



O DIPOLO INTRÍNSECO DA RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

Pedro da Silveira Ferreira

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Observatório do Valongo da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em ciências (Astronomia).

Orientador: Miguel Boavista Quartin

Rio de Janeiro

Abril de 2019

O dipolo intrínseco da radiação cósmica de fundo

Pedro da Silveira Ferreira

Dr. Miguel Boavista Quartin (Orientador)

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências - Astronomia.

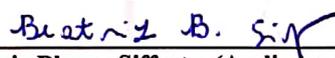
Aprovada por:



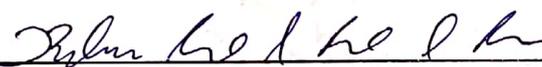
Presidente, Dr. Miguel Boavista Quartin - (Orientador) – IF e OV/UFRJ



Dr. Thiago dos Santos Pereira – (Avaliador Externo) – UEL



Dr.ª Beatriz Blanco Siffert – (Avaliador Externo) – Duque de Caxias/UFRJ



Dr. Ribamar Rondon de Rezende dos Reis – (Avaliador Interno) – IF e OV/UFRJ

Rio de Janeiro
Abril de 2019

CIP - Catalogação na Publicação

F383d Ferreira, Pedro da Silveira
 O Dipolo intrínseco da radiação cósmica de fundo /
 Pedro da Silveira Ferreira. -- Rio de Janeiro, 2019.
 xxi, 115 f.

 Orientador: Miguel Boavista Quartin.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
 Rio de Janeiro, Observatório do Valongo, Programa de
 Pós-Graduação em Astronomia, 2019.

 1. Radiação cósmica de fundo. 2. Dipolo intrínseco.
 3. Doppler relativístico. 4. Aberração relativística.
 5. Universo primordial. I. Quartin, Miguel
 Boavista, orient. II. Título.

Resumo

O dipolo Intrínseco da Radiação Cósmica de Fundo

PEDRO DA SILVEIRA FERREIRA

Orientador: Miguel Boavista Quartín

A maior anisotropia da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) é o dipolo. Normalmente ele é totalmente creditado ao efeito Doppler devido ao movimento próprio do referencial que observa a RCF. No entanto, além desta componente cinemática do dipolo, parte dele pode ser intrínseco, isto é, de origem cosmológica.

Muitas podem ser as origens desta parte intrínseca, desde efeitos decorrentes da Inflação, não-gaussianidades primordiais, efeitos de campo magnético na superfície de recombinação, a existência de uma direção privilegiada do universo, efeitos de void entre outras. Isso posto, é evidente a relevância de se medir esta componente para o entendimento do universo primordial, pré, durante e pós liberação da RCF. Contudo, este trabalho não visa distinguir ou caracterizar esses efeitos, mas sim desenvolver, aprimorar e testar um método para inferir o quanto do dipolo é de origem intrínseca.

Utilizaremos um estimador para medir a velocidade do observador com relação ao referencial de repouso da RCF, sem utilizar a medida do dipolo em si, mas sim os efeitos de aberração e Doppler relativísticos introduzidos pelo movimento do referencial nos mapas da RCF. Tais efeitos se traduzem em correlações entre todos os multipolos, na expansão em harmônicos esféricos da RCF. Utilizando essas correlações seremos capazes de medir a componente cinemática do dipolo em separado, e com uma mudança de referencial, a intrínseca.

Embora estas componentes sejam parcialmente degeneradas, podemos ainda analisá-las observando os efeitos de aberração e Doppler separadamente, isto é, o dipolo cinemático medido considerando cada efeito isoladamente. Desta forma o contraste entre o dipolo total e o dipolo cinemático medido por cada um destes efeitos pode revelar diferentes características do universo primordial, como as não-Gaussianidades supracitadas ou um potencial gravitacional dipolar.

Apesar da importância para a compreensão do universo primordial e dos avanços nas medidas da RCF durante a última década e as perspectivas para a próxima, apenas um artigo tentou efetivamente medir o dipolo intrínseco, utilizando um outro tipo de estimador.

Utilizando uma outra abordagem, com outro estimador e uma série de aprimoramentos com relação a esta primeira tentativa, construímos um novo *pipeline* para a medição do dipolo intrínseco. Realizando um grande conjunto de simulações numéricas, obtivemos os erros desse pipeline, observando diversos resultados não previstos teoricamente, tais como a importância de um cuidadoso tratamento do viés introduzido pelo processo de mascaramento do céu e um detalhamento dos sistemáticos introduzidos na construção dos mapas do Planck.

Com este poderoso pipeline em mãos nosso objetivo imediato é aplicá-lo nos dados mais atuais do satélite Planck e obter as medidas das componentes cinemática e intrínseca do dipolo, cujos competitivos resultados serão submetidos à publicação em breve (Ferreira e Quartín, In prep.).

Palavras-chave: RCF, Anisotropias da RCF, Dipolo da RCF, Dipolo Intrínseco da RCF, Dipolo Cinemático da RCF, Aberração relativística, Doppler relativístico.

Abstract

O dipolo Intrínseco da Radiação Cósmica de Fundo

PEDRO DA SILVEIRA FERREIRA

Orientador: Miguel Boavista Quartin

The largest anisotropy of the Cosmic Microwave Background (CMB) is the dipole. Normally it is totally credited to the Doppler effect due to the proper movement of the reference frame that observes it. However, besides this kinematic component of the dipole, part of it can have an intrinsic, i.e. cosmological, origin.

There are many possible origins for the intrinsic part of the dipole, from inflation era effects (restricting certain inflationary models), primordial non-Gaussianity, magnetic field effects on the recombination surface, the existence of a privileged direction of the universe, void effects and other sources. That said, the relevance of measuring this component to the understanding of the primordial universe, pre, during and after the CMB release becomes evident. Nevertheless, this work does not aim to distinguish or characterize these effects, but to develop, improve and test a method to infer how much of the dipole is intrinsic.

For this, we will use an estimator to measure the velocity of the observer relative to the reference frame of the CMB, without using the dipole measurement itself, but rather the relativistic aberration and Doppler effects introduced by the referential movement in the CMB maps. These effects can be seen as correlations between all multipoles, on the spherical harmonics expansion of the CMB. Using these correlations we will be able to measure the kinematic component of the dipole separately, and with a change of reference frame, the intrinsic component. In other words, we disentangle what comes from our reference frame peculiar movement from what is intrinsic of CMB.

Even though such components are partially degenerate, we can further analyze them by observing the effects of aberration and Doppler effect separately, ie, the kinematic dipole measured considering each effect separately. The contrast between the total dipole and the kinematic dipole measured by each of these effects may reveal different characteristics of the primordial universe, such as the above-mentioned non-Gaussianities or a dipolar gravitational potential.

Despite the importance of it for the comprehension of the primordial universe, the advances in CMB measurements over the last decade and the prospects for the next one, only one article tried to effectively measure the intrinsic dipole, using another type of estimator.

Using another approach, with a different estimator and a series of improvements in relation to this first attempt, we constructed a new pipeline for the intrinsic dipole measurement. By performing a large set of numerical simulations, we obtained the errors of this pipeline, observing several results not theoretically foreseen, such as the importance of a careful treatment of the bias introduced by the sky masking process and the systematics introduced in the construction of Planck maps.

With this powerful pipeline at hand our immediate goal is to apply it to Planck 2018 data (last release) and obtain measurements of the kinematic and intrinsic components of the dipole, whose competitive results will be submitted for publication soon (Ferreira and Quartin, In prep.).

Key-words: CMB, CMB anisotropy, CMB Dipole, CMB intrinsic Dipole, CMB Kinematic Dipole, Relativistic Aberration effect, Relativistic Doppler effect.

Agradecimentos

Poucas são as vezes em que temos a oportunidade de demonstrar a devida gratidão aqueles que nos apoiam, orientam e ajudam. Aproveito então esse espaço para agradecer pessoas sem as quais eu não poderia ter chegado até aqui. Peço sinceras desculpas a quem eu porventura esquecer de citar. Das pessoas que me recordo, fica a homenagem.

Ao meus pais, agradeço pelo amor, apoio e a dedicada e atenciosa criação que sempre incentivou a curiosidade pela ciência e despertou a vontade, desde a tenra idade, de entender como as coisas funcionam. Essa fagulha possibilitou que eu encontrasse a minha vocação.

Ao meu professor de física do ensino médio, Paulão, cuja paixão pelo ensino de física me inspirou. Uma importante parte de minha formação como cientista aconteceu sob a sua bem humorada tutela, sempre me motivando e desafiando. Essa fase ficará para sempre marcada em minha vida, foi o momento em que tive certeza de que queria entender melhor o universo e que isso dava sentido a minha vida. Agradeço seus ensinamentos e amizade.

Minha graduação foi um período onde enfrentei diversos problemas, no âmbito pessoal e por consequência no acadêmico. Muitas foram as vezes em que me senti perdido. Nesses momentos pude contar com o carinho e apoio de minha namorada Bianca, sem o qual seria ainda mais difícil eu me reencontrar. Ela me ensinou a ser forte, corajoso, não ter medo de encarar os desafios e levantar quantas vezes eu cair. Tenho certeza de que isso não foi apenas importante nesses momentos difíceis, como será valioso em meu amadurecimento como cientista e ser humano. Agradeço seu apoio, carinho, companheirismo, dedicação e por acreditar em mim.

No âmbito acadêmico, meu profundo agradecimento ao meu orientador Miguel Quartin, com o qual tenho aprendido lições valiosíssimas para minha formação como pesquisador. Não poderia encontrar mais competente orientação, é sem dúvida um profissional excepcional. Espero poder sempre contar com sua sabedoria, experiência e parceria durante minha carreira.

Aos meus amigos Vinícius, Samuel e Aline, por alegrarem minha vida. Mesmo nos vendo tão pouco, vocês estão sempre comigo.

Aos meus colegas do observatório do Valongo, Jorge, Raphael, Cristiane e Franciele, agradeço por terem me disponibilizado seus computadores para rodar as milhares e milhares de simulações nas madrugadas e finais de semana.

Aos funcionários da secretaria do Observatório do Valongo, em especial à Cláudia, por serem sempre prestativos, atenciosos e pacientes.

Por fim, agradeço à CAPES pela bolsa de mestrado, sem a qual não teria sido possível realizar este trabalho.

Conteúdo

| | |
|--|-------------|
| Resumo | iii |
| Abstract | v |
| Agradecimentos | vii |
| Conteúdo | ix |
| Lista de Figuras | xiii |
| Lista de Tabelas | xxi |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 A Radiação Cósmica de Fundo | 9 |
| 2.1 O espectro da RCF e a superfície de recombinação | 9 |
| 2.2 O espaço harmônico | 12 |
| 2.2.1 Harmônicos esféricos | 12 |
| 2.2.2 Propriedades estatísticas da RCF | 13 |
| 2.2.3 O espectro de potência angular e vínculos cosmológicos | 15 |
| 2.2.4 Variância cósmica | 16 |
| 2.3 Oscilações acústicas | 17 |
| 3 Efeitos da aberração e Doppler sobre a RCF | 21 |
| 3.1 Efeito sobre um campo de radiação | 21 |
| 3.2 Efeito sobre um mapa de temperatura | 24 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3 | Efeito sobre os multipolos de ordem superior ao dipolo | 27 |
| 4 | O estimador de $\vec{\beta}$ | 33 |
| 4.1 | Caso ideal e previsão teórica | 33 |
| 4.2 | Generalização do estimador para outras componentes cartesianas | 40 |
| 4.3 | Efeito da aplicação de uma máscara no espaço dos harmônicos e suas consequências para o estimador | 43 |
| 4.4 | Relação entre coordenadas Galácticas e Cartesianas | 47 |
| 5 | Metodologia e simulações | 49 |
| 5.1 | Como medir $\vec{\beta}$ e o dipolo intrínseco | 49 |
| 5.2 | Healpix e Simulações | 50 |
| 5.2.1 | Healpix e modificações | 50 |
| 5.2.2 | Simulações Ideais | 53 |
| 5.3 | Viés de assimetria da máscara | 55 |
| 5.4 | Máscara simétrica | 56 |
| 5.5 | Tratamento do ruído | 58 |
| 5.6 | Efeitos de Linearização da temperatura - Removendo o <i>dipole Doppler</i> | 59 |
| 5.7 | Pipeline | 64 |
| 5.7.1 | Descrição | 65 |
| 5.7.2 | Especificações | 65 |
| 5.8 | Definição das medidas, erros estatísticos e sistemáticos | 67 |
| 5.8.1 | Índices | 67 |
| 5.8.2 | Definições das medidas cartesianas e erros associados | 68 |
| 5.8.3 | Definições das medidas angulares e o erro total (estatístico+sistemático) angular | 70 |
| 5.9 | Removendo o viés de mascaramento | 71 |
| 5.9.1 | Viés do tipo soma | 71 |
| 5.9.2 | Viés do tipo multiplicativo | 72 |
| 5.10 | Resultados do estimador com o viés removido | 74 |

| | |
|--|-----------|
| | xi |
| 5.10.1 Erros estatísticos - UT78(2018) simetrizada | 75 |
| 5.10.2 Erros sistemáticos - UT78(2018) simetrizada | 78 |
| 6 Resultados preliminares com dados observacionais | 81 |
| 6.1 Resultados preliminares com os mapas SMICA e NILC (2018) | 81 |
| 7 Conclusão e perspectivas futuras | 85 |
| A Análise do estimador em simulações com <i>Inpainting</i> | 89 |
| Bibliografia | 91 |

Lista de Figuras

- 1.1 Dipolo medido no *release* de 2015 do satélite Planck em uma projeção de Mollweide. Essa grande modulação no sinal da RCF aponta aproximadamente para $l=264^\circ$ e $b=48^\circ$ em coordenadas galácticas. 2
- 1.2 **a)** Mapa da RCF primordial, sem efeitos de aberração e Doppler. **b)** Mapa com efeito Doppler relativístico. **c)** Mapa com aberração relativística. **d)** Mapa com os efeitos de aberração e Doppler. Mapas simulados em versão modificada do Healpix, velocidade do referencial de $0.75c$ 4
- 2.1 À esquerda o plasma de fótons (amarelo), elétrons (cinza) e íons (vermelho) anterior a recombinação. À direita a formação dos primeiros átomos durante a recombinação e o aumento repentino do livre caminho médio dos fótons, liberando a RCF. Figura adaptada do site writescience, autor Shane L. Larson. 10
- 2.2 Comparação entre a radiação de corpo negro esperada para uma temperatura de $T = 2.725$ (linha sólida) e o espectro da RCF observado pelo experimento FIRAS (COBE). As barras de erro foram multiplicadas por 400 para se tornarem visíveis. 11
- 2.3 Mapa de temperatura da RCF obtido pelo satélite Planck (*release* de 2018) utilizando o *pipeline* SMICA. As cores indicam a amplitude das anisotropias. As regiões delimitadas pelas curvas cinzas indicam regiões que devem ser mascaradas, não confiáveis para uso científico. Figura retirada de material de divulgação da ESA e colaboração do Planck para o *release* de 2018 do Planck. 11

| | | |
|-----|--|----|
| 2.4 | Decomposição em harmônicos esféricos da RCF, como na equação (2.3). À direita representamos as diferentes componentes da decomposição em harmônicos esféricos (equação (2.3)) usados na decomposição do mapa de anisotropias da RCF, à esquerda. Figura retirada de material didático feito por Hans Kristian Eriksen. | 13 |
| 2.5 | Espectro de potência angular obtido pelo satélite Planck. A curva em verde escuro é o melhor ajuste para o modelo cosmológico padrão utilizando os 6 parâmetros citados e a região verde claro ilustra a variância cósmica (vide seção 2.2.4). Figura retirada de material de divulgação da ESA e colaboração Planck. | 16 |
| 2.6 | Picos das oscilações acústicas. Figura retirada de material de divulgação da Scientific American (Special Report de Fevereiro de 2004), escrito por Wayne Hu e Martin White e ilustrações de Bryan Christie Design. | 18 |
| 3.1 | RCF no referencial de repouso, intrinsecamente isotrópica. | 22 |
| 3.2 | a) Efeito Doppler relativístico, a frequência dos fótons se modifica, aumentando no sentido do movimento (<i>blueshift</i>) e diminuindo no sentido oposto (<i>redshift</i>). Repare que nesse caso a radiação não é isotrópica em frequência, temos frequências diferentes para diferentes direções, porém é isotrópica na distribuição de fótons, recebemos o mesmo número de fótons em todas as direções. b) Aberração relativística, a frequência dos fótons não se altera, mas a direção dos fótons sim, logo a distribuição de fótons não é mais isotrópica, mas em todas as direções observamos a mesma frequência. c) Juntos os efeitos de Doppler e Aberração fazem com que não tenhamos mais isotropia tanto na frequência observada como na distribuição de fótons. | 22 |
| 3.3 | a) Forno, exemplo com fonte anisotrópica que gera uma modulação no mapa de temperatura. b) RCF, cenário pictórico onde há uma direção privilegiada no universo introduzindo um dipolo intrínseco. Nesse cenário devemos encontrar uma forma alternativa ao dipolo para identificar o movimento próprio. | 26 |

| | | |
|-----|---|----|
| 3.4 | Regiões para as quais a aproximação em primeira ordem da série de Taylor começa a falhar. Os valores se diferenciam dos resultados exatos por aproximadamente $\{0.4\%, 2\%, 10\%\}$ para $\beta\ell = \{0.2, 0.5, 1\}$, onde β é dado pelo eixo vertical. Figura retirada de Notari e Quartin, 2012. | 30 |
| 4.1 | Sinal-ruído esperado para o caso ideal do estimador com aberração e Doppler e os mapas SMICA do Planck (release de 2013 e 2018), considerando ruído e a aplicação de uma máscara. | 37 |
| 4.2 | Erro esperado para o estimador ideal, considerando apenas aberração, apenas Doppler e aberração+Doppler. Na esquerda o erro estatístico em termos de $\beta = 0.0012345$ (valor esperado para o dipolo), na direita o $\delta\theta$ esperado entre $\beta_{fiducial}$ e β_{medido} | 39 |
| 4.3 | Erro esperado para o estimador nos mapas SMICA (2018 e 2013) do Planck. As linhas tracejadas indicam os valores para 2013, e as contínuas para 2018. Na esquerda o erro estatístico em termos de $\beta = 0.0012345$ (valor esperado para o dipolo), na direita o $\delta\theta$ esperado entre $\beta_{fiducial}$ e β_{medido} | 39 |
| 4.4 | Comparação entre os $\delta\beta$'s esperado para os estimadores com e sem a correção da matriz Master. A linha tracejada indica o valor do estimador de $\delta\beta$ para o caso mascarado sem a correção de $M_{\ell_1\ell_2}$ (equação (4.20)) e a contínua para o estimador com a correção de $M_{\ell_1\ell_2}$ (equação (4.53)). As curvas para o efeito Doppler estão sobrepostas. | 46 |
| 4.5 | Relação entre os sistemas de coordenadas Galáctico e Cartesiano. | 48 |
| 5.1 | Representação do esquema de pixelização do HEALPix. Na figura superior esquerda temos os <i>pixels</i> base do HEALPix. Seguindo as figuras no sentido horário, temos a primeira sub-divisão dos pixels base, $N_{side} = 2$, e depois $N_{side} = 4$ e $N_{side} = 8$. Note que os centros dos <i>pixels</i> sempre formam anéis de latitude constante. | 51 |
| 5.2 | Boost na direção \hat{z} obtido com o synfast modificado e posteriormente rotacionado pelo programa alteraalm para a direção do dipolo ($l=264.02, b=48.25$). | 53 |

| | | |
|-----|--|----|
| 5.3 | a) Distribuição de 100 simulações. A esfera representa o módulo fiducial, que se espera recuperar na média das simulações. Os vetores na cor roxa representam as medidas obtidas pelo estimador sobre os $a_{\ell m}$'s obtidos das simulações. O vetor médio das simulações (roxo opaco) e o vetor fiducial (preto) estão sobrepostos. Os vetores vermelho, verde e azul simbolizam os eixos x , y e z respectivamente. O vetor fiducial representa o boost aplicado sobre os mapas. A distribuição dos vetores é simétrica em relação a uma rotação em torno do vetor preto, isto é, $\sigma_{\beta_x} = \sigma_{\beta_y} = \sigma_{\beta_z}$, como o esperado. b) O vetor médio das simulações coincide com o fiducial dentro da margem de erro esperada. | 54 |
| 5.4 | O ponto vermelho indica a direção do "boost efetivo" introduzido pela assimetria da máscara. Podemos simplesmente remover ele dos dados, ou modificar a máscara. | 55 |
| 5.5 | Comparação entre a máscara UT78(2018) original, figura a), e a simetrizada, figura b). Na figura b) indicamos com uma seta a nuvem de Magalhães em sua posição original e sua respectiva posição antipodal. | 57 |
| 5.6 | Comparação entre o melhor ajuste para o espectro de potência (em preto), os espectros dos mapas HMHS (linhas sólidas) e dos mapas HMHD (linhas pontilhadas), para cada <i>pipeline</i> ' do Planck 2018. Os mapas HMHD são dados pela diferença entre os mapas da primeira e segunda metade do período de observação do Planck, sendo uma boa estimativa do ruído e sistemáticos. Já os HMHS são dados pela soma. Figura adaptada de Planck Collaboration, 2018c. | 58 |
| 5.7 | Peso de cada banda do Planck de acordo com a escala angular para a combinação linear do <i>pipeline</i> SMICA. A legenda indica as frequências centrais das bandas em Ghz. | 61 |
| 5.8 | Pipeline NILC. A legenda da figura a) está no formato (Nº do Needlet)-(Valor Central). | 62 |

- 5.9 *Boost factor e dipole Doppler.* Na escala esquerda vemos o *boost factor*, já na direita obtemos o valor efetivo da modulação Doppler introduzida pela aproximação linear da temperatura, o *dipole Doppler*. Devemos fazer um *boost* contrário, com diferentes valores para cada escala angular, em vista de mitigar este sistemático. Observando os valores dos *boosts* necessários para a correção do sistemático (eixo vertical direito) fica evidente que os termos de segunda ordem da expansão em Taylor não são desprezíveis. 63
- 5.10 Fatiamos o espaço dos harmônicos em bins, variando ℓ de 10 em 10, mesma bina- gem que utilizaremos no estimador. Para cada bin efetuamos um *boost* contrário ao introduzido pela "linearização" da temperatura, a fim de recuperar o mapa sem o *dipole Doppler*. 63
- 5.11 *Pipeline* para a medida da velocidade peculiar e dipolo intrínseco. Retângulos são programas e paralelogramos são suas entradas e saídas de dados. **Paralelo- gramos tracejados** significam dados do Planck (onde Temperature maps são os mapas de Temperatura). Cores separam diferentes tipos de processos. **Amarelo** são programas que dependem de **considerações cosmológicas**, **Vermelho** são programas que **aplicam um boost sobre um mapa de pixels**, **Preto** são respon- sáveis pela **expansão em harmônicos esféricos**, **Violeta** programas que lidam com a **simetrização da máscara**, **Azul** programas que corrigem sistemáticos oca- sionados pelo **efeito da máscara nos C_ℓ 's** e **Laranja** aqueles que **mapeiam e re- movem o viés da máscara**. Entre o **mapa de pixel gaussiano com boost** (Boosted Gaussian Pixel Map) e o **Anafast**, podemos adicionar uma etapa intermediária **Anafast->Alteraalm->Synfast** para rotacionar os mapas, mudando a direção do *boost* para uma arbitrária. 64
- 5.12 Direções escolhidas para as simulações, definidas pelos centros dos *pixels* do es- quema de pixelização do HEALPix para $N_{SIDE} = 4$ 66

| | | |
|------|--|----|
| 5.13 | Comparação entre o erro estatístico observado nas simulações e o esperado teórico para o módulo de $\vec{\beta}$, de acordo com a escala angular limite utilizada no estimador e o tipo de boost aplicado nas simulações. A linha pontilhada indica os valores esperados teoricamente para o estimador com a máscara UT78(2018) simetrizada, a linhas tracejada os valores obtidos nas simulações e linha contínua os valores para o caso ideal. | 75 |
| 5.14 | Histogramas dos erros das medidas de β (estatístico+sistemático) para cada componente cartesiana, considerando diferentes tipos de boost. As linhas centrais, contínuas, indicam o valor médio, já as linhas pontilhadas, indicam o desvio padrão. | 76 |
| 5.15 | Histogramas das medidas de $\delta\theta$, δLat e $\delta Long$ para cada componente cartesiana, considerando diferentes tipos de boost, e histogramas 2D $\delta Lat \times \delta Long$. As linhas centrais, contínuas, indicam o valor médio, já as linhas pontilhadas, indicam o desvio padrão. | 77 |
| 5.16 | Erro sistemático para cada componente e cada tipo de boost, dependendo da direção fiducial. As direções são definidas pelas coordenadas dos centros dos pixels do esquema de pixelização do HEALPix para $N_{side} = 4$. Veja a figura 5.12 para um referência com relação ao número associado a cada direção. | 78 |
| 5.17 | Erro sistemático do módulo de $\vec{\beta}$ por direção, para o boost do tipo Aberração+Doppler. As barras indicam as margens de erro associadas a cada direção. Em vermelho apresentamos os resultados antes a remoção do viés, e em azul após a remoção do viés. | 79 |
| 5.18 | a) Viés mapeado para a máscara UT78 simétrica do <i>release</i> de 2018 do Planck em um mapa com os efeitos de aberração e Doppler. b) Viés residual após correções realizadas em nosso pipeline. As cores indicam o viés de $ \vec{\beta} $ (fator multiplicativo), os vetores são em sua origem as direções fiduciais dos <i>boosts</i> das simulações e apontam para as direções recuperadas pelo estimador para $\vec{\beta}$ (média das 64 simulações para cada direção). O círculo azul indica a direção do dipolo como medido em Planck Collaboration, 2018a. | 80 |

| | | |
|-----|---|----|
| 6.1 | Projeção de Mollweide com os resultados preliminares para Aberração e Doppler. N são os resultados para o mapa NILC e S para o mapa SMICA. Dipole indica o dipolo medido em Planck Collaboration, 2018a. As curvas em torno dos pontos indicam as regiões de 1σ e 2σ | 82 |
| 6.2 | Projeção de Mollweide com os resultados sem a correção do <i>dipole Doppler</i> . N são os resultados para o mapa NILC e S para o mapa SMICA. Dipole indica o dipolo medido em (Planck Collaboration, 2018a). | 82 |
| 7.1 | Erros esperados na medida da velocidade peculiar para os experimentos CORE, LiteBIRD e Planck, considerando os mapas de temperatura (TT), polarização (TE,ET,EE e BB), efeito Sunyaev-Zeldóvich térmico (tSZ) (Sunyaev e Zeldovich, 1970) e radiação infravermelha de fundo (CIB). O erro esperado para o experimento CORE é de $\sim 0.08\beta_{Dipolo}$, cerca de 29.6km/s. Figura extraída do artigo CORE Collaboration, 2018a. | 87 |
| A.1 | Mascara inversa utilizada para o processo de Inpainting. | 89 |
| A.2 | Mascara inversa pintada com um mapa gaussiano. | 90 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Dipolos obtidos pelos satélites COBE, WMAP e Planck em suas ultimas duas <i>releases</i> . Direções em coordenadas galácticas. Adaptada da tabela original em Planck Collaboration, 2018a. A conversão entre μK_{CMB} e Km/s será explicada em mais detalhes no capítulo 2, quando expandirmos em multipolos um mapa de temperatura com efeito Doppler aplicado, sendo o termo de dipolo encontrado igual a $\frac{\Delta T_{Dipolo}}{T_0} = \frac{v}{c} = \vec{\beta} $, onde T_0 é o monopolo. | 2 |
| 5.1 | Resultados ideais para $\ell_{max} = 1500$. Esse é o nosso limite inferior teórico para os erros nessa resolução para um dado experimento ideal. | 53 |
| 5.2 | Resultados ideais para $\ell_{max} = 2000$. Esse é o nosso limite inferior teórico para os erros nessa resolução para um dado experimento ideal. | 53 |
| 5.3 | Resultados com simulações após remoção do viés. | 74 |
| 6.1 | Resultados preliminares, $\ell_{max} = 1500$, com <i>dipole Doppler</i> removido para os mapas SMICA e NILC, componentes aberração e Doppler. $\delta\theta_{dipolo}$ é o ângulo entre a medida e o Dipolo medido em Planck Collaboration, 2018a, já $\vec{\beta} \cdot \hat{\beta}_{dipolo}$ é a projeção do vetor $\vec{\beta}$ na direção do dipolo. | 81 |
| 7.1 | Limite inferior para as incertezas das medidas com $\ell_{max} = 2000$. Esses são os resultados para um experimento com máscara porém sem ruído, com o acréscimo de ruído e sistemáticos as margens de erro irão aumentar. | 86 |

Capítulo 1

Introdução

A radiação cósmica de fundo (RCF) é uma janela para os primórdios do universo, atualmente o mais distante que podemos observar, quando o universo tinha aproximadamente 380 mil anos. Entender bem essa relíquia do universo é, até o momento, a forma mais efetiva de buscar respostas quantitativas a uma das perguntas mais antigas e profundas que a humanidade se faz, "*de onde viemos?*", e entender um pouco mais "*para onde vamos?*", pelo menos do ponto de vista cosmológico.

Escondido nas sutilezas da RCF existe uma grande quantidade de informação sobre os períodos anteriores, durante e posteriores à sua liberação. O que nos fornece diversos vínculos sobre os modelos cosmológicos.

A RCF é conhecidamente uma radiação com espectro de corpo negro quase perfeito e de temperatura $T = (2.7255 \pm 0.0006)K$ (Fixsen, 2009) incrivelmente isotrópica, preenchendo o céu com flutuações da ordem de uma parte em 10^5 , previstas em teoria e corroborando com o princípio cosmológico. Não surpreende então o dipolo, isoladamente a maior anisotropia, de uma parte em 10^3 , ser considerado quase inteiramente de origem cinemática (vide capítulos 2 e 3). Na figura 1.1 apresentamos a medida do dipolo realizada pelo satélite Planck em 2015.

Expandindo em multipolos um mapa de temperatura da RCF, sobre o qual se aplicou a modulação causada pelo efeito Doppler decorrente do movimento próprio do observador, o termo de dipolo é encontrado como sendo proporcional à velocidade deste referencial dividida pela velocidade da luz (vide capítulo 3). Por conseguinte, o dipolo tem sido igualado à velocidade $\vec{\beta}$ do observador da RCF com relação ao referencial de repouso da mesma.

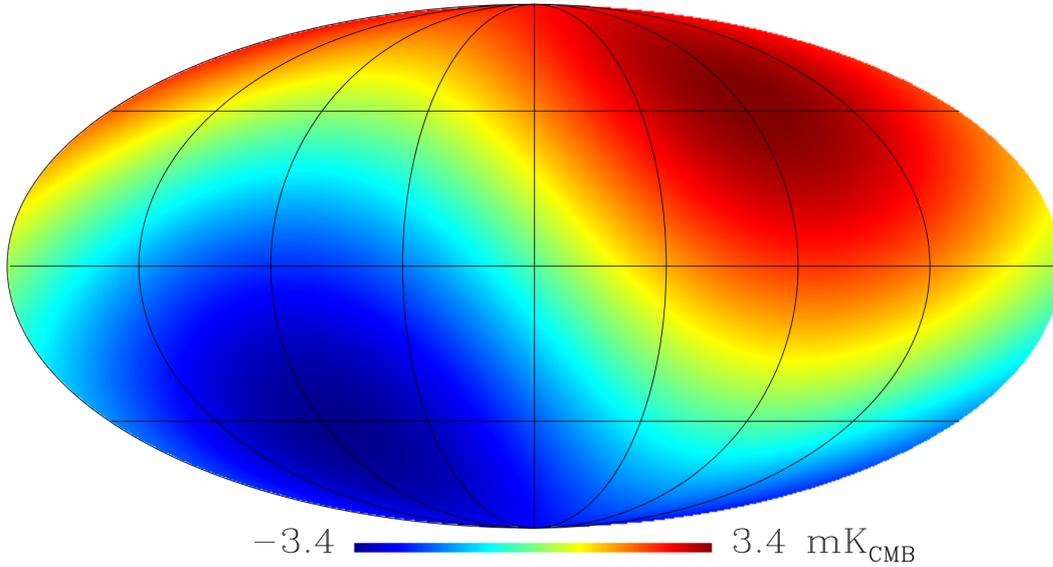


FIGURA 1.1: Dipolo medido no *release* de 2015 do satélite Planck em uma projeção de Mollweide. Essa grande modulação no sinal da RCF aponta aproximadamente para $l=264^\circ$ e $b=48^\circ$ em coordenadas galácticas.

