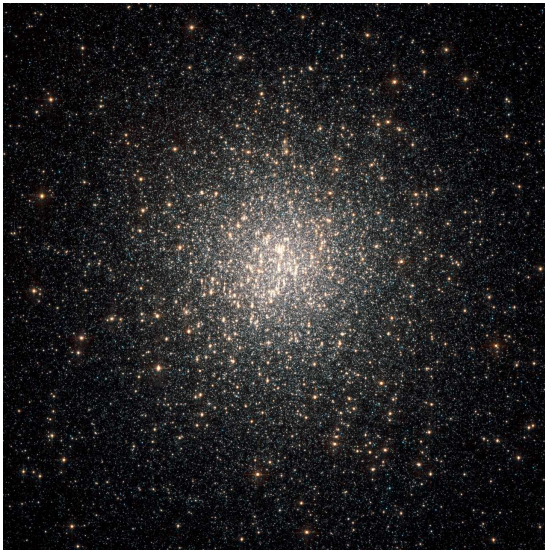


Figura 3.2:  $\omega$  Centauri. À esquerda, uma imagem do AG obtida pelo HST. À direita, o diagrama de Hess construído a partir dos dados da *Wide Field Camera 3* (WFC3) do HST, extraída de Bellini et al. (2010), exhibe claramente as várias populações no diagrama cor-magnitude.

partir dos mesmos. A seguir, na Secção 3.2, apresentaremos os resultados mais atuais referentes aos parâmetros globais e não globais que determinam as variações obtidas nos DCM dos globulares; em particular, mostraremos como uns são mais importantes que outros. Já na Secção 3.3, discutiremos brevemente como as estrelas se distribuem nos AG, sob o prisma do brilho e da densidade superficiais. Tais conclusões serão utilizadas na modelagem (Capítulo 4) dos AG iniciais, os quais, por sua vez, serão utilizados como *input* nas simulações (Capítulo 6). Após isso, discorreremos acerca da cinemática dos AG, na Secção 3.4. Estudos teóricos também abrangem a possibilidade de matéria escura em tais objetos; isso será discutido na Secção 3.5. Por fim, na Secção 3.6 estenderemos toda a discussão para as populações estelares múltiplas. Após os aspectos astrofísicos, discorreremos acerca dos principais fenômenos dinâmicos associados aos AG. Isso será feito nas Secções 3.8, 3.9 e 3.10.

Note que este Capítulo tem como propósito abordar as propriedades astrofísicas e dinâmicas dos AG a fim de que possam ser utilizadas na modelagem desses sistemas nas simulações envolvidas. Logo, trata-se de uma descrição necessária e autossuficiente da presente dissertação.

### 3.1 Fotometria e Diagrama Cor-Magnitude

Uma das propriedades fotométricas de um AG mais simples de ser medida é a distribuição da magnitude de seus componentes que, juntamente com as cores, fornece informações acerca de suas massas e de suas idades. Dessa forma, a fotometria das estrelas que compõem um AG é uma importante ferramenta para o estudo de seus processos de formação e evolução.

Em termos observacionais, a magnitude aparente de cada estrela (ou o brilho superficial) depende

de sua respectiva distância ao observador. Afortunadamente, as estrelas de um globular podem ser pensadas como objetos que estão à mesma distância, uma vez que este trata-se de uma estrutura relativamente compacta. Logo, tal informação não é necessária para todas as estrelas a fim de se construir um DCM. Isto é, apenas uma única distância é utilizada. Ademais, novamente devido à concentração dos globulares, muitas estrelas se enquadram em um único *frame* de um **Charge Coupled Device (CCD)**<sup>5</sup>, o que permite obter os dados de forma mais simples.

Uma vez calculadas várias magnitudes em diferentes filtros e calculada a magnitude visual absoluta das estrelas de um AG, é possível construir seu DCM. A Figura 3.3 exhibe o DCM genérico de um AG constituído de uma população estelar simples, onde várias sequências estão indicadas. Passemos, então, a uma sucinta<sup>6</sup> discussão acerca de cada uma delas. Como veremos, cada sequência está diretamente relacionada a algum estágio evolutivo estelar. Por simplicidade, abordaremos apenas a evolução de uma estrela de baixa massa<sup>7</sup>.

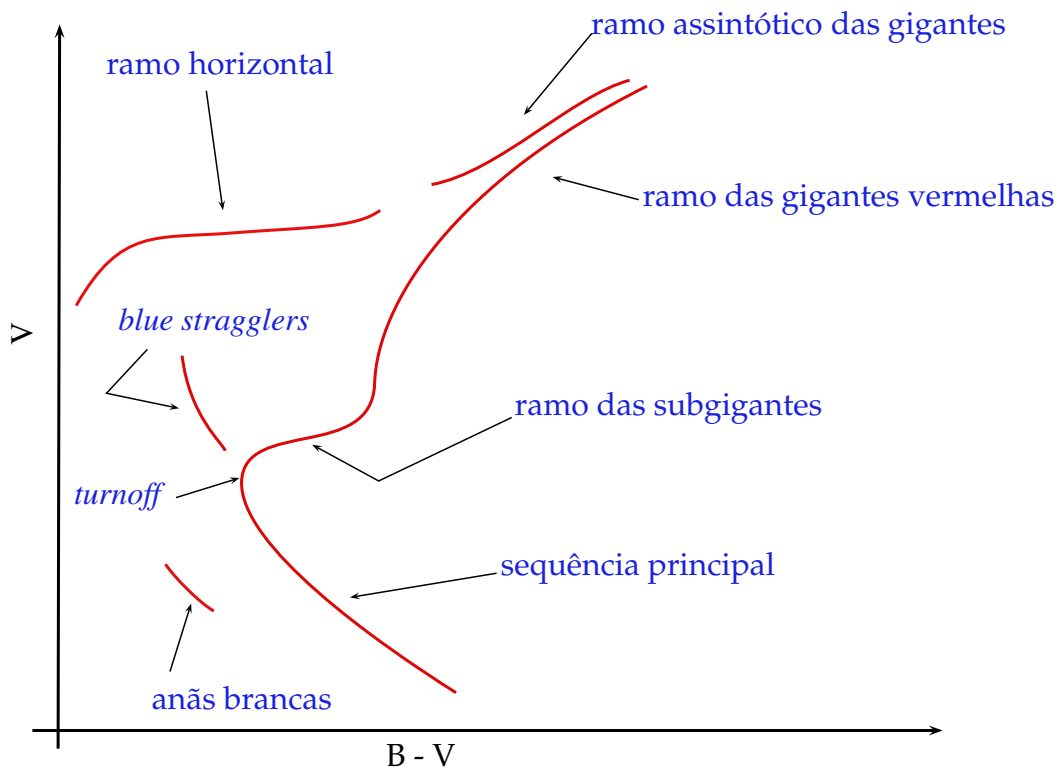


Figura 3.3: Diagrama cor-magnitude de um aglomerado globular que possui população simples. Esquematizamos a posição de diversas sequências clássicas.

Por hipótese, consideramos um globular com população estelar simples. Dessa forma, *a priori*,

<sup>5</sup>Dispositivo de cargas acopladas.

<sup>6</sup>Vale lembrar que a relação entre teorias de evolução estelar e o DCM é deveras complexa. Logo, certamente seremos econômicos na análise. Descrições mais rigorosas são alvo de diversos livros respeitados referente ao tema, como o clássico livro de Kippenhahn, Weigert, & Weiss (2012).

<sup>7</sup>Nesta dissertação, consideraremos uma estrela de baixa massa aquela que possui massa  $< 8 M_{\odot}$ . Naturalmente, a massa influencia fortemente a evolução de uma estrela. Para mais detalhes sobre a evolução estelar abrangendo todos os intervalos de massa, recomendamos o livro de Ostlie & Carroll (2006, cap. 13 e 15).

temos um objeto composto por estrelas de mesma idade e mesma metalicidade. Acredita-se que todas as estrelas de tal AG iniciem sua evolução na **sequência principal (SP)**, quando se inicia a queima de hidrogênio em seus núcleos, convertendo-o em hélio. Na Figura 3.3, isso corresponderia a um prologamento de tal sequência à parte superior esquerda do diagrama<sup>8</sup>. À medida que o tempo passa e as estrelas evoluem, elas saem da SP e passam para o **ramo das subgigantes (RSG)**. Este é curto e inclinado, a partir da SP. O *locus* no DCM que conecta as duas sequências é chamado **turnoff (TO)** ou **ponto de desligamento**.

O TO possui particular importância na determinação da idade de um dado globular, uma vez que as estrelas situadas acima de tal ponto não possuem hidrogênio em seus núcleos, i.e., saem da SP. Por conveniência, podemos definir uma curva no DCM que é bastante útil no cálculo de tais idades.

**Definição 3.5.** *A curva que contém todas as estrelas, de mesma idade e composição química, em um diagrama cor-magnitude é chamada isócrona, uma vez que representa um recorte das propriedades de uma população estelar simples.*

Quando um AG é observado e seu DCM é gerado, adotando uma dada composição química — supostamente correta —, é possível ajustar uma e apenas uma isócrona às estrelas que o compõem. Dessa forma, é possível obter a idade desse aglomerado.

A Figura 3.4 exibe algumas isócronas teóricas (distribuição de estrelas cuja união de suas posições representa uma isócrona), obtidas a partir de modelos de evolução estelar incluídos no código *NBODY6*.

No RSG, as estrelas deixam de queimar hidrogênio no núcleo e passam a queimá-lo em uma camada que reveste o núcleo, porém ainda não desenvolveram por completo envoltórios convectivos. Após o RSG, as estrelas caminham pelo **ramo das gigantes vermelhas (RGV)**, onde os tais envoltórios convectivos são completamente dominantes.

Quando a densidade central cresce a ponto de permitir a queima do hélio, a estrela se posiciona no **ramo horizontal (RH)**. Durante a vida da estrela no RH, sua luminosidade cresce lentamente. Dessa forma, tal sequência não possui extensão vertical nula. Além disso, somente os AG muito pobres em metais possuem estrelas variáveis **RR Lyrae**. Estas são os indicadores de distância mais importantes em AG e localizam-se entre as estrelas azuis e as estrelas vermelhas do RH.

Uma vez que a estrela consiga queimar todo o hélio de seu núcleo, ela se move rapidamente do RH para o **ramo assintótico das gigantes (RAG)**, que se localiza quase paralelamente ao RGV, sendo mais azul. No RAG, a estrela queima o hélio em camadas e carbono no núcleo. À medida que caminha para cima, no RAG, a estrela é suscetível à variabilidade e perda de massa. À medida que a estrela se torna mais velha e mais luminosa, perde massa a taxas cada vez maiores. Isso implica que muitas estrelas devolvem ao meio interestelar a maior parte de suas massas antes de morrer. No momento

<sup>8</sup>Costuma-se denominar a sequência principal que contém todas as estrelas de um AG de **sequência principal de idade zero**.

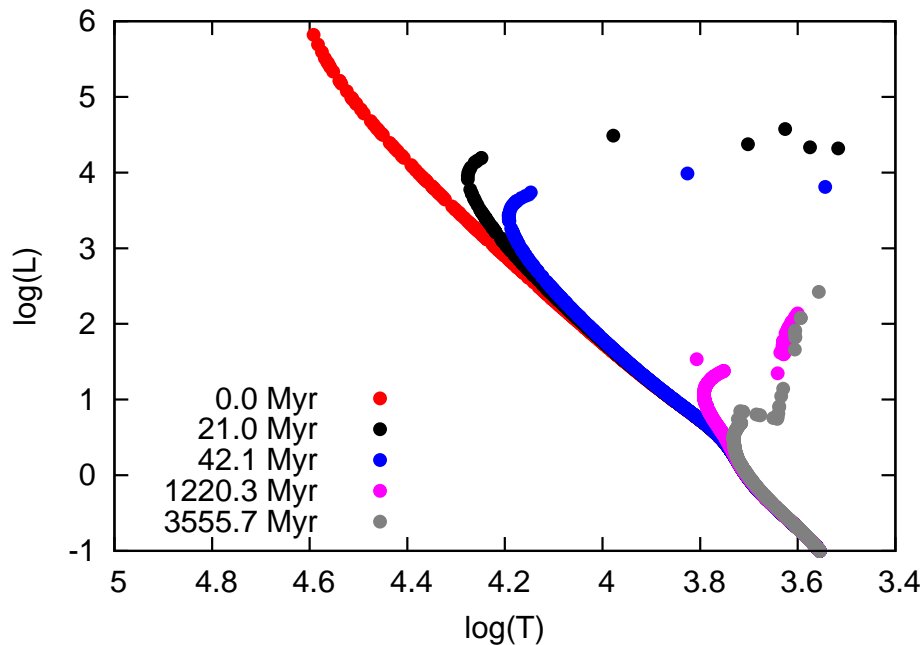


Figura 3.4: Diagrama Hertzsprung-Russell teórico obtido ao longo da simulação de um modelo de AG. Nesse, os vários recortes foram feitos em diferentes épocas e apenas algumas sequências são apresentadas. Note que, cada isócrona corresponde a um modelo com uma determinada idade. Note também o progressivo abandono da SP, que se inicia pelas estrelas com maior massa (mais quentes) e mais brilhantes e atinge estrelas cada vez menos brilhantes.

em que a estrela atinge o RH, cerca de 20% de sua massa já foi perdida. Quando se aproxima do topo do RAG, a taxa de perda é notável.

Logo após atingir o topo do RAG, uma estrela já esgotou praticamente toda a sua reserva de hidrogênio. Ademais, sem a camada de hidrogênio, a estrela se torna extremamente azul (já que o núcleo é mais quente) e desloca-se rapidamente para a esquerda no DCM. A intensa radiação pode ionizar o envelope de hidrogênio despreendido, gerando uma nebulosa planetária. Gradualmente, a queima de hélio cessa no interior da estrela e inicia-se um processo de arrefecimento. Essa é a fase final de sua vida, quando se torna uma **anã branca**.

Note que descrevemos todos os componentes da Figura 3.3, exceto as estrelas *blue stragglers*. Essas são estrelas que permanecem na sequência principal por mais tempo do que o usual. Como se sabe, a cor de uma estrela é uma medida de sua temperatura e sua massa, ou seja, estrelas azuis são mais quentes e possuem maior massa do que as vermelhas. Quanto maior a massa de uma estrela, mais rápido ela queima seu hidrogênio. Dessa forma, estrelas tão azuis deveriam gastar menos tempo na SP que estrelas vermelhas. Portanto, espera-se uma transição ordenada, conforme indicada pela Figura 3.4.

Porém, ocorre que várias estrelas em um AG são observados ao longo da SP à esquerda do TO. Essas são as *blue stragglers*. Isso indica que possuem temperatura e luminosidade atípicas para uma estrela da SP. Para entender o porquê de seu *locus* no DCM, precisamos nos valer de argumentos

dinâmicos. As explicações mais aceitas são, ou que resultam de uma colisão ou que receberam massa de outra estrela. No primeiro caso, duas estrelas se fundem em uma única estrela. Esta possui maior massa e é mais quente. Logo, é mais azul e mais brilhante do que qualquer um dos objetos que se fundiram. No segundo caso, uma estrela pode passar a maior parte de sua vida como uma estrela vermelha e queimar seu hidrogênio em um ritmo bastante lento de modo que ainda esteja na SP e, em seguida, em um certo instante, ganhar massa e ficar mais brilhante, camuflando-se como uma estrela azul, passando-se por uma estrela mais jovem do que realmente é. Naturalmente, as regiões centrais dos globulares permitem tais interações, uma vez que as densidades nelas são bastante altas.

Resumidamente, *blue stragglers* são estrelas localizadas perto da SP, embora suas temperatura e massa indiquem que já deveriam ter evoluído, ou seja, abandonado a SP, da mesma forma que as outras estrelas. Discutiremos com mais detalhes e formalidade maior sobre as interações estelares na Secção 3.9.

Um bom simulador da evolução dinâmica de um AG deve, naturalmente, incluir um tratamento acerca da evolução estelar. Como já antecipamos e veremos na Secção 5.7, o programa *NBODY6* consegue reproduzir tais efeitos por meio de funções *fast look-up* que fornecem informações sobre o tipo espectral, raio, bem como a massa do núcleo para uma determinada massa inicial, idade e metalicidade.

## 3.2 Parâmetros Globais e Não Globais

Congênere do exposto na Secção precedente, podemos afirmar que a diferença entre as idades dos AG implica diferença em seus respectivos DCM. Além disso, uma técnica usada para calcular a idade desses foi discutida. Outras técnicas são corriqueiramente utilizadas. Por exemplo, devido à característica do TO, Bergbusch & Vandenberg (1992) encontraram uma relação entre a magnitude absoluta desse, a idade do AG e sua metalicidade através de técnicas numéricas de Monte Carlo; a saber

$$M_V(TO) = 2.70 \log(t/\text{Ga}) + 0.30 [\text{Fe}/\text{H}] + 1.41 \quad (3.1)$$

A fim de calcular a idade do aglomerado por meio da equação (3.1), é necessário antes calcular a magnitude absoluta do TO, a partir de sua magnitude aparente e da distância do aglomerado (obtida das variáveis RR Lyrae, por exemplo), e a metalicidade do mesmo, a partir da espectroscopia. O grande problema de tal método, bem como o ajuste da isócrona, é devido ao cálculo da distância.

Outros métodos valem-se de propriedades do DCM que não dependem da distância. Por exemplo, a diferença entre as magnitudes do TO e do RH (método vertical), ou mesmo a variação entre as cores do RSG e do TO (método horizontal). A partir do método vertical, percebeu-se que há uma correlação entre a idade e a metalicidade dos AG. Tal relação ficou conhecida como **relação idade–metalicidade**



**dos globulares<sup>9</sup>.**

Dessa forma, pode-se concluir que os AG mais ricos são, em média, mais jovens que os AG pobres em metais. Naturalmente, tal correlação é importantíssima na formulação das hipóteses acerca da formação e evolução da Galáxia.

Portanto, devido à diferença entre as metalicidades e idades do AG, seus respectivos DCM também são diferentes. Historicamente, a constatação acerca da dependência do DCM com a metalicidade veio antes da dependência com a idade. Provavelmente, na década de 1950, estabeleceu-se que a metalicidade é o fator mais influente associado às diferenças entre os DCM dos AG, principalmente, por meio dos trabalhos de Arp, Baum, & Sandage (1953) e de Sandage (1953). No entanto, ainda se observava diferenças entre os DCM dos AG, mesmo quando tais objetos apresentam metalicidades semelhantes. Isso implica que, pelo menos, mais um parâmetro é necessário para explicar tais diferenças. Sandage & Wallerstein (1960) observaram que M 13 e M 22 exibiam ramos horizontais coerentes com aqueles de globulares pobres em metais, apesar de ambos possuírem metalicidade intermediária. Daí, sugeriram que a diferença de idade poderia ser responsável por tal efeito. Sandage & Wildey (1967) notaram que o RH de NGC 7006 é mais vermelho do que aqueles de M 13 e M 3, apesar dos três globulares terem metalicidades semelhantes. Tais anomalias sugeriram, novamente, a necessidade de um segundo parâmetro que poderia explicar as diferenças na morfologia dos RH não obviamente causadas pelas diferentes metalicidades.

Estabeleceu-se que deveriam haver dois **parâmetros globais**, que variam de AG para AG, e um parâmetro **não global** que varia ao longo de cada AG. Dessa forma, afirma-se que a metalicidade é o primeiro parâmetro global e, acerca do **segundo parâmetro global**, a visão paradigmática é concernente à idade. Com efeito, muitos trabalhos atuais corroboram a ideia de que a idade é o segundo fator mais importante associado às variações entre os DCM. Porém, não há um consenso acerca do terceiro parâmetro, aquele que varia ao longo de cada AG<sup>10</sup>.

Vários candidatos foram propostos, ao longo das últimas décadas, tais como perda de massa (por exemplo, Peterson, 1982), rotação estelar (por exemplo, Mengel & Gross, 1976), sistemas planetários (por exemplo, Soker, 1998) e interação dinâmica entre as estrelas (por exemplo, Rich et al., 1997). Porém, os melhores candidatos são

- **variação na abundância de He**

Sandage & Wildey (1967) foram, provavelmente, os primeiros a proporem que a abundância de hélio inicial varia entre os aglomerados e isso poderia implicar as anomalias dos RH observadas. Em estudos contemporâneos, observa-se a variação na abundância do hélio ao longo de cada AG. Ou seja, calcula-se a variação entre as estrelas de cada AG da amostra e credita-se a tal

---

<sup>9</sup>Para uma revisão, sugerimos o trabalho de Sarajedini, Chaboyer, & Demarque (1997).

<sup>10</sup>Tal incerteza acerca do parâmetro não global associado à variação dos DCM é conhecido como **problema do terceiro parâmetro**.

variação o título de terceiro fator. Por exemplo, Gratton et al. (2010) chegaram à conclusão, por meio de análise fotométrica de estrelas ao longo do RH de cerca de 100 AG, que a referida abundância é o fator local mais importante. Porém, os mesmos não descartam a influência de outros fatores, tais como a abundância de CNO. Milone et al. (2014) analisaram dados de 72 AG provenientes do HST e também chegaram à mesma conclusão.

- **variação na densidade central e concentração**

Fusi Pecci et al. (1993) propuseram que a densidade central de cada AG deveria ser o fator não global mais importante. Os autores analisaram 53 AG e encontraram que o comprimento do RH está correlacionado com a densidade central. Mais recentemente, o trabalho de Dotter et al. (2010) corrobora tal ideia. Os autores analisaram a diferença de cor entre o RH e o RGV e calcularam a variação  $\Delta(V - I)$ , medida a partir dos dados de 60 AG dentro de um raio de 20 kpc do Centro Galáctico obtidos na ACS do HST. Os mesmos perceberam que  $\Delta(V - I)$  e a densidade central estavam correlacionadas. Ademais, realizaram a egrégia consideração acerca da situação dialética em que se encontravam o segundo e o terceiro parâmetro na época, i.e., embora fossem um global e o outro local, ambos existiam e eram importantes em implicações que envolvem a morfologia do RH.

Até agora, descrevemos os principais aspectos concernentes ao DCM de um aglomerado típico composto de população estelar simples. Outrossim, fizemos uma breve discussão acerca das diferenças entre os DCM observados e suas possíveis causas. Porém, o DCM, embora deveras útil, fornece uma abordagem referente às populações estelares de um AG. Outras abordagens podem ser feitas, tais como a distribuição de brilho observada e a cinemática das estrelas que o compõem. Essas fornecem mais vínculos que devem ser respeitados em uma simulação; por isso, juntamente como o DCM devem ser consideradas. Na próxima Secção, analisaremos a distribuição de brilho e, imediatamente após, analisaremos os aspectos cinemáticos de tais estruturas.

### 3.3 Perfis Radiais

Nas Secções 3.1 e 3.2, discutimos brevemente acerca das propriedades das estrelas que formam um globular. Passaremos agora à análise da distribuição estelar ao longo de tal objeto, ou seja, descreveremos nesta Secção os principais aspectos concernentes aos perfis de densidades e de velocidade dos AG. Em geral, a maioria das distribuições dos modelos dinâmicos de AG pode ser formulada seguindo aspectos observacionais, *viz.*, o **perfil de brilho superficial** e o **perfil de dispersão de velocidade**. Esses perfis podem ser construídos das seguintes formas:

- i) perfis de densidade a partir da contagem de estrelas;
- ii) perfis de densidade a partir de medidas do brilho superficial;
- iii) os perfis de dispersão de velocidade a partir de movimentos próprios;
- iv) os perfis de dispersão de velocidade a partir de velocidades radiais;

Vale ressaltar, neste momento, que dois modelos intrinsecamente muito diferentes podem ter perfis de densidade superficial muito semelhantes. Além disso, devido à forma aparentemente esférica dos AG, podemos tomar tais perfis como radiais. Logo, considera-se que os perfis associados aos AG possuam dependência apenas radial<sup>11</sup>. Discutamos, então, as técnicas observacionais que permitem construir tais perfis<sup>12</sup>.

### 3.3.1 Contagem de Estrelas

No fim do século XIX, o avanço das técnicas fotográficas aplicadas à Astronomia proporcionou aos astrônomos a oportunidade de alterar o *status* paradigmático de seus trabalhos. Com efeito, ocorreu uma transição de descrições qualitativas para descrições quantitativas, o que implicou estudos cientificamente mais objetivos.

Foi a partir de uma chapa fotográfica de  $\omega$  Centauri, obtida em Arequipa, com um tempo de exposição de duas horas, que, provavelmente, Bailey (1893) fez o primeiro estudo extensivo de contagem de estrelas de um AG. Tais dados foram utilizados por Pickering (1846-1919), ainda no século XIX, e publicado no *Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College, Volume XXVI*, onde comparou os perfis teóricos e os observados (vide Secção 4.2, para mais detalhes). Durante as décadas seguintes, até o desenvolvimento do **CCD**, a contagem de estrelas era feita a partir de placas fotográficas; estas foram intensamente utilizadas, a fim de estudar a distribuição de estrelas em AG. Todos estes dados representam um material muito heterogêneo, que está difuso na literatura e não é facilmente acessível.

Melhoramentos na compreensão teórica da dinâmica estelar facultaram a necessidade de dados extensos e homogêneos concernentes à contagem de estrelas. King (1966) forneceu, pela primeira vez, um conjunto de modelos com diferentes concentrações (vide Secção 4.2) que incorporou os três elementos mais importantes que regem a estrutura de um AG: equilíbrio termodinâmico, relaxação de dois corpos (definição 3.6) e a sua finitude (apêndice D). Tais modelos, sendo esféricos, isotrópicos

---

<sup>11</sup>Na Secção 4.2.1, obteremos as grandezas astrofísicas concernentes ao modelo de Plummer que, como veremos, possui somente dependência radial.

<sup>12</sup>Nesta Secção, abordaremos alguns tópicos associados à fotometria. A história concernente aos avanços tecnológicos desta é, por si só, tema para uma dissertação. Portanto, concentrar-nos-emos apenas nos pontos-chaves de tal desenvolvimento. Para mais detalhes, recomendamos o livro de Budding & Demircan (2007). Altamente ilustrado, o referido livro oferece uma visão geral e histórica do assunto, antes de rever os principais temas em fotometria aplicada à Astronomia.

e compostos por estrelas de mesma massa, foram os mais simples que conseguiram representar os dados associados à contagem de estrelas de forma aceitável. King et al. (1968) demonstraram o sucesso desses modelos quando os empregaram na análise de uma enorme quantidade desses dados observacionais, *viz.*, contagem de estrelas, para 54 AG.

Nenhum esforço semelhante, de construir uma base de dados coerente e extensa referente à contagem de estrelas em AG, ampliou e melhorou o trabalho de King et al. (1968) até a década de 90, com a publicação de Grillmair et al. (1995). Eles fizeram fotometria em duas cores a fim de examinar a estrutura externa de 12 AG, usando contagem de estrelas. Eles mostraram que a maioria dos AG analisados apresentam, em seus perfis de densidade superficial, asas cujos perfis têm formas consistentes com estudos numéricos de correntes mareais de AG. Na Figura 3.5, é possível observar tal asa no aglomerado NGC 1904, bem como em um modelo simulado pelo código *NBODY6*.

Tais asas são relacionadas, para vários AG, com o aparecimento esperado das caudas mareais (apêndice D). O material extra-mareal é identificado como estrelas ainda no processo de remoção de seus aglomerados, o que, naturalmente, limita a precisão da determinação do raio mareal (definição 4.5). Grillmair et al. (1995) concluem que as estrelas encontradas para além dos valores de melhor ajuste para o raio mareal estão, provavelmente, desligadas do aglomerado, como resultado do fenômeno de escape que, ou já ocorreu, ou está ocorrendo. Os autores especulam que AG, em geral, não possuem raio mareal observável.

### 3.3.2 Medida do Brilho Superficial

A vantagem dos grandes campos de placas fotográficas, bem adequados para contagens de estrelas nas regiões mais externas de AG, foi contrabalanceada pela pobre resolução espacial que, por causa da superlotação da região central, impediu a resolução das partes mais internas da maioria deles. A solução para tal óbice tem sido a medida da luz integrada, que fornece perfis de brilho superficial. Isso foi possível devido ao desenvolvimento de dispositivos fotoelétricos, *i.e.*, fotomultiplicadoras, que medem o brilho superficial por meio de aberturas diferentes. As técnicas fotoelétricas aplicadas à Astronomia foram desenvolvidas, em parte, pelo estadunidense Joel Stebbins (1878-1966), na primeira década do século XX, em estudos com células de selênio (Stebbins, 1940, para uma visão histórica).

A célula de selênio foi introduzida na Astronomia por George M. Minchin (1845-1914) em estudo fotométrico de Vênus e Júpiter realizado com ela no observatório situado na casa de William Henry Stanley Monck (1839-1915) em Dublin (Minchin, 1895). Entre os primeiros a obter efeitos interessantes com este dispositivo (em estudo da Lua) foi George Francis FitzGerald (1851-1901), cujo nome está perpetuado por sua proposta original para a contração espacial de objetos em movimento agora associado à relatividade especial. Os três irlandeses pioneiros da fotometria fotoelétrica tiveram que lidar com as peripécias do clima, telescópios relativamente pequenos e, aparentemente a

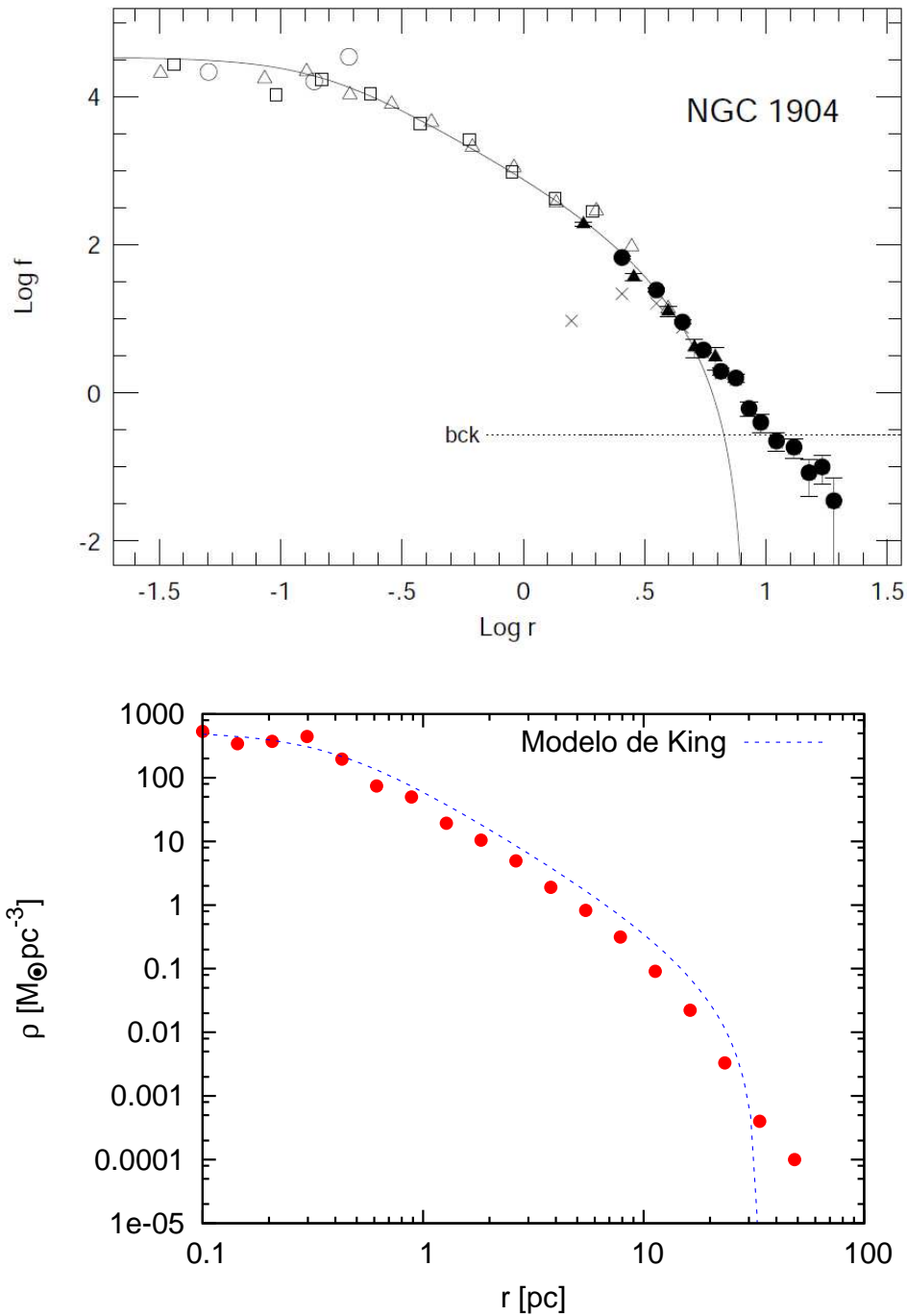


Figura 3.5: *Perfil de Densidade*. Acima, perfil observado de NGC 1904 (Grillmair et al., 1995). Símbolos não preenchidos referem-se à abertura fotométrica, símbolos preenchidos representam dados da contagem de estrelas corrigidos do *crowding* (superlotação), e o Xs indicam as contagens não corrigidas. A linha sólida é um modelo de King, enquanto a linha tracejada representa a densidade das estrelas do campo. Abaixo, perfil teórico obtido de uma simulação que utiliza o código *NBODY6*, ajustado por um modelo de King. O aglomerado possui raio mareal igual a 33.2 pc e uma concentração dada por 1.98. Tal aglomerado possui 33.7% de sua massa inicial e idade correspondente a 2548.679 milhões de anos. Note a porção além do raio mareal, o que indica a formação de sua cauda.

mais problemática, a electrometria do sinal, que dependia de uma geração mais velha de eletrômetros quadrantes de instabilidade notória.

Ao optar pela alternativa de medir o declínio fotocondutivo da resistência de uma célula de selênio iluminada (e refrigerada) em um arranjo de ponte de Wheatstone, Stebbins começou a alcançar um sucesso mais contínuo nos primeiros anos do século XX, em Urbana, Illinois. Com efeito, Stebbins & Brown (1907) utilizaram uma célula de selênio que possuía baixa sensibilidade; o que implicou a não detecção de Júpiter e, por isso, foi utilizada para estudar as variações de luz da Lua ao longo de suas fases. Tal célula tinha uma resposta linear em relação ao brilho de entrada sobre a faixa de valores em que era utilizável. Certamente, essa foi uma grande melhoria em comparação às chapas fotográficas. Em 1910, Stebbins (1910) já havia calculado a primeira curva de luz fotoelétrica de uma estrela variável (do famoso sistema binário eclipsante Algol) com um erro não superior a 0.02 magnitudes, um conjunto de dados extremamente preciso para o seu tempo. Além deles, os alemães Paul Guthnick (1891-1947), Richard Prager (1884-1945) e Hans Rosenberg (1879-1940) também iniciaram estudos, na década seguinte, referente à obtenção de brilho, utilizando dispositivos elétricos fotossensíveis.

A limitação da magnitude, essencialmente devido à amplificação do ruído nas células fotoelétricas, foi contornada, no devido tempo, pelo uso do efeito avalanche das emissões secundárias repetidas de eletrodos adequadamente posicionados (dinodos) no tubo fotomultiplicador. Um protótipo de fotomultiplicadora bem sucedido foi produzido pela *Radio Corporation of America* no final dos anos 1940, com o nome comercial de 1P21. O trabalho de Kron (1946), sobre as aplicações da fotomultiplicadora na fotometria astronômica, despertou interesse generalizado.

Estudos das regiões centrais de AG utilizando fotomultiplicadoras foram publicados, a partir de 1950 (por exemplo, Gascoigne & Burr, 1956; Kron & Mayall, 1960). Dickens & Woolley (1967) foram os primeiros a empregar extensos dados fotométricos com modelagem dinâmica em seus estudos de  $\omega$  Centauri. Um perfil composto obtido da combinação de um perfil de brilho superficial para a parte interna do aglomerado com contagens de estrelas na parte exterior permitiu Da Costa & Freeman (1976) mostrarem que os modelos de King isotrópicos, i.e., modelos cujas massas das estrelas são idênticas, são incapazes de ajustar o perfil de M 3 como um todo. Eles generalizaram tais modelos simples com a formulação de modelos de espectro de massa mais realistas, incluindo completa equipartição de energia no centro.

### 3.3.3 Contagem de Estrelas e Medida do Brilho Superficial a partir de CCDs

Somente com o desenvolvimento do CCD, em meados da década de 1970, com aplicações em Astronomia, juntamente com a melhoria de *software* para a fotometria em campos superlotados, que as estrelas mais brilhantes nas regiões internas dos AG, mesmo com as maiores concentrações, foram totalmente resolvidas. O quase lendário caroço de M 15, que tem sido o protótipo dos AG que passaram

pelo processo do colapso do caroço (Secção 3.8), revelou pelo menos parte de sua estrutura interna. O primeiro olhar para a parte interna de seu caroço, com um tamanho de  $0.55''$ , foi publicado por Auriere & Cordoni (1981a,b), que resolveram parcialmente as três estrelas centrais mais brilhantes.

Aglomerados globulares são conhecidos por conter inúmeros pulsares e fontes brilhantes de raios X. As posições desses objetos dentro dos AG podem fornecer informações úteis sobre o seu processo de formação, bem como sobre a segregação de massa neles. Pulsares em globulares também podem ser utilizados para sondar seu potencial gravitacional, uma vez que alterações no período observado podem ser atribuídas ao efeito Doppler induzidas por efeitos gravitacionais do próprio pulsar (Phinney, 1992). A utilização de tais meios para investigar a estrutura interna de um AG requer que a localização do caroço seja bem conhecida. Em muitos casos, especialmente para os de alta concentração (colapsados) e para os altamente obscurecidos devido ao centro Galáctico, a incerteza na posição óptica do caroço do AG é agora o fator limitante na determinação da separação entre o caroço e a posição das fontes de rádio ou de raios X. Por exemplo, Calzetti et al. (1993) relatam uma diferença de  $6''$  entre as posições do caroço “dinâmico” e do caroço “luminoso” de 47 Tucanae, uma diferença que é, provavelmente, devido aos dois métodos utilizados. A precisão relativa de métodos para a determinação da posição dos centros dos AG foi investigada por Picard & Johnston (1994), utilizando um conjunto de dados de AG artificiais. Eles também desenvolveram um método novo e mais robusto para determinar os centros deles. Tal método fornece a posição do centro com uma precisão de cerca de  $1''$  (Picard & Johnston, 1995). Dado que existem duas maneiras básicas e distintas para definir o centro de um AG, uma usando a luminosidade e outro usando a massa, tem sido mostrado que o centro calculado de forma dinâmica é a melhor medida do centro (Thomson et al., 2012).

Para além da Galáxia, a investigação dos perfis de brilho superficial de AG tem sido feita apenas em galáxias próximas, como a Grande e a Pequena Nuvem de Magalhães, a galáxia anã Fornax e M 31. Na Galáxia e M 31, os efeitos das interações entre os AG e o potencial galáctico são perceptíveis nos perfis radiais. A definição do raio mareal observado ou teórico não é uma questão simples (vide apêndice D). A interpretação de tais perfis nas partes mais externas dos AG pode depender de hipóteses acerca da isotropia da distribuição de velocidade e do momento angular nas bordas do globular (por exemplo, Weinberg, 1993). A análise dos perfis consiste, a maior parte do tempo, em uma comparação com os modelos de King isotrópicos ou com espectro de massa, o que proporciona estimativas do raio do caroço, do raio mareal e da concentração. Diferenças referentes aos modelos de King são observadas; isso, por sua vez, dificulta a qualidade do ajuste e sua interpretação (Grillmair et al., 1995).

Observações fotoelétricas e, especialmente, as de CCD permitiram uma investigação sistemática dos perfis de brilho superficial das partes mais internas da maioria dos AG e a confirmação observacional do fenômeno conhecido como colapso do caroço (Secção 3.8). Em particular, Djorgovski & King (1986) e Chernoff & Djorgovski (1989) classificaram os perfis observados em duas famílias, a

saber

- i) os aglomerados de **modelo de King**: cujos perfis de brilho superficiais se assemelham a um modelo de King com um caroço isotérmico achatado e um envoltório fortemente concentrado;
- ii) os aglomerados de **caroço colapsado**: cujos perfis de brilho superficiais seguem uma lei de potência quase pura com um expoente valendo  $-1$ .

Na Galáxia, cerca de 20% dos AG pertencem ao segundo tipo, exibindo em suas regiões internas perfis diferentes dos modelos de King. Por conseguinte, são considerados aglomerados que sofreram o colapso do caroço. A Figura 3.6 exhibe dois perfis de brilho superficial observados de dois aglomerados, cada um de um tipo. Já a Figura 3.7 exhibe dois perfis de densidade teóricos de dois aglomerados simulados com o código *NBODY6*.

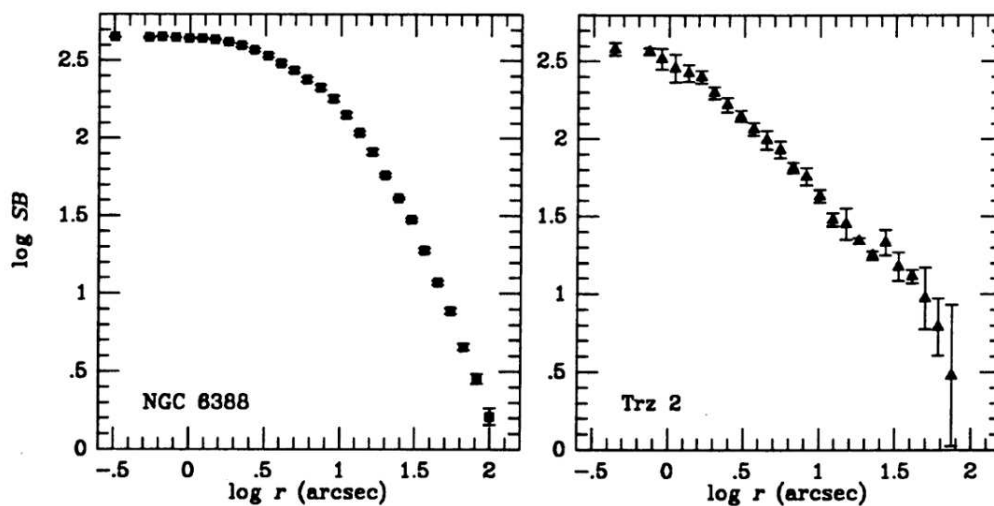


Figura 3.6: Exemplos de perfis de brilho superficial (Djorgovski et al., 1986). À esquerda, NGC 6388 assemelha-se a um modelo King com um caroço isotérmico achatado e um envoltório fortemente concentrado. À direita, Terzan 2 é um exemplo de um AG com o caroço colapsado cujo perfil de brilho superficial segue uma lei de potência quase puramente com um expoente dado por  $-1$ .

Acerca de tais classificações, precisamos subsidiar tal discussão com o entendimento dinâmico associado ao colapso gravotérmico do caroço, que será alcançado apenas na Secção 3.8. Dessa forma, adiaremos até lá um detalhamento deste tema. Além disso, na Secção 4.2, as definições mais importantes relativas a um AG serão formuladas rigorosamente. Isso permitirá uma abordagem ainda mais ampla.

Discutidas as principais características alusivas à fotometria e a distribuição de brilho ao longo dos AG, galgaremos a próxima Secção discutindo aspectos vinculados à espectroscopia e a distribuição de velocidade.



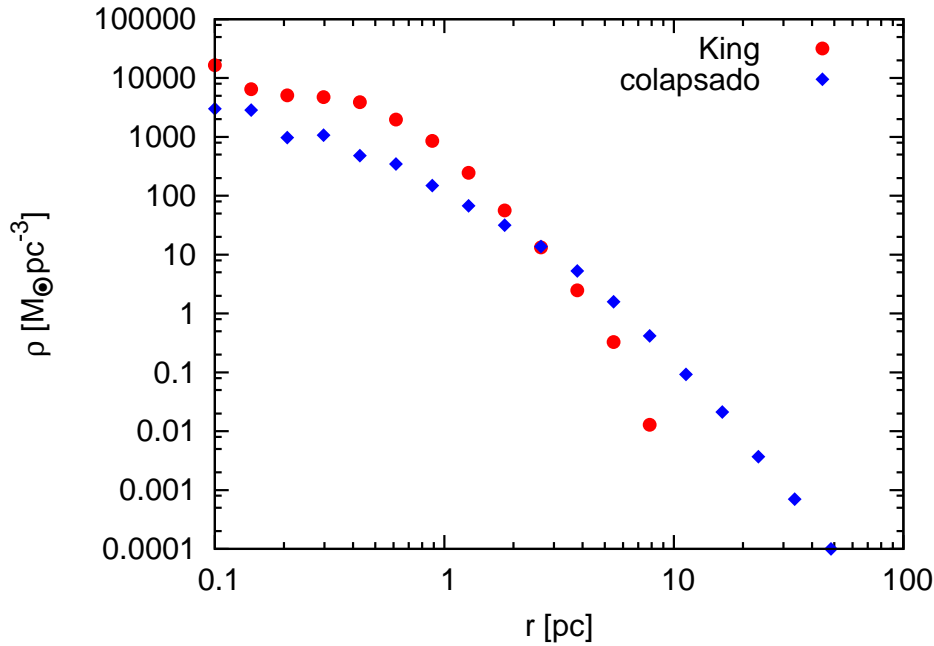


Figura 3.7: Perfil de densidade radial de um modelo simulado com o código *NBODY6* em diferentes estágios evolutivos. O modelo classificado como *King* corresponde a uma idade inferior ao colapso gravotérmico. Já o classificado como *colapsado* corresponde a uma idade superior à de tal fenômeno.

## 3.4 Cinemática

A aquisição de dados cinemáticos trouxe uma vasta gama de informações sobre a quantidade e a distribuição de massa em AG. Tais dados foram obtidos muito mais recentemente do que perfis de brilho superficial, uma vez que os astrônomos tiveram que superar primeiramente alguns desafios tecnológicos. Embora seja o caso para as velocidades radiais há mais de três décadas, o mesmo não ocorreu para o movimento próprio (Meylan, 1996). Até o fim do século XX, pouca informação foi obtida referente ao movimento próprio, muito provavelmente pela curta base temporal para a medição dos deslocamentos angulares tão pequenos, diferentemente da velocidade radial que pode ser obtida diretamente de um único espectro.

Vamos então relacionar o movimento próprio e a velocidade radial com o perfil de dispersão de velocidade, uma vez que este corresponde a um importantíssimo vínculo observacional que deve ser respeitado durante a formulação dos modelos.

### 3.4.1 Movimento Próprio

As velocidades espaciais de alguns AG são conhecidas a partir das velocidades radiais e movimentos próprios absolutos; no entanto, a pequena dimensão dos movimentos próprios internos das

estrelas desses tornou-os difíceis de serem medidos com a precisão necessária. Por exemplo, para um AG próximo a uma distância de 5 kpc, uma dispersão da velocidade de 5 km/s corresponde a um deslocamento de 20 milissegundos de arco por século. Mesmo nos AG mais bem estudados, os erros nas medidas dos movimentos próprios são da mesma ordem das próprias medidas.

Naturalmente, apenas uma fração muito pequena da informação dinâmica contida em movimentos próprios dos AG foi extraída até agora. Atualmente, o projeto **HSTPROMO** ([www.stsci.edu/marel/hstpromo.html](http://www.stsci.edu/marel/hstpromo.html), 2014) se vale de um conjunto de 26 subprojetos de pesquisa do HST, com colaboração de diversos pesquisadores, todos eles destinados a melhorar a nossa compreensão acerca da dinâmica das estrelas, de aglomerados e galáxias no Universo próximo através de medição e interpretação de seus movimentos próprios. Tal projeto já conseguiu comparar a dispersão de movimentos próprios de estrelas de massas diferentes ao longo da SP de  $\omega$  Centauri e mostrou que ele não está em um estágio de equipartição de energia (Van der Marel & Anderson, 2010). Trenti & van der Marel (2013) realizaram simulações de  $N$  corpos para modelar tal globular e encontraram que, apesar do consenso paradigmático contrário, geralmente, não se espera que os AG sequer tenham se aproximado da equipartição. Massari et al. (2013) apresentaram medidas de movimentos próprios absolutos do aglomerado NGC 6681 (M 70). Bellini et al. (2013) estão extendendo esse estudo a uma amostra de 23 AG. Os conjuntos de dados resultantes podem ser interpretados com ferramentas de modelagem dinâmica e fornecerão *insights* sobre a estrutura e dinâmica de AG, bem como populações múltiplas e possíveis buracos negros de massa intermediárias existentes neles.

### 3.4.2 Velocidade Radial

Durante a primeira metade do século XX, e um pouco depois, todas as velocidades radiais das estrelas foram obtidas a partir de placas fotográficas. Os erros típicos das melhores medidas eram da ordem de 10 km/s, ou seja, da mesma ordem de grandeza — ou mesmo maior — do que o valor da dispersão de velocidade esperada neles. Um catálogo de tais velocidades radiais em AG foi publicado por Webbink (1981).

Mas, desde o trabalho pioneiro de Griffin (1967), técnicas de correlação cruzada provaram sua eficiência excepcional na determinação da velocidade radial, uma vez que o pico da função de correlação cruzada fornece a velocidade relativa entre os dois espectros. Com a construção, em torno das décadas de 1970 e 1980, dos instrumentos que utilizam a referida técnica de correlação cruzada (por exemplo, Mayor, 1985), os erros típicos associados às melhores medidas são de 0.5 km/s, fornecendo uma ferramenta essencial para investigar a dinâmica interna de AG. Uma nova geração de instrumentos, com a vantagem de melhores tecnologias aplicadas às mesmas técnicas de correlação cruzada, fornecem erros típicos de até 10 m/s (por exemplo, Marcy & Butler, 1992). Além disso, o recente trabalho de Trifonov et al. (2014) reporta a descoberta de um novo sistema planetário em torno da gigante K  $\eta$  Cet (HIP 5364, HD 6805) baseada em 118 velocidades radiais ópticas de alta resolução

obtidas no *Lick Observatory* por meio da técnica de correlação cruzada. Os autores puderam concluir que o objeto descoberto se tratava de um sistema planetário, e não anãs marrons, devido à alta precisão na velocidade radial (com erros menores que 5 m/s), que por sua vez permitiu inferir zonas de estabilidade associadas à inclinação do objeto e uma ressonância de movimento médio entre seus componentes, que favoreceu a proposição associada ao sistema planetário.

O primeiro estudo dinâmico de um AG de alta qualidade usando velocidades radiais estelares foi publicado por Da Costa et al. (1977), que ajustou um perfil de densidade e velocidades de 11 gigantes em NGC 6397 com um modelo de King isotrópico. Dois anos depois, Gunn & Griffin (1979) publicaram os primeiros resultados de seu extenso estudo de dispersões de velocidade, dando velocidades de 111 gigantes em M 3. Perfis de densidade e de dispersão de velocidade foram simultaneamente ajustados para modelos anisotrópicos de King-Michie com espectro de massa.

Inicialmente, os avanços tecnológicos foram impulsionados pela necessidade de diminuir os erros nas medições da velocidade radial (da ordem de 0.5 km/s), conforme necessário, a fim de acessar a dinâmica nas partes mais internas dos AG. Ademais, as presentes melhorias levam também em conta o tamanho das amostras, uma vez que conjuntos de dados de velocidade radial demasiadamente pequenos impossibilita empregar, por exemplo, os métodos não paramétricos (Meylan & Heggie, 1997). A aquisição, mesmo de algumas centenas, de velocidades radiais estelares, uma de cada vez, é um trabalho lento e tedioso, mesmo em telescópios de grande porte. Provavelmente, a atualização mais recente acerca das velocidades radiais dos AG — e não apenas essa, mas também referente à metalicidade deles — é o trabalho de Saviane et al. (2012). Neste, os autores obtêm novas velocidades radiais e abundâncias de 20 AG que ou não possuíam tais grandezas determinadas ou possuíam valores pouco conhecidos. As velocidades radiais e as abundâncias foram derivadas a partir das linhas do tripleto do CaII, utilizando o imageador e espectrógrafo *Focal Reducer and low dispersion Spectrograph* (FOR2) do *Very Large Telescope array* (VLT), calibradas a partir de espectros de gigantes vermelhas em vários globulares com abundâncias bem determinadas. Para cerca de metade dos AG em tal amostra houve revisões significativas das velocidades ou abundâncias ou ambos. Além dessas compilações, certamente, muito em breve, o satélite GAIA (Apêndice B), recém lançado, ajudará bastante nessa tarefa.

### 3.5 Possibilidade de Matéria Escura em AG

Esta questão surge com frequência, uma vez que os aglomerados globulares são os menores que objetos onde a matéria escura pode ser encontrada. Outro argumento vem do trabalho teórico de Peebles (1984), que mostrou que uma distribuição isotérmica de estrelas em um potencial dominado por um fundo de matéria escura uniforme teria um perfil semelhante ao de um globular.

A construção de modelos dinâmicos (Capítulo 4) fornece uma abordagem para tal indagação.

Em quase todos os casos, modelos anisotrópicos de King-Michie com espectro de massa realizam um trabalho satisfatório e, para os casos em que tais modelos não são claramente bem-sucedidos, uma interpretação em termos de evolução pós-colapso do caroço é plausível (por exemplo, Phinney, 1993). Neste sentido, a matéria escura não é necessária, exceto para as frações modestas de estrelas de nêutrons e anãs brancas incluídas em tais modelos. Além disso, trabalhos mais recentes mostram que nem matéria escura é necessária bem como nenhuma alteração na mecânica newtoniana a fim de ajustar os perfis observados (por exemplo, Da Costa, 2012).

Sob um prisma teórico, poderíamos perguntar também, *quanto de matéria escura poderia haver?* Encontra-se frequentemente que um ajuste adequado é obtido para uma gama de modelos com um espalhamento considerável na massa total. Por exemplo, Fischer et al. (1992) encontraram, para o globular NGC 1978, na Grande Nuvem de Magalhães, massas totais que variam por um fator de 5. Embora possa ser tentador creditar isso à matéria escura, isto é, dizer que cerca de 80% deste aglomerado possa ser constituído de matéria escura, todos os modelos são construídos a partir de estrelas comuns e remanescentes estelares, e não está claro a quantidade dessas que poderia ser substituída por matéria escura, sem degradar o ajuste para o brilho superficial. Usando modelos simples, Heggie et al. (1993) e Taillet et al. (1995, 1996) consideraram a quantidade de matéria escura que poderia ser adicionada antes que seus efeitos se tornem perceptíveis (vide Figura 3.8).

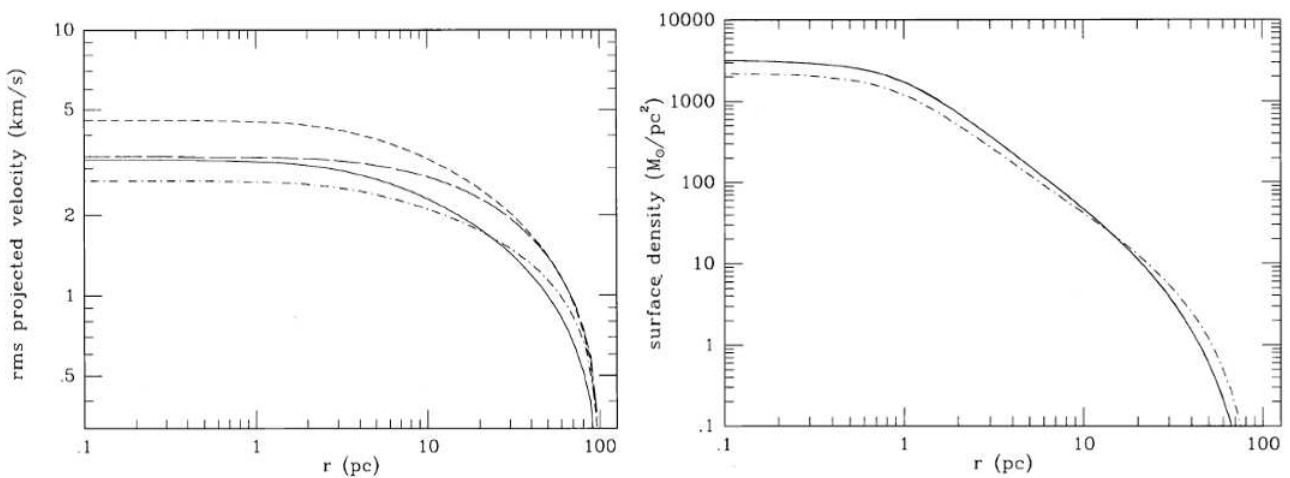


Figura 3.8: Efeito da matéria escura em um modelo simples de AG (Meylan & Heggie, 1997). À esquerda, a linha sólida exibe o perfil de velocidade quadrática média projetada. À direita, a densidade superficial em um modelo de King com raio do caroço igual a 1 pc, raio mareal igual a 100 pc e massa total igual a  $10^5 M_{\odot}$ . As outras três curvas em cada Figura mostram o efeito sobre este componente “luminoso” devido à adição de uma massa igual de matéria escura. Traços curtos: partículas de matéria escura possuem mesma massa das estrelas luminosas; traços longos: cada partícula de matéria escura possui 1/8 da massa de uma estrela luminosa; traços pontilhados: matéria escura é distribuída uniformemente fora do raio mareal.

As abordagens acima estão abertas à crítica uma vez que os resultados dependem completamente dos modelos. Isso tornou possível o desenvolvimento de métodos não paramétricos. Desta forma, é possível determinar a quantidade de matéria que é “escura”, em princípio, usando contagens profun-

das de estrelas a fim de calcular o quanto de massa é devido a estrelas normais. Em estudo preliminar, Heggie & Hut (1996) sugerem que até metade da massa inferida pode ser invisível. Por outro lado, é mais natural pensar que tudo isso é devido a anãs brancas (apenas as mais brilhantes podem ser contadas no momento) ou estrelas de massa inferior a  $0.1 M_{\odot}$ .

Mesmo com tantos estudos teóricos, o paradigma vigente está associado à inexistência de matéria escura em AG. Em oposição a tal visão, em estudo sobre NGC 2419, Ibata et al. (2013) sugerem um melhor ajuste com modelos que incluem matéria escura. Além disso, afirmam que a conexão entre os globulares e os remanescentes de galáxias anãs<sup>13</sup> está se tornando cada vez mais atraente, por isso é natural esperar que alguns deles possuam parte da matéria escura de sua galáxia progenitora. Sustentam ainda que é possível que este problema seja resolvido apenas com a obtenção de dados de uma amostra maior de AG distantes do halo; o que exigirá observar mais longe ao longo de M 31 e, para ser viável, exigirá uma geração de instrumentos mais robustos.

Até aqui, discutimos os principais aspectos concernentes a globulares compostos por populações simples. Na próxima Seção, generalizaremos tais implicações para AG compostos por populações múltiplas.

## 3.6 Populações Múltiplas

Nesta Seção, descreveremos a fenomenologia associada às populações múltiplas ao longo das diferentes sequências evolutivas dos AG, começando com a SP, mesmo sendo a primeira evidência, naturalmente, advinda das estrelas mais brilhantes e evoluídas do RGV. Sempre que possível, concentrar-nos-emos em  $\omega$  Centauri, uma vez que este corresponde a um rico laboratório de estudos concernentes a diversas populações em um único objeto.

### 3.6.1 Sequência Principal

Há muito tempo, a estreiteza das sequências evolutivas no DCM foi interpretada como provas da natureza de idades e metalicidades únicas dos AG. No entanto, variações na abundância de elementos leves foram encontradas em estrelas da SP, desde o início da década de 80. Hesser & Bell (1980) encontraram diferentes larguras da banda de CN em sete estrelas da SP de 47 Tuc, semelhantes às encontradas para gigantes; além disso, observaram que isso implicaria uma origem primordial, uma vez que não existe mecanismo capaz de transportar N à superfície em estrelas da SP, em desacordo com aquelas do RGV.

---

<sup>13</sup>Como veremos na Seção 3.7, tal conexão corresponde a uma das teorias de formação dos AG.

Resultados semelhantes foram apresentados, por exemplo, por Cannon et al. (1998), juntamente com uma belíssima discussão acerca das possíveis origens. Embora reconhecido que a mistura não era uma explicação viável porque estrelas de baixa massa da SP não possuem um envoltório convectivo capaz de transportar tal material para a atmosfera, previamente processado no núcleo, outras possibilidades foram consideradas e debatidas. Estas incluem: origem primordial causada por duas ou mais nuvens de gás, enriquecimento do protoaglomerado devido a uma segunda geração de estrelas e poluição da superfície causadas pela transferência de massa entre estrelas já formadas. Desde então, a quantidade de dados tem aumentado, e, geralmente, uma bimodalidade na largura da banda de CN e uma anticorrelação entre CN e CH foram encontradas (por exemplo, Cohen, 1999a,b; Harbeck et al., 2003; Cohen & Melendez, 2005). Mais recentemente, Kayser et al. (2008) e Pancino et al. (2010) mediram as bandas de CN e CH em oito e 12 AG, respectivamente, interpretando de forma explícita os seus resultados no cenário de vários episódios de formação estelar.

Apenas mais tarde que as medidas das outras variações existentes na abundância de outros elementos leves (Na, S, Al, Mg) foram feitas para estrelas da SP. Por exemplo, a abundância de Li e sua (possível) dispersão e (anti) correlação com O e Na podem ser indicadores consistentes não só de mistura, mas de fenômenos da natureza dos poluentes, uma vez que Li é produzido por estrelas do RAG, mas não por estrelas de alta massa que giram rapidamente. Lítio foi medido, em grandes amostras de estrelas de SP, apenas em alguns globulares próximos, a saber NGC 6397, que subsidiou Lind et al. (2009) a encontrarem uma anticorrelação entre Li e Na; 47 Tuc, no qual D’Orazi & Marino (2010) não encontraram evidência alguma de correlações entre Li e O ou entre Li e Na; NGC 6752, onde Shen et al. (2010) mediram uma correlação Li e O; e M4, cujo estudo de Mucciarelli et al. (2011) não forneceu correlação alguma entre Li e O.

As evidências fotométricas das populações múltiplas apareceram apenas no século XXI, mas teve um impacto imediato sobre a comunidade científica, pois elas são mais facilmente reconhecíveis. Além disso, o acúmulo quantitativo de evidências empíricas proporcionou uma mudança paradigmática, alusiva a esses objetos, necessária nos dias atuais. Os dados foram obtidos utilizando o HST, o que permitiu a redução das incertezas fotométricas e obtenção de DCM mais limpos, onde aspectos antes não visíveis podiam ser notados. Não surpreendentemente, a primeira identificação de múltiplas sequências principais foi em  $\omega$  Centauri; Bedin et al. (2004) foram capazes de demonstrar que este possui claramente duas SP — que se tornaram três após Villanova et al. (2007) —, as quais podem se diferenciar na abundância de He, tal como sugerido por Norris (2004). Vide Figura 3.6.1, onde reproduzimos o DCM de  $\omega$  Centauri.