A medida mais recente do Dipolo foi divulgada em 2018 pela colaboração do Planck (Planck Collaboration, 2018a), como visto na tabela 1.1 onde as medidas para o dipolo são dadas em μK e km/s , considerando como de costume o dipolo proporcional à $\vec{\beta}$. Nessa tabela também podemos verificar resultados obtidos pelos experimentos COBE, WMAP e Planck (2015 e 2018).

| Experimento | Amplitude [μK_{CMB}] | Velocidade [Km/s] | l [graus] | b [graus] |
|--------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| COBE | 3358 ± 24 | $369,4 \pm 2,6$ | $264,31 \pm 0,20$ | $48,05 \pm 0,11$ |
| WMAP | 3355 ± 8 | $369,10 \pm 0,88$ | $263,99 \pm 0,14$ | $48,26 \pm 0,03$ |
| Planck 2015 | $3364,5 \pm 2,0$ | $370,09 \pm 0,22$ | $264,00 \pm 0,03$ | $48,24 \pm 0,02$ |
| Planck 2018 | $3362,08 \pm 0,99$ | $369,82 \pm 0,11$ | $264,021 \pm 0,011$ | $48,253 \pm 0,005$ |

TABELA 1.1: Dipolos obtidos pelos satélites COBE, WMAP e Planck em suas ultimas duas *releases*. Direções em coordenadas galácticas. Adaptada da tabela original em Planck Collaboration, 2018a. A conversão entre μK_{CMB} e Km/s será explicada em mais detalhes no capítulo 2, quando expandirmos em multipolos um mapa de temperatura com efeito Doppler aplicado, sendo o termo de dipolo encontrado igual a $\frac{\Delta T_{Dipolo}}{T_0} = \frac{v}{c} = |\vec{\beta}|$, onde T_0 é o monopolo.

Porém esta prática comum de considerar o dipolo como sendo a velocidade com relação ao

referencial de repouso da RCF, presume que não há nada de natureza cosmológica relevante no mesmo, o que pode estar descartando um importante observável, o dipolo intrínseco.

Um dipolo intrínseco pode ser decorrente de diversos fenômenos, desde a Inflação (Ma, Gordon e Feldman, 2011, S. Turner, 1992) (restringindo certos modelos inflacionários), não-Gaussianidades primordiais (Roldan, Notari e Quartin, 2016), efeitos de campo magnético na superfície de recombinação, a existência de uma direção privilegiada do universo (Amendola et al., 2010; Notari e Quartin, 2012), efeitos de void (Cusin, Pitrou e Uzan, 2017) entre outras. Tal componente rica em informação merece ser investigada.

Uma possibilidade para se inferir este observável é investigar os efeitos que o movimento do referencial implicam nos multipolos de ordem superior ao dipolo, para conferir na forma de checagem cruzada e independente o valor de $\vec{\beta}$, e verificar assim se é compatível com o dipolo.

Um observador da RCF em movimento introduzirá sobre o mapa observado os efeitos de aberração e Doppler relativísticos, alterando a distribuição do sinal da RCF e inserindo uma assinatura que pode ser utilizada para separar o que no dipolo é de fato de natureza cinemática. Essa assinatura não se apresenta apenas no espaço de *pixels*, mas também no espaço dos harmônicos (o qual trataremos em mais detalhes nos capítulos 2 e 3), afetando multipolos superiores ao dipolo. O efeito de aberração relativística faz com que o ângulo de incidência dos fótons da RCF se altere. Já o efeito Doppler relativístico muda a frequência dos fótons. Esses dois efeitos modificam a temperatura observada.

Na figura 1.2 aplicamos, de forma exagerada, esses efeitos em um mapa de temperatura da RCF (no capítulo 5 veremos com mais detalhes como isso é feito). Como se deve observar, os efeitos em um mapa real da RCF serão pequenos devida a ordem de grandeza esperada para a velocidade, vide tabela 1.1. Nesta figura, consideramos um *boost*¹ com velocidade 600 vezes maior que a esperada para possibilitar a visualização.

Em 2014, a colaboração Planck (Planck Collaboration, 2014) mediu $\vec{\beta}$ usando um estimador baseado nos efeitos de aberração e Doppler relativísticos sobre as anisotropias da RCF no espaço dos harmônicos (Hanson e Lewis, 2009), para averiguar se era compatível com o valor do dipolo. A medida obtida em Planck Collaboration, 2014 foi de $\beta = 384 \text{ km s}^{-1} \pm$

¹termo utilizado para uma mudança de referencial seguindo as transformações de Lorentz.

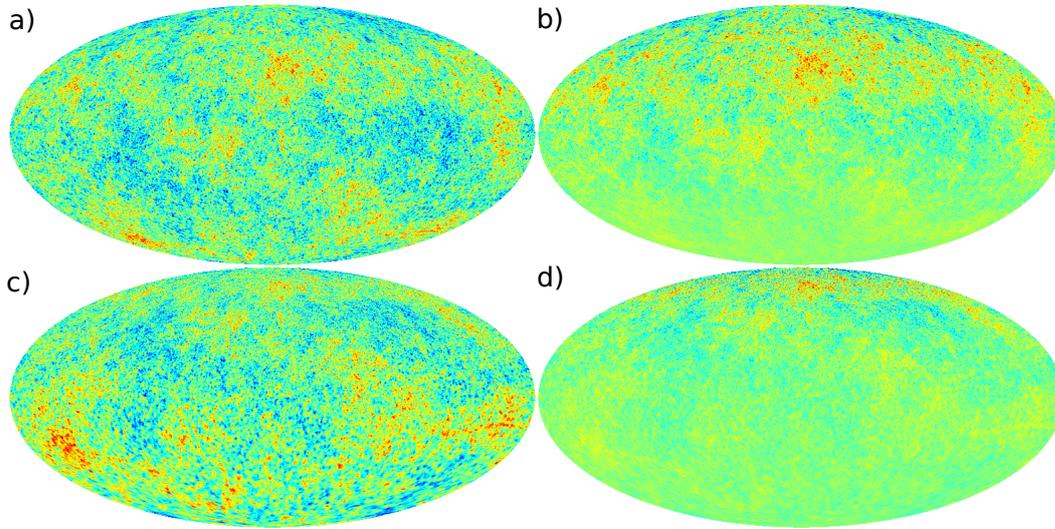


FIGURA 1.2: **a)** Mapa da RCF primordial, sem efeitos de aberração e Doppler. **b)** Mapa com efeito Doppler relativístico. **c)** Mapa com aberração relativística. **d)** Mapa com os efeitos de aberração e Doppler. Mapas simulados em versão modificada do Healpix, velocidade do referencial de $0.75c$.

$78kms^{-1}(estat.) \pm 115kms^{-1}(sist.)$ na direção do dipolo, isto coincide confortavelmente com o dipolo dentro da margem de erro de cerca de 36%.

Contudo, devido a sistemáticos introduzidos na análise e limitações do estimador, é possível que os resultados obtidos para $\vec{\beta}$ em Planck Collaboration, 2014 estejam enviesados para a direção e valor do Dipolo, como discutiremos em mais detalhes no capítulo 5 (metodologia).

Nesse trabalho desenvolvemos um novo *pipeline* para a medição do dipolo intrínseco. Utilizando outro estimador (Amendola et al., 2010; Notari e Quartin, 2012) (vide capítulo 4) mediremos o valor de $\vec{\beta}$ através de correlações que os efeitos de aberração e Doppler introduzem no espaço de harmônicos, entre componentes harmônicas vizinhas. Porém, daremos alguns passos além com relação aos resultados do Planck, através de uma análise minuciosa dos sistemáticos e nos beneficiando de algumas características de nosso estimador.

Essa dissertação estende os trabalhos Amendola et al., 2010; Notari e Quartin, 2012, onde as expectativas teóricas são demonstradas, indo para uma direção mais observacional. Estudamos o erro estatístico e sistemático e os possíveis comportamentos anômalos de nosso estimador realizando um grande conjunto de simulações numéricas de mapas da RCF com diferentes

efeitos relativísticos (apenas aberração, apenas Doppler e aberração+Doppler), diferentes máscaras (dos *releases* do Planck de 2013, 2015 e 2018), simetrização da máscara (com e sem simetria antipodal), *inpainting*, mapeamento do viés da máscara e com o tratamento mais apurado de sistemáticos incorporados na construção dos mapas do Planck para diferentes *pipelines* (a remoção de uma modulação Doppler sistemática na direção do dipolo, como demonstrado em Notari e Quartin, 2016). Buscamos assim a medida mais confiável possível do valor de $\vec{\beta}$ utilizando os dados do satélite Planck.

Constatou-se nesse estudo que a máscara é um dos fatores mais relevantes para o erro sistemático total da medida de $\vec{\beta}$. O efeito da máscara no espaço dos harmônicos é deveras complexo e relevante (Hivon et al., 2002; Pereira et al., 2010), podendo introduzir um viés na medida de $\vec{\beta}$ de milhares de km/s no módulo e até mesmo dezenas de graus na direção (vide capítulo 5). Mapear corretamente o viés introduzido pela máscara é uma parte crucial para a medição do dipolo intrínseco, não abordada nos trabalhos pioneiros do estimador (Amendola et al., 2010; Notari e Quartin, 2012).

Diferente do que foi feito em Planck Collaboration, 2014, não consideramos a priori que a medida deve ser encontrada na direção do Dipolo. Realizamos simulações em diversas direções, mapeando o comportamento do viés. Embora computacionalmente custoso, isso se demonstrou importante, pois o viés possui características que dependem da direção no céu, isto é, medi-lo em uma única direção não é o suficiente (vide capítulo 5).

Ademais, apesar do viés introduzido, as simulações com máscaras revelaram um erro estatístico inferior ao previsto teoricamente, como será visto em mais detalhes no capítulo 5 e 6. Parte disso acredita-se ser decorrente de correlações que não prevíamos ser relevantes teoricamente e que se tornaram evidentes apenas após o efeito caótico da máscara no espaço dos harmônicos. Como parte de nossas perspectivas futuras pretendemos entender melhor essas correlações e tirarmos melhor proveito delas. Isso significa abrir mão de algumas aproximações no estimador, como abordado em Notari e Quartin, 2012.

Outrossim, investigar o comportamento de nosso estimador em situações onde apenas um dos efeitos relativísticos está presente, aberração ou Doppler, se faz importante. Como demonstrado por Roldan, Notari e Quartin, 2016, a relação entre os valores de $\vec{\beta}$ medidos considerando

apenas Doppler ou apenas aberração e o valor do Dipolo pode indicar diferentes origens para o dipolo intrínseco. Encontrar uma discrepância entre o valor do Dipolo e o valor de $\vec{\beta}_{Doppler}$ (medida de $\vec{\beta}$ utilizando apenas correlações introduzidas pelo efeito Doppler) implica a presença de não-Gaussianidades primordiais. Já uma discordância entre o valor do Dipolo e $\vec{\beta}_{Aberração}$ (medida de $\vec{\beta}$ utilizando apenas correlações introduzidas pelo efeito de Aberração) pode indicar um potencial gravitacional dipolar de larga escala.

Com o pipeline finalizado, nosso objetivo imediato foi aplicar o mesmo nos dados mais atuais do satélite Planck (vide capítulo 6), obtendo as medidas para $\ell_{max} = 1500$ (termo limite da soma de harmônicos esféricos), inferior a resolução angular usada em Planck Collaboration, 2014 ($\ell_{max} = 2000$). Para resoluções acima de $\ell_{max} = 1500$ a assimetria de ruído e assimetria de feixe gaussiano devem ser consideradas. Esta análise ainda está em andamento, de forma que os resultados submetidos à publicação considerarão estes efeitos e a resolução angular máxima será de $\ell_{max} = 2000$. Para a dissertação vamos utilizar $\ell_{max} = 1500$, onde o ruído ainda é subdominante (como veremos em 5.5) e esperamos que simulações ideais com máscara sejam uma boa aproximação.

Apesar da aposentadoria do satélite Planck, um marco no estudo da RCF, para o futuro próximo, novos experimentos nos fornecerão medidas com resoluções angulares maiores e melhores mapas de polarização, como o Observatório Simons (Simons Observatory Collaboration, 2018), os satélites LiteBIRD (LiteBIRD collaboration, 2018) e COre (CORE Collaboration, 2018b), e o Balão PIPER (Gandilo et al., 2016). Com isso conseguiremos obter um valor cada vez mais preciso para $\vec{\beta}$.

Esta dissertação está organizada na seguinte forma: no capítulo 2, introduzimos brevemente os princípios da RCF e do espaço harmônico; no capítulo 3 apresentamos os efeitos de aberração e Doppler relativísticos, sobre um campo de radiação, de temperatura e sobre o espaço harmônico, cruciais para o entendimento dos capítulos posteriores; no capítulo 4, demonstramos e analisamos o estimador que será utilizado para medir o dipolo cinemático, além dos acoplamentos ocasionados pelo mascaramento do céu; no capítulo 5 apresentamos os métodos utilizados na geração das simulações numéricas e na análise do viés da máscara, o

conceito de máscara simétrica antipodal, o conceito de *boost factor* e como corrigi-lo, e os resultados para o nosso método quando aplicado em simulações numéricas (sem ruído, i.e. resultados ideais para o método considerando os efeitos da máscara apenas); no capítulo 6 expomos os resultados preliminares para os dados observacionais do Planck (SMICA e NILC); no capítulo 7 concluímos e apresentamos as perspectivas futuras.

Há ainda um apêndice com tema complementar; o apêndice A traz resultados preliminares usando *Inpainting* (técnica utilizada para pintar o céu onde houve mascaramento)

Capítulo 2

A Radiação Cósmica de Fundo

2.1 O espectro da RCF e a superfície de recombinação

A RCF é uma relíquia advinda da época em que o universo tinha aproximadamente 380 mil anos. Antes de sua liberação o universo era opaco devido à sua alta temperatura e densidade, sendo a RCF a mais antiga radiação fotônica que podemos observar ¹.

Na era pré RCF o universo era constituído, em sua grande maioria, por matéria escura² e um plasma de fótons, íons e elétrons livres. Devido à grande temperatura e densidade desse fluido não era possível formar átomos, pois eles eram constantemente ionizados pelos fótons. Os fótons por sua vez também não conseguiam se propagar por grandes distâncias, devido à grande disponibilidade de elétrons livres eles sofriam de forma frequente espalhamento Compton. Por sua vez, os elétrons, prótons e íons interagem fortemente via espalhamento Coulombiano. Esse plasma altamente acoplado atingiu o equilíbrio térmico, e em consequência, os fótons se distribuíam com um espectro de corpo negro.

Com o tempo o universo expandiu-se e esfriou, reduzindo a taxa de interação entre os elétrons e fótons. Quando tinha aproximadamente 380 mil anos tornou-se frio o suficiente para formar os primeiros átomos, em sua maioria de Hidrogênio (~ 75%) e Hélio (~ 25%). Chamamos esse processo de *recombinação*. Consequentemente o número de elétrons livres caiu rapidamente, de forma que o livre caminho médio dos fótons saltou para o tamanho do universo observável, liberando a radiação que chamamos de *radiação cósmica de fundo*, em outras

¹Os neutrinos e ondas gravitacionais têm a possibilidade de serem observados em períodos anteriores a RCF.

²Um tipo exótico de matéria que interage somente gravitacionalmente. Para um resumo mais detalhado da natureza e evidências observacionais veja (Roos, 2010; Bergstrom, 2012).

palavras, o universo se tornou transparente (como ilustrado na figura 2.1). Com isso o forte acoplamento entre radiação e matéria se desfez. À esta região no espaço-tempo onde ocorreu a liberação dos fótons da RCF damos o nome de *última superfície de espalhamento*. Neste momento, a composição do universo era de $\sim 70\%$ matéria escura, $\sim 20\%$ fótons e $\sim 10\%$ matéria ordinária.

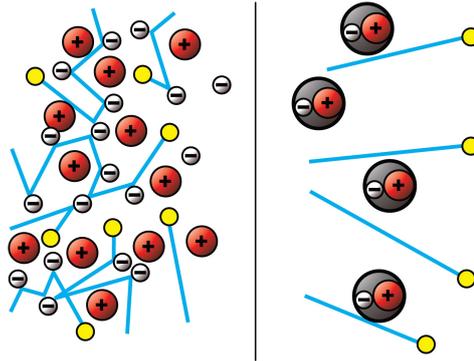


FIGURA 2.1: À esquerda o plasma de fótons (amarelo), elétrons (cinza) e íons (vermelho) anterior a recombinação. À direita a formação dos primeiros átomos durante a recombinação e o aumento repentino do livre caminho médio dos fótons, liberando a RCF. Figura adaptada do site writescience, autor Shane L. Larson.

A medição mais precisa da forma do espectro da RCF foi realizada pelo experimento FIRAS da Nasa, obtendo um espectro de corpo negro na faixa de micro-ondas praticamente perfeito de temperatura $T = (2.7255 \pm 0.0006)K$ (Fixsen, 2009), como visto na figura 2.2.

Embora essa temperatura pareça demasiadamente baixa para a ionização do Hidrogênio, a temperatura que observamos da RCF no universo atual é diferente da que ocorreu na superfície de espalhamento. Levando em conta a expansão do universo, encontramos que a relação entre o *redshift* z (desvio para o vermelho da radiação observada devido à expansão do universo), a temperatura observada e a temperatura T_0 na superfície de espalhamento é dada por $T(z) = T_0(1 + z)$. O *redshift* estimado para a RCF é de $z \approx 1100$, sendo assim na última superfície de espalhamento a temperatura era de $T_0 \approx 3000K$.

Uma característica importante da RCF é sua incrível isotropia, como visto na figura 2.3, a menos de pequenas oscilações de uma parte em 100000 observamos a temperatura de $T = (2.7255 \pm 0.0006)K$ em todas as direções do céu. A única exceção é uma modulação no céu que introduz uma anisotropia de uma parte em 1000 (como mostrado na figura 1.1), o que se espera

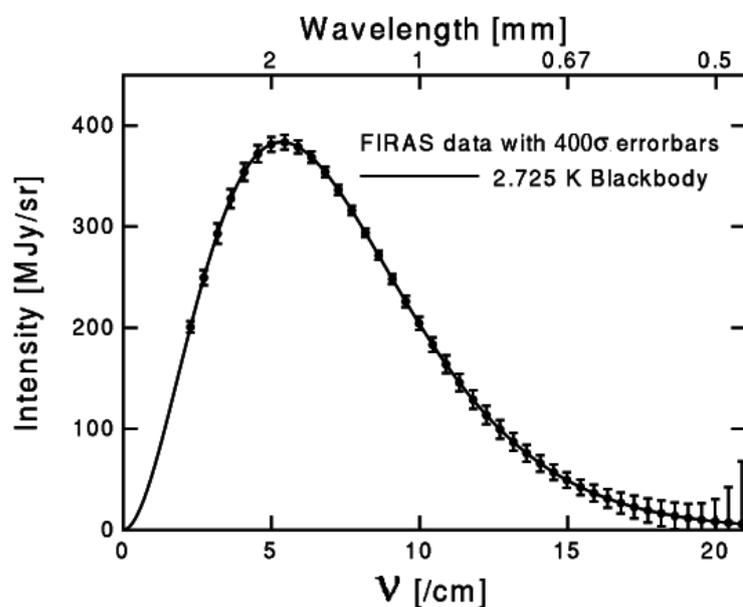


FIGURA 2.2: Comparação entre a radiação de corpo negro esperada para uma temperatura de $T = 2.725$ (linha sólida) e o espectro da RCF observado pelo experimento FIRAS (COBE). As barras de erro foram multiplicadas por 400 para se tornarem visíveis.

ser quase totalmente devido ao movimento do referencial que observa a RCF, como veremos em mais detalhes no capítulo 3.

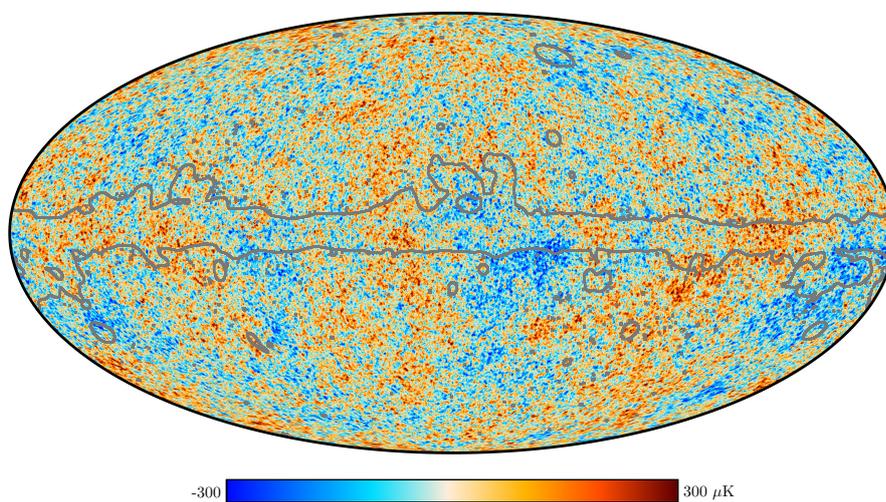


FIGURA 2.3: Mapa de temperatura da RCF obtido pelo satélite Planck (*release* de 2018) utilizando o *pipeline* SMICA. As cores indicam a amplitude das anisotropias. As regiões delimitadas pelas curvas cinzas indicam regiões que devem ser mascaradas, não confiáveis para uso científico. Figura retirada de material de divulgação da ESA e colaboração do Planck para o *release* de 2018 do Planck.

Essas pequenas anisotropias da RCF serviram como as "sementes primordiais" para o colapso gravitacional da matéria, o que levou à formação de estruturas e com o tempo o surgimento de galáxias, estrelas, planetas e, conseqüentemente, os seres humanos.

2.2 O espaço harmônico

Normalmente quando estudamos a RCF não estamos interessados em sua temperatura, mas sim em seus desvios da média de acordo com a direção no céu, ou também chamado "contraste de temperatura", $\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0}$, onde θ é a latitude, ϕ a longitude do ponto no céu, T_0 é a temperatura média e $\Delta T(\theta, \phi) = T(\theta, \phi) - T_0$. Esse interesse se deve pois as características estatísticas dessas anisotropias podem nos fornecer vínculos para os modelos de evolução do universo.

Uma maneira prática de trabalharmos com a RCF é no espaço de Fourier, isto é no domínio da frequência das oscilações de temperatura na última superfície de espalhamento. Nesse espaço podemos estudar as flutuações com diferentes frequências de forma independente, pois considerando as oscilações de temperatura descritas pela teoria linear de perturbação os diferentes modos são desacoplados. Como observamos a esfera celeste ao nosso redor o espaço de Fourier pode ser descrito pelos harmônicos esféricos.

2.2.1 Harmônicos esféricos

Os harmônicos esféricos são funções oriundas da solução da equação de Laplace, $\nabla^2 \psi = 0$, em coordenadas esféricas. A definição é dada por:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell m}(\cos\theta) e^{im\phi} \quad , \ell \geq 0, |m| \leq \ell, \quad (2.1)$$

onde $P_{\ell m}$ são os polinômios associados de Legendre. Uma propriedade importante dos $Y_{\ell m}$ é a ortogonalidade, isto é:

$$\int_{\Omega} Y_{\ell m} Y_{\ell' m'}^* d\Omega = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}, \quad (2.2)$$

onde $d\Omega = \sin\theta d\phi d\theta$.

É possível expandir qualquer campo escalar mapeado sobre uma esfera usando harmônicos esféricos, assim como uma função do espaço plano em termos de uma série de Fourier. Podemos então obter $\Delta T(\theta, \phi)/T_0$ como um somatório dos harmônicos esféricos:

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.3)$$

onde os coeficientes dos harmônicos são obtidos utilizando a ortogonalidade dos harmônicos esféricos:

$$a_{\ell m} = \int_{\Omega} \frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_0} Y_{\ell m}^* d\Omega. \quad (2.4)$$

Somando uma quantidade infinita de modos dos esféricos harmônicos podemos recuperar o mapa de temperatura original, como na figura 2.4.

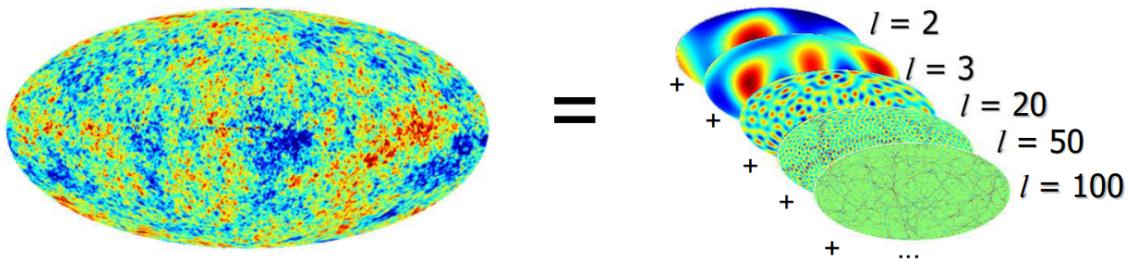


FIGURA 2.4: Decomposição em harmônicos esféricos da RCF, como na equação (2.3). À direita representamos as diferentes componentes da decomposição em harmônicos esféricos (equação (2.3)) usados na decomposição do mapa de anisotropias da RCF, à esquerda. Figura retirada de material didático feito por Hans Kristian Eriksen.

Podemos limitar o número de harmônicos esféricos utilizados no somatório de acordo com a resolução angular desejada para o mapa. Grosso modo, a escala angular θ é definida por $\theta \sim 180^\circ/\ell$. Já a componente m determina a dependência longitudinal e a orientação axial dos harmônicos esféricos, conforme a equação (2.1).

2.2.2 Propriedades estatísticas da RCF

Os modelos cosmológicos atuais assumem que as estruturas que observamos na RCF e na distribuição de matéria no universo são decorrentes de flutuações quânticas que ocorreram nos

primeiros instantes do universo. Dada a natureza estocástica dos processos quânticos, o nosso universo pode ser considerado apenas uma das potenciais realizações do *ensemble* estatístico originado dessas flutuações. Desta forma, qualquer modelo baseado nessa hipótese não será capaz de prever a realização particular em que vivemos ($a_{\ell m}$'s), mas sim suas propriedades estatísticas.

O atual modelo padrão da cosmologia supõem um período pré-RCF, o qual chamamos de inflação ³, cujos mecanismos preveem que os modos $a_{\ell m}$ são variáveis aleatórias gaussianas. Ademais, o modelo padrão considera também o *princípio cosmológico*, isto é, que a distribuição do conteúdo do universo é homogênea e isotrópica em largas escalas. A RCF é em si uma forte evidência deste princípio, como visto na figura 2.3. Sendo assim, essas flutuações primordiais não podem depender da posição (homogeneidade) e direção (isotropia). Dessa forma o nosso universo advém de um *ensemble* de flutuações estatisticamente homogêneas e isotrópicas.

Uma maneira interessante de se estudar essas propriedades estatísticas é através das funções de correlação. A função de correlação de dois pontos da variável aleatória $a_{\ell m}$ é definida pelo valor esperado $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle$.

Isto posto, a homogeneidade estatística implica que que a correlação não depende da posição e a isotropia implica que m 's diferentes não são correlacionados, assim podemos obter:

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_{\ell}, \quad (2.5)$$

onde C_{ℓ} é o espectro de potência angular, o qual falaremos em mais detalhes na próxima seção. Neste paradigma, onde os $a_{\ell m}$'s são variáveis aleatórias gaussianas, é possível demonstrar que todas as funções de correlação podem ser determinadas pela função de correlação de dois pontos (o que é conhecido na literatura como teorema de Isserlis ou Wick), ou seja, os C_{ℓ} 's. Em decorrência deste resultado podemos verificar que todas as funções de correlação ímpares devem ser nulas. Com isso uma forma simples de checar a hipótese de gaussianidade é através de funções de correlação de 3 pontos, $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} a_{\ell'' m''} \rangle$, testando se são nulas ou não. Como

³Para mais detalhes sobre a inflação veja (Linde, 2008; Linde, 2015; Tsujikawa, 2003)

verificado extensivamente pela colaboração Planck (Planck Collaboration, 2016; Planck Collaboration, 2018e), a RCF observada é compatível com a oriunda de perturbações primordiais gaussianas, portanto concordando com as previsões do modelo padrão.

Em vista dessas características estatísticas, de homogeneidade e isotropia, é esperado também que os $a_{\ell m}$'s observados da RCF sejam todos de mesma ordem. De fato, para $\ell \geq 2$ temos todas anisotropias da ordem $a_{\ell m} \sim 10^{-5}$.

Para tornar claro, de agora em diante este texto considerará as propriedades estatísticas oriundas das hipóteses feitas no modelo padrão da cosmologia (como discutidas nesta seção), a saber, **isotropia estatística, homogeneidade estatística e gaussianidade**.

2.2.3 O espectro de potência angular e vínculos cosmológicos

O espectro de potência angular C_ℓ é definido como:

$$C_\ell = \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2. \quad (2.6)$$

Ele nos fornece a amplitude das flutuações de temperatura em diferentes escalas angulares. Como visto na seção anterior, no caso gaussiano todas as funções de correlação não nulas podem ser decompostas em termos dos C_ℓ 's, portanto eles contêm toda a informação cosmológica. Logo, um modelo cosmológico bem sucedido deve conseguir prever o espectro de potência angular.

O modelo cosmológico padrão é capaz de ajustar uma curva para C_ℓ a partir de 6 parâmetros fundamentais:

- Ω_b - densidade de bárions;
- Ω_c - densidade de matéria escura;
- τ - profundidade óptica da reionização;
- h - parâmetro de Hubble ($H_0 / 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$);
- n_s - índice espectral;

- Δ_R^2 - amplitude de flutuação da curvatura.

A figura 2.5 apresenta o espectro de potência angular observado para a RCF pelo satélite Planck e o melhor ajuste utilizando os parâmetros cosmológicos citados. Como veremos a seguir os picos observados são decorrentes das oscilações acústicas.

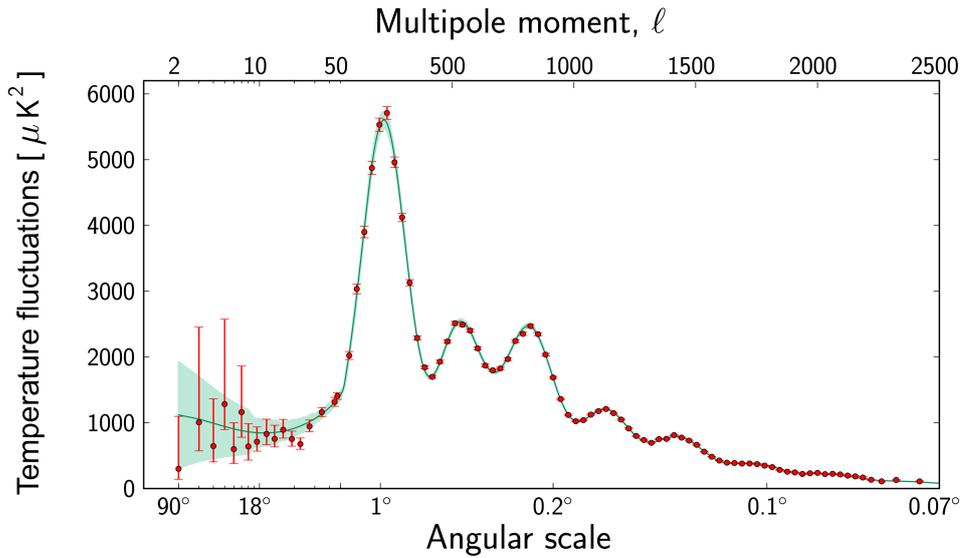


FIGURA 2.5: Espectro de potência angular obtido pelo satélite Planck. A curva em verde escuro é o melhor ajuste para o modelo cosmológico padrão utilizando os 6 parâmetros citados e a região verde claro ilustra a variância cósmica (vide seção 2.2.4). Figura retirada de material de divulgação da ESA e colaboração Planck.

2.2.4 Variância cósmica

A variância cósmica é uma incerteza fundamental resultante do fato de que podemos observar apenas uma realização do universo. Isso significa que o espectro angular de potência observado será ligeiramente diferente se visto de outro ponto do universo. Quanto maior o valor de ℓ menor será a variância, pois o número de componentes aumenta (são $2\ell + 1$ $a_{\ell m}$'s para cada C_ℓ) e portanto teremos mais informação, restringindo mais o valor de C_ℓ . A variância cósmica pode ser calculada como a incerteza para C_ℓ dado que os $a_{\ell m}$'s são variáveis aleatórias gaussianas e

cada C_ℓ é descrito por uma distribuição χ^2 com $2\ell + 1$ graus de liberdade (veja Scott e Smoot, 2010), logo:

$$\frac{\Delta C_\ell}{C_\ell} = \sqrt{\frac{2}{2\ell + 1}}. \quad (2.7)$$

Na figura 2.5 a região verde claro representa a variância cósmica.

2.3 Oscilações acústicas

As pequenas anisotropias que observamos na RCF têm como origem as oscilações acústicas na última superfície de espalhamento. Anteriormente ao desacoplamento do plasma de fótons, elétrons e íons, a matéria escura já estava livre para se sujeitar a instabilidade gravitacional. Por interagir apenas gravitacionalmente, essa componente exótica pode se moldar rapidamente em regiões de sobre-densidade, as quais atraíram os elétrons, íons e fótons.

Enquanto a gravidade comprimia o plasma de elétrons e íons em regiões de maior densidade, o aumento da temperatura e pressão do gás em conjunto com a pressão de radiação dos fótons, resistia a essa compressão, funcionando como uma força restauradora. Assim surgiram as oscilações acústicas, oriundas do "cabo-de-guerra" entre a gravidade e as forças restauradoras.

Essas oscilações ocorriam em diversas frequências. Considerando essas flutuações descritas pela teoria de perturbação linear, os diferentes modos eram desacoplados, dessa forma podemos analisá-los individualmente. Na figura 2.6 vemos que diferentes modos chegam ao período de recombinação (quando são finalmente "congelados") em diferentes fases, dado que todas as oscilações se propagam com a mesma velocidade (velocidade do som no meio plasmático) e iniciaram conjuntamente. Chamamos de modo fundamental aquele cuja frequência é tal que completou apenas meia oscilação, atingindo a fase de recombinação em seu máximo de contração, o que origina o primeiro pico (da esquerda para a direita) da figura 2.5.

Já o segundo pico, como visto na figura 2.6, tem metade do comprimento de onda do primeiro, chegando à recombinação em uma fase oposta, um ponto de rarefação, de forma que o

pico é menos pronunciado que o primeiro. Podemos ainda continuar este raciocínio para os próximos picos.

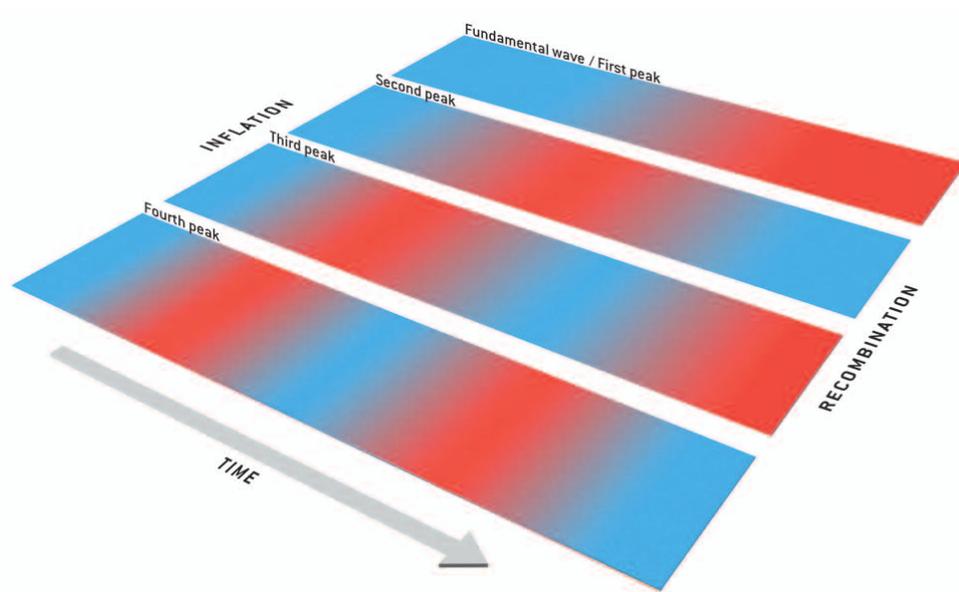


FIGURA 2.6: Picos das oscilações acústicas. Figura retirada de material de divulgação da Scientific American (Special Report de Fevereiro de 2004), escrito por Wayne Hu e Martin White e ilustrações de Bryan Christie Design.

Para os modos com frequência alta, logo pequena escala angular (ℓ alto), as amplitudes das oscilações começam a ser da mesma ordem de grandeza do livre caminho médio dos fótons, de forma que parte da força restauradora varia entre as oscilações, devido à difusão de fótons. Com isso essas oscilações são suavizadas, como é visto na calda descendente que se prolonga para a direita no gráfico 2.5. Este fenômeno é chamado de *Silk damping* (Silk, 1968). Já para grandes oscilações, grande escala angular, a esquerda do modo fundamental, não houve tempo para oscilar, devido a baixa frequência, de forma que suas características refletem as condições iniciais impostas no período inflacionário.

Após a recombinação essas oscilações foram "congeladas", isto é, não puderam continuar a oscilar pois o fluido se desacoplou, de forma que podemos observá-las. A princípio poderia se imaginar que as regiões mais densas seriam observadas como as mais quentes enquanto as menos densas como as mais frias. Porém ao serem liberados, os fótons da RCF advindos de regiões mais densas precisaram vencer um potencial gravitacional maior que os de regiões

menos densas, e portanto sofreram um maior redshift gravitacional, reduzindo a frequência do fóton e com isso a temperatura observada. Este efeito da relatividade geral é chamado de efeito Sachs-Wolfe (SW).

O efeito SW atua com o sinal oposto às flutuações de temperatura e supera as mesmas. Dessa forma regiões da última superfície de espalhamento mais quentes e densas que a média são observadas como mais frias que a média, enquanto regiões mais frias que a média, são vistas como mais quentes que a média.

Apresentamos aqui apenas uma introdução simplista e qualitativa das oscilações acústicas, para um tratamento mais rigoroso veja (Dodelson, 2003).

Capítulo 3

Efeitos da aberração e Doppler sobre a RCF

O objetivo deste capítulo é expor as demonstrações dos efeitos de uma transformação de Lorentz, que é uma mudança de referencial nas bases da relatividade especial (RE), sobre um campo de temperatura. Iniciaremos com um campo de radiação antes de mudarmos para um campo de temperatura, onde vamos obter a relação entre os harmônicos esféricos do mapa de temperatura primordial e do mapa com os efeitos de aberração e Doppler.

3.1 Efeito sobre um campo de radiação

Como dito no capítulo 1, o fato de estarmos em movimento relativo ao referencial de repouso da RCF introduz os efeitos de aberração e Doppler relativísticos no mapa de temperatura (e polarização) da RCF. Para melhor ilustrar isso imagine um observador no interior de uma casca esférica que emite radiação de corpo negro isotropicamente, vide figura 3.1. A casca esférica representa a RCF em um determinado instante.

Podemos definir inicialmente o referencial de repouso da RCF como o referencial onde ela é isotrópica, isto é, o dipolo é nulo (por enquanto iremos ignorar a possibilidade de um dipolo intrínseco).

Um referencial em movimento enxergará um campo de radiação diferente. O efeito Doppler altera a frequência dos fótons (vide figura 3.2.a) e a aberração o ângulo de chegada dos fótons

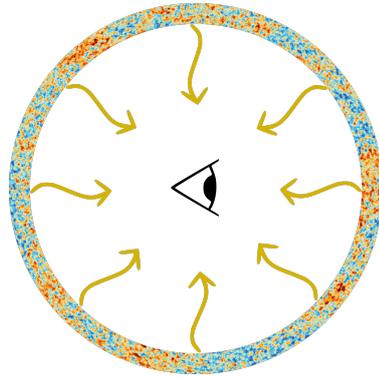


FIGURA 3.1: RCF no referencial de repouso, intrinsecamente isotrópica.

(vide figura 3.2.b). Como ambos atuam temos o resultado da figura 3.2.c. Na figura 1.2 vemos esses efeitos de uma forma mais quantitativa (com simulações numéricas).

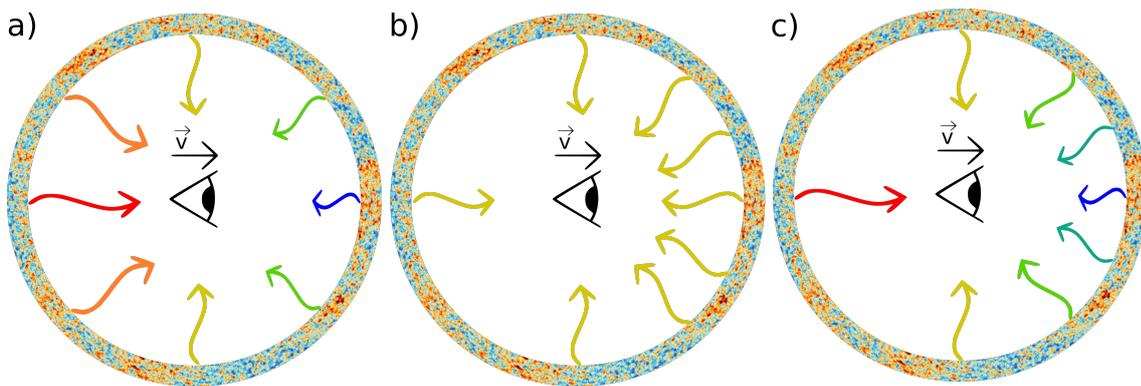


FIGURA 3.2: a) Efeito Doppler relativístico, a frequência dos fótons se modifica, aumentando no sentido do movimento (*blueshift*) e diminuindo no sentido oposto (*redshift*). Repare que nesse caso a radiação não é isotrópica em frequência, temos frequências diferentes para diferentes direções, porém é isotrópica na distribuição de fótons, recebemos o mesmo número de fótons em todas as direções. b) Aberração relativística, a frequência dos fótons não se altera, mas a direção dos fótons sim, logo a distribuição de fótons não é mais isotrópica, mas em todas as direções observamos a mesma frequência. c) Juntos os efeitos de Doppler e Aberração fazem com que não tenhamos mais isotropia tanto na frequência observada como na distribuição de fótons.

Para o efeito Doppler relativístico previsto pela relatividade especial, a relação entre a frequência ν' observada e ν emitida é dada por:

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma(1 - \hat{n}' \cdot \vec{\beta})} \quad (3.1)$$

ou alternativamente:

$$v' = v\gamma(1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta}), \quad (3.2)$$

onde $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$, sendo v a velocidade do referencial e c a velocidade da luz, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, \hat{n}' é o vetor unitário que define a direção observada e \hat{n} a direção original do fóton.

Já a aberração converge os raios luminosos na direção e sentido do movimento próprio do observador, de forma que a relação entre \hat{n}' do fóton observado e \hat{n} prevista pela relatividade especial é da forma:

$$\hat{n}' = \frac{\hat{n} \cdot \hat{\beta} + \beta}{1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \hat{\beta} + \frac{[\hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{\beta})\hat{\beta}]}{\gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \hat{n})}, \quad (3.3)$$

onde $\hat{\beta}$ é o vetor unitário que indica a direção e sentido de $\vec{\beta}$.

Podemos usar a radiação observada para construir um mapa do campo de radiação. Se soubermos que o mapa é intrinsecamente isotrópico, observando a modulação gerada pelo efeito Doppler seríamos capazes de encontrar a velocidade do referencial. Sabendo a velocidade é possível mudarmos para o referencial de repouso do campo de radiação (uma mudança de referencial na RE é comumente chamada de *boost*).

Nesses casos sabemos a priori que as fontes são isotrópicas, dessa forma é simples verificar o efeito do movimento do referencial e recuperar o campo de radiação primordial, isto é, sua verdadeira distribuição no referencial de repouso.

Esse conceito de referencial de repouso na RCF poderia ser enganosamente confundido com um referencial absoluto para o universo. Ele é um referencial preferencial da RCF, e apenas dela. Poderíamos alterar a fonte de radiação para a superfície interna de um forno isotropicamente aquecido, e este também teria um referencial de repouso igualmente válido, assim como um observador em movimento dentro dele mediria um campo de radiação com os mesmos efeitos relativísticos. Além disso, esse referencial de repouso varia lentamente com o tempo, conforme acessamos fótons de outras regiões da última superfície de espalhamento.

3.2 Efeito sobre um mapa de temperatura

Como trabalhamos com mapas de temperatura gerados a partir de medições de radiação, devemos saber como esses efeitos relativísticos se propagam para a medição de temperatura. Tendo a RCF o espectro de um corpo negro, podemos facilmente medir uma temperatura associada para um conjunto de medições de radiação em diferentes frequências. Para construção de um mapa de temperatura é necessária então a conversão entre a intensidade $I'(v', \hat{n}')$ da radiação medida e a temperatura termodinâmica $T(\hat{n})$.

Dado que a intensidade se transforma entre referenciais da seguinte forma (Challinor e Leeuwen, 2002):

$$I'(v', \hat{n}') = \left(\frac{v'}{v}\right)^{3d} I(v, \hat{n}), \quad (3.4)$$

onde $d = 1$ caso consideremos o efeito Doppler e aberração e $d = 0$ quando consideramos apenas aberração.

Nos atuais experimentos de RCF as medidas de intensidade são convertidas em medidas de temperatura termodinâmica utilizando a seguinte relação:

$$T = \frac{I(v, \hat{n}) e^{v/T} - 1}{v^2 \frac{v}{T}}, \quad (3.5)$$

onde $T = T(\hat{n})$. Resolvendo esta equação para T obtemos:

$$T(\hat{n}) = \frac{v}{\log(1 + v^{3d}/I(v, \hat{n}))}, \quad (3.6)$$

para um outro referencial:

$$T'(\hat{n}') = \frac{v'}{\log(1 + v'^{3d}/I'(v', \hat{n}'))}, \quad (3.7)$$

Mas, pela equação (3.4), $\frac{v^{3d}}{I(v)}$ é invariante em relação à mudança de referencial, isto é $\frac{v^{3d}}{I(v)} = \frac{v'^{3d}}{I'(v')}$, de forma que $\log(1 + v^{3d}/I(v, \hat{n})) = \log(1 + v'^{3d}/I'(v', \hat{n}'))$, então:

$$T'(\hat{n}') = \left(\frac{v'}{v}\right)^{3d} T(\hat{n}), \quad (3.8)$$

Logo, aplicando a equação (3.2) em (3.8), temos que um referencial com velocidade $\vec{\beta}$, em relação a um campo de radiação isotrópico de temperatura T_0 , produzirá os efeitos de aberração e Doppler no mapa de temperatura observado, da forma:

$$T'(\hat{n}') = [\gamma(1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta})]^d T(\hat{n}), \quad (3.9)$$

onde T' é a temperatura observada e T a original, e a relação entre \hat{n}' e \hat{n} é dada por (3.3). Encontramos então que T não depende de ν . Como deveria ser, pois as medidas de $I(\nu, \hat{n})$ com diferentes ν serão diferentes parâmetros da mesma curva de espectro de corpo negro determinada pela temperatura T .

Podemos ainda escrever de forma semelhante a (3.1) (porém incluindo a aberração):

$$T'(\theta') = \frac{T_0}{\gamma(1 - \beta \cos \theta')}, \quad (3.10)$$

onde θ' é o ângulo entre a velocidade do observador e a direção observada \hat{n}' . Expandindo em multipolos obtemos:

$$T'(\theta') = T_0(1 + \beta \cos \theta' + \frac{\beta^2}{2} \cos 2\theta' + \mathcal{O}(\beta^3)). \quad (3.11)$$

Isso é, **o termo de dipolo é proporcional à β** (nesse caso não temos um vetor $\vec{\beta}$ pois expandimos explorando a simetria em torno da direção de *boost*, já conhecida). Dessa forma para medirmos a velocidade do referencial no caso de um mapa de temperatura intrinsecamente isotrópico, basta encontrarmos o valor do dipolo. Como visto em (3.8) e (3.11), independentemente da aberração, a modulação Doppler introduz um dipolo de valor β .

Para o caso da expansão em harmônicos esféricos do mapa, o dipolo será composto por três componentes, a_{1-1} , a_{10} e a_{11} , sendo apenas as últimas duas independentes (ou equivalentemente, as duas primeiras). Visto que os esféricos harmônicos podem ser relacionados com as coordenadas cartesianas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Y_{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} z, \\ Y_{11} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (x + iy). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Podemos então encontrar o vetor dipolo \vec{D} como:

$$\vec{D} = \left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \text{Re}[a_{11}], \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \text{Im}[a_{11}], \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \text{Re}[a_{10}] \right).^1 \quad (3.13)$$

Com \vec{D} medido saberemos a direção e módulo de $\vec{\beta}$. Dessa forma, sabendo a velocidade do referencial obtida através do dipolo podemos recuperar o mapa de temperatura original com uma simples mudança de referencial.

Entretanto, digamos que no lugar de um campo de radiação isotrópico, tenhamos uma fonte de calor anisotrópica que gere uma modulação do tipo Doppler na temperatura observada no interior do forno, como na figura 3.3.a. Ou em um caso mais cosmológico, uma direção privilegiada para a distribuição de matéria ou qualquer outro efeito que gere uma modulação no céu, conforme a figura 3.3.b. Isto é, se considerarmos casos onde tenhamos um dipolo intrínseco.

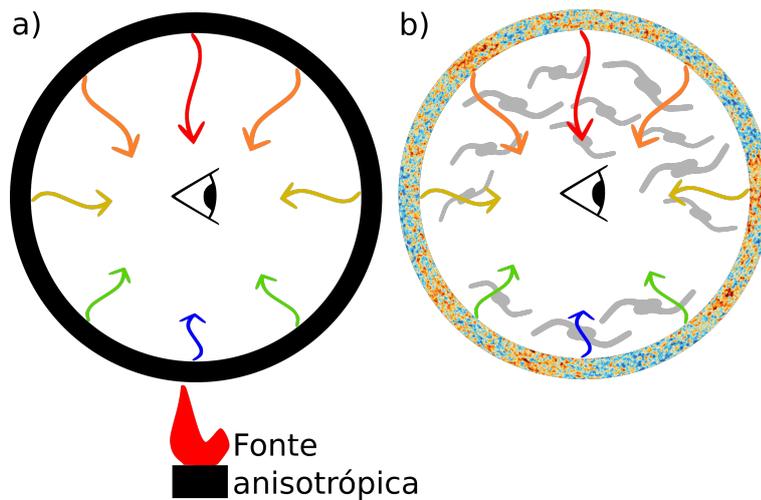


FIGURA 3.3: a) Forno, exemplo com fonte anisotrópica que gera uma modulação no mapa de temperatura. b) RCF, cenário pictórico onde há uma direção privilegiada no universo introduzindo um dipolo intrínseco. Nesse cenário devemos encontrar uma forma alternativa ao dipolo para identificar o movimento próprio.

Nesse caso não é óbvio recuperar o mapa original de temperatura, uma vez que, mesmo no referencial de repouso existe uma componente de dipolo não nula. Ou seja, não podemos igualar o dipolo com a velocidade do observador pois parte dele é intrínseco, de natureza não

¹Ligeiramente diferente do usado pela colaboração do COBE (Lineweaver et al., 1996), devido à diferente definição dos harmônicos esféricos.

cinemática. Tanto o dipolo cinemático quanto o intrínseco estarão degenerados no valor do dipolo total.

Diferente do caso do forno, um objeto do qual temos controle e conhecimento prévio, não podemos saber a priori a natureza intrínseca das anisotropias da RCF. Precisamos de modelos. Dado que o dipolo da RCF é uma anisotropia 100 vezes maior que as demais e nos baseamos em um modelo de universo homogêneo e isotrópico, é compreensível que o Dipolo seja costumeiramente dado como completamente de natureza cinemática. Contudo, como dito no capítulo 1, isso pode estar descartando um importante observável, o dipolo intrínseco, que mesmo pequeno em relação a componente cinemática pode nos fornecer informação relevante do universo.

Visto que medir o dipolo não é o suficiente para encontrar o valor da velocidade $\vec{\beta}$ do observador, precisamos encontrar outra forma de medir a velocidade do referencial. Para isso vamos usar os efeitos da aberração e Doppler sobre os multipolos de ordem superior, checando assim se a velocidade medida usando os mesmos coincide com a associada ao dipolo ou não.

3.3 Efeito sobre os multipolos de ordem superior ao dipolo

Assim como os efeitos de aberração e Doppler impõem diferentes assinaturas sobre o mapa de temperatura, também possuem diferentes efeitos sobre o espaço harmônico. Vamos agora estudar esses efeitos.

Seguindo o desenvolvimento realizado em Challinor e Leeuwen, 2002; Amendola et al., 2010, iniciamos aplicando a equação (3.2) em (3.8), observando a relação com (3.3) obtemos (lembrando sempre que $d=0$ se não consideramos Doppler e $d=1$ para o caso com efeito Doppler):

$$T'(\hat{n}') = [\gamma(1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta})]^d T(\hat{n}). \quad (3.14)$$

Expandindo em harmônicos esféricos obtemos:

$$\begin{aligned}
T'(\hat{n}') &= \left[\gamma(1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \right]^d \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}) \\
&= \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \left\{ \int d\hat{n} a_{\ell m} \left[\gamma(1 + \hat{n}(\hat{n}) \cdot \vec{\beta}) \right]^d Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}) Y_{\ell m}(\hat{n}(\hat{n})) \right\} Y_{\ell' m'}(\hat{n}'), \quad (3.15)
\end{aligned}$$

onde nós expandimos $\left[\gamma(1 + \hat{n}(\hat{n}') \cdot \vec{\beta}) \right]^d Y_{\ell m}(\hat{n}(\hat{n}'))$, com \hat{n} em função da direção aberrada \hat{n}' , em termos da base $Y_{\ell' m'}(\hat{n}')$. Isso nos será útil pois de forma equivalente:

$$T'(\hat{n}') = \sum_{\ell' m'} a'_{\ell' m'} Y_{\ell' m'}(\hat{n}'). \quad (3.16)$$

Aplicando a equação (3.15) na equação (3.16) obtemos a seguinte identidade:

$$a'_{\ell' m'} = \sum_{\ell m} \int d\hat{n} a_{\ell m}^T \left[\gamma(1 + \hat{n}(\hat{n}) \cdot \vec{\beta}) \right]^d Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}) Y_{\ell m}(\hat{n}(\hat{n})), \quad (3.17)$$

onde relacionamos os $a'_{\ell' m'}$ observados com os $a_{\ell m}$ do mapa intrínseco.

Continuando, podemos fazer ainda:

$$\begin{aligned}
a'_{\ell' m'} &= \sum_{\ell m} \int d\hat{n} a_{\ell m} \left[\gamma(1 + \hat{n}(\hat{n}) \cdot \vec{\beta}) \right]^d Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}) Y_{\ell m}(\hat{n}(\hat{n})) \\
&= \sum_{\ell m} \int d\hat{n} \int d\hat{n}' \delta(\hat{n}' - \hat{n}) a_{\ell m} \left[\gamma(1 + \hat{n}(\hat{n}) \cdot \vec{\beta}) \right]^d Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}) Y_{\ell m}(\hat{n}(\hat{n})) \\
&= \sum_{\ell m} \int d\hat{n}' a_{\ell m} \left[\gamma(1 + \hat{n}(\hat{n}') \cdot \vec{\beta}) \right]^d Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}') Y_{\ell m}(\hat{n}(\hat{n}')) \\
&= \sum_{\ell m} \int d\hat{n} a_{\ell m} \left[\gamma(1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \right]^{d-2} Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}') Y_{\ell m}(\hat{n}) \\
&= \sum_{\ell} \int d\hat{n} a_{\ell m'} \left[\gamma(1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \right]^{d-2} Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}') Y_{\ell m'}(\hat{n}), \quad (3.18)
\end{aligned}$$

onde usamos $d\hat{n} = \left[\gamma(1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \right]^2 d\hat{n}'$, que pode ser obtido da equação (3.3) da aberração relativística. Na última linha assumimos, sem perda de generalidade, que a velocidade relativa $\vec{\beta}$ aponta na direção a qual expandimos os esféricos harmônicos. Inicialmente vamos impor $\vec{\beta}$ na direção \hat{z} (como feito em Amendola et al., 2010). Dessa forma o *boost* possui simetria de rotação em relação ao eixo z , logo não haverá variação longitudinal e não é necessário somar em m , vide equação (2.1), surgirá então um $\delta_{m m'}$ (lembre-se que m está associado a variação longitudinal e axial, vide capítulo 2). Isso será modificado mais a frente, quando quisermos

medir uma velocidade com direção arbitrária, utilizando uma matriz de rotação, vamos realizar uma mudança no sistema de coordenadas.

Ainda pela equação (3.3), a diferença entre \hat{n}' e \hat{n} projetada na direção do movimento é dada por:

$$(\hat{n}' - \hat{n}) \cdot \hat{\beta} = \frac{\beta \sin^2 \theta}{1 + \beta \cos \theta}. \quad (3.19)$$

Logo para $\beta \ll 1$, podemos aproximar em série por:

$$\theta - \theta' = \beta \sin \theta + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (3.20)$$

Dessa forma o ângulo de desvio da aberração para $\beta \ll 1$ é proporcional a β , logo essa será uma boa aproximação para $\beta l < 1$, isto é $l \lesssim 800$ (Challinor e Leeuwen, 2002) para β dado pelo dipolo (β da ordem de 10^{-3}). Na prática ela se demonstrará ainda uma boa aproximação até cerca de $l \simeq 3000$ (verificado nas simulações, e também nos trabalhos de Notari e Quartin, 2012 e Chluba, 2011), devido a cancelamentos entre termos de ordem superior. Com uma técnica adicional chamada de pré-deboost (Notari e Quartin, 2012), onde antes da aplicação do estimador realizamos um *boost* com valor oposto ao dipolo restando apenas um *boost* residual $\beta_{res} \ll 10^{-3}$, essa abordagem pode ser estendida para multipolos da ordem de $l \simeq 5000$, como vemos na figura 3.4, onde para a velocidade residual esperada $v_{res} \ll 100 \text{ km/s}$ certamente temos $\beta l < 1$.

Em vista disso podemos aproximar a equação (3.18) em séries, tomando apenas os termos de ordem β . Utilizaremos as seguintes séries de Taylor com relação a β (onde $\mu \equiv \hat{n} \cdot \hat{\beta}$ e $\mu' \equiv \hat{n}' \cdot \hat{\beta}$):

$$\begin{aligned} \left[\gamma(1 + \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \right]^{d-2} &= \left[(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + \mu\beta) \right]^{d-2} \simeq 1 + (d-2)\mu\beta + \mathcal{O}(\beta^2) \\ Y_{\ell m}(\hat{n}') &= Y_{\ell m}(\hat{n}')|_{\beta=0} + \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \beta}|_{\beta=0} \beta + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= Y_{\ell m}(\hat{n}')|_{\beta=0} + \left(\frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \mu'} \frac{\partial \mu'}{\partial \beta} \right) |_{\beta=0} \beta + \mathcal{O}(\beta^2) \\ &= Y_{\ell m}(\hat{n}) + \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \mu}(1 - \mu^2)\beta + \mathcal{O}(\beta^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

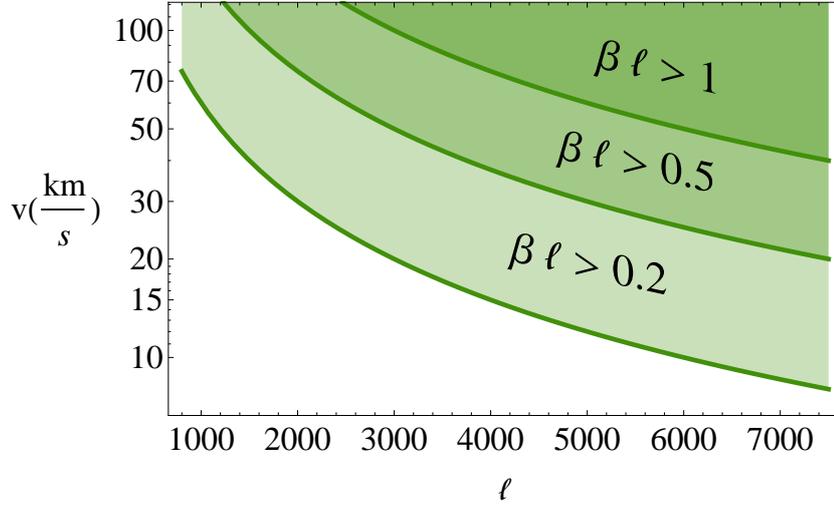


FIGURA 3.4: Regiões para as quais a aproximação em primeira ordem da série de Taylor começa a falhar. Os valores se diferenciam dos resultados exatos por aproximadamente $\{0.4\%, 2\%, 10\%\}$ para $\beta\ell = \{0.2, 0.5, 1\}$, onde β é dado pelo eixo vertical. Figura retirada de Notari e Quartin, 2012.

Utilizando a seguinte propriedade dos esféricos harmônicos:

$$(\mu^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \mu} Y_{\ell m} = \ell H_{(\ell+1)m} Y_{(\ell+1)m} - (\ell + 1) H_{\ell m} Y_{(\ell-1)m}, \quad (3.22)$$

onde:

$$H_{\ell m} = \sqrt{\frac{(\ell^2 - m^2)}{(4\ell^2 - 1)}}, \quad (3.23)$$

Podemos agora escrever $Y_{\ell m}(\hat{n}')$ na forma:

$$Y_{\ell m}(\hat{n}') = Y_{\ell m}(\hat{n}) - \beta \left\{ \ell H_{(\ell+1)m} Y_{(\ell+1)m}(\hat{n}) - (\ell + 1) H_{\ell m} Y_{(\ell-1)m}(\hat{n}) \right\} + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (3.24)$$

Substituindo as séries de potência em Eq.(3.18) podemos encontrar (renomeando os índices ℓ e ℓ'):

$$\begin{aligned}
a'_{\ell m}(v') &\simeq \sum_{\ell'} \int d\hat{n} [1 + (d-2)\mu\beta] a_{\ell'm} Y_{\ell'm}(\hat{n}) \\
&\times \left[Y_{\ell m}^*(\hat{n}) - \beta \left(\ell H_{(\ell+1)m} Y_{(\ell+1)m}^*(\hat{n}) - (\ell+1) H_{\ell m} Y_{(\ell-1)m}^*(\hat{n}) \right) \right] \\
&\simeq \sum_{\ell'} \int d\hat{n} \left\{ \left[1 + (d-2)\mu\beta \right] a_{\ell'm} Y_{\ell'm}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \right. \\
&\left. - \beta a_{\ell'm}(v') Y_{\ell'm}(\hat{n}) \left[\ell H_{(\ell+1)m} Y_{(\ell+1)m}^*(\hat{n}) - (\ell+1) H_{\ell m} Y_{(\ell-1)m}^*(\hat{n}) \right] \right\}. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

A integral sobre $d\hat{n}$ pode ser feita utilizando a seguinte propriedade dos harmônicos esféricos:

$$\begin{aligned}
\int d\hat{n} \mu Y_{\ell'm}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) &= \int d\hat{n} \left\{ H_{(\ell'+1)m} Y_{(\ell'+1)m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) + H_{\ell'm} Y_{(\ell'-1)m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \right\} \\
&= H_{\ell m} \delta_{(\ell'+1)l} + H_{(\ell+1)m} \delta_{(\ell'-1)l}. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

O que nos leva a importante relação entre os $a'_{\ell m}$ observados e os $a_{\ell m}$ intrínsecos:

$$\begin{aligned}
a'_{\ell m} &\simeq a_{\ell m} - \beta H_{(\ell+1)m} \left[(\ell - d + 2) \right] a_{(\ell+1)m}(v') \\
&- \beta H_{\ell m} \left[-(\ell + d - 1) \right] a_{(\ell-1)m} + \mathcal{O}(\beta^2).
\end{aligned}$$

Assim:

$$a'_{\ell m} \equiv a_{\ell m} + (c_{\ell m}^- a_{\ell-1 m} + c_{\ell m}^+ a_{\ell+1 m}). \quad (3.27)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
c_{\ell m}^+ &= \beta(\ell + 2 - d) \sqrt{\frac{(\ell + 1)^2 - m^2}{4(\ell + 1)^2 - 1}}, \\
c_{\ell m}^- &= -\beta(\ell - 1 + d) \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}}. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Ou ainda melhor, na equação (3.27) podemos identificar as componentes de acordo com sua natureza, fazendo assim:

$$a'_{\ell m} \equiv a_{\ell m}^{\text{Primordial}} + a_{\ell m}^{\text{Aberração}} + a_{\ell m}^{\text{Doppler}}, \quad (3.29)$$

onde temos:

$$\begin{aligned}
a_{\ell m}^{\text{Primordial}} &= a_{\ell m}, \\
a_{\ell m}^{\text{Aberração}} &= \left(c_{\ell m}^{-\text{Aberração}} a_{\ell-1 m} + c_{\ell m}^{+\text{Aberração}} a_{\ell+1 m} \right), \\
a_{\ell m}^{\text{Doppler}} &= \left(c_{\ell m}^{-\text{Doppler}} a_{\ell-1 m} + c_{\ell m}^{+\text{Doppler}} a_{\ell+1 m} \right),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
c_{\ell m}^{+\text{Doppler}} &= -\beta \sqrt{\frac{(\ell+1)^2 - m^2}{4(\ell+1)^2 - 1}}, \\
c_{\ell m}^{-\text{Doppler}} &= -\beta \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}}, \\
c_{\ell m}^{+\text{Aberração}} &= \beta(\ell+2) \sqrt{\frac{(\ell+1)^2 - m^2}{4(\ell+1)^2 - 1}}, \\
c_{\ell m}^{-\text{Aberração}} &= -\beta(\ell-1) \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde apenas separamos os casos com $d = 1$ dos de $d = 0$, isto é, com e sem Doppler.

Dessa forma identificamos assim os efeitos da aberração e Doppler, e as suas diferentes assinaturas, sobre o espaço dos harmônicos esféricos. Poderíamos ainda estender esses efeitos para o caso de um mapa de polarização, mas não o faremos por fugir ao escopo desta dissertação. Nosso foco será em mapas de temperatura, dos quais realizamos uma larga quantidade de simulações. Para os mesmos efeitos em mapas de polarização consulte os trabalhos de Amendola et al., 2010; Notari e Quartín, 2012.

Capítulo 4

O estimador de $\vec{\beta}$

Neste capítulo faremos um compendio das demonstrações realizadas em Challinor e Leeuwen, 2002; Amendola et al., 2010; Notari e Quartin, 2012; Kosowsky e Kahniashvili, 2011. Inicialmente consideramos $\vec{\beta} = \beta_z \hat{z}$, mas na seção 4.2 vamos generalizar para o boost em uma direção arbitrária. O capítulo 3 é crucial para o entendimento deste capítulo, nele demonstramos os efeitos da aberração e Doppler sobre um mapa de temperatura.