### 3.6.2 Ramo das Gigantes

As estrelas do RSG contribuiriam, juntamente com as pouco evoluídas da SP, para a aceitação definitiva de uma origem primordial para anomalias dos elementos leves, uma vez que nenhuma

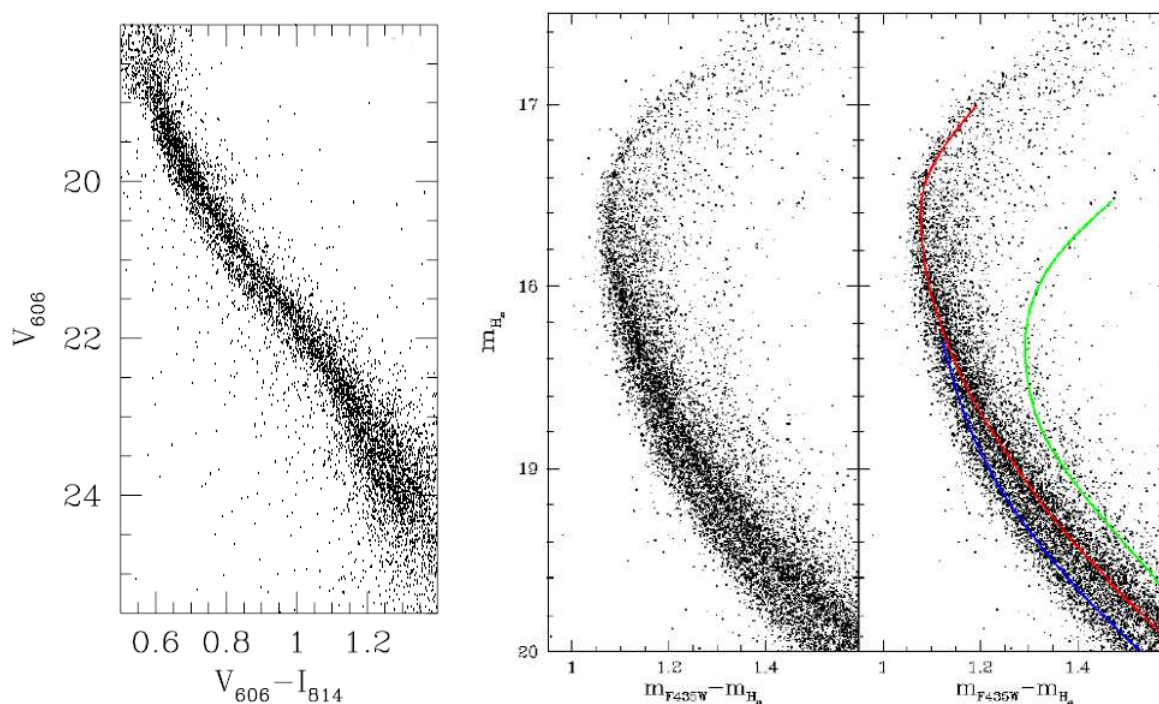


Figura 3.9: DCM de  $\omega$  Centauri. À esquerda, obtido dos dados da WFPC2 (*Wide Field and Planetary Camera 2*) e da ACS (Bedin et al., 2004). À direita, dados obtidos da ACS e extraída de Villanova et al. (2007). Vê-se claramente as três SP no DCM e os respectivos ajustes. Note que as sequências ajustadas em vermelho e verde possuem conexões com os respectivos RSG. Porém a sequência cujo ajuste é azul vai até o TO, não possuindo conexão alguma com um RSG.

mistura eficiente é possível antes da primeira dragagem (o ponto onde ocorre a máxima extensão da camada convectiva) e o *bump* do RGV<sup>14</sup>.

No caso de  $\omega$  Centauri, já era conhecido o espalhamento do RSG (por exemplo, Hilker & Richtler, 2000), que por sua vez podia implicar um espalhamento referente à idade. A primeira indicação de uma separação real foi mostrada por Ferraro et al. (2004), que encontraram um RSG mais fraco, ligado ao RGV de maior metalicidade. Esta separação foi confirmada e uma estrutura mais complicada foi detectada. Por exemplo, Villanova et al. (2007) identificaram pelo menos quatro RSG distintos e explicaram a existência desses por meio das diferenças de metalicidade e de idade — embora o maior espalhamento na idade, maior que 4 bilhões de anos, seja controvertida (Gratton et al., 2012) — ao mesmo tempo em que tentavam entender como eles se conectam às múltiplas SP e RGV. Análises detalhadas de abundâncias, tais como aquela feita por Pancino et al. (2011), porém utilizando amostras maiores de estrelas nos RSG em cada uma das subsequências, são necessárias a fim de resolver o problema.

<sup>14</sup>Gratton et al. (2004) fornece uma excelente revisão acerca das observações e argumentos referentes à mudança paradigmática discutida nesta Subsecção.

### 3.6.3 Ramo das Gigantes Vermelhas

Os RGV de muitos AG têm sido recentemente estudados usando espectroscopia de alta resolução a fim de descobrir variações nas abundâncias intrínsecas desses associadas a elementos leves (C, N, O, Na, Al, Mg, Si, F) cuja forma de (anti)correlacionar pode ser explicada pelos efeitos da queima de hidrogênio em temperatura elevada (Gratton et al., 2012).

Um equívoco (parcial) ocorre quando as populações múltiplas são associadas apenas a enormes AG. Sequências fotométricas múltiplas foram encontradas pela primeira vez em AG cujas massas são grandes ( $\omega$  Centauri, M 54, NGC 2808, NGC 6388, 47 Tuc) e só mais tarde em AG medianos (NGC 1851, NGC 6752, M 22 ou aqueles nas Nuvens de Magalhães). No entanto, há evidência espectroscópica que corrobora a ideia que todos os aglomerados globulares da Via Láctea pesquisados até agora — com a possível exceção de Terzan 7 e Pal 12, com apenas algumas estrelas analisadas, (por exemplo, Sbordone et al., 2005) — mostram uma anticorrelação entre Na e O. Tal anticorrelação observada em quase todos os aglomerados globulares já estudados por espectroscopia de alta resolução agora é, geralmente, explicada pela poluição da nuvem proto-estelar da segunda geração de estrelas devido à primeira geração de estrelas do RAG de massa intermédia. Portanto, todos eles têm populações múltiplas de estrelas.

Espalhamentos em abundâncias de [Fe/H] foram encontrados até agora apenas nos AG de maior massa, a saber  $\omega$  Centauri, M 54, M 22, Terzan 5, NGC 1851 e NGC 2419. Por exemplo, em  $\omega$  Cen, [Fe/H] varia mais que 1.5 dex (por exemplo, Villanova et al., 2007). O estudo de tais espalhamentos certamente fornecem implicações adicionais alusivas às teorias de formação.

Acerca de evidências fotométricas de populações múltiplas, além de  $\omega$  Cen, com seus espetaculares RGV nítidos em todos os DCM no visível (por exemplo, Pancino et al., 2000), em geral, apenas efeitos sutis são esperados no RGV, devido a erros ou avermelhamento diferencial.

## 3.7 Origem e Formação

Até agora, apresentamos uma breve revisão acerca do nosso conhecimento referente à existência de populações múltiplas em AG. Como vimos, o fenômeno deixou de ser considerado uma curiosidade exótica, presente apenas em alguns AG peculiares (como por exemplo,  $\omega$  Cen, NGC 2808, M 22), de ser uma característica atribuída somente aos grandes aglomerados (aqueles mencionados anteriormente, além de M 54 ou NGC 6388), para, finalmente, a ampla aceitação de sua provável universalidade (pelo menos para os AG). Além disso, as evidências para a presença destas diferentes populações depende da sua composição química, em particular as abundâncias dos elementos leves envolvidas em processos de captura de prótons (C, N, O, F, Na, Mg, Al, Si), bem como da multiplicidade de sequências no DCM.



Certamente, não podemos compreender plenamente as propriedades intrínsecas de tais objetos, sua formação, sua interação com a Galáxia, a menos que sejamos capazes de definir quantitativamente as propriedades das populações múltiplas que neles residem, usando uma variedade de informações provenientes da espectroscopia, da fotometria e da modelagem teórica. Progressos recentes na coleta de grandes amostras e na observação de alta qualidade, como os projeto SUMO e HSTPROMO, por exemplo, estão permitindo abordar com sucesso problemas de longa data, como o problema do segundo (terceiro) parâmetro ou a relação entre globulares e o halo galáctico. Porém, ainda hoje, muitas questões ainda permanecem abertas na compreensão de como os aglomerados globulares são formados. A seguir, descrevemos os principais cenários de formação em voga e finalizaremos o Capítulo com uma breve justificativa acerca da escolha em nosso estudo.

- **vários episódios de formação estelar** (por exemplo, Gratton et al., 2012)

O progresso nos últimos anos têm mostrado que, de fato, a formação dos AG é um fenômeno complexo. No cenário de vários episódios de formação estelar, incluem-se várias gerações de estrelas, separadas, esquematicamente, em uma primordial, chamada “primeira geração”, e uma segunda geração, embora a segunda geração, provavelmente, seja constituída de várias subpopulações distintas. As estrelas da segunda geração formam-se a partir de material contaminado por aquele ejetado de uma fração da população da primeira geração (por exemplo, Gratton et al., 2001; Gratton et al., 2004; Ramírez & Cohen, 2002; Carretta et al., 2010). Atualmente, a maioria das estrelas em AG pertencem à segunda geração, que é caracterizada por uma composição particular, raramente encontrada entre as estrelas do campo. O componente residual da primeira geração — estrelas de baixa massa com a composição semelhante à composição das estrelas do halo — ainda está presente em AG, mas só é um terço da população total atual (Gratton et al., 2012). Uma vez que a composição particular das estrelas da segunda geração requer que elas tenham-se formado do material ejetado de apenas uma fração das estrelas da primeira geração (chamadas “poluidores”), pode-se concluir que os AG foram formados dentro de episódios de formação estelar que envolvam grandes massas, e que a maioria da sua população original foi perdida. Isso renovou o interesse na relação existente entre AG e o halo, *viz.*, é possível que a maior parte do halo da Galáxia — e, por extensão, outros ambientes com alta frequência de globulares — tenha-se formado dentro desses episódios de formação estelar que envolvam uma massa grande.

Muitos aspectos desse cenário ainda não estão claros e são atualmente debatidos. Eles dizem respeito à escala de tempo do fenômeno e à natureza dos poluidores, à necessidade de “diluição” do material processado com o material não processado (Prantzos & Charbonnel, 2006),

à origem dos materiais diluídos, à construção de modelos hidrodinâmicos realistas, à conexão entre os diferentes aspectos observacionais do fenômeno (fotometria vs. espectroscopia), às evidências em diferentes fases evolutivas e, à conexão com anomalias no DCM, entre outros.

- **heterogeneidade original do material** (por exemplo, Kraft, 1979)

Em desacordo com resultados anteriores, as regiões de formação estelar e AG muito jovens são agora considerados quimicamente homogêneos, apesar da evidência de formação estelar prolongada; isso sugere que a matéria interestelar é efetivamente bem misturada e que o auto-enriquecimento não deveria ser relevante (por exemplo, Shen et al., 2005; Nieva & Simón-Díaz, 2011). No entanto, os AG são objetos cuja massa é deveras grande e, provavelmente, formados em grandes, embora compactas, regiões de formação estelar. Heterogeneidades químicas podem ser primordiais, causadas pela mistura inadequada da matéria interestelar a partir da qual as estrelas são formadas ou através de alguma, possivelmente limitada, capacidade de reter material ejetado das estrelas cuja evolução é mais rápida, uma vez que a formação de tais objetos deve ter demorado algum tempo, i. e., não foi instantânea. Vários autores (McKee & Ostriker, 2007, para uma revisão sobre formação estelar) sugerem que a formação estelar dentro de uma nuvem molecular gigante ocorre em escalas de tempo comparável a algumas vezes, de 1 a 3, o tempo de cruzamento (Definição 6.4) — grosseiramente,  $\sim 10M_6^{1/4}$  milhões de anos, onde  $M_6$  é a massa da nuvem em unidades de  $10^6 M_\odot$ . Tendo em mente que o AG final é uma pequena percentagem da nuvem molecular gigante primordial, uma escala de tempo de 30 milhões de anos para a formação da população primordial de um AG, tal como M 54 e  $\omega$  Cen (atualmente contendo massa da ordem de  $10^6 M_\odot$ ) parece totalmente razoável. AG menores em tamanho, por uma ordem de grandeza (isto é, AG típicos com  $M_V \sim -7.8$  mag), devem ter exigido um tempo mais curto, mas não desprezível ( $\sim 10$ -20 milhões de anos). Por outro lado, nuvens moleculares galácticas gigantes parecem ter um limite superior de massa de alguns  $10^6 M_\odot$ ; massas maiores são geralmente chamados associações moleculares gigantes, porque se fragmentam em pedaços menores. Não está claro se isso depende da metalicidade ou do ambiente. Esta é provavelmente a razão pela qual os aglomerados globulares não se formam mais na Via Láctea, dada a baixa eficiência com que as nuvens moleculares gigantes podem ser transformadas em aglomerados. Ademais, a fragmentação das maiores nuvens moleculares gigantes podem levar a geometrias mais complicadas; daí, eficiências menores na transformação nuvem-aglomerado.

- **evolução peculiar das estrelas** (por exemplo, Sweigart & Mengel, 1979)

Evolução peculiar de estrelas individuais pode ocorrer ou porque elas são membros de sistemas binários, ou porque algum parâmetro, como, por exemplo, a rotação interna, causa alterações significativas na composição química superficial, devido, entre outros, a uma alta taxa de perda de massa ou circulação meridional. Tal mecanismo tem sido considerado em conexão com a anticorrelação Na-O (Kraft, 1979, 1994), bem como com o problema do segundo parâmetro (Catelan, 2009). Binárias têm certamente um papel na explicação das estrelas *blue stragglers* e outros objetos peculiares, como pulsares de milissegundo, encontrados em AG, mas estes são apenas uma minoria dentre essas estrelas. O impacto da evolução peculiar sobre as propriedades globais dos AG nunca foi avaliado de forma definitiva, apesar de muitas tentativas (Gratton et al., 2012). É possível, e até provável, que a perda de massa total seja ligeiramente diferente de estrela para estrela em AG (Catelan, 2009, para uma discussão sobre o assunto); no entanto, o referido efeito é provavelmente pequeno e não pode explicar a maior parte da fenomenologia e irregularidades discutidas até aqui.

- **fusão de AG** (por exemplo, van den Bergh, 1996)

Embora este evento seja muito pouco provável de ocorrer no halo da Via Láctea, devido às grandes velocidades relativas entre os AG, pode acontecer em galáxias anãs esferoidais (dSph) tais como, por exemplo, *Sagittarius* (Sgr), onde o espalhamento de velocidades no interior da galáxia é comparável ao interno dos AG. Aglomerados globulares formados em uma dSph podem, então, ser herdados pela Via Láctea, quando a dSph for marealmente destruída, como é observado para Sgr. Nessas condições, a fricção dinâmica pode ser muito eficiente, levando os aglomerados de maior massa a espiralar em direção ao centro da dSph e fundirem-se (por exemplo, Bellazzini et al., 2008). Algo semelhante provavelmente ocorre para aglomerados binários, como os frequentemente observados nas Nuvens de Magalhães (Bhatia & Hatzidimitriou, 1988).

- **material interestelar capturado** (por exemplo, Charlie & Spergel, 2011)

Material interestelar originalmente relacionado ao AG pode ser acumulado em torno de um poço de potencial e fornecer material para novos episódios de formação estelar. Esse mecanismo provavelmente ocorre ao redor do buraco negro central em núcleos galácticos e poderia

explicar a origem dos aglomerados estelares nucleares observados em quase todas as galáxias *late-type*, incluindo a Via Láctea (Böker, 2010) onde parecem ter ocorrido repetidos episódios de formação estelar (Rossa et al., 2006; Walcher et al., 2006). Os poços de potencial desses objetos são tipicamente muito mais profundos do que para os AG, exceto, possivelmente, para os de maior massa. Acreção de material interestelar por AG tem sido recentemente modelada por vários autores<sup>15</sup> (por exemplo, Charlie & Spergel, 2011) e pode ser uma explicação atrante para os casos em que as velocidades relativas são pequenas, como os AG das Nuvens de Magalhães com seus vários TO.

Note que há vários mecanismos que podem, potencialmente, produzir as heterogeneidades químicas em AG, bem como as várias sequências observadas em seus DCM. A ideia acerca da fusão de AG é cada vez mais reconhecida como um aspecto importante na pesquisa deles (por exemplo, van den Bergh, 1996; Dieball et al., 2000, 2002; Minniti et al., 2004; Lane et al., 2010; Bekki & Yong, 2012; Peacock et al., 2013; Amaro-Seoane et al., 2013). No caso da Via Láctea, o cenário da fusão foi recentemente sugerido para NGC 1851, com base na análise espectroscópica detalhada de uma grande amostra de gigantes vermelhas (Carretta et al., 2010; Carretta et al., 2011). De fato, a existência de um pequeno, mas não negligenciável, espalhamento na metalicidade em tal AG também tinha sido previamente sugerido por Lee et al. (2009), quem primeiro sugeriu que a distribuição de metalicidade dele podia realmente ser bimodal. Como apontado por Catelan (1997), a presença de bimodalidade, ou até mesmo multimodalidade, nas distribuições de metalicidade é geralmente esperada, no caso do cenário de fusão de globulares inicialmente previsto por van den Bergh (1996).

Por outro lado, a evidência empírica sugere que as fusões de AG de diferentes metalicidades pode ter sido rara na Via Láctea e em sua vizinhança imediata (Catelan, 1997). No entanto, a situação pode ser mais favorável em outros ambientes, em particular, na galáxia *Antennae* (NGC 4038 e NGC 4039). Tais AG estão gravitacionalmente ligados e parecem possuir uma diferença considerável em idades; daí, possivelmente, também metalicidade. Esses objetos irão, eventualmente, fundir-se e, se sobreviverem tempo suficiente, acabarão sendo um único AG com distribuição bimodal, ou, possivelmente, distribuição multimodal (por exemplo, Kroupa, 1998; Peacock et al., 2013).

Em um sentido mais amplo, as fusões de AG podem desempenhar um papel importante na explicação dos padrões de abundância complexos que são observados em AG, que incluem não só o espalhamento em metalicidade de sistemas com uma massa grande, como  $\omega$  Centauri (NGC 5139) e M 54 (NGC 6715), mas também evidência de populações múltiplas, como indicado pelas abundâncias de elementos químicos, tais como O, Na, Mg, Al, e também os DCM observados, como já vimos. Além disso, as fusões têm sido propostas como uma possível explicação para observações de alguns

---

<sup>15</sup>Recomendamos o trabalho de D’Ercole et al. (2011) para uma noção dos limites associados à quantidade de material interestelar intocada que podem estar envolvidos na formação da segunda geração a fim de reproduzir o padrão de abundância observada.

AG, como o prolongado NGC 2419 (Brüns & Kroupa, 2011), os AG observados nos halos de outras galáxias (Brüns et al., 2009; Assmann et al., 2011); além da segregação de massa de aglomerados abertos galácticos (por exemplo, McMillan et al., 2007; Moeckel & Bonnell, 2009).

Diante de vários casos possíveis em que o cenário da formação de AG por meio da fusão entre AG anteriores, optamos por estudar as implicações dinâmicas associadas a tal mecanismo. Como veremos no Capítulo 4, modelaremos cada AG como uma esfera de Plummer e a galáxia como sendo uma galáxia de disco, com bojo e halo de matéria escura, um modelo razoável para a Galáxia. Nas Secções 6.1 e 6.2, faremos uma diligente revisão acerca dos principais aspectos dinâmicos envolvidos na colisão de dois sistemas estelares, tais como AG e galáxias. Tais Secções subsidiarão nosso estudo que será implementado e discutido ao longo das Secções restantes do Capítulo 6. Nas Secções subsequentes, abordaremos as propriedades dinâmicas associadas à evolução de modelos de AG.

## 3.8 Evolução Dinâmica

Até agora, abordamos os principais aspectos astrofísicos associados aos AG. Vimos como as estrelas são distribuídas ao longo do AG e quais são suas massas; ademais, discutimos a recente transição paradigmática associada às populações que os compõem. A partir de agora, trataremos dos principais aspectos relacionados à evolução dinâmica de um AG composto de população estelar simples. Isso é feito pois estudaremos o cenário de formação de AG, cuja população estelar é múltipla, via fusão de AG com populações simples. Alguns estudos abordam a dinâmica secular de AG em outros cenários de formação (por exemplo, Vesperini et al., 2013).

Além disso, como já salientamos no Capítulo 2, o PNC deve ter sua formulação alterada a fim de corresponder a um modelo mais realista. Dessa forma, já vimos que a evolução estelar deve ser incluída, uma vez que está presente nos sistemas estelares, em geral. Outras alterações devem ser o tamanho físico das estrelas que, como veremos, levam a colisões físicas. Por fim, na Secção 3.10, incluiremos mais uma complicação no tratamento no modelo, a saber, as influências externas, uma vez que tais sistemas não estão isolados e tampouco são independentes.

Logo, nesta Secção, a evolução dinâmica de um AG é considerada, incluindo uma descrição dos processos que ocorrem dentro do mesmo. Os efeitos de binárias primordiais, bem como formação de sistemas binários, serão tratados na Secção 3.9.

### 3.8.1 Processos nos Estágios Iniciais

Considere algumas condições iniciais onde todas as estrelas ocupam um local específico do espaço de fase, do qual a maior parte está vazia. À medida que o sistema evolui seguindo a equação de

Boltzmann não colisional (5.1), este local do espaço de fase é distorcido. Ele mistura-se com as partes do espaço de fase que eram inicialmente vazias. Assim, mesmo que uma pequena região do espaço de fase em torno de uma dada estrela conserve a sua densidade numérica de estrelas original, a região maior em torno dela irá experimentar uma redução nessa densidade, uma vez que a densidade numérica inicial é calculada ponderadamente em conjunto com regiões que não continham estrelas (Lynden-Bell, 1967).

A mistura de fase não altera a energia de uma estrela em particular, uma vez que a mesma órbita dentro do AG. No entanto, em um processo conhecido como relaxação violenta, a energia de determinadas estrelas é alterada, se o potencial, bem como a posição forem uma função do tempo (Lynden-Bell, 1967). Este será o caso, por exemplo, quando um AG está se formando a partir de vários pedaços de gás que estão caindo juntos e fundindo-se de uma forma confusa e complicada. A taxa de variação de energia é então dada por Binney & Tremaine (2008):

$$\frac{dE}{dt} = \left( \frac{d\phi}{dt} \right)_{\gamma} \quad (3.2)$$

onde o termo do lado direito é a taxa de variação do potencial em relação ao tempo, ao longo do caminho percorrido  $\gamma$ , por uma estrela em particular. Mais importante, o processo de relaxação violenta é independente da massa de uma estrela em particular, em outras palavras, a distribuição de velocidades é independente da massa estelar (Lynden-Bell, 1967). Isto é diferente para a equipartição de energia que decorre da relaxação de dois corpos.

Os efeitos da perda de massa dentro de um AG são agora considerados. Quando estrelas se formam em um AG a partir de uma nuvem de gás, o processo de formação estelar não é completamente eficiente e uma fração do gás não é convertida em estrelas, mas permanece como gás dentro do AG. Tal gás pode ser repellido do AG quando este passa através do disco galáctico. Alternativamente, o gás pode ser expulso do AG por estrelas de alta massa internas, seja através de ventos estelares ou explosões. Essas supernovas ocorrerão em uma escala de tempo de cerca de  $10^7$  anos, que é muito menor do que a escala de tempo de uma órbita do aglomerado sob o potencial da Galáxia. Então, a evolução das estrelas de alta massa é mais susceptível de conduzir à ejeção do gás do AG. Se a eficiência de formação estelar for bastante baixa quando um determinado AG é formado, a rápida ejeção do gás restante, expulso, por exemplo, por explosões de supernovas, poderia desprender o AG ou, pelo menos, levar à ejeção de uma fração significativa de estrelas, uma vez que grande parte da massa de ligação gravitacional é perdida (Baumgardt & Kroupa, 2007; Kroupa et al., 2001).

A perda de massa das próprias estrelas, devido a ventos estelares, também afeta o AG, conforme ilustra a Figura 3.10, onde um modelo de Plummer (Secção 4.2) evolui por meio do código *NBODY6*. O modelo possui massa  $\sim 10^4 M_{\odot}$ .

Como já vimos, as estrelas quando evoluem, saem da SP e expandem-se para se tornarem gigantes vermelhas. As gigantes vermelhas ejetam seus envoltórios à medida que evoluem ou, violentamente, explodem como supernovas, no caso das estrelas de alta massa. A ejeção lenta de massa na forma

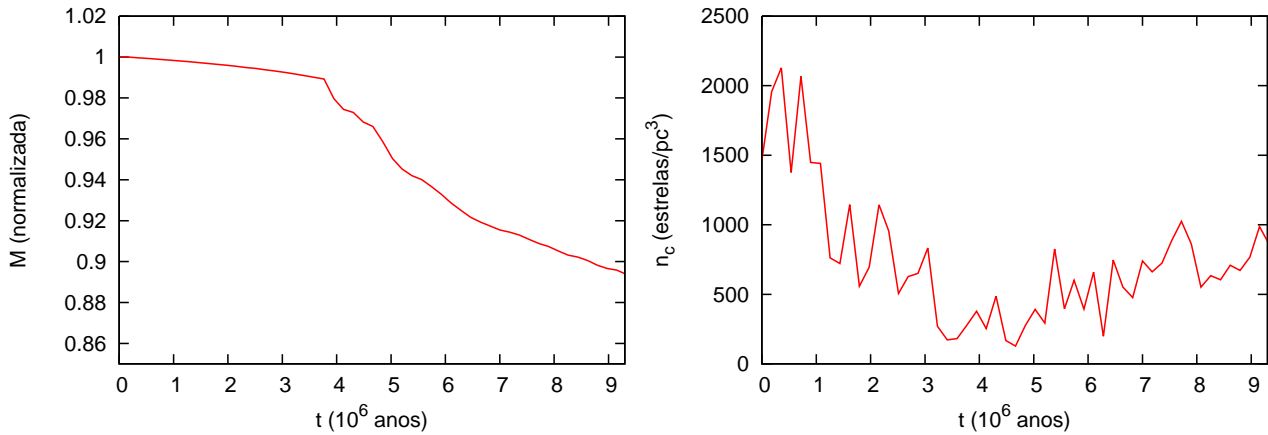


Figura 3.10: *Evolução inicial de um modelo de Plummer.* À esquerda, a perda de massa devido à evolução estelar é evidenciada. À direita, a densidade numérica do caroço diminui à medida que as estrelas perdem massa, evidenciando, por sua vez, uma expansão inicial do modelo. Note que, no instante do recorte temporal, o modelo possuía o número de estrelas original, ou seja, toda a perda de massa ocorre devido à evolução estelar.

de ventos estelares é diferente da rápida ejeção na forma de explosão de uma supernova. A perda de massa lenta fará com que o AG expanda. Até mesmo uma fração relativamente pequena da massa que está sendo perdida pode causar uma expansão significativa do AG (Binney & Tremaine, 2008). Modelagem via equações de Fokker-Planck (5.2) e (5.3) de modelos de AG mostram que a perda de massa devido à evolução estelar nos primeiros  $5 \times 10^9$  anos pode levar ao rompimento de alguns AG (fracamente ligados) quando se considera uma taxa de formação de estrelas de alta massa grande (Chernoff & Weinberg, 1990). Segregação de massa inicial também desempenha um papel importante na expansão do AG devido às perdas de massa via evolução estelar, conforme mostram Vesperini et al. (2009).

### 3.8.2 Segregação de Massa

Antes de abordarmos o processo de segregação de massa que ocorre em um globular, vamos, primeiramente, definir o que temos chamado de relaxação de dois corpos que, como veremos, governa a evolução secular dos AG. Para isso, considere a Figura 3.11.

Considere duas estrelas A e B de massa  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, que se encontram com um parâmetro de impacto  $p$  e uma velocidade relativa  $v_\infty$  no infinito. A deflexão angular da órbita é dada por  $\chi$ . Veremos que é mais fácil considerar o ângulo  $\psi$  definido por  $\chi := \pi - 2\psi$ . Spitzer (1987) mostrou que

$$\tan \psi = \frac{p v_\infty^2}{G(m_1 + m_2)} := \frac{p}{p_0} \quad (3.3)$$

onde  $p_0$  é o parâmetro de impacto tal que  $\chi = \pi/2$ . A variação na velocidade da estrela A é dada por

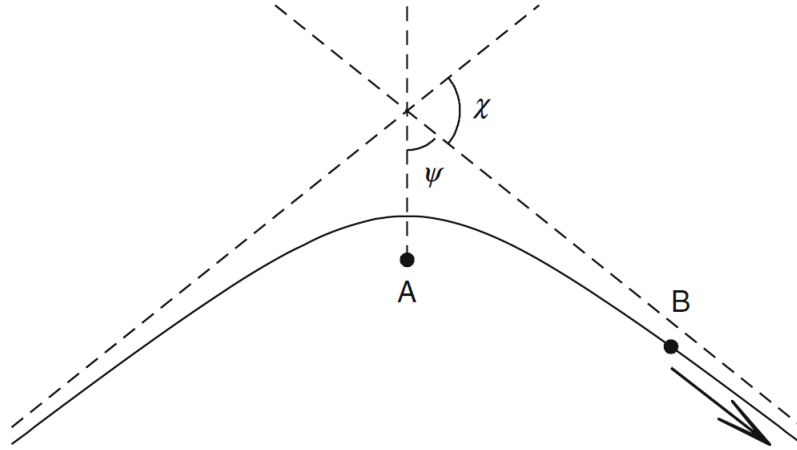


Figura 3.11: Passagem associada a um encontro próximo de duas estrelas A e B, considerado a partir do referencial sideral de A (Davies, 2013).

$$\begin{aligned} \Delta v &= 2v_\infty \sin(\chi/2) \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 2v_\infty \sin(\pi/2 - \psi) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \\ \implies \Delta v &= 2v_\infty \cos(\psi) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.4) temos que

$$(\Delta v)^2 = \left[ \frac{4m_1^2 v_\infty^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \left[ \frac{1}{1 + (p/p_o)^2} \right] \quad (3.5)$$

A fim de obtermos  $\langle (\Delta v)^2 \rangle$ , precisamos integrar a equação (3.5) em intervalo de parâmetros de impacto de colisões frontais até um parâmetro de impacto máximo  $p_{\max}$ . Daí, temos que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v)^2 \rangle &= \int_0^{p_{\max}} (\Delta v)^2 2\pi p n v_\infty dp \\ \implies \langle (\Delta v)^2 \rangle &= \frac{4\pi G^2 n m^2}{v_\infty} \ln[1 + (p_{\max}/p_o)^2] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Encontros próximos (aqueles cujo parâmetro de impacto é tal que  $p < p_o$ ) produzem grandes deflexões, enquanto que encontros distantes ( $p > p_o$ ) provocam deflexões pequenas. Ademais, este é mais frequente que aquele, e o efeito destes combinados é maior do que os raros encontros próximos (Davies, 2013). Isso significa que a escolha de  $p_{\max}$  é deveras importante. Para AG típicos,  $m \simeq 0.7 M_\odot$  e  $v_\infty \simeq 8$  km/s, o que implica  $p_o \simeq 9 \times 10^{-5}$  pc. Se  $p_{\max}$  for igual ao raio do caroço e este igual a 0.3 pc, temos que  $\ln(p_{\max}/p_o) = 8$ . Daí, definindo  $\Lambda := \ln(p_{\max}/p_o)$ , podemos fazer a seguinte aproximação

$$\ln[1 + (p_{\max}/p_o)^2] \simeq 2 \ln \Lambda \quad (3.7)$$



onde  $\ln \Lambda$  é conhecido como logaritmo Coulombiano. A partir dos efeitos do espalhamento devido aos encontros próximos e distantes de dois corpos, podemos definir a relaxação de dois corpos e o tempo de relaxação de dois corpos da seguinte forma.

**Definição 3.6.** *O processo difusivo associado ao encontro entre duas estrelas é chamado relaxação de dois corpos, uma vez que surge a partir do efeito cumulativo de uma miríade de encontros de dois corpos.*

**Definição 3.7.** *O tempo de relaxação de dois corpos é o tempo necessário para que a relaxação de dois corpos seja significativa (viz., comparável) em relação à velocidade das estrelas.*

O tempo de relaxação de dois corpos é dado por (Binney & Tremaine, 2008)

$$t_r = \frac{1.8 \times 10^{10} \text{ anos}}{\ln \Lambda} \left( \frac{\sigma}{10 \text{ km/s}} \right)^3 \left( \frac{M_\odot}{m} \right) \left( \frac{10^3 M_\odot/\text{pc}^3}{\rho} \right) \quad (3.8)$$

É importante notar que, indiretamente, o tempo de relaxação de dois corpos é função da posição dentro do AG, uma vez que tanto a densidade  $\rho$  quanto a dispersão de velocidade  $\sigma$  são funções do raio ao longo do AG. Além disso, o mais importante referente à relaxação de dois corpos é que esta direciona a evolução dinâmica de um AG. Por exemplo, se  $t_{rh}$  é o tempo de relaxação de meia massa, então, em uma escala de tempo de  $t \sim 10 - 20 t_{rh}$  o caroço do AG se contrai, atingindo altas densidades, ocorrendo o processo conhecido como **colapso gravotérmico do caroço**. Como pode ser visto pela equação (3.8), o tempo de relaxação do caroço diminui à medida que a densidade dele aumenta. Isso implica que aglomerados que possuem tempos de relaxação do caroço menor são aqueles mais centralmente concentrados. Veremos mais detalhadamente como ocorre o processo de contração do caroço na Subsecção 3.8.3; porém, antes disso, discorreremos acerca da segregação de massa que ocorre devido à relaxação de dois corpos, a fim de subsidiarmos melhor a descrição do colapso gravotérmico do caroço.

Energia será trocada entre as estrelas através da relaxação de dois corpos. Os encontros envolvidos no processo deixarão as estrelas, que se situam próximas, com energias cinéticas semelhantes. Dessa forma, como a tendência é, durante o encontro de duas estrelas,  $m_1 \langle v_1^2 \rangle = m_2 \langle v_2^2 \rangle$ , estrelas com mais massa movem-se mais lentamente, em média. Logo, as estrelas de maior massa, tendem a descer no poço de potencial, enquanto as estrelas de menor massa tendem a sair do mesmo e podem até escapar. Em outras palavras, o mecanismo principal é a tendência à equipartição de energia cinética, o que leva a uma segregação de massa de energia e que, por sua vez, leva a uma segregação de massa espacial, conforme ilustra a Figura 3.12. Nela, a massa estelar média, para dois raios lagrangianos (i.e., cascas que contém uma proporção fixa da massa total), é exibida como função do tempo de Hénon (Secção 5.6). É visível que, inicialmente, todas as massas internas às duas cascas têm a mesma distribuição espacial, e a massa média é a mesma (dentro de flutuações estatísticas) nas duas cascas. Muito rapidamente, no entanto, a massa média se torna muito maior dentro da parte central do modelo e

menor nas partes mais externas. Por isso, as estrelas com mais massa tenderão a adentrar em direção ao caroço, enquanto as estrelas mais leves, provavelmente, deverão ser encontradas nas regiões mais externas ou escapar.

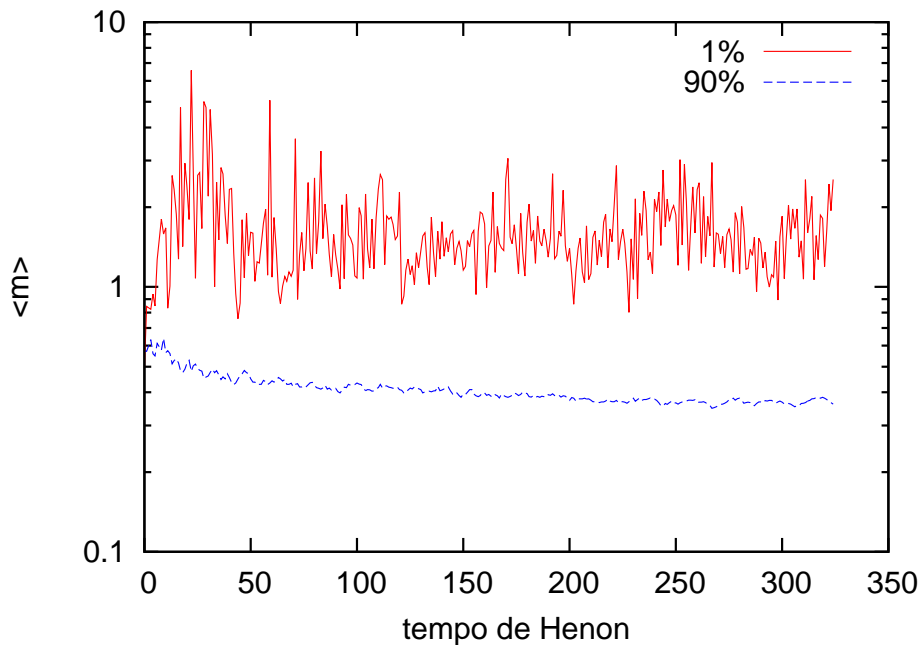


Figura 3.12: Massa estelar média, para dois raios lagrangianos (i.e., cascas que contém uma proporção fixa da massa total) como função do tempo. Note que, inicialmente, todas as massas internas às duas cascas têm a mesma distribuição espacial, e a massa média é a mesma (dentro de flutuações estatísticas) nas duas cascas. Muito rapidamente, no entanto, a massa média se torna muito maior dentro da parte central do modelo e menor nas partes mais externas. Após esta fase de segregação de massa rápida, no entanto, a evolução subsequente é muito lenta.

Algo interessante ocorre se um conjunto de estrelas de alta massa é muito grande; nesse caso, elas formam um subaglomerado. Este processo é conhecido como **instabilidade da equipartição de energia** (Spitzer, 1969). Um exemplo específico onde ocorre essa instabilidade é o caso de um AG que mantém uma significativa população de buracos negros de massa estelar (por exemplo, Mackey et al., 2008), uma vez que tais objetos possuem massa maior do que as anãs brancas, estrelas de nêutrons, ou quaisquer estrelas da SP encontrados em AG velhos, atualmente.

Nas últimas décadas, o número de estudos observacionais referente à segregação de massa no AG tem aumentado, devido aos dados do HST. Como já dissemos, as estrelas nas regiões mais densas podem ser resolvidas; daí, em estudos fotométricas, os efeitos da segregação de massa podem ser medidos observando, por exemplo, um excesso de estrelas TO e uma carência de estrelas de baixa massa nos caroços. Desta forma, a evidência observacional da segregação de massa tem sido vista em vários globulares, incluindo NGC 6752 (Shara et al., 1995), 47 Tucanae (Paresce et al., 1995) e NGC 6397 (King et al., 1996).

### 3.8.3 Evolução do Caroço

A fim de entender a evolução do caroço, precisamos entender antes a estranha característica termodinâmica dos AG, enquanto sistemas autogravitantes, que será enunciada e demonstrada a seguir.

**Proposição 3.1.** *Dado um sistema estelar autogravitante, contendo  $N$  partículas e possuindo uma distribuição isotrópica de velocidade, afirmamos que sua capacidade térmica é negativa.*

#### Demonstração

De fato, supondo que sejam válidas as hipóteses do Teorema do Virial (Eq. 2.17), temos que  $E = -K$ , pela equação (2.17). Agora, da hipótese, segue que a temperatura  $T$  de tal sistema pode ser definida pela seguinte equação

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T \quad (3.9)$$

onde  $m$  é massa de uma estrela e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Logo, a energia cinética total do sistema é

$$K = \frac{3}{2}Nk_B \langle T \rangle \quad (3.10)$$

onde  $\langle T \rangle$  é a temperatura média ponderada pela massa.

Daí, segue que

$$E = -\frac{3}{2}Nk_B \langle T \rangle \quad (3.11)$$

Agora, como a capacidade térmica é dada pela variação de  $E$  com relação a  $T$ , temos que

$$\frac{dE}{d\langle T \rangle} = -\frac{3}{2}Nk_B \quad (3.12)$$

como queríamos provar.

□

Pensemos agora nas implicações da Proposição 3.1 concernentes à evolução do AG. De forma simples, consideremos que ele seja composto por dois componentes: um caroço central circundado por um halo. Se o caroço se tornar mais quente do que o halo, calor (*viz.*, energia) fluirá do caroço para o halo. Na prática, esse fluxo de calor ocorrerá via relaxação de dois corpos. Já que o caroço possui uma capacidade térmica negativa, à medida que se contrai devido à perda de energia, sua temperatura aumenta. Tal aumento na temperatura conduzirá a um aumento na taxa de perda de energia. Assim, o processo continua aceleradamente, com a contração do caroço até atingir densidades muito elevadas. Esta instabilidade é conhecida como **catástrofe gravotérmica**. Na prática, o caroço e o halo não estão

separados. Porém, análises detalhadas mostram que se trata de uma boa aproximação para sistemas reais (Spitzer, 1969).

Se modelarmos a evolução de um AG isolado, tipicamente, encontraríamos que seu halo expande, enquanto seu caroço contrai (por processos de segregação de massa e instabilidade gravotérmica), atingindo densidades extremamente altas em uma escala de tempo em torno de  $10 - 20 t_{rh}$ . Este processo é conhecido como o **colapso do caroço**. Relacionando a densidade central  $\rho_o$  com o raio do caroço  $r_c$ , como função do tempo, constata-se que  $\rho_o(t) \propto r_o^{-\alpha}(t)$ . Cohn (1980) encontrou que  $\alpha = 2.23$  usando um código de Fokker-Planck, enquanto Lynden-Bell & Eggleton (1980a) encontrou  $\alpha = 2.21$  usando um código de gás. Já para um espectro de massa, o instante do colapso do caroço é reduzido (Chernoff & Weinberg, 1990).

O colapso do caroço pode ser contido desde que exista uma fonte de energia a ser injetada no seu interior, para compensar a perda de energia para o halo. Acredita-se que os espalhamentos que envolvam binárias formem tal fonte de energia. Quando um sistema binário compacto é envolvido em uma passagem de uma estrela isolada, as binárias tornam-se mais firmes (i.e., tornam-se mais ligadas), enquanto a estrela isolada recebe um chute (impulso) que aumenta a sua energia cinética (já que a energia total é conservada). Este processo fornece uma entrada de energia para o caroço, que pode cessar o colapso. Se o AG não conter binárias primordiais, então uma população dessas será produzida próximo ao instante do colapso por interações de três corpos, quando três estrelas isoladas interagem, deixando duas em um sistema binário e a terceira estrela transportando o excesso de energia. Neste caso, a energia também é injetada no caroço, quando as binárias são formadas. Além de binárias formadas por encontros de três corpos, o AG pode conter binárias primordiais, ou binárias formadas através de interações mareais. Em ambos os casos, estas populações de binárias também injetam energia no interior e, assim, cessam o colapso do caroço, ou mesmo, em alguns casos, previnem seu começo (Davies, 2013). Isso será discutido em mais detalhe na Secção 3.9.

A evolução de um AG após o colapso do caroço é agora considerada. Binárias no caroço dão chutes nas estrelas individuais via espalhamento estrela-binárias. Estas estrelas, em seguida, dispersam esta energia extra ao longo do AG via relaxação de dois corpos. O AG expande semelhantemente à situação em que o comprimento de escala é  $R \propto \tilde{\tau}^{2/3}$ , onde  $\tilde{\tau}$  é o tempo desde o colapso do caroço (Goodman, 1984). À medida que o AG expande, sua densidade central diminui e a taxa de injeção de energia nos sistemas binários do caroço também diminui. Acontece que o caroço regula a si mesmo de tal forma que a expansão é mantida.

Tal expansão, impulsionada pelo aquecimento devido às binárias do caroço, é instável para os AG que contêm um número suficiente de estrelas. Neste caso, se o núcleo se expande e arrefece, o material imediatamente após o caroço é mais quente do que o ele. Calor agora flui a partir destas regiões circundantes para o caroço, conduzindo à expansão e ao arrefecimento. No final, o caroço entra em contato com estrelas do halo que têm uma temperatura mais baixa do que as estrelas dele. O caroço, neste instante, pode passar a transferir energia para fora novamente. Até agora, o caroço

expandiu consideravelmente e deve passar por outro ciclo de colapso gravotérmico, a fim de atingir densidades mais altas e, assim, gerar a energia requerida pelos ciclos do globular. Esses são conhecidos como **oscilações gravotérmicas**. Elas têm sido vistas em simulações de Fokker-Planck (Gao et al., 1991), simulações com integradores diretos  $N$  corpos (Makino, 1996) e simulações de Monte Carlo (Heggie & Giersz, 2008). A Figura 3.13 exibe o raio do caroço como uma função do tempo para uma simulação que utiliza o código *NBODY6*. Vale ressaltar que a primeira constatação das oscilações gravotérmicas em integradores diretos foi obtida por Makino (1996) utilizando o código *NBODY4* adaptado para a tecnologia GRAPE. Antes disso, devido ao baixo número de estrelas implementável nas simulações, era impossível detectá-las.

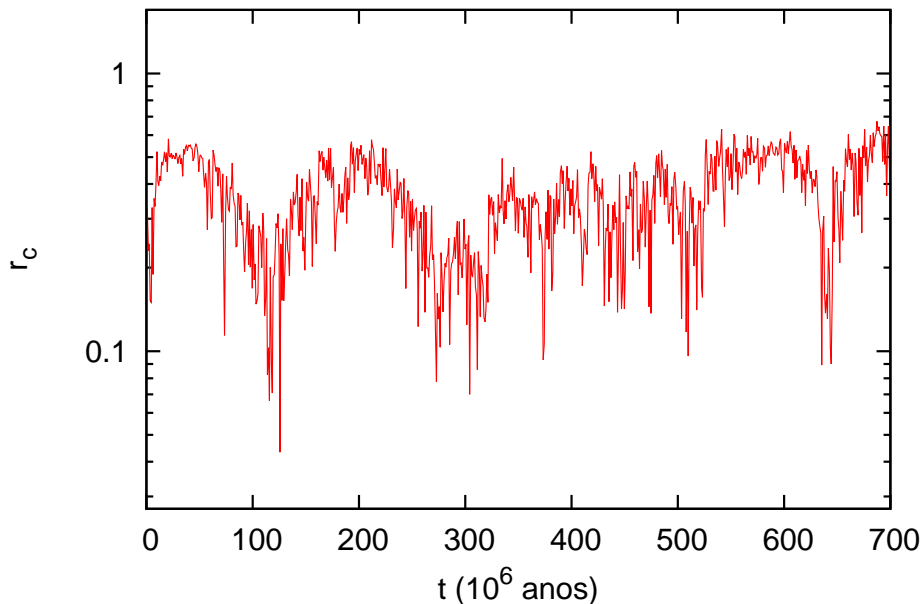


Figura 3.13: Evolução do raio do caroço para um modelo de Plummer de massa  $\sim 10 M_{\odot}$ . Note que o raio do caroço inicialmente se expande, devido à perda de massa via evolução estelar. Após se contrair até um valor mínimo e logo em seguida oscila. O primeiro mínimo corresponde ao colapso gravotérmico, e os outros mínimos representam as oscilações gravotérmicas.

Finalmente, na próxima Secção, complementaremos esta com algumas informações referentes às colisões e aos sistemas binários.

### 3.9 Complicações e Efeitos Adicionais

Até agora, vimos os principais aspectos astrofísicos e dinâmicos associados a um AG obtidos via observação ou simulações dinâmicas. Nesta Secção, discutiremos algumas complicações que devemos incluir nas simulações a fim de sermos ainda mais realistas acerca dos processos evolutivos

internos descritos na Secção 3.8. A frequência e o papel das colisões físicas entre estrelas é discutida. A produção de binárias via interações gravitacionais entre as estrelas é considerada. Captura mareal e binárias primordiais fornecem uma importante fonte de calor para os AG via espalhamento estrela-binárias. Interações dinâmicas envolvendo binárias também podem ser um importante canal de formação de objetos exóticos, como binárias de nêutrons e buracos negros.

Encontros próximo entre duas estrelas, onde as duas estrelas passam perto uma da outra dentro de alguns raios estelares, são extremamente raros em ambientes de baixa densidade como a vizinhança Solar. No entanto, nos caroços de AG e nos núcleos galácticos, as densidades numéricas são suficientemente elevadas ( $\sim 10^5$  estrelas/pc<sup>3</sup> em alguns AG) para que a escala de tempo associada a tais encontros sejam comparáveis a, ou até menor do que, a idade do Universo (Hills & Day, 1976). Em outras palavras, uma grande fração das estrelas destes sistemas tendem a ser vítimas de pelo menos um encontro próximo ou colisão física durante suas vidas.

Segundo Davies (2013), a secção de choque para duas estrelas, de massa  $m_1$  e  $m_2$ , com uma velocidade relativa no infinito dada por  $v_\infty$ , para passar dentro de uma distância  $r_{\min}$  é dada por

$$\sigma = \pi r_{\min}^2 \left( 1 + \frac{v^2}{v_\infty^2} \right) \quad (3.13)$$

onde  $v$  é a velocidade relativa das duas estrelas no instante de maior aproximação em um encontro parabólico (i. e.,  $v^2 = 2G(m_1 + m_2)/r_{\min}$ ). No regime em que  $v \ll v_\infty$  (como pode ser o caso em um núcleo galáctico com dispersão de velocidade extremamente alta), temos  $\sigma \propto r_{\min}^2$ . No entanto, se  $v \gg v_\infty$ , no caso de sistemas com dispersões de velocidade baixa, tais como AG,  $\sigma \propto r_{\min}$ .

Pode-se estimar a escala de tempo para uma determinada estrela se submeter a um encontro com outra estrela, para AG com dispersão de velocidade baixa, por

$$\begin{aligned} \tau_{\text{col}} &= 1/(n\sigma v) \\ \Rightarrow \tau_{\text{col}} &= 7 \times 10^{10} \text{anos} \left( \frac{10^5 \text{pc}^{-3}}{n} \right) \left( \frac{v_\infty}{10 \text{km/s}} \right) \left( \frac{R_\odot}{r_{\min}} \right) \left( \frac{M_\odot}{m} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $n$  é a densidade numérica de estrelas isoladas de massa  $m$ . Para um encontro entre duas estrelas isoladas ser hidrodinamicamente interessante, normalmente, exige-se que  $r_{\min} \sim 3 R_*$ , para  $v_\infty = 10$  km/s, onde  $R_*$  é o raio da estrela (McMillan et al., 1987). Portanto, para AG típicos, onde  $n \sim 10^5$  estrelas/pc<sup>3</sup>, até 30% das estrelas nos caroços desses estarão sujeitas a uma colisão física ou encontro próximo em algum momento durante a vida do aglomerado globular.

Colisões e encontros próximos são importantes por vários motivos. Eles podem produzir várias estrelas exóticas que têm sido observadas em AG, como *blue stragglers*, como já vimos anteriormente, e pulsares de milissegundo (por exemplo, Bailyn, 1995). Colisões estelares também desempenham um papel na evolução dinâmica dos AG uma vez que a perda de massa devido à evolução estelar será reforçada (devido à perda de massa em si durante as colisões e também devido ao tempo de vida mais

curto das estrelas de maior massa produzidas através da fusão de duas de menor massa).

Como vimos, as estrelas *blue stragglers* parecem ser estrelas da SP cuja massa é maior que a atual do TO. Estudos indicam que todos os AG possuem tais estrelas (por exemplo, Piotto et al., 2004). Vimos que uma explicação natural para a formação delas é a fusão de estrelas da SP de menor massa em uma colisão. Simulações hidrodinâmicas de tais colisões e modelagem da evolução subsequente sugerem que este é um canal de formação viável (por exemplo, Benz & Hills, 1987; Sills et al., 1997). No entanto, o número de *blue stragglers* observado dentro de AG parece não corresponder simplesmente com a taxa de colisão esperada, indicando que este não é o único canal de formação. Alternativamente, *blue stragglers* podem ter sido formadas por meio de transferência de massa dentro de sistemas binários onde a massa de uma que evolui aumenta, por transferência, a massa da outra. Uma mistura destes dois canais parece ser capaz de explicar a quantidade dessas observada (Davies et al., 2004). Ambos os canais têm ocorrido em modelos de M 67 simulados com o código *NBODY4* adaptado ao dispositivo GRAPE-6 (Hurley et al., 2001, 2005)<sup>16</sup>.

Colisões entre gigantes vermelhas e objetos compactos (buracos negros, anãs brancas ou estrelas de nêutrons) podem ser uma maneira de produzir binárias compactas e interagentes. Uma colisão física deixará a estrela compacta orbitando o núcleo da gigante vermelha, ambos inseridos em um envoltório comum formado a partir do envoltório da gigante vermelha. O envoltório será ejetado à medida que o sistema comprime. Dependendo da massa do envoltório, ou o núcleo e o objeto compacto espiralam e fundem-se, ou eles ejetam todo o envoltório, deixando de ser um sistema binário comprimido (Davies et al., 1991; Rasio & Shapiro, 1991).

Foi visto até agora como as colisões estelares são relativamente frequentes nos densos caroços de AG. Encontros próximos também ocorrem; durante tal encontro, oscilações não radiais serão excitadas dentro de pelo menos uma das estrelas via transferência de energia a partir da órbita. Dado que a dispersão de velocidade de AG é muito modesta, cerca de 10 km/s, encontros próximos podem resultar na captura mareal para formar um sistema binário.

Ao considerar o achatamento induzido dentro de uma estrela por efeito de maré, Fabian et al. (1975) estimaram que a captura de um objeto compacto ocorreria quando passasse dentro de um raio de, aproximadamente, três raios estelares, próximo de uma estrela da SP ou de uma gigante vermelha, para  $v_\infty \sim 10$  km/s que é um valor típico para AG. Cálculos mais detalhados obtêm secções de choque semelhantes para captura via efeito de maré (Lee & Ostriker, 1986; Press & Teukolsky, 1977). Inicialmente, binárias produzidas por captura mareal possuirão excentricidades bastante altas. A circularização produzirá sistemas com um semieixo maior aproximadamente duas vezes a separação inicial. Se as estrelas puderem sobreviver às fases de captura e circularização sem fusão, em seguida, o sistema binário interagente será produzido. Nesse caso, massa fluirá da estrela da SP ou da gigante vermelha para o objeto compacto, por exemplo, ocasionando a formação de uma binária de raios X

---

<sup>16</sup>O aglomerado M 67 tem sido identificado pela colaboração MODEST como um AG ideal em modelos de evolução dinâmica a fim de comparar técnicas numéricas. Ademais, é utilizado como calibrador de modelos referentes a seus dados observacionais (Sills et al., 2003).

de baixa massa (no caso em que o objeto compacto é uma estrela de nêutrons ou um buraco negro). O número relativamente elevado dessas observados em AG pode, por conseguinte, ter sido produzido por capturas via efeito de maré (Verbunt & Hut, 1987). Na verdade, o número de objetos de raios X observados em um determinado AG corrobora a taxa de encontro dentro deles (Pooley et al., 2003), conforme exhibe a Figura 3.14.

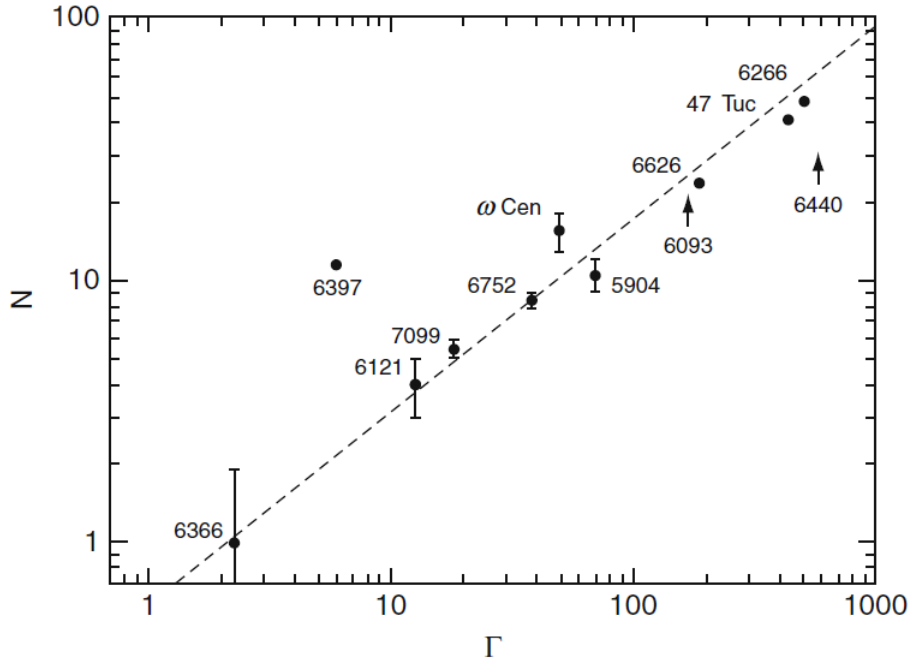


Figura 3.14: Número de fontes de raios X de AG com  $L \sim 4 \times 10^{30}$  ergs/s como função da taxa de encontros normalizada  $\Gamma$  do AG correspondente (Pooley et al., 2003).

No entanto, não está claro se um sistema binário formado por captura mareal pode evitar a fusão, uma vez que a energia injetada no envoltório estelar é grande. É possível que, em vez de formar um sistema binário cerrado, a estrela não compacta irá simplesmente expandir e envolver o objeto compacto formando um sistema de envoltório comum (McMillan et al., 1987). Um mecanismo de formação alternativo é a troca de binárias envolvendo objetos compactos isolados e binárias primordiais contendo duas estrelas da SP, onde um encontro resulta na ejeção de uma das estrelas da SP, deixando a outra estrela da SP em um sistema binário relativamente cerrado com a estrela compacta.

Pode-se estimar a escala de tempo para um encontro entre um sistema binário e uma terceira estrela isolada usando a equação (3.14) e adotando  $r_{\min} \simeq a$ , onde  $a$  é o semieixo maior do sistema binário. A escala de tempo para um encontro desse tipo, portanto, será relativamente curto pois o semieixo maior pode exceder consideravelmente o tamanho das estrelas que ele contém. Por exemplo, um sistema binário com  $d \sim 1$  UA, terá uma escala de tempo de  $\tau_{\text{col}} \ll 10^{10}$  anos no caroço de um AG denso. Logo, encontros próximos entre estrelas isoladas e binárias podem ser importantes em AG, mesmo quando a fração de binárias é pequena.



Encontros próximos entre estrelas isoladas e binárias extremamente afastadas levam à ruptura do sistema binário se a energia cinética da estrela incidente exceder a energia de ligação do par. Tais sistemas são muitas vezes referidos como sendo *soft* (frágeis). Por outro lado, os sistemas *hard* (firmes) serão resilientes. Com efeito, eles tendem a ficar ainda mais firmes via encontros com outras estrelas (Heggie, 1975; Hills, 1975). Para propriedades típicas dos AG, o limite *hard/soft* está entre 3 e 10 UA. Entretanto, devido à firmeza progressiva dos sistemas binários através de encontros com outras estrelas, o sistema mais afastado em caroços de AG, atualmente, têm semieixos de apenas  $\sim 1$  UA.

Encontros entre estrelas isoladas e binárias firmes possuem três resultados concernentes (por exemplo, Hut & Bahcall, 1983; Sigurdsson & Phinney, 1995). Uma passagem pode ocorrer quando a estrela incidente deixa o sistema original intacto. No entanto, tais encontros firmam (ou seja, contraem) ainda mais o sistema binário e alteram sua excentricidade. Alternativamente, uma troca pode ocorrer, onde a estrela incidente substitui um dos componentes originais do sistema binário. Por fim, durante o encontro, duas das estrelas podem passar tão próximas uma da outra que elas se fundem ou formam um sistema binário muito cerrado. Este terceiro mecanismo é um canal importante para a produção de diversas variedades de estrelas exóticas.

Como sistemas binários firmes são “enrijecidos” por meio de encontros estelares, eles aumentam as energias cinéticas das estrelas envolvidas. Tais energias serão redistribuídas para outras estrelas via relaxação de dois corpos. Daí, o AG como um todo será aquecido. A energia de ligação total contida em estrelas binárias pode exceder a energia de ligação do AG. Portanto, o enrijecimento de sistemas binários representa uma importante fonte de energia para os AG e pode compensar o momento do colapso do caroço, enquanto as binárias presentes no AG são destroçadas (Gao et al., 1991). Isso é ilustrado Figura 3.15, onde o modelo é uma esfera de Plummer e o código é baseado nas equações de Fokker-Planck (5.2) e (5.3). Nela, é possível observar a evolução do raio do caroço  $r_c$  e a do raio de meia massa  $r_h$  como uma função do tempo em unidades do tempo de relaxação de meia massa inicial do modelo. Note que a razão entre o raio do caroço e o raio de meia massa,  $r_c/r_h$ , é mantida relativamente constante entre  $\sim 10$  e  $\sim 50$  vezes o tempo de relaxação de meia massa inicial  $t_{rh}(0)$ . Durante tal intervalo, a população de binárias primordiais é consumida, i. e., destruída.

Resultados semelhantes foram encontrados em códigos diretos de  $N$  corpos (por exemplo, Heggie et al., 2006; Hurley, 2007) e códigos de Monte Carlo (por exemplo, Fregeau & Rasio, 2007). No entanto, todos esses cálculos preveem valores para a razão entre o raio do caroço e o raio de meia massa em torno de 0.03 – 0.05, enquanto que a distribuição observada possui picos ao redor de  $\sim 0.5$ . Pode ser que a maioria dos AG ainda não estão na fase de “queima de binárias” ou que há fontes de energia adicionais, tais como buracos negros de massa intermediária ou de massa estelar, que aquecem os caroços dos AG (por exemplo, Mackey et al., 2007, 2008).