4.1 Caso ideal e previsão teórica

Como obtivemos no capítulo anterior, para uma aproximação em ordem β :

$$a'_{\ell m} \equiv a_{\ell m} + (c_{\ell m}^- a_{\ell-1 m} + c_{\ell m}^+ a_{\ell+1 m}) . \quad (4.1)$$

Com isso podemos ver que os $a'_{\ell m}$ do referencial em movimento misturam multipolos ℓ , $\ell + 1$ e $\ell - 1$ do mapa primordial. Em outras palavras, os efeitos de aberração e Doppler introduzem correlações $a_{\ell m} a_{\ell+1 m}$ no espaço dos harmônicos esféricos, ou seja, entre multipolos não diagonais. Esse será nosso ponto de partida para buscar um estimador para $\vec{\beta}$. Baseado nessas correlações vamos procurar uma função de correlação de dois pontos que contenha estes efeitos.

Em Challinor e Leeuwen, 2002 investigou-se a função de correlação mais simples, o espectro de potência C_ℓ . Porém o efeito de $\vec{\beta}$ nos C_ℓ 's é pequeno, pois as correlações diagonais no espaço

dos harmônicos são de ordem β^2 (Challinor e Leeuwen, 2002; Kosowsky e Kahnishvili, 2011; Amendola et al., 2010).

Seguindo Amendola et al., 2010 vamos estudar uma função de correlação não diagonal. Começemos definindo a seguinte quantidade básica:

$$F_{\ell m} \equiv a'_{\ell m}{}^* a'_{\ell+1 m}, \quad (4.2)$$

Essas quantidades não são invariantes com relação a rotações, pois dependem do eixo de decomposição dos $a_{\ell m}$'s. Como no capítulo anterior, vamos assumir primeiramente que sabemos a direção da velocidade do observador, escolhendo o eixo de decomposição como \hat{z} . Dessa forma podemos medir o módulo de $\vec{\beta}$. Mais a frente, introduzindo uma matriz de rotação iremos generalizar os resultados para o caso do movimento em uma direção arbitrária, em coordenadas cartesianas.

Se substituirmos a equação (4.1) em (4.2) obtemos:

$$\begin{aligned} F_{\ell m} &= a_{\ell m}^* a_{\ell+1 m} + c_{\ell+1 m}^- a_{\ell m}^* a_{\ell m} + c_{\ell m}^+ a_{\ell+1 m}^* a_{\ell+1 m} \\ &+ c_{\ell m}^- a_{\ell-1 m}^* a_{\ell+1 m} + c_{\ell+1 m}^+ a_{\ell m}^* a_{\ell+2 m}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tomando agora a média estatística podemos obter o valor esperado para $F_{\ell m}$:

$$\langle F_{\ell m} \rangle = c_{\ell+1 m}^- \langle a_{\ell m}^* a_{\ell m} \rangle + c_{\ell m}^+ \langle a_{\ell+1 m}^* a_{\ell+1 m} \rangle = c_{\ell+1 m}^- C_{\ell} + c_{\ell m}^+ C_{\ell+1}, \quad (4.4)$$

onde utilizamos o fato de que os $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\ell}$, como explicado no capítulo 2. Com isso a média de um produto não diagonal deve ser nulo. Além disso, usamos a aproximação $C_{\ell} \equiv \langle a_{\ell m}^* a_{\ell m} \rangle \approx \langle a'_{\ell m}{}^* a'_{\ell m} \rangle$, pois o efeito em C_{ℓ} é de ordem β^2 (Challinor e Leeuwen, 2002; Kosowsky e Kahnishvili, 2011; Amendola et al., 2010). Da equação (4.4) é possível ver que para um observador estático $\langle F_{\ell m} \rangle$ é nulo, lembrando que os termos $c_{\ell m}^-$ e $c_{\ell m}^+$ são proporcionais à β (equação (3.28)).

Tomando proveito da propriedade de simetria dos a_{lm} 's, para m positivo $a_{\ell-m} = (-1)^m a_{lm}^*$, podemos decompor $\langle F_{\ell m} \rangle$ em suas partes real $f_{\ell m}$ e imaginária $g_{\ell m}$ ¹:

$$\frac{1}{2}(F_{\ell m} + F_{\ell-m}) \equiv f_{\ell m}, \quad \frac{1}{2i}(F_{\ell m} - F_{\ell-m}) \equiv g_{\ell m}. \quad (4.5)$$

Como $f_{\ell m} = f_{\ell-m}$, para cada ℓ nós temos $\ell + 1$ $f_{\ell m}$ reais independentes ($\ell \geq m \geq 0$). O valor esperado para $g_{\ell m}$ é trivial. Para $f_{\ell m}$ podemos obter:

$$f_{\ell m}^{TH} \equiv \langle f_{\ell m} \rangle = \langle c_{\ell+1m}^- a_{\ell m}^* a'_{\ell m} + c_{\ell m}^+ a_{\ell+1m}^* a'_{\ell+1m} \rangle = c_{\ell+1m}^- C_{\ell} + c_{\ell m}^+ C_{\ell+1}. \quad (4.6)$$

Utilizando-se da hipótese gaussiana, sabendo que $\langle a_{lm}^* a_{l+1m} a_{lm} a_{l+1m}^* \rangle = \langle a_{lm}^* a_{l+1m} \rangle \langle a_{lm} a_{l+1m} \rangle + \langle a_{l+1m} a_{lm}^* \rangle \langle a_{l+1m}^* a_{lm} \rangle + \langle a_{lm} a_{lm}^* \rangle \langle a_{l+1m} a_{l+1m}^* \rangle = C_{\ell} C_{\ell+1}$ (vide capítulo 2), em ordem β (logo desconsiderando termos com produtos $c_{\ell m}^+ c_{\ell m}^+$, $c_{\ell m}^- c_{\ell m}^-$ e $c_{\ell m}^+ c_{\ell m}^-$) temos:

$$\begin{aligned} \langle F_{\ell m} F_{\ell' m'}^* \rangle &= \langle (a_{\ell m}^* a_{\ell+1m} + c_{\ell+1m}^- a_{\ell m}^* a_{\ell m} + c_{\ell m}^+ a_{\ell+1m}^* a_{\ell+1m} \\ &+ c_{\ell m}^- a_{\ell-1m}^* a_{\ell+1m} + c_{\ell+1m}^+ a_{\ell m}^* a_{\ell+2m}) \\ &\times (a_{\ell' m} a_{\ell'+1m}^* + c_{\ell'+1m}^- a_{\ell' m} a_{\ell' m}^* + c_{\ell' m}^+ a_{\ell'+1m} a_{\ell'+1m}^* \\ &+ c_{\ell' m}^- a_{\ell'-1m} a_{\ell'+1m}^* + c_{\ell'+1m}^+ a_{\ell' m} a_{\ell'+2m}^*) \rangle \approx \langle a_{\ell m}^* a_{\ell+1m} a_{\ell' m} a_{\ell'+1m}^* \rangle \\ &\approx \frac{1}{2} C_{\ell} C_{\ell'+1} \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} (1 + \delta_{m0}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

somando apenas os termos independentes ($m \geq 0$). Como:

$$\langle f_{\ell m} f_{\ell' m'}^* \rangle = \frac{1}{2} \langle (F_{\ell m} + F_{\ell-m})(F_{\ell' m'}^* + F_{\ell'-m'}^*) \rangle \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{2} \langle (F_{\ell m} + F_{\ell m}^*)(F_{\ell' m'}^* + F_{\ell' m'}) \rangle \quad (4.9)$$

$$= \langle F_{\ell m} F_{\ell' m'}^* \rangle. \quad (4.10)$$

Então:

$$\langle f_{\ell m} f_{\ell' m'}^* \rangle = \langle F_{\ell m} F_{\ell' m'}^* \rangle \approx \frac{1}{2} C_{\ell} C_{\ell'+1} \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} (1 + \delta_{m0}). \quad (4.11)$$

Para cada $f_{\ell m}$ a variância cósmica pode ser calculada por $\sigma_{\ell m}^2 = \langle f_{\ell m}^2 \rangle - \langle f_{\ell m} \rangle^2$, logo:

¹Sabendo que $a_{\ell-m} = (-1)^m a_{lm}^*$, podemos encontrar que $F_{\ell-m} = a_{\ell-m}^* a_{\ell+1-m} = -1^{2m} a_{\ell m} a_{\ell+1m}^* = F_{\ell m}^*$, logo $F_{\ell-m} = F_{\ell m}^*$

$$\sigma_{\ell m}^2 = \frac{1}{2}C_\ell C_{\ell+1}(1 + \delta_{m0}) - (f_{\ell m}^{TH})^2 \approx \frac{1}{2}C_\ell C_{\ell+1}(1 + \delta_{m0}), \quad (4.12)$$

(usando o fato de que $f_{\ell m}^{TH}$ é de ordem β), onde somamos apenas os termos independentes ($m \geq 0$).

Agora podemos construir a razão sinal-ruído, $\frac{\mu}{\sigma}$, onde $\mu = f_{\ell m}^{TH}$ (o sinal esperado) e $\sigma^2 = \frac{1}{2}C_\ell C_{\ell+1}(1 + \delta_{m0})$, somando sobre todos ℓ, m acima do dipolo (isto é, com $m \in (-\ell, \ell)$ e $\ell \in (2, \ell_{max})$):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Ideal}^2 = \sum_{\ell, m} \frac{(f_{\ell m}^{TH})^2}{C_\ell C_{\ell+1}}. \quad (4.13)$$

Para um experimento **ideal** (sem ruído algum ou mascaramento de fontes indesejadas, como a nossa galáxia, porém considerando a inevitável variância cósmica como fonte de incerteza) a equação (4.13) será a razão sinal-ruído. Em um caso realista, teremos ruído e mascaramento. Nesse caso devemos somar um termo de ruído, isso pode ser feito substituindo C_ℓ 's no denominador pela quantidade \mathfrak{C}_ℓ (veja e.g. Dodelson, 2003 (capítulo 11) e Perotto et al., 2006):

$$\mathfrak{C}_\ell = \frac{1}{\sqrt{f_{sky}}} (C_\ell + N_\ell), \quad (4.14)$$

onde N_ℓ é o espectro de potência do ruído e f_{sky} é a fração do céu não mascarada. Logo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \sum_{\ell, m} \frac{(f_{\ell m}^{TH})^2}{\mathfrak{C}_\ell \mathfrak{C}_{\ell+1}}. \quad (4.15)$$

Na figura 4.1 mostramos a relação sinal ruído para o estimador com os efeitos de aberração e Doppler ($d=1$) para $\beta = 0.0012345$ (como obtido pela medida do dipolo), para o caso de um experimento ideal e para as especificações do Planck (SMICA 2013 e 2018).

O melhor ajuste para β em um dado conjunto de $a_{\ell m}^{obs}$ observados, decompostos na direção da velocidade (que estamos considerando a princípio \hat{z}), será dado pela minimização do seguinte χ^2 :

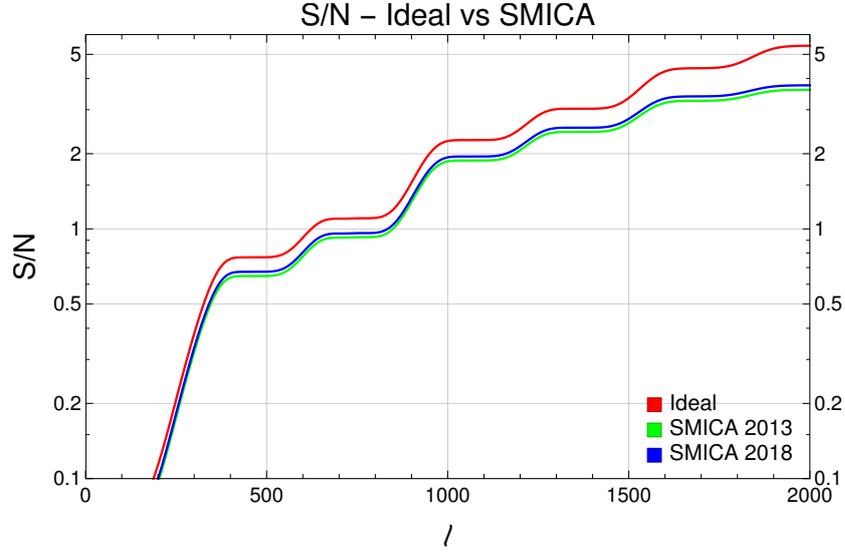


FIGURA 4.1: Sinal-ruído esperado para o caso ideal do estimador com aberração e Doppler e os mapas SMICA do Planck (release de 2013 e 2018), considerando ruído e a aplicação de uma máscara.

$$\chi^2(\beta) = \sum_{\ell,m} \frac{[f_{\ell m}^{\text{obs}} - \beta \hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}}]^2}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \chi^2(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{\ell,m} \frac{[f_{\ell m}^{\text{obs}} - \beta \hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}}]^2}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}} \right) = 0, \quad (4.17)$$

$$\sum_{\ell,m} \frac{2 [f_{\ell m}^{\text{obs}} - \beta \hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}}] [-\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}}]}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}} = 0. \quad (4.18)$$

Onde desconsideramos os termos de ordem β^2 no denominador (lembrando que em Challinor e Leeuwen, 2002 é demonstrado que há correlações de ordem β^2 no \mathfrak{C}_{ℓ}), e extraímos a dependência de β escrevendo $f_{\ell m}^{\text{TH}} \equiv \beta \hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}}$ (apenas para ficar explícito, confira equações (4.6) e (3.28)). Isolando β em (4.18) obtemos o estimador:

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{\ell,m} \frac{f_{\ell m}^{\text{obs}} \hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}}}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell,m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}})^2}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}} \right)^{-1}, \quad (4.19)$$

onde $f_{\ell m}^{\text{obs}}$ é a parte real do produto $a_{\ell m} a_{\ell+1 m}$ obtido do mapa observado.

Nós podemos agora usar a equação (4.11) para calcular a variância de $\hat{\beta}$. Considerando $\sigma_{\hat{\beta}}^2 = \langle \hat{\beta}^2 \rangle - \langle \beta \rangle^2 \approx \langle \hat{\beta}^2 \rangle$, dado que $\vec{\beta}$ pode apontar em diferentes direções com diferentes módulos, para a média de um ensemble de observadores devemos obter 0. O erro $\delta\beta$ é dado então por:

$$(\delta\beta)^2 \equiv \langle \hat{\beta}^2 \rangle = \left\langle \frac{\sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \frac{f_{\ell m}^{\text{obs}} \hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}} f_{\ell' m'}^* \text{obs} \hat{f}_{\ell' m'}^{\text{TH}}}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1} \mathfrak{C}_{\ell'} \mathfrak{C}_{\ell'+1}}}{\sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \frac{\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}2} \hat{f}_{\ell' m'}^{\text{TH}2}}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1} \mathfrak{C}_{\ell'} \mathfrak{C}_{\ell'+1}}} \right\rangle = \frac{\sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}})^2 \langle f_{\ell m}^{\text{obs}} f_{\ell' m'}^* \text{obs} \rangle}{(\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1})^2}}{\left[\sum_{\ell m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}})^2}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}} \right]^2},$$

onde levamos em conta que \mathfrak{C}_{ℓ} e $\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}}$ são valores esperados teóricos. Considerando agora que $\langle f_{\ell m}^{\text{obs}} f_{\ell' m'}^* \text{obs} \rangle \approx \mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$ (equação 4.11 considerando o somatório com $m \in (-\ell, \ell)$), obtemos:

$$(\delta\beta)^2 \approx \frac{\sum_{\ell m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}})^2 (\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1})}{(\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1})^2}}{\left[\sum_{\ell m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}})^2}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}} \right]^2} = \frac{1}{\sum_{\ell m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}})^2}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}}}.$$

Sendo então nossa estimativa para a variância do estimador:

$$\delta\beta \equiv \sqrt{\left(\sum_{\ell, m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{\text{TH}})^2}{\mathfrak{C}_{\ell} \mathfrak{C}_{\ell+1}} \right)^{-1}}. \quad (4.20)$$

Isso nos mostra que o valor estimado de $\delta\beta$ não depende do valor de β . O erro em β é devido essencialmente à variância cósmica. Logo podemos determinar a precisão de um experimento sem o conhecimento prévio de β . Temos agora o erro estatístico do estimador. Para o erro em θ , definido como o ângulo entre $\vec{\beta}$ medido e a direção fiducial, consideraremos a aproximação de pequenos ângulos $\text{sen}\delta\theta = \frac{\delta\beta}{\beta} \simeq \delta\theta$.

Nas figuras 4.2 e 4.3 estão os gráficos para a expectativa teórica para $\delta\beta$, no caso ideal e para os dados observacionais do Planck (*pipeline* SMICA 2018 e 2013), considerando medidas com o estimador utilizando apenas o efeito de aberração, apenas Doppler e aberração+Doppler, vide equações (3.30) e (3.29).

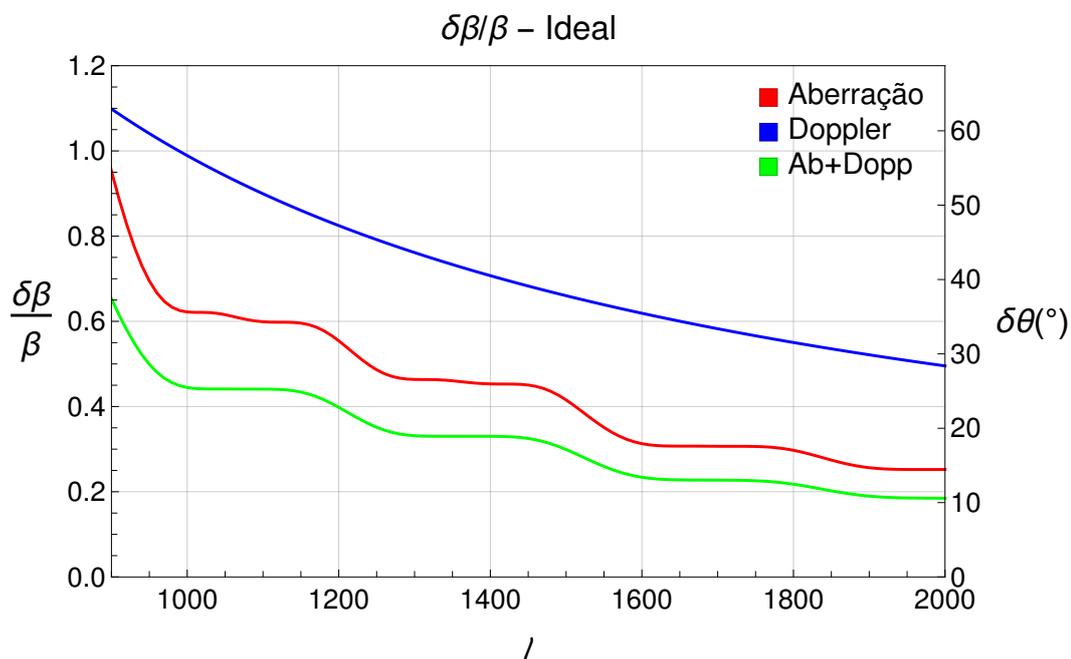


FIGURA 4.2: Erro esperado para o estimador ideal, considerando apenas aberração, apenas Doppler e aberração+Doppler. Na esquerda o erro estatístico em termos de $\beta = 0.0012345$ (valor esperado para o dipolo), na direita o $\delta\theta$ esperado entre $\beta_{fiducial}$ e β_{medido} .

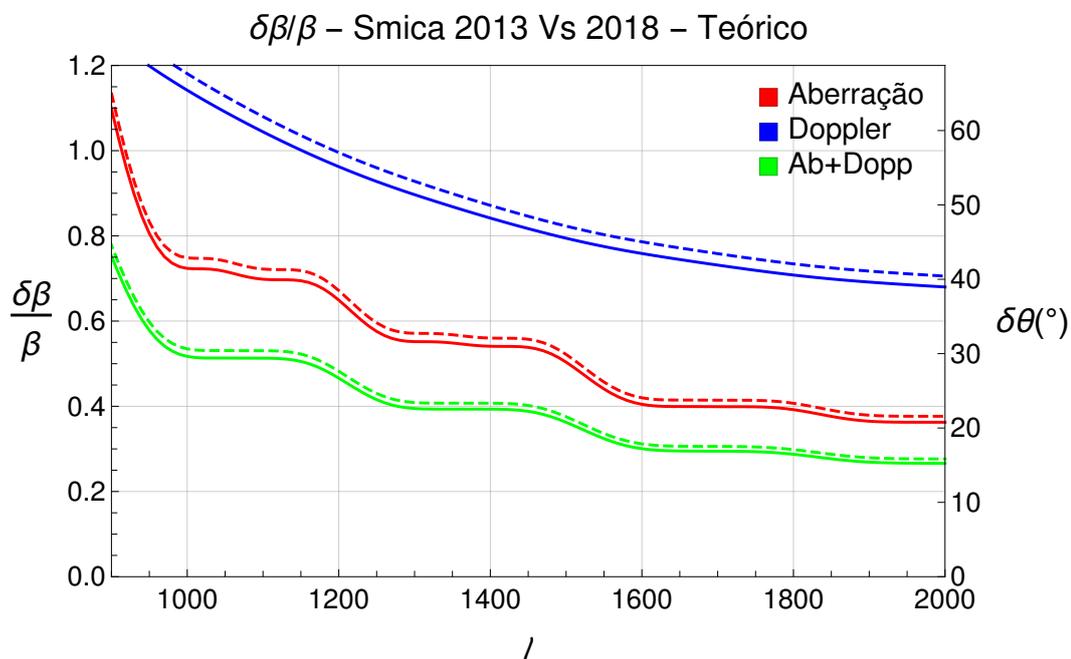


FIGURA 4.3: Erro esperado para o estimador nos mapas SMICA (2018 e 2013) do Planck. As linhas tracejadas indicam os valores para 2013, e as contínuas para 2018. Na esquerda o erro estatístico em termos de $\beta = 0.0012345$ (valor esperado para o dipolo), na direita o $\delta\theta$ esperado entre $\beta_{fiducial}$ e β_{medido} .

4.2 Generalização do estimador para outras componentes cartesianas

Ainda falta generalizarmos o estimador para uma velocidade arbitrária, o que obtivemos é na verdade o estimador de β_z , a componente da velocidade na direção \hat{z} . Como poderíamos fazer sempre um eixo qualquer coincidir com a direção de $\vec{\beta}$ através de uma mudança de coordenadas, os cálculos para $\delta\hat{\beta}$ e a razão sinal-ruído não são alterados. Da mesma forma, $\sigma_{\beta_x} = \sigma_{\beta_y} = \sigma_{\beta_z}$ (em Amendola et al., 2010 isso é visto em mais detalhes, demonstrando que a matriz de Fisher é diagonal).

Na seção anterior e no capítulo 3 consideramos o *boost* na direção \hat{z} para simplificar as demonstrações. Partindo desses resultados, podemos generalizar para um *boost* em uma direção arbitrária rotacionando os $a_{\ell m}$'s de forma a alterar o eixo \hat{z} para uma nova direção \hat{z}' . Isso pode ser feito utilizando a matriz de rotação de Wigner $D_{mm'}^\ell(\phi, \theta, \gamma)$ (para mais detalhes veja Messiah A., 1999):

$$D_{m0}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\beta, \alpha), \quad (4.21)$$

$$D_{0m}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\beta, \gamma), \quad (4.22)$$

onde ϕ , θ e γ são os ângulos de Euler da rotação desejada, ou seja, as coordenadas de \hat{z}' no referencial original, onde \hat{z} aponta para o zênite. Para aplicar a rotação sobre a expansão em esféricos harmônicos de um mapa fazemos:

$$\bar{a}_{\ell m} = \sum_{-\ell \leq m' \leq \ell} D_{mm'}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) a_{\ell m'}, \quad (4.23)$$

onde os $\bar{a}_{\ell m}$'s são os $a_{\ell m}$'s rotacionados.

Para o nosso caso os parâmetros na matriz de Wigner podem ser escritos simplesmente como $D_{mm'}^\ell(\phi, \theta, 0)$, onde $\gamma=0$, é o angulo de rotação do vetor dado por $\hat{z} \times \hat{z}'$, não afetando a direção da velocidade, e portanto pode ser considerado nulo (vetorialmente ele significa a rotação do vetor \hat{z}' em torno de si, por isso irrelevante).

O $\vec{\beta}$ associado ao mapa rotacionado será então:

$$\beta'_s = D_{s0}^1(\phi, \theta, 0) \beta \equiv \sqrt{4\pi/3} Y_{1s}^* \beta, \quad (4.24)$$

onde $s = \{-1, 0, 1\}$. Aplicando o mesmo procedimento da equação (3.13) em (4.24), podemos identificar as componentes vetoriais:

$$\beta'_x = -\sqrt{2} \operatorname{Re}[\beta_1], \quad (4.25)$$

$$\beta'_y = \sqrt{2} \operatorname{Im}[\beta_1], \quad (4.26)$$

$$\beta'_z = \beta_0, \quad (4.27)$$

encontrando as componentes do vetor velocidade para o caso rotacionado. Para uma aproximação em ordem β , considerando $\beta = \beta'_s$ e aplicando a matriz de rotação em (3.27) (que nos fornece a decomposição dos $a_{\ell m}'$'s com *boost* em termos dos primordiais), obtemos:

$$a'_{\ell m} \simeq \sum_{s=-1}^1 \beta_s [c_{\ell m}^{s-} a_{\ell-1 m-s} + c_{\ell m}^{s+} a_{\ell+1 m-s}], \quad (4.28)$$

com os novos coeficientes dados por:

$$\begin{aligned} c_{\ell m}^{s+} &= (-1)^s (\ell + 2 - d) \sqrt{\frac{(\ell + 1 + m - s)(\ell + 1 - m + s)(\ell - sm + s^2)}{(4(\ell + 1)^2 - 1)(1 + s^2)(\ell + sm)}}, \\ c_{\ell m}^{s-} &= -(\ell - 1 + d) \sqrt{\frac{(\ell + m - s)(\ell - m + s)(\ell + sm + 1 - s^2)}{(4\ell^2 - 1)(1 + s^2)(\ell - sm + 1)}}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

e a interessante simetria:

$$c_{\ell m}^{s\pm} = c_{\ell -m}^{-s\pm}. \quad (4.30)$$

Como agora os $a'_{\ell m}$ possuem correlações do tipo $a_{\ell m} a'_{\ell+1 m+s}$, vide equação (4.28), podemos definir um novo $F_{\ell m}$:

$$F_{\ell m}^s \equiv a'_{\ell m}{}^* a'_{\ell+1 m+s}. \quad (4.31)$$

De forma similar ao que fizemos para o caso de β na direção \hat{z} , podemos encontrar o valor esperado para esse observável:

$$\langle F_{\ell m}^s \rangle = \beta_s [c_{\ell+1 m+s}^{s-} C_{\ell} + (-1)^s c_{\ell m}^{-s+} C_{\ell+1}], \quad (4.32)$$

Separando em componente real e imaginária:

$$f_{\ell m}^s \equiv \frac{1}{2} [F_{\ell m}^s + (F_{\ell m}^s)^*], \quad (4.33)$$

$$g_{\ell m}^s \equiv \frac{1}{2i} [F_{\ell m}^s - (F_{\ell m}^s)^*], \quad (4.34)$$

e obtendo seus valores esperados de forma similar à equação (4.6):

$$\langle f_{\ell m}^s \rangle = \text{Re} [\beta_s [c_{\ell+1 m+s}^{s-} C_{\ell} + (-1)^s c_{\ell m}^{-s+} C_{\ell+1}]], \quad (4.35)$$

$$\langle g_{\ell m}^s \rangle = \text{Im} [\beta_s [c_{\ell+1 m+s}^{s-} C_{\ell} + (-1)^s c_{\ell m}^{-s+} C_{\ell+1}]],$$

os quais podemos usar para calcular a variância cósmica associada:

$$\begin{aligned} \langle f_{\ell m}^s f_{\ell' m'}^{s'} \rangle - \langle f_{\ell m}^s \rangle \langle f_{\ell' m'}^{s'} \rangle &= \frac{1}{2} C_{\ell} C_{\ell+1} \delta_{\ell \ell'} \delta_{ss'} (\delta_{m0} + \delta_{s0} \delta_{m-m'}), \\ \langle g_{\ell m}^s g_{\ell' m'}^{s'} \rangle - \langle g_{\ell m}^s \rangle \langle g_{\ell' m'}^{s'} \rangle &= \frac{1}{2} C_{\ell} C_{\ell+1} \delta_{\ell \ell'} \delta_{ss'} (\delta_{m0} - \delta_{s0} \delta_{m-m'}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Podemos então construir um χ^2 como (4.16), e minimizando obtemos para cada componente β_s :

$$\hat{\beta}_0 = \left(\sum_{\ell, m} \frac{f_{\ell m}^{0 \text{ obs}} \hat{f}_{\ell m}^{0 TH}}{\mathfrak{e}_{\ell} \mathfrak{e}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell, m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{0 TH})^2}{\mathfrak{e}_{\ell} \mathfrak{e}_{\ell+1}} \right)^{-1}, \quad (4.37)$$

$$\text{Re}[\hat{\beta}_1] = \left(\sum_{\ell, m} \frac{f_{\ell m}^{1 \text{ obs}} \hat{f}_{\ell m}^{1 TH}}{\mathfrak{e}_{\ell} \mathfrak{e}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell, m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{1 TH})^2}{\mathfrak{e}_{\ell} \mathfrak{e}_{\ell+1}} \right)^{-1}, \quad (4.38)$$

$$\text{Im}[\hat{\beta}_1] = \left(\sum_{\ell,m} \frac{g_{\ell m}^{1\text{obs}} \hat{g}_{\ell m}^{1\text{TH}}}{\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell,m} \frac{(\hat{g}_{\ell m}^{1\text{TH}})^2}{\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_{\ell+1}} \right)^{-1}, \quad (4.39)$$

onde definimos como antes $\hat{f}_{\ell m}^{1\text{TH}} = \frac{f_{\ell m}^{1\text{TH}}}{\beta_1}$ e $\hat{g}_{\ell m}^{1\text{TH}} = \frac{g_{\ell m}^{1\text{TH}}}{\beta_1}$. Levando em consideração a relação entre β_s e $\vec{\beta}$ dada por (4.25), obtemos o estimadores para as componentes cartesianas:

$$\hat{\beta}_x = \sqrt{2} \left(\sum_{\ell,m} \frac{f_{\ell m}^{1\text{obs}} \hat{f}_{\ell m}^{1\text{TH}}}{\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell,m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{1\text{TH}})^2}{\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_{\ell+1}} \right)^{-1}, \quad (4.40)$$

$$\hat{\beta}_y = -\sqrt{2} \left(\sum_{\ell,m} \frac{g_{\ell m}^{1\text{obs}} \hat{g}_{\ell m}^{1\text{TH}}}{\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell,m} \frac{(\hat{g}_{\ell m}^{1\text{TH}})^2}{\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_{\ell+1}} \right)^{-1}, \quad (4.41)$$

$$\hat{\beta}_z = \left(\sum_{\ell,m} \frac{f_{\ell m}^{0\text{obs}} \hat{f}_{\ell m}^{0\text{TH}}}{\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell,m} \frac{(\hat{f}_{\ell m}^{0\text{TH}})^2}{\mathbf{e}_\ell \mathbf{e}_{\ell+1}} \right)^{-1}. \quad (4.42)$$

Para a componente z podemos ainda aproveitar a simetria $f_{\ell m} = f_{\ell -m}$, somando então o estimador apenas no intervalo $m \in (0, \ell)$ e $\ell \in (2, \ell_{\max})$ (lembrando de multiplicar o somatório por 2 para $m \in (1, \ell)$), reduzindo o custo computacional pela metade.

4.3 Efeito da aplicação de uma máscara no espaço dos harmônicos e suas consequências para o estimador

Em experimentos de RCF não temos acesso a todo o céu, de fato, é necessário mascarar o plano galático e outras fontes, como a nuvem de Magalhães. Na seção anterior consideramos o efeito da máscara apenas como uma perda de sinal proporcional a $\sqrt{f_{\text{sky}}}$ (equação (4.14)).

Porém, como demonstrado em (Hivon et al., 2002; Pereira et al., 2010), na presença de uma máscara $W(\hat{n})$ (sendo 0 para uma direção \hat{n} mascarada e 1 para não mascarada) os $a_{\ell m}$'s são modificados de acordo com a equação (4.43).

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{\ell m} &= \int d\hat{n} \Delta T(\hat{n}) W(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}), \\
&= \sum_{\ell' m'} a_{\ell' m'} \int d\hat{n} Y_{\ell' m'}(\hat{n}) W(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}), \\
&= \sum_{\ell' m'} a_{\ell' m'} K_{\ell m \ell' m'} [W],
\end{aligned} \tag{4.43}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
K_{\ell_1 m_1 \ell_2 m_2} &\equiv \int d\hat{n} Y_{\ell_1 m_1}(\hat{n}) W(\hat{n}) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{n}) \\
&= \sum_{\ell_3 m_3} w_{\ell_3 m_3} \int d\hat{n} Y_{\ell_1 m_1}(\hat{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{n}) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{n}) \\
&= \sum_{\ell_3 m_3} w_{\ell_3 m_3} (-1)^{m_2} \left[\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell_3 + 1)}{4\pi} \right]^{1/2} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & -m_2 & m_3 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

onde os $\tilde{a}_{\ell m}$'s são os $a_{\ell m}$'s observados após a aplicação da máscara, o *Kernel* K descreve o acoplamento entre os modos resultante do mascaramento e introduzimos os simbolos Wigner 3- j (também conhecidos como coeficientes de Clebsch-Gordan, veja o apêndice C de Bartolo et al., 2004) $\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$. Por conseguinte, os $\tilde{a}_{\ell m}$ observados são combinações lineares de vários $a'_{\ell' m'}$, sendo os elementos com ℓ' próximos a ℓ mais relevantes. Logo, os $\tilde{a}_{\ell m}$'s não são independentes e não se relacionam com $a_{\ell m}$'s por um fator multiplicativo como definido em (4.14).