A população de binárias primordiais em um AG desempenha um papel importante na produção de objetos exóticos. Estrelas de nêutrons e anãs brancas podem substituir estrelas em sistemas binários

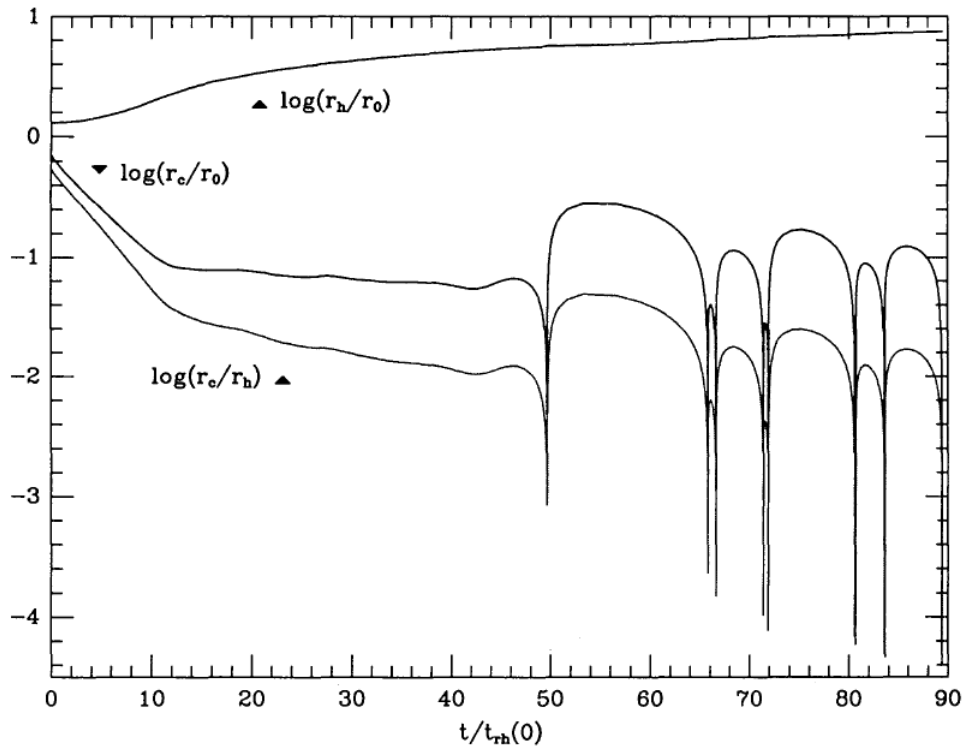


Figura 3.15: Evolução do raio do caroço  $r_c$  e do raio de meia massa  $r_h$  como uma função do tempo em unidades do tempo de relaxação de meia massa inicial do modelo. Note que  $r_o$  é o comprimento de escala de Plummer (Gao et al., 1991).

primordiais, substituindo as da SP, formando binárias de raios X e variáveis cataclísmicas (Verbunt & Hut, 1987). Do fato de binárias terem, em média, mais massa do que estrelas típicas nos globulares, elas penetram o interior do AG, devido à segregação de massa, através dos efeitos da relaxação de dois corpos. Dentro do caroço denso, elas irão interagir com estrelas isoladas e outras binárias. Binárias frágeis serão quebradas e até mesmo binárias firmes são vulneráveis ao rompimento em encontros de binárias. As binárias que não são destroçadas, serão enrijecidas e receberão chutes que irão removê-las (pelo menos temporariamente) do caroço. Em alguns casos, os chutes pode remover um sistema binário do AG, embora binárias que contenham estrelas não compactas são mais suscetíveis à fusão, antes do escape.

A evolução de uma população de binárias primordiais dentro de um AG foi explorada extensivamente por técnicas de Monte Carlo (por exemplo, Ivanova et al., 2005) e simulações com integridades diretos de  $N$  corpos (por exemplo, Hurley, 2007). A população de binárias tende a reduzir-se ao longo do tempo, uma vez que binárias são quebradas ou fundem-se. Logo, a fração de binárias observadas hoje deve ser menor do que seu valor inicial (Davies, 2013).

### 3.10 Sobrevivência Dinâmica dos Aglomerados

Finalizaremos este Capítulo com uma breve discussão acerca dos processos associados à dissolução dos AG. Esses estão sujeitos a vários processos disruptivos, tanto internos como externos. Na verdade, esta distinção não é muito clara, como a taxa de escape por evaporação dependente do campo mareal. Ainda assim, entre os principais processos disruptivos internos está a evaporação, ou por interações de dois corpos ou as que envolvem binárias. Neste ponto, é conveniente que façamos uma definição mais rigorosa associada ao escape de estrelas.

**Definição 3.8.** *Dado um aglomerado globular, há dois processos que provocam o escape de uma de suas estrelas. Quando um único encontro próximo aumenta a velocidade de uma estrela de modo que supere a velocidade de escape, dizemos que se trata de uma ejeção. Quando uma estrela escapa devido a vários encontros sucessivos, que aumentam sua energia gradativamente, dizemos que se trata de uma evaporação.*

Logo, tanto a evaporação quanto a ejeção correspondem a processos internos de disrupção de um AG, com já discutimos ao longo deste Capítulo. Um segundo processo interno, de importância, principalmente para jovens aglomerados, é a perda de massa via evolução estelar, que também já foram abordadas aqui.

Influências externas incluem perturbações externas dependentes do tempo, entre os quais estão os choques com o disco ou o bojo e interações com nuvens moleculares gigantes, para o qual a principal referência ainda é o clássico trabalho de Spitzer (1958). Choques mareais aquecem as estrelas nas regiões exteriores de um AG, aumentando a perda de massa (por exemplo, Dehnen et al., 2004), o que pode acelerar sua evolução (Gnedin et al., 1999).

Outro mecanismo destrutivo externo é a fricção dinâmica, que atua em todo o AG. Quando um AG orbita no potencial galáctico, as estrelas dele são atraídas no sentido oposto ao do movimento do aglomerado via deformações gravitacionais. Tal excesso de material exerce uma força gravitacional resultante - um arraste - no aglomerado. Esta força atua no sentido oposto ao da velocidade do AG e fará com que ele perca momento angular e espirale em direção ao centro da galáxia. Na Seção 6.1 abordaremos o efeito da fricção dinâmica durante a interação de dois AG. Na verdade, o efeito será generalizado para sistemas estelares, uma vez que a formulação original diz respeito à desaleceração de estrelas neles e não ao sistema em si.

Usando o mínimo de teoria, Hut & Djorgovski (1992) estimam que, em nossa Galáxia, AG estão morrendo a taxa de cerca de 5 a cada bilhão de anos. Isto não é muito diferente da previsão teórica de Gnedin & Ostriker (1997), que afirmam que mais da metade da população atual pode desaparecer dentro do próximo tempo de Hubble, conforme ilustra seu clássico gráfico, reproduzido aqui na Figura 3.16.

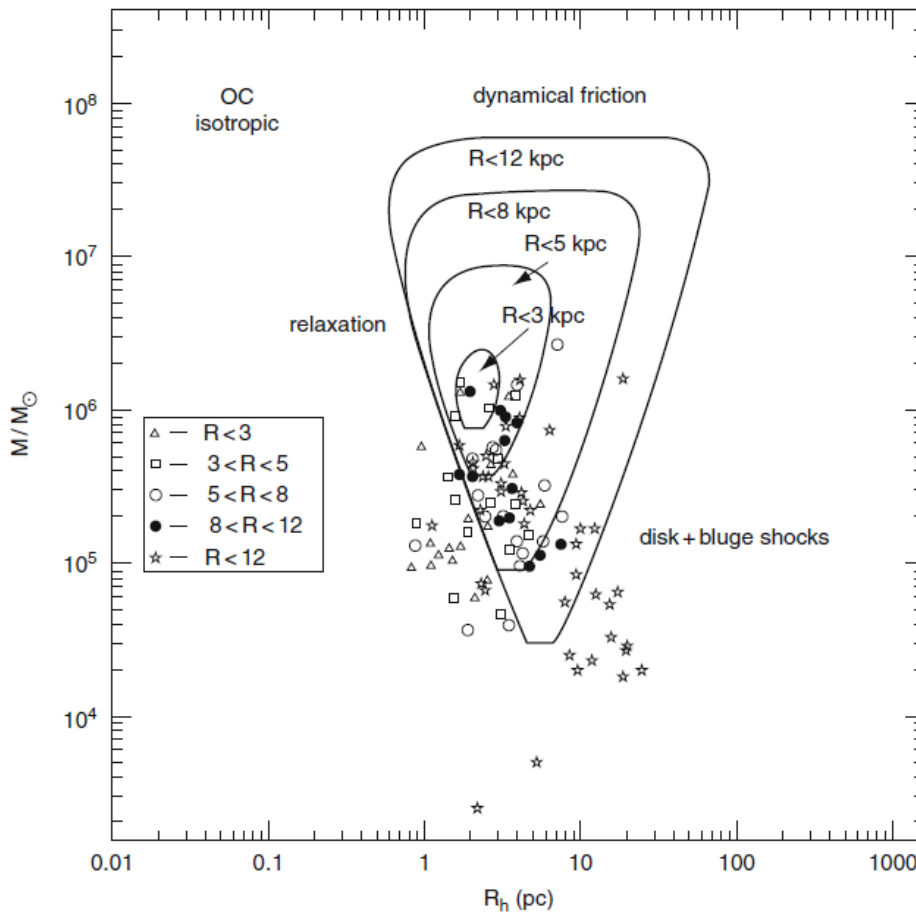


Figura 3.16: O efeito dos vários mecanismos destrutivos sobre a distribuição dos AG (Gnedin & Ostriker, 1997). Os dados de 119 deles estão graficados, com símbolos determinados pela distância galactocêntrica média de cada AG, que por sua vez foi estimada de acordo com um modelo cinemático simples do sistema de AG (“OC isotropic”). Os outros rótulos indicam os principais mecanismos destrutivos em cada domínio do diagrama.

Por fim, podemos, certamente, concluir que o estudo, tanto observacional quanto teórico, de aglomerados globulares é uma tarefa árdua. Porém, tende a se tornar cada vez mais acessível, por meio do melhoramento dos dados (GAIA, HSTPROMO, SUMO) e das ferramentas computacionais (GRAPE, GPU). Dessa forma, o campo de estudos de tais objetos está cada vez mais rico, permitindo aos aventureiros nessa área que se arrisquem de tal forma que antes era impossível.

# Capítulo 4

## Descrição do Modelo Estático

*“Constructing a mathematical model was a bit like plucking a chicken,  
but at the end of the job the bird has still to be airworthy.”*

**Raymond Arthur Lyttleton (1911 - 1995)**

Costuma-se dizer que, em dinâmica estelar, não se estuda realmente sistemas estelares como AG e galáxias. Esse é o trabalho de um astrônomo observacional. O que se faz é estudar modelos de tais sistemas. Dessa forma, como em muitos ramos da matemática aplicada, um modelo nada mais é que uma estrutura matemática na qual tentamos incorporar o nosso conhecimento do sistema em questão.

No contexto da dinâmica estelar, um modelo é composto por dois tipos de construção matemática. Um deles é o objeto matemático utilizado na descrição do sistema, e o outro é a equação que determina a sua evolução. Até agora, por exemplo, foi introduzido o modelo de  $N$  corpos, em que o sistema é descrito por  $N$  vetores dependentes do tempo, que evoluem de acordo com as leis de Newton (Capítulo 2). Além disso, vimos no Capítulo 3 as propriedades astrofísicas dos AG. Tais propriedades serão utilizadas para implementar nossos modelos, que serão estudados.

Existem diversos livros que abordam variados modelos para os diferentes tipos de sistemas estelares conhecidos (Binney & Tremaine, 2008; Heggie & Hut, 2003; Contopoulos, 2004; Boccaletti & Pucacco, 1996, entre outros). Não temos por finalidade descrever os diversos modelos de sistemas estelares; mas sim, descrevermos aqueles que serão utilizados nas simulações do Capítulo 6. Para tal, discorreremos na Secção 4.1 sobre o modelo associado à Galáxia, e na Secção 4.2, sobre o modelo associado ao aglomerado globular.

A fim de considerar a evolução dinâmica de um AG, é preciso entender primeiro como calcular modelos estáticos (onde as propriedades, tais como a distribuição de densidade, são constantes ao longo do tempo) associados a eles. Os processos internos e externos que causam as mudanças em AG devem ser considerados, por exemplo, quando sua densidade central varia ou quando perde estrelas, como já vimos. Porém, tais processos que impulsionam a evolução do AG operam em escalas de

tempo que são muito maiores do que o tempo que leva estrelas para cruzar o AG. Assim, começar com modelos estáticos é deveras razoável.

Acredita-se que, diferentemente das galáxias no sistema hierárquico, os AG, em geral, estão em um campo gravitacional gerado por uma galáxia, dita hospedeira. Dessa forma, é necessário, em simulações realísticas, modelar tanto a galáxia hospedeira quanto o AG.

Como estamos interessados na colisão entre dois globulares, adotaremos que as estrelas de tais sistemas se distribuem segundo uma função de massa inicial característica (Secção 4.3) e correspondem a uma população estelar simples. Naturalmente, o resultado de uma colisão entre ambos resultaria em um corpo com uma população estelar múltipla.

Por fim, terminaremos o Capítulo discutindo quais parâmetros do nosso modelo serão utilizados como *input* das simulações (Secção 4.4).

## 4.1 O Potencial Galáctico

Grande parte da massa de uma galáxia reside nas estrelas. Para calcular o potencial gravitacional de uma grande coleção de estrelas *a posteriori*, devemos, *a priori*, adicionar os potenciais das massas de todas as estrelas, consideradas partículas. Infelizmente, isso não é viável para  $10^{11}$  estrelas em uma galáxia típica e, na maioria dos casos, é suficiente modelar o potencial, suavizando a densidade de massa das estrelas em uma escala que é pequena em comparação com o tamanho da galáxia, mas grande em comparação com a distância média entre as estrelas.

Dessa forma, a fim de construir um modelo realístico para a Galáxia, consideraremos um tal que possua três componentes: bojo, disco e halo de matéria escura, conforme a Figura 4.1.

Os componentes possuem os seguintes potenciais associados, onde  $r$  é a distância radial, em coordenadas esféricas, e  $R$  e  $z$  estão dados em coordenadas cilíndricas. Ademais, o halo de matéria bariônica contribui muito pouco para o potencial galáctico. Dessa forma, não foi incluído.

**bojo:** potencial de uma partícula:

$$\Phi(r) = - \frac{GM_b}{r} \quad (4.1)$$

**disco:** potencial de Miyamoto-Nagai (Miyamoto & Nagai, 1975):

$$\Phi(R, z) = - \frac{GM_d}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}} \quad (4.2)$$

**halo:** potencial logarítmico (Binney & Tremaine, 2008):

$$\Phi(r) = v_c^2 \ln \left( \frac{r}{r_o} \right) \quad (4.3)$$

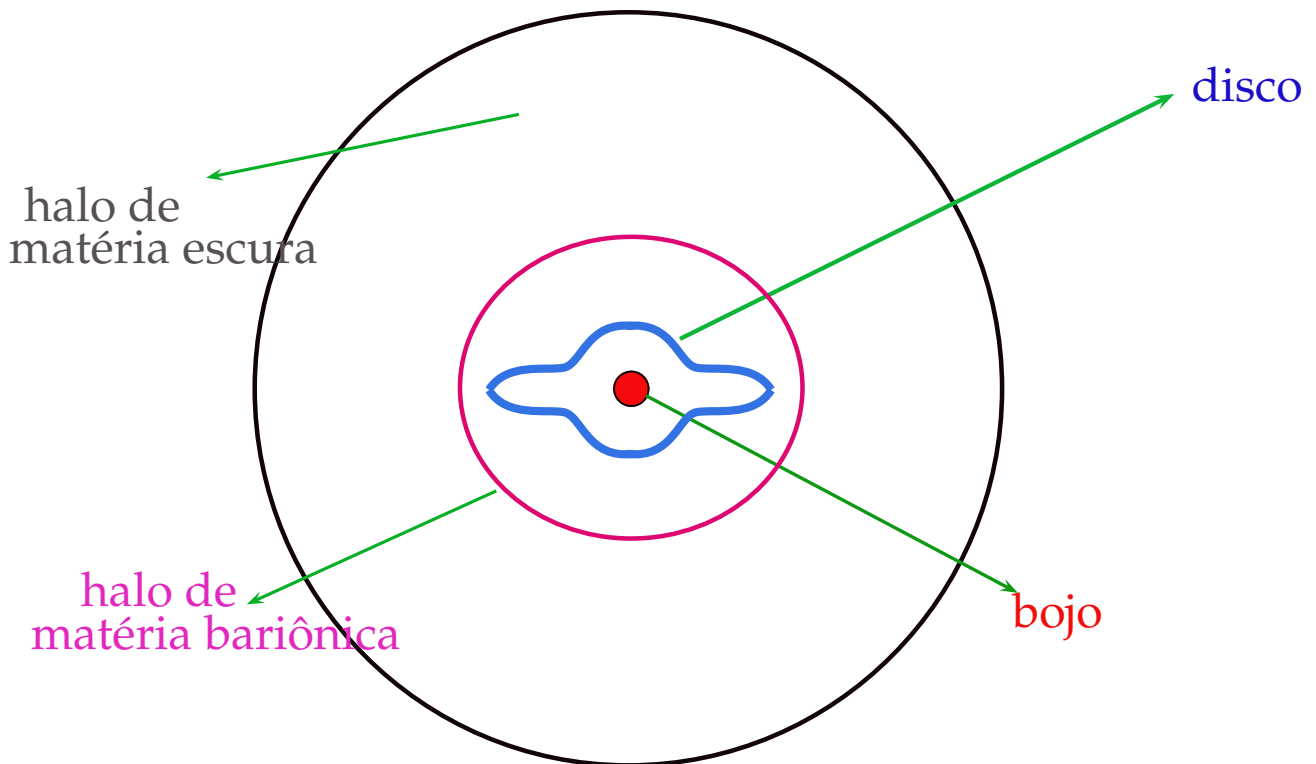


Figura 4.1: Modelo da Galáxia composto de três componentes: bojo + disco + halo de matéria escura.

onde a massa do bojo é dada por  $M_b = 1.5 \times 10^{10} M_\odot$ , a massa do disco vale  $M_d = 5.0 \times 10^{10} M_\odot$ , os comprimentos de escala do disco valem  $a = 4$  kpc e  $b = 0.8$  kpc, e, finalmente, o halo logarítmico de matéria escura foi ajustado de tal modo que, considerando os três componentes juntos, a velocidade circular a uma distância de 8.5 kpc, para  $z = 0$ , fosse 220 km/s (Xue et al., 2008).

As equações (4.1), (4.2) (4.3) correspondem a um modelo que fornece uma boa representação da Galáxia (Aarseth, 2003). Ademais, satisfazem o requisito de serem computacionalmente de fácil implementação para o método de Hermite (Secção 5.2). Uma vez modelada a galáxia hospedeira, precisamos modelar o objeto de estudo, i. e., o aglomerado globular.

## 4.2 O Aglomerado Globular

Nesta Secção, definiremos várias grandezas importantes no estudo dinâmico dos AG e, sempre que possível, apresentá-las-emos a partir do prisma observacional, uma vez que este validará ou não os resultados obtidos em qualquer estudo teórico sobre o tema. Na visão de Karl Popper, devemos ter uma corroboração entre a observação e as simulações. Se uma sobressair sobre a outra, esta deve ser alterada em privilégio daquela. Não entraremos, nesta dissertação, no mérito de falsear teoria al-

guma<sup>1</sup>, ou seja, assumiremos que os resultados observacionais mais bem estabelecidos correspondem ao alicerce do que aqui foi desenvolvido.

Até o início da década de 1910, haviam sido estabelecidas duas leis concernentes aos aglomerados globulares, devido à Edward Charles Pickering (1846-1919), ainda no século XIX, e publicado no *Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College, Volume XXVI*:

- i) *The law of distribution is essentially the same for different clusters;*
- ii) *The bright stars and faint stars of a cluster obey the same law.*<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>i) A lei de distribuição é essencialmente a mesma para diferentes aglomerados; ii) As estrelas mais brilhantes e as estrelas menos brilhantes obedecem à mesma lei.

Desde então, procurou-se pela lei que melhor representasse as estrelas de um aglomerado globular no espaço. As primeiras tentativas foram do próprio Pickering que tentou ajustar a distribuição espacial com as funções  $1 - r^2$  e  $1 - r^n$  e por Von Zeipel (1908) que utilizou uma esfera isotérmica para ajustar os dados do *Observatoire de Paris* referentes aos aglomerados M 13 e  $\omega$  Centauri, porém os resultados não foram satisfatórios. O primeiro avanço nesse sentido deu-se por Plummer (1911). Ele aplicou o resultado de Schuster da equação de Lane-Endem dos modelos politrópicos com índice  $n = 5$  em um estudo de três AG, a saber  $\omega$  Centauri, M13 e 47 Tucanae. Em seu trabalho, ele mostra que o ajuste dado pelo modelo politrópico com índice  $n = 5$  é deveras satisfatório.

Na década de 60, King (1966) popularizou um conjunto de modelos, atualmente chamados **modelos de King**, por meio de uma síntese de trabalhos prévios<sup>2</sup>. Tais modelos surgem do questionamento proveniente da infinitude da esfera isotérmica. Já se havia estabelecido que os AG são estruturas finitas (von Hoerner, 1957), portanto o modelo da esfera isotérmica deveria ser alterado a fim de que a densidade caísse mais rapidamente em regiões afastadas do centro do AG e que chegasse a zero em um dado raio. Essa é a essência dos modelos de King.

Além do modelo de Plummer e dos modelos de King, há extensões destes com o intuito de incluir mais detalhamento como, por exemplo, anisotropia na distribuição de velocidade. Embora haja diversos modelos aplicáveis aos nossos propósitos, adotaremos apenas o modelo de Plummer em todas as simulações. Isso se deve à simplicidade do referido modelo, além de necessitar apenas de dois parâmetros, a saber a massa total e o raio de meia massa (definição 4.3), como veremos a seguir (Secção 4.2.1).

As distribuições observadas, como já dissemos, devem ser ajustadas a distribuições teóricas por meio de modelos. Ademais, faremos, sempre que possível, menção às duas formas (observacional e teórica) que se costuma definir todas as grandezas referentes aos AG. Para tanto, as definições 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 correspondem aos principais conceitos referentes à escala de distância, uma vez que a concentração central dos AG permite separá-lo duas partes, o **caroço** e o **halo**.

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes acerca da teoria de Popper, vide Apêndice C.

<sup>2</sup>A fim de uma descrição história sobre esses modelos, vide King (1981).



**Definição 4.1.** O brilho superficial de um sistema estelar é a luminosidade estelar total de tal sistema emitida por unidade de área.

**Definição 4.2.** O raio do caroço  $r_c$  é a distância medida a partir do centro do aglomerado globular tal que o brilho superficial, a esta distância, corresponde à metade do brilho superficial central.

**Definição 4.3.** O raio de meia massa  $r_h$  é o raio da esfera imaginária que contém metade da massa do aglomerado globular.

**Definição 4.4.** Sejam  $M$  e  $E$  a massa e a energia totais do aglomerado globular. Considere um sistema composto de duas partículas de massa  $M$  cada uma, conforme ilustra a Figura 4.2. O raio do virial é a metade da distância entre duas partículas tal que a energia do par seja  $E$ , i. e.,

$$R_v = - \frac{GM^2}{4E} \quad (4.4)$$

A definição do raio do virial será utilizada na descrição das unidades de  $N$  corpos, que é o sistema de unidades utilizadas no código *NBODY6* (Capítulo 5).

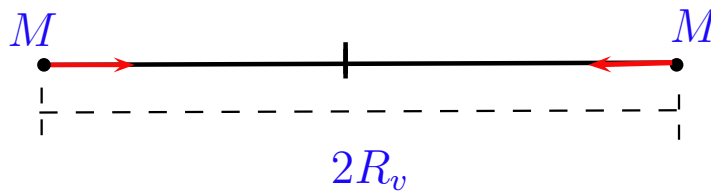


Figura 4.2: Sistema binário, cuja energia total é  $E$ , composto de duas partículas de massa  $M$  que interagem gravitacionalmente.

**Definição 4.5.** O raio mareal  $r_t$  é o raio da esfera que contém toda a luminosidade do aglomerado globular ou a distância medida a partir do centro do aglomerado onde sua densidade é nula.

O raio mareal, que foi estabelecido primeiramente por von Hoerner (1957), estabelece o limite do AG. Existem diversas aproximações que são utilizadas para definir dinamicamente tal grandeza, por exemplo, o conceito de esfera de influência e o problema de Hill. Além disso, o conceito de raio mareal está intimamente associado aos critérios de escape utilizados em qualquer simulação e, portanto, é extremamente importante para os nossos propósitos. No apêndice D, discutiremos com mais detalhes as complicações de tal definição e mostraremos qual o critério de escape utilizado pelo código *NBODY6*.

A partir das definições de raio do caroço e raio mareal, podemos dividir o aglomerado globular em duas regiões. O caroço do aglomerado corresponde à região que vai de seu centro até  $r_c$ . Já o halo do aglomerado corresponde à região que vai de  $r_c$  até  $r_t$ . E ainda, definir a concentração de um AG.

**Definição 4.6.** A concentração de um aglomerado globular é uma medida do ajuntamento estelar central, cuja expressão matemática é

$$c = \log \left( \frac{r_t}{r_c} \right) \quad (4.5)$$

Façamos, agora, algumas definições referentes à distribuição de massa e luminosidade no AG. Tais definições, bem como as anteriores, relacionam teoria e observação.

**Definição 4.7.** A densidade de massa  $\rho(r)$  de um aglomerado globular é uma função escalar que representa a distribuição espacial de massa ao longo do aglomerado.

**Definição 4.8.** A massa contida em um raio  $r$  é a massa total interna ao um raio  $r$  satisfazendo a densidade de massa do aglomerado, i. e.,

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s) s^2 ds \quad (4.6)$$

**Definição 4.9.** A densidade de massa projetada  $\Sigma(d)$  é a densidade por unidade de área do céu, onde a linha de visada atravessa o aglomerado a uma distância projetada  $d$  a partir do centro do aglomerado, i. e.,

$$\Sigma(d) = 2 \int_0^\infty \rho(r) dz, \quad (4.7)$$

onde  $d$  é a distância radial projetada do centro do modelo e  $z$  é a variável de integração ao longo da linha de visada, ou seja,  $r^2 = d^2 + z^2$ , conforme indicado na Figura 4.3.

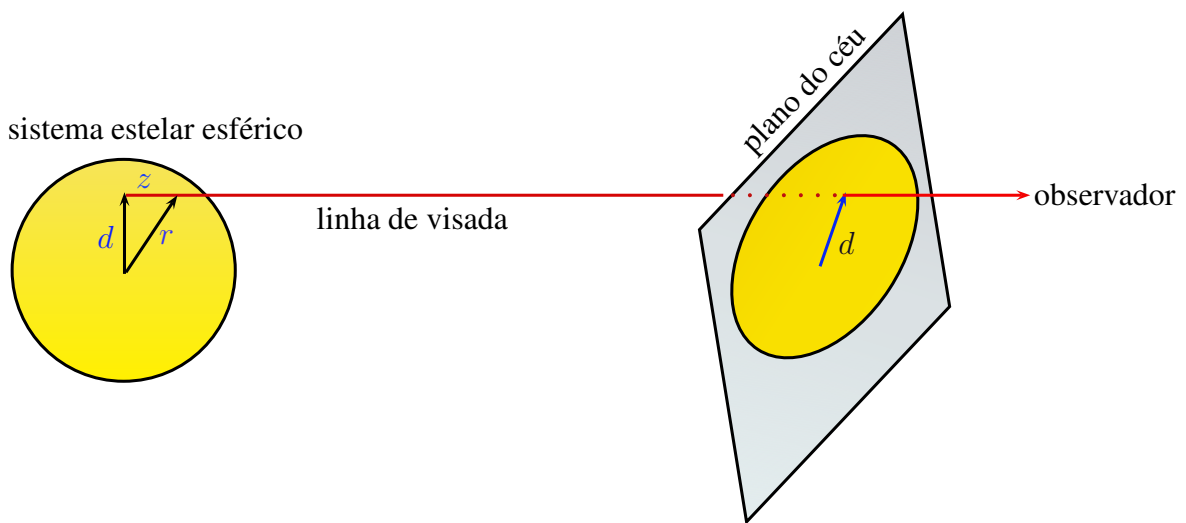


Figura 4.3: Geometria da projeção da densidade de massa e da luminosidade projetada para uma distribuição esférica.

**Definição 4.10.** A massa projetada  $M(d)$  é a massa por unidade de área do céu, onde a linha de visada atravessa o aglomerado a uma distância projetada  $d$  a partir do centro do aglomerado.

**Definição 4.11.** A relação massa-luminosidade  $\Upsilon$  de um sistema estelar é a razão entre a massa e a luminosidade de tal sistema.

**Definição 4.12.** A luminosidade projetada  $I(d)$  é a luminosidade por unidade de área do céu, onde a linha de visada atravessa o aglomerado a uma distância projetada  $d$  a partir do centro do aglomerado e está relacionada com a densidade de massa projetada da seguinte forma

$$I(d) = \int_0^d \frac{\Sigma(s)}{\Upsilon(s)} 2\pi s ds \quad (4.8)$$

Dadas todas essas definições, passemos ao cálculo teórico de cada uma delas para o modelo de Plummer. Não entraremos no mérito das técnicas observacionais utilizadas para o cálculo observacional de tais grandezas, uma vez que o fito deste texto não é esse. Ou seja, basear-nos-emos nos aspectos observacionais, porém não faremos astronomia observacional.

### 4.2.1 A Esfera de Plummer

A partir da equação de Lane-Endem, é possível mostrar que a densidade de massa de um modelo de Plummer é (Kroupa, 2008)

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi r_{pl}^3} \left(1 + \frac{r^2}{r_{pl}^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \quad (4.9)$$

onde  $r_{pl}$  é o comprimento de escala de Plummer. A Figura 4.4 exibe a densidade de massa do modelo de Plummer.

Como veremos a seguir, a partir da densidade de massa do modelo de Plummer é possível derivar as principais propriedades definidas nesta Secção. Por exemplo, da equação (4.9) segue que a densidade central do modelo é

$$\rho_c = \frac{3M}{4\pi r_{pl}^3} \quad (4.10)$$

Enunciaremos, então, na forma de um teorema, os principais resultados que obteremos para o modelo de Plummer que nos permitirá construir modelos de AG que serão utilizados nas simulações do Capítulo 6 e que foram utilizadas ao longo da dissertação para exemplificar coerências teóricas, por exemplo, na Figura 3.5 onde o processo de escape de estrelas de um AG foi ilustrado. Mas antes disso, provaremos um lema que nos auxiliará nesta demonstração.

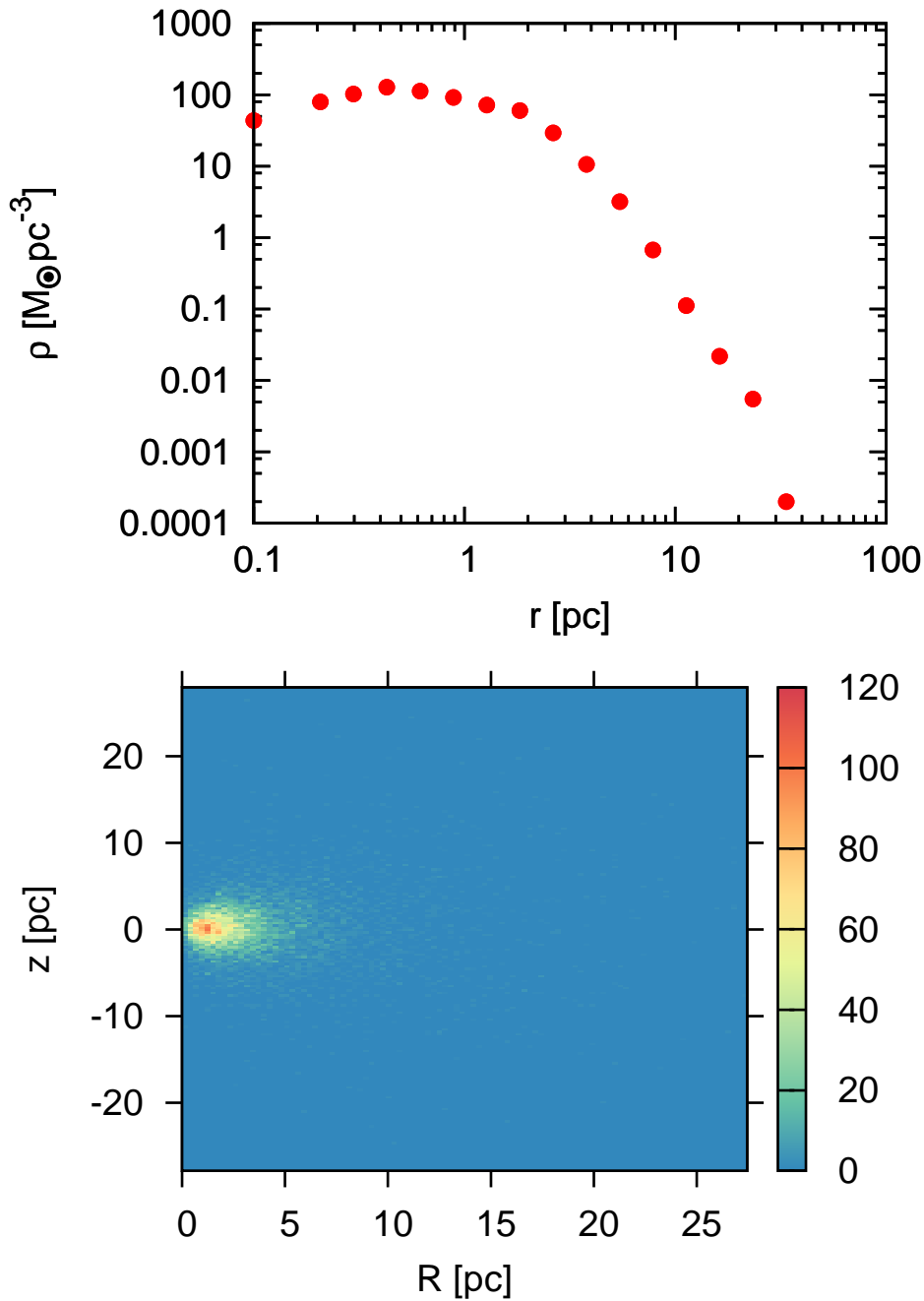


Figura 4.4: Distribuição de densidade ao longo do modelo de Plummer. Acima, o perfil de densidade (densidade como função do raio), em coordenadas esféricas. Abaixo, o mapa de densidade em coordenadas cilíndricas. O modelo utilizado possui massa da ordem de  $10^4 M_{\odot}$  e raio mareal igual a  $r_t = 29.63$  pc. Note que a separação do modelo, em caroço e halo, é justificada devido à discrepância entre as concentrações na região central e nas regiões mais externas. O raio do caroço do modelo é 1.669 pc, que é aproximadamente o valor de  $r$  tal que a densidade começa a declinar bruscamente.

**Lema 4.1.** *O quadrado da dispersão de velocidade unidimensional de um modelo esférico, não gi-*

rante, com distribuição de velocidade isotrópica é dada por

$$\sigma^2(r) = \frac{1}{\rho(r)} \int_r^\infty \rho(s) \frac{GM(s)}{s^2} ds \quad (4.11)$$

### Demonstração

Com efeito, da equação de Boltzmann para sistemas não colisionais (5.1) em sua formulação hamiltoniana é possível chegar à seguinte equação de Jeans para sistemas esféricos<sup>3</sup>

$$\frac{d}{dr} [\rho(r)\sigma_r^2(r)] + \frac{\rho(r)}{r} [2\sigma_r^2(r) - (\sigma_\theta^2(r) + \sigma_\varphi^2(r))] = -\rho(r) \frac{d\phi(r)}{dr} \quad (4.12)$$

Por hipótese, trata-se de um modelo isotrópico, ou seja,  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi$ . Logo, a equação (4.12) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d}{dr} (\rho(r)\sigma_r^2(r)) = -\rho(r) \frac{d\phi(r)}{dr} \quad (4.13)$$

Lembrando que  $d\phi/dr = -GM/r^2$ , integrando e utilizando  $\rho \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$  como condições de contorno obtemos o lema.

□

**Teorema 4.1.** *Considere um modelo de Plummer de massa  $M$  e raio de escala  $r_{\text{pl}}$ , isto é, considere um modelo tal que sua densidade de massa seja dada pela expressão (4.9). Sejam isotrópica sua distribuição de velocidade e independente do raio sua relação massa-luminosidade cujo valor é a unidade multiplicativa. Considere que o modelo esteja no estado de equilíbrio do virial e não possua segregação de massa interna tampouco rotação. Então, para tal modelo, afirmamos que*

i) a massa contida em um raio  $r$  é dada por

$$M(r) = M \frac{\frac{r^3}{r_{\text{pl}}^3}}{\left(1 + \frac{r^2}{r_{\text{pl}}^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.14)$$

ii) a densidade de massa projetada é dada por

$$\Sigma(d) = \frac{M}{\pi r_{\text{pl}}^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{d^2}{r_{\text{pl}}^2}\right)} \quad (4.15)$$

<sup>3</sup>A demonstração da equação de Jeans a partir da equação de Boltzmann é simples e não a incluímos a fim de não tornar o texto carregado, uma vez que o objetivo do lema 4.11 é obter a dispersão de velocidade; porém sugerimos o livro de Binney & Tremaine (2008, Seção 4.8.1) para tal.

iii) a luz integrada projetada é dada por

$$I(d) = M r_{\text{pl}}^2 \left( \frac{1}{r_{\text{pl}}^2} - \frac{1}{d^2 + r_{\text{pl}}^2} \right) \quad (4.16)$$

iv) a dispersão de velocidade unidimensional é dada por

$$\sigma^2(r) = \frac{1}{6} \frac{GM}{r_{\text{pl}}} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{r_{\text{pl}}^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.17)$$

v) o potencial é dado por

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r_{\text{pl}}} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{r_{\text{pl}}^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.18)$$

vi) a energia potencial  $W$ , a energia cinética  $K$  e a energia total  $E$  são dadas por

$$W = -\frac{3\pi}{32} \frac{GM^2}{r_{\text{pl}}} \quad (4.19)$$

$$K = \frac{3\pi}{64} \frac{GM^2}{r_{\text{pl}}} \quad (4.20)$$

$$E = -K = \frac{W}{2} \quad (4.21)$$

vii) o raio do caroço  $r_c$  e o raio de meia massa  $r_h$  são dados por

$$r_c = (\sqrt{2} - 1)^{\frac{1}{2}} r_{\text{pl}} \quad (4.22)$$

$$r_h = (2^{\frac{2}{3}} - 1)^{-\frac{1}{2}} r_{\text{pl}} \quad (4.23)$$

### Demonstração

i) Segue trivialmente da equação (4.9) e da definição 4.8 de massa contida em um raio  $r$ .

ii) Substituindo a equação (4.9) na equação (4.7) e integrando, obtemos a equação (4.15), onde  $r^2 = z^2 + d^2$ .

iii) Por hipótese, não há segregação de massa no modelo. Além disso,  $\Upsilon = 1$ . De tal fato e da

substituição da equação (4.9) na equação (4.8) chegamos à equação (4.16). Além disso, podemos perceber que  $r_{\text{pl}}$  é o raio de meia luz do modelo projetado, i. e.,  $I(r_{\text{pl}}) = I(\infty)/2$ .

**iv)** Por hipótese, o modelo é isotrópico. Então, podemos valer do resultado do lema 4.1. Logo, substituindo (4.9) e (4.14) na equação (4.11), obtemos a equação (4.17).

**v)** O potencial em  $r$  é dado pela soma do potencial da massa contida nesse raio mais o potencial da matéria circundante em tal ponto; o qual, por sua vez, é calculado integrando as contribuições de camadas de massa. Em outros termos,

$$\phi(r) = - \left[ G \frac{M(r)}{r} + \int_r^\infty G \frac{\rho(s) 4\pi s^2}{s} ds \right]$$

Substituindo a equação (4.9) na equação acima, obtemos a equação (4.18).

**vi)** Das definições de tensor de energia cinética  $\mathbf{K}$  e tensor de energia potencial de Chandrasekhar  $\mathbf{W}$  (Binney & Tremaine, 2008, equações 2.19 e 4.240b), para o caso isotrópico, obtemos as seguintes relações

$$K = \frac{1}{2} \int_0^\infty [3\sigma_r^2(r)] [\rho(r) 4\pi r^2] dr$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\infty \phi(r) [\rho(r) 4\pi r^2] dr$$

Substituindo as equações (4.9), (4.17) e (4.18) nas equações acima obtemos as expressões (4.19) e (4.20). Finalmente, da definição de energia total ( $E = T + W$ ) chegamos à equação (4.21).

**vii)** Com efeito, da definição 4.2 e das hipóteses segue que  $\Sigma(r_c) = \Sigma(0)/2 = M/(2\pi r_{\text{pl}}^2)$ . Logo, substituindo  $\Sigma(r_c)$  em (4.15) chegamos a  $r_c = (\sqrt{2} - 1)^{1/2} r_{\text{pl}}$ . Analogamente para  $r_h$ , pela definição 4.3, temos que  $M(r_h) = M/2$ . Dessa forma, substituindo  $M(r_h)$  na equação (4.14), obtemos  $r_h = (2^{2/3} - 1)^{-1/2} r_{\text{pl}}$ . E isso finaliza a demonstração do teorema.

□

Como já dissemos, utilizar-nos-emos do Teorema 4.1 a fim de construir os diversos modelos utilizados neste dissertação. Além disso, note que o objetivo dos referidos modelos é que sirvam como parâmetro de entrada do código *NBODY6*; dessa forma, acerca das hipóteses de tal teorema, podemos afirmar que são bem razoáveis. Ora, poderíamos nos perguntar se é plausível adotarmos um modelo que não gire, uma vez que alguns AG apresentam rotação (Ernst et al., 2007). Ou mesmo, se admitir uma distribuição de velocidade isotrópica não limitaria o modelo. Certamente, diversas complicações podem ser inseridas no modelo de modo que abranja um espaço de parâmetros rico. Porém, como de praxe, na ciência, aborda-se os problemas por partes. Neste texto, utilizaremos modelos que sa-

tisfazem às hipóteses do Teorema 4.1. Possíveis novos trabalhos podem incluir rotação, anisotropia, segregação de massa, ou mesmo, componentes de matéria escura.

A fim de finalizar o Capítulo e construirmos os tão almejados modelos, precisamos antes adotar uma função de massa para eles. Isto será feito na próxima Secção. De posse das distribuições da matéria no espaço e em um espectro de massa, podemos finalmente construir os modelos (Secção 4.4). Ou seja, já possuímos o aparato referente à distribuição espacial de massa. Basta sabermos quais massas distribuiremos dessa forma.

### 4.3 Função de Massa Inicial

Iniciaremos esta Secção com uma das definições mais importantes da Astrofísica contemporânea, a saber, a da função de massa inicial<sup>4</sup>.

**Definição 4.13.** A função de massa inicial (IMF<sup>5</sup>)  $\xi(m)$  estelar é a função abstrata de distribuição das massas relativas das estrelas formadas coletivamente em um único evento. Nesse caso,  $\xi(m)dm$  corresponde ao número de estrelas no intervalo  $[m, m + dm]$ , onde  $m$  é a massa da estrela.

A IMF é, em *stricto sensu*, uma construção teórica **abstrata**, pois qualquer sistema observado contendo  $N$  estrelas meramente constitui uma representação desta função de distribuição universal, caso exista (Elmegreen, 1997; Maíz Apellániz & Úbeda, 2005); representa uma formação **coletiva** uma vez que corresponde ao processo coletivo de transformação de gás interestelar em estrelas e trata-se de **um único evento** porque ocorre em um recorte espacial de cerca de alguns parsecs e em um recorte temporal de cerca de alguns milhões de anos.

A provável existência de uma única  $\xi(m)$  pode ser inferida a partir da observação de um conjunto de sistemas estelares (por exemplo, Massey, 2003). Segundo a visão de Kroupa, se, após correções para evolução estelar, sistemas estelares múltiplos e desconhecidos, bem como preceitos de dinâmica estelar, as distribuições de massas estelares forem semelhantes, dentro da estatística esperada, a comunidade científica pode excluir a hipótese de que a distribuição de massa estelar não é a mesma em todos os ambientes. Ou seja, caminhamos em direção a uma IMF universal, padrão ou canônica, dentro dos requisitos físicos avaliados pelos parâmetros físicos relevantes (metalicidade, densidade, massa) da população em questão<sup>6</sup>.

<sup>4</sup>Ao longo desta Secção, devido às variações e inconstâncias das diversas teorias existentes concernentes à formação estelar, adotaremos a filosofia universalista de Pavel Kroupa, uma vez que entendemos ser a formulação atual mais crível. Isso ficará mais claro ao longo do texto, principalmente, quando discutirmos as implicações filosóficas de sua concepção.

<sup>5</sup>Em inglês, temos *initial mass function*. Daí, a sigla IMF.

<sup>6</sup>Para outra visão, recomendamos o trabalho de Cappellari et al. (2012), que inferem variações sistemáticas na IMF a partir do estudo de galáxias *early-type*. Tal estudo apresenta evidências associadas à dependência da IMF com a razão massa-luminosidade em tais galáxias. Veja também a resposta, no trabalho de Weidner et al. (2013), do grupo *Stellar Populations and Dynamics Research Group* (SPODYR), cujo cabeça é o próprio Kroupa, referente a tais hipóteses, onde os autores afirmam que as supostas variações devem ser falseadas devido aos métodos observacionais e analíticos.



A maioria dos trabalhos nesta área são observacionais, o que é necessário, mas não suficiente para fornecer o tipo de amostra estatística satisfatória para abordar as duas questões chaves derivadas.

1. Qual é a forma da IMF?
2. Tal forma exhibe inequívocas variações sistemáticas com as condições de formação estelar?

A história do tópico começou em 1955 na *Australian National University* quando Edwin E. Salpeter publicou a primeira estimativa da IMF para as estrelas da vizinhança solar. Para estrelas com massas no intervalo  $[0.4M_{\odot} - 10M_{\odot}]$ , Salpeter (1955) descobriu que podiam ser descritas por uma lei de potência com índice  $\alpha = 2.35$ , conforme pode ser observado na Figura 4.5.

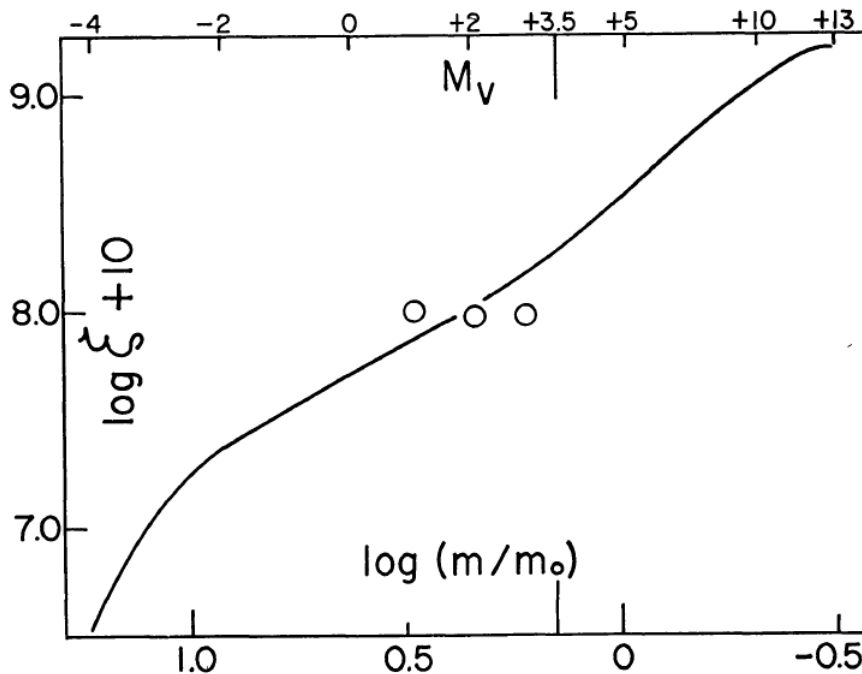


Figura 4.5:  $\log(\xi)$  como função de  $\log(m/m_{\odot})$  (Salpeter, 1955, Figura 2).

Este resultado implicou uma densidade de massa divergente para  $m \rightarrow 0$ , o que era interessante porque a matéria escura foi especulada, até o início da década de 1990, como sendo formada por estrelas fracas ou objetos subestelares. Estudos das velocidades estelares na vizinhança solar também implicavam uma ampla quantidade de objetos ocultos, ou escuros, no disco da Galáxia. A partir da década de 1950, Wilhelm Gliese iniciou, em Heidelberg, uma compilação cuidadosa de todas as estrelas conhecidas da vizinhança solar com distância precisa. A edição publicada em 1969 ficou conhecida como o famoso *Gliese Catalogue of Nearby Stars*; a versão atual dele constitui a mais completa e mais bem estudada amostra de estrelas que existe. Durante o início da década de 1980, como já dissemos (vide Secção 3.3), o recém-desenvolvido sistema CCD viabilizou a resolução de várias estrelas em campos saturados. Juntas com o catálogo *Gliese*, as diversas pesquisas que se

seguiram usando tal técnica melhorou significativamente o conhecimento da densidade espacial de estrelas de baixa massa. A forma da IMF para estrelas de baixa massa foi posteriormente revista no início de 1990 em Cambridge, por meio da melhoria acerca da compreensão teórica da relação massa-luminosidade das estrelas de baixa massa e a partir da avaliação dos erros observacionais devido aos sistemas binários não resolvidos, sendo corroborada por trabalhos posteriores.

Hoje sabemos que a IMF para estrelas da vizinhança solar possui um achatamento significativo para estrelas cuja massa é menor que  $0.5M_{\odot}$ , o que pode ser visualizado na Figura 4.6.

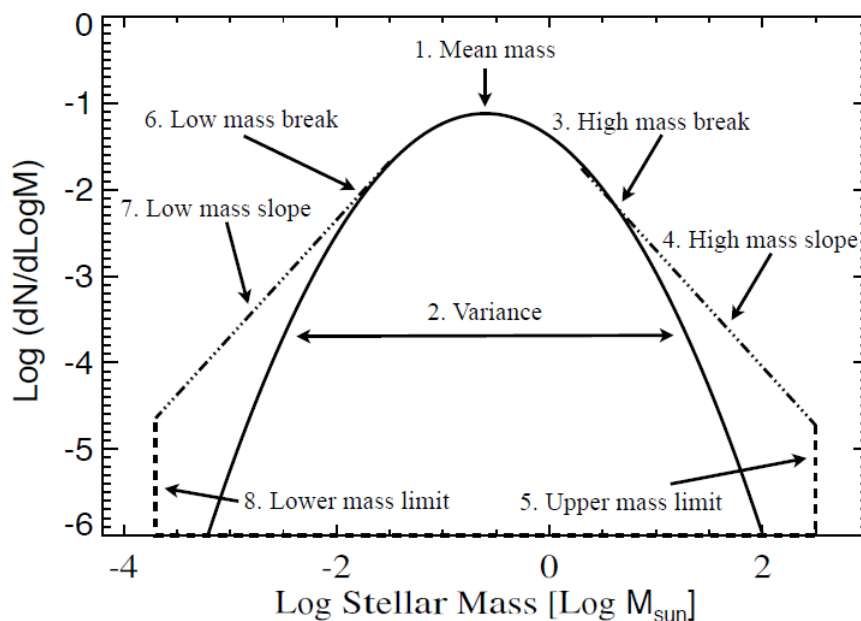


Figura 4.6: Função de massa inicial esquemática parametrizada por oito parâmetros que estão indicados na Figura (Bastian et al., 2010, Figura 1).

A necessidade de matéria escura no disco da Via Láctea desapareceu quando a melhoria dos dados cinemáticos de estrelas próximas tornou-se possível. Além disso, observações sugerem uma IMF grosseiramente constante em muitos ambientes diferentes, embora variações pequenas mas significativas sejam encontradas em todos os intervalos de massa. Não existem tendências sistemáticas associadas a essas variações que, por conseguinte, tornam difícil encontrar suas causas. Isso leva à hipótese da universalidade da IMF (Elmegreen, 2007), como veremos adiante.

Em geral, a função de massa encontrada para os AG é consistente com a IMF do campo galáctico para  $m < 1 M_{\odot}$ , mas ainda não está claro por que motivo os aglomerados abertos têm um déficit significativo de anãs brancas (Fellhauer et al., 2003). Um fator importante é a evolução dinâmica inicial dos aglomerados, que ocorre rápida e violentamente, devido à expulsão de gás residual e à perda de massa associada à evolução estelar de uma fração de sua população — como pode ser observado na Figura 3.10 para o caso de globulares. Outro fator corresponde à perturbação dependente da densidade de sistemas binários primordiais (Secção 3.9).

Aglomerados jovens passaram (e passam) por uma evolução dinâmica altamente complexa que continua até o fim de suas vidas (Baumgardt & Makino, 2003) e são, portanto, sujeitos a vieses que só podem ser estudados de forma eficiente com métodos diretos de  $N$  corpos, impondo, assim, uma complexidade de análise que ultrapassa aquela para a amostra do campo galáctico. O déficit acentuado de anãs marrons e estrelas de baixa massa nas Híades (de 600 milhões de anos) são excelentes indicativos observacionais de que a evolução dinâmica afeta a função de massa (por exemplo, Röser et al., 2011).

Abordaremos agora as duas IMF que serão utilizadas no presente estudo, além de discutirmos um pouco as concepções filosóficas envolvidas. Após tal discussão, passaremos à descrição de como os vários modelos são criados com o auxílio do código *MCLUSTER* que, por sua vez, o faz a partir de uma densidade de massa e uma IMF.

### 4.3.1 Forma Canônica

A IMF canônica é uma lei de duas potências com 95% de confiabilidade (Kroupa, 2001) expressa por

$$\xi(m) \propto \begin{cases} m^{-1.3 \pm 0.3}, & \text{se } 0.08 \leq m/M_{\odot} \leq 0.5 \\ m^{-2.3 \pm 0.5}, & \text{se } 0.5 \leq m/M_{\odot} \leq m_{\max} \end{cases} \quad (4.24)$$

onde  $m_{\max} \leq m_{\max*} \approx 150 M_{\odot}$  (Weidner & Kroupa, 2006).

A forma canônica acima foi derivada de estudos detalhados do campo estelar Galáctico e assim representa uma IMF média. Para estrelas de baixa massa, trata-se de uma mistura de populações estelares que abrange uma grande variedade de idades (0-10 bilhões de anos) e metalicidades ( $[\text{Fe}/\text{H}] \geq -1$ ). Para as estrelas de alta massa, constitui uma mistura de diferentes metalicidades ( $[\text{Fe}/\text{H}] \geq -1.5$ ) e condições de formação estelar. Portanto, pode ser considerada como uma forma padrão. Ademais, o objetivo é testar as seguintes hipótese e conjectura.

**Hipótese da invariância da função de massa inicial**

*Existe uma distribuição universal que origina todas as distribuições de massas estelares em eventos de formação estelar individuais.*

A negação dessa hipótese implicaria uma IMF variável. Note que o trabalho de Massey (2003) já estabelecera que a IMF deveria ser invariável para  $m \geq 10 M_{\odot}$  e para densidades  $\rho \leq 10^5$  estrelas/pc<sup>3</sup> e metalicidade  $Z \geq 0.002$ . Além disso, dado que nunca estamos propensos a aprender a história dinâmica exata de um determinado aglomerado, segue-se que nunca podemos conhecer a IMF para qualquer um deles individualmente. Isto pode ser resumido de maneira concisa pela seguinte conjectura.

**Conjectura da função de massa inicial de um aglomerado**

*A IMF não pode ser extraída de aglomerado individual algum.*

**Justificativa:** Para aglomerados com menos de 0.5 milhões de anos, o processo de formação estelar ainda não cessou. Logo, a IMF ainda não está estruturada e os caroços de tais aglomerados, constituídos de estrelas de alta massa, já ejetaram dinamicamente outras estrelas (Pflamm-Altenburg & Kroupa, 2006). Para aglomerados com idade entre 0.5 e 10 milhões de anos, a expulsão de gás residual leva à perda de estrelas (Kroupa et al., 2001). Aglomerados mais velhos ainda estão perdendo estrelas, devido à expulsão do gás residual ou evolução secular (Baumgardt & Makino, 2003), conforme já foi dito na Secção 3.10. Além disso, as amostras são susceptíveis à contaminação por estrelas capturadas (Fellhauer et al., 2006). Não existe momento algum em que todas as estrelas estão estruturadas em um volume observacionalmente acessível.

A fim de incluir as populações de anãs marrons e de estrelas de massa extremamente baixa, pensou-se em uma generalização da IMF canônica.

### 4.3.2 Forma das Multipotências

Como discutido acima, uma motivação teórica referente à IMF que possa ser validada observacionalmente não existe. Sabe-se que há menos estrelas de alta massa do que estrelas de baixa massa; no entanto, para além do presente, as teorias de formação estelar não conseguem fazer previsões confiáveis de qualquer natureza sobre a forma da IMF em diferentes condições físicas. Em particular, a alteração global das características da IMF com a metalicidade, densidade ou temperatura, prevista pela teoria, não é evidente. Além disso, pesquisas anteriores apontam uma longa lista de vieses que afetam a conversão da distribuição de brilho observada das estrelas na subjacente IMF. Esses estudos são tão válidos hoje quanto antes e, na análise dos dados do GAIA, alguns deles terão que ser considerados antes de novas inferências acerca da IMF. A lista de todos os vieses que afetam inevitavelmente tal estudo pode ser encontrada em Kroupa et al. (2013, Secção 2.1). Uma descrição empírica por meio de uma lei de multipotências da IMF é, portanto, perfeitamente adequada e tem vantagens importantes sobre outras formulações (Kroupa, 2008). A formulação geral da IMF estelar é, então,

$$\xi(m) = k \begin{cases} \left(\frac{m}{m_H}\right)^{-\alpha_o}, & \text{se } m_{\min} \leq m/M_{\odot} \leq m_H \\ \left(\frac{m}{m_H}\right)^{-\alpha_1}, & \text{se } m_H \leq m/M_{\odot} \leq m_o \\ \left(\frac{m_o}{m_H}\right)^{-\alpha_1} \left(\frac{m}{m_o}\right)^{-\alpha_2}, & \text{se } m_o \leq m/M_{\odot} \leq m_1 \\ \left(\frac{m_o}{m_H}\right)^{-\alpha_1} \left(\frac{m_1}{m_o}\right)^{-\alpha_2} \left(\frac{m}{m_1}\right)^{-\alpha_3}, & \text{se } m_1 \leq m/M_{\odot} \leq m_{\max} \end{cases} \quad (4.25)$$

onde  $m_{\max} \leq m_{\max*} \approx 150 M_{\odot}$  depende da massa estelar do aglomerado e as constantes podem ser obtidas na Tabela 4.1. Além disso, uma maneira conveniente para resumir as muitas estimativas da

IMF é o  $\alpha$ -plot (Figura 4.7), que exhibe as determinações dos índices da lei de multipotências da IMF,  $\alpha$ , sobre a média logarítmica do intervalo de massa em que  $\alpha$  é determinado.

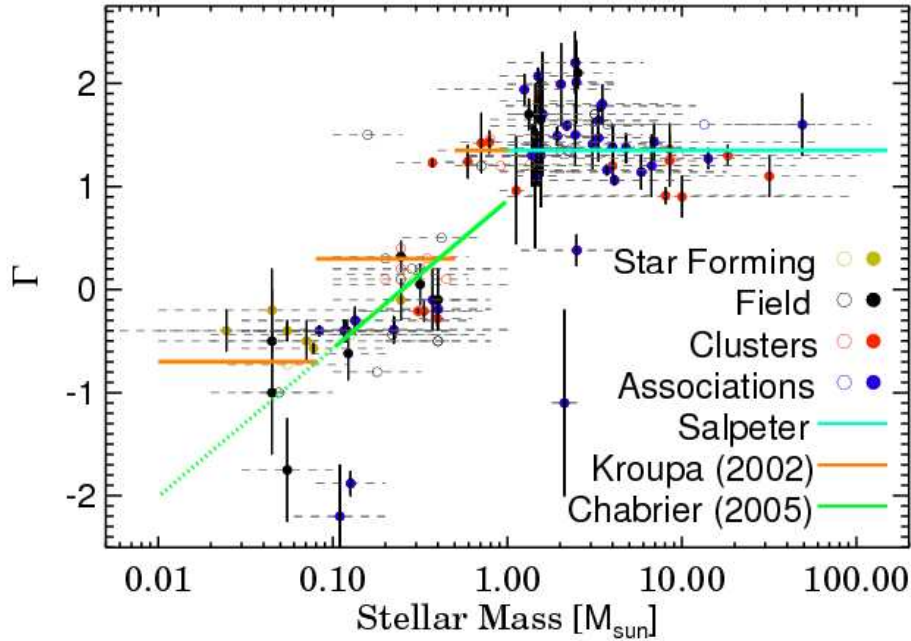


Figura 4.7:  $\alpha$ -plot onde  $\alpha = \Gamma + 1$ . Os dados foram obtidos da compilação de Scalo (1998) e Kroupa (2002) das determinações de  $\alpha$  sobre diferentes intervalos de massa para a Via Láctea e AG e associações OB da Grande Nuvem de Magalhães (Kroupa, 2001, Figura 1).

Uma vantagem dessa formulação é que as funções geratrizes analíticas e outras quantidades podem ser facilmente derivadas, a fim de se contruir um modelo, como veremos na Secção 4.4.

Tabela 4.1: Constantes da IMF de multipotências.

|            |  |
|------------|--|
| $\alpha_o$ | $+0.3 \pm 0.7$   |
| $\alpha_1$ | $+1.3 \pm 0.5$   |
| $\alpha_2$ | $+2.3 \pm 0.3$   |
| $\alpha_3$ | $+2.7 \pm 0.3$   |
| $m_{\min}$ | $0.01 M_{\odot}$                                       |
| $m_H$      | $0.08 M_{\odot}$                                       |
| $m_o$      | $0.5 M_{\odot}$  |
| $m_1$      | $1 M_{\odot}$  |
| $k$        | $0.877 \pm 0.045 \text{ estrelas/pc}^3 M_{\odot}^{-1}$ |

Bom, até agora, discutimos brevemente os aspectos mais pragmáticos associados à teoria de Kroupa acerca das IMF<sup>7</sup>. Manteremos o princípio lacônico de análise e discutiremos suas implicações filosóficas.

<sup>7</sup>Note que, como qualquer teoria, a de Kroupa representa uma compilação de diversos trabalhos prévios. Embora comumente suas ideias não são referidas como teoria, utilizar-nos-emos neste texto de tal asserção, uma vez que corresponde a um ponto de vista bastante claro referente ao tema e confronta diretamente outras ideias.

Primeiramente, note que já mencionamos o fato de uma IMF não poder ser falseada diretamente a partir das análises das funções de massa observadas dos vários sistemas estelares, através da conjectura da função de massa inicial de um aglomerado de Kroupa. Mas, ao mesmo tempo, afirmamos que uma forma de se obter os parâmetros constituintes da IMF de multipotência, por exemplo, é por meio do  $\alpha$ -plot que, por sua vez, é construído observacionalmente. Além disso, é válido considerar que a hipótese da universalidade de Kroupa não corrobora com teorias de formação estelar.

Com efeito, as teorias de formação estelar mais aceitas são:

**Teoria de Jeans:** de acordo com o argumento da massa de Jeans (Jeans, 1902), a formação estelar em ambiente de baixa metalicidade deve produzir, em média, estrelas de massa maior e, portanto, produz uma IMF *top-heavy*, ou seja, a razão entre o número de estrelas de alta massa e estrelas de baixa massa tende a aumentar. Isso ocorre pois, em ambientes de baixa metalicidade, o arrefecimento do gás é menos eficiente causando maiores massas de Jeans, condição necessária para a taxa de colapso gravitacional em protoestrela e, conseqüentemente, massas estelares maiores. Tal gás mais quente produz um deslocamento na IMF para que o pico da função esteja na região de maiores massas, como tem sido mostrado com as mais atualizadas simulações utilizando códigos SPH (por exemplo, Klessen et al., 2007).