Em nosso caso, $a_{\ell m} = a'_{\ell m}$, isto é, o acoplamento ocorre sobre os $a'_{\ell m}$'s já afetados pelos efeitos de aberração e Doppler.

É possível também calcular o efeito da máscara sobre os C_ℓ 's esperados:

$$\tilde{C}_{\ell_1} = \sum_{\ell_2} M_{\ell_1 \ell_2} C_{\ell_2}, \tag{4.46}$$

com \tilde{C}_{ℓ_1} o C_{ℓ} esperado após o mascaramento e $M_{\ell_1\ell_2}$, chamada de matriz *Master* dada por:

$$M_{\ell_1\ell_2} = \frac{2\ell_2 + 1}{4\pi} \sum_{\ell_3} (2\ell_3 + 1) \mathcal{W}_{\ell_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad (4.47)$$

onde \mathcal{W}_{ℓ} é o espectro de potência da máscara. De forma que a definição para \mathfrak{C}_{ℓ} usada em (4.14) só está correta em primeira ordem.

Isso trará sérias consequências sobre o estimador. Mesmo sendo possível deconvoluir os \tilde{C}_{ℓ_1} , calculando $M_{\ell_1\ell_2}^{-1}$ de forma aproximada² (Hansen et al., 2009; Quartin e Notari, 2015b), não seria possível fazer o mesmo com os $\tilde{a}_{\ell m}$'s. Uma vez que K é uma matriz de dimensão $\ell \times m \times \ell' \times m'$, torna-se inviável calculá-la (e ainda mais inviável inverter aproximadamente) a mesma, mesmo para ℓ 's baixos, de forma que não podemos recuperar os $a'_{\ell m}$ originais. Então, como não conseguimos remover o efeito da máscara sobre os $a'_{\ell m}$'s teremos que utilizar todos os observáveis mascarados, comumente chamados de pseudo-observáveis.

Considerando um mapa mascarado, vamos definir então o estimador no espaço dos pseudos da seguinte forma:

$$\hat{\beta}_x \equiv \sqrt{2} \left(\sum_{\ell,m} \frac{\tilde{f}_{\ell m}^{1 \text{ obs}} \tilde{f}_{\ell m}^{1 TH}}{\tilde{\mathfrak{C}}_{\ell} \tilde{\mathfrak{C}}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell,m} \frac{(\tilde{f}_{\ell m}^{1 TH})^2}{\tilde{\mathfrak{C}}_{\ell} \tilde{\mathfrak{C}}_{\ell+1}} \right)^{-1}, \quad (4.48)$$

$$\hat{\beta}_y \equiv -\sqrt{2} \left(\sum_{\ell,m} \frac{\tilde{g}_{\ell m}^{1 \text{ obs}} \tilde{g}_{\ell m}^{1 TH}}{\tilde{\mathfrak{C}}_{\ell} \tilde{\mathfrak{C}}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell,m} \frac{(\tilde{g}_{\ell m}^{1 TH})^2}{\tilde{\mathfrak{C}}_{\ell} \tilde{\mathfrak{C}}_{\ell+1}} \right)^{-1}, \quad (4.49)$$

$$\hat{\beta}_z \equiv \left(\sum_{\ell,m} \frac{\tilde{f}_{\ell m}^{0 \text{ obs}} \tilde{f}_{\ell m}^{0 TH}}{\tilde{\mathfrak{C}}_{\ell} \tilde{\mathfrak{C}}_{\ell+1}} \right) \left(\sum_{\ell,m} \frac{(\tilde{f}_{\ell m}^{0 TH})^2}{\tilde{\mathfrak{C}}_{\ell} \tilde{\mathfrak{C}}_{\ell+1}} \right)^{-1}. \quad (4.50)$$

Onde $\tilde{\cdot}$ representa a variável mascarada equivalente:

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{f_{sky}}} (\tilde{C}_{\ell} + \tilde{N}_{\ell}), \quad (4.51)$$

²Ambos $M_{\ell_1\ell_2}$ e K só podem ser invertidos aproximadamente, pois são matrizes quase singulares. A razão disso é que perdemos informação ao mascarar que não pode ser recuperada. O melhor que podemos fazer é tentar reduzir o viés introduzido pelo acoplamento.

$$\tilde{f}_{\ell m}^{TH} = \frac{\langle \tilde{f}_{\ell m}^s \rangle}{\text{Re}[\beta_s]} \equiv \text{Re} [c_{\ell+1 m+s}^{s-} \tilde{C}_\ell + (-1)^s c_{\ell m}^{-s+} \tilde{C}_{\ell+1}] , \quad (4.52)$$

$$\tilde{g}_{\ell m}^{TH} = \frac{\langle \tilde{g}_{\ell m}^s \rangle}{\text{Im}[\beta_s]} \equiv \text{Im} [c_{\ell+1 m+s}^{s-} \tilde{C}_\ell + (-1)^s c_{\ell m}^{-s+} \tilde{C}_{\ell+1}] .$$

E a nova variância cósmica será definida como:

$$\delta\beta \equiv \left(\sum_{\ell, m} \frac{(\tilde{f}_{\ell m}^{TH})^2}{\tilde{c}_\ell \tilde{c}_{\ell+1}} \right)^{-1} . \quad (4.53)$$

Podemos verificar o efeito da matriz Master sobre $\delta\beta$ comparando com o caso em que consideramos o efeito da máscara apenas como uma fator multiplicativo de perda de sinal (equação (4.14)). Na figura 4.4 verificamos que o efeito esperado é irrelevante para $\ell \geq 1100$, e afeta principalmente o sinal de aberração.

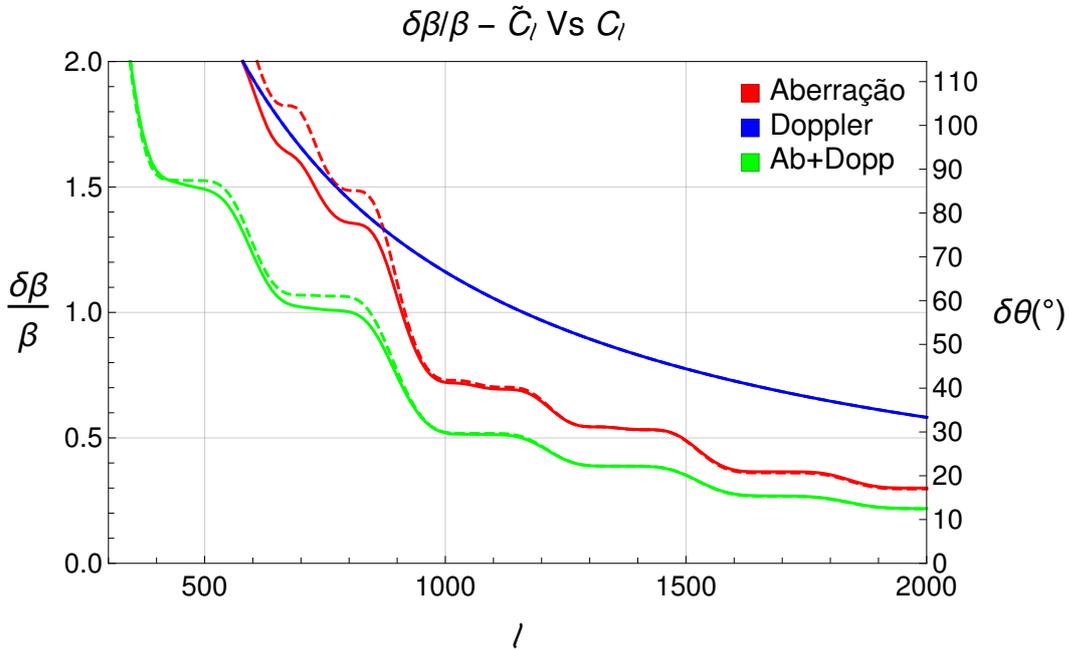


FIGURA 4.4: Comparação entre os $\delta\beta$'s esperados para os estimadores com e sem a correção da matriz Master. A linha tracejada indica o valor do estimador de $\delta\beta$ para o caso mascarado sem a correção de $M_{\ell_1 \ell_2}$ (equação (4.20)) e a contínua para o estimador com a correção de $M_{\ell_1 \ell_2}$ (equação (4.53)). As curvas para o efeito Doppler estão sobrepostas.

Porém, como nosso estimador não considerou o mascaramento em sua derivação, sua precisão e acurácia estarão comprometidas. As correlações introduzidas pela transformação de Lorentz ainda estarão presentes, contudo teremos vários modos acoplados. Isso ocorre pois o nosso observável $\tilde{F}_{\ell m}$ em termos dos $a_{\ell m}$'s originais (não mascarados, usados na dedução do estimador) será:

$$\tilde{F}_{\ell m} = \tilde{a}_{\ell m} \tilde{a}_{\ell+1 m} \quad (4.54)$$

$$= \sum_{\ell' m'} a_{\ell' m'} K_{\ell m \ell' m'} \sum_{\ell'' m''} a_{\ell'' m''} K_{\ell+1 m \ell'' m''} \quad (4.55)$$

Logo, não teremos apenas correlações do tipo $a_{\ell m} a_{\ell+1 m}$ em $\tilde{a}_{\ell m} \tilde{a}_{\ell+1 m}$, teremos diversas combinações não diagonais misturadas. O efeito disso no estimador é, até o momento, imprevisível. No capítulo 5 vamos estudar o impacto dos acoplamentos causados pelo mascaramento nas medidas de $\vec{\beta}$, utilizando um grande conjunto de simulações, em diversas direções e com diferentes tipos de máscara, buscando formas de mitigar os efeitos da máscara sobre o estimador, algo que não foi considerado em Challinor e Leeuwen, 2002; Amendola et al., 2010; Notari e Quartín, 2012; Kosowsky e Kahniashvili, 2011; Chluba, 2011.

O desconhecimento do tratamento completo para o caso mascarado é evidente quando comparamos a expectativa teórica de $\delta\beta$ com os efeitos da máscara e os resultados obtidos nas simulações (já com o viés removido após o *pipeline* desenvolvido no capítulo 5), vide a figura 5.13. Para o nosso deleite há mais sinal do que esperávamos. Uma hipótese é que este ganho seja oriundo de outras correlações não diagonais que não consideramos e agora estão misturadas em nosso observável (veja Chluba, 2011 para mais detalhes sobre a importância das correlações $a_{\ell m} a_{\ell+nm}$ com $n > 1$). Um estudo mais completo da origem desse sinal deve ser realizado no futuro, abrindo mão de algumas aproximações em nosso estimador.

4.4 Relação entre coordenadas Galácticas e Cartesianas

Obtemos nas seções anteriores o estimador em coordenadas cartesianas, porém iremos trabalhar com mapas de pixels e resultados em coordenadas galácticas. A relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas galácticas ($\ell = \theta$ =longitude, $b = \phi$ =latitude) na esfera

celeste, para um dado ponto P observado, é dada por:

$$x = \cos\phi \cos\theta, \quad (4.56)$$

$$y = -\cos\phi \sin\theta, \quad (4.57)$$

$$z = \sin\phi. \quad (4.58)$$

Que pode ser representado na figura 4.5.

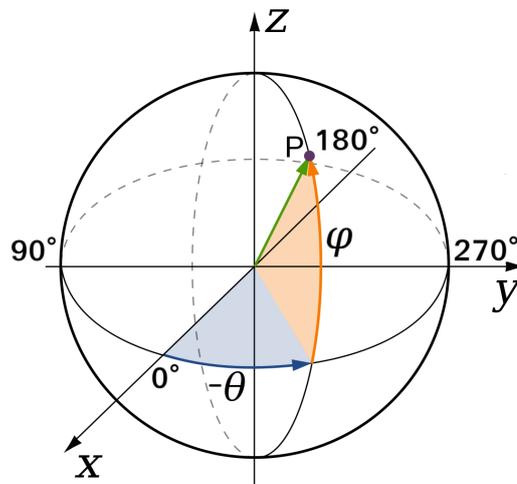


FIGURA 4.5: Relação entre os sistemas de coordenadas Galáctico e Cartesiano.

Ou seja, diferente do sistema de coordenadas esférico, a longitude θ (ou ℓ) aumenta no sentido **anti-horário** e a partir do eixo x . Sendo ϕ (ou b) a latitude, que é 0 no plano xy , variando de -90° (polo sul) a 90° (polo norte), e $\rho = 1$ pois trata-se da representação de um mapa.

Novamente, todos esses resultados podem ser generalizados para o caso dos mapas de polarização (como em Amendola et al., 2010; Notari e Quartín, 2012), porém neste trabalho vamos focar apenas nos mapas de temperatura.

Capítulo 5

Metodologia e simulações

5.1 Como medir $\vec{\beta}$ e o dipolo intrínseco

Utilizando o estimador desenvolvido no capítulo 4 podemos aferir a velocidade $\vec{\beta}$ do observador com relação ao referencial de repouso da RCF. Subtraindo do valor do dipolo encontraremos o dipolo intrínseco, a menos de uma margem de erro. Contudo, para verificar as incertezas e testar nosso estimador precisamos primeiro de simulações as quais já sabemos o resultado esperado para $\vec{\beta}$. Para isso utilizamos uma versão modificada do HEALPix (Catena e Notari, 2013; Catena et al., 2013; Notari, Quartin e Catena, 2014) que introduz o *boost* no espaço de *pixels*¹.

Vimos no capítulo anterior que as aproximações utilizadas na construção de nosso estimador não levaram em conta o acoplamento introduzido sobre os $a_{\ell m}$'s devido ao mascaramento, o qual não pode ser removido. Com isso, ao trabalhar no espaço dos pseudo-observáveis a acurácia do estimador está comprometida, introduzindo erros sistemáticos, o que não foi considerado em Challinor e Leeuwen, 2002; Amendola et al., 2010; Notari e Quartin, 2012; Kosowsky e Kahniashvili, 2011.

Neste capítulo, utilizamos a versão modificada do Healpix para gerar uma grande quantidade de simulações, em diferentes direções, calculando o viés do estimador introduzido pelo mascaramento de acordo com a escala angular. Isso foi feito considerando os efeitos de aberração e Doppler separadamente, pois eles podem ter origens distintas (efeitos não cinemáticos

¹A vantagem de se trabalhar no espaço de pixels é não precisar de aproximações, como feito para o cálculo do *boost* sobre os $a_{\ell m}$'s em Notari e Quartin, 2012. Sobre o espaço de *pixels* podemos usar a equação 3.14 de forma exata.

citados no capítulo 1). Além dos sistemáticos do método em si, lidamos com aqueles introduzidos na construção dos mapas do Planck, como o efeito de linearização da temperatura (que veremos na seção 5.6) e o efeito de assimetria do sinal devido a geometria das máscaras utilizadas (seção 5.3).

Para mitigar esses sistemáticos construímos um *pipeline* (seção 5.7), com o qual pudemos testar alguns métodos para otimizar as medidas, como a utilização de máscaras simetrizadas (vide seção 5.4) e *inpainting* (apêndice A). Obtivemos assim resultados inéditos.

5.2 Healpix e Simulações

5.2.1 Healpix e modificações

HEALPix é uma sigla para Pixelização, Hierárquica de área constante e iso-latitute (Hierarquical, Equal Area and iso-Latitude Pixelization). Este software foi desenvolvido para mapear *pixels* sobre uma esfera, assim como decompor um mapa de *pixels* no espaço dos harmônicos.

O esquema de pixelização deste software é utilizado por todos os grandes experimentos de RCF² desde o WMAP. Como o nome sugere, o formato da pixelização atende aos seguintes princípios básicos:

- Hierárquico: A esfera a ser pixelada é dividida inicialmente em 12 *pixels* (resolução-base), e é sub-dividida de forma hierárquica, onde cada pixel pode ser dividido em 4 *pixels* sucessivamente até que se atinga a resolução esperada. O número de subdivisões é chamado de N_{side} . Diferentes valores de N_{side} estão ilustrados na figura 5.1, onde podemos ver as sucessivas subdivisões dos *pixels*. Dessa forma os número de *pixels* de um mapa estão relacionados ao N_{side} escolhido da seguinte forma:

$$N_{pix} = 12 \cdot N_{side}^2$$

- Área constante: Todos os *pixels* ocupam a mesma área sobre a superfície da esfera, dessa forma não há enviesamento para nenhuma região.

²Não somente experimentos de RCF, como qualquer experimento que lide com mapas do céu.

- Iso-latitude: Os centros dos *pixels* são posicionados em anéis de latitude constante. Essa simetria é utilizada pois é vantajosa em termos computacionais para a expansão em harmônicos esféricos.

Podemos representar graficamente esse esquema de pixelização na figura 5.1.

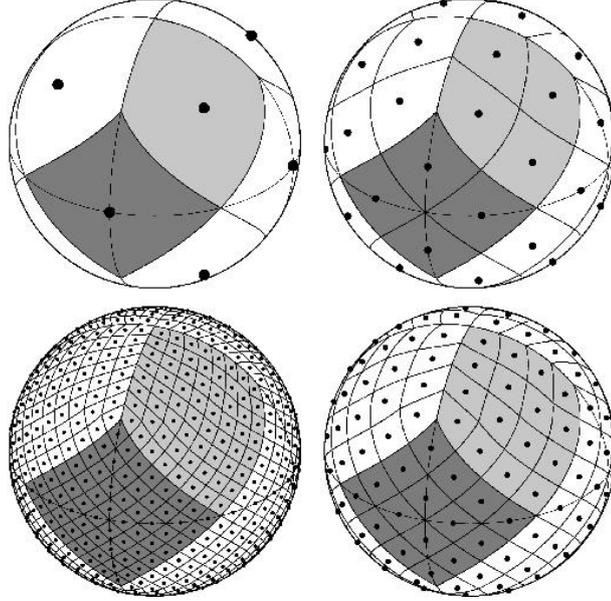


FIGURA 5.1: Representação do esquema de pixelização do HEALPix. Na figura superior esquerda temos os *pixels* base do HEALPix. Seguindo as figuras no sentido horário, temos a primeira sub-divisão dos *pixels* base, $N_{side} = 2$, e depois $N_{side} = 4$ e $N_{side} = 8$. Note que os centros dos *pixels* sempre formam anéis de latitude constante.

O HEALPix não possui uma rotina para aplicar *boosts* sobre mapas. Para gerarmos as simulações com *boost* foram feitas modificações no programa **synfast**³ do Healpix (Catena e Notari, 2013; Catena et al., 2013; Notari, Quartin e Catena, 2014). Iniciando com um mapa sem efeito de aberração e Doppler, a temperatura observada no centro de um pixel qualquer p é:

$$T(\theta_p, \phi_p) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta_p, \phi_p) \quad (5.1)$$

Onde os ângulos (θ_p, ϕ_p) identificam o centro do *pixel* p , sendo θ_p a latitude e ϕ_p a longitude, e os $a_{\ell m}$'s são gerados a partir de um C_ℓ fiducial. Incluindo os efeitos de aberração e Doppler,

³Sua versão padrão (sem modificações) é utilizada para gerar mapas e $a_{\ell m}$'s.

para um *boost* na direção z essa equação se torna (como previsto pela equação (3.2)):

$$T'(\theta_p, \phi_p) = \left[1 + \beta \cos(f(\theta_p))\right] \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(f(\theta_p), \phi_p), \quad (5.2)$$

de forma que alteramos o mapeamento dos harmônicos esféricos (modificando a rotina `alm2map` do Healpix, onde se constrói o layout de *pixels*), e com isso também o mapeamento dos *pixels*. Note que dado o somatório da equação acima, ainda estamos no espaço de *pixels*. O termo $f(\theta_p)$ é encontrado usando a equação (3.19) para a aberração (projetada na direção de $\vec{\beta}$, paralela ao eixo z):

$$f(\theta_p) = \arccos\left(\frac{\cos\theta_p - \beta}{1 - \beta \cos\theta_p}\right). \quad (5.3)$$

Dessa forma utilizamos a propriedade de iso-latitudes do esquema de pixelização para simplificar o processo, uma vez que o fator $\left[1 + \beta \cos(f(\theta_p))\right]$ pode ser aplicado para cada anel de latitude θ_p (e não nos *pixels* individualmente), tornando o processo menos custoso computacionalmente. De fato, a versão modificada do Healpix faz apenas boosts na direção z , aproveitando a simetria de rotação do *boost* e do esquema de *pixels*.

Tendo o mapa de *pixels* $T'(\theta_p, \phi_p)$ em mãos, podemos expandi-lo em harmônicos esféricos, utilizando o programa **anafast** do HEALPix, obtendo os $a_{\ell m}$'s com os efeitos de aberração e Doppler, os quais podemos testar nosso estimador.

Aplicando uma matriz de rotação através do programa **alteralm** do Healpix modificado podemos rotacionar os $a_{\ell m}$'s, obtendo o boost em uma direção arbitrária (na figura 5.2 temos o boost na direção do dipolo como medido em Planck Collaboration, 2018a).

Com o uso dessas ferramentas^{4,5} podemos então gerar simulações onde sabemos de antemão o valor de $\vec{\beta}$, e testar o estimador em diferentes casos. As figuras 1.2 e 5.2 trazem exemplos de mapas gerados por esta versão modificada do HEALPix.

⁴Para mais informações sobre o HEALPix consulte a documentação em <https://healpix.sourceforge.io/documentation.php>.

⁵Para informações sobre o HEALPix modificado consulte a documentação em <http://darnassus.if.ufrj.br/mquartin/cmb/>.

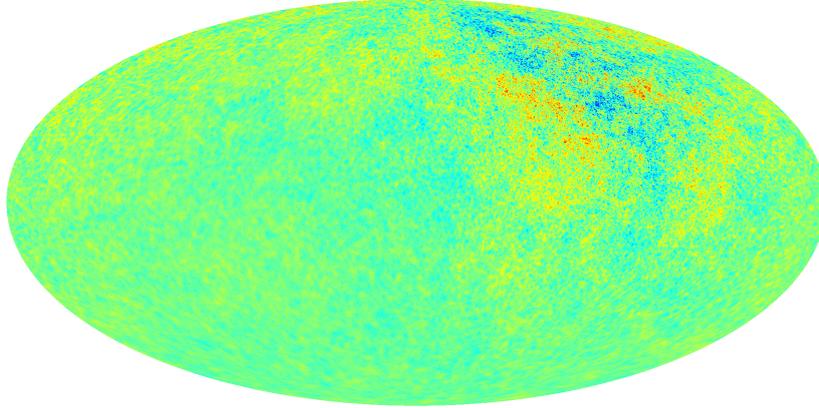


FIGURA 5.2: Boost na direção \hat{z} obtido com o synfast modificado e posteriormente rotacionado pelo programa alteraalm para a direção do dipolo ($l=264.02, b=48.25$).

5.2.2 Simulações Ideais

Em casos ideais, isto é, sem máscara e ruído, os resultados obtidos com as simulações são os esperados para o estimador ideal, dentro da margem de erro teórica (equação (4.20)), como na figura 4.2.

Para as resoluções angulares $\ell_{max} = 1500$ e $\ell_{max} = 2000$, podemos encontrar os seguintes resultados (como previsto):

| Resultados Ideais - $\ell_{max} = 1500$ | | | |
|---|--------|--|--|
| Tipo | | $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{Abs}$ (km/s) | $\delta\theta = \delta Lat$ ($^\circ$) |
| Aberração | Estat. | 144 | 23.8 |
| Doppler | Estat. | 244 | 37.8 |
| Aberração +Doppler | Estat. | 111 | 17.1 |

TABELA 5.1: Resultados ideais para $\ell_{max} = 1500$. Esse é o nosso limite inferior teórico para os erros nessa resolução para um dado experimento ideal.

| Resultados Ideais - $\ell_{max} = 2000$ | | | |
|---|--------|--|--|
| Tipo | | $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{Abs}$ (km/s) | $\delta\theta = \delta Lat$ ($^\circ$) |
| Aberração | Estat. | 93 | 14.5 |
| Doppler | Estat. | 183 | 28.4 |
| Aberração +Doppler | Estat. | 68.3 | 10.6 |

TABELA 5.2: Resultados ideais para $\ell_{max} = 2000$. Esse é o nosso limite inferior teórico para os erros nessa resolução para um dado experimento ideal.

Porém, os casos ideais já foram verificados em (Catena e Notari, 2013; Catena et al., 2013; Notari, Quartin e Catena, 2014). Nosso interesse está em situações mais realistas, pois nosso objetivo é aplicar em dados observacionais. Nas próximas seções vamos estudar em mais detalhes os casos com mascaramento e sistemáticos introduzidos na construção dos mapas da RCF, obtendo resultados inéditos.

Na figura 5.3 podemos ver um exemplo com 100 simulações ideais ($\ell_{max} = 2000$) com a direção ($l=264^\circ, b=48^\circ$) e módulo ($\beta = 0.00123$) do dipolo da RCF. Obtendo os resultados esperados da tabela 5.2.

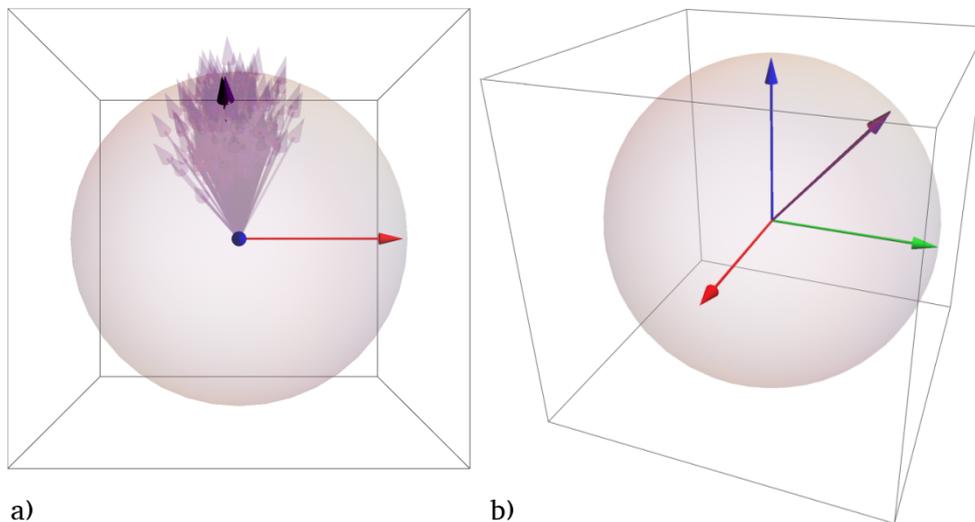


FIGURA 5.3: **a)** Distribuição de 100 simulações. A esfera representa o módulo fiducial, que se espera recuperar na média das simulações. Os vetores na cor roxa representam as medidas obtidas pelo estimador sobre os $a_{\ell m}$'s obtidos das simulações. O vetor médio das simulações (roxo opaco) e o vetor fiducial (preto) estão sobrepostos. Os vetores vermelho, verde e azul simbolizam os eixos x , y e z respectivamente. O vetor fiducial representa o boost aplicado sobre os mapas. A distribuição dos vetores é simétrica em relação a uma rotação em torno do vetor preto, isto é, $\sigma_{\beta_x} = \sigma_{\beta_y} = \sigma_{\beta_z}$, como o esperado. **b)** O vetor médio das simulações coincide com o fiducial dentro da margem de erro esperada.

5.3 Viés de assimetria da máscara

Em um experimento real precisamos lidar com *foregrounds*, fontes indesejadas de radiação que obstruem ou contaminam o sinal da RCF, principalmente no plano galático, além de outras fontes pontuais como galáxias vizinhas e aglomerados de galáxias.

Em casos extremos o melhor que se pode fazer é remover as fontes do mapa da RCF. Isso é feito através de uma máscara, uma função janela $W(\theta, \phi)$ que varia entre 0 (mascarado) e 1 (não mascarado) dependendo da coordenada θ e ϕ , onde θ é latitude do pixel, ϕ a longitude. Para aplicar a máscara, multiplicaremos essa função pelo mapa de temperatura $T(\theta, \phi)$.

Porém, o processo de mascaramento não está imune de introduzir sistemáticos. De fato, além dos acoplamentos entre os harmônicos vistos no capítulo anterior (Hivon et al., 2002; Pereira et al., 2010), a máscara pode gerar uma assimetria na distribuição de sinal do céu. Chamaremos de "viés de assimetria da máscara" o viés introduzido por este efeito.

O "viés de assimetria da máscara" ocorre na forma de um *boost* fictício. Para o caso da máscara UT78(2018) do Planck, utilizando o estimador com as componentes de aberração e Doppler, ele é medido na direção $l = 210.7$ e $b = -3.2$ (vide figura 5.4) com valor $\beta = 3322 \text{ km/s}$.

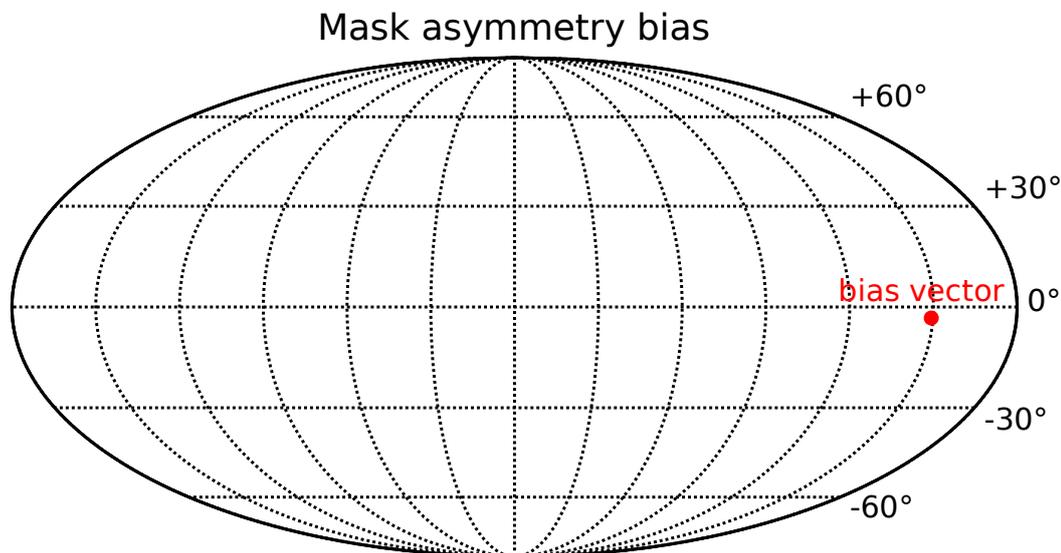


FIGURA 5.4: O ponto vermelho indica a direção do "boost efetivo" introduzido pela assimetria da máscara. Podemos simplesmente remover ele dos dados, ou modificar a máscara.

Esse enviesamento ocorre devido ao não balanceamento de sinal entre *pixels* antipodais.

Para um dado *pixel* p mascarado, não teremos obrigatoriamente um *pixel* mascarado em seu ponto antipodal, isto é, no ponto oposto da esfera ao *pixel* p . Esse excesso de sinal ocorre de forma que se introduz um "boost efetivo" $\vec{\beta}_{asymmetry}$ na direção onde há uma maior assimetria.

Essa assimetria já foi estudada em (Quartin e Notari, 2015b) buscando-se uma explicação para a assimetria de hemisfério da RCF, uma importante anomalia. Para evitar esse viés, assim como em (Quartin e Notari, 2015b), vamos utilizar uma máscara com simetria antipodal. Embora em (Quartin e Notari, 2015b) isso não tenha sido o suficiente para explicar a anomalia, em nosso caso será bastante efetivo, como veremos na seção 5.10.

Podemos também encontrar o vetor $\vec{\beta}_{asymmetry}$ e remover dos resultados, na forma de um viés. Tentaremos os dois métodos, observando que a máscara simétrica obteve resultados superiores, mesmo tendo uma pequena perda de fração do céu.

5.4 Máscara simétrica

Como dito na seção anterior, podemos utilizar uma máscara simetrizada para evitar o viés de assimetria da máscara. Para gerarmos uma máscara $W(\theta, \phi)$ com simetria antipodal precisamos impor que:

$$W(\theta, \phi) = W(\pi - \theta, \phi + \pi) \quad (5.4)$$

Isso pode ser facilmente implementado utilizando o Healpy (*wrapper* do Healpix em Python), onde podemos obter as coordenadas dos *pixels* da máscara utilizando a rotina **pix2ang**. Nas figuras 5.5.a e 5.5.b podemos ver o exemplo da máscara UT78(2018) antes e depois da simetrização. A perda de céu devido a simetrização foi de 5,7%.

Nesse caso não teremos um viés inserido pela assimetria de sinal, apenas o viés introduzido pelo efeito da máscara sobre o acoplamento entre os harmônicos.