**Teoria de Adams-Fatuzzo:** de acordo com Adams & Fatuzzo (1996), a teoria de Jeans é inválida uma vez que não existe massa de Jeans preferida em uma nuvem molecular turbulenta. Em vez disso, invocam o teorema do limite central<sup>8</sup>, juntamente com a aglomeração autoregulada, e sugerem que as massas estelares finais são dadas pelo equilíbrio entre a energia de *feedback* da formação estelar e a taxa de acreção do envoltório protoestelar e do disco circum-estelar. Além disso, a IMF final deve conter mais estrelas de alta massa que de baixa massa em ambientes pobres em metais.

Ambas as teorias podem ser refinadas por meio de um estudo da distribuição das condições físicas em uma determinada nuvem de formação estelar, mas ambos levam à mesma conclusão, ou seja, que ambientes de baixa metalicidade e de alta temperatura devem produzir IMF *top-heavy*. Isso leva ao resultado de que a IMF varia com a metalicidade e a temperatura do gás primordial, negando, por sua vez, a hipótese da universalidade da IMF. A formação estelar no Universo primordial pode ter produzido IMF *top-heavy*; porém, as amostras de populações simples que abrangem todas as épocas cosmológicas disponíveis no Grupo Local de galáxias não têm, até recentemente, fornecido evidência convincente que permitam falsear a hipótese da universalidade da IMF.

Essas duas aparentes contradições pode-nos levar às seguintes indagações.

1. Como obtemos uma IMF da observação, sendo que esta não valida aquela?

---

<sup>8</sup>Vale lembrar que o teorema do limite central foi utilizado, provavelmente, pela primeira vez por Zinnecker (1984) a fim de estudar a forma da IMF a partir da fragmentação hierárquica de núcleos colapsantes.

2. Como pode existir uma hipótese de universalidade acerca da IMF, uma vez que contradiz teorias de formação estelar?

Como uma discussão de tais indagações, sob o ponto de vista filosófico, está fora do escopo desta dissertação, faremo-la no Apêndice C. Passemos, então, ao ponto chave deste Capítulo, a saber, a obtenção dos modelos.

## 4.4 Condições Iniciais Para as Simulações: MCluster

Até agora, discutimos o modelo que corresponde à galáxia e ao AG. Vimos que, a fim de modelar o AG, precisamos especificar, para o modelo, a distribuição de massa ao longo de suas estrelas e quais massas serão distribuídas em tal espaço. Como já aludido, para a distribuição espacial utilizaremos o modelo de Plummer que é caracterizado pela massa  $M$  e pelo seu comprimento de escala  $r_{\text{pl}}$ ; e para a IMF utilizaremos as duas IMF formuladas por Kroupa. Passemos, então, para a construção de tais modelos, que será feita com o auxílio do código *MCLUSTER* (Küpper et al., 2011).

### 4.4.1 Distribuição Espacial

Dadas a densidade de massa  $\rho(r)$ , correspondendo à equação (4.9), e a massa  $M(r)$ , contida em um raio  $r$ , correspondendo à equação (4.14), ambas parametrizadas por  $M$  e  $r_{\text{pl}}$  — onde  $M$  e  $r_{\text{pl}}$  são a massa e o raio de Plummer do modelo, respectivamente — definamos uma variável aleatória  $X(r)$  tal que  $X(r) := M(r)/M \in [0; 1]$ . Dessa forma, temos uma grade de números  $r, M(r), X(r)$ . Variando  $X \in [0; 1]$ , podemos interpolar  $r$  de tal grade. Daí, basta computarmos  $x, y, z$  da seguinte forma, onde  $x, y, z$  correspondem às coordenadas espaciais das estrelas. Para uma dada partícula, já obtemos  $r$ . Para todos os  $x$  e  $y$  possíveis,  $z$  possui uma distribuição uniforme  $p(z) = 1/(2r) = \text{constante}$  ao longo do intervalo  $-r \leq z \leq +r$ . Logo, para uma segunda variável aleatória  $X_2(z) \in [0; 1]$  temos

$$X_2(z) := \int_{-r}^r p(s) ds = \frac{1}{2r}(z + r) \quad (4.26)$$

onde  $X_2(+r) = 1$ .

A função geratriz para  $z$  é dada por

$$z(X_2) = 2rX_2 - r \quad (4.27)$$

Dados  $r$  e  $z$ , para obtermos  $x$  e  $y$ , basta escolhermos um ângulo aleatório tal que seja uniformemente distribuído no intervalo  $[0; 2\pi]$ . Logo, analogamente, temos  $p(\theta) = 1/(2\pi)$  e a terceira variável

aleatória é definida por

$$X_3(\theta) := \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} ds = \frac{\theta}{2\pi} \quad (4.28)$$

$$\theta(X_3) = 2\pi X_3 \quad (4.29)$$

Finalmente, obtemos  $x$  e  $y$  a partir de

$$x = (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta) \quad (4.30)$$

$$y = (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta) \quad (4.31)$$

A distribuição das velocidades é obtida com o auxílio da equação (4.17), fornecida pelo Teorema 4.1, onde para cada  $r$  temos um  $\sigma_r(r)$  associado. Escolhendo aleatoriamente a partir de uma distribuição gaussiana com dispersão  $\sigma_i$ , com  $i = x, y, z$ , obtemos as velocidades  $v_x, v_y, v_z$  de cada partícula.

O procedimento acima permite obter as condições iniciais do modelo e é utilizado pelo código *MCLUSTER* por meio da rotina *generate\_plummer*. A fim de que o modelo sirva como *input* do código *NBODY6*, devemos também fornecer a massa de cada partícula, o que é feito a partir de uma IMF adotada, no nosso caso aquelas descritas na Secção anterior. As rotinas que a geram são *generate\_m1* e a opção para *mfunc=2* dentro do código principal.

Finalmente, vamos construir o espectro de massa a partir da IMF canônica, lembrando que o procedimento pode ser estendido à IMF de multipotências.

#### 4.4.2 Distribuição de Massa

A função geratriz de tal IMF pode ser obtida a partir das correspondentes probabilidades, i. e.,

$$p_1 = k_1 m^{-\alpha_1}, \quad \text{se } 0.08 \leq m/M_\odot \leq 0.5 \quad (4.32)$$

$$p_2 = k_2 m^{-\alpha_2}, \quad \text{se } 0.5 \leq m/M_\odot \leq m_{\max} \quad (4.33)$$

onde  $k_i$  são constantes de normalização que também asseguram a continuidade da IMF em  $0.5 M_\odot$ , ou seja,

$$\int_{0.08}^{0.5} p_1(m) dm + \int_{0.5}^{m_{\max}} p_2(m) dm = 1 \quad (4.34)$$



Definamos as variáveis aleatórias

$$Y_1 := \int_{0.08}^m p_1(s) ds ,$$

para  $m \leq 0.5M_\odot$  e

$$Y_2 := \int_{0.08}^{0.5} p_1(m) dm + \int_{0.5}^m p_2(s) ds ,$$

para  $0.5 \leq m/M_\odot \leq m_{\max}$ .

A função geratriz é obtida a partir da inversão das funções  $Y_i$  acima. O procedimento consiste, então, na escolha de números aleatórios no intervalo  $[0; 1]$  tal que a massa corresponda a  $m(Y_1)$ , se  $0 \leq Y \leq Y_1$  ou  $m(Y_2)$ , se  $Y_1 \leq Y \leq 1$ .

Tal algoritmo pode, como já exposto, ser estendido à IMF de multipotências. Como o procedimento é análogo, não faremos tal dedução .

### 4.4.3 Modelos

De posse das condições iniciais e das massas, o arquivo de entrada de um modelo que contém  $N$  estrelas deve ser um arquivo de nome `fort.10` contendo  $N$  linhas da forma  $m \ x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z$ .

A Tabela 4.2 fornece os modelos que serão utilizados no Capítulo 6, e a Figura 4.8 exhibe as propriedades do modelo 1. Nela, é possível visualizar a distribuição das estrelas ao longo do plano  $xOy$ , bem como a distribuição angular das estrelas com relação ao centro do globular.

Note que, para cada modelo, deve ser fornecido uma IMF, a massa  $M$  e seu  $r_h$ , lembrando que  $r_{pl}$  e  $r_h$  estão relacionados pelo Teorema 4.1 através da equação (4.23). Além disso, optamos por não variar a metalicidade deles, sendo mantida em  $Z = 0.002$ . Os valores que utilizaremos para o raio de meia massa são, em parsecs, 0.8, 1.5 e 3.8, dessa forma, poderemos variar a concentração do modelo, através das equações (4.23), (4.22) e (4.5), onde o raio mareal é dado pelo problema restrito de três corpos (vide apêndice D). Para a massa,  $\nu \times 10^3 M_\odot$ , onde  $\nu = 0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1.0$ . Além disso, como já salientado, as IMF serão ou a canônica ou a de multipotências, a fim de se estudar a importância da população de anãs marrons, por exemplo, na dinâmica proposta. Como discutimos na Secção 3.9, poderíamos incluir uma população de binárias primordiais. Porém, isso não será feito neste estudo, uma vez que não intentamos analisar a influência destas na dinâmica abordada aqui.

Note que os modelos da Tabela 4.2 correspondem a AG com idade nula. Como veremos, no Capítulo 6, utilizaremos nas simulações, combinações deles a fim de verificar aspectos dinâmicos da colisão entre eles, como velocidade limite para que se fundam, relação com a aproximação impulsiva (Secção 6.2), variações energéticas e variações na massa. Adiaremos a especificação das simulações até o referido Capítulo, uma vez que complicações serão incluídas, tais como velocidade relativa entre

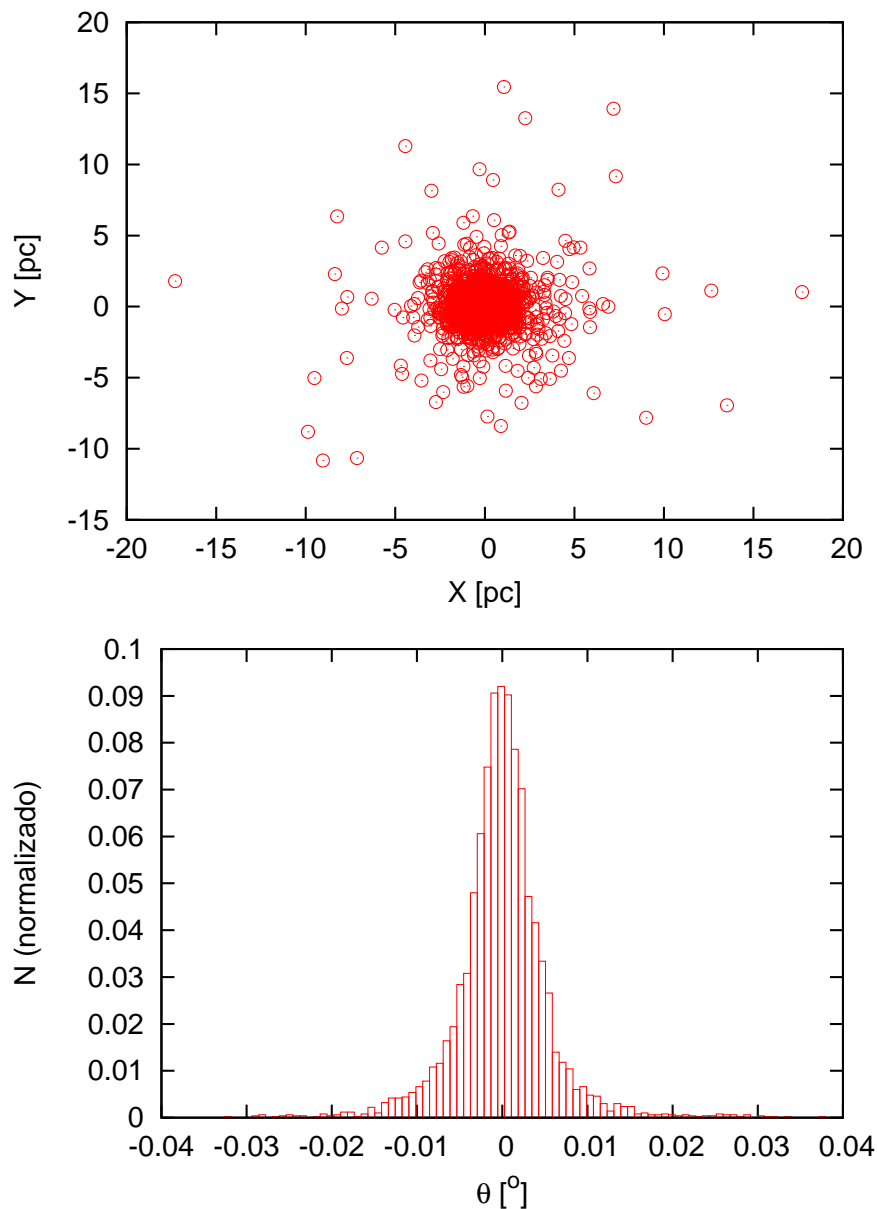


Figura 4.8: Modelo 1. Acima, distribuição das estrelas dos modelos no plano  $xOy$ , cuja origem é o centro do aglomerado. Abaixo, o histograma associado à distribuição angular das estrelas no aglomerado, onde o ângulo é medido a partir de seu centro ao longo de sua órbita. Note que, embora correspondam ao modelo M1, as Figuras ilustram quaisquer modelos de idade nula, uma vez que são esferas de Plummer. As diferenças entre eles não são perceptíveis em tais gráficos.

eles, separação e a geometria da colisão. Note também que, no total, trabalharemos com 30 modelos de idade nula. Pretendemos analisar como variam os aspectos dinâmicos acima mencionados quando variamos a IMF, o raio de meia massa e a massa relativa entre os modelos, além das velocidades relativas.

Afora tais modelos, utilizaremos outros três nas simulações das colisões, sendo dois que possuem idade não nula, i. e., modelo que possua corrente mareal, e um que possui idade nula e propriedades

Tabela 4.2: *Modelos e variação dos parâmetros.* Para as massas,  $M_o = 10^3 M_\odot$ . Todos os modelos possuem idade nula.

| Modelo | IMF            | $r_h$ (pc) | Massa              |
|--------|----------------|------------|--------------------|
| M1     | Canônica       | 0.8        | $1.049 \times M_o$ |
| M2     | Multipotências | 0.8        | $1.049 \times M_o$ |
| M3     | Canônica       | 1.5        | $1.049 \times M_o$ |
| M4     | Canônica       | 3.8        | $1.049 \times M_o$ |
| M5     | Canônica       | 0.8        | $0.801 \times M_o$ |
| M6     | Canônica       | 0.8        | $0.548 \times M_o$ |
| M7     | Canônica       | 0.8        | $0.209 \times M_o$ |
| M8     | Canônica       | 0.8        | $0.104 \times M_o$ |

semelhantes às deles. Tais modelos estão esquematizados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: *Modelo e variação dos parâmetros.* Para a massa,  $M_o = 10^3 M_\odot$ . O modelo possui idade de 1 bilhão de anos.

| Modelo | IMF      | $r_h$ (pc) | Massa             | Idade (milhões de anos) |
|--------|----------|------------|-------------------|-------------------------|
| M9     | Canônica | 5.34       | $1.04 \times M_o$ | 0.0                     |
| M10    | Canônica | 5.34       | $1.04 \times M_o$ | 1208.20                 |
| M11    | Canônica | 5.36       | $1.08 \times M_o$ | 1169.20                 |

Note que os valores do raio de meia massa e da massa dos modelos M9, M10 e M11 são aproximadamente iguais. Dessa forma, realizando simulações com eles, poderemos verificar o comportamento da cauda após a colisão. Duas simulações serão descritas na Secção 6.3: em uma, o modelo M9 colidirá com o modelo M10 e, na outra, o modelo M10 colidirá com o modelo M11. O objetivo de tais simulações é descrever o comportamento da cauda mareal, quando ambos possuem uma e quando apenas um a possui. Por isso a diferença entre eles será apenas a ausência ou não de corrente mareal, admitindo que as propriedades que definem os modelos são aproximadamente iguais. Os modelos de idade não nula foram obtidos a partir da simulação de um modelo com massa inicial igual a  $2.86 \times 10^3 M_\odot$ ,  $r_h = 0.76$ . Além disso, a IMF é a canônica e a órbita do modelo foi configurada como circular no plano galáctico, cujo raio e velocidade tangencial eram 8.5 kpc e 220 km/s, respectivamente. Os recortes foram obtidos quando o modelo, após 1 bilhão de anos, atingiu ângulos de  $\pm 30^\circ$ , com relação à posição inicial. A Figura 4.9 ilustra os recortes. A escolha do limite de tempo foi devido à necessidade da existência de uma corrente crescida e bem estruturada. Antes disso, possivelmente, a cauda estaria se formando e não estaria bem definida.

Como é sabido, as caudas crescem ao longo da órbita do modelo (por exemplo, Meylan et al., 2001; Fellhauer et al., 2007; van Putten, 2012), como pode ser observado na Figura 4.10.

Após descrever os modelos tanto da galáxia quanto do aglomerado, discutiremos no próximo Capítulo os principais aspectos do código *NBODY6* que usamos nesta dissertação.

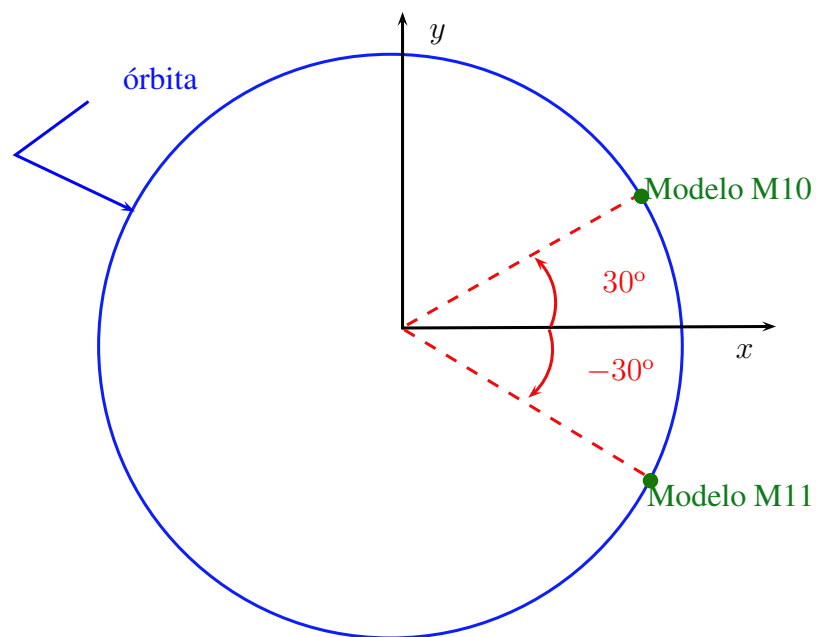


Figura 4.9: Geometria associada à obtenção dos modelos M10 e M11. Os dois modelos encontram-se em uma única órbita ao longo do centro galáctico. Na verdade, os dois modelos representam instantes de um modelo ao longo de sua órbita. A órbita, por simplicidade, pertence ao plano galáctico e possui raio de 8.5 kpc. Já o modelo possui velocidade tangencial de 220 km/s. Após 1 bilhão de anos, quando a posição do modelo formou um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $x$ , com  $y < 0$ , o modelo M11 foi gerado. Analogamente, subsequentemente, quando o modelo formou um ângulo de  $30^\circ$  com o eixo  $x$ , com  $y > 0$ , o modelo M10 foi gerado. Portanto, os modelos M10 e M11 foram obtidos a partir de um único modelo que orbitava o centro galáctico, no disco galáctico, e possuem idades maiores que 1 bilhão de anos.

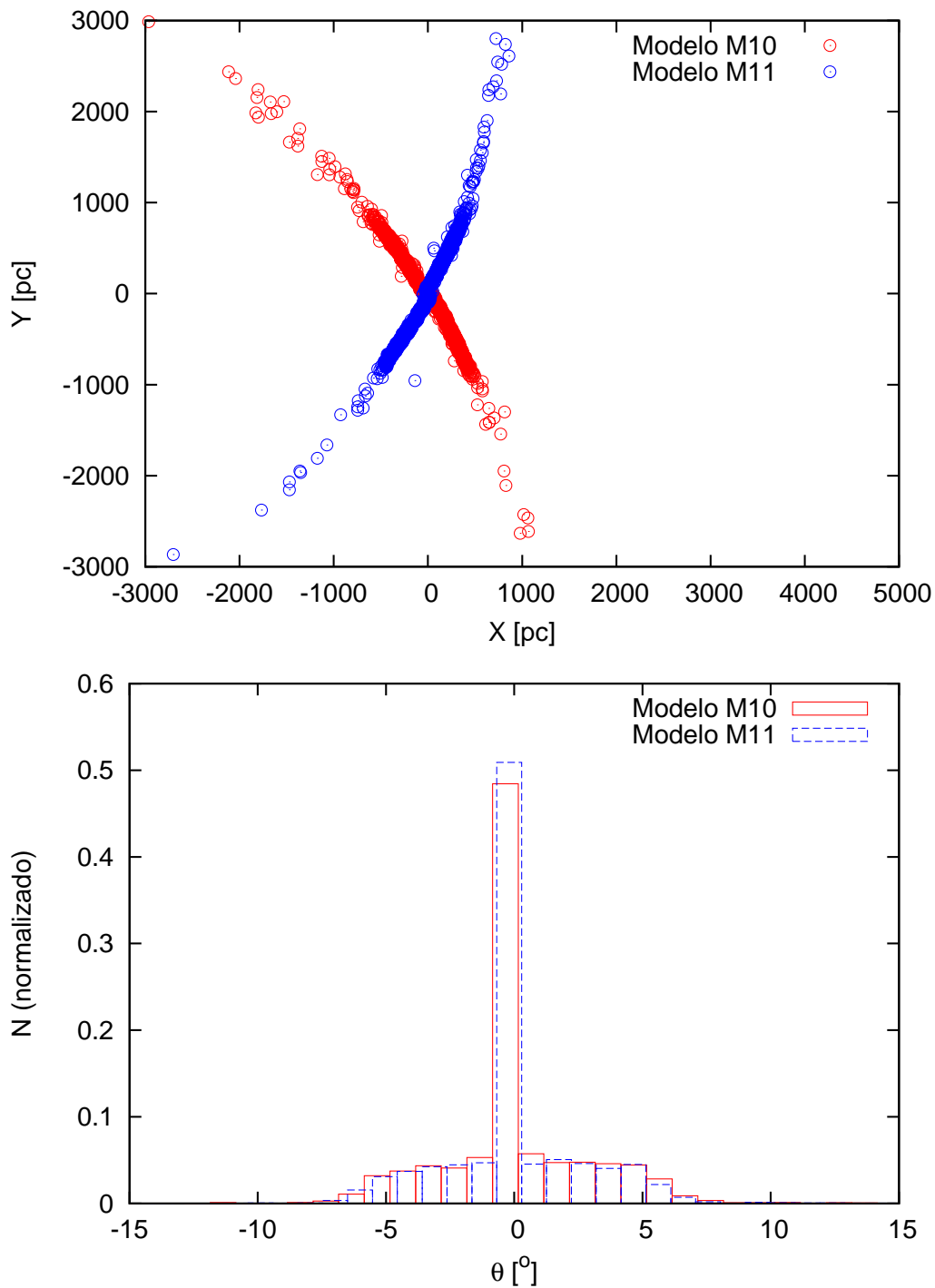


Figura 4.10: Modelos com cauda. Acima, distribuição das estrelas dos modelos no plano  $xOy$ , cuja origem é o centro dos aglomerados. Abaixo, o histograma associado à distribuição angular das estrelas em cada modelo, onde o ângulo é medido ao longo da órbita de cada um. Note a diferença entre estes modelos e aqueles de idade nula (Figura 4.8), principalmente no que concerne ao comprimento de escala dos modelos. Ademais, os modelos de idade não nula apresentam um espalhamento maior nos respectivos histogramas e, como suas caudas são formadas ao longo de suas órbitas, suas distribuições espaciais possuem inclinações correspondentes.

## Capítulo 5

# NBODY6: Simulação Gravitacional de $N$ Corpos

*“Our field has undergone a remarkable development, fuelled by an exponential growth of computing power as well as software advances. Although the beginnings were modest and the developments slow, it has now blossomed into a fully fledged scientific activity. For the longer term, further progress is only possible if we attract the younger generation to seek new challenges and enrich our subject.”*

**Sverre Aarseth**

Neste Capítulo, discutiremos os principais aspectos associados ao código *NBODY6*. Porém, antes disso, abordaremos sucintamente os vários métodos que podem ser usados para modelar a evolução dinâmica de um AG, i. e., o cálculo de como sua distribuição de estrelas evolui ao longo do tempo. Há diferentes classificações possíveis referentes aos métodos utilizados para evoluir numericamente um modelo de AG; seguiremos aqui a classificação utilizada por Davies (2013), embora a Figura 5.2 indique a classificação proposta por Heggie & Hut (2003) de forma esquemática. Dada essa consideração inicial, afirmamos que os métodos podem ser: integração direta de  $N$  corpos, integração baseada na aproximação de Fokker-Planck, integração que utiliza modelos de gás e integração subsidiada por métodos de Monte Carlo. Tais abordagens variam tanto quanto ao realismo físico como à velocidade, como mostrado na Figura 5.1.

### **integradores diretos de $N$ corpos**

Por razões de completeza textual, retomaremos os principais pontos vistos no Capítulo 2 alusivos à integração numérica, além de expandirmos tal análise. Vimos que nos cálculos diretos do PNC, as estrelas são tratadas como objetos individuais e as forças entre elas são calculadas

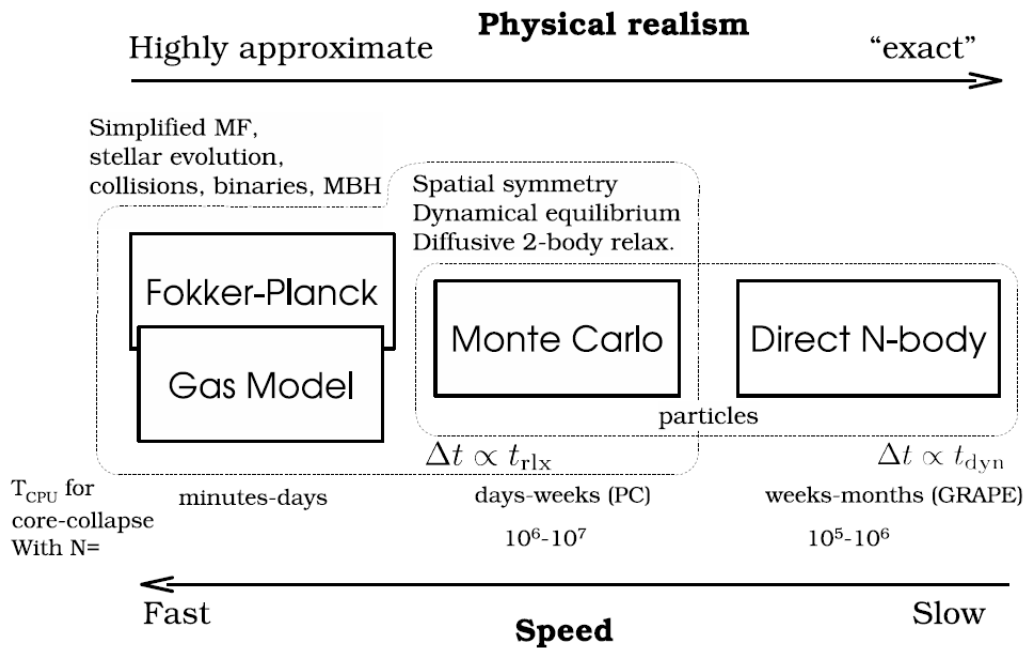


Figura 5.1: Os vários métodos que podem ser utilizados para modelar a evolução dinâmica de um AG incluindo relaxação (Amaro-Seoane et al., 2007). Da esquerda para a direita, o realismo físico dos códigos aumenta à medida que sua velocidade diminui.

diretamente. Por definição, esta é a abordagem mais realista, porém, é mais custosa em termos de tempo de computação necessário para simular a evolução dinâmica de um modelo, com simulações que podem durar várias semanas em *hardware* integrado projetado para tal propósito. Podemos nos perguntar por que é tão difícil modelar um AG completamente, simplesmente calculando as forças gravitacionais entre as estrelas individuais e, em seguida, evoluir as mesmas? Como foi visto na Secção 3.8, o encontro próximo entre dois corpos é o que impulsiona a evolução dinâmica em AG via relaxação de dois corpos.

Assim, qualquer código deve ser capaz de incluir os efeitos de várias pequenas perturbações precisamente (*flybys*). Tais códigos devem ser cuidadosos ao usar aproximações no cálculo da força gravitacional (como fazem os *treecodes*, por exemplo). Dessa forma, cálculos completos da força serão melhores (mesmo que mais custosos). Ademais, há uma enorme gama de escalas de tempo que se deve considerar quando se faz uma modelagem da evolução dinâmica de um AG. Para um objeto típico, a escala de tamanho é de alguns parsecs, o que implica tempos de cruzamento de cerca de  $10^5 - 10^6$  anos. Isto deve ser comparado com as idades típicas desses — cerca de  $10^{10}$  anos. Mas a gama de escalas é ainda maior: alguns dos objetos dentro de um AG são, na realidade, sistemas muito compactos de estrelas binárias (Secção 3.9), tendo períodos orbitais de apenas algumas horas. Evoluir um modelo de AG, portanto, envolve estabelecer um grande número de passos de integração numérica. Ao longo dos anos, um grande desenvolvi-

mento dos códigos diretos de  $N$  corpos tem ocorrido, principalmente liderado pelo Dr. Sverre Aarseth. Várias técnicas têm sido empregadas para tornar o problema mais tratável. Por exemplo, a abordagem de binárias de formas específicas, ou mesmo usar *hardwares* específicos tais como placas GRAPE ou GPU. Discutiremos nas próximas Secções sobre os principais aspectos concernentes ao código *NBODY6*, uma vez que foi o código adotado durante o estudo e feitura desta dissertação.

### integradores de Fokker-Planck

Em códigos baseados na equação de Fokker-Planck, considera-se a evolução da função de distribuição, devido aos efeitos das perturbações tais como encontros próximos entre dois corpos. Para estrelas que se movam em um potencial suave  $\phi$  do globular (calculado através da equação de Poisson), a evolução da função de distribuição  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  é dada pela equação de Boltzmann não colisional (Binney & Tremaine, 2008)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (5.1)$$

onde  $f$  representa a função de densidade de probabilidade associada a cada estrela no espaço de fase considerado e  $df/dt$  é a derivada convectiva ou de Lagrange, *viz.*, representa a taxa de variação da densidade de probabilidade local, como visto por um observador que se move através do espaço de fase com uma estrela. Assim, se o potencial fosse perfeitamente suave,  $f$ , para um determinado grupo de estrelas, não mudaria enquanto o grupo se move dentro do AG. Naturalmente, em um AG real, o potencial não é suave em todas as escalas. É tal granulação no potencial que proporciona a relaxação; em outras palavras, ela implica que a função de distribuição  $f$  evolua no tempo. Os efeitos da relaxação são também denominados efeitos colisionais<sup>1</sup>. Assim, fala-se um termo de adicional  $\Gamma(f)$  tal que

$$df/dt = \Gamma(f) \quad (5.2)$$

onde  $\Gamma$  é chamado **operador encontro** e é não nulo quando ocorre um encontro próximo, e nulo caso contrário. Acredita-se que encontros próximos entre dois corpos seja a causa da relaxação, como já dissemos. Isto ocorre localmente no sentido de que um *flyby* (ou encontro próximo) muda a velocidade de uma estrela mas não a sua posição. Isso implica que (Binney & Tremaine, 2008):

$$\Gamma(f) = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_i} (D[\Delta v_i] f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial v_i \partial v_j} (D[\Delta v_i \Delta v_j] f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup>Novamente, colisional aqui significa que as velocidades estão variando e as estrelas se aproximam, em vez de um impacto físico *stricto sensu*.



onde  $D[\Delta v_i]$  e  $D[\Delta v_i \Delta v_j]$  são os **coeficientes de difusão** uma vez que caracterizam a taxa com que as estrelas se difundem através do espaço de fase devido aos encontros. Além disso, aquele representa o valor esperado da variação da velocidade por unidade de tempo em virtude do encontro. A evolução da função de distribuição pode ser expressa e resolvida numericamente utilizando métodos de diferenças finitas (Cohn, 1979, por exemplo). Códigos baseados na equação de Fokker-Planck (equações 5.2 e 5.3) têm sido utilizados para modelar vários AG observados, como por exemplo NGC 6397 (Drukier, 1995). Concluindo, em códigos de Fokker-Planck a evolução de uma versão discretizada da função de distribuição é evoluída numericamente. Esses tem a enorme vantagem de velocidade (pode-se modelar a evolução de um AG típico em menos de 1 dia), mas isso vem com o custo do realismo, relativo a certos processos que ocorrem no AG, como colisões estelares e evolução das binárias, que não são incluídos.

### modelo de gás

Um aglomerado de estrelas que se mantêm coesas por suas forças gravitacionais mútuas pode comportar-se de maneira semelhante a uma bola de gás autogravitante, se o número de estrelas for suficientemente grande (Larson, 1970, por exemplo). Foi visto na Secção 3.8 como a consideração das propriedades termodinâmicas de tal objeto pode conduzir à compreensão sobre como sua densidade central evolui ao longo do tempo. Para um AG simetricamente esférico, sua estrutura pode ser descrita por uma densidade  $\rho(r)$  e uma temperatura  $T(r)$ , onde a temperatura é substituída pela dispersão de velocidade  $\sigma$  do aglomerado; então o AG tem uma pressão  $P(r) = \rho\sigma^2$ . Pode-se, então, reescrever as equações de estrutura interna de uma estrela, mas aplicadas a um AG. Essas são (Lynden-Bell & Eggleton, 1980b):

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi\rho r^2 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -4\pi\rho r^2 \left( \sigma \frac{dS}{dt} - \epsilon \right) \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial r} = -\frac{1}{3GmC \ln \Lambda} \frac{\sigma L(r)}{\rho 4\pi r^2} \quad (5.7)$$

onde  $\sigma$  é a raiz quadrada da velocidade média quadrática unidimensional,  $m$  é a massa de uma estrela individual,  $C$  é uma constante relacionada com o processo de relaxação,  $\ln \Lambda$  é o logaritmo Coulombiano (e está ligado ao espalhamento de dois corpos, como foi visto na

Secção 3.8),  $S = \ln(\sigma^3/\rho)$  e  $\epsilon$  é a taxa de geração de energia em interações de três corpos (onde uma interação entre três estrelas não ligadas produz um par binário e uma terceira estrela com excesso de energia, conforme descrito na Secção 3.9). Com a adição de condução térmica, onde o calor flui do centro do AG para as regiões mais externas, pode-se então modelar a evolução dinâmica dos globulares. Isso funciona em parte, porque a escala de tempo de tal processo é bastante longa, como foi visto na Capítulo 3. Resumidamente, nos chamados modelos de gás, o AG é modelado como uma bola de gás autogravitante (termicamente condutora), analogamente à modelagem de uma estrela.

**métodos de Monte-Carlo** O método numérico de Monte Carlo está relacionado com o método de Fokker-Planck descrito anteriormente. No entanto, em vez de resolver a equação de Boltzmann (com o termo colisional) pelo método de diferenças finitas, utiliza-se outra abordagem; por exemplo, acompanhar estrelas cujas órbitas sejam similares, agrupando-as e tratando-as como uma única partícula. Tal abordagem foi introduzida pela primeira vez por Hénon (1971), a fim de modelar a evolução dinâmica de um AG. O método pressupõe que o AG é esfericamente simétrico e está em equilíbrio dinâmico. Em outras palavras, é possível utilizar passos de integração que são muito maiores do que os períodos orbitais típicos, em vez de usar passos que são uma fração do tempo de relaxação — equação (3.8). O posição de cada partícula ao longo de sua órbita é escolhida de forma aleatória, ponderando cada posição a partir do tempo que permanece na mesma. Então, é viável utilizar diferentes passos em diferentes pontos dentro do AG. Por exemplo, é possível utilizar passos menores no centro do aglomerado, uma vez que a escala de tempo associada à relaxação é tipicamente menor. A relaxação é tratada como um processo difusivo da mesma maneira que o método de Fokker-Planck descrito anteriormente. Analogamente, encontros próximos causam mudanças nas órbitas das estrelas envolvidas, ou no caso aqui considerado, das partículas que representam um grupo de estrelas. A cada passo, um par de partículas é selecionado aleatoriamente e suas órbitas são alteradas devido ao encontro próximo entre elas. Ao longo do tempo, por conseguinte, as órbitas são alteradas pelo efeito de um grande número de encontros próximos entre dois corpos, como esperado no caso de aglomerado real. Uma vantagem importante do método de Monte Carlo em comparação com o método de Fokker-Planck é que outros processos podem ser incluídos, por exemplo, encontros que envolvem binárias (Fregeau & Rasio, 2007, por exemplo). Tais encontros serão importantes para a evolução dinâmica dos AG. Códigos de Monte Carlo têm sido utilizados para modelar aglomerados observados, incluindo M 4 (Heggie & Giersz, 2008), NGC 6397 (Giersz & Heggie, 2009) e M 22 (Heggie & Giersz, 2014). Atualmente, o melhor código que utiliza métodos de Monte Carlo é o MOCCA (MOnte Carlo star Cluster simulAtor), desenvolvido pelo Dr. Mirek Giersz. Ele é atualmente o único código dinâmico capaz de realizar estudos rápidos e eficazes referentes à evolução de grandes globulares reais com precisão comparável à precisão dos códigos de  $N$  corpos (Hypki & Giersz, 2013). Recentemente, procedimentos de

integração direta de poucos corpos com base no código *FewBody* (Fregeau et al., 2004) foram implementados, o que possibilitou o rastreamento de todos os canais de interação entre binárias e entre estrelas isoladas com pares binários (Giersz et al., 2013). Graças a esta extensão no código, o MOCCA pode efetivamente estudar a evolução de diferentes populações de objetos “peculiares/exóticos” — por exemplo, buracos negros (Heggie & Giersz, 2014), variáveis cataclísmicas, estrelas *blue stragglers* (Hypki & Giersz, 2013) — em um ambiente em que um modelo de AG esteja evoluindo. Além disso, no código MOCCA, o processo de escape dos aglomerados estelares limitados por meio das marés foi implementado com mais precisão. O escape não é mais imediato, mas sim retardado. O tempo de escape é inversamente proporcional ao quadrado da diferença entre a energia crítica e a energia da estrela (Fukushige & Heggie, 2000). Pode ser ainda tão grande como alguns bilhões de anos. A implementação do escape com atraso proporcionou ao código MOCCA a capacidade de acompanhar com mais precisão a evolução da massa nos aglomerados estelares e da distribuição de diferentes tipos de objetos no espaço de energia. Resumidamente, os códigos de Monte Carlo posicionam-se em algum lugar entre os modelos de gás e os métodos de Fokker-Planck de um lado e os integradores diretos de  $N$  corpos, do outro, conforme ilustra a Figura 5.1. Estrelas que compartilham as mesmas propriedades orbitais e estelares são agrupadas e tratadas como uma única partícula. As órbitas das estrelas são, então, acompanhadas ao longo do tempo através das interações entre as partículas. Por sua vez, trata-se de um método um pouco mais rápido do que um código direto de  $N$  corpos (embora mais lento do que um de Fokker-Planck e um de gás), além de permitir a implementação de processos, tais como colisões estelares.

Por fim, a Figura 5.2 ilustra as principais referências associadas aos métodos descritos acima na visão de Heggie & Hut (2003).

Como já dissemos, o propósito do presente texto é o estudo de colisões entre AG dadas algumas variações em alguns parâmetros. Dessa forma, um dos métodos anteriormente discutidos deveria ser escolhido. Por conveniência, optamos pelo código *NBODY6* cujas principais características abordaremos ao longo deste Capítulo. Na Secção 5.1, discutiremos acerca da estrutura do programa bem como sobre os parâmetros iniciais que devem ser fornecidos a fim de que o programa evolua o AG e fornece as grandezas dinâmicas associadas à evolução do mesmo. O método de Hermite, utilizado para integrar o sistema será abordado na Secção 5.2. Já o método empregado no cálculo da força, por meio do conceito de vizinhança será abordado na Secção 5.3. Como dissemos, colisões e encontros próximos são deveras importantes; logo, a fim de se eliminar as singularidades que surgem na formulação do PNC, na Secção 5.4, a regularização de dois corpos utilizada, que corresponde a uma generalização da técnica de Levi-Civita, será abordada. Finalizaremos a parte mais técnica e, portanto menos astrofísica, abordando como os sistemas hierárquicos são tratados no código e as unidades comumente utilizadas, nas Secções 5.5 e 5.6, respectivamente. A fim de tornar o PNC mais realista, a evolução estelar é utilizada, bem como as perturbações galácticas. Elas serão discutidas

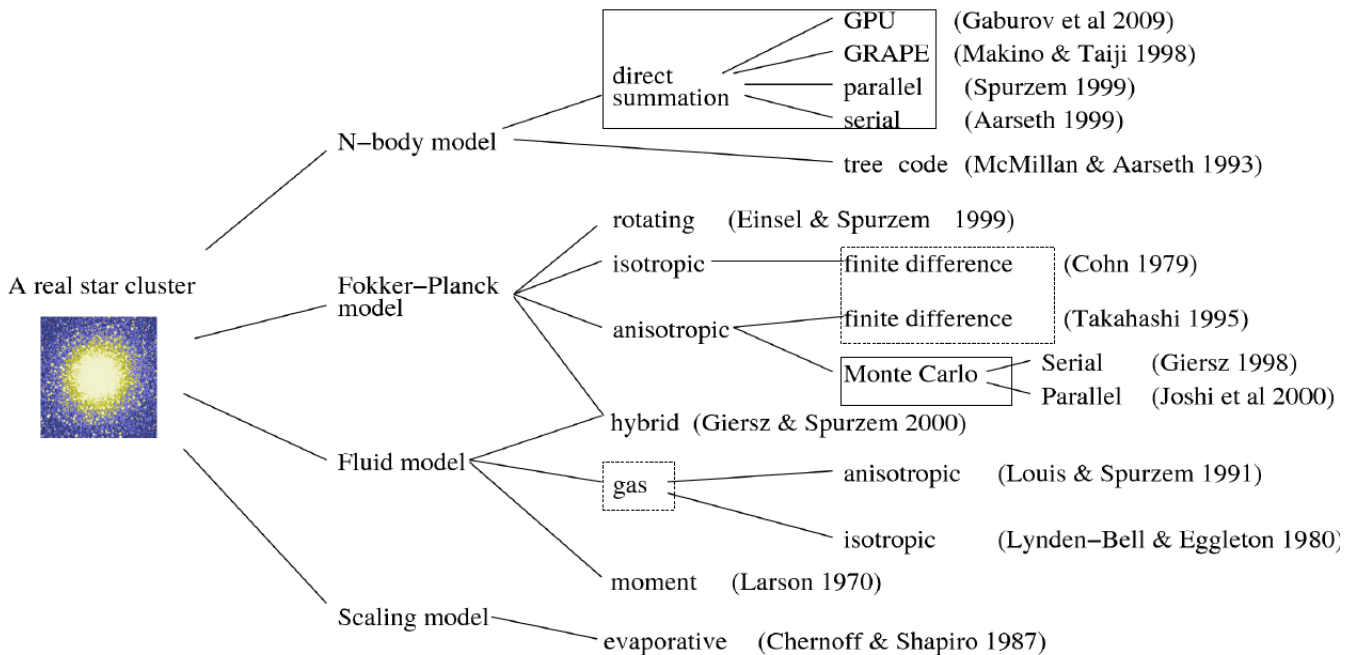


Figura 5.2: Modelos da dinâmica de sistemas estelares densos segundo Heggie & Hut (2003). Neste esquema, os autores citam o que julgam ser referências introdutórias devesas informativas sobre cada método que possua alguma importância no estudo de sistemas estelares densos; não necessariamente o primeiro, ou o mais recente; tampouco incluíram métodos utilizados em outras áreas da dinâmica estelar.

na Secção 5.7. Finalizaremos o Capítulo descrevendo, sucintamente, como o código lida com todos esses algoritmos, i. e., qual a sequência lógica deles e como ocorre a tomada de decisão.

## 5.1 Estrutura e Parâmetros Iniciais

O código *NBODY6* é composto por cerca de 48500 linhas, incluindo comentários e espaçamento puramente de *layout*, e foi escrito em *FORTRAN*. Há cerca de 296 rotinas, com nomes mnemônicos de no máximo seis caracteres. Ademais, quase todas as declarações estão em letras maiúsculas, enquanto os comentários estão em minúsculas. A codificação em geral, está de acordo com um estilo e *layout* rigorosos para maior clareza. Uma vez que esteja de posse do arquivo **nbody6.tar.gz**<sup>2</sup> e descompactado, as rotinas são extraídas com o comando `tar xvf nbody6.tar`<sup>3</sup> e copiado para quatro diretórios, a saber: *Ncode*, *Chain*, *Nchain*, *Docs*. O primeiro contém o código principal, o

<sup>2</sup>Ele pode ser obtido na página de seu construtor <http://www.ast.cam.ac.uk/~sverre/web/pages/nbody.htm> ou por meio da plataforma *GitHub* (<https://github.com/mtrenti/NBODY6>, por exemplo), que corresponde a uma colaboração, revisão e gerenciamento de códigos, tanto abertos quanto privados; trata-se de uma plataforma de construção de *softwares* de forma colaborativa.

<sup>3</sup>Listaremos aqui comandos do sistema operacional Linux. Para outros sistemas operacionais, recomendamos a página de Aarseth.

segundo detém os procedimentos *chain* básicos e *Nchain* lida com a interface correspondente ao PNC. Uma série de arquivos úteis, como modelos de arquivos *input*, listas em TeX de todas as rotinas e estrutura do código antigo *NBODY5* estão incluídos nos diretório *Docs*. Uma vez que o fito da presente dissertação não é fornecer um manual do código utilizado, apenas apresentaremos seus principais aspectos. Uma formidável descrição dele pode ser obtido no livro de Aarseth (2003).

Antes de compilá-lo, é necessário ter instalado o compilador *gfortran* de acordo com o arquivo *Makefile*. Para compilar, basta utilizar o comando `make nbody6`, que deve produzir o executável **nbody6**<sup>4</sup>. Para iniciar um teste, coloque o executável e um arquivo de *input* no mesmo diretório e digite o comando `./nbody6 < input > output`. O arquivo *output*, após o término da execução do programa é verdadeiramente complexo e não exporemos aqui. Contudo, para mais detalhes pode-se verificar a rotina `output.f`, que imprime na tela diversas informações à medida que o objeto estudado evolui no tempo, ou chama a partir do comando `CALL` outras rotinas que fornecem diagnósticos do mesmo.

O código principal depende fortemente de um bloco `common` geral cujo nome é `common6.h` que contém um grande número de vetores (a maioria referente ao tamanho  $N$ ) e muitos escalares úteis. Isso permite que o cálculo seja dividido em várias partes, salvando todas as variáveis `common` após um determinado tempo de CPU especificado, seguido de uma reinicialização. Com exceção de algumas situações específicas, isso fomenta resultados profícuos que são essenciais para fins experimentais, bem como investigação diagnóstica. O tamanho da maioria dos vetores `common` são dadas pelo arquivo de parâmetros `params.h` e definidas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Parâmetros inteiros principais do NBODY6.

|                    |              |   |      |
|--------------------|--------------|---|------|
| $N_{\max}$         | <i>NMAX</i>  | Número total de partículas e c.m. bodies  | 4010 |
| $K_{\max}$         | <i>KMAX</i>  | soluções KS                               | 1010 |
| $L_{\max}$         | <i>LMAX</i>  | limite para Neighbour                     | 100  |
| $M_{\max}$         | <i>MMAX</i>  | Binárias hierárquicas                     | 10   |
| $M_{\text{dis}}$   | <i>MLD</i>   | Componentes KS recentemente destroçados   | 22   |
| $M_{\text{reg}}$   | <i>MLR</i>   | Componentes KS recentemente regularizados | 22   |
| $M_{\text{high}}$  | <i>MLV</i>   | Partículas de alta velocidade             | 10   |
| $M_{\text{cloud}}$ | <i>MCL</i>   | Nuvens intermoleculares                   | 10   |
| $N_{\text{chain}}$ | <i>NCMAX</i> | Chain membership                          | 10   |

Dependendo da memória disponível, recomenda-se limitar o tamanho máximo do vetor, mas deixando espaço para cálculos maiores; o que facilitará a análise dos blocos `common` usando as mesmas instruções de leitura para diferentes *memberships*. Observe que os arquivos `params.h` e `common6.h` também são usados na interface do diretório *Nchain* por uma definição vinculada. Uma vez que esses parâmetros foram especificados, o tamanho correto do bloco `common` é calculado au-

<sup>4</sup>Uma possível falha pode ocorrer com o temporizador da CPU utilizado pela função `etime` na rotina `cputim.f` pois aquela é dependente do sistema.

tomaticamente na rotina `mydump.f`. A presente escolha modesta de parâmetros ( $N_{\max} = 4010$ ) produz um bloco `common` de cerca de 4 Mb.

Acerca de sua estrutura geral, o código é composto de três partes principais: *input*, *output* e *integration*, com o último dividido em várias grandes rotinas que empregam métodos diferentes, conforme ilustrado pelas Figuras 5.3 e 5.4. Assim, um bom funcionamento baseia-se no tratamento de uma série de casos especiais de acordo com o algoritmo apropriado. No entanto, a tomada de decisão requer muito pouco dispêndio. Uma série de procedimentos opcionais estão incluídos, mas é preciso cuidado para evitar inconsistências mútuas uma vez que apenas alguns valores de parâmetros são validados. A escolha principal é entre os cálculos associados a uma partícula isolada e modelos de AG realistas que incluem processos astrofísicos relevantes.

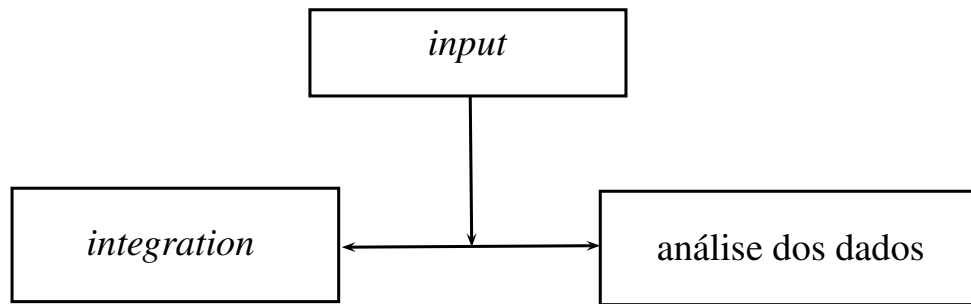


Figura 5.3: Fluxograma associado à estrutura geral do código *NBODY6*.

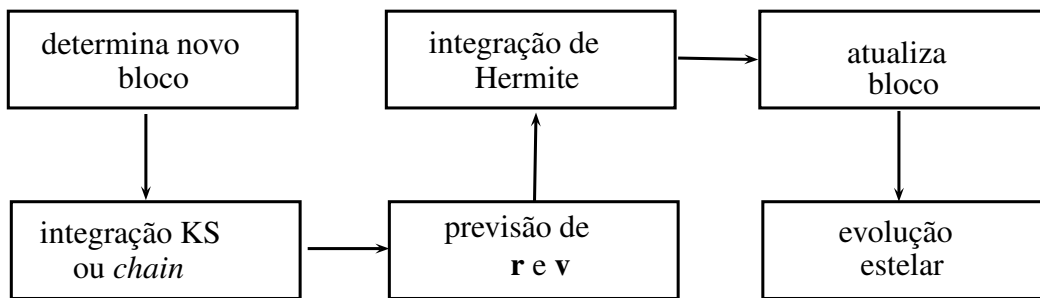


Figura 5.4: Fluxograma associado à parte *integration*. Discorreremos sucintamente nas próximas Seções acerca de cada etapa indicada.

Vale lembrar que para os propósitos desta dissertação, i. e., o estudo da colisão entre dois AG, alteramos convenientemente tal código, já que o mesmo não possui a opção alusiva ao referido estudo — tais alterações serão discutidas no fim do Capítulo. Prossigamos, então, com os dados de entrada necessários em qualquer simulação, por meio da análise da parte *input*.

A Tabela 5.2 sumariza os principais procedimentos associados à entrada de dados (*input*). Note que o potencial galáctico (e possíveis perturbações de uma galáxia satélite), a fração de binárias primordiais, a inclusão de nuvens moleculares e rotinas que tratam a evolução estelar são opcionais, ou seja, há várias opções associadas incluindo a ausência desses efeitos.

Tabela 5.2: Procedimentos de Inicialização e *input*.

|    |   |
|----|---|
| 1  | Inicializar contadores úteis e variáveis  |
| 2  | Ler parâmetros de entrada e opções  |
| 3  | Obter condições iniciais ( <i>in situ</i> ou de arquivo preparado: <code>fort.10</code> ) |
| 4  | Escala todas $m_i$ , $\mathbf{r}_i$ , $\mathbf{v}_i$ para unidades de Hénon (Secção 5.6)  |
| 5  | Definir fatores de escala para conversão de dados   |
| 6  | Introduzir potencial (opcional)   |
| 7  | Gerar uma distribuição binária primordial (opcional)                                      |
| 8  | Atribuir parâmetros de evolução estelar (opcional)  |
| 9  | Adicionar uma população de nuvens interestelares (opcional)                               |
| 10 | Avaliar polinômios da força e especificar passos  |
| 11 | Regularizar quaisquer binárias primordiais próximas (opcional)                            |

Note que, como vimos no Capítulo 4, não incluímos forças perturbativas, além do potencial galáctico (Equações 4.1, 4.2 e 4.3). É possível também trabalhar com a ausência de tais forças, i. e., estudar um AG isolado; ou mesmo, um potencial de uma galáxia aproximadamente esférica — veremos com mais detalhes tais opções na Secção 5.7. Há também a opção de não incluir no estudo a evolução estelar ou fração de binárias primordiais. Naturalmente, todas as opções do código foram construídas com o intuito de servirem para propósito específicos. No nosso caso, por exemplo, não incluímos fração de binárias primordiais no estudo; porém, incluímos evolução estelar (que por sua vez, poderia não ter sido incluída, uma vez que a escala de tempo de uma colisão típica entre os AG é deveras menor em relação à evolução de uma estrela, mesmo de alta massa).

Os parâmetros de entrada devem ser fornecidos na ordem listada a seguir e suas descrições estão no arquivo `define.f`.

```

KSTART TCOMP
N NFIX NCRIT NRAND NNBMAX NRUN
ETAI ETAR RS0 ETA DTADJ DELTAT TCRIT QE RBAR ZMBAR
KZ1  KZ2  KZ3  KZ4  KZ5  KZ6  KZ7  KZ8  KZ9  KZ10
KZ11 KZ12 KZ13 KZ14 KZ15 KZ16 KZ17 KZ18 KZ19 KZ20
KZ21 KZ22 KZ23 KZ24 KZ25 KZ26 KZ27 KZ28 KZ29 KZ30
KZ31 KZ32 KZ33 KZ34 KZ35 KZ36 KZ37 KZ38 KZ39 KZ40
KZ41 KZ42 KZ43 KZ44 KZ45 KZ46 KZ47 KZ48 KZ49 KZ50 (todos nulos)
DTMIN RMIN ETAU ECLOSE GMIN GMAX
ALPHA BODY1 BODYN NBIN0 ZMET EPOCH0 DTPLLOT
APO ECC N2 SCALE (apenas quando KZ5=2)
APO ECC DMIN SCALE (apenas quando KZ5=3)
SEMI ECC M1 M2 (apenas quando KZ5=4)
Q VXROT VZROT RSPH2

```

GMG RG0 (apenas se KZ14=2)  
 GMG DISK A B VCIRC RCIRC (apenas se KZ14=3)  
 RG(1) RG(2) RG(3) (apenas se KZ14=3)  
 VG(1) VG(2) VG(3) (apenas se KZ14=3)  
 MP AP MPDOT TDELAY (apenas se KZ14=3 ou KZ14=4)

É conveniente ressaltar que para os nossos propósitos, as opções  $KZ(i)$  mais importantes são

**KZ(5)** : corresponde ao modelo que será estudado. Pode ser

- =0 : esfera uniforme e isotrópica;
- =1 : esfera de Plummer;
- =2 : duas esferas de Plummer em órbita;
- =3 : disco planesimal perturbado;
- =4 : estrelas binárias;

Para nossos propósitos, incluímos mais uma opção, a saber  $KZ(5)=5$  que corresponde a duas esferas de Plummer desvinculadas, i. e., com suas condições iniciais independentes.

**KZ(14)** : corresponde ao potencial galáctico. Pode ser:

- =0 : ausência de potencial galáctico, i. e., o modelo está isolado;
- =1 : galáxia linearizada;
- =2 : galáxia puntiforme, i. e., partícula;
- =3 ou =4 : galáxia contendo bojo, halo e disco mais um esfera de Plummer de gás, ou seja, um AG embebido em gás;

Para nossos propósitos, utilizamos a opção  $KZ(14)=3$ , uma vez que se trata de uma modelagem mais realista como já argumentamos no Capítulo 4, sendo que as opções da esfera de gás são nulas, neste caso.

**KZ(19)** : corresponde à evolução estelar. Se nulo, a evolução não é considerada.

**KZ(23)** : corresponde ao critério de escape de estrelas do modelo. Se nula não há escape, se maior ou igual a 3, a cauda é integrada (nesse caso,  $KZ(14)=3$ ).

**KZ(39)** : corresponde a um único centro de densidade. Se nulo, há apenas um centro de densidade. Como estudaremos dois modelos de Plummer interagindo, devemos manter essa opção não nula.

Feitos esses breves comentários acerca do código e de seus parâmetros de entradas, passemos agora à análise de seus principais algoritmos.



## 5.2 Evolução Temporal: Método de Hermite

Nesta Secção, fornecemos as ferramentas necessárias para a integração direta de  $N$  corpos. Dessa forma, introduziremos o método de Hermite simples, utilizado em computadores *special-purpose*, mas igualmente adequado para *desktops* ou *laptops* por sua simplicidade. O sucesso de tal método é baseado no conceito de usar passos quantizados (fator proporcional 2), o que reduz os custos gerais. Variantes do método Hermite foram tentadas no passado, como o regime de categorias de baixa ordem (Hayli, 1974) e o completo uso das derivadas explícitas da série de Taylor (Lecar et al., 1974).

Vamos então derivar o método de Hermite que vem se mostrando bastante eficaz em simulações de  $N$  corpos. Iniciemos por um caso particular e depois obtenhamos o caso mais geral, utilizado em simulações de AG, por exemplo.

Pela expansão em série de Taylor das coordenadas e velocidades até a quarta ordem, em um intervalo  $\Delta t$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_o + \mathbf{v}_o \Delta t + \frac{\mathbf{a}_o}{2} (\Delta t)^2 + \frac{\dot{\mathbf{a}}_o}{6} (\Delta t)^3 + \frac{\mathbf{a}_o^{(2)}}{24} (\Delta t)^4 + \alpha \frac{\mathbf{a}_o^{(3)}}{120} (\Delta t)^5 \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_o + \mathbf{a}_o \Delta t + \frac{\dot{\mathbf{a}}_o}{2} (\Delta t)^2 + \frac{\mathbf{a}_o^{(2)}}{6} (\Delta t)^3 + \frac{\mathbf{a}_o^{(3)}}{24} (\Delta t)^4 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Aqui  $\mathbf{a}$  representa a aceleração ou a força por unidade de massa, que será referenciada por “força”, simplesmente, por conveniência, e  $\alpha$  é uma constante de ajuste. O método implícito de Newmark para altas ordens (Newmark, 1959) possui a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_o + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_o + \mathbf{v}_1)\Delta t - \frac{\alpha}{10}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_o)(\Delta t)^2 + \frac{6\alpha - 5}{120}(\dot{\mathbf{a}}_1 + \dot{\mathbf{a}}_o)(\Delta t)^3 \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_o + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_o + \mathbf{a}_1)\Delta t - \frac{1}{12}(\dot{\mathbf{a}}_1 - \dot{\mathbf{a}}_o)(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Substituindo as equações (5.2) nas equações (5.1), para  $\alpha = 1$ , obtemos, após manipulações algébricas

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_o + \dot{\mathbf{a}}_o \Delta t + \frac{\mathbf{a}_o^{(2)}}{2} (\Delta t)^2 + \frac{\mathbf{a}_o^{(3)}}{6} (\Delta t)^3 \\ \dot{\mathbf{a}}_1 &= \dot{\mathbf{a}}_o + \mathbf{a}_o^{(2)} \Delta t + \frac{\mathbf{a}_o^{(3)}}{2} (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

O método derivado acima é ideal para simulações associadas à dinâmica de planetésimos. A formulação padrão do método de Hermite utilizada na integração dos estudos de AG será feita agora

e segue a Secção 2.5 de Aarseth (2003). Analogamente à derivação anterior, expandiremos a força (por unidade de massa)  $\mathbf{F}$  e sua derivada  $\mathbf{F}^{(1)}$  em série de Taylor, para cada partícula  $i$  (com índice suprimido) que avança após um intervalo de tempos  $t$  (onde utilizaremos  $t$  em vez de  $\Delta t$ , por conveniência)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_o^{(1)}t + \frac{\mathbf{F}_o^{(2)}}{2}t^2 + \frac{\mathbf{F}_o^{(3)}}{6}t^3 \\ \mathbf{F}^{(1)} &= \mathbf{F}_o^{(1)} + \mathbf{F}_o^{(2)}t + \frac{\mathbf{F}_o^{(3)}}{2}t^2\end{aligned}\quad (5.4)$$

Após a obtenção de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}^{(1)}$  através da soma direta, as coordenadas e velocidades de cada partícula são previstas para baixa ordem por

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_j &= \left[ \left( \frac{1}{6}\mathbf{F}_o^{(1)}\delta t'_j + \frac{1}{2}\mathbf{F}_o^{(1)} \right) \delta t'_j + \mathbf{v}_o \right] \delta t'_j + \mathbf{r}_o \\ \mathbf{v}_j &= \left( \frac{1}{2}\mathbf{F}_o^{(1)}\delta t'_j + \frac{1}{2}\mathbf{F}_o^{(1)} \right) \delta t'_j + \mathbf{v}_o\end{aligned}\quad (5.5)$$

onde  $\delta t'_j = t - t_j$  e  $t_j$  é o instante do último cálculo da força. Os novos valores de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}^{(1)}$  são obtidos de forma usual para a partícula em consideração. Isso permite que as derivadas de ordens mais altas sejam obtidas por meio de uma inversão, o que fornece

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_o^{(3)} &= [2(\mathbf{F}_o - \mathbf{F}) + (\mathbf{F}_o^{(1)} - \mathbf{F}^{(1)})t] \frac{6}{t^3} \\ \mathbf{F}_o^{(2)} &= [-3(\mathbf{F}_o - \mathbf{F}) - (2\mathbf{F}_o^{(1)} - \mathbf{F}^{(1)})t] \frac{2}{t^2}\end{aligned}\quad (5.6)$$

Consequentemente, o corretor de quarta ordem pode ser aplicado à solução prevista (5.5) adicionando os seguintes termos

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r}_j &= \frac{\mathbf{F}_o^{(2)}}{24}\Delta t_j^4 + \frac{\mathbf{F}_o^{(3)}}{120}\Delta t_j^5 \\ \Delta \mathbf{v}_j &= \frac{\mathbf{F}_o^{(2)}}{6}\Delta t_j^3 + \frac{\mathbf{F}_o^{(3)}}{24}\Delta t_j^4\end{aligned}\quad (5.7)$$

onde introduzimos o chamado passo quantizado  $\Delta t_j$  (vide Figura 5.5) de acordo com a regra

$$\Delta t_n = \left( \frac{s_{max}}{2} \right)^{n-1} \quad (5.8)$$

e  $s_{max}$  é o maior valor possível para o passo. Daí, para cada passo de tempo  $\Delta t_j$ ,  $j$  deve corresponder

a algum valor de  $n$ , o que implica uma ligeira redução a partir de uma escolha provisória. A razão para este novo procedimento é reduzir os custos gerais envolvidos nas previsões de todas as coordenadas e velocidades uma vez para cada passo. Além disso, esta previsão é feita pelo *hardware* quando utilizado o dispositivo GRAPE. O processo associado a tal conjunto de passos  $\Delta_n$  é referido como um esquema de *block-step*, diferente daquele que utiliza um passo diferente para cada partícula. Assim, exige, o truncamento do passo natural para o valor mais próximo de  $n$ . Ademais, os passos só podem ser incrementados por um fator de 2 de todos os outros passos para manter a sincronização de todos os  $t_j + \Delta t_j$ .

partículas

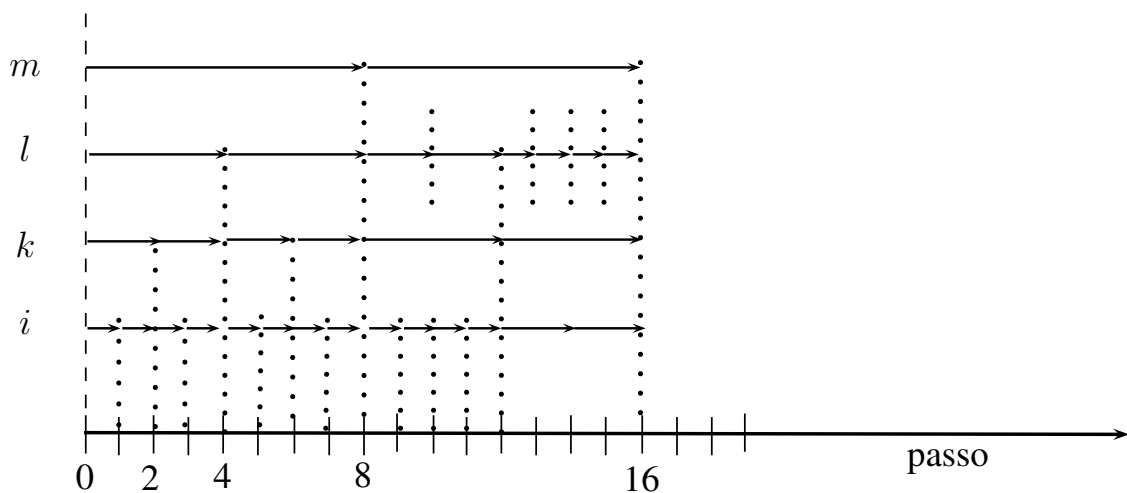


Figura 5.5: Esquema *block-step* de quatro partículas. A partícula  $i$  possui o menor passo no início, assim que seu espaço de fase é determinado em passo. O passo da partícula  $k$  é duas vezes maior que a da  $i$  e seu espaço de fase é extrapolado (“previsto”) para as etapas de tempo ímpares, enquanto um cálculo completo da força é feito nos instantes pontilhados. A largura do passo pode ser alterada ou não, após o fim do ciclo de integração para a partícula especial, como demonstrado pelas  $k$  e  $l$  para além do tempo “8”. Os passos tem que permanecer comensuráveis com ambos, entre si, bem como o tempo total, de modo que uma hierarquia seja garantida.

### 5.3 Cálculo da Força: Método de Ahmad-Cohen

O cálculo da força total para cada partícula do sistema torna as simulações muito demoradas quando o número de partículas é grande. Portanto, é desejável construir um método, a fim de acelerar os cálculos, mantendo a abordagem colisional. Uma maneira de conseguir isso é empregar um esquema *neighbour*, sugerido por Ahmad & Cohen (1973). A ideia básica de tal método é dividir a força total que age sobre uma partícula em duas partes, formalmente representada por

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_d(t) \quad (5.9)$$

onde  $n$  é o número de vizinhos mais próximos e  $\mathbf{F}_d$  é a contribuição dos membros mais distantes e das perturbações externas.

Da mesma forma, uma equação semelhante pode ser escrita para a derivada da força. A ideia básica é a realização de soma direta sobre os vizinhos próximos com um passo pequeno e adicionar as contribuições *previstas* das partículas distantes, com ajuste de coeficientes recalculados em uma escala de tempo mais longa  $\Delta t_d$ . Isto conduz a um ganho no desempenho desde que as condições  $N \gg n$  e  $\Delta t_d \gg \Delta t_n$  possam ser satisfeitas. Na Figura 5.6, tal esquema é ilustrado.

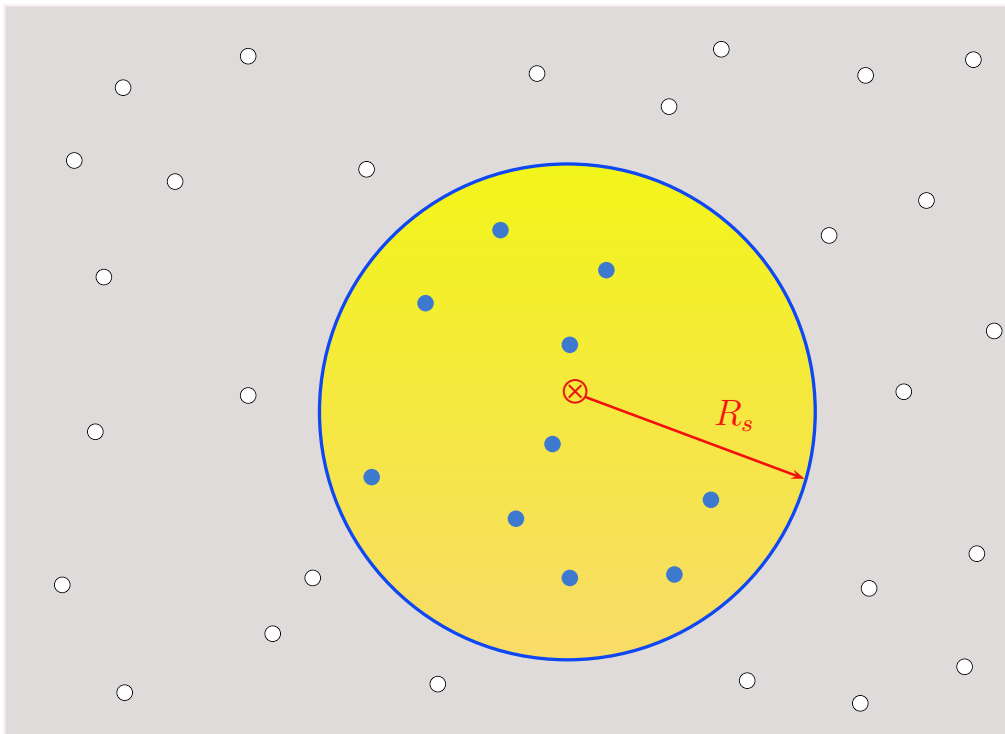


Figura 5.6: Esquema *neighbour* em torno da partícula  $\otimes$ . A circunferência de raio  $R_s$  corresponde à vizinhança em torno da partícula  $\otimes$ . Os pontos preenchidos, internos à circunferência, correspondem aos vizinhos de tal partícula. Os pontos vazios representam os pontos mais distantes. O raio  $R_s$  é calculado a partir da densidade local, em torno de  $\otimes$ .

A força total utilizada para a integração é obtida na escala de tempo  $\Delta t_d$ , quando a lista de vizinhos é também formada. Em instantes intermediários, ou nos chamados passos irregulares, a força total e sua primeira derivada são avaliadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_d^{(1)}(t - t_o) + \mathbf{F}_d(t_o) \\ \mathbf{F}^{(1)}(t) &= \mathbf{F}_n^{(1)} + \mathbf{F}_d^{(1)}\end{aligned}\quad (5.10)$$

onde  $t_o$  é o instante do último cálculo regular da força.

Por conveniência, os dois passos são comensuráveis, mas esta não é uma exigência formal, uma vez que a força total é avaliada no instante irregular mais próximo. Existem várias estratégias pos-

síveis para seleção dos vizinhos. Essencialmente, a escolha é entre um valor constante de  $n$  ou uma abordagem mais flexível, dependendo das condições locais. Dado que as partículas do halo possuem órbitas mais suaves em comparação aos caroços, que são afetados por fortes interações, parece apropriado empregar um critério de acordo com a densidade. O raio da vizinhança em si é atualizado de acordo com a relação

$$R_s^{\text{new}} = R_s^{\text{old}} \left( \frac{n_p}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.11)$$

onde o número de vizinhos previsto  $n_p$  é expressado em termos do constraste de densidade  $C$  tal que  $C \propto n/R_s^3$ . Logo,

$$n_p = n_{\text{max}} \sqrt{0.04C} \quad (5.12)$$

sujeito a um limite superior. Note que a escolha de  $n_{\text{max}}$  é uma questão de teste, mas um valor em torno de  $2\sqrt{N}$  tem respondido com sucesso, mesmo para um valor de  $N$  grande. Além disso, existem fatores de compensação que afetam o desempenho do código, como, por exemplo, um valor menor de  $n$  exige atualizações mais frequentes da vizinhança. A seleção dos vizinhos é feita durante o cálculo da força total usando  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < R_s$  e é essencialmente livre, pois todas as distâncias são calculadas em qualquer caso.

A combinação de polinômios de duas forças requer algum cuidado, quando há uma alteração nos vizinhos. Em geral, há um fluxo através da esfera da vizinhança, que deve ser contabilizado nas derivadas de ordem superior. Para tal, avalia-se as derivadas explícitas  $\mathbf{F}_{ij}^{(2)}$  e  $\mathbf{F}_{ij}^{(3)}$  dos correspondentes membros  $j$  e adiciona-se ou subtrai-se as correções para as derivadas de ordem maior que são mantidas separadamente. No entanto, este custo adicional pode ser evitado através da verificação da energia e da análise dos resultados, em instantes comensuráveis com  $s_{\text{max}}$ , uma vez que todas as soluções são então conhecidas para as derivadas de ordens mais altas. Isto é possível porque apenas previsões até  $\mathbf{F}_i^{(1)}$  são utilizadas na integração geral.

Em termos de desempenho, o esquema *neighbour* é comparável a um código de força polinomial simples para  $N \approx 50$  e acelera com  $N^{1/4}$ . Além disso, uma comparação com GRAPE-6A (os chamados micro-GRAPe), com os mesmos programas, mostra que aquele é mais rápido que este por um fator de 11 para  $N = 25\,000$  (Aarseth, 2008). Finalmente, enfatizamos que as listas de vizinhos também são muito úteis para a identificação de outros membros próximos ligados pela regularização e para estimar o contraste de densidade.

## 5.4 Regularização Kustaanheimo-Stiefel

Mais cedo ou mais tarde, durante a integração de um sistema de  $N$  corpos, encontros próximos

criam configurações que levam a dificuldades ou se tornam muito custosos se estudados por métodos diretos, como já mencionamos na Secção 2.5. Em alguns estudos, encontra-se um sistema binário de curto período diminuindo a velocidade do cálculo e introduzindo erros sistemáticos inaceitáveis. Além disso, a excentricidade pode atingir um valor grande, o que exige pequenos passos na região do pericentro a menos que técnicas especiais sejam introduzidas, tais como a regularização.

A regularização desempenha um papel importante nos códigos de  $N$  corpos, em geral. A seguir, descreveremos alguns dos principais aspectos do método Kustaanheimo-Stiefel (KS) e descreveremos alguns algoritmos relevantes que se incluem no código *NBODY6*. Acerca da regularização KS, esta pode ser dividida em uma parte puramente local, envolvendo o estudo do movimento relativo, e uma parte global, que forma uma interface com o resto sistema. Descreveremos, sucintamente, a formulação clássica (Kustaanheimo & Stiefel, 1965) para o tratamento 3D, que é descrita com mais detalhes em Aarseth (2003, Capítulo 4) e no livro *Linear and Regular Celestial Mechanics* de Stiefel & Scheifele (1975).

Novas coordenadas em 4D são introduzidas pela definição

$$\mathbf{R} := (R_1, R_2, R_3, R_4) \quad (5.13)$$

onde  $R_1 = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2$ ,  $R_2 = 2(u_1u_2 - u_3u_4)$ ,  $R_3 = 2(u_1u_3 + u_2u_4)$  e  $R_4 = 0$ .

Daí, a transformação de coordenadas

$$\mathbf{R} = \mathcal{L}(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (5.14)$$

é satisfeita pela matriz de Levi-Civita

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

como pode ser verificado pela substituição da definição (5.15) na transformação (5.14).

Como de praxe em assuntos de regularização, uma transformada temporal também é necessária e, por conveniência, opta-se pela relação diferencial mais simples, a saber

$$dt = R d\tau \quad (5.16)$$

ou  $t' = R$ . Por completeza, podemos também inserir relações apropriadas para a velocidade relativa. Então, as velocidades regularizadas são obtidas por

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{2} \mathcal{L}^T(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{R}} \quad (5.17)$$

A partir do problema de dois corpos perturbado para  $m_k$  e  $m_l$  temos

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{m_k + m_l}{R^3} \mathbf{R} + \mathbf{P} \quad (5.18)$$

onde  $\mathbf{P}$  é o termo perturbativo, as equações de movimento relativo podem ser obtidas. O conjunto completo delas é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' &= \frac{1}{2}h\mathbf{u} + \frac{1}{2}R\mathcal{L}^T\mathbf{P} \\ \mathbf{h}' &= 2\mathbf{u}' \cdot \mathcal{L}^T\mathbf{P} \\ t' &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde  $\mathcal{L}^T$  representa a matriz transposta de  $\mathcal{L}$  e  $h$  é a energia.

As 10 equações que descrevem o movimento relativo, na presença de perturbações externas, são regulares no sentido de que as soluções estão bem definidas para  $R \rightarrow 0$ . Para descrever a órbita real do par de estrelas, introduzimos o centro de massa dado por

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{m_k\mathbf{r}_k + m_l\mathbf{r}_l}{m_k + m_l} \quad (5.20)$$

e a força associada ao centro de massa é

$$\ddot{\mathbf{r}}_{cm} = \frac{m_k\mathbf{P}_k + m_l\mathbf{P}_l}{m_k + m_l} \quad (5.21)$$

Daí, o centro de massa é adicionado ao sistema de  $N$  partículas como um membro fictício, a ser integrado no tempo. Coordenadas individuais são obtidas por meio da combinação dos dois movimentos, o que fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= \mathbf{r}_{cm} + \mu\mathbf{R}/m_k \\ \mathbf{r}_l &= \mathbf{r}_{cm} - \mu\mathbf{R}/m_l \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde  $\mu = m_k m_l / (m_k + m_l)$  é a massa reduzida do par.

Podemos, agora, definir o passo regularizado da seguinte por

$$\tau = \frac{\eta_u}{\sqrt{2|h|}} \quad (5.23)$$

onde  $\eta_u = 0.2$  para a solução de Mikkola & Aarseth (1998). Com o passo regularizado acima definido, as equações para o movimento relativo são integradas através de um método de Hermite eficiente (Mikkola & Aarseth, 1998). Embora com uma formulação bastante complicada, as equações

KS também podem ser escritas na forma do método de Hermite padrão, incluindo os termos  $\mathbf{F}_u^{(1)}$  e  $h''$ .

A implementação da regularização de dois corpos possui diversos benefícios pragmáticos. Em primeiro lugar, as equações de movimento tomam a forma de um oscilador harmônico perturbado e são, por conseguinte, regulares. Tal tratamento permite um passo constante para pequenas perturbações, enquanto que a integração direta,  $\Delta t \propto R^{3/2}$ , pode ser problemática no tratamento de binárias cujas excentricidades são altas. Além disso, com equações linearizadas, a precisão em cada passo é mais elevada e apenas cerca de 30 passos são necessários para uma órbita. A integração do movimento relativo também permite um cálculo mais rápido, porque a força perturbativa  $\mathbf{P}$  é proporcional a  $1/R^3$ . Finalmente, o movimento de dois corpos não perturbado se justifica no caso em que não há perturbadores dentro de uma distância  $d = \lambda a(1 + e)$ , com  $\lambda \simeq 100$ . Da mesma forma, se  $d > \lambda R$ , a aproximação do centro de massa pode ser usada nos cálculos da força com binárias.

O preço a pagar por todas as vantagens vem sob a forma das transformações de coordenadas e de velocidades na interface entre o movimento relativo e o global. No entanto, tais operações são rápidas e não envolvem a raiz quadrada. Nas simulações com GRAPE, há um custo adicional devido às correções da força diferencial, já que o *hardware* é baseado em interações de massas puntiformes.

Vários recursos opcionais são dignos de menção. Para pequenas perturbações, o princípio da invariância adiabática pode ser utilizado para retardar o movimento por meio do escalonamento da perturbação (Mikkola & Aarseth, 1996). A disponibilidade dos elementos orbitais regulares de forma completa, como o semieixo maior,  $a$ , e excentricidade,  $e$ , também pode ser benéfica na utilização de expressões médias com o intuito de modelar a evolução secular de sistemas triplos estáveis ou da circularização de maré (Mardling & Aarseth, 2001).

Por fim, encontros próximos entre partículas individuais e estrelas binárias são também uma característica importante da dinâmica de AG. Tais sistemas triplos temporários muitas vezes revelam movimentos irregulares, variando de apenas um encontro perturbado a uma interação muito complexa, em que a destruição de binárias, troca de componentes e ejeção de uma estrela pode ocorrer, como já vimos na Secção 3.9. Apesar de não ser analiticamente solúvel (Secção 2.2), o problema de três corpos tem recebido muita atenção. A regularização KS foi expandida para os problemas isolados de três e quatro corpos, e, mais tarde, para os problemas perturbados de três, quatro e  $N$  corpos. Tais métodos foram desenvolvidos nas décadas de 1970 e 1980 e são chamados atualmente de regularização *chain*, que também está inserida no *NBODY6* e é descrito com detalhes por Aarseth (1994) e Mikkola (1997), mas que discutiremos sucintamente na próxima Secção.

## 5.5 Sistemas Hierárquicos e Regularização *Chain*

Em dinâmica planetária, o movimento dos corpos é quase kepleriano, longe de encontros próxi-



mos, porque a massa da estrela central supera largamente a dos outros corpos. Isto não é mais válido quando tratamos de sistemas estelares, onde vários centros de força podem estar presentes. Vários sistemas estelares podem ser classificadas em dois grupos, a saber: **sistemas trapezianos** e **sistemas hierárquicos** (Ambartsumian, 1954).

**Definição 5.1.** *Considere um sistema múltiplo de estrelas, contendo no mínimo três estrelas, cujos componentes são  $a, b, c, \dots$ ; sejam  $ab, ac, bc, \dots$ , as distâncias entre os componentes. Se pelo menos três de tais distâncias são da mesma ordem de magnitude, então o sistema é trapeziano. Caso contrário, o sistema é hierárquico.*

Em sistemas trapezianos, todas as distâncias relativas entre os corpos são mais ou menos comparáveis. Estes sistemas são geralmente instáveis em escalas de tempo de alguns milhões de anos ou menos; além de ser muito difícil, em geral, identificar uma parte kepleriana dominante no movimento relativo dos seus componentes (Beust, 2003). Sistemas hierárquicos são inversamente caracterizados por órbitas aninhadas de tamanhos muito diferentes e são geralmente mais estáveis. Nesse caso, o movimento dos corpos permanece quase kepleriano graças ao tamanho muito diferente das órbitas aninhadas, embora todos os corpos de massa maior possam ter massas comparáveis.

A formação e subsistência de sistemas hierárquicos apresenta problemas técnicos difíceis nas simulações de  $N$  corpos. Além disso, não é surpreendente que eles apareçam em modelos de AG que contenham uma população de binárias significativa. Com efeito, a presença de binárias muitas vezes leva à formação de sistemas hierárquicos duradouros. Os requisitos computacionais para integração direta das binárias mais internas pode ser muito grave; no entanto, o semieixo maior dificilmente muda, mesmo para razões de distâncias modestas. Uma vez que este é o elemento mais importante das binárias, parece justificado adotar a aproximação do centro de massa e reformular a solução KS para o componente externo, aumentando assim o período e substituindo uma integração direta. Este procedimento negligencia flutuações de curto período e não adota mudança secular alguma, em concordância qualitativa com a teoria de perturbação de primeira ordem.

Embora simples critérios de estabilidade fossem introduzidos em meados da década de 1980, a abordagem por meio do caos proporciona justificativas teóricas melhores e deu origem a um critério semi-analítico (Mardling & Aarseth, 1999). Mais recentemente, um critério geral de estabilidade de três corpos foi desenvolvido a partir de princípios mais fundamentais (Mardling, 2008). Tal método é válido para um vasto intervalo de massa e todas as inclinações, e sua robustez foi verificada através de testes numéricos. Ademais, o código inclui um método de média para modelar as oscilações na excentricidade — ciclos de Kozai (Kozai, 1962) — induzidas por altas inclinações.

Vários métodos para o tratamento de interações fortes que envolvem mais de dois corpos estão disponíveis. A regularização Aarseth-Zare (AZ) de três corpos (Aarseth & Zare, 1974) foi aplicada primeiramente, seguida pelo método global de Heggie para quatro corpos. Por simplicidade, estas formulações não incluem perturbações externas. A versátil regularização *chain* (Mikkola & Aarseth,

1990, 1993, 1996), que inclui perturbações, mostrou-se mais eficiente. Devido ao aumento da complexidade, as rotinas relevantes foram colocadas nos diretórios *Chain* e *Nchain*, separadamente.

Encontros próximos múltiplos são caracterizados por um ou mais pequenos passos do centro de massa. É conveniente, portanto, realizar a principal tomada de decisão na inicialização da regularização múltipla no apocentro (definido como o ponto de mudança da velocidade radial, quando  $R > a$ ). No caso de uma única partícula que se aproxima de um sistema binário firme, a condição para a aceitação depende da separação, bem como do parâmetro de impacto. Assim, atrasos longos levam ao fim do par KS devido à grande perturbação, enquanto as grandes separações podem ser ineficientes (a não ser para configurações ultracompactas). Algoritmos para a inicialização e integração de subsistemas *chain* são descritos no livro de Aarseth (2003), juntamente com procedimentos específicos para alterar os membros (redução ou aumento). Tais interações tendem a ser de curta duração. Note que é importante incluir vários testes de estabilidade uma vez que a ejeção de uma partícula de outra forma pode produzir um sistema hierárquico de longa duração que pode ser estudado eficientemente de outra forma.

A regularização *chain* exige cuidados especiais. Assim, a força e sua derivada primeira são obtidas primeiramente, por procedimentos habituais, depois correções diferenciais são adicionadas. Isto implica subtrair as contribuições padrões do centro de massa de qualquer perturbador e adicionar os respectivos termos ponderados pelas massas individuais. Para consistência, correções semelhantes são realizadas quando se lida com os perturbadores. Mais uma vez os custos gerais da verificação das listas de vizinhos para a identificação é modesto em comparação com as avaliações de funções reais. Ademais, observe que a duração acumulada de todas as regularizações *chain* representa apenas uma pequena fração do tempo total da simulação.

Finalmente, finalizamos a discussão da parte mais técnica associada ao código. Passemos, então, às partes mais astrofísicas que, mesmo não sendo tão interessantes, são deveras importantes na modelagem de um AG.

## 5.6 Unidades de Hénon

Antes de abordarmos os aspectos astrofísicos do código (como evolução estelar e caudas mareais) na Secção 5.7, é conveniente que definamos as unidades de Hénon<sup>5</sup>, que constituem a espinha dorsal de um código de *N* corpos, incluindo o *NBODY6*, a partir das unidades astrofísicas.

A partir da análise dimensional, primeiramente, construímos unidades de velocidade e de tempo fiduciais, adotando  $V^* = 1 \times 10^{-5} (GM_{\odot}/L^*)^{1/2}$  km/s e  $T^* = (L^{*3}/GM_{\odot})^{1/2}$  s, onde  $G$  é a constante

---

<sup>5</sup>A primeira menção de tais unidades foi no trabalho de Hénon (1971). Elas foram utilizadas por Cohn (1979) e, posteriormente, amplamente divulgadas e generalizadas por Heggie & Mathieu (1986). No encontro da colaboração MODEST, em junho de 2014, em Bonn, o Dr. Douglas Heggie propôs que a comunidade abandonasse o nome de “*N-body units*” e passasse a usar o nome de “*Hénon units*”, a fim de homenagear seu criador Michel Hénon (1931-2013).

gravitacional e  $L^* = 3 \times 10^{18}$  cm é uma unidade de comprimento conveniente. Dado o raio do virial  $R_v$  em pc e o massa total  $NM_s$  em  $M_\odot$ , onde  $M_s$  é a massa média especificada como entrada, podemos escrever os valores correspondentes para um modelo de AG com  $V^* = 6.557 \times 10^{-2}(NM_s/R_v)^{1/2}$  km/s e  $T^* = 14.94(R_v^3/NM_s)^{1/2}$  milhões de anos. Daí, tais unidades de distância, de velocidade e de tempo são convertidas em unidades correspondentes astrofísicas (pc, km/s, milhões de anos) por  $\tilde{r} = R_v r$ ,  $\tilde{v} = V^* v$ ,  $\tilde{t} = T^* t$ . Finalmente, massas individuais em  $M_\odot$  são obtidas a partir de  $\tilde{M} = M_s m$ , onde  $M_s$  é agora redefinida em termos da massa média escalada.

Suponhamos, agora, que um conjunto completo de condições iniciais foram geradas na seguinte forma:  $m_i, \tilde{\mathbf{r}}_i, \tilde{\mathbf{v}}_i$  para  $N$  partículas, onde as massas, as coordenadas e as velocidades podem estar em quaisquer unidades. Um modelo de AG pode ser definido por  $N, M_s, R_v$ , em conjunto com uma IMF adequada. Após a atribuição dos dados individuais, avaliamos a energia cinética e a potencial,  $K$  e  $W$ , sendo  $W < 0$ . As velocidades são escaladas de acordo com o Teorema do Virial adotando  $\mathbf{v}_i = q\tilde{\mathbf{v}}_i$ , onde  $q = (Q_v|W|/K)^{1/2}$  e  $Q_v$  é um parâmetro de entrada (0.5 para o equilíbrio). Finalmente, introduzamos as chamados unidades de Hénon impondo que  $G = 1$ ,  $\sum m_i = 1$ ,  $E_o = -0.25$ , onde  $E_o < 0$  é a nova energia total. Aqui, a condição da energia é aplicada somente para sistemas ligados ( $Q_v < 1$ ), caso contrário, a convenção  $E_o = 0.25$  seria adotada. O dimensionamento final é realizado por  $\hat{\mathbf{r}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i/S^{1/2}$ ,  $\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i S^{1/2}$ , onde  $S = E_o/(q^2 K + W)$ . Tais variáveis definem um tempo de cruzamento tal que  $T_{cr} = 2\sqrt{2} T^*$  milhões de anos.

Embora não tenhamos incluído binárias primordiais nos modelos da Tabela 4.2, muitas simulações incluem-nas. Devido a suas energias de ligação internas, a escala acima não pode ser implementada diretamente. Em vez disso, os componentes de cada sistema binário são primeiramente combinados em um objeto, para então redimensionar a população reduzida de estrelas individuais  $N_s$  e a de binárias  $N_b$ . Restam, então, os elementos de dois corpos, como o semieixo maior, a excentricidade e os ângulos relevantes, serem atribuídos, em conjunto com a razão de massa. Há muitas escolhas associadas à distribuição, mas devem ser motivadas por considerações astrofísicas. De especial interesse são as razões de massa e de períodos, que podem muito bem ser correlacionados para estrelas luminosas (por exemplo, binárias espectroscópicas). Formas mais complexas de gerar condições iniciais com binárias primordiais podem facilmente ser incorporadas, porém não é recomendado (Aarseth, 2008).

Por fim, pragmaticamente, no interior do código, temos que, como a unidade de comprimento é RBAR especificada em pc e a massa média ZMBAR (que não é preservada com a opção KZ(20)  $\geq 0$ ) em  $M_\odot$ , qualquer quantidade interna pode ser convertida em valores astrofísicos. Um conjunto conveniente de fatores de conversão é dada por RBAR, SMU, VSTAR, TSTAR para distâncias (pc), massas ( $M_\odot$ ), velocidades (km/s) e tempos (em milhões de anos). Períodos de binárias em anos ou dias podem ser obtidos a partir das unidades de Hénon usando YRS ou DAYS na expressão kepleriana padrão sem  $2\pi$ . Além disso, escalas de comprimento também podem ser facilmente convertidas em raios solares (SU) ou em unidades astronômicas (UA).

## 5.7 Processos Astrofísicos

A fim de alcançar um maior realismo, o código inclui várias opções concernentes à perda de massa e efeitos de tamanho finito das estrelas. O tratamento da evolução estelar é baseada em funções *fast look-up* que fornecem informações sobre o tipo estelar, raio, bem como a massa do núcleo para uma determinada massa, idade e metalicidade iniciais (Tout et al., 1997; Hurley et al., 2000). A posição atual no DHR é verificada em intervalos frequentes determinados pela taxa de evolução e o tempo restante de cada estágio característico. A lista dos indicadores da evolução estelar  $k^*$  está incluída no arquivo `define.f` e dois tempos *look-up* (viz., o valor anterior e seguinte) são utilizados na tomada de decisões. Perda por vento do tipo Reimers é adotada, além de eventos de supernova, em que o resultado é uma estrela de nêutrons ou até mesmo a formação de um buraco negro.

Para maior comodidade, as correções de perda de massa são implementadas quando a perda acumulada por vento excede 1%. Isto implica modificar a força e a derivada primeira de cada vizinho, bem como subtrair a variação de energia potencial assumindo perda de massa instantânea do modelo. No caso das soluções KS, a órbita é expandida mantendo-se constante a excentricidade em conjunto com a atualização da força do centro de massa dos vizinhos. Às estrelas de nêutrons são atribuídas uma velocidade obtida a partir de uma maxwelliana com dispersão relativamente grande (Hansen & Phinney, 1997), que normalmente leva à ruptura de binárias próximas e o escape de estrelas isoladas. Para mais detalhes, recomendamos o trabalho de Hurley (2008).

O código contém um procedimento realista para colisões físicas, implementado para soluções KS e todas as regularizações múltiplas. Tal método tem sido utilizado com sucesso no código privado *NBODY4*. Dependendo do tipo estelar dos componentes, a mistura completa ou a evolução comum do envoltório é adotada, juntamente com perda de massa. No caso de um par KS, o novo centro de massa é inicializado como uma única partícula e o segundo componente se transforma em um escape sem massa. Com a regularização *chain*, um processo iterativo é usado para determinar o pericentro exato se a separação dos dois corpos mais próxima encontra-se dentro de um valor razoavelmente pequeno. A energia do par que colide é avaliada indiretamente com o uso de variáveis bem definidas, em vez dos elementos de dois corpos. Com mais de três membros na cadeia, a quantidade de membros é reduzida e o cálculo continua; caso contrário, a finalização padrão ocorre.

Podemos citar também a circularização mareal opcional KZ(27). Se  $KZ(27) = 1$ , um procedimento sequencial é adotado (Portegies Zwart et al., 1997). Neste caso, alterações discretas dos elementos orbitais  $a$  e  $e$  são feitas. Modificações relevantes das variáveis KS são realizadas se  $a(1 - e) < 4r_1^*$ , onde  $r_1^*$  é o maior raio (veja o livro de Aarseth (2003) para um algoritmo detalhado). Alternativamente, a circularização contínua é adotada se  $KZ(27) = 2$  (Mardling & Aarseth, 2001). Vários ajustes são feitos porque os raios estelares tendem a aumentar com o tempo. Note que para grandes excentricidades, a conservação do momento angular dá origem a uma contração considerável. Uma maneira de se obter uma excentricidade grande é na situação em que a binária interna experimenta oscilações

de Kozai favoráveis para tal.

O código inclui alguns potenciais que são descritos com detalhes em Aarseth (2003, Capítulo 8). Equações linearizadas são apropriados para órbitas quase circulares com pequenos deslocamentos verticais e são, portanto, adequadas para simulações de aglomerados abertos. Os termos relevantes do potencial (convertidos a partir da unidade de comprimento  $R_{\text{BAR}}$  e massa total) são inicializados na rotina `xtrnl0.f` e as perturbações são adicionadas em `xtrnlf.f` e em `xtrnlp.f` para os pares KS. Os termos adicionais nas equações de movimento são simples e permitem que as derivadas explícitas da força sejam empregadas no método de Hermite. As contribuições correspondentes à energia total estão incluídos em `xtrnlv.f` via variável `ETIDE`, facilitando assim a sua conservação. No entanto, a forma linearizada das equações de movimento não são apropriados na região fora do raio mareal. Assim, uma exploração mais detalhada de estrelas que escaparam é restrita a distâncias modestas.

A fim de ampliar o escopo para o estudo de movimentos de AG mais gerais, um modelo galáctico totalmente em 3D foi implementado ( $KZ(14) = 3$ ). Note que o efeito externo é incluído na rotina `xtrnlf.f` para a integração direta, consistente com o tratamento das binárias via aproximação do centro de massa. Este modelo é uma boa representação da Galáxia, além de ser facilmente integrado. A fim de proporcionar mais flexibilidade, qualquer combinação dos componentes pode ser utilizada variando alguns dos parâmetros de entrada que se encontram na rotina `xtrnl0.f`, mas podem ser notados acima onde colocamos os parâmetros de entrada.

O efeito de maré em membros do modelo do AG é obtido através da inclusão da força diferencial da Galáxia em relação ao centro do globular. Isto implica integrar o centro guia do AG como uma massa puntiforme que orbita a Galáxia (rotinas `gcinit.f` e `gcint.f`), usando as funções da força total. Por conseguinte, o movimento do AG é conhecido com alta precisão ao longo do cálculo. Como antes, as estrelas distantes podem ser consideradas como estrelas que escaparam e são removidas do AG, se  $KZ(23) > 0$ . Salvo se especificado inicialmente, um valor  $R_{\text{TIDE}} = 50$  pc é adoptado para o raio mareal. Alternativamente, os membros que escaparam podem ser adicionados a uma população de teste que forma a cauda mareal e que é integrada por um método rápido (veja abaixo).

Também pode ser interessante estudar um modelo de AG imerso em um gás, com a possibilidade de inclusão de decaimento como função do tempo (Kroupa et al., 2001). Uma esfera de Plummer que coincida com o centro de massa do AG tem sido adotada como um recurso opcional ( $KZ(14) = 3$  ou 4), que pode ser empregado de forma independente, exigindo parâmetros em unidades de Hénon. Note que a conservação de energia não se aplica se ocorre decaimento da massa de tal esfera de Plummer. Nesse caso, recomenda-se definir `QE` (tolerância da energia) com um valor grande.

Por fim, abordaremos o crescimento da cauda mareal devido à interação com a galáxia. O código inclui procedimentos para tal estudo por meio de uma integração rápida. Este recurso pode ser particularmente útil para órbitas no potencial 3D uma vez que as correções da energia mareal tendem a se tornar menos precisas a grandes distâncias. Consequentemente, uma aceleração substancial pode

ser obtida para grandes sistemas. A ideia básica do método é utilizar as variáveis padrões, com as partículas da cauda mareal salvas em partes não utilizadas dos vetores (o que exige uma declaração adequada do tamanho máximo dos vetores). Na verdade, o tamanho padrão dos blocos `common` permanece inalterado, com quatro contadores substituindo parte de um vetor de inteiros redundante.

Cada membro da cauda é inicializado para a integração no momento da remoção da estrela que escapa<sup>6</sup>, ou seja, quando está a uma distância maior que  $2 * RTIDE$ , onde  $RTIDE$  é o raio marel. Os dados para o primeiro membro são salvos no local  $ITAIL0 = NZERO + \min(KMAX, NBIN0 + 10)$ , com  $NBIN0$  sendo o número inicial de binárias primordiais. A rotina `tail0.f` aumenta a quantidade de membros e copia as coordenadas e velocidades atuais para locais apropriados, expressos em relação ao centro galáctico. Em seguida, novos passos, são atribuídos após a obtenção da força e da derivada primeira, quando, então, as variáveis de integração são inicializadas da forma usual. A quantidade de membros é representada por  $NTAIL$  e qualquer *loop* referente à população da cauda é feito de  $I = ITAIL0$  até  $NTTOT = ITAIL0 + NTAIL - 1$ .

## 5.8 Tomada de Decisão

Apesar de passos individuais serem usados no processo de integração geral, o método de Hermite emprega o esquema discreto de *block-step*; que, por sua vez, permite que muitas partículas sejam avançadas em um espécie de “tandem”. Conseqüentemente, o ciclo de integração principal é composto por um pequeno número de chamadas para o próximo nível de rotinas, com algumas outras tarefas importantes realizadas antes ou no final. Esta estrutura facilita a investigação de qualquer comportamento estranho tal como *loop* infinito, desde que a rotina correspondente possa ser identificada.

Essencialmente, o ciclo de integração consiste nos seguintes procedimentos:

- determinar o próximo bloco de partículas;
- atualizar as soluções de encontros próximos (KS e/ou *chain*);
- prever coordenadas e velocidades (vizinhos ou todas as  $N$  partículas);
- avançar a solução para cada corpo (força na vizinhança ou força total)
- lidar com as finalizações de encontros próximo (KS, *chain* ou fusões )
- verificar a evolução estelar (atualização dos raios ou perda de massa)

---

<sup>6</sup>Um discussão mais detalhada sobre os critérios de escape é feita no Apêndice D.

Finalizaremos este Capítulo considerando as alterações feitas no código *NBODY6* a fim de que o mesmo satisfizesse nossos propósitos. Como já dissemos, as condições iniciais e as massas de um modelo são lidas no arquivo *fort.10*. Isso ocorre na rotina *data.f*. Como intentamos estudar dois modelos que interagem gravitacionalmente a partir de uma configuração genérica — diferentemente da opção  $KZ(5)=2$ , que fornece dois modelos em uma órbita elíptica, necessariamente —, optamos por incluir a leitura de outro arquivo (*fort.11*) na rotina *setup.f* e criar uma nova opção para  $KZ(5)$ . Dessa forma, após a geração dos 30 modelos com o código *MCLUSTER*, utilizaremos combinações convenientes deles tomados dois a dois em cada simulação, conforme será descrito na Secção 6.3. Logo, além dos parâmetros citados na Secção 5.1, precisamos fornecer mais, a saber

```
N2
RG1 (1)  RG1 (2)  RG1 (3)
VG1 (1)  VG1 (2)  VG1 (3)
RG2 (1)  RG2 (2)  RG2 (3)
VG2 (1)  VG2 (2)  VG2 (3)
```

onde o vetor *RG1* corresponde à posição do modelo 1 e *RG2* corresponde à posição do modelo 2, ambos em relação ao centro de massa do sistema, e *N2* corresponde à quantidade de estrelas do segundo modelo, uma vez que *N* corresponde ao primeiro, lido em *fort.10*. Analogamente, temos os valores correspondentes da velocidade de ambos contidos nos vetores *VG1* e *VG2*. Note que *RG1* e *RG2* não estão vinculados, ou seja, podem ser quaisquer. Observe também que os vetores *RG* e *VG* passam a corresponder à posição e à velocidade do centro de massa do sistema, respectivamente, e também devem ser fornecidos como parâmetros de entrada.

Após a leitura das posições e velocidades dos modelos, a partir dos arquivos *fort.10* e *fort.11*, e do centro de massa deles, um deslocamento em ambos é feito a fim de que se configurem de acordo com o desejado. Mais detalhes da geometria relacionada à interação serão fornecidos na Secção 6.3. Abaixo seguem extratos do código que realizam os deslocamentos dos modelos em relação ao centro de massa dos mesmos, bem como alteram suas velocidades.

```
C***** ALTERACAO POSICAO + VELOCIDADES *****
      DO 55 I = 1,N
          X(1,I) = X(1,I) + RG1(1)
          X(2,I) = X(2,I) + RG1(2)
          X(3,I) = X(3,I) + RG1(3)
          XDOT(1,I) = XDOT(1,I) + VG1(1)
          XDOT(2,I) = XDOT(2,I) + VG1(2)
          XDOT(3,I) = XDOT(3,I) + VG1(3)
      55 CONTINUE
```

```

DO 57 I = 1,N2
  X(1,I+N) = X(1,I+N) + RG2(1)
  X(2,I+N) = X(2,I+N) + RG2(2)
  X(3,I+N) = X(3,I+N) + RG2(3)
  XDOT(1,I+N) = XDOT(1,I+N) + VG2(1)
  XDOT(2,I+N) = XDOT(2,I+N) + VG2(2)
  XDOT(3,I+N) = XDOT(3,I+N) + VG2(3)
57 CONTINUE
C***** ALTERACAO POSICAO + VELOCIDADES *****

```

A fim de estudar a colisão entre os modelos, basta-nos escolher valores adequados de modo que eles se encontrem, em um dado instante. Para isso, precisamos considerar o movimento do centro de massa em torno da galáxia considerada. Esse foi considerado circular no plano do disco de um modelo da Galáxia. Dessa forma, para que os modelos se encontrem, em algum instante de tempo, no referencial do centro da Galáxia, é necessário compensar o movimento do centro de massa. Esperemos até o Capítulo 6 para tal discussão, onde também definiremos as simulações (i. e., as combinações dos 12 modelos adotados tomados dois a dois) e seus objetivos.

Podemos concluir este Capítulo afirmando que, embora outros códigos baseados em outros métodos sejam utilizados, os códigos do Dr. Sverre Aarseth são os mais rápidos para uma acurácia razoável. Isso se deve principalmente à combinação inteligente de várias técnicas tanto computacionais quanto astrofísicas, como, por exemplo, um método preditor-corretor de alta ordem, esquemas de passos diferenciados, esquemas de vizinhança, rotinas que tratam colisões físicas, evolução estelar e crescimento da cauda mareal, entre outros. Definitivamente, a robustez e complexidade das versões mais recentes garantem-no o posto do melhor integrador direto de  $N$  corpos da contemporaneidade.



# Capítulo 6

## Colisão entre Dois Modelos de Plummer

*“Globular clusters,  
that encounter each other at low relative velocities,  
will lose angular momentum and merge  
into a single cluster on a relatively short timescale.”*

**Sidney Van Den Bergh**

Como podemos perceber da Secção 3.6, o número de estudos concernentes às interações gravitacionais entre dois AG tem aumentado consideravelmente. Desde a proposta de van den Bergh (1996), diversos estudos vêm abordando tanto propriedades dinâmicas quanto astrofísicas. Ao longo deste Capítulo, discutiremos os fundamentos físicos associados à interação entre sistemas estelares esféricos de uma forma geral. Deste modo, para tal, seguiremos a classificação de Zwicky (1957) referente às várias possíveis configurações em galáxias interagentes. Tal classificação é baseada na ordem decrescente de intensidade das perturbações causadas e, portanto, pode ser aplicada ao estudo dos AG. Restringiremos nosso estudo a apenas colisões frontais; então, definiremos as interações como se segue.

**Definição 6.1.** *Considere dois AG que estejam interagindo gravitacionalmente. Tal interação pode ser caracterizada de uma das seguintes formas:*

**encontro fraco:** *aglomerados que se encontram em colisões frontais ou quase frontais sem efeito perturbativo significativa, apenas insignificantes alterações nas posições das estrelas que os compõem;*

**encontro intermediário:** *aglomerados que se encontram em colisões frontais ou quase frontais de modo que ocorre transferência de energia do movimento orbital para seus graus de liberdade internos;*

**encontro forte:** *aglomerados que se encontram em colisões frontais ou quase frontais com eventual destruição de algum dos aglomerados ou mesmo a fusão.*

Note que todas as colisões tratadas neste capítulo serão classificadas de acordo com a definição 6.1. Outrossim, daremos dedicação especial aos encontros fortes na Secção 6.3. Além de tal classificação, convém separar os sistemas estelares envolvidos em cada encontro segundo a definição 6.2.

**Definição 6.2.** *Considere dois sistemas estelares interagentes gravitacionalmente. Chamamos de sistema teste aquele em cujas propriedades estamos interessados. O outro sistema estelar é chamado perturbador, uma vez que perturba o sistema teste.*

Ao longo desse capítulo descreveremos algumas propriedades dos encontros principalmente por meio dos efeitos de AG perturbador em um AG teste. Nas Secções 6.1 e 6.2, discutiremos os principais resultados referentes a trabalhos analíticos. Particularmente, na Secção 6.2 chegaremos a expressões associadas à variação de energia de dois modelos de Plummer com massas e raios de meia-massa iguais e diferentes. Já na Secção 6.3, descreveremos os resultados obtidos nos experimentos numéricos que intentam testar a dependência das propriedades dinâmicas dos globulares com a IMF, a massa e a concentração. Descreveremos a geometria adotada em todos os conjuntos de simulações. Ademais, argumentaremos acerca da influência de tal dinâmica na corrente mareal. No fim da referida Secção, compararemos nossos resultados com estudos prévios. Na Secção 6.4, obteremos uma expressão para a velocidade limite entre a fusão e a não fusão de dois globulares como função da massa, da concentração e da dispersão de velocidade média. Por fim, exibiremos em um gráfico os vários cenários qualitativos aos quais dois globulares estão sujeitos, dada a geometria aqui considerada. Na última secção deste capítulo, 6.5, mostraremos como a fusão de dois globulares leva a um aquecimento dinâmico do objeto que dela resulta.

## 6.1 Fundamentos Físicos

Um encontro AG–AG difere de um encontro estrela–estrela em dois aspectos deveras importantes. Primeiramente, dois AG interagentes podem se interpenetrar, diferentemente de duas estrelas que tendem a se destruir ou fundir. Outro aspecto importante surge das perturbações entre os AG interagentes, que provoca um efeito inelástico nas colisões.

Em dinâmica estelar, a força entre duas estrelas é a Lei da Gravitação Universal. Isso ocorre devido à simetria aproximadamente esférica das estrelas e à grande separação entre elas. Por outro lado, os AG interagentes podem experimentar uma colisão interpenetrante. Quando os AG interpenetram, eles atraem um ao outro com uma força mais fraca que a da gravitação universal. Enquanto que, no caso de duas partículas, a força de atração tende ao infinito quando a separação entre elas tende a

zero, no caso de dois AG tal força tende a zero, quando seus centros coincidem. Isso faz com que as órbitas de dois AG em encontros próximos sejam muito diferentes daquelas de duas massas puntiformes na mesma situação, no sentido de que o ângulo de deflexão é muito menor para aquele caso. Em uma colisão frontal rápida, os AG passam um pelo outro sem deflexão. Como vimos, colisões entre estrelas são menos prováveis que os encontros próximos que determinam a evolução dinâmica de um AG via relaxação de dois corpos.

Outra razão que torna diferente os encontros entre AG e aqueles entre estrelas é que em uma interação estrela–estrela a energia total do movimento orbital é conservada; já em um encontro AG–AG, tal energia não é conservada. Devido às forças exercidas pelos AG sobre as estrelas constituintes, estas são geralmente aceleradas como resultado do crescimento da energia interna (de ligação)  $E$  daqueles. A fim de contabilizarmos isso, considere um globular teste de massa  $M$  se aproximando de um AG perturbador de massa  $M_1$  a partir de uma grande distância. Sejam  $\mathbf{v}_f$  e  $\mathbf{v}_i$  as velocidades final e inicial de um estrela de massa  $m$  em  $M$ . Seja  $\Delta\mathbf{v}$  a variação na velocidade de tal estrela durante o encontro. Então

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v} \quad (6.1)$$

e a variação na energia cinética da estrela é dada por

$$\frac{1}{2}m(\mathbf{v}_f^2 - \mathbf{v}_i^2) = \frac{1}{2}m[2\mathbf{v}_i \cdot \Delta\mathbf{v} + (\Delta\mathbf{v})^2] \quad (6.2)$$

Se admitirmos que  $\mathbf{v}_i$  e  $\Delta\mathbf{v}$  não estão correlacionadas, obtemos a variação na energia cinética  $\Delta K$  de todo AG somando a contribuição de todas as suas estrelas, i. e.,

$$\Delta K = \sum \frac{1}{2}m(\Delta\mathbf{v})^2 \quad (6.3)$$

que é uma grandeza sempre positiva. As forças de maré em uma colisão rápida são impulsivas por natureza e daí, se negligenciarmos a variação na distribuição das estrelas durante o encontro, temos que  $\Delta E = \Delta K$ , onde  $E$  é a energia interna total do AG. Logo, a energia de ligação dos dois AG aumenta durante o encontro. Note que se  $\mathbf{v}_i$  e  $\Delta\mathbf{v}$  estão correlacionados ou se há escape de estrelas durante o encontro, então a equação (6.3) deve ser alterada.

Seja  $\varepsilon$  a energia total de um sistema composto por dois AG. Então, da lei da conservação segue que

$$\varepsilon = E + E_1 + \epsilon \quad (6.4)$$

onde  $E$  e  $E_1$  são as energias internas dos dois AG devido à distribuição e ao movimento de suas estrelas constituintes e  $\epsilon$  é a energia orbital desse par. Como  $\varepsilon$  é uma grandeza conservada, aumentos em  $E$  e  $E_1$  implicam diminuição em  $\epsilon$ ; daí, a velocidade relativa dos dois AG seria reduzida durante o encontro, devido à fricção dinâmica. Por exemplo, uma órbita hiperbólica poderia ser transformada

em outra órbita hiperbólica com excentricidade menor ou mesmo ser transformada em uma órbita fechada. Outro exemplo é o trabalho de Amaro-Seoane (2006) que estudou a colisão de dois modelos de AG em uma órbita parabólica, utilizando o código *NBODY6*. Nesse caso, todas as interações resultavam em uma fusão dos dois modelos uma vez que, como já dissemos, durante a interação ocorre perda de energia orbital, que implicou a transformação da órbita parabólica em uma órbita elíptica e, após um intervalo de tempo, a fusão deles. Explicaremos melhor esse ponto a seguir.

Sabe-se, da Mecânica Clássica, que um encontro hiperbólico entre duas partículas, sujeitas à interação gravitacional mútua, não pode resultar em um sistema binário sem a adição de uma terceira partícula (Alladin & Narasimhan, 1982). Como há, no caso de dois AG, transferência de energia do movimento dos AG para o movimento das estrelas, a captura mareal pode ocorrer se a energia  $\epsilon$  for reduzida pelas forças perturbativas de tal modo que se torne negativa após o encontro. Se  $\epsilon_f$  e  $\epsilon$  são as energias orbitais final e inicial, respectivamente, temos que

$$\Delta\epsilon := \epsilon_f - \epsilon = -\Delta E - \Delta E_1 \quad (6.5)$$

onde  $\Delta E$  e  $\Delta E_1$  são as variações nas energias internas dos AG durante o encontro. Para AG que se movem em um órbita inicial não fechada, tem-se  $\epsilon \geq 0$ . Se após o encontro  $\epsilon_f < 0$ , os dois AG formarão um sistema binário por captura mareal. Daí, a condição para a fusão pode ser assim enunciada

$$\frac{|\Delta\epsilon|}{\epsilon} > 1 \quad (6.6)$$

para órbitas hiperbólicas. Para órbitas parabólicas, temos que  $\epsilon_f = \Delta\epsilon = -(\Delta E + \Delta E_1) < 0$ . Devido à fricção dinâmica no movimento relativo, a separação entre os AG do sistema binário diminuirá continuamente, até, finalmente, formar um único AG.

Nesse ponto, é possível perceber a importância da fricção dinâmica em estudos que envolvam aglomerados globulares. Já nos referimos a ela na Secção 3.10, porém façamos agora uma definição a fim de tornar o fenômeno, aqui abordado, bem definido<sup>1</sup>.

**Definição 6.3.** *A força de arraste devido à interação gravitacional entre dois sistemas estelares, cujo resultado é a perda de energia cinética e de momento angular do sistema de menor massa para o sistema de maior massa, é chamada fricção dinâmica.*

No caso de um globular (ou galáxia satélite) que se mova em uma órbita elíptica em torno de uma galáxia, a tendência é que aquele espirale em direção a esta, devido à fricção dinâmica. À medida que a órbita do AG decai, as forças de maré da galáxia arrancam estrelas das partes mais externas do AG, levando à destruição deste após um certo tempo. No caso de dois AG em uma órbita fechada,

---

<sup>1</sup>Chandrasekhar (1990-1995) definiu sucintamente o termo da seguinte forma: “[...] *systematic tendency to be decelerated in the direction of its motion*” (tendência sistemática de ser desacelerado na direção de seu movimento), referindo-se ao fenômeno que uma estrela sofre devido à flutuação na força que age sobre ela.

eles perdem momento angular e, com o tempo, fundem-se. Vale ressaltar que o estudo de Chandrasekhar foi feito considerando um sistema estelar que perturba uma estrela de outro sistema estelar. Na nossa definição, fizemos uma espécie de generalização da ideia dele, uma vez que consideramos sua manifestação em larga escala, pois consideramos a interação entre dois sistemas estelares em vez da interação entre um sistema estelar e uma estrela.

O processo de coalescência associado aos encontros de dois globulares é acompanhado de um processo destrutivo resultante da energia interna deles ter aumentado durante o encontro. De acordo com o critério de estabilidade de Jacobi, um sistema estelar é instável se sua energia total é positiva. A energia interna de um aglomerado globular teste após a colisão é obtida da seguinte relação

$$E_f = E_i + \Delta E - E^{(e)} \quad (6.7)$$

onde  $E^{(e)}$  é a energia associada ao escape de estrelas e  $E_i$  é a energia interna inicial do AG teste. Note que  $E_f \geq 0$  implica destruição do AG teste, que pode ocorrer se este for mais fraco, em termos da massa, da densidade ou da concentração, em relação ao globular perturbador. Se negligenciarmos  $E^{(e)}$ , o critério de destruição do AG teste é dado por  $\Delta E/E_i \geq 1$ . Deve ser observado, porém, que  $\Delta E/E_i = 1$  não necessariamente implica destruição do AG. Com efeito, uma porção significativa de sua massa ainda pode permanecer ligada. Dessa forma,  $\Delta E/E_i$  fornece uma estimativa de ordem de grandeza razoável dos efeitos destrutivos das forças perturbativas. Por exemplo, em encontros fortes frontais, seu valor é próximo da unidade; isso implica que o AG teste é submetido a grandes variações em sua estrutura.

Antes de continuarmos, definamos outra escala de tempo importante no estudo de aglomerados globulares.

**Definição 6.4.** *Sejam  $R_v$  o raio do virial de um AG e  $\sigma$  sua dispersão de velocidade. O tempo de cruzamento é uma medida do tempo necessário para que uma estrela atravesse o diâmetro do AG, i. e.,*

$$t_{\text{cr}} = \frac{2R_v}{\sigma} \quad (6.8)$$

O tempo de cruzamento está associado à obtenção do equilíbrio por um AG. Por exemplo, uma consequência importante da perturbação devido a outro AG é o afrouxamento e a expansão daquele que é perturbado. Algumas estrelas podem atingir velocidades superiores à de escape e abandoná-lo. Uma ideia do tamanho do AG após o encontro pode ser obtido da conservação da energia, juntamente com o Teorema do Virial (2.3), que é válido em um sistema estelar estável. Devido à colisão, o equilíbrio dado pelo teorema do virial é perturbado e os AG adquirem um excesso de energia cinética, como já foi dito. Porém, após alguns tempos de cruzamento, um novo equilíbrio é estabelecido, o que implica que o teorema pode ser novamente aplicado. As propriedades dinâmicas dos AG após a

colisão serão estudadas na Secção 6.5, onde variaremos em tal estudo a IMF, a concentração e a massa relativa dos modelos envolvidos. Entretanto, antes disso, abordaremos os encontros fracos, por meio da aproximação impulsiva, a fim de obter algumas expressões simples para dois modelos de Plummer com o intuito de compará-las com os resultados numéricos da referida Secção.

## 6.2 Aproximação Impulsiva

Os efeitos mareais entre dois AG podem ser estimados, como primeira aproximação, admitindo que as forças mareais sejam impulsivas por natureza, *viz.*, que as estrelas permanecem estacionárias durante o encontro. Isso é conhecido como **aproximação impulsiva** (AI). Embora não seja utilizada nos estudos numéricos, tal abordagem permite enxergar mais claramente as possíveis dependências dos efeitos dos encontros com os parâmetros dos globulares, como por exemplo, a velocidade relativa, a razão de massas entre o par e a concentração deles. Ela foi utilizada, primeiramente, por Spitzer (1958) para calcular os efeitos da perturbação de uma nuvem interestelar no movimento de um aglomerado aberto.

A AI seria boa em encontros fracos, quando o intervalo correspondente à interação é curto, em comparação com os tempos de cruzamento dos AG. No caso de encontros fortes, a precisão é menor. Aguilar & White (1985) encontraram uma boa concordância entre ela e resultados numéricos utilizando um integrador direto. Eles simularam uma série de encontros e concluíram que uma precisão razoável é atingida apenas para parâmetros de impacto grandes. A grande vantagem de tal aproximação é que ela conduz a expressões analíticas simples para as variações de energia durante os encontros. Por conseguinte, permite variar facilmente as condições iniciais, concernentes a experimentos numéricos (Narasimhan & Alladin, 1986).

Passemos, então, à obtenção da variação de energia durante um encontro frontal entre dois modelos de Plummer por meio da AI.

**Proposição 6.1.** *Sejam dois AG dois sistemas estelares idênticos com densidade de massa do modelo de Plummer dada pela equação (4.9). Considere um encontro deles tal que a força mareal seja de natureza impulsiva e seja  $V$  a velocidade relativa entre eles. Então, a variação da energia do sistema teste, devido ao encontro, é tal que*

$$\frac{\Delta E}{|E|} = \frac{64GM}{9\pi r_{pl} V^2} \quad (6.9)$$

### Demonstração

Seja o centro do AG perturbador  $M_1$  a origem do sistema de coordenadas. Considere que o AG teste  $M$  atravessa subitamente  $M_1$ , com uma velocidade constante  $V$  de  $z = -\infty$  até  $z = \infty$ .

Considere uma estrela no AG teste a uma distância  $r$  do centro de  $M$  e suponha que sua distância, no instante de máxima aproximação do centro de  $M_1$ , seja  $D_1$ . Seja  $t$  o instante de máxima aproximação entre os AG. Então,

$$r^2 = D_1^2 + V^2 t^2, \quad \cos \theta = D_1/r \quad (6.10)$$

A velocidade tangencial  $V_{\perp}(D_1)$  concedida à estrela devido à colisão é dada por

$$V_{\perp}(D_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\nabla \phi(r) \cos \theta dt$$

onde  $\phi$  é dado pelo teorema 4.1 através da equação (4.18). Logo,

$$V_{\perp}(D_1) = \frac{2GM_1 D_1}{V} (r_{\text{pl}}^2 + D_1^2)^{-1} \quad (6.11)$$

O incremento na energia cinética do AG inteiro devido ao efeito mareal de  $M_1$  é dado por

$$\Delta K = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [V_{\perp}^2(D_1)] \frac{dM}{dD} dD \quad (6.12)$$

onde  $dM/dD$  é obtido considerando uma casca cilíndrica em  $M$  de comprimento  $s$ , raio  $D$  e espessura  $dD$ , i.e.,

$$\frac{dM}{dD} = 2\pi \int_0^{\infty} D \rho(r') dD, \quad r' = \sqrt{s^2 + D^2} \quad (6.13)$$

Agora, das equações (4.9), (6.11) e 6.13, para dois AG idênticos, segue que

$$\Delta K = \frac{G^2 M^3}{3V^2 r_{\text{pl}}^2} \quad (6.14)$$

Na AI, as variações na energia potencial são desprezadas. Isso implica que  $\Delta K = \Delta E$ . Desse fato e da expressão da energia total do modelo de Plummer, equação (4.21) obtemos a proposição.

□

Note que as hipóteses da proposição 6.1 em geral não são válidas, uma vez que os AG, em geral, são diferentes entre si. Ahmed (1979) estendeu o trabalho de Toomre para casos em que os dois modelos de Plummer diferem em massa e concentração. Como este caso é bem definido quando sua massa e concentração são fornecidas, temos que se tratam de modelos diferentes. Ele chegou às seguintes expressões para as variações das energias dos modelos:

$$\frac{\Delta E_1}{|E_1|} = \frac{32r_{\text{pl},12}^2}{3\pi M_{12}(1 + M_{12})} \left( \frac{B}{A} \right) \left( \frac{V_{\text{esc}}^2}{V^2} \right) \quad (6.15)$$

$$\frac{\Delta E_2}{|E_2|} = \frac{32M_{12}^2}{3\pi r_{pl,12}(1+M_{12})} \left(\frac{B}{A}\right) \left(\frac{V_{esc}^2}{V^2}\right) \quad (6.16)$$

onde  $V_{esc}$  é a velocidade de escape, i.e., a velocidade tal que a energia orbital é nula e

$$M_{12} := \frac{M_1}{M_2}, \quad r_{pl,12} := \frac{r_{pl,1}}{r_{pl,2}}$$

$$A := \frac{r_{pl,12}^2}{(r_{pl,12}^2 - 1)^2} \left[ (r_{pl,12}^2 + 1) E\left(\frac{\pi}{2}, q\right) - 2 F\left(\frac{\pi}{2}, q\right) \right]$$

$$B := \frac{2 r_{pl,12}^2}{(r_{pl,12}^2 - 1)^2} \left[ \frac{r_{pl,12}^2 + 1}{r_{pl,12}^2 - 1} \ln r_{pl,12}^2 - 2 \right]$$

onde  $E(\pi/2, q)$  e  $F(\pi/2, q)$  são as integrais elípticas completas de primeiro e segundo tipos, respectivamente, e

$$q := \left[ 1 - \frac{1}{r_{pl,12}^2} \right]^{1/2}.$$

Note que, tanto para o caso de modelos idênticos quanto para o caso em que são diferentes, é possível notar que as massas e as concentrações deles, bem como a velocidade relativa associada à colisão são parâmetros importantes em tal estudo, onde os globulares interagem em uma colisão frontal. Portanto, um de nossos propósitos é verificar exatamente as variações que ocorrem na massa, na energia de cada modelo, bem como efeitos em globulares que possuem corrente mareal, quando variamos os referidos parâmetros. Além deles, variaremos também a IMF. As variações intrínsecas de cada modelo já foram discutidas na Seção 4.4. Basta apenas definir rigorosamente a geometria das colisões e quais valores da velocidade relativa utilizaremos, o que será feito na seção subsequente. Por fim, estamos também interessados no valor limite da velocidade relativa que garante a fusão e que permitirá verificar os efeitos do encontro na dinâmica secular de um AG (Seção 6.5).