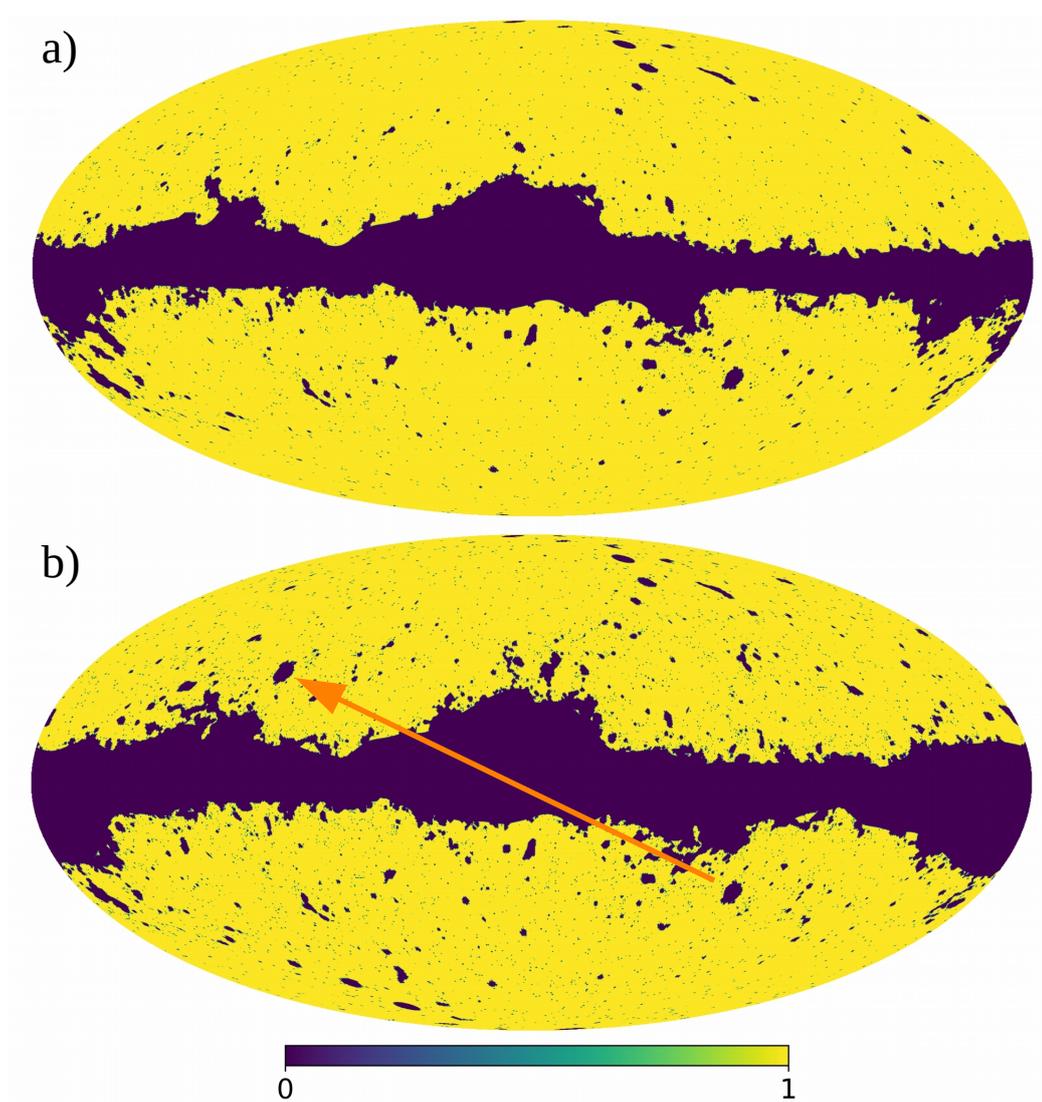


FIGURA 5.5: Comparação entre a máscara UT78(2018) original, figura a), e a simetrizada, figura b). Na figura b) indicamos com uma seta a nuvem de Magalhães em sua posição original e sua respectiva posição antipodal.

5.5 Tratamento do ruído

Além das fontes de *foreground*, as quais podemos remover com uma máscara, em dados observacionais devemos ainda lidar com o ruído e feixe gaussiano⁶ do experimento. Uma vez que as simulações com ruído e feixe gaussiano não foram realizadas para essa dissertação, estabeleceremos o limite $\ell_{max} = 1500$ para as análises das seções a seguir, pois estaremos em uma região onde o ruído é subdominante (como visto na figura 5.6), isto é:

$$\frac{\sum_{\ell=3}^{1500} (2\ell + 1) \frac{N_{\ell}}{C_{\ell} + N_{\ell}}}{\sum_{\ell=3}^{1500} (2\ell + 1)} \approx 0.071, \quad (5.5)$$

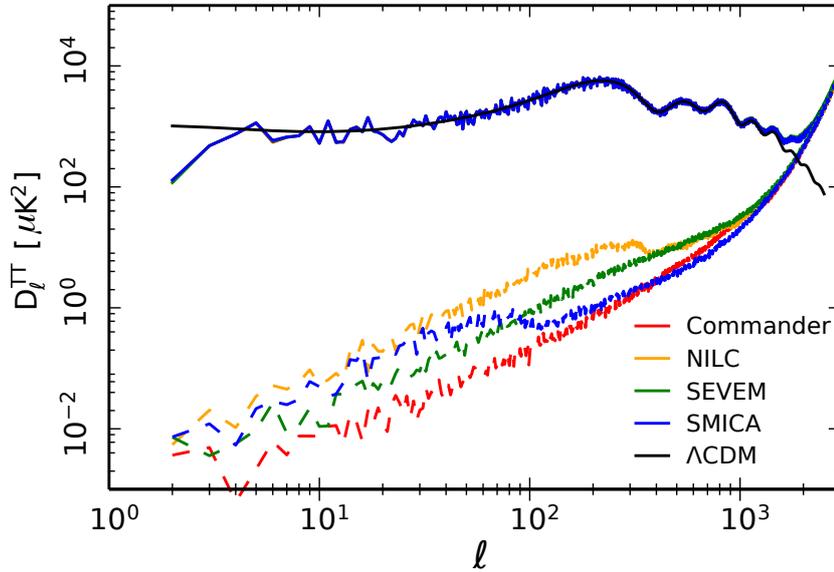


FIGURA 5.6: Comparação entre o melhor ajuste para o espectro de potência (em preto), os espectros dos mapas HMHS (linhas sólidas) e dos mapas HMHD (linhas pontilhadas), para cada *pipeline* do Planck 2018. Os mapas HMHD são dados pela diferença entre os mapas da primeira e segunda metade do período de observação do Planck, sendo uma boa estimativa do ruído e sistemáticos. Já os HMHS são dados pela soma. Figura adaptada de Planck Collaboration, 2018c.

Consideraremos então $\mathfrak{C}_{\ell} = \frac{\tilde{C}_{\ell} + N_{\ell}}{\sqrt{f_{sky}}} \simeq \frac{\tilde{C}_{\ell}}{\sqrt{f_{sky}}}$. Com isso, esperamos utilizar as simulações apenas com os efeitos de mascaramento, já realizadas, sem grande prejuízo com relação a acurácia dos resultados nesta dissertação. Para o artigo a ser submetido utilizaremos simulações

⁶Capacidade de resolver objetos pontuais devido a questões ópticas e/ou atmosféricas. É dito "gaussiano" pois o perfil de espalhamento da fonte pontual é uma curva gaussiana, onde costumamos utilizar como parâmetro de definição do feixe gaussiano a largura em graus da meia altura da gaussiana.

com ruído, baseadas nos modelos de ruído e sistemáticos do Planck (Planck Collaboration, 2018b, apêndice A). Obtendo assim resultados mais realistas, com isso estenderemos a resolução angular para $\ell_{max} = 2000$.

5.6 Efeitos de Linearização da temperatura - Removendo o *dipole Doppler*

Devemos ainda lidar com um sistemático decorrente do processo de construção dos mapas de temperatura. O *dipole Doppler* é um sistemático introduzido por uma aproximação linear utilizada na relação entre a intensidade bolométrica específica $I(\nu)$ e a temperatura T (Quartin e Notari, 2015a; Notari e Quartin, 2016). Para um corpo negro a relação entre $I(\nu)$ e T é dada por:

$$I(\nu) = \frac{h}{c^2} \frac{2\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T(\hat{n})}} - 1}, \quad (5.6)$$

Considerando a decomposição $T(\hat{n}) = T_0 + \Delta T(\hat{n})$, onde T_0 é o monopolo e $\Delta T(\hat{n})$ a anisotropia, expandindo em uma série de Taylor em primeira ordem obtemos:

$$\delta I(\nu, \hat{n}) \approx \frac{h}{c^2} \frac{2\nu^4 e^{\frac{\nu}{T_0}}}{T_0^2 (e^{\frac{\nu}{T_0}} - 1)^2} \delta T(\hat{n}) \equiv K \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}. \quad (5.7)$$

Onde $\nu_0 \equiv k_B T_0 / h = (56.79 \pm 0.01)$ GHz e definimos a "temperatura linearizada" como $L(\hat{n}) \equiv \delta I(\nu, \hat{n}) / K$. Essa aproximação é costumeiramente utilizada nos experimentos de RCF para definir a temperatura medida. Porém, como veremos, ela nos levará a introdução de um sistemático, pois os termos de segunda ordem não são desprezíveis. Estendendo a série até a segunda ordem encontramos:

$$L(\nu, \hat{n}) = \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} + \left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^2 Q(\nu) \quad \text{onde:} \quad Q(\nu) \equiv \frac{\nu}{2\nu_0} \coth \left[\frac{\nu}{2\nu_0} \right]. \quad (5.8)$$

Isto é, os termos de segunda ordem dependem da frequência da radiação, sendo a função $Q(\nu)$ chamada de *boost factor*⁷. Considerando ainda a equação (5.6), para um referencial

⁷Lembre-se que T não é função de ν . Nesse caso, o sistemático depende de ν .

arbitrário rescrevemos (5.8) como:

$$\begin{aligned}
L(\nu, \hat{\mathbf{n}}) &= \mu \Delta_1 + \frac{\delta T}{T_0} - \frac{1}{2} \beta^2 - \mu \beta \frac{\delta T}{T_0} + \beta \left(\frac{\delta T_{ab}}{T_0} \right) \\
&+ \left[\left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \Delta_1^2 + \frac{1}{3} \Delta_1^2 + 2\Delta_1 \mu \frac{\delta T}{T_0} \right] Q(\nu) \\
&+ L_{\text{higher}}, \tag{5.9}
\end{aligned}$$

onde Δ_1 é o valor do dipolo total medido (componente cinemática mais intrínseca) e $\mu = \hat{\Delta}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Sendo β a velocidade peculiar, δT as anisotropias de primeira ordem da temperatura para $\ell \geq 2$ e $(\delta T_{ab}/T_0)$ os termos de aberração. L_{higher} são termos de ordem Δ_1^3 ou maior.

Os termos proporcionais a $Q(\nu)$ são correções de segunda ordem. Dentre eles, apenas $2\Delta_1 \mu \frac{\delta T}{T_0} Q(\nu)$ afeta multipolos acima do quadrupolo (Quartin e Notari, 2015a; Notari e Quartin, 2016). Na prática, isso significa uma modulação Doppler fictícia equivalente a que seria introduzida por uma velocidade $\beta = 2\Delta_1 Q(\nu)$ na direção do dipolo, a qual chamamos de *dipole Doppler*. Como $\mu = \hat{\Delta}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta \Delta_1$, de acordo com a equação (3.11), em ordem β isso equivale a uma modulação Doppler, sem efeito aberração. Esse efeito é um sistemático sem qualquer informação física nova e devemos removê-lo do mapa de temperatura para não enviesarmos nossa medida do dipolo cinemático na direção do dipolo.

Logo, para um dado mapa de temperatura obtido pela medida da radiação na frequência ν , precisamos remover a modulação Doppler aplicando uma modulação contrária, semelhante a introduzida por referencial com $\beta = -2\Delta_1 Q(\nu)$. Dessa forma recuperando o mapa correto, ou seja, sem este sistemático na componente Doppler.

Para o caso do Planck temos a combinação de mapas em 9 frequências diferentes para gerar um mapa de RCF. Existem vários pipelines (métodos para a construção de um mapa de RCF) utilizados para combinar esses mapas otimizando a remoção de *foregrounds* galácticos, extra-galácticos e sistemáticos. Para *pipelines* como o SMICA e NILC, onde são feitas apenas combinações lineares dos mapas em diferentes frequências variando o peso das combinações de acordo com a escala angular, é relativamente simples remover a modulação Doppler introduzida pelo efeito de "linearização da temperatura". Já em *pipelines* mais complexos, como o

SEVEM e o COMMANDER onde são feitas combinações de acordo com regiões no espaço de *pixels*, essa correção não é trivial, e nem mesmo está disponível ao público o código completo do *pipeline*. Portanto vamos optar pelo uso apenas dos mapas SMICA e NILC.

No *pipeline* SMICA (2018) os mapas de frequência única do Planck são combinados considerando os pesos como na figura 5.7, onde o eixo vertical esquerdo indica os pesos $w(i, \ell)$ de cada um dos 9 mapas de frequência única por escala angular, sendo i é o número que identifica um dos 9 canais de frequência e a soma dos pesos é sempre igual a 1.

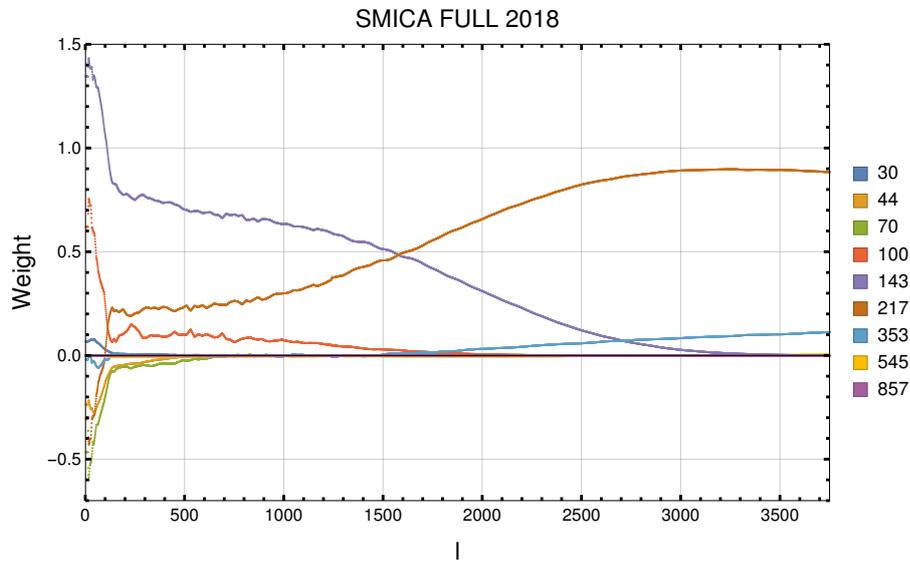


FIGURA 5.7: Peso de cada banda do Planck de acordo com a escala angular para a combinação linear do *pipeline* SMICA. A legenda indica as frequências centrais das bandas em Ghz.

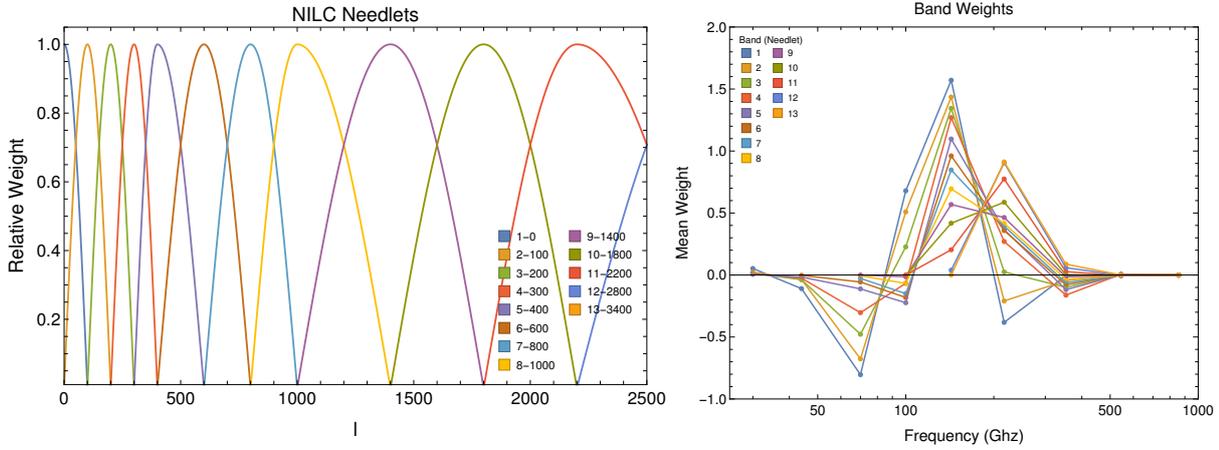
No *pipeline* NILC (2018) o espaço harmônico é dividido em *needlets*, figura 5.8a, onde para cada *needlet* temos diferentes pesos para as combinações dos mapas de frequência única, figura 5.8b. Neste caso $w(i, \ell)$ é dado pela soma dos produtos dos *needlets* com os pesos médios de cada *needlet*.

Para cada pipeline podemos encontrar o *boost factor* efetivo $Q(\ell)_{efetivo}$:

$$Q(\ell)_{efetivo} = \sum_{i=1}^9 w(i, \ell) Q(v(i)) \quad (5.10)$$

Para os mapas SMICA e NILC encontraremos $Q(\ell)_{efetivo}$ como na figura 5.9.

Para aplicar a correção em um mapa já combinado precisamos primeiro expandi-lo em



(A) Needlets do *pipeline* NILC. Pesos para cada combinação de bandas de acordo com a escala angular. (B) Peso médio para cada banda do Planck de acordo com o *needlet*.

FIGURA 5.8: Pipeline NILC. A legenda da figura a) está no formato (Nº do Needlet)-(Valor Central).

harmônicos esféricos utilizando o programa Anafast. Binamos o espaço harmônico com ℓ variando de 10 em 10 (mesma binagem que utilizamos para medir β com o estimador), e para cada bin geramos um novo mapa de pixels utilizando o programa Synfast, como visto na figura 5.10. Nesses novos mapas podemos introduzir um *boost* com $\vec{\beta} = -2\Delta_1\mu\langle Q(\ell)_{efetivo} \rangle_{bin}$ utilizando o programa Synfast modificado, onde $\langle Q(\ell)_{efetivo} \rangle_{bin}$ é a média de $Q(\ell)_{efetivo}$ para cada bin (considerando o numero de modos por ℓ).

Após a remoção da modulação introduzida pelo *boost factor* em cada bin, podemos retornar ao espaço de harmônicos e unir os mesmos novamente obtendo os $a_{\ell m}$'s corrigidos. Geramos um novo mapa de *pixels* com esses $a_{\ell m}$'s, onde agora aplicaremos máscara desejada. Decomponos então mais uma vez em harmônicos esféricos, obtendo os $\tilde{a}_{\ell m}$ corrigidos. Podemos agora executar o estimador de β , cuja binagem coincide com a utilizada no passo anterior, e encontrar a velocidade β utilizando a componente Doppler sem o viés na direção do dipolo.

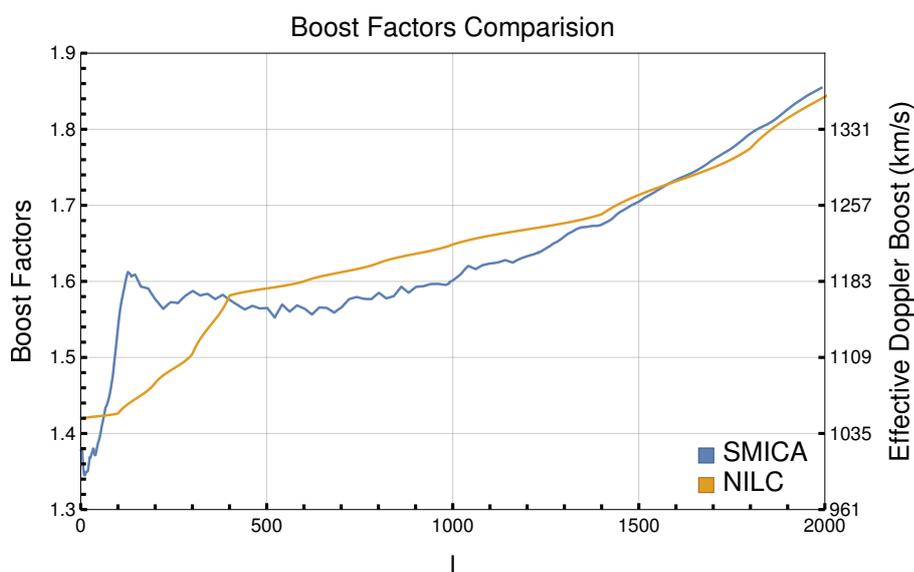


FIGURA 5.9: *Boost factor e dipole Doppler*. Na escala esquerda vemos o *boost factor*, já na direita obtemos o valor efetivo da modulação Doppler introduzida pela aproximação linear da temperatura, o *dipole Doppler*. Devemos fazer um *boost* contrário, com diferentes valores para cada escala angular, em vista de mitigar este sistemático. Observando os valores dos *boosts* necessários para a correção do sistemático (eixo vertical direito) fica evidente que os termos de segunda ordem da expansão em Taylor não são desprezíveis.

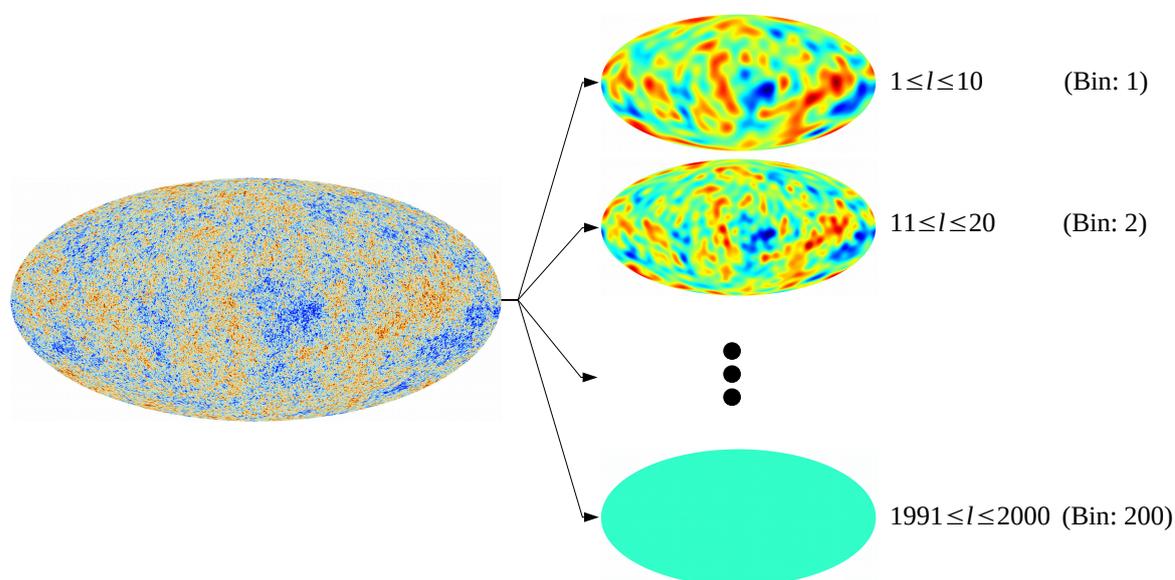


FIGURA 5.10: Fatiamos o espaço dos harmônicos em bins, variando ℓ de 10 em 10, mesma binagem que utilizaremos no estimador. Para cada bin efetuamos um *boost* contrário ao introduzido pela "linearização" da temperatura, a fim de recuperar o mapa sem o *dipole Doppler*.

5.7 Pipeline

Vamos agora apresentar o *pipeline* construído para a geração e análise das simulações e remoção dos diferentes tipos de sistemáticos, esquematizado na figura 5.11, o qual utilizaremos de agora em diante.

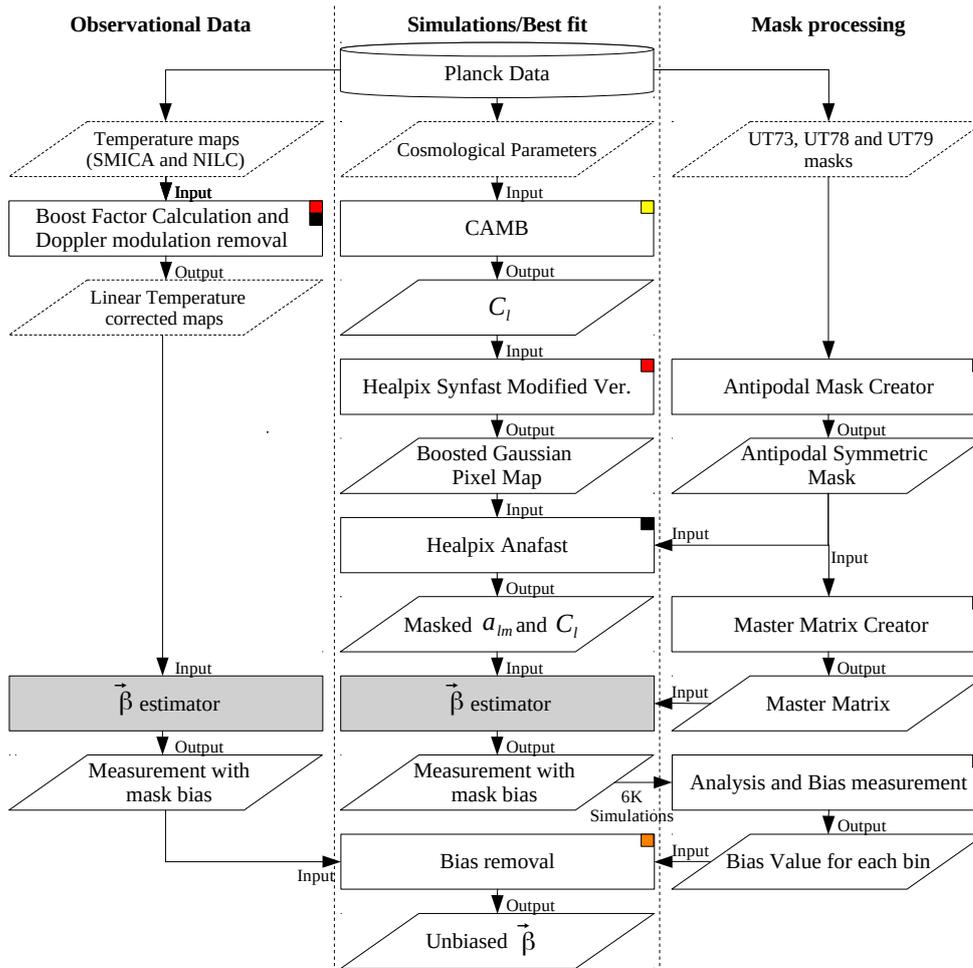


FIGURA 5.11: *Pipeline* para a medida da velocidade peculiar e dipolo intrínseco. Retângulos são programas e paralelogramos são suas entradas e saídas de dados. **Paralelogramos tracejados** significam dados do Planck (onde Temperature maps são os mapas de Temperatura). Cores separam diferentes tipos de processos. **Amarelo** são programas que dependem de **considerações cosmológicas**, **Vermelho** são programas que **aplicam um boost sobre um mapa de pixels**, **Preto** são responsáveis pela **expansão em harmônicos esféricos**, **Violeta** programas que lidam com a **simetrização da máscara**, **Azul** programas que corrigem sistemáticos ocasionados pelo efeito da máscara nos C_l 's e **Laranja** aqueles que **mapeiam e removem o viés da máscara**. Entre o **mapa de pixel gaussiano com boost** (Boosted Gaussian Pixel Map) e o **Anafast**, podemos adicionar uma etapa intermediária **Anafast->Alteraalm->Synfast** para rotacionar os mapas, mudando a direção do *boost* para uma arbitrária.

5.7.1 Descrição

1. Iniciamos gerando os C_ℓ 's no software CAMB utilizando os parâmetros cosmológicos obtidos pela colaboração do Planck (Planck Collaboration, 2018d).
2. Usamos este espectro de potência como entrada para simular mapas de temperatura em nossa versão modificada do Synfast (seção 5.2.1), introduzindo efeitos relativísticos (Aberração, Doppler ou Aberração+Doppler) no espaço de *pixels*.
3. Mascaramos esses mapas. Isso pode ser feito com uma máscara comum ou simetrizada (seção 5.4).
4. Expandimos os mapas em harmônicos esféricos usando o Anafast.
5. Alteramos os C_ℓ 's de entrada aplicando a matriz MASTER (Hivon et al., 2002; Pereira et al., 2010)(seção 4.3) calculada para a máscara aplicada (utilizando um código feito no Mathematica).
6. Após gerarmos um grande número de simulações e calcularmos o novo C_ℓ , executamos o código do estimador (feito em uma combinação de Mathematica+Python) e mapeamos o viés introduzido pela máscara em diferentes escalas angulares (bins no espaço harmônico variando ℓ de 10 em 10) e diferentes direções no céu (seção 5.9).
7. Com o viés calculado, escolhemos um mapa de RCF do Planck, corrigimos o efeito de *boost factor* (seção 5.6), e aplicamos o estimador.
8. Removendo o viés calculado anteriormente obtemos a velocidade peculiar $\vec{\beta}$ (*unbiased* $\vec{\beta}$).
9. Subtraindo $\vec{\beta}$ do Dipolo obtemos o dipolo intrínseco, a menos de uma margem de erro.

5.7.2 Especificações

Para mapear o viés da máscara e obter as estimativas dos erros, realizamos boosts com o valor de $|\beta^{Fiducial}| = 0.0012345$ (o valor do Dipolo no release de 2015) em **96 direções** no hemisfério norte do céu (para as máscaras simétricas isso é equivalente a 192 direções, incluindo o hemisfério sul - como foi visto na seção 5.4), figura 5.12. Essas direções são definidas pelos centros

dos *pixels* do esquema de pixelização do HEALPix para $N_{SIDE} = 4$, dessa forma não enviaremos os resultados para nenhuma direção do céu. Visto que os *pixels* ocupam áreas iguais no céu, uma das propriedades do HEALPix, nenhuma região do céu será mais mapeada que outra. Optamos por $N_{SIDE} = 4$ (96 direções no hemisfério norte) pois $N_{SIDE} = 2$ (24 direções no hemisfério norte) foi verificado como demasiadamente grosseiro para mapear o comportamento do viés, visto que o mesmo varia de forma apreciável dentro de uma região delimitada por um pixel definido para $N_{SIDE} = 2$ (como veremos na seção 5.10).

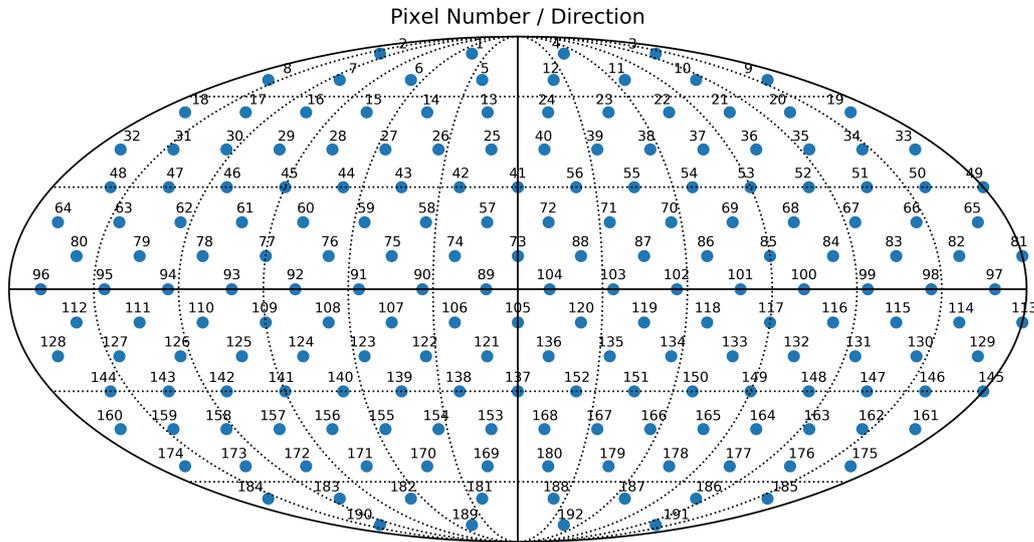


FIGURA 5.12: Direções escolhidas para as simulações, definidas pelos centros dos *pixels* do esquema de pixelização do HEALPix para $N_{SIDE} = 4$.

Em cada direção foram realizadas **64 simulações**, o suficiente para verificar um sistemático superior a $1/\sqrt{64} = 1/8$ do erro estatístico. Para aberraçãõ isso significa detectar sistemáticos da ordem de 3° , para Doppler de 5° e para aberraçãõ+Doppler de 2° , usando $\ell_{max} = 1500$ (vide tabela 5.2). Um número muito baixo de simulações por direção limitará nossa capacidade de separar o que é estatístico do que é sistemático.

Cada simulação foi gerada com $N_{SIDE} = 2048$ (~ 50 Megapixels) e $\ell_{max} = 2500$. Nelas aplicamos separadamente **6 diferentes máscaras** (UT73, UT78-2015, UT78-2018 dos releases do Planck e suas respectivas versões simetrizadas), **3 tipos diferentes de efeitos relativísticos**

(Apenas aberração, apenas Doppler e Aberração+Doppler) e um método simples de Inpainting. Isso significa 6144 simulações de cada tipo, em um total aproximado de 116000 simulações. Utilizadas para estudar o comportamento do estimador em diversas situações. Nas seções a seguir vamos explorar esse pipeline e seus resultados em mais detalhes.