### 6.3 Relação da Teoria com as Simulações Numéricas

Nesta seção, intentamos mostrar o comportamento dos globulares quando interagem em uma colisão frontal. Para isso, considere a geometria do sistema, esboçada na Figura 6.1. Os dois AG inicialmente descrevem órbitas circulares no plano  $xOy$ , em torno do centro galáctico. Suas posições iniciais foram escolhidas de modo que a colisão fosse o mais próximo de uma colisão frontal, ou seja, admitimos  $Y/X \ll 1$ . A fim de que os dois se encontrem rapidamente, em apenas alguns passos de integração, tomamos  $X_1 = X_2 = 8500$  pc e  $Y_1 = 10$  pc =  $-Y_2$ . Isso permite que ambos estejam



suficientemente separados, encontrem-se rapidamente e satisfaçam a condição de colisão frontal. As velocidades de cada um, no referencial do centro de massa do par, foram sempre escolhidas de modo que o encontro ocorresse no centro de massa.

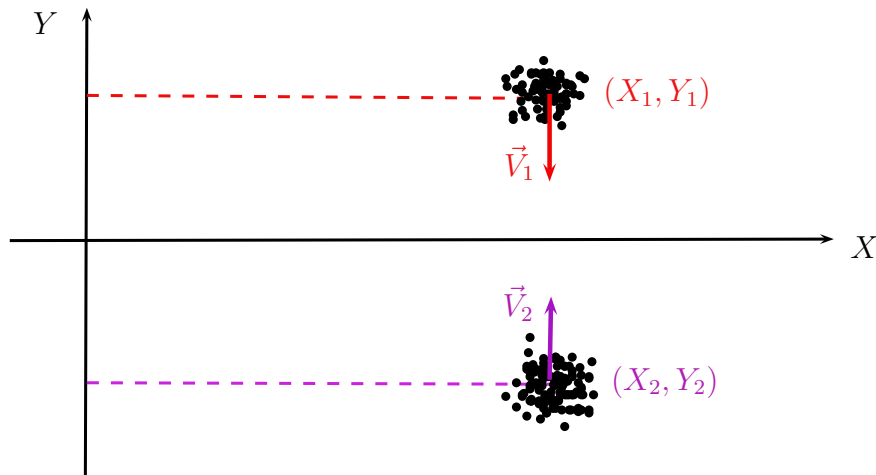


Figura 6.1: Geometria associada à colisão em todas as simulações, onde as posições dos modelos estão representadas no referencial da Galáxia. Além disso,  $X_1 = X_2$ , necessariamente, o que não caracteriza uma colisão frontal, *stricto sensu*, mas sim uma colisão quase frontal, já que ambos descrevem órbitas circulares em torno do centro galáctico. O valor da velocidade relativa entre eles,  $|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|$ , é a grandeza que permite classificar cada colisão segundo a Definição 6.1.

O intervalo que utilizamos para a razão entre a velocidade relativa e a dispersão de velocidade média nos globulares é  $[0.001; 6.06]$ . Tal intervalo tem a vantagem de abranger várias regiões qualitativas das referidas interações.

Como já foi explicitado na Seção 4.4, utilizaremos combinações de oito modelos tomados dois a dois nas simulações. Além disso, das expressões (6.15) e (6.16), vemos que as trocas energéticas dependem das razões dos raios de meia-massa e das massas dos modelos envolvidos. Dessa forma, realizamos três conjuntos de simulações, com o intuito de testar a dependência das grandezas referidas com os fenômenos observados nos experimentos numéricos, conforme as Tabelas 6.1, 6.2 e 6.4, correspondendo, respectivamente, à IMF, à razão entre os raios de meia-massa e à razão entre as massas. Todas as informações referentes aos modelos M1–M11 podem ser obtidas nas Tabelas 4.2 e 4.3.

Tabela 6.1: Conjunto de simulações A cujos objetivos são testar a dependência das grandezas dinâmicas com as IMF.

| Simulações | Modelos | IMF            |
|------------|---------|----------------|
| A1         | M1–M1   | canônica       |
| A2         | M2–M2   | multiplôtência |

Vale ressaltar que, cada variação de parâmetros, corresponde a um conjunto de simulações, uma vez que para cada velocidade relativa, há uma simulação. Por exemplo, o conjunto de simulações

Tabela 6.2: Conjunto de simulações B cujos objetivos são testar a dependência das grandezas dinâmicas com as razões dos raios de meia-massa, onde  $r_{h,2}/r_{h,1} \leq 1$ .

| Simulações | Modelos | $r_{h,2}/r_{h,1}$ |
|------------|---------|-------------------|
| B1         | M1–M1   | 1.00              |
| B2         | M1–M3   | 0.53              |
| B3         | M3–M4   | 0.39              |
| B4         | M1–M4   | 0.21              |

Tabela 6.3: Conjunto de simulações C cujos objetivos são testar a dependência das grandezas dinâmicas com as razões das massas, onde  $M_2/M_1 \leq 1$ .

| Simulações | Modelos | $M_2/M_1$ |
|------------|---------|-----------|
| C1         | M1–M1   | 1.0000    |
| C2         | M1–M5   | 0.7636    |
| C3         | M5–M6   | 0.6841    |
| C4         | M1–M6   | 0.5224    |
| C5         | M6–M7   | 0.3814    |
| C6         | M5–M7   | 0.2609    |
| C7         | M1–M7   | 0.1992    |
| C8         | M5–M8   | 0.1298    |
| C9         | M1–M8   | 0.0991    |

Tabela 6.4: Conjunto de simulações D cujos objetivos são testar as propriedades das correntes mareais durante um encontro forte na geometria aqui adotada.

| Simulações | Modelos |
|------------|---------|
| D1         | M9–M10  |
| D2         | M10–M11 |

C1 corresponde a  $p$  simulações, sendo cada uma realizada com uma velocidade relativa diferente. Portanto, cerca de 350 simulações no total foram realizadas.

Iniciemos a análise com os conjuntos A1 e A2. Tais simulações foram realizadas com os modelos M1 e M2, que possuem a mesma massa, o mesmo raio de meia-massa e dispersões de velocidade idênticas. Ou seja, a única diferença é referente à IMF, onde M1 foi construído com a canônica e M2 com a de multipotências.

Durante a colisão dos dois modelos, energia orbital é transferida para a energia interna deles. Consequentemente, algumas estrelas em cada um ganham energia suficiente para escapar do sistema. Os cálculos das variações de energia interna e de massa fornecem informações sobre a estrutura interna dos globulares após a interação. No caso das simulações A1 e A2, a transferência de energia não foi grande o suficiente para causar a ruptura dos modelos. Na Figura 6.2, é possível observar que, em tais simulações, a variação de energia dos globulares aumenta à medida que a velocidade relativa entre eles diminui.

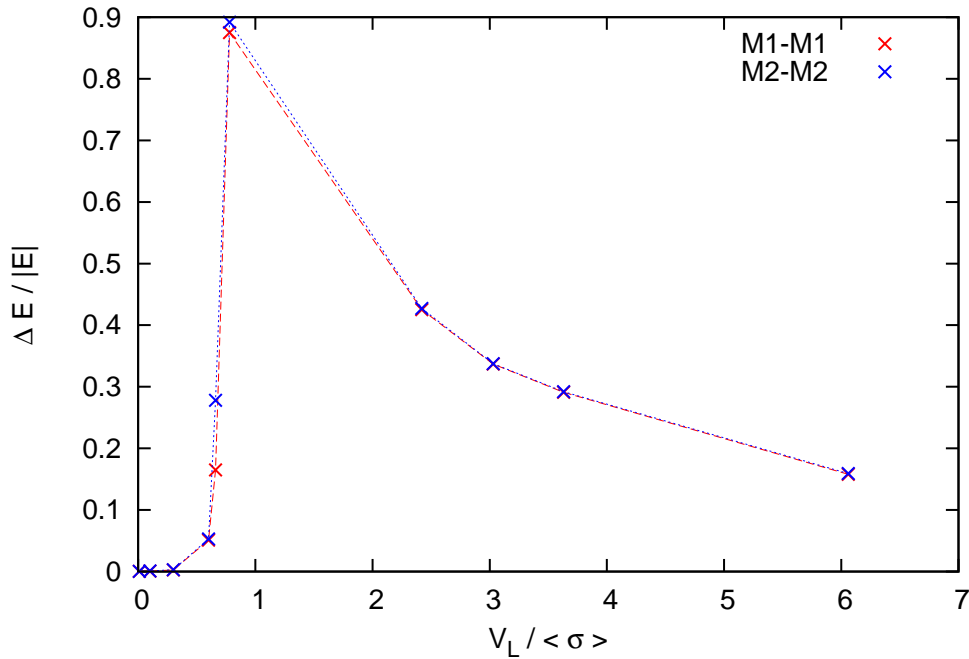


Figura 6.2: Variação de energia interna para os conjuntos de simulações envolvendo o modelo M1 e o modelo M2, que foram construídos, respectivamente, a partir das IMF canônica e de multipotências. Note que o pico ocorre na velocidade limite para a fusão, em ambos os casos. Se a velocidade relativa for maior que a velocidade limite, não ocorre fusão e a variação de energia diminui à medida que aquela aumenta. Já na região da fusão, a variação de energia diminui com a diminuição dela. Observe também que não há diferença significativa entre os conjuntos de simulações. Isso implica que a função de massa inicial é pouco relevante na referida interação.

Além disso, quando a velocidade relativa for bem maior que a dispersão de velocidade,  $\Delta E / |E| \ll 1$  e os globulares sobrevivem à colisão. Tal grandeza chega a seu valor máximo no limite em que os modelos se fundem. Como tal velocidade será bastante importante nas análises subsequentes, convém defini-la rigorosamente, como se segue <sup>2</sup>:

**Definição 6.5.** A *velocidade relativa limite*, ou simplesmente *velocidade limite*  $V_L$  é aquela tal que separa o espaço de parâmetros em duas regiões distintas, a saber, a região da fusão e a região da não fusão.

Dessa forma, para as simulações A1 e A2, temos que  $V_L = 0.78\sigma$ . E como já foi esplanado, o pico da variação de energia interna ocorre para este valor. Ademais, à medida que a velocidade relativa diminui com relação a  $V_L$  temos que a variação energética também diminui.

As figuras referentes à variação da energia e da variação da massa correspondem a apenas um modelo, já que tais variações para ambos são aproximadamente iguais. Isso, provavelmente, não deve ocorrer nos conjuntos B e C, uma vez que neles a concentração e a massa variam. Esses parâmetros

<sup>2</sup>Como veremos adiante, na Subsecção 6.4, cada uma das regiões qualitativas definidas pela velocidade limite pode ser subdividida em sub-regiões.

são importantíssimos na modelagem de uma esfera de Plummer, que por sua vez, deve responder diferentemente a uma interação do tipo estudado aqui.

Naturalmente, a variação de massa (perda ou ganho) atinge seu máximo para a mesma velocidade ( $0.78\sigma$ ), uma vez que há uma relação física explícita entre  $\Delta E$  e  $\Delta M$ , conforme pode ser observado na Figura 6.3. Além da perda de massa devido ao escape (ou captura) de estrelas de cada modelo, aquela resultante da evolução estelar também foi contabilizada. É possível ver que, na região da fusão, à medida que a velocidade relativa diminui, a perda de massa aumenta, muito provavelmente devido à evolução estelar, uma vez que quanto menor a velocidade relativa, maior o tempo para a completa fusão, conforme explicaremos mais adiante com a ajuda da Figura 6.6. Finalmente, convém notar que a variação na massa não ultrapassa o valor de 20%. Já no caso da energia, isso não ocorre, onde o pico chegar a quase 100%.

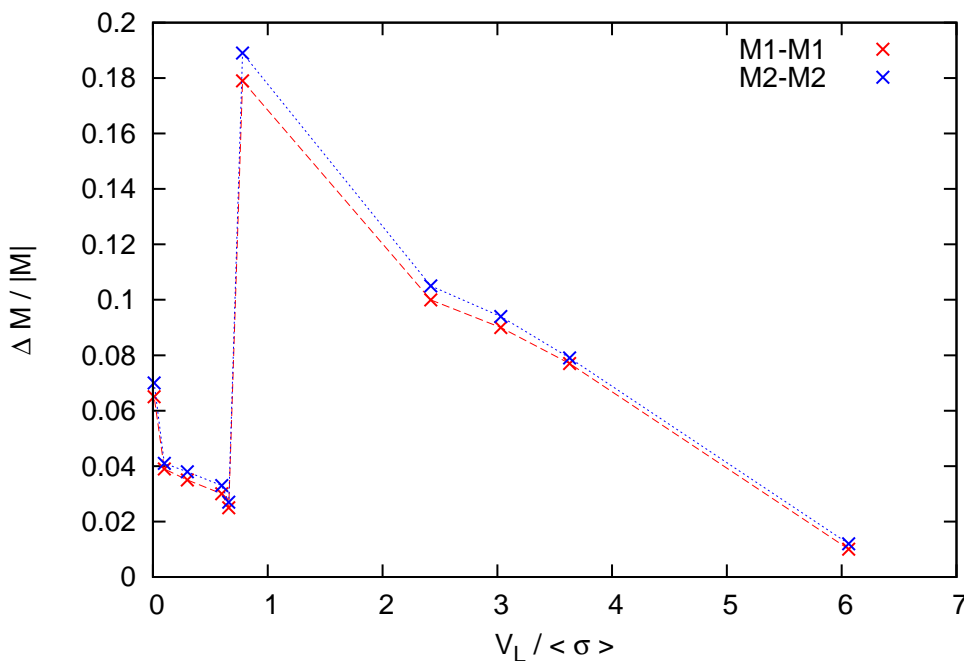


Figura 6.3: Variação de massa para os conjuntos de simulações envolvendo o modelo M1 e o modelo M2, que foram construídos, respectivamente, a partir das IMF canônica e de multipotências. Note que, em ambas, o pico ocorre na velocidade limite para a fusão. Se a velocidade relativa for maior que a velocidade limite, não ocorre fusão e a variação de massa diminui à medida que aquela aumenta. Já na região da fusão, a variação de massa aumenta, com a diminuição dela, devido à evolução estelar. Observe também que não há diferença significativa entre os conjuntos de simulações, embora os modelos M2 possuam uma variação de massa maior para os mesmos valores da velocidade relativa das simulações envolvendo M1. Provavelmente, isso ocorre devido à diferença no intervalo de massas e número de estrelas provenientes das diferenças entre as IMF. Porém, é possível inferir que a função de massa inicial é pouco revelante durante tal interação, analogamente à inferência feita para o caso da energia. Por fim, as variações são sempre menores que 20%, diferentemente das variações na energia que são bem maiores.

Conforme já foi mencionado, nas simulações A1 e A2, ocorre apenas a fusão ou a não fusão, onde

neste último caso, os globulares simplesmente ultrapassam um ao outro. Tais fenômenos podem ser observados nas Figuras 6.4, para o caso da fusão, e na Figura 6.5 para o caso da não fusão. Ambas as figuras exibem seis recortes temporais associados a configurações iniciais que garantem a fusão ou não. É possível observar que o instante da colisão para os dois casos é aproximadamente o mesmo. Tais figuras ilustram duas das simulações A1, sendo a primeira para a velocidade relativa igual a  $2.42\sigma$  e a segunda para  $0.66\sigma$ . De forma geral, no fim desta seção, discutiremos acerca da escala de tempo associada à colisão para as diversas velocidades relativas consideradas.

A Figura 6.6 exhibe o tempo que eles gastam para se encontrarem, i. e., o tempo necessário para que seus centros estejam próximos. Note que o tempo aumenta à medida que a velocidade relativa diminui. Ademais, o aumento é sutil até a velocidade limite. Quando a velocidade é menor que esta, à medida que diminui, o tempo aumenta exponencialmente. Isso foi observado em todas os conjuntos de simulações, o que sugere, muito provavelmente, que a escala de tempo até a colisão depende fortemente do potencial galáctico e não apenas da geometria adotada.

É razoável pensar que, quanto maior for a velocidade relativa, ainda no regime  $V < V_L$ , maior será o tempo necessário para que eles se fundam. Com efeito, isso foi observado em todos os experimentos numéricos. Em outras palavras, um globular atravessa o outro e é arrastado por este; daí, quanto menor for a velocidade relativa entre eles, maior será o efeito de tal arraste.

Isso nos leva a outra discussão, alusiva ao comportamento da fusão nas velocidades próximas à limite. À medida que a velocidade, a partir da limite, diminui, o encontro se torna cada vez mais suave, no sentido tanto de que a fricção dinâmica é maior quanto no sentido de que a transferência energética é menor.

E ainda, para velocidades relativas no intervalo  $(0.85 V_L; 1.00 V_L)$ , ocorre a formação de um sistema binário que, devido à fricção dinâmica, funde-se em apenas um globular.

Até agora, vimos que a IMF não altera de forma significativa os efeitos dinâmicos que podem ser observados em experimentos numéricos de colisões entre globulares para a geometria aqui adotada. Veremos seguidamente o que ocorre quando variamos o raio de meia massa dos modelos. Ou seja, analisemos os resultados provenientes das simulações B1, B2, B3 e B4.

Note que os modelos envolvidos nessas simulações possuem a mesma massa e foram construídos a partir da IMF canônica, o que permite analisar exclusivamente os efeitos devido às variações nas concentrações dos modelos.

Os efeitos observados em todas as simulações B são idênticos aos observados para as simulações A. A diferença é que, à medida que a razão entre os raios de meia-massa diminui, a velocidade limite também diminui, porém os picos possuem aproximadamente os mesmos valores, tanto para as variações de energia quanto para as variações de massa. Ademais, os comportamentos qualitativos das simulações B são idênticos aos das simulações A. Isso implica que tal comportamento não depende da concentração.

Porém, os globulares que possuem menor concentração, i. e., possuem raio de meia-massa mai-

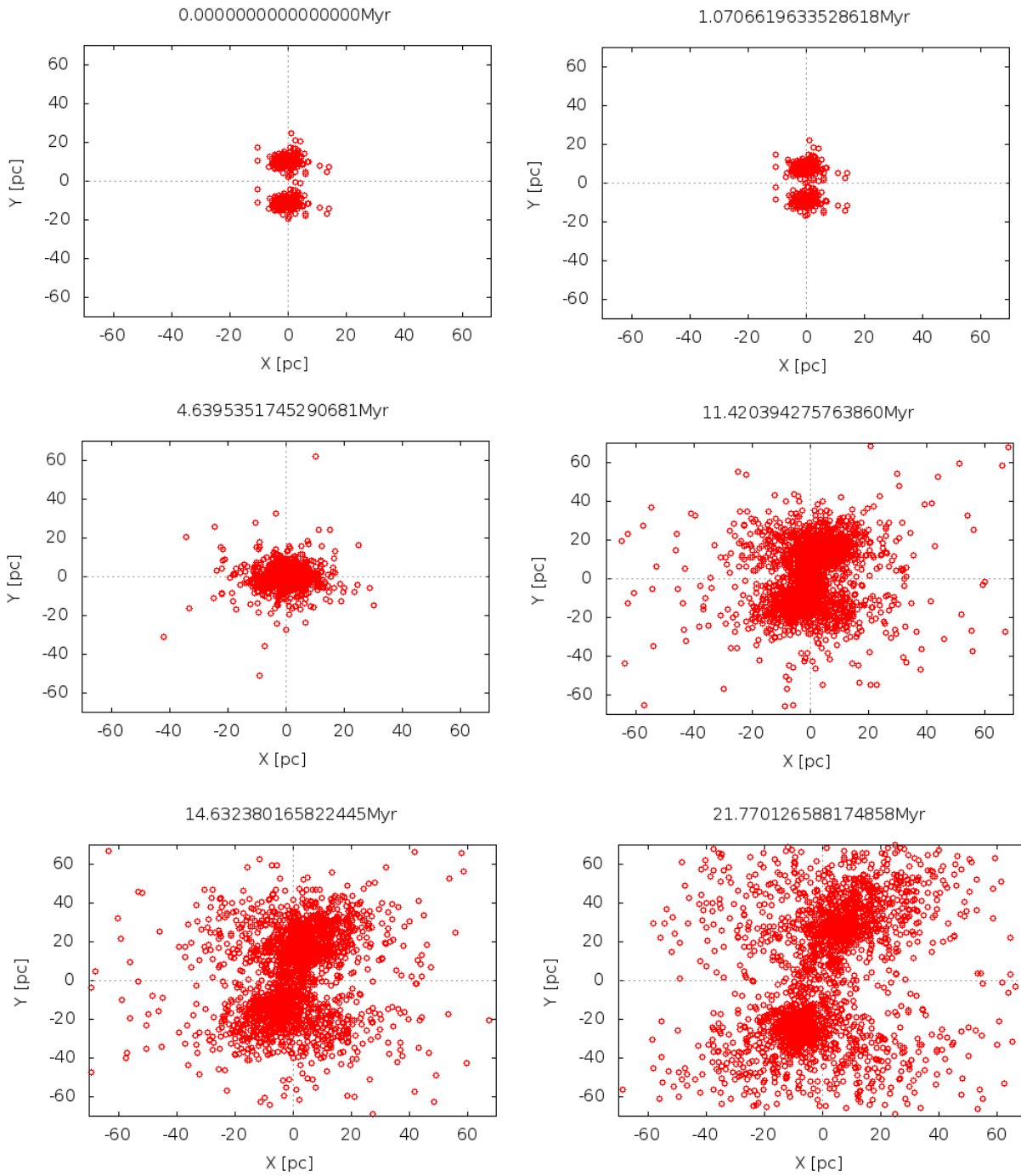


Figura 6.4: Distribuição espacial das simulações A1, onde a velocidade relativa é igual a 2.42 que não leva à fusão. Note que a colisão ocorre em  $4.6395 \times 10^6$  anos em tal simulação. Como a velocidade relativa entre eles é maior que a velocidade limite para as razões de massa e concentração adotadas, os aglomerados não se fundem.

ores, sofrem maiores alterações na energia que aqueles com raio de meia-massa menores. Diferentemente do observado nas simulações A, onde os modelos sofriam aproximadamente as mesmas variações.

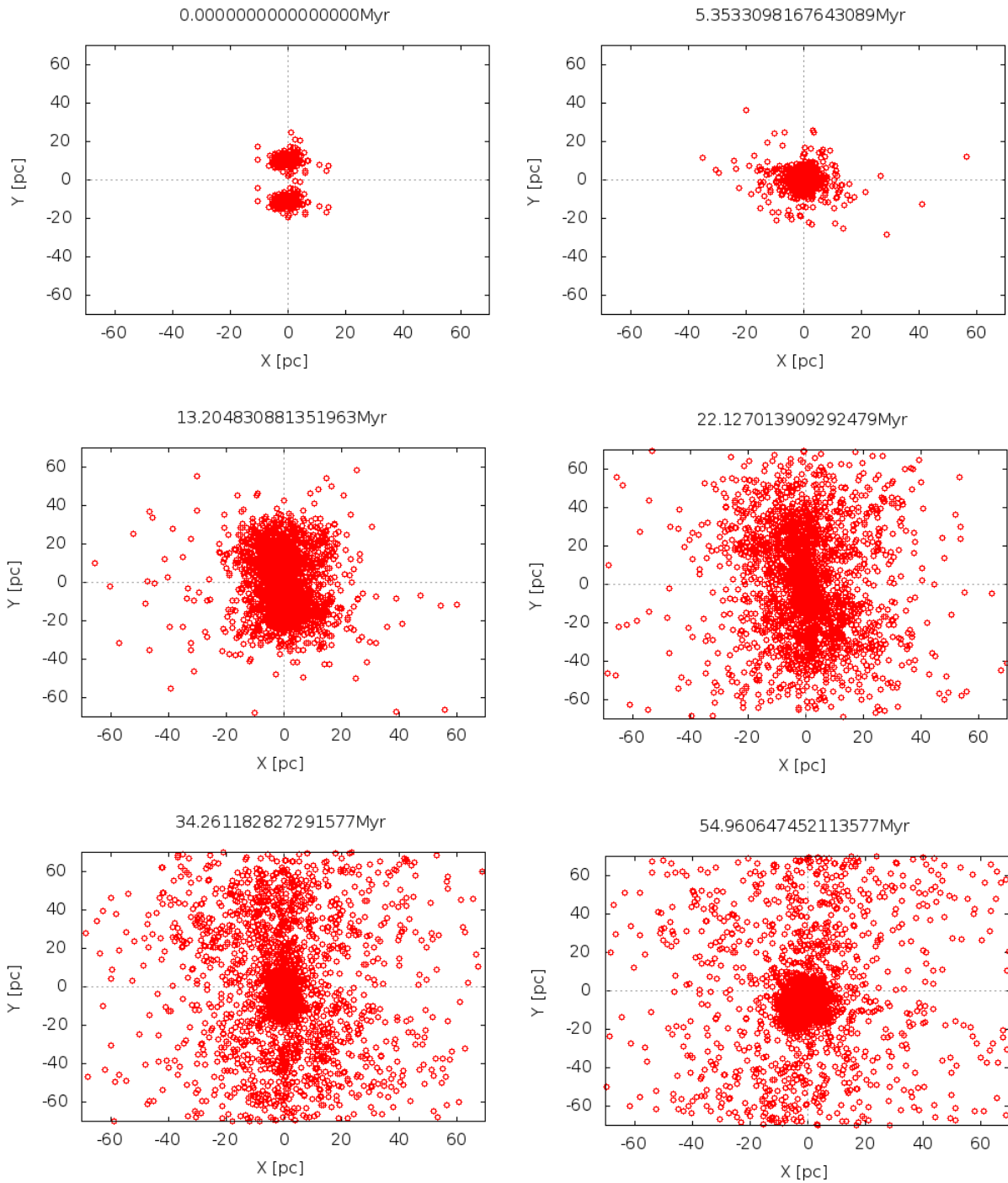


Figura 6.5: Distribuição espacial das simulações A1, onde a velocidade relativa é igual a 0.66 que leva à fusão. Note que a colisão ocorre em  $5.3533 \times 10^6$  anos em tal simulação. Como a velocidade limite entre eles é menor que a velocidade limite para as razões de massa e concentração adotadas, os aglomerados se fundem.

Para as simulações B2, *viz.*, razão de raios de meia-massa igual a 0.53, a Figura 6.7 exibe as diferenças para os dois globulares com concentrações distintas. É possível observar que, dessemelhantemente ao caso das simulações A, tanto a variação de energia quanto a de massa são deveras

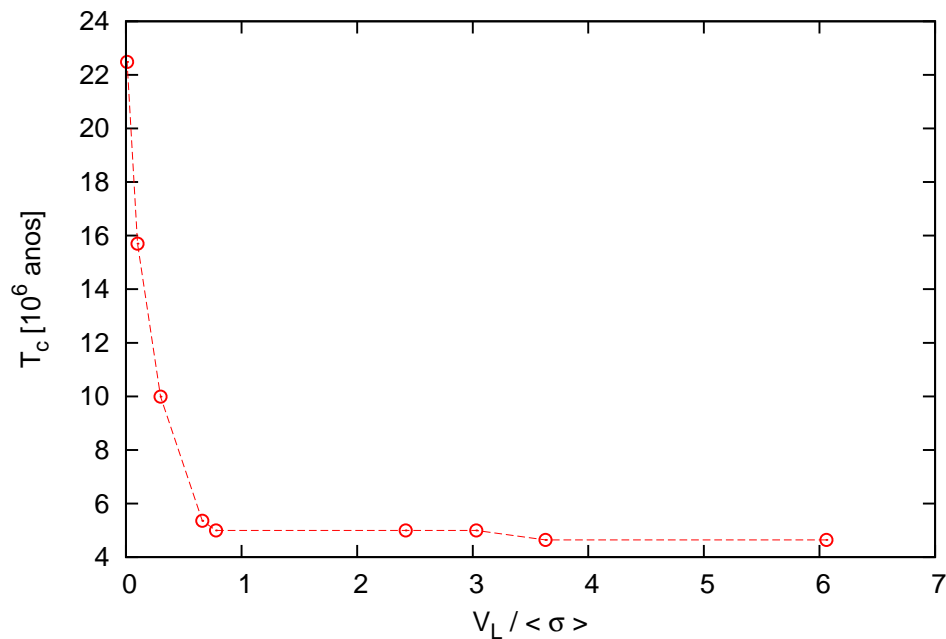


Figura 6.6: Tempo para que os centros dos modelos estejam próximos. Note que, à medida que a velocidade relativa diminui, o tempo até a colisão deles aumenta. Além disso, após a velocidade limite, o tempo cresce abruptamente.

expressivas. Para tal razão de raios de meia-massa, a velocidade limite é  $0.73 \langle \sigma \rangle$ , que é menor que a velocidade limite para o caso onde os modelos possuem o mesmo raio de meia-massa; e, tal velocidade diminui à medida que a razão diminui. Isso ocorre, provavelmente, porque um globular mais concentrado é mais ligado, no sentido de que seu caroço possui mais influência sobre seu respectivo halo.

Ademais, a separação entre as curvas observadas na Figura 6.7 aumenta com a diminuição de tal razão. Isso implica que, quanto menos concentrado for um modelo com relação ao outro, mais aquele será perturbado por este. Foi observado também que o fato do pico da energia ser maior que 1 não implica a destruição de tal modelo.

Sumariamente, os modelos menos concentrados são mais perturbados, porém, para nenhum valor da razão dos raios de meia-massa a destruição do menos concentrado foi observada. Dessa forma, o comportamento qualitativo dos globulares é idêntico ao das simulações A, a menos dos valores quantitativos.

Finalmente, discutamos as simulações C, que fornecem cenários qualitativos mais ricos. Isso, naturalmente, porque a massa representa o parâmetro mais importante na dinâmica aqui considerada.

Como primeira diferença, podemos apontar o fato de que mais um comportamento foi observado nas referidas simulações, a saber, a destruição dos globulares de menor massa, quando a velocidade relativa é maior que a velocidade limite do par e  $M_2/M_1 < 0.5$ , onde  $M_2/M_1 \leq 1$ . A Figura 6.8 exibe tal cenário para as simulações C5. Nesse caso, a razão de massas é 0.3814 e o modelo de menor



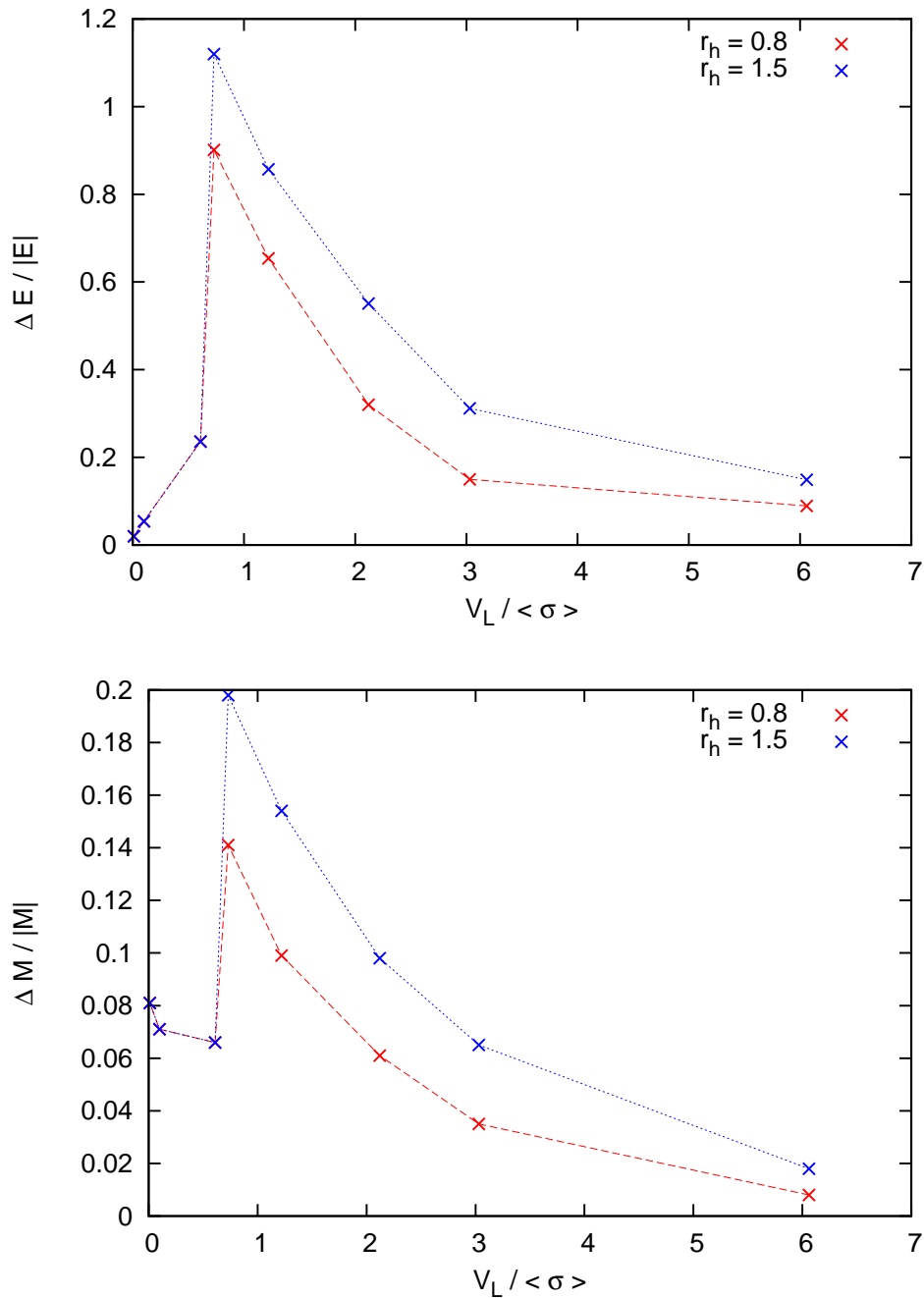


Figura 6.7: Variações na energia e na massa de dos modelo M1 (vermelho) e M3 (azul) com relação à velocidade relativa entre eles. O pico das distribuições correspondem à velocidade limite de tais simulações. O modelo M1 possui raio de meia-massa igual a 0.8, enquanto que o de M3 é 1.5. Isso fornece uma razão de meia-massa de 0.53. Note que os globulares possuem a mesma massa e o menos concentrado (M3) é o mais perturbado. Mesmo que o pico da variação de energia de M3 ultrapasse 100%, a perturbação devido a M1 não foi suficiente para destruí-lo.

massa inicialmente está abaixo. Note que após o encontro, este globular dispersa-se gradativamente. Naturalmente, o tempo para a dispersão depende da força do impacto, i.e., da fricção dinâmica, que por sua vez, como já foi mencionado dependa da velocidade relativa entre eles. Logo, quanto menor

a velocidade relativa, se for maior que a velocidade limite, maior será a fricção dinâmica e, consequentemente, menor será o tempo para a dispersão do globular de menor massa.

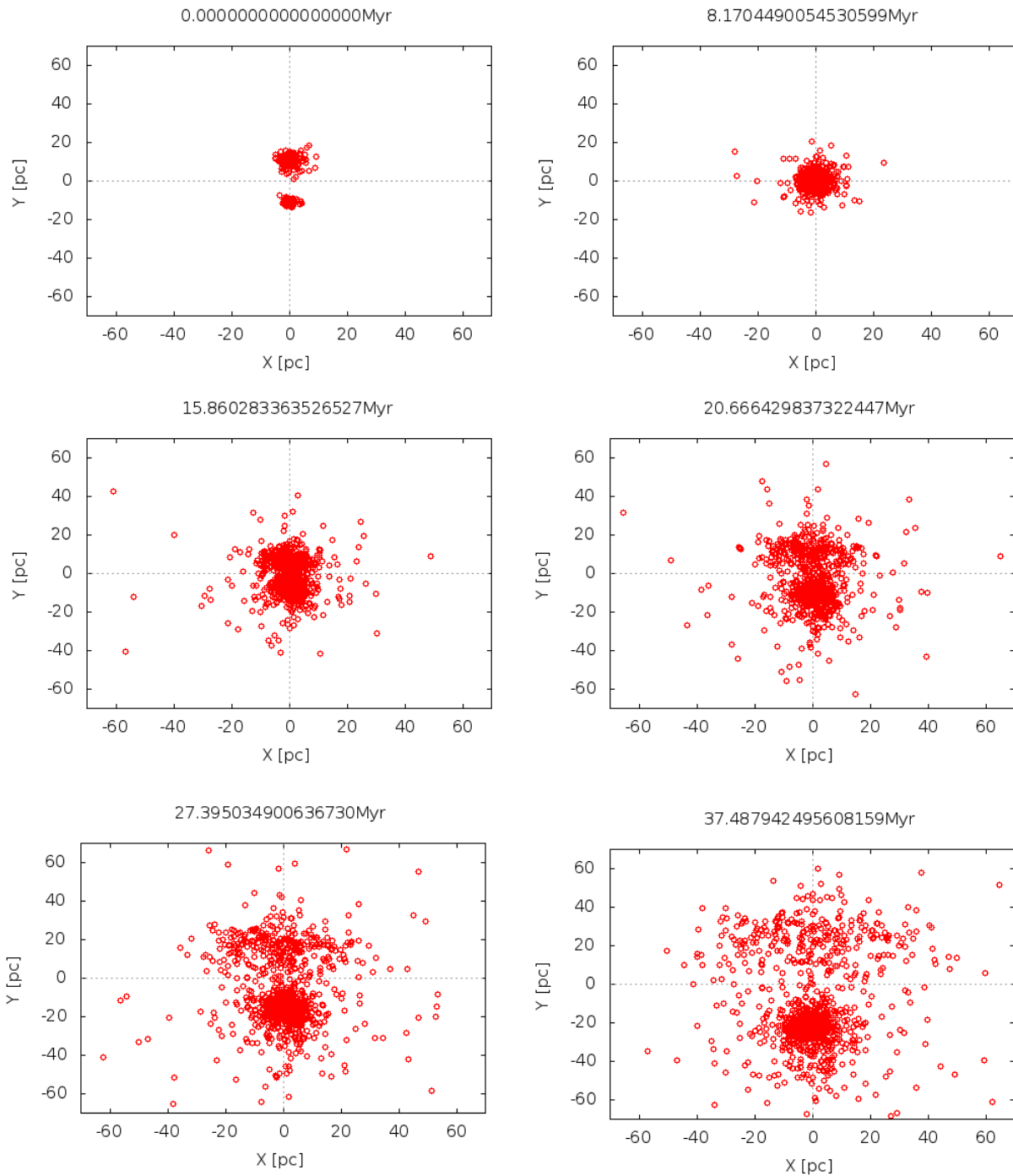


Figura 6.8: Distribuição espacial de uma simulação das C5, onde a velocidade relativa é igual a  $0.72 \langle \sigma \rangle$  que leva à destruição do modelo de menor massa. Como a velocidade relativa entre eles é maior que a velocidade limite para as razões de massa e concentração adotadas, os mesmos não se fundem. Ademais, como a razão de massas é menor que 0.5, um deles é destruído, a saber o modelo que está inicialmente em baixo (de menor massa).

Acerca da velocidade limite, observamos que à medida que  $M_2/M_1$  diminui,  $V_L$  também diminui. Já as variações de energia e massa, comportam-se como no caso das simulações A e B, a não ser no caso onde há destruição. Em tais casos, a variação de massa do globular que possui menor massa é de 100%, ou seja, o globular é destruído.

Por fim, analisamos os efeitos nos modelos M9, M10 e M11, por meio das simulações D. Embora dois desses não possuam idade nula, *viz.*, possuem corrente mareal, pudemos observar que os efeitos na corrente são desprezíveis. Ora, a corrente não está mais ligada ao globular; dessa forma, uma interação entre eles pouco alteraria as propriedades de estruturas não ligadas a eles. Com efeito, nas simulações D, observamos nos globulares os mesmos efeitos das outras simulações. Já nas correntes, nada foi observado de diferente em sua estrutura.

Finalizaremos esta seção por meio de uma comparação dos nossos resultados com os resultados de trabalhos anteriores. Uma comparação mais detalhada, porém, torna-se difícil, uma vez que nos trabalhos anteriores a colisão sempre foi feita pela consideração de que os sistemas estelares eram galáxias. Em tais estudos, portanto, os sistemas não estavam sob a ação de um potencial dominante, dado o modelo cosmológico adotado nelas.

Primeiramente, acerca da discrepância entre a AI e os experimentos numéricos, não intentamos fazer uma comparação, já que isso não é compatível, desde estudos numéricos da década de 70 (Van Albada & Van Gorkom, 1977; Roos & Norman, 1979; Miller & Smith, 1980; Aguilar & White, 1985; Navarro, 1989; Namboodiri, 1995, por exemplo), para encontros fortes. Logo, adotamos que um novo contra-exemplo não seria necessário, tampouco acrescentaria algo de novo para a comunidade astronômica.

Já referente às variações na energia, nossos experimentos são deveras compatíveis com os de Roos & Norman (1979); Namboodiri (1995) para os casos em que a velocidade relativa é maior do que a velocidade limite. Porém, para os casos em que a velocidade relativa é baixa, os resultados de (Roos & Norman, 1979) apresentam discrepâncias, talvez devido ao baixíssimo número de partículas por eles utilizadas, cerca de 94.

Com relação à variação na massa, alguns estudos apresentam variações pouco expressivas. Por exemplo, P. & Hut (1988) obtêm uma perda de massa de 15-20%, em torno da velocidade limite. No estudo realizado por Van Albada & Van Gorkom (1977) a perda de massa encontrada foi da ordem de 1%, o que é significativamente menor do que o encontrado aqui. Embora eles usassem um integrador de  $N$  corpos diferente (decomposição axissimétrica de Fourier da distribuição de massa), é difícil imaginar que isso explicaria a grande diferença. Porém, em alguns experimentos com modelos de King mostraram que a perda de massa na região em torno da velocidade limite é de 10-20%. Além disso, Namboodiri (1995) obteve em suas simulações perdas de massa sempre menor que 20%, analogamente aos nossos estudos. Por fim, nossas simulações mostraram uma perda de massa maior que em todos esses estudos para velocidades relativas bem pequenas. Isso é explicado devido à evolução estelar integrada ao código *NBODY6* que não foi desativada em nossas simulações. Ou seja, quanto

maior for o tempo até que os globulares se encontrem, maior será a perda de massa em razão da evolução estelar.

Embora nenhum trabalho do tipo aqui feito tenha considerado a influência da IMF na dinâmica proposta, podemos afirmar que nossos resultados estão em acordo com trabalhos referentes a como a função de massa varia durante a evolução de um globular ao longo de uma galáxia. Por exemplo, Vesperini & Heggie (1997) mostraram que nos estágios iniciais da evolução de um AG, independentemente da IMF utilizada em suas simulações, para  $t < 200 \times 10^6$  anos, a distribuição de massa se equaliza. Tal estudo corrobora com o nosso, uma vez que a interação entre os pares ocorre em um tempo muito menor que o tempo de relaxação de meia massa inicial dos modelos.

Acerca da diferença nos experimentos quando variamos o raio de meia-massa, Evstigneeva et al. (2002) obtém o mesmo resultado. Os autores estudaram um colisão entre um modelo de Plummer e um modelo de Hernquist, um mais concentrado que o outro, e concluíram que o modelo menos concentrado sofre maior perturbação.

Passemos, agora, à descrição do método para se determinar o instante do encontro, bem como quando os modelos se fundem. Além disso, deduziremos uma expressão numérica para a dependência da velocidade relativa limite como função dos parâmetros aqui variados.

## 6.4 Velocidade Limite para a Fusão

Nesta secção, além do método para determinar o instante da colisão entre os modelos, descreveremos o procedimento utilizado para se obter a velocidade limite em cada conjunto de simulações. Obteremos uma expressão que relaciona a velocidade relativa limite, a dispersão de velocidade média, a razão entre os raios de meia-massa e a razão entre as velocidades. Por fim, delimitaremos os possíveis cenários qualitativos associados ao comportamento dos globulares após à interação, dependendo da razão de massas e da velocidade relativa entre eles.

A Figura 6.9 ilustra o método utilizado para se determinar o instante da colisão. Construimos, em cada simulação, a distribuição angular das estrelas com relação ao centro de massa do par. À medida que os dois globulares evoluem, os picos de tais distribuições aproximam-se ou afastam-se. No caso da figura em questão, o encontro se dá no terceiro painel, onde é possível ver apenas um pico, indicando que os centros dos modelos encontraram-se. Com tal método é possível observar não apenas a colisão, mas também os comportamentos qualitativos descritos na Secção 6.3. Ou seja, se um dos globulares é destruído, a distribuição dele se achata, parecendo uniforme. No caso de eles se fundirem, o pico se une, após um dado intervalo de tempo após o encontro, que depende da “força” do encontro. Já no caso da formação de um sistema binário, os picos atravessam um ao outro repetidamente.

A partir da identificação dos cenários qualitativos aos quais os modelos estão sujeitos após o

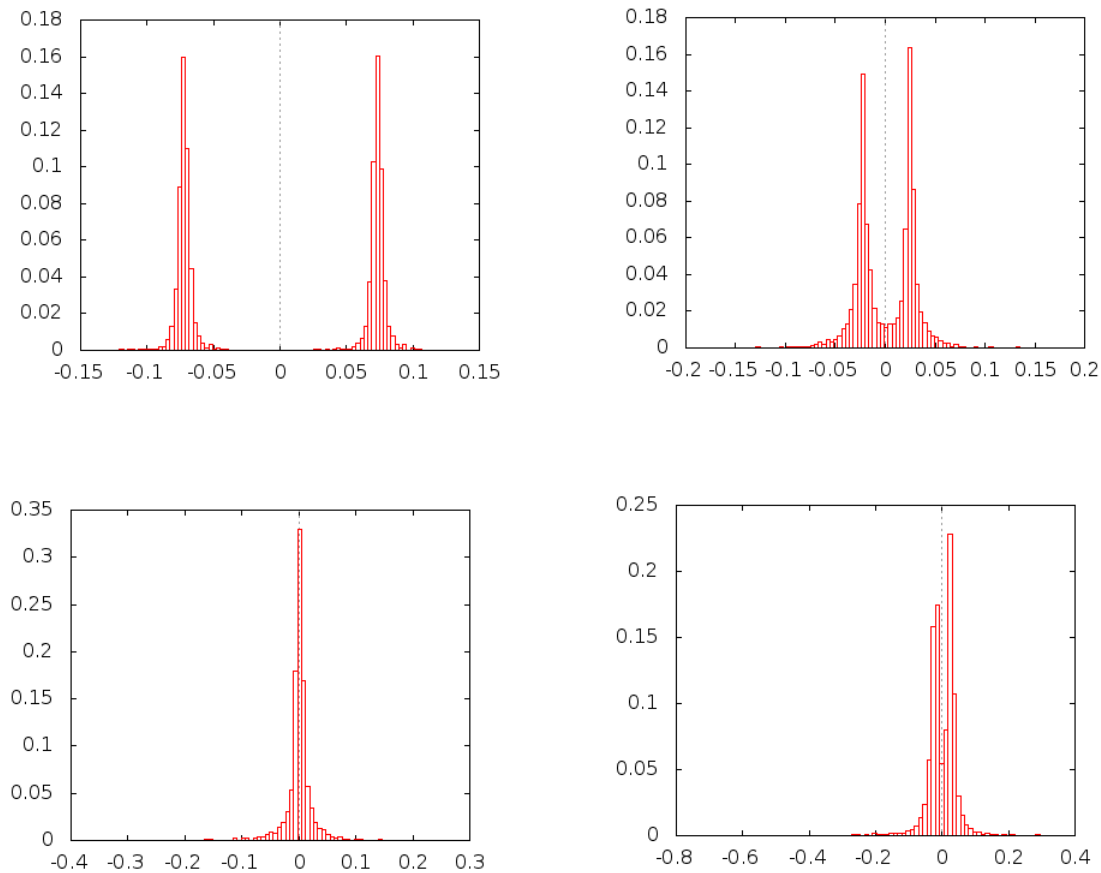


Figura 6.9: Recortes temporais do histograma normalizado da distribuição de estrelas ao longo da órbita dos dois modelos com relação ao centro de massa deles em uma única simulação. Da esquerda para a direita e de cima para abaixo, os recortes foram feitos em  $0.0 \times 10^6$  anos,  $4.38875 \times 10^6$  anos,  $4.75448 \times 10^6$  anos e  $5.12021 \times 10^6$  anos. Em tal simulação a velocidade relativa é  $6.0\langle\sigma\rangle$  e os modelos são M1 e M2. Note que os modelos não se fundem, uma vez que a velocidade relativa é maior que a velocidade limite. Além disso, o encontro se dá em  $4.75448 \times 10^6$  anos, que é o instante em que os picos das distribuições se encontram. Observe que anteriormente (e posteriormente) ao encontro, os picos estão separados.

encontro, é possível determinar qual a velocidade relativa tal que os globulares se fundem. Utilizamos um método semelhante ao método da bissecção para encontrar as raízes de uma função qualquer. Ou seja, escolhemos *a priori*, dois valores da velocidade relativa tais que para um ocorre fusão e para o outro não. Depois, verificamos se a média corresponde a uma fusão ou uma não fusão. Caso ocorra não fusão, buscamos por um valor menor; caso ocorra fusão, buscamos por um valor maior. Isso foi feito para uma precisão de  $10^{-2}$ , embora seja um procedimento deveras cansativo. Naturalmente, se pudéssemos nos valer da teoria de sistemas dinâmicos em tal análise, faríamos de forma mais rápida e mais precisa. Porém, a natureza do problema nos impede de tal aquisição. Além disso, quando a razão de massas diminui significativamente, a sensibilidade de tal método aumenta significativamente, exigindo cada vez mais simulações a fim de determinar com tal precisão a velocidade relativa limite.

Ademais, observamos que para razões de massa menores que 0.5, se a velocidade relativa está acima da velocidade limite, os globulares de menor massa são completamente destruídos. Isso ocorreu na maioria das simulações C.

Já afirmamos que a fusão dos modelos ocorre devido à fricção dinâmica que um exerce no outro. Diante disso, podemos nos questionar acerca da escala de tempo necessário para a fusão. Naturalmente, dado que os modelos possuem velocidade relativa tal que garante a fusão, quanto menor for a velocidade relativa entre eles, menor será o tempo gasto até que eles se fundam. Observe que não nos referimos ao tempo gasto até que eles se encontrem, que será maior à medida que a velocidade relativa diminui. Aludimos ao tempo gasto para que seus centros permaneçam suficientemente próximos, após o encontro. Novamente, da Figura 6.9 teríamos um retorno de ambos os picos, no caso da fusão, até que se encontrem novamente. Isso ocorre mais rapidamente à medida que a velocidade relativa entre eles diminui.

Por hipótese, suponhamos que não haja correlação entre as razões de massas e raios de meia massa. Daí, temos que

$$\frac{V_L}{\langle \sigma \rangle} = f \left( \frac{r_{h,2}}{r_{h,1}} \right) g \left( \frac{M_2}{M_1} \right) \quad (6.17)$$

É conveniente ressaltar que, como intentamos obter uma expressão a partir de experimentos numéricos, os quais, por sua vez, foram realizados com um dado intuito, optamos por utilizar os princípios de um método de interpolação bidimensional, que consiste em uma sucessão de interpolações unidimensionais. Ou seja, para a variação na concentração, fixamos a massa e, para a variação na massa, fixamos a concentração. Logo, de posse da hipótese expressa pela equação (6.17), temos que basta multiplicar as duas expressões obtidas, uma para cada parâmetro. Como intentamos algo mais preciso, realizamos um ajuste em vez de uma interpolação, mas o princípio foi o mesmo.

Da variação dos raios de meia massa e das massas dos modelos e combinando-os adequadamente, obtivemos os seguintes gráficos para tais parâmetros em função da velocidade relativa limite. A Figura 6.10 expressa a dependência da velocidade relativa limite com relação à massa e à concentração. É possível observar que diminuindo tanto a concentração quanto a massa, a velocidade limite diminui.

A Figura 6.10 exhibe os pontos calculados e os ajustes obtidos. Para ambos, obtemos a seguinte expressão para a razão dos raios de meia-massa

$$f \left( \frac{r_{h,2}}{r_{h,1}} \right) = a + b \tan^{-1} \left( c \frac{r_{h,2}}{r_{h,1}} + d \right) \quad (6.18)$$

onde as constantes  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  são dadas pela tabela 6.5

Já para a dependência com a razão de massas

$$g \left( \frac{M_2}{M_1} \right) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_2}{M_1} \right)^{1/4} \quad (6.19)$$

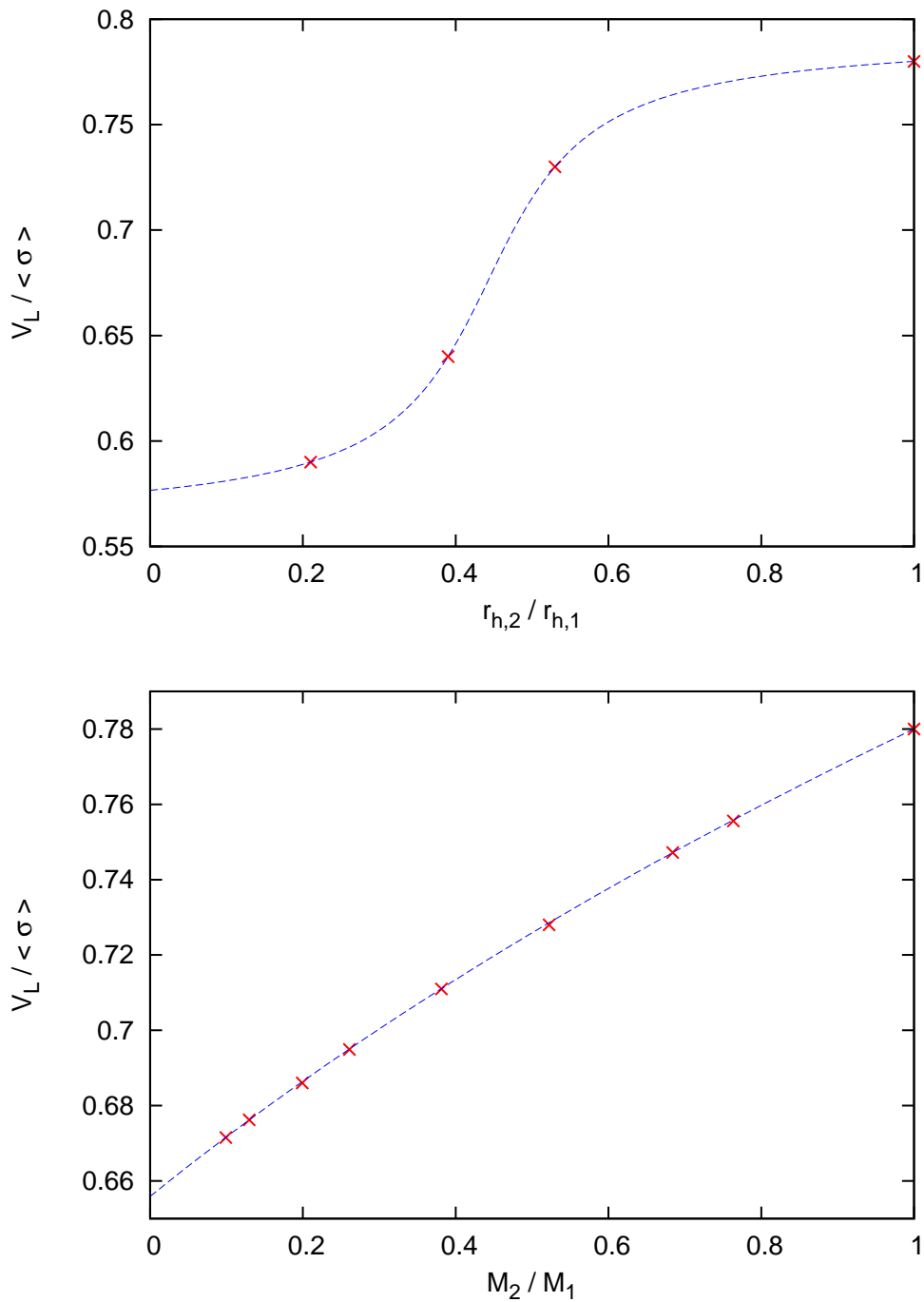


Figura 6.10: Dependência da velocidade relativa limite com a razão dos raios de meia-massa (acima) e com a razão das massa (abaixo). Note que, quando ambos diminuem, a velocidade limite diminui.

$$\frac{V_L}{\langle \sigma \rangle} = \left[ a + b \tan^{-1} \left( c \frac{r_{h,2}}{r_{h,1}} + d \right) \right] \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_2}{M_1} \right)^{1/4} \right] \quad (6.20)$$

É importante ressaltar que, quando a velocidade relativa é maior e está bem próxima da velo-

Tabela 6.5: Constantes da expressão da velocidade relativa limite.

|     |                          |
|-----|--------------------------|
| $a$ | $+0.676675 \pm 0.000001$ |
| $b$ | $+0.740596 \pm 0.000001$ |
| $c$ | $+10.1230 \pm 0.0001$    |
| $d$ | $-4.48806 \pm 0.00001$   |

cidade limite, as órbitas dos globulares, com relação ao centro de massa, são caóticas. Simulações de  $N$  corpos dificilmente ajudariam na análise de tais órbitas. Logo, a Teoria de Sistemas Dinâmicos certamente contribuiria consideravelmente para tais análises. Sem ela, seria um trabalho muito dispendioso, além de pouco preciso.

Do que foi dito até agora, é possível construir um diagrama que delimita as regiões do gráfico de  $V_L \times M_2/M_1$  a fim de expor o comportamento qualitativo dos globulares. Isso está feito na Figura 6.11, onde os quatro cenários observados estão expostos. Se a velocidade relativa entre eles for superior à velocidade limite, então ou a passagem entre eles não os altera significativamente<sup>3</sup>, ou o modelo de menor massa é eliminado devido às perturbações do de maior massa. Ademais, quando a velocidade relativa é menor que a velocidade limite, ou o par torna-se binário, ou se fundem diretamente.

Finalizaremos este capítulo descrevendo o aquecimento dinâmico que ocorre quando os globulares estão na região da fusão. Isso será feito na próxima secção.

## 6.5 Aquecimento Dinâmico devido a uma Colisão

Ao longo deste Capítulo, descrevemos algumas características referente a dois globulares que colidem (quase) frontalmente. Também mostramos que há fortes diferenças nos AG, após a colisão, que dependem da massa e da concentração deles. Ademais, vimos que, ou os globulares se fundem ou não se fundem, sendo que cada uma dessas regiões pode ser subdividida.

Nesta secção, trataremos do último fenômeno observado em nossos experimentos numéricos, para aglomerados resultantes da fusão entre dois parentais. Concentrar-nos-emos na região onde a fusão ocorre diretamente, i.e., 85% dos valores da velocidade limite em cada caso. Para todos as simulações, observamos um aquecimento no globular fundido. O termo aquecimento aqui refere-se a uma aceleração dos processos evolutivos do globular. Na Figura 6.12, há quatro gráficos que representam as principais grandezas dinâmicas comumente analisadas em estudos de aglomerados globulares. Cada gráfico contém duas curvas, onde uma representa o aglomerado fundido e outra um aglomerado

<sup>3</sup>Como já salientamos, o caso no intervalo próximo à velocidade limite, se a velocidade relativa for maior que esta, provavelmente, trata-se de uma região caótica que, dificilmente, pode ser analisada em simulações de  $N$  corpos. Daí, não a incluímos, uma vez que a delimitar seria deveras dispendioso e pouco preciso. Porém, com o auxílio de técnicas da Teoria de Sistemas Dinâmicos, tal estudo poderia ser feito rapidamente e com uma precisão da ordem do integrador utilizado.



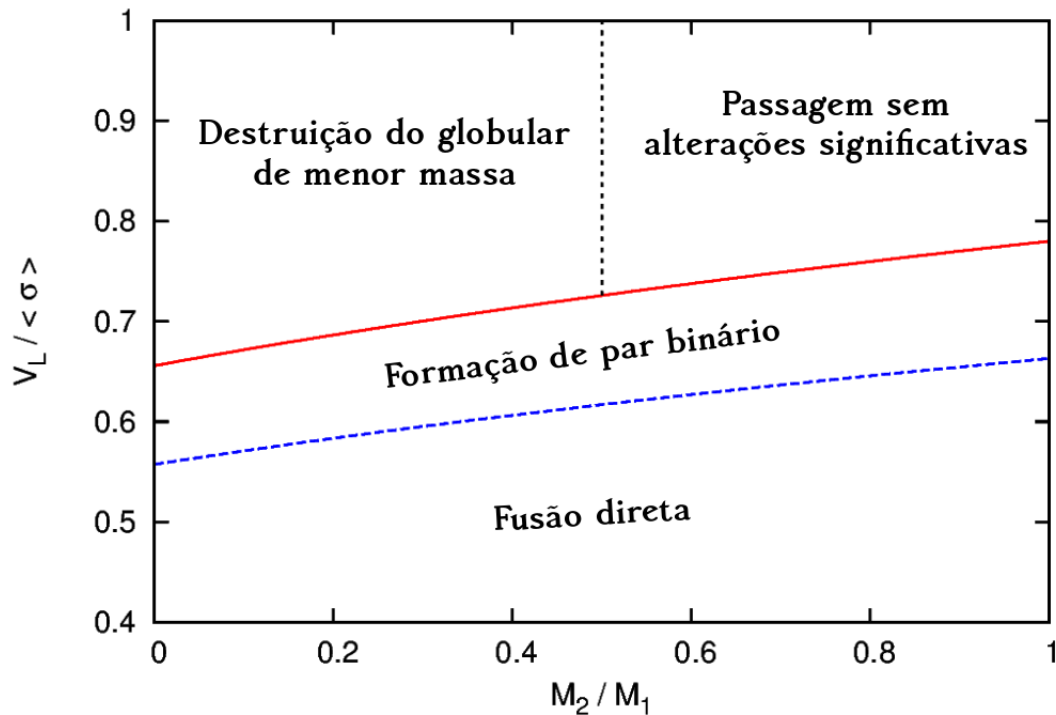


Figura 6.11: Diagrama dos possíveis resultados qualitativos associados à interação de dois globulares em função da velocidade relativa e da razão de massa entre eles. Note que dependendo do valor desses parâmetros há quatro resultados possíveis. Abaixo da linha vermelha os modelos sempre se fundem, sendo que abaixo da linha azul a fusão é direta, enquanto que para a região entre elas, forma-se um sistema binário que, devido à fricção dinâmica, fundem-se após um dado tempo. Acima da linha vermelha, os aglomerados podem interpassar um pelo outro, sem alterações, se  $M_2/M_1 > 0.5$ , ou o de menor massa pode ser destruído, se  $M_2/M_1 \leq 0.5$ . Tais regiões estão separadas pela linha preta, que por sua vez corresponde a  $0.85 \times V_L/\langle \sigma \rangle$ .

de mesmas propriedades, porém não resultante de um processo de fusão. A simulação, para o caso da fusão, foi feita com os modelos M1 e M3. Ademais, nos dois primeiros painéis, evidenciamos a queda da grandeza e recortamos a simulação para um dado valor destas. Já nos dois últimos, o recorte se deu temporalmente. Por fim, notaremos o resultado de uma fusão como **fundido**. Em outro caso, o modelo será dito **simples**.