É importante ressaltar que nas simulações com Aberração+Doppler consideramos a hipótese de ambos efeitos serem decorrentes do movimento peculiar. Na prática, as modulações do tipo Aberração e Doppler medidas podem ter origens diferentes. Nos dados observacionais vamos medir as mesmas separadamente para verificar se possuem a mesma natureza, sendo então compatíveis dentro da margem de erro. Dessa forma, verificaremos se a medida obtida pelo estimador com os dois efeitos é compatível com a hipótese de movimento peculiar. Isto é, se suas medidas em separado são compatíveis.

5.8 Definição das medidas, erros estatísticos e sistemáticos

Antes de prosseguirmos com a análise das simulações, precisamos introduzir algumas definições. Embora se trate de uma estatística elementar, é importante definir os diferentes tipos de erros e variáveis, pois iremos trabalhar com muitas variáveis (máscaras, tipos de *boost*, componentes vetoriais, direções, simulações e bins). De forma que os erros associados às componentes vetoriais (os quais estamos interessados) dependem de variáveis estatísticas internas (direções, simulações e bins).

Todo o desenvolvimento a seguir vale para as diferentes máscaras e tipos de *boost*.

5.8.1 Índices

- α , define a componente cartesiana associada ($\alpha = x, y, z$);
- Dir, define a direção associada (para cada componente temos $N_{Dir} = 96$ direções);
- Sim, define a simulação associada (para cada direção temos $N_{Sim} = 64$ simulações);

- Bin, define o bin em ℓ associado (para cada simulação temos $N_{Bin} = 200$ bins medidos, para $\ell_{max}=2000$ e $N_{Bin} = 150$ para $\ell_{max}=1500$);
- Fiducial, refere-se aos valores esperados da simulação.

5.8.2 Definições das medidas cartesianas e erros associados

Vetor $\vec{\beta}$

Obtemos cada componente α de $\vec{\beta}$ em uma dada simulação Sim na direção Dir somando os bins da seguinte forma:

$$\beta_{\alpha,Dir,Sim} = \left(\sum_{Bin=1}^{N_{Bin}} \frac{\beta_{\alpha,Dir,Sim,Bin}}{\sigma_{\beta_{\alpha,bin}}^2} \right) \left(\sum_{Bin=1}^{N_{Bin}} \frac{1}{\sigma_{\beta_{\alpha,bin}}^2} \right)^{-1}, \quad (5.11)$$

onde:

$$\sigma_{\beta_{\alpha,Bin}} = \sqrt{\sum_{Dir=1}^{N_{Dir}} \frac{\sigma_{\beta_{\alpha,Dir,Bin}}^2}{N_{Dir}}} \quad e \quad \sigma_{\beta_{\alpha,Dir,Bin}} = \sqrt{\sum_{Sim=1}^{N_{Sim}} \frac{(\beta_{\alpha,Dir,Sim,Bin} - \langle \beta_{\alpha,Dir,Bin} \rangle)^2}{N_{Sim} - 1}}, \quad (5.12)$$

são o desvio padrão para um conjunto de amostras (de σ similar esperado), em direções diferentes, da velocidade medida no bin "Bin", para a componente α e o desvio padrão para a componente α da velocidade medida no bin "Bin", em uma dada direção "Dir", respectivamente. Sendo $\langle \beta_{\alpha,Dir,Bin} \rangle$ o valor médio do bin "Bin" da componente α para todas as simulações de uma dada direção Dir .

Dessa forma, o vetor velocidade para cada simulação, de cada direção Dir é:

$$\vec{\beta}_{Dir,Sim} = \beta_{x,Dir,Sim} \hat{x} + \beta_{y,Dir,Sim} \hat{y} + \beta_{z,Dir,Sim} \hat{z}. \quad (5.13)$$

Erro estatístico de $\vec{\beta}$

O erro estatístico associado a cada componente de $\vec{\beta}$ será:

$$\sigma_{\beta_\alpha} = \sqrt{\sum_{Dir=1}^{N_{Dir}} \frac{\sigma_{\beta_\alpha, Dir}^2}{N_{Dir}}}, \quad (5.14)$$

onde:

$$\sigma_{\beta_\alpha, Dir} = \sqrt{\sum_{Sim=1}^{N_{Sim}} \frac{(\beta_{\alpha, Dir, Sim} - \langle \beta_{\alpha, Dir, Sim} \rangle)^2}{N_{Sim} - 1}}, \quad (5.15)$$

é o desvio padrão para a componente α da velocidade medida, em uma dada direção "Dir".

Vamos renomear o erro estatístico por componente para:

$$\sigma_\alpha^{estat.} \equiv \sigma_{\beta_\alpha}.$$

Podemos ainda calcular o erro estatístico do módulo, substituindo $\beta_{\alpha, Dir, Sim}$ por $|\vec{\beta}_{Dir, Sim}|$:

$$\sigma_{|\vec{\beta}|} = \sqrt{\sum_{Dir=1}^{N_{Dir}} \frac{\sigma_{|\vec{\beta}|, Dir}^2}{N_{Dir}}}, \quad (5.16)$$

onde:

$$\sigma_{|\vec{\beta}|, Dir} = \sqrt{\sum_{Sim=1}^{N_{Sim}} \frac{(|\vec{\beta}_{Dir, Sim}| - \langle |\vec{\beta}_{Dir}| \rangle)^2}{N_{Sim} - 1}}, \quad (5.17)$$

sendo $\langle |\vec{\beta}_{Dir}| \rangle$ o módulo médio de $\vec{\beta}$ para uma dada direção Dir .

Vamos renomear o erro estatístico do módulo para:

$$\sigma_{Abs}^{estat.} \equiv \sigma_{|\vec{\beta}|}.$$

Definições para o erro sistemático cartesiano

O erro sistemático associado a cada componente de $\vec{\beta}$ será:

$$\sigma_{\beta_\alpha}^{sist.} = \sum_{Dir=1}^{N_{Dir}} \frac{\langle \beta_{\alpha,Dir} \rangle - \beta_\alpha^{Fiducial}}{N_{Dir}}, \quad (5.18)$$

onde $\langle \beta_{\alpha,Dir} \rangle$ é a média da componente α das simulações na direção Dir .

Vamos renomear o erro sistemático da componente α de $\vec{\beta}$ para:

$$\sigma_\alpha^{sist.} \equiv \sigma_{\beta_\alpha}^{sist.}.$$

Já o erro sistemático associado a $|\vec{\beta}|$ será:

$$\sigma_{|\vec{\beta}|}^{sist.} = \left(\sum_{Dir=1}^{N_{Dir}} \frac{\langle |\vec{\beta}_{Dir,Sim}| \rangle}{N_{Dir}} \right) - |\vec{\beta}^{Fiducial}|. \quad (5.19)$$

Vamos renomear o erro sistemático do módulo para:

$$\sigma_{Abs}^{sist.} \equiv \sigma_{|\vec{\beta}|}^{sist.}.$$

5.8.3 Definições das medidas angulares e o erro total (estatístico+sistemático) angular

O ângulo entre o vetor $\vec{\beta}$ medido e o vetor fiducial $\vec{\beta}_{Dir}^{Fiducial}$ para uma simulação na direção Dir é obtido com a equação:

$$\delta\theta = \text{ArcCos} \left[\frac{\vec{\beta}_{Sim,Dir} \cdot \vec{\beta}_{Dir}^{Fiducial}}{|\vec{\beta}_{Sim,Dir}| |\vec{\beta}_{Dir}^{Fiducial}|} \right]. \quad (5.20)$$

Para obter δlat e $\delta long$ (diferença em ângulo na longitude e latitude), basta fazermos projeções nos planos xz ou yz (latitude) e xy (longitude). A definição do erro angular total (estatístico+sistemático) para $\delta\theta$, δlat e $\delta long$, será o valor cuja probabilidade acumulada é de 68.3%,

isto é:

$$\sigma_{\theta}^{total} \equiv P_{\delta\theta}(X \leq 68.3\%),$$

$$\sigma_{lat}^{total} \equiv P_{\delta lat}(X \leq 68.3\%),$$

$$\sigma_{long}^{total} \equiv P_{\delta long}(X \leq 68.3\%).$$

Onde $P(X \leq 68.3\%)$ é a função de probabilidade acumulada.

É importante ressaltar que σ_{long}^{total} não é a variável mais adequada para se trabalhar, uma vez que a longitude possui singularidade nos polos.

5.9 Removendo o viés de mascaramento

Vamos definir dois tipos de viés, um do tipo soma e um multiplicativo.

5.9.1 Viés do tipo soma

No caso de uma máscara não simétrica, devemos primeiro remover o viés introduzido pela assimetria de sinal. Para isso encontraremos cada componente de $\vec{\beta}_{asymmetry}$ e iremos subtrair da medida (viés do tipo soma).

1. Definimos o viés $SBias$ para um dado Bin , na direção Dir , componente α como:

$$SBias^{\alpha,Dir,Bin} = \langle \beta_{Measured}^{\alpha,Dir,Bin} \rangle - \beta_{Fiducial}^{\alpha,Dir}, \quad (5.21)$$

onde $\beta_{Measured}^{\alpha,Dir,Sim,Bin}$ é o valor medido e $\beta_{Fiducial}^{\alpha,Dir}$ é o valor fiducial do *boost* aplicado na simulação, sendo $\langle \beta_{Measured}^{\alpha,Dir,Bin} \rangle$ a média do bin "*Bin*" da componente α na direção Dir . Isto é, a média das 64 simulações nessa direção.

2. Calculamos então o viés por componente α por *Bin*:

$$SBias^{\alpha, Bin} = \frac{\sum_{Dir=1}^{N_{Dir}} \frac{SBias^{\alpha, Dir, Bin}}{\sigma_S^2 Bias^{\alpha, Dir, Bin}}}{\sum_{Dir=1}^{N_{Dir}} \frac{1}{\sigma_S^2 Bias^{\alpha, Dir, Bin}}}, \quad (5.22)$$

onde $\sigma_{SBias^{\alpha, Dir, Bin}}^2$ é o desvio padrão do bin "*Bin*" entre as diferente direções *Dir*, na componente α .

3. Definimos então a medida sem viés como:

$$\beta_{Sunbiased}^{\alpha, Dir, Sim, Bin} = \beta_{Measured}^{\alpha, Dir, Sim, Bin} - SBias^{\alpha, Bin}. \quad (5.23)$$

5.9.2 Viés do tipo multiplicativo

Para o caso de uma máscara não simétrica, após a remoção do viés do tipo soma, devemos remover o viés introduzido pelo efeito de acoplamento entre os harmônicos devido ao mascaramento, o qual ajustaremos um viés multiplicativo. Para uma máscara simétrica apenas esta etapa será necessária, pois não temos um dipolo residual de mascaramento.

1. Definimos o viés multiplicativo $MBias$ para um dado *Bin* da simulação *Sim*, na direção *Dir*, componente α como:

$$MBias^{\alpha, Dir, Sim, Bin} = \frac{\beta_{Measured}^{\alpha, Dir, Sim, Bin}}{\beta_{Fiducial}^{\alpha, Dir}}. \quad (5.24)$$

2. Obtemos então o viés por *Bin* por componente α :

$$MBias^{\alpha, Bin} = \frac{\sum_{Dir=1}^{N_{dir}} \frac{MBias^{\alpha, Dir, Bin}}{\sigma_{MBias^{\alpha, Dir, Bin}}^2}}{\sum_{Dir=1}^{N_{dir}} \frac{1}{\sigma_{MBias^{\alpha, Dir, Bin}}^2}}, \quad (5.25)$$

onde $\sigma_{MBias^{\alpha, Dir, Bin}}$ é o desvio padrão do viés do bin "*Bin*" das 64 simulações da direção *Dir*, na componente α .

3. Definimos então:

$$\vec{\beta}_{Munbiased}^{Dir,Sim} = (\beta^x, \beta^y, \beta^z)_{Munbiased}^{Dir,Sim},$$

onde:

$$\beta_{Munbiased}^{\alpha,Dir,Sim} = \frac{\sum_{bin}^{N_{bin}} \left(\frac{\beta_{Munbiased}^{\alpha,Dir,Sim,Bin}}{\sigma_{\beta_{Munbiased}^{\alpha,Dir,Sim}}^2} \right)}{\sum_{bin}^{N_{bin}} \left(\frac{1}{\sigma_{\beta_{Munbiased}^{\alpha,Dir,Sim}}^2} \right)} \quad e \quad \beta_{Munbiased}^{\alpha,Dir,Sim,Bin} = \frac{\beta_{measured}^{\alpha,Dir,Sim,Bin}}{MBias^{\alpha,Bin}}. \quad (5.26)$$

sendo $\sigma_{\beta_{Munbiased}^{\alpha,Dir,Sim}}$ o desvio padrão do bin "Bin" das medidas com o viés MBias removido, na componente α .

4. Podemos ainda encontrar um melhor ajuste adicionando um termo *AbsBias* para corrigir o viés do módulo $|\vec{\beta}|$:

$$AbsBias = \frac{\sum_{Dir=1}^{N_{dir}} \frac{AbsBias^{Dir}}{\sigma_{AbsBias^{Dir}}^2}}{\sum_{Dir=1}^{N_{dir}} \frac{1}{\sigma_{AbsBias^{Dir}}^2}}, \quad (5.27)$$

onde:

$$AbsBias^{Dir} = \left\langle \frac{\|\vec{\beta}_{Munbiased}^{Dir,Sim}\|}{\|\beta_{Fiducial}^{Dir}\|} \right\rangle, \quad (5.28)$$

e $\sigma_{AbsBias^{Dir}}$ o desvio padrão de *AbsBias* para cada direção *Dir*.

5. Sendo então o viés final *Bias* por componente α , por *Bin*, dado por:

$$Bias^{\alpha,Bin} = MBias \cdot AbsBias. \quad (5.29)$$

6. Definimos então a medida sem viés como:

$$\beta_{unbiased}^{\alpha,Dir,Sim,Bin} = \frac{\beta_{measured}^{\alpha,Dir,Sim,Bin}}{Bias^{\alpha,Bin}}. \quad (5.30)$$

5.10 Resultados do estimador com o viés removido

Seguindo o *pipeline* proposto na seção 5.7, obtivemos os seguintes resultados:

| Resultados - Simulações após remoção do viés - $\ell_{max} = 1500$ | | | | | | | | | |
|--|-----------------------|--------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|--------------------|------------------|-------------------|
| Máscara | Tipo | | σ_x (km/s) | σ_y (km/s) | σ_z (km/s) | σ_{Abs} (km/s) | $\delta\theta$ (°) | δLat (°) | $\delta Long$ (°) |
| UT78(2018) Simetrizada | Aberração | Estat. | 123 | 114 | 105 | 108 | 29.0 | 15.7 | 29.6 |
| | | Sist. | 41 | 41 | 38 | 36 | | | |
| | | Total | 130 | 121 | 112 | 114 | | | |
| | Doppler | Estat. | 137 | 126 | 117 | 115 | 44.8 | 19.6 | 40.6 |
| | | Sist. | 69 | 68 | 64.3 | 66 | | | |
| | | Total | 153 | 142 | 134 | 132 | | | |
| Aberração +Doppler | Estat. | 110 | 100 | 94 | 93 | 26.7 | 12.5 | 23.2 | |
| | Sist. | 21.1 | 19 | 19 | 12 | | | | |
| | Total | 112 | 102 | 96 | 94 | | | | |
| UT78(2015) Simetrizada | Aberração +Doppler | Estat. | 118 | 112 | 101 | 103 | 30.0 | 13.1 | 27.3 |
| Sist. | | 28 | 23 | 20 | 14 | | | | |
| Total | | 121 | 114 | 103 | 104 | | | | |
| UT73(2013) Simetrizada | Aberração +Doppler | Estat. | 133 | 132 | 107 | 106 | 32.1 | 14.2 | 29.1 |
| Sist. | | 23 | 20 | 23 | 15 | | | | |
| Total | | 135 | 134 | 109 | 107 | | | | |
| UT78(2018) | Aberração +Doppler | Estat. | 114 | 95 | 133 | 102 | 30.0 | 17.5 | 21.8 |
| Sist. | | 20 | 19 | 43 | 11 | | | | |
| Total | | 116 | 97 | 140 | 103 | | | | |

TABELA 5.3: Resultados com simulações após remoção do viés.

Pode-se notar na tabela 5.3 um comportamento similar entre as diferentes máscaras. Em todas elas o erro na componente x é maior que em y , que por sua vez é maior que em z , com exceção a UT78(2018), onde o erro em z é maior que em x . Para o estimador ideal, as incertezas não dependem da componente medida, porém, ao mascararmos essa simetria é perdida. O eixo x aponta para a direção do centro de nossa galáxia, a região mais mascarada do céu, já o eixo y está no plano galáctico, mas aponta para uma direção menos mascarada, e por último o eixo z é o menos afetado pela máscara, pois volta-se para fora do plano galáctico.

No caso específico da UT78(2018) não simetrizada existe um sistemático residual após a correção do viés na direção z que amplifica o erro. Esta assimetria na incerteza resulta em diferentes erros para as medidas de δLat e $\delta\theta$, como pode ser verificado na tabela acima.

Observamos que os resultados com a máscara UT78(2018) simetrizada possuem incertezas inferiores às demais, mesmo esta sendo uma máscara mais conservadora que a UT78(2018), ademais, seu viés é mais simples, apenas multiplicativo. A mesma possui uma fração do céu $f_{sky} = 0.725$, aproximadamente igual a fração do céu da máscara UT73(2013), similar a utilizada em (Planck Collaboration, 2014).

Em vista dos resultados superiores, do tratamento mais simples para o viés e da vantagem computacional obtida pela simetria antipodal (onde necessitamos mapear o viés em apenas um dos hemisférios), utilizaremos os resultados da máscara UT78(2018) simetrizada como referência. Os resultados que seguem são oriundos da análise com esta máscara, tanto nas simulações como nos dados observacionais.

5.10.1 Erros estatísticos - UT78(2018) simetrizada

Observamos nas simulações um erro estatístico inferior ao previsto teoricamente, o que é ilustrado na figura 5.13. Parte disso pode ser devido aos efeitos de acoplamento entre harmônicos esféricos introduzidos pela aplicação da máscara, que misturam o sinal de correlações de ordem superior a $a_{\ell m} a_{\ell+1 m}$ nos $f_{\ell m}$'s. Uma outra possibilidade é que termos de ordem β^2 estejam afetando o estimador. O fato é que, embora (4.20) seja uma boa aproximação para o cálculo da incerteza, podemos verificar claramente uma diferença, sendo nossa expectativa teórica mais conservadora.

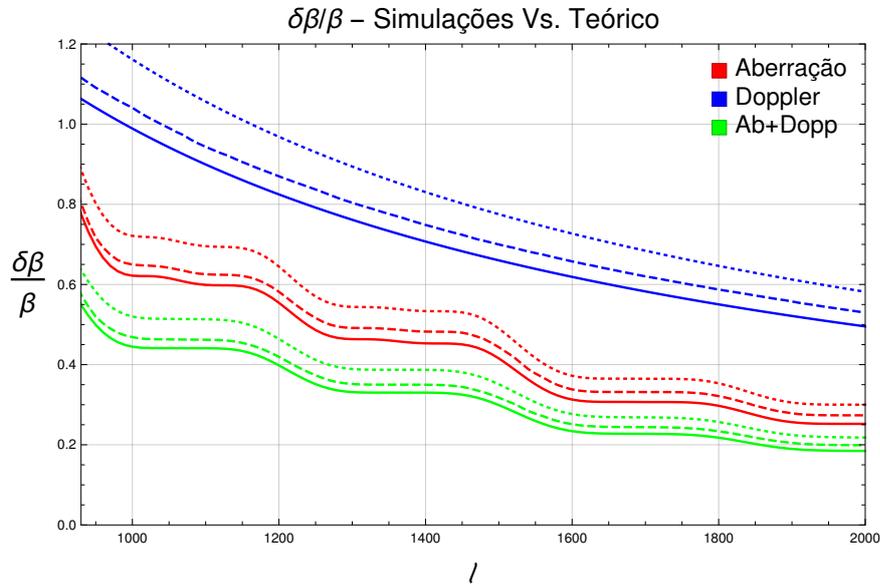


FIGURA 5.13: Comparação entre o erro estatístico observado nas simulações e o esperado teórico para o módulo de $\vec{\beta}$, de acordo com a escala angular limite utilizada no estimador e o tipo de boost aplicado nas simulações. A linha pontilhada indica os valores esperados teoricamente para o estimador com a máscara UT78(2018) simetrizada, a linhas tracejada os valores obtidos nas simulações e linha contínua os valores para o caso ideal.

Visualizando os resultados na forma de histogramas, como visto na figura 5.14, nota-se que a componente z difere significativamente do comportamento gaussiano. Isso irá se refletir em um comportamento também não gaussiano nos histogramas de δLat , como veremos mais a frente.

Histogramas - Coordenadas cartesianas - UT78(2018) simetrizada

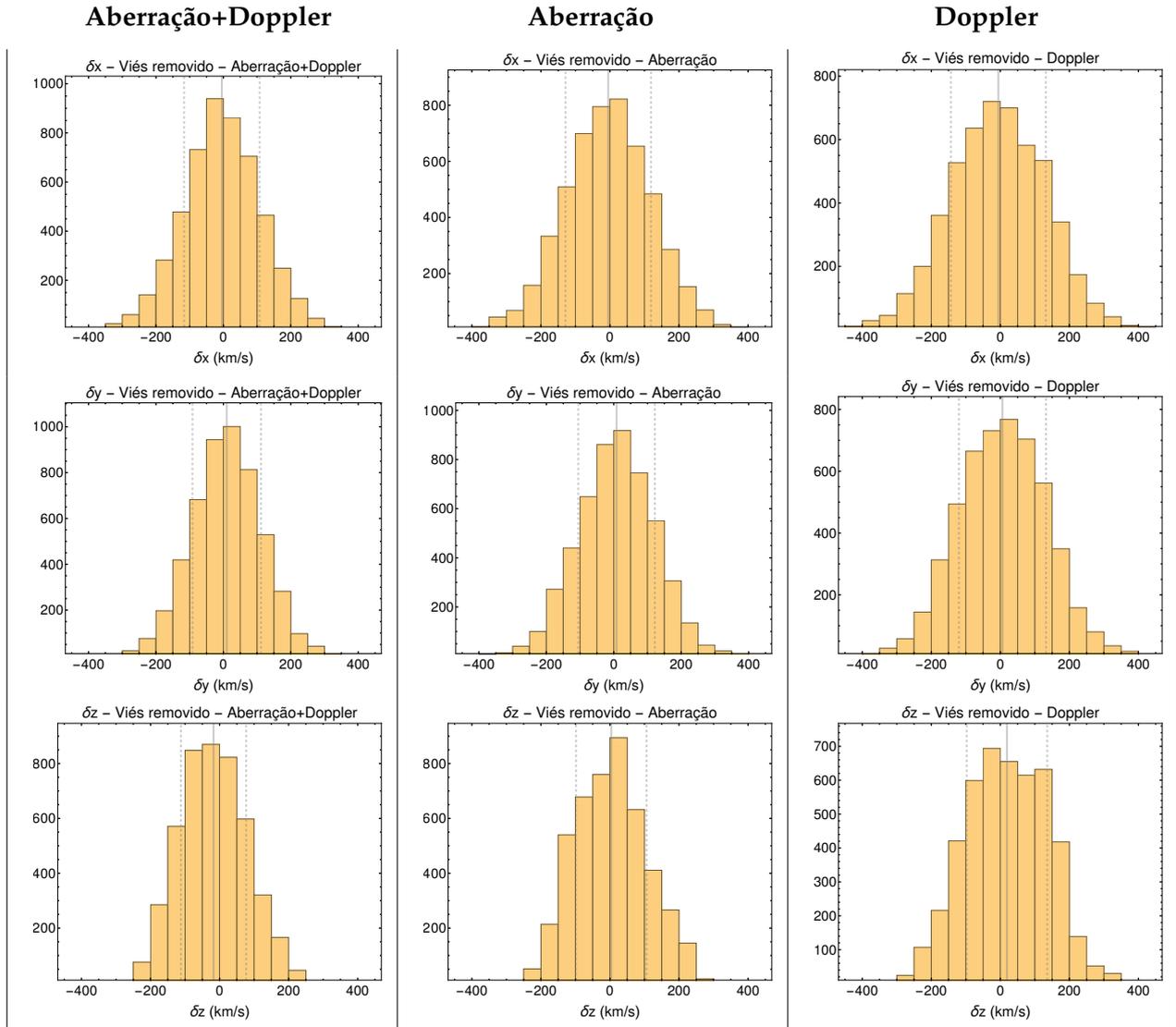


FIGURA 5.14: Histogramas dos erros das medidas de β (estatístico+sistemático) para cada componente cartesiana, considerando diferentes tipos de boost. As linhas centrais, contínuas, indicam o valor médio, já as linhas pontilhadas, indicam o desvio padrão.

Visualizando $\delta\theta$, δLat e $\delta Long$ na forma de histogramas (figura 5.15) é possível identificar um viés residual negativo para a latitude e o reflexo da não gaussiano do erro na componente z .

Histogramas - Coordenadas galácticas - UT78(2018) simetrizada

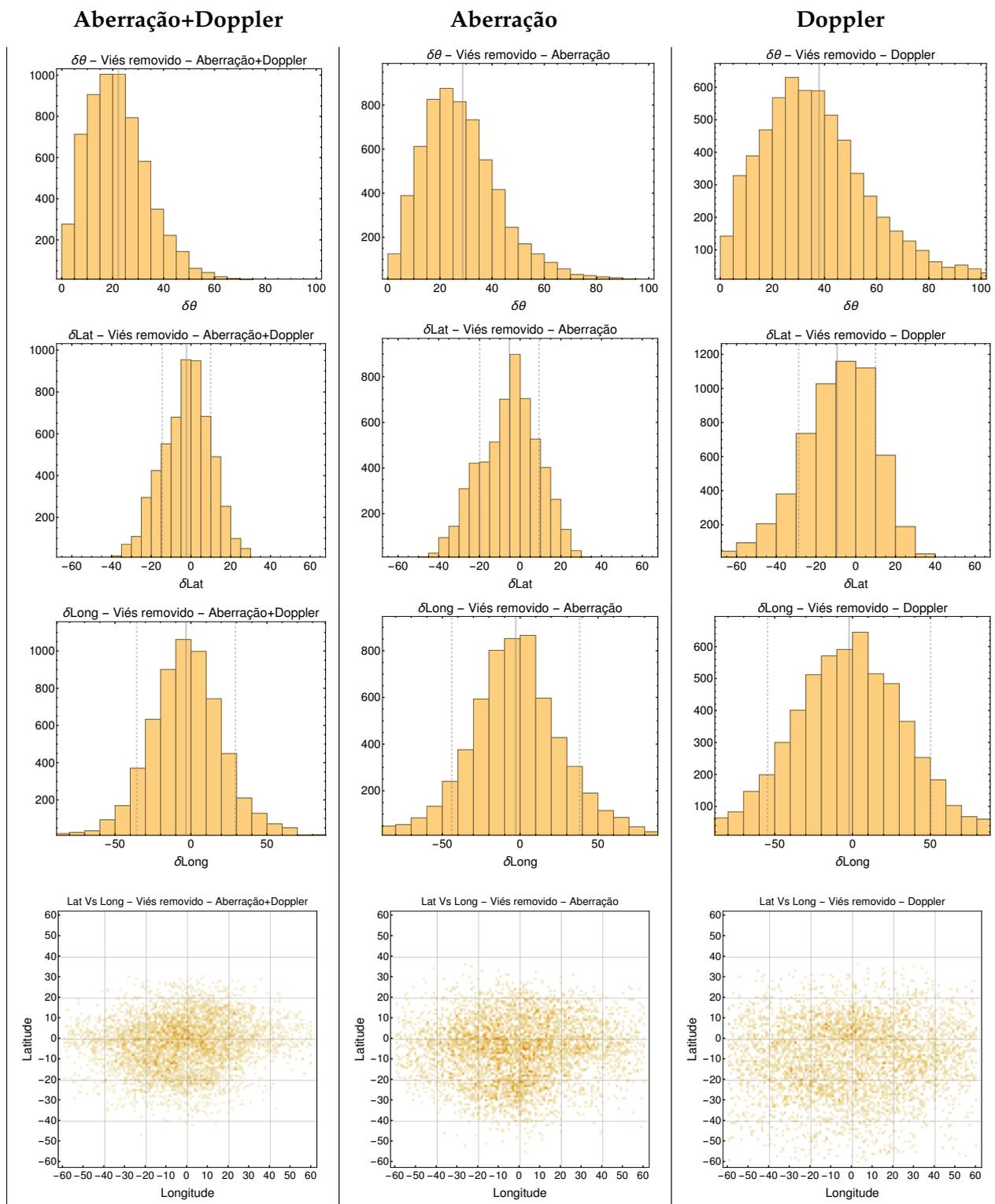


FIGURA 5.15: Histogramas das medidas de $\delta\theta$, δLat e $\delta Long$ para cada componente cartesiana, considerando diferentes tipos de boost, e histogramas 2D $\delta Lat \times \delta Long$. As linhas centrais, contínuas, indicam o valor médio, já as linhas pontilhadas, indicam o desvio padrão.

5.10.2 Erros sistemáticos - UT78(2018) simetrizada

Olhando para o erro sistemático de cada componente para cada direção do boost fiducial, é possível verificar um comportamento oscilatório, assim como um viés residual na direção $-z$, como já observado nos histogramas anteriores 5.15, onde verificamos um sistemático residual para a latitude.

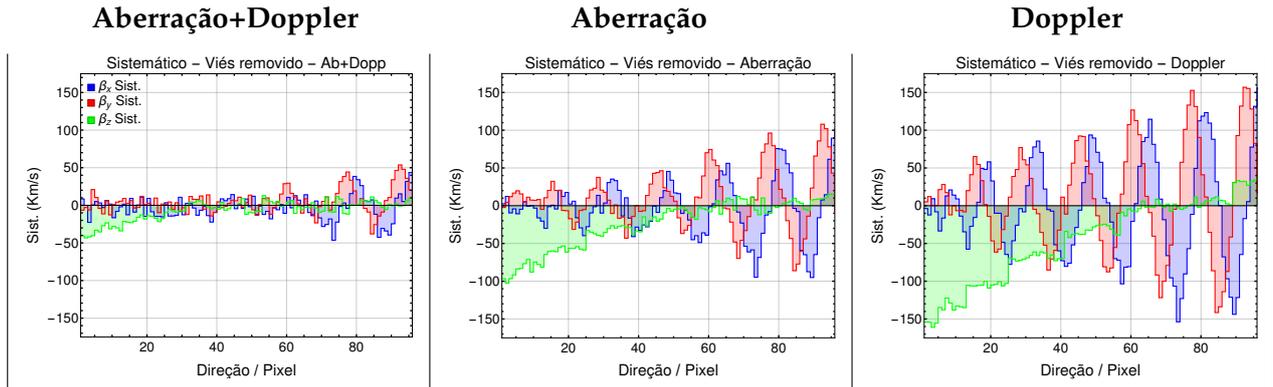


FIGURA 5.16: Erro sistemático para cada componente e cada tipo de boost, dependendo da direção fiducial. As direções são definidas pelas coordenadas dos centros dos pixels do esquema de pixelização do HEALPix para $N_{side} = 4$. Veja a figura 5.12 para um referência com relação ao número associado a cada direção.

É também útil comparar os módulos antes e depois da remoção do viés, como na figura 5.17, onde somos capazes de verificar a existência de um atrator na direção dos polos anteriormente a remoção do viés, e as oscilações devido ao viés residual, como no caso dos sistemáticos de cada componente.

Para entender melhor o comportamento do erro sistemático podemos visualiza-lo de outra forma, em um mapa de viés (figura 5.18). Onde é possível observar que as oscilações vistas nos gráficos 5.16 estão associadas a um ponto atrator decorrente do viés residual após a aplicação de nosso pipeline.

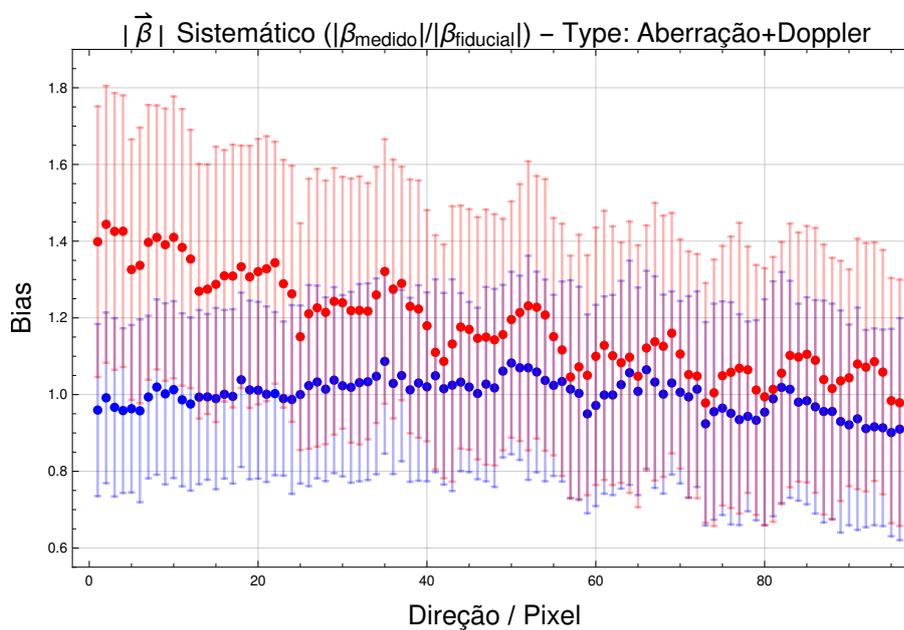


FIGURA 5.17: Erro sistemático do módulo de $\vec{\beta}$ por direção, para o boost do tipo Aberração+Doppler. As barras indicam as margens de erro associadas a cada direção. Em vermelho apresentamos os resultados antes a remoção do viés, e em azul após a remoção do viés.