É possível observar, no primeiro painel, a perda de massa dos modelos. Note que o modelo fundido perde 50% de sua massa em menos tempo que o globular simples. Optamos por mostrar tal evolução até o instante em que os modelos perderam metade de sua massa inicial a fim de que as flutuações devido ao baixo número de estrelas não fossem expressivas. É visível que as perdas de massa são bem parecidas até, aproximadamente, 50 milhões de anos. A partir deste instante, a queda para o globular fundido é mais abrupta, indicando o aquecimento dinâmico dele, com relação ao simples. O mesmo efeito pode ser observado no segundo painel, onde é exibida a variação do raio mareal com o tempo. O raio mareal é uma medida do tamanho de um globular e é determinado

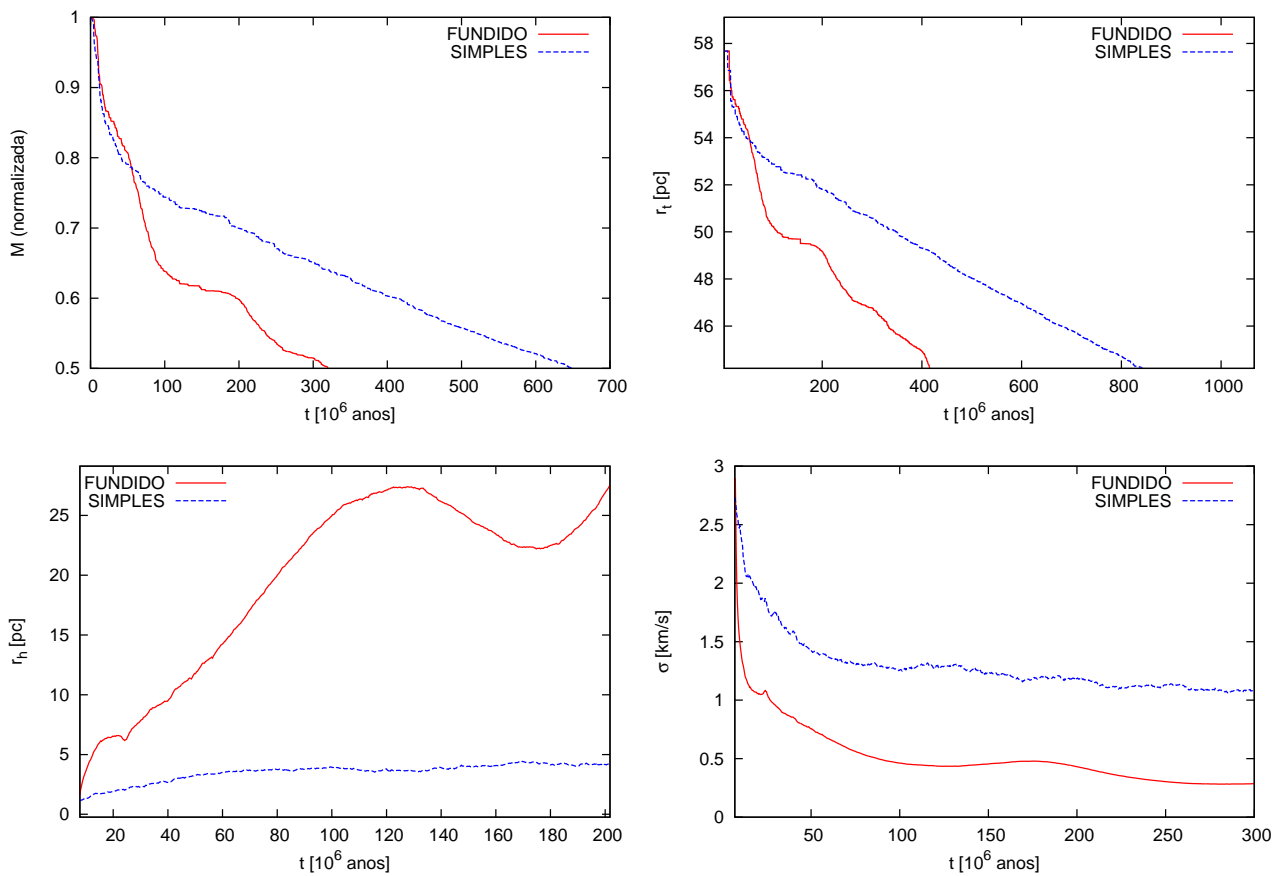


Figura 6.12: Evolução temporal da massa normalizada, raio mareal, raio de meia-massa e dispersão de velocidade de dois modelos, um que é resultado de uma fusão (fundido) e outro que não passou por um processo de colisão (simples). No primeiro gráfico, a massa do aglomerado fundido decresce mais rápido que a do simples. O recorte representado no gráfico depende da massa, neste caso, 50% de seu valor inicial. No segundo gráfico, o raio mareal é exibido. Do fato dele e da massa estarem diretamente relacionados, novamente aquele do globular fundido decresce mais rapidamente. No terceiro gráfico, é possível visualizar como o raio de meia-massa (ou seja, concentração) do AG fundido aumenta drasticamente, enquanto que para o outro, tal grandeza cresce suavemente até um certo tempo e estabiliza. Já no último gráfico, é nítido, novamente, o decréscimo acelerado da dispersão de velocidade do modelo fundido, já que também está relacionada com a massa. Os quatro gráficos exibem uma aceleração nos processos dinâmicos alusivos à evolução de um globular resultante de uma fusão.

pela disputa entre a evaporação de estrelas, devido aos efeitos do potencial galáctico, que faz com que os aglomerados encolham por remoção de estrelas, e a expansão produzida por perda de massa e binárias no caroço, via relaxação de dois corpos (Giersz & Heggie, 1997; Gieles et al., 2011; Loyola & Hurley, 2013, por exemplo). É razoável que tal queda ocorra no mesmo instante que a queda na perda de massa.

No terceiro painel, é visível o crescimento inopinado do raio de meia-massa do modelo fundido, diferentemente do crescimento suave e que se estabiliza do modelo simples. Como  $r_h$  está diretamente relacionado à concentração do globular, é visível a diminuição repentina na concentração do fundido.

No último painel, vemos a queda da dispersão de velocidade dos modelos. Analogamente às outras grandezas, ela cai de forma mais evidente para o modelo fundido. De uma forma geral, a característica mais distinta na evolução temporal da dispersão de velocidade é a queda no início da evolução como consequência da expansão global que cada modelo sofre como resultado da perda de massa. Ora, como o modelo fundido perde massa mais rápido, também expande-se e diminui seu tamanho mais rapidamente. Logo, sua dispersão de velocidade também cai de forma mais expressiva que o outro modelo.

Podemos inferir possíveis causas para o aquecimento da evolução dinâmica do modelo fundido. A Figura 6.13 exhibe a causa mais provável para tal efeito. O gráfico superior exhibe o número de binárias produzidas nos estágios iniciais da evolução dos dois modelos ao longo do tempo. Note o expressivo número delas produzidas no globular fundido. Como mencionamos na Seção 3.8, a evolução do caroço, do globular em si e a produção de binárias estão intimamente ligadas. Dessa forma, provavelmente, a excessiva produção de binárias provoca um aumento na dispersão de velocidade do caroço, que pode ser visto no gráfico à direita. Portanto, podemos inferir que a produção de binárias nos estágios iniciais da evolução do globular fundido acelera a evolução dinâmica deste e a evaporação por meio da remoção efetiva de estrelas de seu halo, via efeito do potencial galáctico, e adição de energia no caroço, aumenta dessa forma a dispersão de velocidade nele, embora a dispersão de velocidade do modelo como um todo diminua com tempo.

Por fim, podemos nos questionar acerca da variação dos efeitos do aquecimento com a massa e a concentração. Para tal, exibimos na Figura 6.14, a perda de massa em simulações cuja velocidade relativa é igual a  $0.85 \times V_L$  para cada caso. Apesar dos efeitos, a diferença mais gritante ocorre para a simulação cuja razão de massa é a menor. Isso provavelmente ocorre devido ao número de estrelas envolvidas, que é menor que nas outras simulações. A dependência de efeitos dinâmicos com o número de estrelas em simulações é quase sempre notada. Por exemplo, já comentamos o fato de que o colapso do caroço só foi visto em simulações com integradores diretos cujo número de estrelas supera 8000. O mesmo, provavelmente, ocorreu nas nossas simulações.

É possível ver que ambos apresentam dois degraus no caimento da massa, um entre 0 e 100 milhões de anos e, o outro, entre 100 e 200 milhões de anos. Note que para o gráfico referente às razões das concentrações (painel superior), os dois degraus ocorrem aproximadamente para os mesmos valores aproximados de  $M$ , a saber: 0.8 em  $t \sim 60$  Ma, e 0.65 em  $t \sim 150$  Ma. Já nos modelos cujas massas variam (painel inferior), o primeiro degrau, em todas as simulações, ocorre em tempos diferentes e em valores diferentes da massa; enquanto que o segundo degrau, ocorre em  $t \sim 150$ , para o valor de  $M \sim 0.6$ , porém com valores diferentes no caso das simulações cuja razão de massas vale 1.00 e 0.6841, onde  $\sim 0.65$ . Ademais, os instantes dos picos da produção de binárias (painel superior da Figura 6.13) parecem coincidir com os instantes em que ocorrem os degraus no decaimento da massa. Por fim, é possível ver que, no gráfico superior, os modelos perdem metade da massa em mais tempo ( $\sim 300$  Ma) que nas simulações do gráfico inferior ( $\sim 250$  Ma).

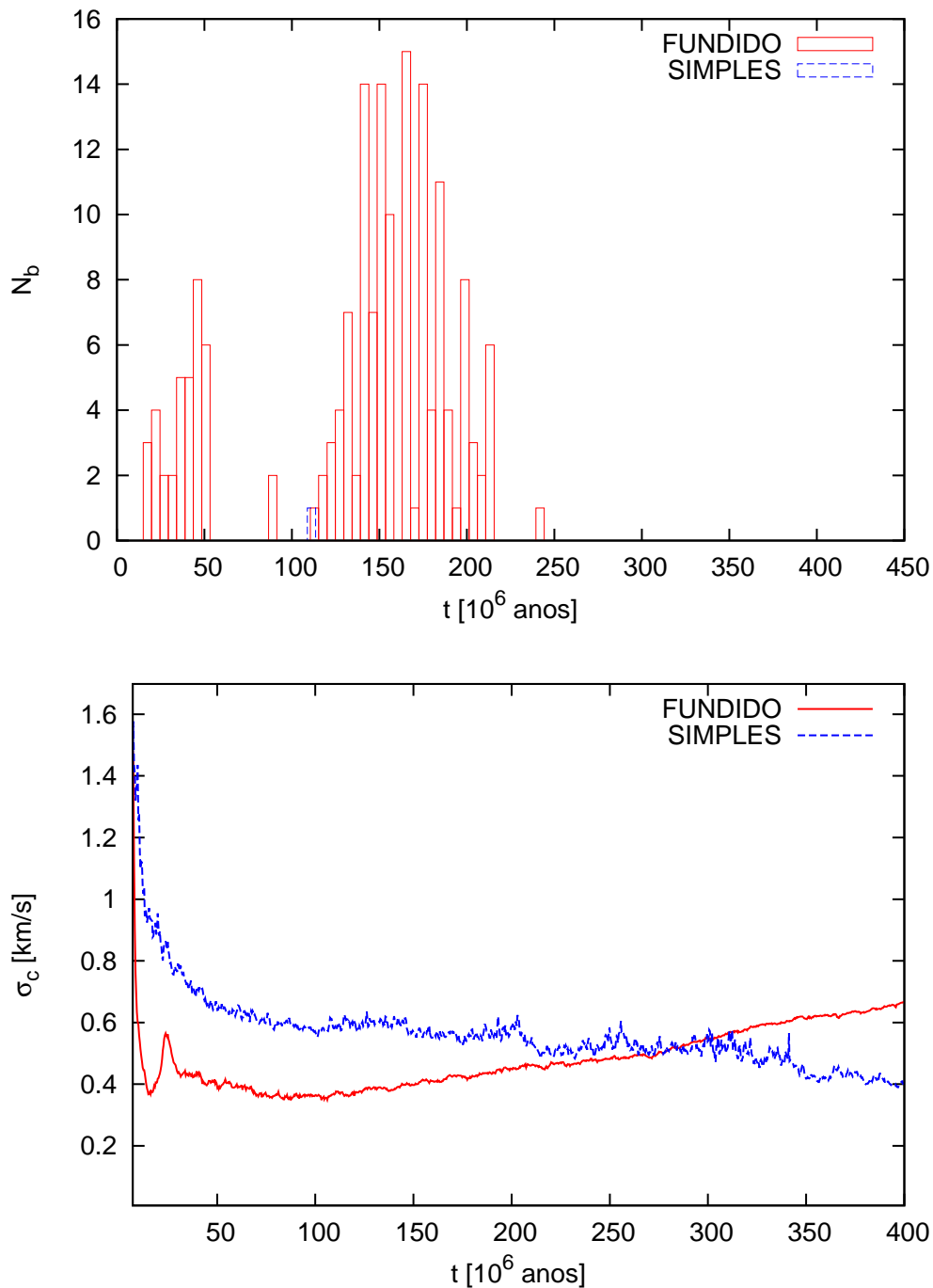


Figura 6.13: Número de binárias produzidas e a dispersão de velocidade do caroço de dois modelos. Um é resultado de uma fusão (fundido) e outro não (simples). Note que, do fato de o fundido produzir muito mais binárias em estágios iniciais de sua evolução dinâmica implica que a dispersão de velocidade de seu caroço aumente com o tempo. Isso, provavelmente, é a causa principal do aquecimento observado na Figura 6.12. Observe também a diferença em ambos os gráficos entre o comportamento dos dois globulares.

Passemos então a um sumário detalhado de todos os resultados aqui alcançados.

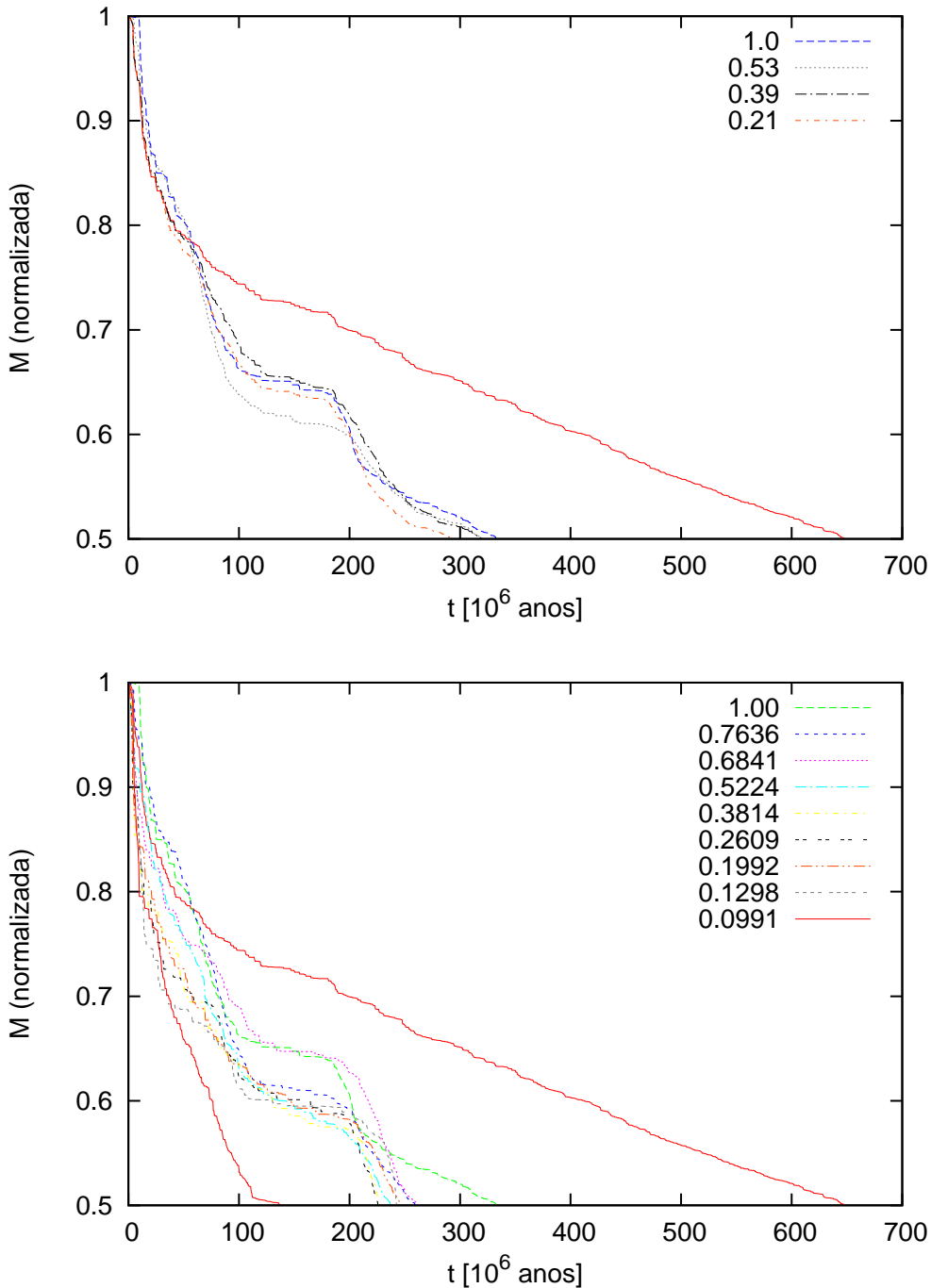


Figura 6.14: Aquecimento, representado pela perda de massa, para modelos resultantes de uma fusão em simulações onde a velocidade relativa é  $0.85 \times V_L$ , quando variamos a concentração dos modelos (acima) e quando variamos a massa deles (abaixo). Note que os recortes seguem o valor até metade da massa, a fim de que as flutuações devido ao número reduzido de estrelas, ao término das simulações, não interfiram fortemente na análise. Em ambos os gráficos, a curva que representa a perda de massa de um aglomerado não fundido é aquele que possui o maior valor do tempo para  $M = 0.5$ . É possível visualizar que, no gráfico acima, o aquecimento devido à colisão não varia significativamente em nenhuma das simulações. Já no gráfico abaixo, efeitos diferentes são observados, menos para a simulação onde  $M_2/M_1 = 0.0991$ , que parece ser mais aquecido que os outros. Isso provavelmente se deve ao fato de possuir muito menos estrelas que os outros.

# Capítulo 7

## Conclusões e Perspectivas

No presente trabalho, intentamos estudar um dos possíveis cenários de formação de aglomerados globulares, a saber, o cenário da fusão de dois progenitores. Adotamos que jovens aglomerados orbitavam no disco da galáxia. Isso limita, naturalmente, o estudo, uma vez que os globulares da nossa Galáxia habitam o halo. A presença do campo imposto pela galáxia, juntamente com a evolução estelar que cada estrela sofrerá, a interação dinâmica entre as estrelas, por exemplo, interações de dois corpos, bem como a função de massa inicial e a geometria da colisão, determinaram a evolução desses aglomerados parentais. Além disso, este estudo realizou, em primeira instância, devido a tais efeitos incluídos nas simulações, um considerável avanço nos estudos referentes às propriedades dinâmicas de dois globulares que colidem. Isso, porque os estudos anteriores, feitos para estudos de galáxias, não incluem um potencial dominante, tampouco evolução estelar. Logo, tais estudos prévios não podem ser aplicados, diretamente, na busca pela compreensão dos mecanismos que governam a dinâmica proposta para o caso específico de globulares.

Em nossas simulações, incluímos a presença de uma galáxia modelada como um potencial de três componentes fixos. A órbita que escolhemos para os nossos aglomerados é circular. Cada um foi construído a partir da distribuição de Plummer para diferentes valores de concentração e massa; além de funções de massa inicial diferentes.

Como segundo objetivo, propomos analisar os cenários qualitativos nos quais os globulares estão inseridos após o encontro e obtivemos uma expressão para a velocidade crítica entre os cenários de fusão e não fusão. As simulações descritas ao longo do Capítulo 6 analisaram, para alguns valores dos parâmetros considerados, os efeitos devido a uma colisão frontal entre corpos progenitores. Tal análise resultou no seguinte sumário de resultados.

Primeiramente, pudemos perceber que modelos mais concentrados resistem mais às trocas energéticas, ou seja, quanto menor a concentração, maior será o impacto em sua estrutura devido ao encontro. Já os modelos com mais massa resistem mais a tais trocas energéticas, ou seja, quanto menor a massa, maior será o impacto em sua estrutura devido ao encontro, que pode até levar ao

rompimento do de menor massa em alguns casos. Nos casos onde a razão de massas entre os modelos é menor que 0.5, a fusão é bem violenta, diferentemente dos casos em que tal razão está entre 0.5 e 1.0. A evolução se torna suave apenas para velocidades bem baixas.

De forma geral, é possível dividir o comportamento qualitativo dos modelos após as interações em quatro, a saber

- atravessam um ao outro sem grande mudanças em sua estrutura interna;
- o de menor massa é destruído — para os casos em que  $M_2/M_1 < 0.5$ ;
- ficam ligados e formam um sistema binário e, após um dado intervalo de tempo, fundem-se;
- fundem-se suavemente.

Naturalmente, tais cenários dependem não só dos parâmetros iniciais dos globulares, mas também da velocidade relativa entre eles. Vale ressaltar que o comportamento na região em torno da velocidade limite para a ocorrência de fusão é, provavelmente, caótico. Ao incluir tal complexidade, certamente, a Teoria de Sistemas Dinâmicos seria útil.

Acerca, primeiramente, dos cenários em que ocorre ou não fusão, chegamos à seguinte expressão para a velocidade relativa limite entre os modelos.

$$\frac{V_L}{\langle \sigma \rangle} = \left[ a + b \tan^{-1} \left( c \frac{r_{h,2}}{r_{h,1}} + d \right) \right] \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_2}{M_1} \right)^{1/4} \right]$$

Quando a velocidade relativa é menor que a velocidade limite e o valor daquela é  $\leq 0.85$  desta, a fusão ocorre suavemente. Já, se estiver no intervalo  $[0.85V_L; V_L)$ , antes da fusão, ocorrerá a formação do sistema binário. Ademais, quanto menor for a velocidade relativa, mais suave será a fusão. Na região onde não ocorre fusão, ou os globulares sobrevivem, se  $M_2/M_1 \geq 0.5$ , ou o de menor massa é destruído, se  $M_2/M_1 < 0.5$ .

Em todas as simulações, para velocidades relativas iguais, o tempo gasto até o encontro é aproximadamente igual. Isso implica que a escala de tempo para ocorrência do encontro depende fortemente da geometria e do potencial galáctico. Já, na região da fusão, quanto menor for a velocidade relativa, menor será o tempo gasto para a fusão, já que a fricção dinâmica será maior.

Acerca das variações de energia e massa, observamos que ocorre um pico sempre associado à velocidade limite. Além disso, a perda de massa contabiliza a evolução estelar e o escape de estrelas; portanto, para colisões mais lentas há maior perda de massa devido à evolução estelar, e para as mais rápidas, devido ao escape. Daí, maior é a perda de massa à medida que a velocidade relativa diminui. E, em todas as simulações, com exceção daquelas em que ocorre destruição de um dos globulares — que perdem 100% da massa —, não houve variações maiores que 20% na massa. O mesmo não ocorre para a energia, onde, mesmo não havendo destruição, observamos variações maiores que 100%. Em tais casos, o globular se torna instável e, provavelmente, não deve sobreviver por muito

tempo. Além disso, a instabilidade ocorre quando as concentrações ou as massas são diferentes. Daí, os globulares com os menores valores destes parâmetros podem ser tornar instáveis e, eventualmente, serem destruídos pela galáxia.

Por fim, analisamos os efeitos da colisão e fusão na evolução dinâmica de um globular. Observamos, em todas as fusões, uma aceleração dos processos dinâmicos. Além disso, tal aceleração parece depender da massa e da concentração. E, possivelmente, tal efeito de aquecimento diminui com a diminuição da força do impacto, embora não tenhamos conferido tal asserção.

Concluimos que a causa mais provável para tal aceleração está associada à produção de binárias, imediatamente após à fusão. Ou seja, a produção de binárias nos estágios iniciais da evolução do globular fundido acelera a evolução dinâmica deste e a evaporação por meio da remoção efetiva de estrelas de seu halo, via efeito do potencial galáctico, e adição de energia no caroço, que aumenta, dessa forma, a dispersão de velocidade nele, embora a dispersão do modelo como um todo diminua com tempo.

De uma forma geral, analogamente a outros estudos, o processo aqui analisado é deveras complexo e depende de várias condições iniciais e físicas do par, por exemplo, os parâmetros orbitais, *viz.*, geometria da colisão, a força da interação, *i.e.*, velocidade relativa, e a estrutura inicial dos componentes (massa e concentração), bem como do potencial galáctico. Dessa forma, um único estudo não seria suficiente para inferir todas as alterações estruturais (globais e locais) dos componentes e processos transitórios associados à interação.

Passemos, portanto, à descrição dos possíveis caminhos em que o estudo em questão pode ser continuado, além de afirmar as limitações da modelagem feita por nós.

Como já mencionamos, nossos resultados dependem fortemente das hipóteses adotadas, referente aos parâmetros dos modelos, potencial galáctico, geometria da colisão, entre outros.

Dessa forma, um meio para se chegar a inferências mais gerais seria, primeiramente, utilizar outras configurações para a geometria da colisão. Deve-se incluir a tridimensionalidade típica da natureza e um parâmetro de impacto não nulo. Isso permitiria cobrir um espaço maior das possíveis geometrias, mais realistas, segundo modelos cosmológicos.

Uma segunda generalização refere-se às propriedades dos modelos de aglomerados globulares. Pode-se adicionar uma fração de binárias não nula, alterar a distribuição de massa, por exemplo, usando modelos de King-Michie, incluir anisotropia na distribuição das velocidades das estrelas em tais modelos, bem como uma leve rotação, conforme é observado em alguns globulares Galácticos.

Na implementação numérica, outras definições de raio mareal podem ser utilizadas, ou mesmo manter aquela adotada aqui e retardar ainda mais o escape, uma vez que ele não ocorre simultaneamente. Um olhar mais atento aos processos de escape e captura de estrelas dos modelos permitiria contabilizar a quantidade de massa perdida e ganha após as interações e inferir o quanto cada um ganhou e perdeu para o outro.

Além disso, uma ferramenta útil para estudar casos estranhos no espaço de parâmetros é a Teoria



de Sistemas Dinâmicos que, mesmo tratando os globulares como partículas, seria deveras útil no mapeamento do comportamento qualitativo das órbitas destes em um potencial galáctico, além de delimitar as regiões caóticas e verificar se, em tais regiões, a estrutura interna varia com relação às regiões regulares.

Por fim, o número de estrelas aqui utilizado é baixo com relação aos possíveis valores e computadores contemporâneos. Dessa forma, realizar simulações com mais estrelas poderia revelar fatos não observados nas nossas simulações.

É razoável supor que à medida que a velocidade relativa diminui, o aquecimento dinâmico também diminui. Porém, tal afirmação deve ser validada, como todas as afirmações científicas.

Finalmente, uma extensão interessante deste trabalho seria contabilizar as trocas de momento, tanto linear quanto angular, entre os globulares. Isso poderia explicar a leve rotação que alguns globulares possuem, com exceção de  $\omega$  Cen que possui expressiva rotação.

# REFERÊNCIAS

- Aarseth, S. 2008, in *The Cambridge n-body lectures*, ed. S. J. Aarseth, C. A. Tout, & R. A. Mardling (Berlin: Springer), 1–30
- Aarseth, S., & Zare, K. 1974, *Celestial mechanics*, 10, 185
- Aarseth, S. J. 1994, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 433, *Galactic Dynamics and N-Body Simulations*, ed. G. Contopoulos, N. K. Spyrou, & L. Vlahos, 275–312
- Aarseth, S. J. 1999, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111, 1333
- . 2003, *Gravitational N-Body Simulations: Tools and Algorithms* (Cambridge University Press)
- Adams, F. C., & Fatuzzo, M. 1996, *The Astrophysical Journal*, 464, 256
- Aguilar, L., & White, S. 1985, *The Astrophysical Journal*, 295, 374
- Ahmad, A., & Cohen, L. 1973, *Journal of Computational Physics*, 12, 389
- Ahmed, F. 1979, *Astrophysics and Space Science*, 60, 493
- Alladin, S. M., & Narasimhan, K. 1982, *Physics Reports*, 92, 339
- Amaro-Seoane, P. 2006, in *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 873, *Laser Interferometer Space Antenna: 6th International LISA Symposium*, ed. S. M. Merkowitz & J. C. Livas, 250–256
- Amaro-Seoane, P., Gair, J. R., Freitag, M., et al. 2007, *Classical and Quantum Gravity*, 24, R113
- Amaro-Seoane, P., Konstantinidis, S., Brem, P., & Catelan, M. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, stt1351
- Ambartsumian, V. 1954, *Byurakan Obs*, 15
- Arp, H. C., Baum, W. A., & Sandage, A. R. 1953, *The Astronomical Journal*, 58, 4
- Assmann, P., Wilkinson, M. I., Fellhauer, M., & Smith, R. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 413, 2606

- Auriere, M., & Cordoni, J.-P. 1981a, *Astronomy and Astrophysics*, 100, 307
- . 1981b, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 46, 347
- Baade, W. 1944, *The Astrophysical Journal*, 100, 137
- Bailey, S. 1893, *Astronomy and Astro-Physics*
- Bailyn, C. D. 1995, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 33, 133
- Bastian, N., Covey, K. R., & Meyer, M. R. 2010, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48, 339
- Baumgardt, H., & Kroupa, P. 2005, in *The Three-Dimensional Universe with Gaia*, Vol. 576, 681
- Baumgardt, H., & Kroupa, P. 2007, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 380, 1589
- Baumgardt, H., & Makino, J. 2003, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 340, 227
- Baumgardt, H., Makino, J., & Hut, P. 2005, *The Astrophysical Journal*, 620, 238
- Bedin, L. R., Piotto, G., Anderson, J., et al. 2004, *The Astrophysical Journal Letters*, 605, L125
- Bekki, K., & Yong, D. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419, 2063
- Bellazzini, M., Iata, R., Chapman, S., et al. 2008, *The Astronomical Journal*, 136, 1147
- Bellini, A., Bedin, L., Piotto, G., et al. 2010, *The Astronomical Journal*, 140, 631
- Bellini, A., van der Marel, R. P., & Anderson, J. 2013, *Memorie della Societa Astronomica Italiana*, 84, 140
- Benz, W., & Hills, J. G. 1987, *The Astrophysical Journal*, 323, 614
- Bergbusch, P. A., & Vandenberg, D. A. 1992, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 81, 163
- Beust, H. 2003, *Astronomy and Astrophysics*, 400, 1129
- Bhatia, R., & Hatzidimitriou, D. 1988, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 230, 215
- Binney, J., & Tremaine, S. 2008, *Galactic Dynamics*, 2nd ed (Prince)
- Boccaletti, D., & Pucacco, G. 1996, *Theory of Orbits* (Garching: Springer)
- Böker, T. 2010, in *IAU Symposium*, Vol. 266, *IAU Symposium*, ed. R. de Grijs & J. R. D. Lépine, 58–63
- Bruns, H. 1887, *Acta Math.*, 11, 25

- Brüns, R., & Kroupa, P. 2011, *The Astrophysical Journal*, 729, 69
- Brüns, R., Kroupa, P., & Fellhauer, M. 2009, *The Astrophysical Journal*, 702, 1268
- Budding, E., & Demircan, O. 2007, *Introduction to astronomical photometry*, 2nd ed (Cambridge University Press)
- Calzetti, D., De Marchi, G., Paresce, F., & Shara, M. 1993, *The Astrophysical Journal*, 402, L1
- Cannon, R., Croke, B., Bell, R., Hesser, J., & Stathakis, R. 1998, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 298, 601
- Cappellari, M., McDermid, R. M., Alatalo, K., et al. 2012, *Nature*, 484, 485
- Carretta, E., Bragaglia, A., Gratton, R., et al. 2010, *The Astrophysical Journal Letters*, 712, L21
- Carretta, E., Bragaglia, A., Gratton, R. G., et al. 2010, *Astronomy and Astrophysics*, 516, A55
- Carretta, E., Lucatello, S., Gratton, R. G., Bragaglia, A., & D’Orazi, V. 2011, *Astronomy and Astrophysics*, 533, A69
- Casey, A. R. 2014, *A Tale of Tidal Tails in the Milky Way* (PhD Thesis: Australian National University Research)
- Catelan, M. 1997, *The Astrophysical Journal Letters*, 478, L99
- . 2009, *Astrophysics and Space Science*, 320, 261
- Charlie, C., & Spergel, D. N. 2011, *The Astrophysical Journal*, 726, 36
- Chernoff, D. F., & Djorgovski, S. 1989, *The Astrophysical Journal*, 339, 904
- Chernoff, D. F., & Weinberg, M. D. 1990, *The Astrophysical Journal*, 351, 121
- Clausius, R. 1870, *Poggendorffs Annalen*, 141, 124
- Cohen, J. G. 1999a, *The Astronomical Journal*, 117, 2428
- . 1999b, *The Astronomical Journal*, 117, 2434
- Cohen, J. G., & Melendez, J. 2005, *The Astronomical Journal*, 129, 303
- Cohn, H. 1979, *The Astrophysical Journal*, 234, 1036
- . 1980, *The Astrophysical Journal*, 242, 765

- Collins, G. W. 1978, *The virial theorem in stellar astrophysics*, Vol. 7 (Astronomy and Astrophysics Series)
- Contopoulos, G. 1966, *Lect. Appl. Math.*, Vol. 5, *Space Math.*, Part I, p. 169-258= *Contrib. Astron. Dep. Univ. Thessaloniki*, No. 28, 5, 169
- . 2004, *Order and Chaos in Dynamical Astronomy* (Berlin: Springer)
- Da Costa, G., & Freeman, K. 1976, *The Astrophysical Journal*, 206, 128
- Da Costa, G., Freeman, K., Kalnajs, A., Rodgers, A., & Stapinski, T. 1977, *The Astronomical Journal*, 82, 810
- Da Costa, G. S. 2012, *The Astrophysical Journal*, 751, 6
- Davies, M., Benz, W., & Hills, J. 1991, *The Astrophysical Journal*, 381, 449
- Davies, M. B. 2013, *Planets, Stars and Stellar Systems: Volume 5: Galactic Structure and Stellar Populations*, 879
- Davies, M. B., Piotto, G., & De Angeli, F. 2004, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 349, 129
- Dehnen, W., Odenkirchen, M., Grebel, E. K., & Rix, H.-W. 2004, *The Astronomical Journal*, 127, 2753
- D’Ercole, A., D’Antona, F., & Vesperini, E. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 415, 1304
- Dickens, R. J., & Woolley, R. v. d. R. 1967, *Royal Greenwich Observatory Bulletins*, 128, 255
- Dieball, A., Grebel, E. K., & Theis, C. 2000, *Astronomy and Astrophysics*, 358, 144
- Dieball, A., Müller, H., & Grebel, E. K. 2002, *Astronomy and Astrophysics*, 391, 547
- Djorgovski, S., & King, I. 1986, *The Astrophysical Journal*, 305, L61
- Djorgovski, S., King, I., Vuosalo, C., Oren, A., & Penner, H. 1986, in *IAU Symposium*, Vol. 118, *Instrumentation and Research Programmes for Small Telescopes*, ed. J. B. Hearnshaw & P. L. Cottrell (Springer), 281–282
- D’Orazi, V., & Marino, A. F. 2010, *The Astrophysical Journal Letters*, 716, L166
- Dotter, A., Sarajedini, A., Anderson, J., et al. 2010, *The Astrophysical Journal*, 708, 698
- Drukier, G. 1995, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 100, 347

- Elmegreen, B. G. 1997, *The Astrophysical Journal*, 486, 944
- . 1999, *The Astrophysical Journal*, 515, 323
- Elmegreen, B. G. 2007, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 362, *The Seventh Pacific Rim Conference on Stellar Astrophysics*, ed. Y. W. Kang, H.-W. Lee, K.-C. Leung, & K.-S. Cheng, 269
- Ernst, A., Glaschke, P., Fiestas, J., Just, A., & Spurzem, R. 2007, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 377, 465
- Evstigneeva, E., Reshetnikov, V., & Sotnikova, N. Y. 2002, *The Astrophysical Journal*
- Fabian, A., Pringle, J., & Rees, M. 1975, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 172, 15P
- Fellhauer, M., Evans, N., Belokurov, V., Wilkinson, M., & Gilmore, G. 2007, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 380, 749
- Fellhauer, M., Kroupa, P., & Evans, N. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 372, 338
- Fellhauer, M., Lin, D., Bolte, M., Aarseth, S., & Williams, K. 2003, *The Astrophysical Journal Letters*, 595, L53
- Ferraro, F. R., Sollima, A., Pancino, E., et al. 2004, *The Astrophysical Journal Letters*, 603, L81
- Fischer, P., Welch, D. L., & Mateo, M. 1992, *Astronomical Journal*, 104, 1086
- Fregeau, J. M., Cheung, P., Zwart, S. P., & Rasio, F. 2004, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 352, 1
- Fregeau, J. M., & Rasio, F. A. 2007, *The Astrophysical Journal*, 658, 1047
- Fukushige, T., & Heggie, D. 2000, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 318, 753
- Fusi Pecci, F., Ferraro, F., Bellazzini, M., et al. 1993, *The Astronomical Journal*, 105, 1145
- Gao, B., Goodman, J., Cohn, H., & Murphy, B. 1991, *Astrophysical Journal*, 370, 567
- Gascoigne, S., & Burr, E. 1956, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 116, 570
- Gieles, M., Heggie, D. C., & Zhao, H. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 413, 2509
- Giersz, M., & Heggie, D. C. 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 286, 709

- . 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 395, 1173
- Giersz, M., Heggie, D. C., Hurley, J. R., & Hypki, A. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431, 2184
- Gnedin, O. Y., Lee, H. M., & Ostriker, J. P. 1999, *The Astrophysical Journal*, 522, 935
- Gnedin, O. Y., & Ostriker, J. P. 1997, *The Astrophysical Journal*, 474, 223
- Goodman, J. 1984, *The Astrophysical Journal*, 280, 298
- Gratton, R., Sneden, C., & Carretta, E. 2004, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 42, 385
- Gratton, R. G., Carretta, E., & Bragaglia, A. 2012, *The Astronomy and Astrophysics Review*, 20, 1
- Gratton, R. G., Carretta, E., Bragaglia, A., Lucatello, S., & D’Orazi, V. 2010, *Astronomy and Astrophysics*, 517, A81
- Gratton, R. G., Bonifacio, P., Bragaglia, A., et al. 2001, *Astronomy and Astrophysics*, 369, 87
- Griffin, R. 1967, *The Astrophysical Journal*, 148, 465
- Grillmair, C. J., Freeman, K., Irwin, M., & Quinn, P. 1995, *The Astrophysical Journal*, 109, 2553
- Gunn, J. E., & Griffin, R. 1979, *The Astronomical Journal*, 84, 752
- Hansen, B. M., & Phinney, E. S. 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 291, 569
- Harbeck, D., Smith, G. H., & Grebel, E. K. 2003, *The Astronomical Journal*, 125, 197
- Harris, W. E. 1996, edição 2010, *The Astronomical Journal*, 112, 1487
- Hayli, A. 1974, in *Proceedings of the Conference on the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Springer, 304–312
- Heggie, D., & Hut, P. 2003, *The gravitational million-body problem: a multidisciplinary approach to star cluster dynamics* (Cambridge University Press)
- Heggie, D. C. 1975, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 173, 729
- Heggie, D. C., & Giersz, M. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 389, 1858
- . 2014, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439, 2459
- Heggie, D. C., Griest, K., & Hut, P. 1993, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 50, *Structure and Dynamics of Globular Clusters*, ed. S. G. Djorgovski & G. Meylan, 137

- Heggie, D. C., & Hut, P. 1996, in IAU Symposium, Vol. 174, Dynamical Evolution of Star Clusters: Confrontation of Theory and Observations, ed. P. Hut & J. Makino, 303
- Heggie, D. C., & Mathieu, R. D. 1986, in Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, Vol. 267, The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics, ed. P. Hut & S. L. W. McMillan, 233
- Heggie, D. C., Trenti, M., & Hut, P. 2006, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 368, 677
- Hénon, M. 1971, Astrophysics and Space Science, 14, 151
- Hesser, J., & Bell, R. 1980, The Astrophysical Journal, 238, L149
- Hilker, M., & Richtler, T. 2000, Astronomy and Astrophysics, 362, 895
- Hills, J. 1975, The Astronomical Journal, 80, 809
- Hills, J., & Day, C. 1976, Astrophysical Letters, 17, 87
- Hume, D. 1748, An enquiry concerning human understanding (Broadview Press)
- Hurley, J. R. 2007, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 379, 93
- . 2008, in The Cambridge n-body lectures, ed. S. J. Aarseth, C. A. Tout, & R. A. Mardling (Berlin: Springer), 283–296
- Hurley, J. R., Pols, O. R., Aarseth, S. J., & Tout, C. A. 2005, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 363, 293
- Hurley, J. R., Pols, O. R., & Tout, C. A. 2000, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 315, 543
- Hurley, J. R., Tout, C. A., Aarseth, S. J., & Pols, O. R. 2001, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 323, 630
- Hut, P., & Bahcall, J. N. 1983, The Astrophysical Journal, 268, 319
- Hut, P., & Djorgovski, S. 1992, Nature, 359, 806
- Hut, P., Shara, M. M., Aarseth, S. J., et al. 2003, New Astronomy, 8, 337
- Hypki, A., & Giersz, M. 2013, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 429, 1221
- Ibata, R., Nipoti, C., Sollima, A., et al. 2013, Monthly notices of the royal astronomical society, 428, 3648



- Ivanova, N., Belczynski, K., Fregeau, J., & Rasio, F. 2005, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 358, 572
- J Aarseth, S. 1973, *Vistas in Astronomy*, 15, 13
- Jeans, J. H. 1902, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1
- Just, A., Berczik, P., Petrov, M., & Ernst, A. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 392, 969
- Kayser, A., Hilker, M., Grebel, E. K., & Willemsen, P. G. 2008, *Astronomy and Astrophysics*, 486, 437
- King, I. 1981, *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 22, 227
- King, I. R. 1966, *The Astronomical Journal*, 71, 64
- King, I. R., Cool, A. M., & Piotto, G. 1996, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 92, *Formation of the Galactic Halo...Inside and Out*, ed. H. L. Morrison & A. Sarajedini, 277
- King, I. R., Hedemann Jr, E., Hodge, S. M., & White, R. E. 1968, *The Astronomical Journal*, 73, 456
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, *Stellar structure and evolution*, 2nd ed (Springer)
- Klessen, R. S., Spaans, M., & Jappsen, A.-K. 2007, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 374, L29
- Kozai, Y. 1962, *The Astronomical Journal*, 67, 591
- Kraft, R. P. 1979, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 17, 309
- . 1994, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 553
- Kron, G., & Mayall, N. 1960, *The Astronomical Journal*, 65, 581
- Kron, G. E. 1946, *The Astrophysical Journal*, 103, 326
- Kroupa, P. 1998, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 300, 200
- . 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 322, 231
- . 2002, *Science*, 295, 82
- . 2008, in *The Cambridge n-body lectures*, ed. S. J. Aarseth, C. A. Tout, & R. A. Mardling (Berlin: Springer), 181–259

- . 2012, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 29, 395
- Kroupa, P., Aarseth, S., & Hurley, J. 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 321, 699
- Kroupa, P., Weidner, C., Pflamm-Altenburg, J., et al. 2013, in *Planets, Stars and Stellar Systems* (Springer), 115–242
- Küpper, A. H., Maschberger, T., Kroupa, P., & Baumgardt, H. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 417, 2300
- Kustaanheimo, P., & Stiefel, E. 1965, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 218, 204
- Lagrange, J.-L. 1772, *Prix de l'Académie royale des sciences de Paris*, 9, 229
- Lançon, A., & Boily, C. M. 2000, in *Massive Stellar Clusters*, Vol. 211
- Lane, R. R., Brewer, B. J., Kiss, L. L., et al. 2010, *The Astrophysical Journal Letters*, 711, L122
- Larson, R. B. 1970, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 147, 323
- Lecar, M., Loeser, R., & Cherniack, J. R. 1974, in *Proceedings of the Conference on the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Springer, 451–470
- Lee, H. M., & Ostriker, J. P. 1986, *The Astrophysical Journal*, 310, 176
- Lee, J.-W., Lee, J., Kang, Y.-W., et al. 2009, *The Astrophysical Journal Letters*, 695, L78
- Lind, K., Primas, F., Charbonnel, C., Grundahl, F., & Asplund, M. 2009, *Astronomy and Astrophysics*, 503, 545
- Loyola, G. R. M., & Hurley, J. R. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, stt1190
- Lynden-Bell, D. 1967, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136, 101
- Lynden-Bell, D., & Eggleton, P. 1980a, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 191, 483
- . 1980b, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 191, 483
- Mackey, A., Wilkinson, M., Davies, M. B., & Gilmore, G. 2007, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 379, L40
- . 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 386, 65
- Maíz Apellániz, J., & Úbeda, L. 2005, *The Astrophysical Journal*, 629, 873

- Makino, J. 1996, *The Astrophysical Journal*, 471, 796
- Makino, J., & Daisaka, H. 2012, in *High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC)*, 2012 International Conference for, IEEE, 1–10
- Makino, J., & Taiji, M. 1998, *Scientific Simulations with Special-Purpose Computers—the GRAPE Systems*, Vol. 1
- Marcy, G. W., & Butler, R. P. 1992, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 270
- Mardling, R., & Aarseth, S. 1999, in *The Dynamics of Small Bodies in the Solar System* (Springer), 385–392
- Mardling, R. A. 2008, in *IAU Symposium*, Vol. 246, *IAU Symposium*, ed. E. Vesperini, M. Giersz, & A. Sills, 199–208
- Mardling, R. A., & Aarseth, S. J. 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 321, 398
- Massari, D., Bellini, A., Ferraro, F. R., et al. 2013, *The Astrophysical Journal*, 779, 81
- Massey, P. 2003, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 41, 15
- Mayor, M. 1985, in *Stellar Radial Velocities*, Vol. 1, 35–48
- McKee, C. F., & Ostriker, E. C. 2007, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 45, 565
- McMillan, S. L., McDermott, P., & Taam, R. E. 1987, *The Astrophysical Journal*, 318, 261
- McMillan, S. L., Vesperini, E., & Zwart, S. F. P. 2007, *The Astrophysical Journal Letters*, 655, L45
- Mengel, J. G., & Gross, P. G. 1976, *Astrophysics and Space Science*, 41, 407
- Meylan, G. 1996, in *Dynamical Evolution of Star Clusters: Confrontation of Theory and Observations*, Vol. 174, 61–70
- Meylan, G., & Heggie, D. 1997, *The Astronomy and Astrophysics Review*, 8, 1
- Meylan, G., Leon, S., & Combes, F. 2001, in *Dynamics of Star Clusters and the Milky Way*, Vol. 228, 53
- Mignard, F. 2005, in *Astrometry in the age of the next generation of large telescopes*, Vol. 338, 15
- Mikkola, S. 1997, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 68, 87
- Mikkola, S., & Aarseth, S. J. 1990, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 47, 375
- . 1993, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 57, 439

- . 1996, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 64, 197
- . 1998, *New Astronomy*, 3, 309
- Miller, R., & Smith, B. 1980, *The Astrophysical Journal*, 235, 421
- Milone, A. P., Marino, A. F., Dotter, A., et al. 2014, *The Astrophysical Journal*, 785, 21
- Minchin, G. M. 1895, *Proceedings of the Royal Society of London*, 58, 142
- Minniti, D., Rejkuba, M., Funes, J. G., Kenicutt Jr, R. C., et al. 2004, *The Astrophysical Journal*, 612, 215
- Miyamoto, M., & Nagai, R. 1975, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27, 533
- Moeckel, N., & Bonnell, I. A. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400, 657
- Monelli, M., Milone, A., Stetson, P., et al. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431, 2126
- Mucciarelli, A., Salaris, M., Lovisi, L., et al. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 412, 81
- Murray, C. D., & Dermott, S. F. 1999, *Solar System Dynamics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Namboodiri, P. 1995, *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 23, 65
- Narasimhan, K., & Alladin, S. M. 1986, *Astrophysics and space science*, 128, 307
- Navarro, J. F. 1989, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 239, 257
- Newmark, N. M. 1959in , 67–94
- Nieva, M.-F., & Simón-Díaz, S. 2011, *Astronomy and Astrophysics*, 532, A2
- Norris, J. E. 2004, *The Astrophysical Journal Letters*, 612, L25
- Odenkirchen, M., Grebel, E. K., Dehnen, W., et al. 2003, *The Astronomical Journal*, 126, 2385
- Ostlie, D. A., & Carroll, B. W. 2006, *An introduction to modern astrophysics* (Addison-Wesley)
- P., T., & Hut, P. 1988, *Science on the ETA10: The Friendly User Program*, 128, 67
- Pancino, E., Bellazzini, M., & Marinoni, S. 2013, *Memorie della Societa Astronomica Italiana*, 84, 83

- Pancino, E., Ferraro, F. R., Bellazzini, M., Piotto, G., & Zoccali, M. 2000, *The Astrophysical Journal Letters*, 534, L83
- Pancino, E., Mucciarelli, A., Sbordone, L., et al. 2011, *Astronomy and Astrophysics*, 527, 18
- Pancino, E., Rejkuba, M., Zoccali, M., & Carrera, R. 2010, *Astronomy and Astrophysics*, 524, A44
- Paresce, F., De Marchi, G., & Jedrzejewski, R. 1995, *The Astrophysical Journal*, 442, L57
- Peacock, M. B., Zepf, S. E., & Finzell, T. 2013, *The Astrophysical Journal*, 769, 126
- Peebles, P. J. E. 1984, *The Astrophysical Journal*, 277, 470
- Perko, L. 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems* (Berlin: Springer-Verlag)
- Peterson, R. 1982, *The Astrophysical Journal*, 258, 499
- Pflamm-Altenburg, J., & Kroupa, P. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 373, 295
- Phinney, E. 1992, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, 341, 39
- Phinney, E. S. 1993, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 50, *Structure and Dynamics of Globular Clusters*, ed. S. G. Djorgovski & G. Meylan, 141
- Picard, A., & Johnston, H. 1995, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 112, 89
- Picard, A., & Johnston, H. M. 1994, *Astronomy and Astrophysics*, 283, 76
- Piotto, G., De Angeli, F., King, I. R., et al. 2004, *The Astrophysical Journal Letters*, 604, L109
- Plummer, H. 1911, *Monthly notices of the royal astronomical society*, 71, 460
- Pooley, D., Lewin, W. H., Anderson, S. F., et al. 2003, *The Astrophysical Journal Letters*, 591, L131
- Popper, K. 1934, *The logic of scientific discovery* (Routledge)
- . 1963, *Conjectures and refutations: The growth of scientific knowledge* (Routledge)
- . 1982, *Unended quest: An intellectual autobiography* (Routledge)
- Portegies Zwart, S. F., Hut, P., McMillan, S. L. W., & Verbunt, F. 1997, *Astronomy and Astrophysics*, 328, 143
- Prantzos, N., & Charbonnel, C. 2006, *Astronomy and Astrophysics*, 458, 135

- Press, W., & Teukolsky, S. 1977, *The Astrophysical Journal*, 213, 183
- Ramírez, S. V., & Cohen, J. G. 2002, *The Astronomical Journal*, 123, 3277
- Rasio, F. A., & Shapiro, S. L. 1991, *The Astrophysical Journal*, 377, 559
- Renk, F., & Landgraf, M. 2014, in *Proceedings of the 24th International Symposium on Space Flight Mechanics*, Laurel, MD, May 5th to 19th, Vol. 2014
- Rich, R. M., Sosin, C., Djorgovski, S. G., et al. 1997, *The Astrophysical Journal Letters*, 484, L25
- Roos, N., & Norman, C. 1979, *Astronomy and Astrophysics*, 76, 75
- Röser, S., Schilbach, E., Piskunov, A. E., Kharchenko, N. V., & Scholz, R.-D. 2011, *Astronomy and Astrophysics*, 531, A92
- Ross, D. J., Mennim, A., & Heggie, D. C. 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 284, 811
- Rossa, J., Van der Marel, R. P., Böker, T., et al. 2006, *The Astronomical Journal*, 132, 1074
- Salpeter, E. E. 1955, *The Astrophysical Journal*, 121, 161
- Sandage, A. 1953, *The Astronomical Journal*, 58, 61
- Sandage, A., & Wallerstein, G. 1960, *The Astrophysical Journal*, 131, 598
- Sandage, A., & Wildey, R. 1967, *The Astrophysical Journal*, 150, 469
- Sarajedini, A., Chaboyer, B., & Demarque, P. 1997, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 1321
- Saviane, I., da Costa, G. S., Held, E. V., et al. 2012, *Astronomy and Astrophysics*, 540, A27
- Sbordone, L., Bonifacio, P., Marconi, G., Buonanno, R., & Zaggia, S. 2005, *Astronomy and Astrophysics*, 437, 905
- Scalo, J. 1998, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 142, *The Stellar Initial Mass Function (38th Herstmonceux Conference)*, ed. G. Gilmore & D. Howell, 201
- Shara, M. M., Drissen, L., Bergeron, L. E., & Paresce, F. 1995, *The Astrophysical Journal*, 441, 617
- Shen, Z.-X., Bonifacio, P., Pasquini, L., & Zaggia, S. 2010, *Astronomy and Astrophysics*, 524, L2
- Shen, Z.-X., Jones, B., Lin, D., Liu, X.-W., & Li, S.-L. 2005, *The Astrophysical Journal*, 635, 608
- Sigurdsson, S., & Phinney, E. S. 1995, *Astrophysical Journal Supplement*, 99, 609

- Sills, A., Lombardi Jr, J. C., Bailyn, C. D., et al. 1997, *The Astrophysical Journal*, 487, 290
- Sills, A., Deiters, S., Eggleton, P., et al. 2003, *New Astronomy*, 8, 605
- Soker, N. 1998, *The Astronomical Journal*, 116, 1308
- Spitzer, L. 1958, *The Astrophysical Journal*, 127, 17
- . 1969, *The Astrophysical Journal*, 158, L139
- Spitzer, L. 1987, *Dynamical evolution of globular clusters*
- Stebbins, J. 1910, *The Astrophysical Journal*, 32, 185
- . 1940, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 52, 235
- Stebbins, J., & Brown, F. 1907, *The Astrophysical Journal*, 26, 326
- Stiefel, E. L., & Scheifele, G. 1975, *Linear and regular celestial mechanics. Perturbed two-body motion. Numerical methods. Canonical theory.*, by Stiefel, EL; Scheifele, G.. Translated from the English edition. Moskva: Nauka, 303 p., 1
- Sugimoto, D., Chikada, Y., Makino, J., et al. 1990, *Nature*, 345, 33
- Sweigart, A., & Mengel, J. 1979, *The Astrophysical Journal*, 229, 624
- Tabor, M. 1989, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction* (Wiley New York)
- Taillet, R., Longaretti, P.-Y., & Salati, P. 1995, *Astroparticle Physics*, 4, 87
- Taillet, R., Salati, P., & Longaretti, P.-Y. 1996, *The Astrophysical Journal*, 461, 104
- Takahashi, K., & Baumgardt, H. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420, 1799
- Terlevich, E. 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 224, 193
- Thomson, G. S., Knigge, C., Dieball, A., et al. 2012, *Monthly notices of the royal astronomical society*, 423, 2901
- Tisserand, F. 1889, *Traité de Mécanique Céleste, Vol. I* (Paris: Gauthiers-Villars)
- Toulmin, S., & Goodfield, J. 1962, *The fabric of the heavens: The development of astronomy and dynamics* (University of Chicago Press)
- Tout, C. A., Aarseth, S. J., Pols, O. R., & Eggleton, P. P. 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 291, 732

- Trenti, M., & van der Marel, R. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, stt1521
- Trifonov, T., Reffert, S., Tan, X., Lee, M. H., & Quirrenbach, A. 2014, *Astronomy and Astrophysics*
- Van Albada, T., & Van Gorkom, J. 1977, *Astronomy and Astrophysics*, 54, 121
- van den Bergh, S. 1996, *The Astrophysical Journal Letters*, 471, L31
- Van der Marel, R. P., & Anderson, J. 2010, *The Astrophysical Journal*, 710, 1063
- van Putten, M. H. 2012, *New Astronomy*, 17, 411
- Verbunt, F., & Hut, P. 1987, in *The Origin and Evolution of Neutron Stars*, Vol. 125, 187
- Vesperini, E., & Heggie, D. 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 289, 898
- Vesperini, E., McMillan, S., D'Antona, F., & D'Ercole, A. 2013, *Memorie della Societa Astronomica Italiana*, 84, 144
- Vesperini, E., McMillan, S., & Zwart, S. P. 2009, *Astrophysics and Space Science*, 324, 277
- Villanova, S., Piotto, G., King, I., et al. 2007, *The Astrophysical Journal*, 663, 296
- von Hoerner, S. 1957, *The Astrophysical Journal*, 125, 451
- von Hoerner, S. 1960, *Zeitschrift für Astrophysik*, 50, 184
- von Hoerner, S. 2001, in *Dynamics of Star Clusters and the Milky Way*, Vol. 228, 11
- Von Zeipel, H. 1908, in *Annales de l'Observatoire de Paris*, Vol. 25, 1
- Walcher, C.-J., Boeker, T., Charlot, S., et al. 2006, *The Astrophysical Journal*, 649, 692
- Webbink, R. 1981, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 45, 259
- Weidner, C., & Kroupa, P. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 365, 1333
- Weidner, C., Kroupa, P., Pflamm-Altenburg, J., & Vazdekis, A. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436, 3309
- Weinberg, M. D. 1993, *The Astrophysical Journal*, 410, 543
- Wojtak, R., Hansen, S. H., & Hjorth, J. 2011, *Nature*, 477, 567
- www.manybody.org. 2014, Many Body, the aim of this web site is to present a convenient entry point for various activities related to simulations of stellar systems.



- [www.stsci.edu/marel/hstpromo.html](http://www.stsci.edu/marel/hstpromo.html). 2014, HSTPROMO, the HSTPROMO collaboration studies a set of related Hubble Space Telescope research projects, with overlapping sets of investigators, all aimed at improving our dynamical understanding of stars, clusters, and galaxies in the nearby Universe through measurement and interpretation of their proper motions.
- Xue, X., Rix, H., Zhao, G., et al. 2008, *The Astrophysical Journal*, 684, 1143
- Zinnecker, H. 1984, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 210, 43
- Zoccali, M., Cassisi, S., Frogel, J. A., et al. 2000, *The Astrophysical Journal*, 530, 418
- Zwicky, F. 1957, *Morphological astronomy* (Springer)

# APÊNDICE A

## Demonstração do Teorema de Liouville

*“J’ai donné de longs développements sur toutes ces questions dans mes leçons au Collège de France.”*

**Joseph Liouville (1809 - 1882)**

O objetivo deste apêndice é provar o teorema de Liouville 2.2. Tal teorema, garante a integrabilidade de sistemas hamiltonianos autônomos que satisfazem a algumas hipóteses.

De acordo com o teorema 2.1, o sistema (2.3) possui solução única, se satisfeitas as hipóteses do mesmo.

Supondo que há uma solução única para um sistema hamiltoniano autônomo, podemos querer trabalhar em conjuntos de variáveis díspares do original, a fim de simplificar o sistema. Para tanto, valer-nos-emos do conceito de transformação canônica.

**Definição A.1.** *Uma transformação de variáveis  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  é chamada **canônica** se as equações de movimento nas novas variáveis também são canônicas<sup>1</sup>, i. e., da forma (2.3).*

Agora, exploraremos a forma matricial das equações canônicas a fim de obter outra condição necessária e suficiente que possa caracterizar uma transformação canônica.

**Definição A.2.** *Uma matriz  $\mathbf{M}$   $2n \times 2n$  é simplética se, e somente se, satisfaz a equação*

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J} \tag{A.1}$$

onde  $\mathbf{J}$  é uma matriz  $2n \times 2n$  dada por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Outra forma de definir uma transformação canônica seria a partir do colchete de Lagrange. Dessa forma, uma transformação é canônica se preserva o colchete de Lagrange.

com  $\mathbf{I}_n$  sendo a matriz unitária  $n \times n$ .

A partir da definição de matriz simplética é possível mostrar que uma transformação é canônica se, e somente se, sua matriz jacobiana é simplética (Boccaletti & Pucacco, 1996).

Dessa forma, podemos concluir que os sistemas hamiltonianos autônomos são simpléticos. Outra aplicação importante é que preservam a área simplética. Além disso, uma hamiltoniana gera um mapa simplético sobre uma secção de Poincaré.

Note que as transformações canônicas são de grande interesse, uma vez que preservam a estrutura do sistema (2.3). Além disso, uma transformação canônica cuidadosamente escolhida pode simplificar drasticamente a forma de uma dada hamiltoniana. Ao longo deste apêndice, o conceito de transformação canônica será utilizado a fim de provarmos o teorema de Liouville. Ou seja, provaremos o teorema de Liouville utilizando um novo sistema de coordenadas canônico, por simplicidade. Para tal, provaremos dois lemas que nos ajudarão bastante.

**Lema A.1.** *Considere um sistema definido pela hamiltoniana  $H(q_i, p_i)$ , onde  $i \in 1, \dots, n$ . Dado um conjunto de  $n$  funções  $f_1, \dots, f_n$  dependentes de  $q_i$  e  $p_i$ . Se o jacobiano*

$$J := \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)}$$

for não nulo, as funções  $f_1, \dots, f_n$  correspondem a um sistema em involução, i.e.,

$$[f_i, f_j] = 0, \quad \forall i, j \in 1, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

e se considerarmos as funções  $f_1, \dots, f_n$  como novas coordenadas  $Q_1, \dots, Q_n$ , então há  $n$  funções  $P_1, \dots, P_n$  tais que constituem, juntamente com as funções  $Q_i$ , um novo sistema canônico de variáveis.

### Demonstração

Por hipótese, definamos

$$Q_i := f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad i \in 1, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

Na vizinhança de  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , como  $J \neq 0$ , podemos resolver a equação (A.3) a fim de obter os  $p_i$ . Então

$$p_i = \varphi_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}), \quad i \in 1, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

Se agora, substituirmos  $p_i$  por  $\varphi_i$  na equação (A.3), obtemos novamente  $n$  identidades da forma

$$f_i(\mathbf{q}, \varphi) - Q_i = 0, \quad i \in 1, \dots, n \quad (\text{A.5})$$

Diferenciando a equação (A.5) com respeito a  $q_i$ , temos que

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} + \frac{\partial f_i}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_j} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Vamos agora multiplicar a equação (A.6) por  $\partial f_k / \partial p_j$  e somar os  $j$  de 1 até  $n$ . Daí, segue que

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{\partial f_k}{\partial p_j} + \frac{\partial f_i}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_j} \frac{\partial f_k}{\partial p_j} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Se na equação (A.7) trocarmos os índices  $i$  com  $k$  e depois subtrairmos as novas equações das antigas, obtemos

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_j} \frac{\partial f_k}{\partial p_j} - \frac{\partial f_k}{\partial p_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_j} \frac{\partial f_i}{\partial p_j} = 0$$

Agora, trocando os índices mudos do segundo termo, podemos reescrever a equação (A.8) da seguinte forma

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_l} \frac{\partial f_k}{\partial p_j} \left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_l} \right) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Note que as equações (A.8) constituem um sistema de  $n^2$  equações homogêneas em

$$\left( \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_l} \right)$$

e o determinante de seus coeficientes é certamente não nulo, sendo dado por  $J^2$ . Logo, a única solução possível é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_j} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_l} &= 0 \\ \implies \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_j} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_l} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Consequentemente, existe uma função  $S$  tal que

$$p_i = \varphi_i(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial q_i} \quad (\text{A.10})$$

Se definirmos novos *momenta* tais que

$$P_i = -\frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial Q_i} \quad (\text{A.11})$$

é fácil perceber que as equações (A.10) e (A.11) definem uma transformação canônica  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  gerado por  $S((\mathbf{q}, \mathbf{Q}))$ .

□

Dado o resultado do lema A.1 e com base na teoria de Hamilton-Jacobi, estamos aptos a provar o teorema de Liouville.

### Demonstração do teorema de Liouville

Do lema A.1 segue que, quando considerarmos  $f_1, \dots, f_n$  sendo as integrais primeiras do sistema hamiltoniano autônomo, podemos considerá-las novas coordenadas, constantes de movimento, i.e.,

$$f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \alpha_i, \quad i \in 1, \dots, n \quad (\text{A.12})$$

A variação de  $\varphi_i$  com relação ao tempo, fornece

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = +\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \frac{dq_j}{dt}$$

onde usamos a equação (A.9). Além disso, temos que

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Logo, existe uma função  $S$  tal que

$$dS = \varphi_1 dq_1 + \dots + \varphi_n dq_n \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, se considerarmos as transformações canônicas geradas por  $S$  de acordo com as equações (A.10) e (A.11) temos que a nova hamiltoniana é nula e os novos *momenta*  $P_i$  são constantes de movimento.

Portanto, da teoria de Hamilton-Jacobi segue que os *momenta* também são constantes e temos as  $2n$  constantes necessárias para integrar o sistema. Portanto, quando temos um sistema com  $n$  integrais primeiras em involução, o sistema hamiltoniano é completamente integrável.

□

# APÊNDICE B

## Aglomerados Globulares vistos pela missão GAIA

*“Gaia is an ambitious mission to chart a three-dimensional map of our Galaxy, the Milky Way, in the process revealing the composition, formation and evolution of the Galaxy. Gaia will provide unprecedented positional and radial velocity measurements with the accuracies needed to produce a stereoscopic and kinematic census of about one billion stars in our Galaxy and throughout the Local Group. This amounts to about 1 per cent of the Galactic stellar population.”*

**European Space Agency**

GAIA é uma missão astrométrica da *European Space Agency* (ESA) que irá fornecer a posição e a velocidade de estrelas da Via Láctea, de objetos de magnitude V do Sistema Solar, de galáxias não resolvidas, etc., com excelente qualidade e informações adicionais, tais como parâmetros astrofísicos, classificação de objeto e marcação química para objetos de magnitude V inferior a  $\approx 20$  mag. Uma profunda discussão sobre a contribuição científica esperada do GAIA pode ser encontrada em diversos trabalhos (por exemplo, Mignard, 2005).

Uma meta importante para GAIA será o estudos dos aglomerados globulares, uma vez que estão entre os objetos mais antigos do Universo e compreender os detalhes de sua formação e evolução pode dar importantes *insights* sobre a forma como as galáxias se formaram. Além disso, ao estudar o movimento de estrelas despojadas dos aglomerados globulares, devido à interação com a Via Láctea, pode-se determinar o potencial galáctico e fornecer vínculos em seu halo de matéria escura, que por sua vez dará pistas importantes sobre a natureza da matéria escura em si. Particularmente, ele será capaz de fornecer dados interessantes sobre aglomerados globulares, porém o problema da superlotação é o grande fator incerto, ou seja, seremos capazes de penetrar as regiões centrais ou seremos

limitados às partes externas?

GAIA, como muitos outros satélites, orbitará em torno do ponto de equilíbrio lagrangiano  $L_2$  do sistema Sol-Terra. Como o satélite precisa da radiação solar devido aos seus painéis, oscilará em torno de  $L_2$ , em vez de ficar estacionário em tal ponto. Mover-se-á como um pêndulo tridimensional cujo tempo necessário para completar uma volta corresponde a metade de um ano. A trajetória desse movimento pendular tridimensional traçará um padrão chamado **órbita de Lissajous**<sup>1</sup>, que se trata de uma órbita quase periódica perpendicular ao plano orbital da Terra, conforme ilustrado na Figura B.1.

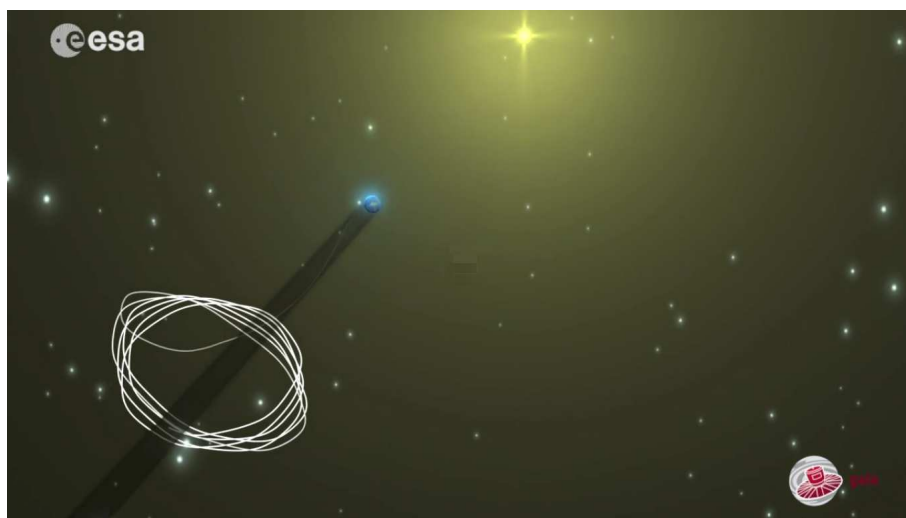


Figura B.1: Trajetória do satélite GAIA desde o lançamento do porto espacial da ESA em Kourou (Guiana Francesa) em 19/12/2013, até sua órbita operacional alcançada em 08/01/2014. GAIA descreve uma órbita de Lissajous em torno do ponto de equilíbrio  $L_2$  do sistema Sol-Terra. O tamanho da órbita é tipicamente  $263\,000 \times 707\,000 \times 370\,000 \text{ km}^3$  e demorará cerca de 180 dias para completar  $360^\circ$ . GAIA girará, portanto, lentamente, a fim de fazer observações repetidas e sistemáticas de estrelas que cobrem todo o céu com os seus dois telescópios. Ao longo de sua missão de cinco anos, GAIA calculará as posições, os movimentos próprios, as temperaturas, as luminosidades e as composições químicas de cerca de um bilhão de estrelas. Créditos da imagem: <http://sci.esa.int>

Pancino et al. (2013), com base em simulações, afirmam que, em geral, como foi amplamente esperado, a superlotação tem um grande efeito sobre as áreas centrais dos aglomerados globulares, fazendo com que o desempenho do GAIA seja bastante pobre (para um telescópio espacial) dentro do raio de meia luz de um aglomerado globular. Além disso, GAIA não irá muito fundo ( $V < 20 \text{ mag}$ ) e, portanto, globulares mais distantes, cujo raio orbital é cerca de 15 kpc, não terão estrelas menos

<sup>1</sup>Basicamente, existem três tipos de órbitas capazes de sustentar uma missão aos pontos lagrangianos: as órbitas halos — órbitas periódicas perpendiculares ao plano orbital da Terra —, as órbitas de Lissajous (órbitas quase periódicas também perpendiculares ao plano orbital da Terra) e as órbitas quase halos, que também são órbitas quase periódicas, sendo bons sítios para as constelações de satélites. Desde a década de 1970, missões tem sido projetadas utilizando as técnicas numéricas associadas à Teoria de Sistemas Dinâmicas e suas estruturas, bem como as órbitas periódicas e quase periódicas e suas conexões homoclínica e heteroclínica. No caso particular do GAIA, ele viajou de uma órbita em torno da Terra para sua órbita operacional por meio da variedade invariante hiperbólica estável associada à órbita em que se encontra (Renk & Landgraf, 2014).

brilhantes que seus TO observados. No entanto, para aquelas estrelas que serão medidas, os autores concluem que o GAIA fornecerá:

- uma excelente avaliação da probabilidade de associação usando seus movimentos próprios e — para as estrelas brilhantes — suas velocidades radiais; a maioria das amostras obtidas pelo GAIA sofrerão baixa contaminação das estrelas do campo, mesmo nos ambientes mais populosos (vide Figura B.2 para um exemplo difícil);
- fotometria de qualidade (vide Figura B.2), com precisão de mmag até aproximadamente 16-17 mag, pelo menos, e uma calibração fotométrica com precisão de poucos por cento, no máximo, para uma série de estrelas que vão desde algumas centenas (para os aglomerados globulares considerados difíceis) para algumas dezenas de milhares (de algumas dezenas de aglomerados globulares);
- movimentos próprios para estas estrelas, com erros da ordem de  $\mu\text{as}/\text{ano}$ , pelo menos para magnitudes abaixo de 16-17 mag (ou  $\approx 300 \mu\text{as}/\text{ano}$  para magnitudes menores que 20 mag) e paralaxe com erros semelhantes;
- distâncias estatísticas e movimentos próprios sistêmicos com uma precisão sem precedentes, uma vez que o aglomerado globular difícil simulado possui concentração  $c = 2.0$  e um fundo do tipo bojo e ainda assim é visto na Figura B.2.

A precisão esperada do GAIA é grande o suficiente para que paralaxes individuais e movimentos próprios das estrelas mais brilhantes dos aglomerados globulares possam ser determinadas com precisão de poucos  $\mu\text{as}$ . As distâncias deles também serão precisamente determinadas com o GAIA, uma vez que se pode utilizar a média das paralaxes das estrelas membros, conforme determinado pelo GAIA, ou usar indicadores de distância secundários que serão melhor calibrados com o GAIA do que o que se faz atualmente. É seguro admitir que, com ele, as velocidades e distâncias dos aglomerados globulares terão erros relativos de menos de 1% e os parâmetros orbitais resultantes serão determinadas com precisão similar (Baumgardt & Kroupa, 2005).

A precisão do GAIA permite que uma série de problemas fundamentais sejam abordados: primeiro, nossa compreensão alusiva à evolução dos aglomerados globulares será melhorada significativamente. Simulações de  $N$  corpos mostram que o tempo de vida deles e o papel que diferentes processos de dissolução (internos e externos) têm para sua evolução dependem de suas órbitas (Baumgardt & Makino, 2003). Até agora, tem sido difícil determinar a principal força motriz associada à evolução dinâmica dos aglomerados globulares, uma vez que suas órbitas são mal determinadas.

No momento em que os dados do GAIA ficarem disponíveis, provavelmente a eficiência dos computadores terá aumentado suficientemente para realizar simulações de modelos de aglomerados globulares com integradores diretos, mais notavelmente através do desenvolvimento da série GRAPE no Japão, que como vimos no Capítulo 2, vem avançando em passos largos. Além disso, com o



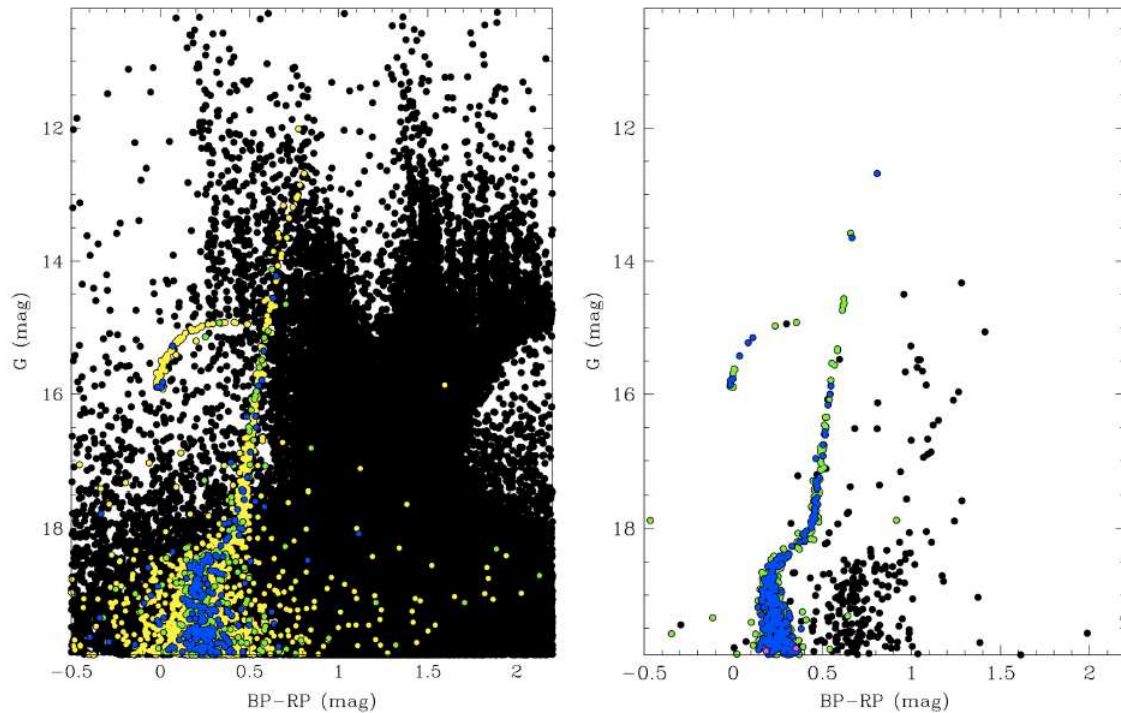


Figura B.2: DCM correspondente ao sistema de cores do GAIA em uma área de  $0.7 \times 0.7$  graus ao redor de um aglomerado globular simulado considerado “difícil” (Pancino et al., 2013, Figura 2). Símbolos pretos em ambos os painéis referem-se a estrelas de campo, símbolos amarelos para estrelas desmembradas, símbolos verdes para estrelas “descontaminadas” e símbolos azuis para estrelas “limpas”. O painel esquerdo mostra o catálogo completo, enquanto o painel à direita mostra apenas os membros *bona-fide* do aglomerado globular selecionados por movimentos próprios e distâncias ao centro do aglomerado globular. O número de estrelas membros bem medidas é pequeno, mas todas têm medidas de qualidade espacial (precisão de mmag).

GRAPE-8 (Secção 2.5), provavelmente simulações com cerca de  $10^5$  estrelas se tornarão viáveis. Uma vez que as órbitas dos aglomerados globulares serão determinadas pelo GAIA, será possível acompanhar a evolução de aglomerados globulares individuais e estudar como eles e o sistema de aglomerados globulares como um todo evoluem. Isto irá permitir que questões como: a forma da função de massa inicial (Secção 4.3) deles, o número inicial de aglomerados globulares e a sua fração de sobrevivência, e a fração de estrelas do halo que poderiam ter nascido em aglomerados globulares.

Informações orbitais também são essenciais para seguir as caudas mareais dos aglomerados globulares. Até agora, a detecção clara de tais caudas foi possível apenas para alguns aglomerados globulares, mais notavelmente Pal 5 (Odenkirchen et al., 2003), uma vez que a seleção dos membros foi baseada em critérios puramente fotométricos. GAIA permitirá selecionar estrelas em caudas mareais com base em dados fotométricos, de movimento próprio e de paralaxe, levando a uma melhor separação dos membros e não membros. Também fornecerá informações de velocidade para as estrelas nas caudas. A partir da distribuição das caudas no céu e do gradiente de velocidade das estrelas nelas, a distribuição de matéria (escura) na Galáxia pode ser inferido (por exemplo, Casey, 2014). Além disso, a distribuição de matéria agrupada tende a aquecer as estrelas da cauda e, a longo prazo, dispersar a

cauda completamente. Com o GAIA, portanto, será possível estudar a quantidade de subestruturas na matéria escura da Galáxia. Tais estudos permitirão importantes percepções sobre a natureza da matéria escura. Conhecendo as órbitas dos aglomerados globulares, também será possível buscar por aglomerados globulares com parâmetros orbitais comuns e, por conseguinte, origens comuns. Daí, buscar conexões entre aglomerados globulares individuais e galáxias anãs. Pode-se também estudar mudanças nos parâmetros orbitais médios como uma função da idade e/ou metalicidade. Um retrato preciso da história da formação da Via Láctea deveria emergir de tais estudos.

Finalmente, o GAIA também medirá a dispersão de velocidade das estrelas em aglomerados globulares, exceto nos centros daqueles bastante densos, pois como já dissemos anteriormente, a superlotação pode ser um problema. Esses dados serão um *input* importante para a modelagem dinâmica de tais objetos. Ele vai restringir a quantidade de segregação de massa em aglomerados globulares e o teor de matéria escura em suas partes exteriores, se existir. Conhecer a dispersão de velocidade também é essencial para estudar se os aglomerados globulares contêm concentrações de matéria invisível em seus interiores. Um dos motivos de tais concentrações poderia ser a presença de buracos negros massivos. Embora a evidência para eles em aglomerados globulares ainda seja controversa, o problema é, no entanto, de grande importância uma vez que, por exemplo, a evolução dinâmica de aglomerados globulares é impulsionada por encontros de estrelas em seus centros e tais buracos negros seriam importantes alvos para detectores de ondas gravitacionais como LISA (Amaro-Seoane, 2006). Um caminho promissor para a detecção de buracos negros de massa intermediária seria encontrar o aumento da dispersão de velocidades das estrelas que eles causariam se residentes nos centros de aglomerados globulares — a Figura B.3 exibe um possível diferença.

Para concluir, com uma precisão de  $10 \mu\text{as/ano}$  em  $V = 15 \text{ mag}$ , GAIA será capaz de determinar os movimentos espaciais da maioria dos aglomerados globulares com uma precisão de poucos km/s ou melhor. Isto irá melhorar dramaticamente o nosso conhecimento de como tais objetos evoluem e como eles e a Via Láctea, como um todo, formaram-se. Também será possível acompanhar correntes mareais de aglomerados globulares em processo de dissolução ao longo de muitas órbitas através de seleções cinemáticas de seus membros, o que irá limitar a forma do potencial Galáctico e dar importantes *insights* sobre a natureza da matéria escura.

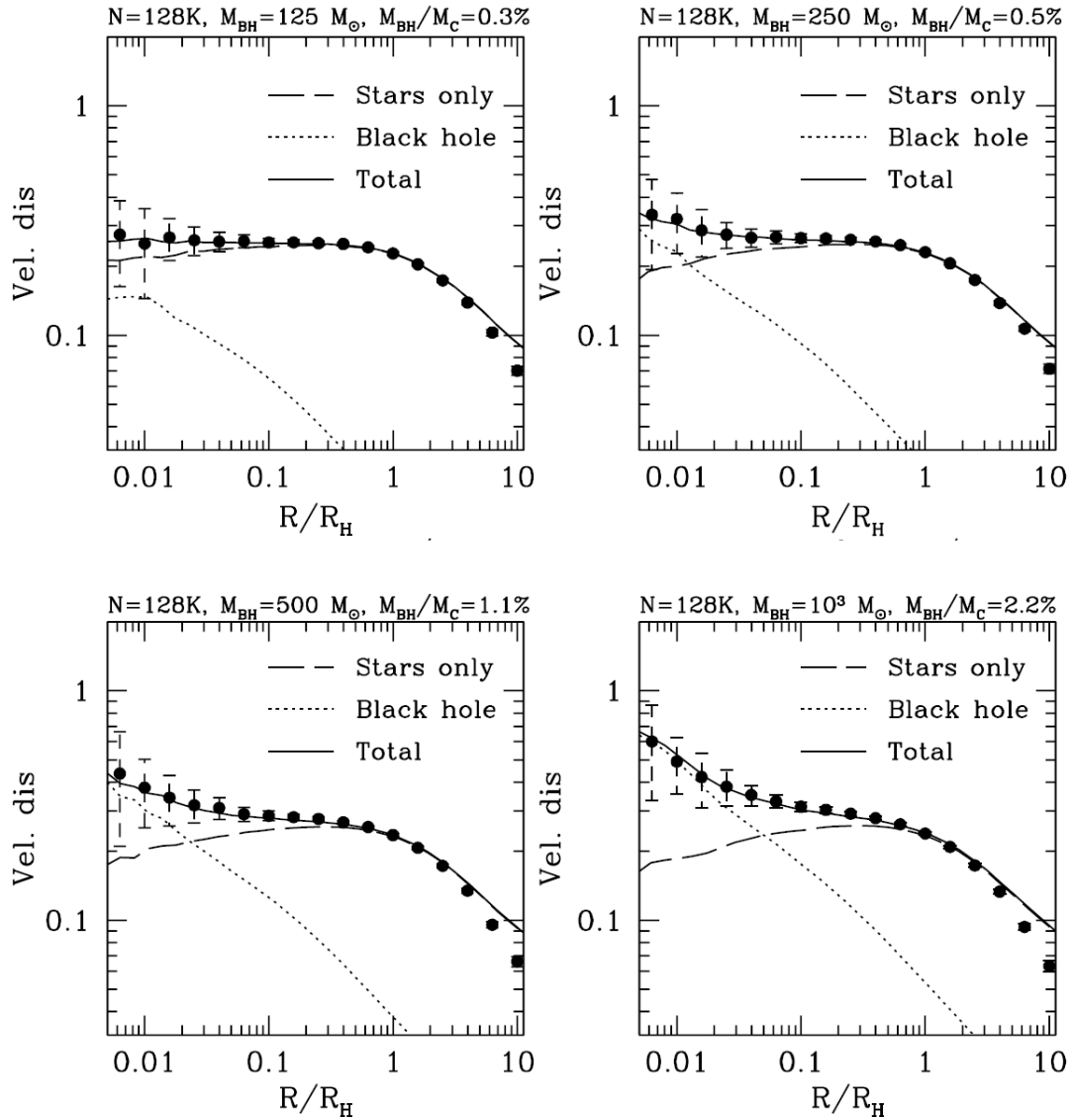


Figura B.3: Dispersão de velocidade projetada de aglomerados globulares simulados, contendo  $N = 131072$  estrelas e buracos negros de massas variadas (Baumgardt et al., 2005). As linhas tracejadas mostram as dispersões esperadas inferidas a partir da distribuição observada de estrelas brilhantes e da equação de Jeans. Nos centros, as curvas caem abaixo das observadas devido às contribuições dos buracos negros de massa intermediária (linha pontilhada). As barras de erro mostram os erros esperados em um aglomerado globular se apenas 5% de todas as estrelas mais brilhantes podem ser observadas. Somente buracos negros de massa intermediária, com massas  $M_{BH} = M_C \geq 0.5\%$ , podem ser detectados dinamicamente, onde  $M_C$  é a massa do aglomerado.

# APÊNDICE C

## A Função de Massa Inicial e a Epistemologia de Popper

*“In so far as a scientific statement speaks about reality,  
it must be falsifiable;  
and in so far as it is not falsifiable,  
it does not speak about reality.”*

**Karl Popper (1902 - 1994)**

Na Secção 4.3, vimos como as teorias de formação estelar e as hipóteses da função de massa inicial de Kroupa estão em desacordo. Para entendermos melhor tais fatos científicos, utilizaremos argumentos da filosofia da ciência contemporânea; mais especificamente, utilizaremos as ideias de Karl Popper<sup>1</sup> (1902-1994).

A primeira publicação de Popper, *Logik der Forschung*<sup>2</sup>, contém uma das mais célebres críticas ao positivismo lógico do Círculo de Viena<sup>3</sup>. Nele, Popper levanta vários pontos que fundamentam

---

<sup>1</sup>Karl Popper é, geralmente, considerado um dos maiores filósofos da ciência do século XX. Ele também era um filósofo social e político de estatura considerável, um autoproclamado crítico-racionalista, um oponente dedicado a todas as formas de ceticismo, convencionalismo e relativismo na ciência e nos assuntos humanos em geral e um defensor empenhado e acérrimo da “*Open Society*”. Uma das muitas características marcantes do pensamento de Popper é o alcance de sua influência intelectual: ele foi elogiado por Bertrand Russell, ensinou Imre Lakatos, Paul Feyerabend e George Soros. Na *London School of Economics*, podemos citar David Miller, Joseph Agassi, Alan Musgrave e Jeremy Shearmur entre seus assistentes de pesquisa, além das amizades reciprocamente benéficas com o economista Friedrich Hayek e o historiador da arte Ernst Gombrich. Além disso, Peter Medawar, John Eccles e Hermann Bondi estão entre os cientistas de renome que reconheceram suas dívidas intelectuais para com o seu trabalho. Para mais detalhes da vida de Popper, recomendamos sua autobiografia, primeiramente publicada em 1976 (Popper, 1982).

<sup>2</sup>Lógica da Pesquisa Científica

<sup>3</sup>Nas palavras de Popper (1934), “*In the two years before the first publication of this book, it was the standing criticism raised by members of the Vienna Circle against my ideas that a theory of method which was neither an empirical science nor pure logic was impossible: what was outside these two fields was sheer nonsense.*” (Nos dois anos antes da primeira publicação deste livro, o criticismo constante levantado pelos membros do Círculo de Viena contra minhas ideias de que

suas concepções epistemológicas, tais como, o que é teoria e quais são os critérios de demarcação associados a uma teoria científica. Popper afirma que uma teoria construída a partir da indução lógica não corresponde a uma verdade inevitável. Com efeito, considerando que existem várias generalizações que podem explicar um fato particular, como se poderia saber qual das possíveis corresponde à verdadeira lei universal. Além disso, Popper afirma que a lógica dedutiva não retransmite a verdade. Ou seja, é sempre possível a partir de uma teoria falsa obter uma conclusão verdadeira. Dessa forma, Popper afirma que as teorias científicas são meras conjecturas acerca da verdade, uma vez que podem ou não passar pelo crivo observacional, em algum dado momento da história.

Acerca de uma dada teoria, Popper levanta o seguinte questionamento: *como se pode distinguir as teorias das ciências empíricas das especulações pseudocientíficas ou metafísicas?* Popper credita o caráter científico às teorias que podem ser falseadas. Falsear uma teoria significa refutá-la. Ou seja, um teoria científica tem que poder ser testada, refutada, *viz.*, deve existir pelo menos uma asserção que fomente um resultado logicamente possível que entre em conflito com a tal teoria.

Como Popper o representa, o problema central na filosofia da ciência é a de demarcação, ou seja, de distinguir entre o que é ciência e o que é *non-science*, como ele denomina. Popper é incomum entre os filósofos contemporâneos em que aceita a validade da crítica de Hume acerca da indução (Hume, 1748), e, com efeito, vai além, ao afirmar que a indução nunca realmente é utilizada na ciência. No entanto, ele não admite que isso implique o ceticismo que está associado a Hume e argumenta que a insistência de Bacon e de Newton sobre o primado da observação “pura”, como o passo inicial para a formação de teorias, é completamente equivocada: toda observação é seletiva e carregada de teoria — não há observações puras ou livres de teoria. Desta forma, ele desestabiliza a visão tradicional de que a ciência possa ser distinguida da *non-science* a partir de uma metodologia indutiva; em contraste com isto, Popper afirma que não existe uma metodologia específica e única para a ciência.

Popper, em conformidade, repudia a indução e rejeita a visão de que este seja o método característico da investigação científica e inferência, substituindo-a pela **falseabilidade**. Argumenta, dessa forma, quão fácil ser a obtenção de evidências a favor de praticamente qualquer teoria. Consequentemente, sustenta que tal **corroboração**, como ele a chama, deve valer cientificamente, se, e só se, for o resultado positivo de uma previsão genuinamente “de risco”, que poderia concebivelmente ter sido falsa. Para Popper, uma teoria é científica apenas se for refutável por um evento concebível. Cada teste genuíno de uma teoria científica, então, é logicamente uma tentativa de refutá-la ou falseá-la, e um verdadeiro contra-exemplo falsifica a teoria. Em sentido crítico, sua teoria de demarcação é baseada em sua percepção da assimetria lógica expressa entre verificar e falsear. É logicamente impossível verificar de forma conclusiva uma proposição universal por referência à experiência (como

---

uma teoria do método que não fosse nem uma ciência empírica tampouco puramente lógica era impossível: o que estiver fora desses dois campos seria pura bobagem). O Círculo de Viena foi uma escola de filósofos, cientistas, matemáticos e intelectuais de algumas outras áreas que se reuniram, no início do século passado, a fim de discutir o conhecimento científico, em particular, o conhecimento da Física. Baseava-se no positivismo lógico que consiste, como afirmou Popper, acreditar que o conhecimento (científico) surgia apenas da experiência e da dedução lógica, *viz.*, acreditavam no empirismo lógico.

Hume percebeu claramente), mas um único contra-exemplo conclusivamente falseia a lei universal correspondente. Em uma palavra, uma *exceção*, longe de “provar” a regra, de forma conclusiva a refuta.

Toda teoria genuinamente científica, então, na visão de Popper, é proibitiva, no sentido de que proíbe, por implicação, eventos ou acontecimentos particulares. Como tal, pode ser testada e falseada, mas nunca verificada logicamente. Assim, salienta que não deve ser inferido a partir do fato de que uma teoria tem resistido ao teste mais rigoroso, mesmo que por um longo período de tempo, que a mesma tem sido verificada; em vez disso, devemos reconhecer que tal teoria tem recebido um elevado grau de corroboração e pode ser mantida provisoriamente como a melhor teoria disponível até que seja finalmente falseada e/ou seja substituída por uma teoria melhor.

Popper sempre deixou clara sua distinção entre a lógica da falseabilidade e sua metodologia aplicada. A lógica de sua teoria é absolutamente simples; por exemplo, se um único metal ferroso não é afetado por um campo magnético, não pode ser verdade a seguinte afirmação: “*todos os metais ferrosos são afetados por campos magnéticos*”.

Logicamente falando, uma lei científica é conclusivamente falseável, embora não seja conclusivamente verificável. Metodologicamente, porém, a situação é muito mais complexa: nenhuma observação está livre da possibilidade de erro — consequentemente, podemos questionar se o nosso resultado experimental era o que aparentava ser. Outro problema surge referente às condições específicas (hipóteses suplementares) de uma dada teoria. Quando uma teoria não corrobora com algum experimento, o falseamento pode ser redirecionado para uma hipótese suplementar, mantendo-se assim a teoria. Um exemplo disso ocorreu no fim do século XIX, quando Netuno foi descoberto. Devido às discrepâncias entre as previsões da mecânica newtoniana e as posições observadas de Urano, a mecânica newtoniana poderia ser falseada. Porém, o falseamento foi retransmitido a uma de suas hipóteses suplementares, i. e., o modelo referente ao Sistema Solar. Dessa forma, tais hipóteses *ad hoc* (ou seja, hipóteses a favor das quais os únicos fatos são aqueles que elas pretendem explicar) devem sempre ser evitadas.

Assim, ao defender a falseabilidade como critério de demarcação para a ciência, Karl Popper permite explicitamente o fato de que, na prática, um único contra-exemplo ou conflito nunca é, metodologicamente, suficientemente para falsear uma teoria. Ademais, esclarece que as teorias científicas são frequentemente mantidas, mesmo que a maior parte das evidências disponíveis estejam em conflito com elas. As teorias científicas podem surgir — e de fato surgem — geneticamente de muitas maneiras diferentes. A maneira com a qual um determinado cientista formula uma teoria particular pode ser de interesse biográfico, mas não tem qualquer consequência, tanto quanto a filosofia da ciência esteja interessada. Popper salienta, em particular, que não há maneira única, um método único, como a indução, que funcione como trajetória para a formulação de uma teoria científica. Ciência, em sua visão, começa com problemas e não com observações — de fato, precisamente no contexto de lidar com um problema que o cientista faz observações em primeira instância: as suas observações

são seletivamente projetadas para testar a extensão que um dado conjunto de teorias possui como uma solução satisfatória para um determinado problema.

Formalmente, a teoria de demarcação de Popper pode ser articulada da seguinte forma. Seja um enunciado básico um relatório de uma experiência ou observação específica; então, podemos dizer que uma teoria é científica se, e somente se, ela divide a classe de enunciados básicos nas duas subclasses **não vazias** seguintes:

- (a) a classe de todos os enunciados básicos com as quais a classe se torna inconsistente ou proibida, *viz.*, a classe de seus **potenciais falseadores**<sup>4</sup> e
- (b) a classe dos enunciados básicos com as quais a classe se torna compatível ou permitida, ou seja, aquelas afirmações que, se verdadeiras, corroboram com a teoria, ou a suportam.

Um exemplo de teoria *non-science*, na visão de Popper, é a dialética hegeliana. Na visão de Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770 - 1831), a contradição dialética de ideias é o motor da história. Outrossim, a gradual evolução e melhoria das ideias filosóficas, éticas, políticas e religiosas determinam a marcha da história. Popper afirma que [...] *se uma teoria contém uma contradição, então, implica tudo e, portanto, na verdade, nada. Uma teoria que, a cada informação que afirma, também inclui a negação desta informação, não nos pode dar informação alguma. Uma teoria que envolva uma contradição é, por conseguinte, inteiramente inútil como uma teoria.*” (Popper, 1963). Em outras palavras, a dialética de Hegel e, conseqüentemente, a de Karl Marx (1818 - 1883) não possuem potenciais falseadores, pois não podem ser refutadas, uma vez que são embebidas em contradições<sup>5</sup>.

Em suma, pela ótica de Popper, uma teoria científica nunca pode ser provada, mas pode ser falseada, o que significa que ela pode e deve ser examinada por experimentos decisivos e suportar tais verificações.

No caso da IMF, como já vimos, não podemos obtê-la a partir das funções de massa observadas. Isso seria possível aos olhos dos empiristas lógicos do Círculo de Viena, mas não de acordo com o racionalismo crítico de Popper e posteriores visões como as de Thomas Kuhn (1922-1996) ou Imre Lakatos (1922-1974). Já salientamos, na justificativa da conjectura da função de massa inicial de um aglomerado, que a partir de uma função de massa não é possível obter a IMF de um aglomerado. Considerando um caso ideal, diferente daqueles levantados em tal justificativa, a IMF obtida não serviria para provar sua própria existência, uma vez que a verdade não é retransmitida. Ela poderia, nessa caso ideal, servir para corroborar com alguma teoria prévia, um vez que, de acordo com argumentos anteriores, uma observação é feita com algum intuito e não de forma pura. Em outras palavras, uma

---

<sup>4</sup>Potenciais falseadores são aqueles enunciados que, se forem verdade, falseam a teoria, ou suas hipóteses suplementares.

<sup>5</sup>Vale ressaltar neste ponto que a visão de Popper é apenas uma das visões referentes à epistemologia contemporânea. Dessa forma, foi duramente criticado por seus pares, tais como Kuhn, Lakatos e Adorno. A análise de suas ideias e suas visões é deveras complexa e ainda hoje é tema de publicações.

IMF diferente da obtida por métodos indutivos poderia muito bem descrever os aspectos observacionais. Com efeito, isso é o que ocorre, uma vez que as IMF existentes não foram formuladas a partir da observação da IMF de algum sistema estelar específico.

Acerca da primeira indagação feita anteriormente, podemos afirmar que uma IMF pode apenas ser testada pelos dados observacionais e nunca provada, uma vez que tal consequência não é possível logicamente. Além disso, uma vez verificada uma inconsistência referente à previsão de uma IMF específica, esta não deve ser falseada imediatamente. Por exemplo, o trabalho de Klessen et al. (2007), já citado, fornece uma tentativa teórica de se teste para uma IMF a partir de simulações hidrodinâmicas. O resultado foi incoerente com o que se deveria ter obtido, de acordo com dados observacionais. Dessa forma, analisando apenas essa tentativa de coerência teórica, poderíamos falsear a IMF, ou o próprio método computacional, ou mesmo os métodos observacionais associados à validação experimental. Sobre o falseamento das técnicas observacionais, já citamos um debate na nota 6 deste capítulo, onde um grupo defende que descobriu diferenças sistemáticas na IMF e o outro credita tal descoberta à uma amostragem viesada. Em outros termos, o segundo grupo falseou as técnicas observacionais do primeiro e não a hipótese da universalidade da IMF.

Atualmente, a melhor forma de testar uma IMF é por meio do  $\alpha$ -plot. Ou seja, este corresponde ao principal potencial falseador da teoria, servindo, por conseguinte, como uma relação que serve para refutar a teoria; esta, naturalmente, deve suportar os testes impostos por aquela. De acordo com Kroupa (2008), a dispersão observada em  $\alpha(m)$  pode ser facilmente compreendida como sendo devido a incertezas de Poisson (Elmegreen, 1997, 1999, ver também) e efeitos dinâmicos, bem como resultantes de vieses através de várias estrelas não resolvidas. Além disso, não há nenhuma variação sistemática evidente de  $\alpha$ , para um dado  $m$ , com a metalicidade ou a densidade da nuvem de formação estelar. Mesmo populações mais exóticas, tais como as do bojo, têm apresentado funções de massa para estrelas de baixa massa indistinguíveis daquela da IMF canônica (Zoccali et al., 2000, por exemplo). Assim, a hipótese da universalidade da IMF não pode ser falseada por populações estelares resolvidas conhecidas. Outro potencial falseador é o modelo cosmológico (e a existência de matéria escura). Falsear o modelo cosmológico padrão ( $\Lambda$ CDM) não implica que a universalidade da IMF é correta (Kroupa, 2012, por exemplo). Reciprocamente, temos o mesmo (Wojtak et al., 2011).

Dessarte, caso um estudo forneça evidências para que uma dada teoria seja falseada, não devemos fazê-lo imediatamente. Isso corresponde a um processo gradual e lento, em que a comunidade científica opta pela transição paradigmática. Por exemplo, Kroupa (2012) descarta o modelo  $\Lambda$ CDM. Isso não implica, naturalmente, que não devemos utilizá-lo nos estudos, pois além da comunidade científica não descartá-lo por causa de tal estudo, este pode ser questionado e em um futuro, próximo ou não, ser falseado. Por fim podemos concluir, acerca da primeira indagação, que a hipótese da universalidade da IMF não pode ser, portanto, falseada com os dados observacionais atuais.

Sobre a segunda indagação, referente às teorias de formação estelar — embora fossem melhor analisadas à luz dos programas de pesquisa de Lakatos, por corresponderem a teorias que competem



na contemporaneidade — pode ser entendida sob o prisma do racionalismo crítico aqui adotado. Novamente, a teoria de Popper, principalmente, estabelece um critério de demarcação para a ciência diferente do proposto pelo Círculo de Vienna, sendo científicas as teorias que podem ser refutadas, falseadas. Posto isto, tanto a teoria referente à IMF, quanto as teorias de formação estelar sucintamente descritas aqui, correspondem a teorias científicas. O outro ponto chave da teoria de Popper é alusivo ao método de falsear uma teoria.

As duas teorias de formação estelar competem entre si nos tempos hodiernos. Isso implica que as duas podem ser adotadas em qualquer estudo, uma vez que a comunidade científica ainda não se decidiu sobre qual é aquela que mais corrobora com os dados observacionais existentes. Além disso, adotar uma delas gera implicações distintas referente ao ciclo de matéria no Universo. Ademais, como ambas possuem potenciais falseadores, em algum momento apenas uma, ou nenhuma, delas sobreviverá.

No que se refere à universalidade da IMF e tais teorias, o mesmo ocorrerá, em algum momento, uma vez que a história da ciência mostra que é dessa maneira que a ciência vem se sustentando desde suas formulações iniciais no século XVII. Portanto, a comunidade científica pode, no presente momento, optar por considerar qualquer uma dessas abordagens, sustentando, obviamente, suas implicações. O mesmo não ocorre, por exemplo, no estudo da física nanoscópica, em que, se um pesquisador intentar utilizar a mecânica newtoniana para subsidiar seu estudo, não obterá aprovação da comunidade científica.

Por fim, apenas a derivação de mais potenciais falseadores referentes aos modelos cosmológicos, às IMF, às teorias de formação estelar, às técnicas instrumentais, *et cetera*, juntamente com a melhoria dos dados observacionais e das técnicas de análise, poderão melhorar o entendimento teórico referente ao já mencionado ciclo de matéria no Universo. Em tal momento, teorias serão superadas e novas surgirão, movendo a egrégia engranagem chamada Ciência.

# APÊNDICE D

## Critério de Escape do Código NBODY6

*“[...] some stars above the escape energy never escape (unless some other dynamical process comes into play), and others take much longer to escape than had been generally thought.”*

**Douglas Heggie**

Aglomerados estelares perdem membros para o campo galáctico à medida que evoluem. Assim, faz sentido remover membros distantes dos modelos e concentrar no sistema ligado. Embora o raio mareal clássico possa ser uma boa opção para o limite do modelo, simulações mostram que uma população significativa está presente nas regiões mais próximas do mesmo (Terlevich, 1987, por exemplo). Da mesma forma, as estrelas, cujas velocidades são maiores que a velocidade de escape, podem permanecer no modelo por um longo tempo à medida que ele orbita sob a influência de um potencial fixo (Fukushige & Heggie, 2000). Considerações teóricas também sugerem que, em algumas órbitas, as estrelas podem chegar a distâncias muito grandes e depois retornar para o modelo (Ross et al., 1997). No entanto, tais órbitas parecem ser um tipo especial e apenas uma pequena fração das estrelas que escapam apresentam este comportamento quando seu movimento é investigado.

O critério de usar duas vezes o raio mareal para a remoção da estrela é utilizado nos códigos, desde o trabalho de (J Aarseth, 1973), fornecendo algo parecido com um “*escape retardado*”. Essa opção pode ser alterada na rotina `escape.f`. De fato, alguns autores preferem aumentar esse valor, fornecendo um retardamento maior ou menor. Por exemplo, Loyola & Hurley (2013) utilizam como limite para seus modelos o valor de quatro vezes o raio mareal, além do critério da integral primeira - que será discutido adiante. Eles argumentam que, dessa forma, não é necessário se preocupar com escapes em potencial (Takahashi & Baumgardt, 2012). Retardar a remoção de estrelas das simulações é preferível, uma vez que não haverá dúvidas de que a estrela escapou completamente do potencial

do modelo.

A fim de compreender melhor a definição do raio mareal, vamos delinear alguns aspectos do **Problema Restrito de Três Corpos** (PRTC). Da formulação do PRTC, em um referencial sinódico, segue que as equações de movimento para a estrela são (Murray & Dermott, 1999)

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (\text{D.1})$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (\text{D.2})$$

onde

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (\text{D.3})$$

Na equação D.3, o termo  $x^2 + y^2$  é o potencial centrífugo e o termo em  $1/r_1$  e  $1/r_2$  é o potencial gravitacional. Os termos  $-2\dot{y}$  e  $+2\dot{x}$ , nas equações D.1 e D.2, são os termos de Corioli, que dependem da velocidade no referencial sinódico. Observe que  $\Omega$  não é um potencial verdadeiro. É melhor dizer que se trata de uma função escalar da qual podemos derivar a aceleração experimentada pela partícula.  $\Omega$  é comumente chamada de "pseudo-potencial" (Murray & Dermott, 1999). Multiplicando a equação D.1 por  $\dot{x}$  e a equação D.2 por  $\dot{y}$  e somando as duas, obtemos

$$\dot{x} \ddot{x} + \dot{y} \ddot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \dot{y}$$

Logo, integrando a última equação, obtemos

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 \Omega - C \quad (\text{D.4})$$

onde  $C$  é a constante de integração. Como  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ , temos que

$$v^2 = 2 \Omega - C \quad (\text{D.5})$$

ou, usando a definição de  $\Omega$ ,

$$C = x^2 + y^2 + 2 \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (\text{D.6})$$

Isso demonstra que a quantidade  $C$  é uma constante de movimento. Pode-se provar que  $C$  é a única constante de movimento e como o sistema possui dois graus de liberdade, o problema é não-integrável, conforme o teorema de Liouville 2.2. Dessa forma, a constante de Jacobi pode ser expressa, resumidamente, por

$$C = 2 \Omega - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (\text{D.7})$$

A equação D.7 define uma superfície em um espaço tridimensional. Considerando um valor fixo da constante de Jacobi e  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , são obtidas curvas de nível desta superfície no plano  $xOy$ , pois:

$$C(x, y) = 2 \Omega(x, y) \tag{D.8}$$

Essas curvas são chamadas *curvas de velocidade zero* e cumprem um papel importante na determinação das fronteiras das regiões permitidas à partícula. A importância do estudo destas curvas está relacionada com a classificação das regiões de movimento do corpo; cada região é delimitada por uma curva que corresponde a valores distintos de  $C$ .

As figuras D.1, D.2, D.3 e D.4 correspondem à função D.8 e algumas curvas de velocidade zero estão esboçadas na mesma. Tais figuras foram geradas utilizando o Maple 11.

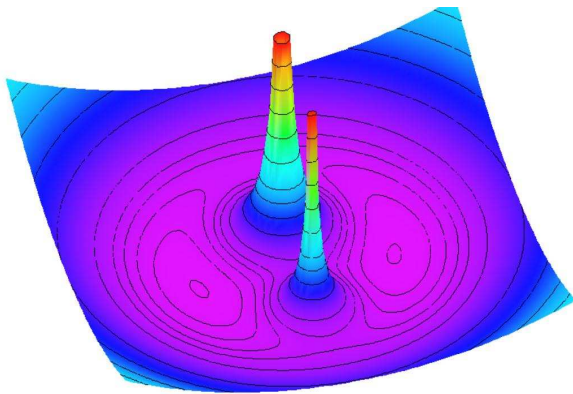


Figura D.1: Superfície definida por  $C = 2 \Omega(x, y)$  e  $\mu_2 = 0.3$ . (vista de cima).

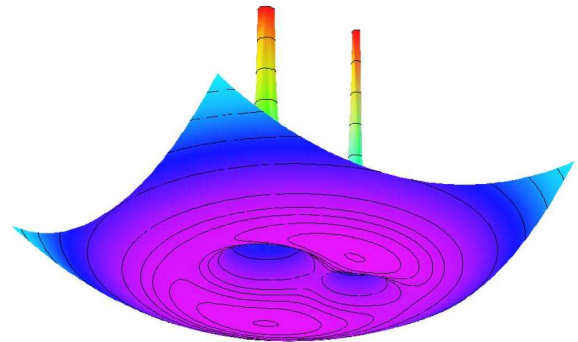


Figura D.2: Superfície definida por  $C = 2 \Omega(x, y)$  e  $\mu_2 = 0.3$ . (vista de baixo).

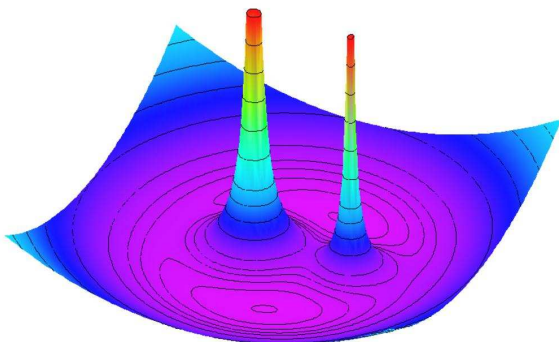


Figura D.3: Superfície definida por  $C = 2 \Omega(x, y)$  e  $\mu_2 = 0.3$ . (vista de cima).

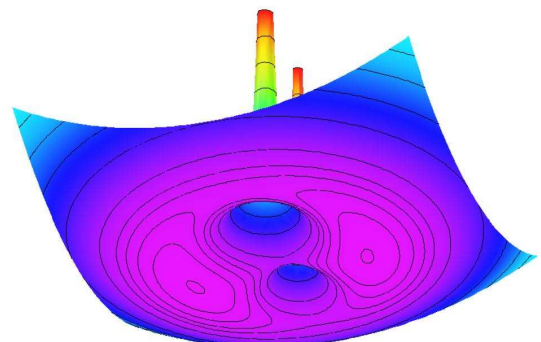


Figura D.4: Superfície definida por  $C = 2 \Omega(x, y)$  e  $\mu_2 = 0.3$ . (vista de baixo).

Os pontos de equilíbrio são os pontos nos quais as derivadas do pseudo-potencial se anulam. Esses pontos de equilíbrio podem ser estáveis ou instáveis. Euler e Lagrange mostraram a existência de cinco pontos de equilíbrio para o problema restrito e circular de três corpos, denominados pontos de equilíbrio de Euler-Lagrange.

Para a determinação desses pontos é necessário a resolução do seguinte sistema:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} + x = 0 \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\mu_1 \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} + y = 0 \quad (\text{D.10})$$

O resultado fornece três pontos sobre o eixo  $x$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , chamados de *pontos colineares* e os dois restantes,  $L_4$  e  $L_5$ , que formam triângulos equiláteros com os corpos primários, chamados de *pontos triangulares*.

A figura D.5 exhibe a localização de tais pontos de equilíbrio.

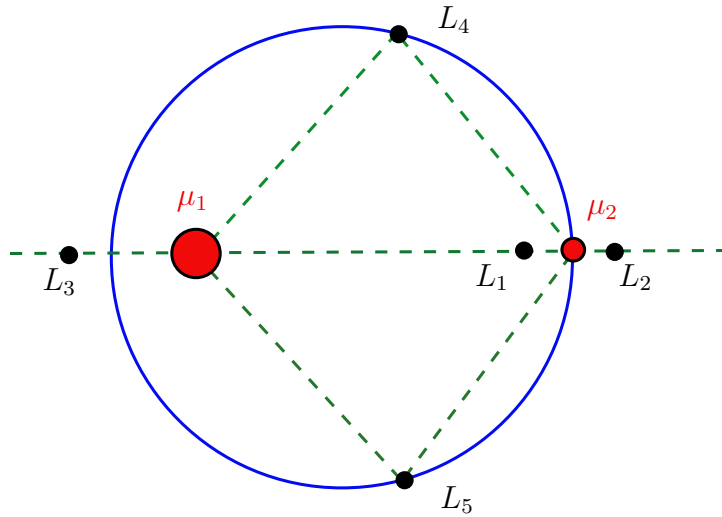


Figura D.5: Localização esquemática dos pontos de equilíbrio do PRTC, onde  $\mu_1$  e  $\mu_2$  correspondem à galáxia e ao aglomerado, respectivamente, ambos tratados como partículas puntiformes.

Note que podemos discutir o movimento da partícula a partir de uma análise qualitativa da função  $\Omega(x, y)$ . Já mostramos que  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C$  (equação D.4) e como  $v^2 \geq 0$ , temos que  $2\Omega \geq C$ . Dessa forma, utilizando as figuras D.1 e D.2, podemos ter uma ideia das regiões permitidas à partícula. As curvas onde  $2\Omega = C$  são chamadas curvas de velocidade zero e funcionam como *curvas de retorno*, as quais a partícula não pode ultrapassar, ou seja, correspondem a verdadeiras barreiras topológicas.

A figura D.6 mostra as curvas de velocidade zero correspondentes aos valores da constante de Jacobi dos pontos colineares. Essas linhas definem quatro regiões de movimento no plano, a saber: região I, região II, região III e região IV.

Como  $C$  é uma função de  $x, y, \dot{x}$  e  $\dot{y}$  (relação D.6), temos que, para  $v^2 = 0$ , cada ponto do plano  $xOy$  corresponde a um valor de  $C$  diferente. Sejam  $C_1, C_2, C_3, C_4$  e  $C_5$  as constantes que associadas aos cinco pontos de Euler-Lagrange  $L_1, L_2, L_3, L_4$  e  $L_5$ , respectivamente. A análise das possíveis regiões de movimento, onde a área branca corresponde à região permitida e a área cinza à região

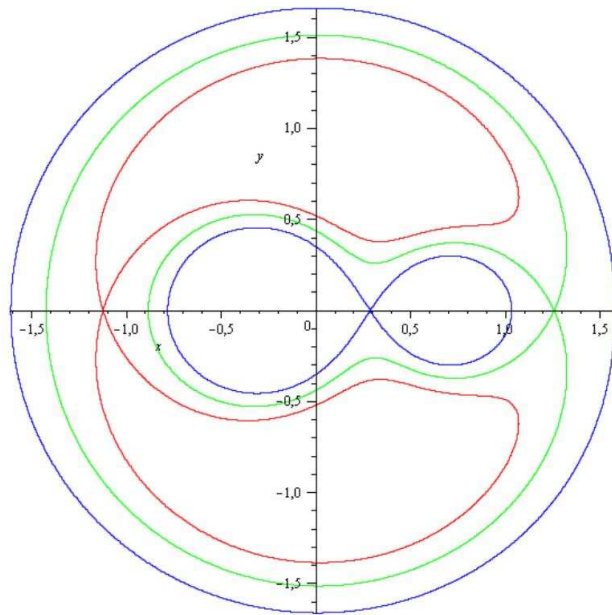


Figura D.6: Curvas de Velocidade Zero associadas ao Pontos de Equilíbrio ( $\mu_2 = 0.3$ ).

proibida, é feita do seguinte modo:

$C \geq C_1$ : o movimento é permitido na região I (área branca), figura D.7. Nesse caso, o movimento ocorre em órbitas ao redor de cada corpo primário. Não há comunicação entre as regiões que circundam cada corpo primário e a partícula pode se mover até atingir a curva limite, fechada em  $L_1$ . É possível a existência de órbitas ao redor dos dois corpos primários, simultaneamente; bem como órbitas de escape, externas à fronteira exterior. À medida que o valor da constante de Jacobi diminui, as duas regiões internas se tocam em  $L_1$ .

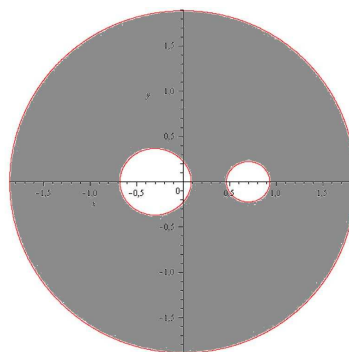


Figura D.7: Região I: A região cinza corresponde à área proibida.

$C_1 \geq C \geq C_2$ : o movimento é permitido na região II (área branca), figura D.8. Nesse caso, a partícula pode transitar entre os corpos primários, orbitando ora um, ora outro. Também são permitidas órbitas ao redor de cada corpo primário (e dos dois, simultaneamente). Órbitas de escape, além da curva mais externa, também são permitidas.

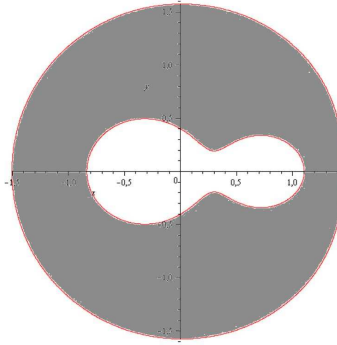


Figura D.8: Região II: A região cinza corresponde à área proibida.

$C_2 \geq C \geq C_3$ : o movimento é permitido na região III (área branca), figura D.9. Nesse caso, a partícula pode escapar das proximidades dos corpos primários, pois a curva de velocidade zero é aberta.

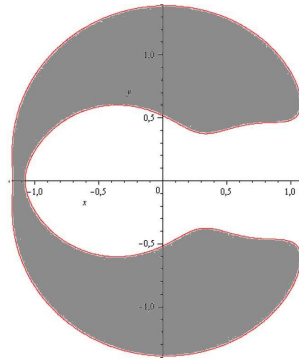


Figura D.9: Região III: A região cinza corresponde à área proibida.

$C_3 \geq C \geq C_4 = C_5$ : o movimento é permitido na região IV (área branca), figura D.10. Nesse caso, a partícula pode percorrer todo o plano  $xOy$ , exceto as áreas internas das curvas definidas por  $C$ . As curvas de velocidade zero vão diminuindo até se reduzirem aos pontos  $L_4$  e  $L_5$ . Quando  $C = C_4 = C_5$ , a partícula é permitida em todo o espaço de configuração .

No caso do **Problema de Hill** (PH), que é uma particularidade do PRTC, temos que  $\mu_2 \gg \mu_1$ . Naturalmente, para um AGG orbitando a Galáxia, o PH é uma aproximação razoável, uma vez que a massa do AGG é muito menor que a massa da Galáxia. Nesse caso, as curvas de velocidade zero em torno do AGG são simétricas, ou seja, as posições dos pontos  $L_1$  e  $L_2$  são simétricas com relação ao centro do AGG. A constante de Jacobi para o caso 3D é, então, expressa por (Spitzer, 1987)

$$C_j = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_A}{r} - \frac{1}{2} \omega^2 (3x^2 - z^2) \quad (\text{D.11})$$

onde  $M_{AGG}$  é a massa do AGG,  $v$  é a velocidade da estrela no referencial girante,  $r$  é a distância da

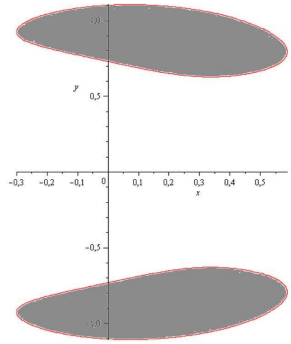


Figura D.10: Região IV: A região cinza corresponde à área proibida.

estrela até o centro do AGG e a velocidade angular  $\omega$  é dada pela 3ª lei de Kepler, i.e.,

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_G}{R_G}} \quad (\text{D.12})$$

onde  $M_G$  é a massa da Galáxia e  $R_G$  é o raio da órbita do AGG em torno do centro da Galáxia. Note que o terceiro termo do lado direito da equação (D.12) corresponde aos termos centrífugos e mareal. O pseudo-potencial, neste caso, é dado por

$$\Omega = -\frac{GM_A}{r} - \frac{1}{2} \omega^2 (3x^2 - z^2) \quad (\text{D.13})$$

A curva de velocidade zero da função (D.13) é exibida na figura D.11.

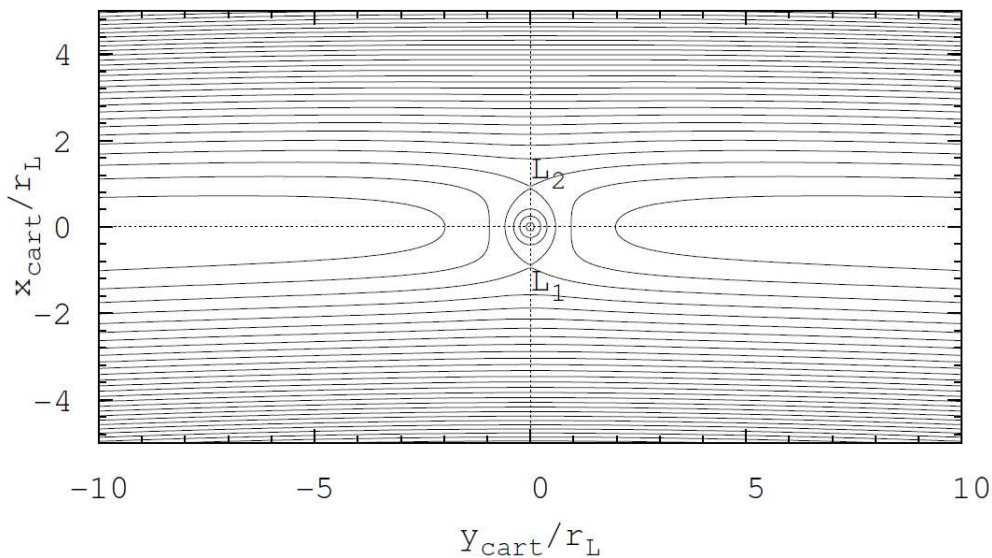


Figura D.11: Curvas de velocidade zero associadas ao Problema de Hill.  $L_1$  e  $L_2$  são os pontos lagrangianos próximos ao AGG (Just et al., 2009).



Portanto, os pontos de equilíbrio próximos ao AGG ( $L_1$  e  $L_2$ ) são dados por  $\pm r_L$  definido abaixo

$$r_L := \left( \frac{M_A}{3 M_G} \right)^{1/3} R_G \quad (\text{D.14})$$

E o valor da contante de Jacobi em qualquer um desses pontos é

$$C_{J,crit} := -\frac{3 G M_A}{2 r_L} \quad (\text{D.15})$$

Logo, para uma estrela escapar, temos que  $C_J > C_{J,crit}$ . Embora esse limite seja menos rigoroso em comparação com um sistema isolado, a estrela que satisfizer essa condição ainda pode levar um longo tempo para chegar a um dos pontos lagrangianos,  $L_1$  ou  $L_2$ , e algum excesso é geralmente necessário para garantir o escape; pois, como já foi mencionado, existem algumas estrelas que retornam ao AGG após (Ross et al., 1997). Para garantir o escape, o código *NBODY6* utiliza  $C_{J,crit} = 0$  como critério.

Por fim, a forma usual de se definir o raio mareal no código é por meio da definição (D.15), que também é utilizado como critério de escape. A distância central de cada estrela e de cada centro de massa  $i$  é examinada em intervalos regulares. O critério adicional é dado por

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_d| > 2r_t \quad (\text{D.16})$$

onde  $r_d$  define o centro de densidade e  $r_t$  é o raio mareal. Os procedimentos detalhados para o escape de estrelas do código são discutidos no apêndice C do livro de (Aarseth, 2003), incluindo o caso de sistemas hierárquicos (secção 5.5).