Mapa do viés

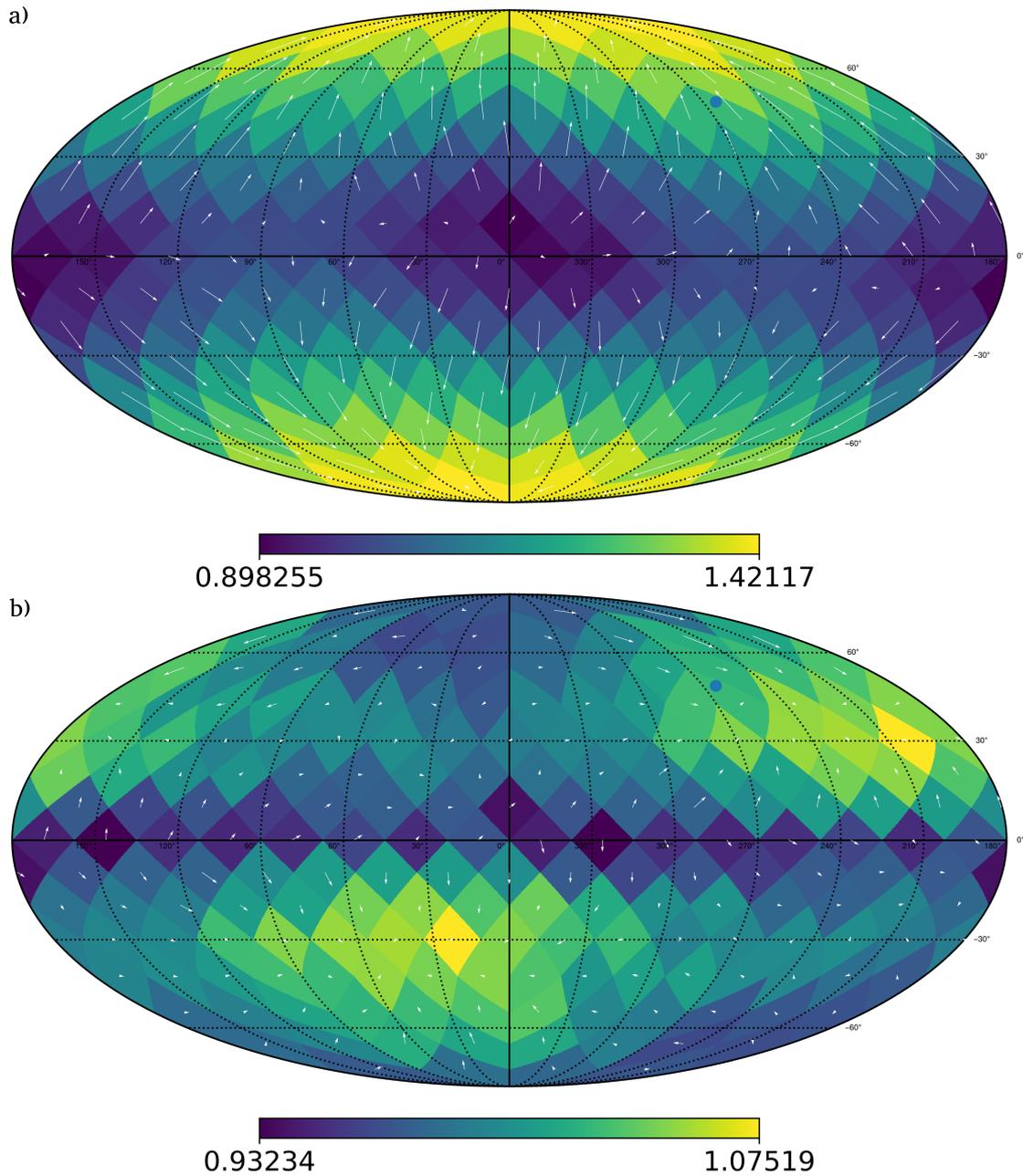


FIGURA 5.18: **a)** Viés mapeado para a máscara UT78 simétrica do *release* de 2018 do Planck em um mapa com os efeitos de aberração e Doppler. **b)** Viés residual após correções realizadas em nosso pipeline. As cores indicam o viés de $|\vec{\beta}|$ (fator multiplicativo), os vetores são em sua origem as direções fiduciais dos *boosts* das simulações e apontam para as direções recuperadas pelo estimador para $\vec{\beta}$ (média das 64 simulações para cada direção). O círculo azul indica a direção do dipolo como medido em Planck Collaboration, 2018a.

Capítulo 6

Resultados preliminares com dados observacionais

6.1 Resultados preliminares com os mapas SMICA e NILC (2018)

Seguindo pipeline proposto, utilizando a máscara UT78(2018) simetrizada e desprezando o ruído até $\ell_{max} = 1500$, obtivemos os resultados preliminares da tabela 6.1.

| Pipeline | Boost | $ \vec{\beta} $ (km/s) | ℓ ($^{\circ}$) | b ($^{\circ}$) | $\delta\theta_{dipolo}$ ($^{\circ}$) | $\vec{\beta} \cdot \hat{\beta}_{dipolo}$ (km/s) |
|----------|-----------|------------------------|-----------------------|--------------------|--|---|
| SMICA | Aberração | 436 ± 114 | 16.8 ± 29.6 | 41.6 ± 15.7 | 72.4 ± 29.0 | 132 ± 114 |
| | Doppler | 547 ± 132 | 196.3 ± 40.6 | -24.6 ± 19.6 | 94.6 ± 44.8 | -42 ± 132 |
| NILC | Aberração | 472 ± 114 | 13.9 ± 29.6 | 35.9 ± 15.7 | 75.3 ± 26.7 | 120 ± 114 |
| | Doppler | 459 ± 132 | 201.6 ± 40.6 | -33.6 ± 19.6 | 99.0 ± 44.8 | -7 ± 132 |

TABELA 6.1: Resultados preliminares, $\ell_{max} = 1500$, com *dipole Doppler* removido para os mapas SMICA e NILC, componentes aberração e Doppler. $\delta\theta_{dipolo}$ é o ângulo entre a medida e o Dipolo medido em Planck Collaboration, 2018a, já $\vec{\beta} \cdot \hat{\beta}_{dipolo}$ é a projeção do vetor $\vec{\beta}$ na direção do dipolo.

Podemos também visualizar os resultados da tabela 6.1 através de um mapa em projeção de Mollweide, isso é ilustrado na figura 6.1. Comparando com a figura 6.2, onde não corrigimos o *dipole Doppler*, é possível perceber a aproximação da componente Doppler em direção ao Dipolo, além disso, como esperado, a componente Doppler é mais sensível ao efeito de boost factor. Verificamos nesses dois casos que os resultados para os pipelines SMICA e NILC são compatíveis.

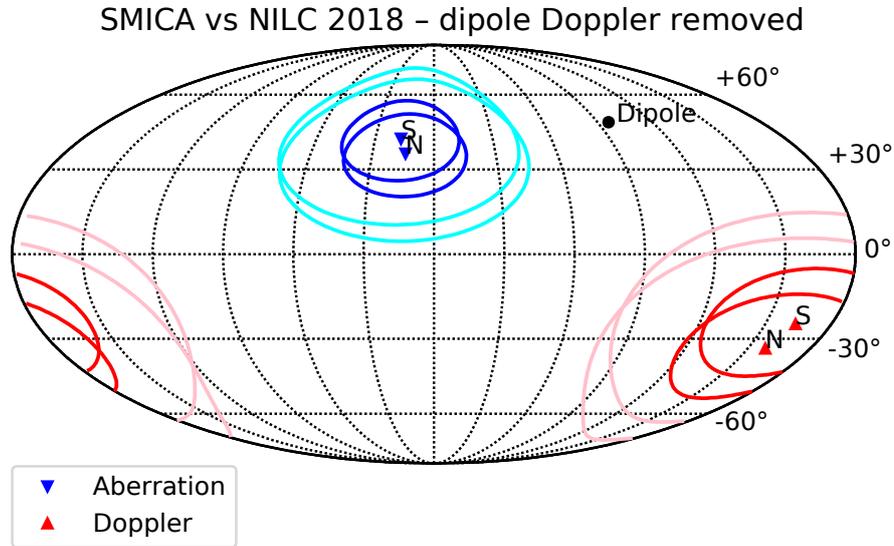


FIGURA 6.1: Projeção de Mollweide com os resultados preliminares para Aberração e Doppler. N são os resultados para o mapa NILC e S para o mapa SMICA. Dipole indica o dipolo medido em Planck Collaboration, 2018a. As curvas em torno dos pontos indicam as regiões de 1σ e 2σ .

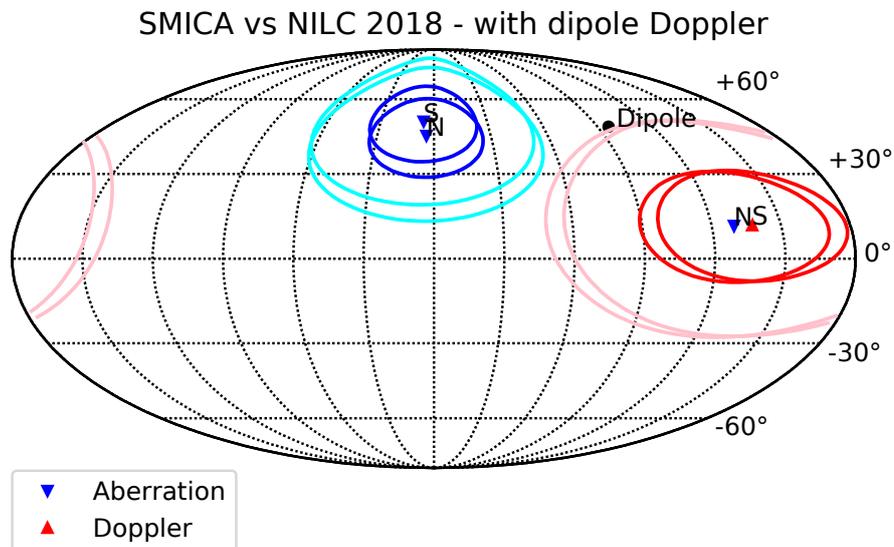


FIGURA 6.2: Projeção de Mollweide com os resultados sem a correção do *dipole Doppler*. N são os resultados para o mapa NILC e S para o mapa SMICA. Dipole indica o dipolo medido em (Planck Collaboration, 2018a).

Nesta primeira aproximação observamos **resultados díspares entre aberração e Doppler**, e entre ambas e o valor do dipolo obtido em (Planck Collaboration, 2018a). De forma que a interpretação de movimento peculiar como origem para estas componentes não se configura

adequada, e portanto, não podemos utilizar o estimador Aberração+Doppler, visto que ele considera ambos de mesma natureza e direção similar.

Em comparação com as simulações, esses resultados têm **1.49% de probabilidade** de serem uma oscilação estatística para a medida de um valor fiducial dado pelo dipolo medido em (Planck Collaboration, 2018a), para a componente da Aberração e **2.08%** para a componente Doppler. **Uma tensão considerável.**

Porém, o tratamento adequado do ruído pode revelar-se significativo mesmo para resoluções angulares baixas, apesar da baixa potência, a anisotropia do sinal pode introduzir correlações mensuráveis e interferir na medida. Com isso, uma resposta mais acurada só pode ser obtida com a inclusão do ruído do instrumento nas simulações, o que será feito logo em seguida a esta dissertação.

De todo modo, esses testes demonstram que qualitativamente a remoção do boost factor se comporta como esperado, e não somente, diferentes pipelines de construção do mapa de RCF concordam com baixa margem de erro, **36km/s** no módulo para Aberração e **88km/s** para Doppler. Para o sistemático total, considerando o sistemático do pipeline, obtemos **51km/s** para a componente do tipo aberração e **110km/s** para Doppler. O que representa um menor sistemático em comparação aos resultados de (Planck Collaboration, 2014), onde a diferença entre as medidas de diferentes mapas de frequência única foram a maior fonte de erro sistemático (**115 km/s** no módulo para a medida de Aberração+Doppler).

Além disso, os erros estatísticos para o nosso estimador Aberração+Doppler, embora **19,2%** superiores aos observados em (Planck Collaboration, 2014) (93 km/s vs 78 km/s), consideram como resolução angular limite $\ell_{max} = 1500$ (veja a tabela 5.3). Estendendo para $\ell_{max} = 2000$ o sinal é aumentado em **36.2%** (veja a figura 4.1 para a variação de S/N de acordo com a escala angular), de forma que, assim como o erro sistemático, esperamos obter um erro estatístico também inferior ao de (Planck Collaboration, 2014). É razoável então esperar que, mesmo para as medidas isoladas dos efeitos de aberração e Doppler, nossas margens de erro serão inferiores, a menos das alterações oriundas pelo acréscimo do ruído e sistemáticos nas simulações.

Considerando o erro total (estatístico mais sistemático) obtivemos **119km/s** para a componente aberração e **159km/s** para Doppler, de forma que utilizando ambas podemos medir β com

o erro de 95km/s (no caso da hipótese de ambas componentes serem oriundas inteiramente do movimento peculiar), inferior ao obtido em Planck Collaboration, 2014 (139km/s).

Em vista da real possibilidade da modulação Doppler e da aberração terem origens intrínsecas, e possuírem direções diferentes do dipolo, como obtidas aqui de forma preliminar, se torna evidente a necessidade de medir-se o viés da máscara em diversas regiões, como fizemos nesta dissertação. Obter o viés em uma única direção esperada, como feito em (Planck Collaboration, 2014), não é então uma abordagem adequada.

Capítulo 7

Conclusão e perspectivas futuras

Apesar dos resultados obtidos serem preliminares, eles indicam que, mesmo para uma resolução angular inferior a utilizada em (Planck Collaboration, 2014), nossa margem de erro é significativamente inferior. Para $\ell_{max} = 2000$ acessamos 6.2% a mais de sinal, o que tornará o nosso estimador ainda mais competitivo. Além disto, a concordância estabelecida entre os valores fiduciais das simulações e os recuperados pelo pipeline construído nesta dissertação, para diferentes tipos de efeitos relativísticos e diversas máscaras, demonstra a robustez da metodologia aplicada.

Os valores preliminares observados não são compatíveis com o dipolo medido em (Planck Collaboration, 2018a), demonstrando a presença de um dipolo intrínseco com duas diferentes componentes, uma do tipo aberração e outra do tipo Doppler. Como visto em (Roldan, Notari e Quartín, 2016), isso pode indicar a presença de não-Gaussianidades primordiais advindas de um grande potencial gravitacional dipolar no período de inflação.

Porém deve-se ter cautela, a grande diferença entre os valores obtidos com o nosso estimador e os vistos em (Planck Collaboration, 2014), sugere que devemos esperar os resultados levando em consideração o ruído para uma resposta mais contundente. Contudo, já são evidentes diversos avanços realizados na construção do pipeline utilizado nesta dissertação, com respeito ao realizado (Planck Collaboration, 2014). Podemos destacar três avanços importantes:

1. Um estudo mais completo do viés introduzido pela máscara, mapeando o mesmo em diferentes direções (ao invés da medida em uma única direção, como em Planck Collaboration, 2014).

2. Uma correção mais precisa do *dipole Doppler*, considerando diferentes boosts para cada escada angular (ao invés de um único boost efetivo, como em Planck Collaboration, 2014).
3. A utilização de mapas "tratados" de RCF (ao invés de mapas de frequência única, como em Planck Collaboration, 2014¹).

Temos como perspectiva para o limite inferior dos erros estatísticos nos resultados finais, com $\ell_{max} = 2000$, os valores obtidos nas simulações com máscara e sem ruído (com o acréscimo de ruído e sistemáticos as margens de erro irão aumentar):

| Resultados - Simulações após remoção do viés - $\ell_{max} = 2000$ - Sem ruído | | | | | | | | | |
|--|-----------------------|--------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|--------------------|------------------|-------------------|
| Máscara | Tipo | | σ_x (km/s) | σ_y (km/s) | σ_z (km/s) | σ_{Abs} (km/s) | $\delta\theta$ (°) | δLat (°) | $\delta Long$ (°) |
| UT78(2018) Simetrizada | Aberração | Estat | 91 | 84 | 66 | 72 | 18.2 | 7.7 | 16.0 |
| | Doppler | Estat. | 107 | 98 | 80 | 88 | 18.8 | 10.4 | 15.8 |
| | Aberração +Doppler | Estat. | 80 | 74 | 61 | 66 | 18.0 | 7.8 | 15.7 |
| UT78(2015) Simetrizada | Aberração +Doppler | Estat. | 86 | 83 | 66 | 71 | 20.2 | 8.2 | 18.4 |
| UT73(2013) Simetrizada | Aberração +Doppler | Estat. | 92 | 89 | 70 | 76 | 21.5 | 8.7 | 19.6 |
| UT78(2018) | Aberração +Doppler | Estat. | 73 | 67 | 88 | 69 | 21.4 | 11.6 | 14.8 |

TABELA 7.1: Limite inferior para as incertezas das medidas com $\ell_{max} = 2000$. Esses são os resultados para um experimento com máscara porém sem ruído, com o acréscimo de ruído e sistemáticos as margens de erro irão aumentar.

Ainda com os dados disponíveis do Planck é possível aprimorar as medidas utilizando-se dos mapas de polarização, o que pretendemos fazer em um futuro próximo. Além desta perspectiva imediata, novos experimentos terrestres de RCF, como o observatório Simons (Simons Observatory Collaboration, 2018), satélites como o LiteBird (LiteBIRD collaboration, 2018) e o CORe (CORE Collaboration, 2018b), e balões como o PIPER (Gandilo et al., 2016), prometem melhores resoluções angulares e mapas de polarização, possibilitando novos e constantes avanços na redução dos erros da medida do dipolo cinemático. Na figura 7.1, extraída do artigo CORE Collaboration, 2018a, vemos algumas estimativas para o CORE, o LiteBIRD e Planck, utilizando também as medidas de polarização.

Ademais, não aguardamos apenas progressos na qualidade das medidas. Ansiamos aperfeiçoar nosso estimador considerando correlações de ordem superior a $a_{\ell m} a_{\ell+1 m}$ e obtendo

¹Em Planck Collaboration, 2014 foram utilizados mapas de frequência única para facilitar a remoção do *dipole Doppler*, uma vez que o $Q(\nu)$ será o mesmo para todas as escalas angulares.

uma melhor compreensão do viés introduzido pelo processo de mascaramento. Devemos considerar ainda que não somente os dados de RCF podem nos ajudar a medir o dipolo cosmológico, as futuras medições em 21 cm também poderão ser utilizadas para tal, com algumas modificações em nosso pipeline. Esse trabalho é uma pequena contribuição em uma longa jornada, onde ainda há muito a se descobrir sobre o dipolo intrínseco.

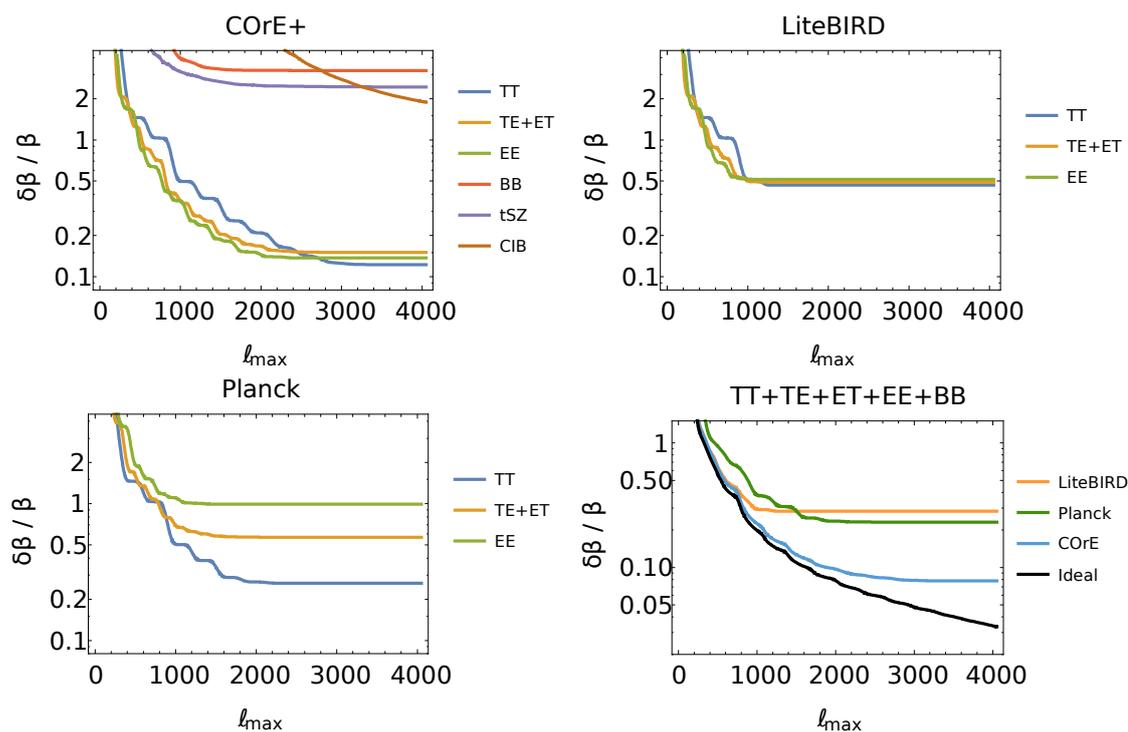


FIGURA 7.1: Erros esperados na medida da velocidade peculiar para os experimentos CORE, LiteBIRD e Planck, considerando os mapas de temperatura (TT), polarização (TE,ET,EE e BB), efeito Sunyaev-Zeldóvich térmico (tSZ) (Sunyaev e Zeldovich, 1970) e radiação infravermelha de fundo (CIB). O erro esperado para o experimento CORE é de $\sim 0.08\beta_{Dipolo}$, cerca de 29.6km/s. Figura extraída do artigo CORE Collaboration, 2018a.

Apêndice A

Análise do estimador em simulações com *Inpainting*

A técnica de *Inpainting* consiste em "pintar" os buracos deixados pelo processo de mascaramento utilizando simulações gaussianas. Em nosso caso geramos uma máscara inversa W^* , transformando 0's em 1's e vice versa, aplicamos essa máscara inversa em um mapa gaussiano e o mapa resultante (figura A.1) é somado a simulação com boost onde a máscara W (sem inverter) foi aplicada. Com isso obtemos no lugar dos buracos deixados pelo mascaramento, pinturas com simulações Gaussianas (figura A.2). Utilizaremos essa abordagem para tentar mitigar os acoplamentos indesejados introduzidos pelo processo de mascaramento.

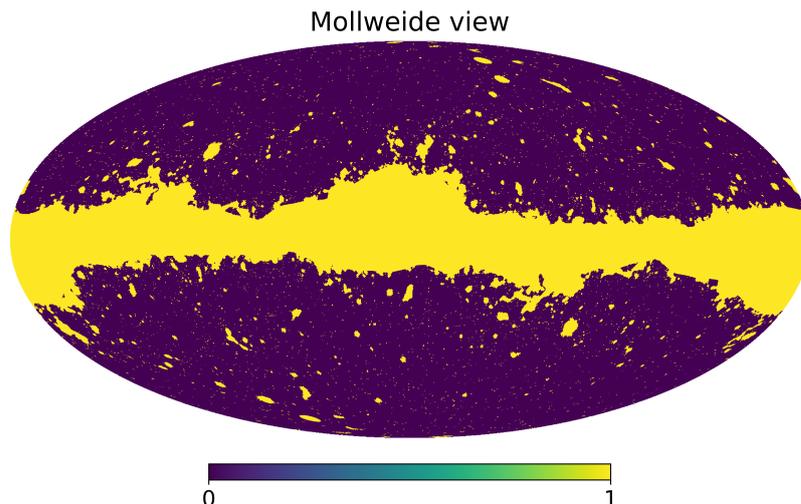


FIGURA A.1: Mascara inversa utilizada para o processo de Inpainting.

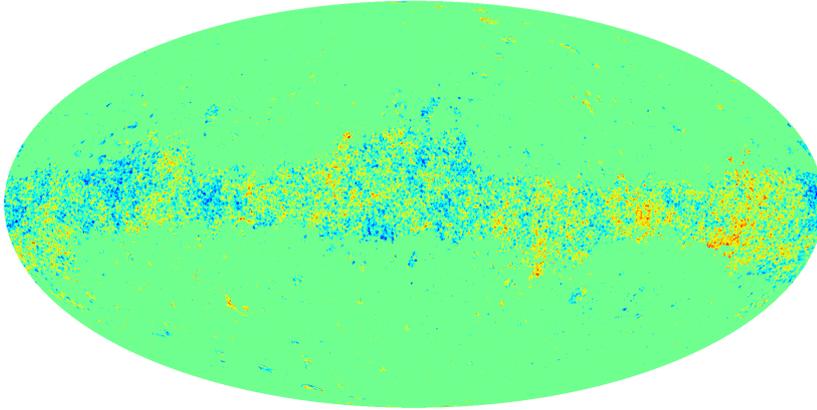


FIGURA A.2: Mascara inversa pintada com um mapa gaussiano.

Este é o método mais simples de *Inpainting*, existem outros mais complexos (Starck, Fadili e Rassat, 2013; Gruetjen et al., 2017). Porém nosso objetivo é apenas verificar o comportamento do estimador em um cenário com pinturas gaussianas, na tentativa de reduzir o viés e sistemáticos do mascaramento. Aplicando este método obtemos os seguintes resultados:

| Resultados preliminares - <i>Inpainting</i> após remoção do viés - $\ell_{max} = 1500$ | | | | | | | | | |
|--|--------------------|--------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|----------------------|--------------------|---------------------|
| Máscara | Tipo | | σ_x (km/s) | σ_y (km/s) | σ_z (km/s) | σ_{Abs} (km/s) | $\delta\theta$ (gr.) | δLat (gr.) | $\delta Long$ (gr.) |
| UT78(2018) | Aberração +Doppler | Estat. | 225 | 209 | 142 | 164 | | | |
| | | Sist. | 76 | 76 | 74 | 37 | | | |
| | | Total | 237 | 222 | 160 | 168 | 61.3 | 22.6 | 66.4 |

Estes resultados são apenas preliminares. É necessário uma análise mais extensa para se verificar a utilidade e a validade do método, a qual colocamos como uma perspectiva futura. Contudo, para esta primeira tentativa pudemos observar que os resultados com *Inpainting* foram inferiores tanto no erro estatístico quanto no sistemático em relação aos resultados com máscara.

Além disso, apesar de utilizarmos uma máscara simetrizada para a pintura gaussiana, o processo de *Inpainting* introduziu um sistemático equivalente ao de uma máscara assimétrica (seção 5.3) porém com menor amplitude. Isso significa que a região pintada sem os efeitos do *boost*, introduz um *boost* efetivo, logo removeremos o viés em duas etapas, um viés do tipo soma e outro do tipo multiplicativo. Porém, ao contrário do caso de uma máscara, onde o viés de assimetria tem módulo e direção bem definidos, o *boost* efetivo introduzido pelo *Inpainting* varia de acordo com o mapa gaussiano utilizado para pintar, o que se traduz nos erros estatísticos e sistemáticos maiores.

Bibliografia

- Amendola, Luca et al. (2010). «Measuring our peculiar velocity on the CMB with high-multipole off-diagonal correlations». Em: *JCAP*. [arXiv/1008.1183](https://arxiv.org/abs/1008.1183).
- Bartolo, N. et al. (2004). «Non-Gaussianity from inflation: Theory and observations». Em: *Phys. Rept.* 402, pp. 103–266. DOI: [10.1016/j.physrep.2004.08.022](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.022). arXiv: [astro-ph/0406398](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0406398) [[astro-ph](#)].
- Bergstrom, Lars (2012). «Dark Matter Evidence, Particle Physics Candidates and Detection Methods». Em: *Annalen Phys.* 524, pp. 479–496. DOI: [10.1002/andp.201200116](https://doi.org/10.1002/andp.201200116). arXiv: [1205.4882](https://arxiv.org/abs/1205.4882) [[astro-ph.HE](#)].
- Catena, Riccardo e Alessio Notari (2013). «Cosmological parameter estimation: impact of CMB aberration». Em: *JCAP* 1304, p. 028. DOI: [10.1088/1475-7516/2013/04/028](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/04/028). arXiv: [1210.2731](https://arxiv.org/abs/1210.2731) [[astro-ph.CO](#)].
- Catena, Riccardo et al. (2013). «Non-Gaussianity and CMB aberration and Doppler». Em: *JCAP* 1309, p. 036. DOI: [10.1088/1475-7516/2013/09/036](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/09/036). arXiv: [1301.3777](https://arxiv.org/abs/1301.3777) [[astro-ph.CO](#)].
- Challinor, Anthony e Floor van Leeuwen (2002). «Peculiar velocity effects in high-resolution microwave background experiments». Em: *Phys. Rev. D* 65 (10), p. 103001. DOI: [10.1103/PhysRevD.65.103001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.103001). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.103001>.
- Chluba, J. (2011). «Aberrating the CMB sky: fast and accurate computation of the aberration kernel». Em: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 415, p. 3227. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.18934.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18934.x). arXiv: [1102.3415](https://arxiv.org/abs/1102.3415) [[astro-ph.CO](#)].
- CORE Collaboration (2018a). «Exploring cosmic origins with CORE: effects of observer peculiar motion». Em: *JCAP* 1804.04, p. 021. DOI: [10.1088/1475-7516/2018/04/021](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/04/021). arXiv: [1704.05764](https://arxiv.org/abs/1704.05764) [[astro-ph.CO](#)].

- CORE Collaboration (2018b). «Exploring cosmic origins with CORE: Survey requirements and mission design». Em: *JCAP* 1804.04, p. 014. DOI: [10.1088/1475-7516/2018/04/014](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/04/014). arXiv: [1706.04516](https://arxiv.org/abs/1706.04516) [[astro-ph.IM](#)].
- Cusin, Giulia, Cyril Pitrou e Jean-Philippe Uzan (2017). «Are we living near the center of a local void?» Em: *JCAP* 1703.03, p. 038. DOI: [10.1088/1475-7516/2017/03/038](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/03/038). arXiv: [1609.02061](https://arxiv.org/abs/1609.02061) [[astro-ph.CO](#)].
- Dodelson, Scott (2003). *Modern Cosmology*. Academic Press, Elsevier Science.
- Fixsen, D (nov. de 2009). «The Temperature of the Cosmic Microwave Background». Em: *The Astrophysical Journal* 707. DOI: [10.1088/0004-637X/707/2/916](https://doi.org/10.1088/0004-637X/707/2/916).
- Gandilo, Natalie N. et al. (jul. de 2016). «The Primordial Inflation Polarization Explorer (PIPER)». Em: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series 9914, 99141J, 99141J. DOI: [10.1117/12.2231109](https://doi.org/10.1117/12.2231109). arXiv: [1607.06172](https://arxiv.org/abs/1607.06172) [[astro-ph.IM](#)].
- Gruetjen, H. F. et al. (2017). «Using inpainting to construct accurate cut-sky CMB estimators». Em: *Phys. Rev. D* 95.4, p. 043532. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.043532](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.043532). arXiv: [1510.03103](https://arxiv.org/abs/1510.03103) [[astro-ph.CO](#)].
- Hansen, F. K. et al. (2009). «Power Asymmetry in Cosmic Microwave Background Fluctuations from Full Sky to Sub-degree Scales: Is the Universe Isotropic?» Em: *Astrophys. J.* 704, pp. 1448–1458. arXiv: [0812.3795](https://arxiv.org/abs/0812.3795) [[astro-ph](#)].
- Hanson, Duncan e Antony Lewis (2009). «Estimators for CMB statistical anisotropy». Em: *Physical review letters D*. arXiv/[0908.0963](https://arxiv.org/abs/0908.0963).
- Hivon, Eric et al. (2002). «MASTER of the Cosmic Microwave Background Anisotropy Power Spectrum: A Fast Method for Statistical Analysis of Large and Complex Cosmic Microwave Background Data Sets». Em: *The Astrophysical Journal* 567.1. [astro-ph/0105302](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0105302), pp. 2–17. DOI: [10.1086/338126](https://doi.org/10.1086/338126). URL: <https://doi.org/10.1086%2F338126>.
- Kosowsky, Arthur e Tina Kahniashvili (mai. de 2011). «Signature of Local Motion in the Microwave Sky». Em: *Physical review letters* 106, p. 191301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.191301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.191301).
- Linde, Andrei (2015). «Inflationary Cosmology after Planck 2013». Em: pp. 231–316. DOI: [10.1093/acprof:oso/9780198728856.003.0006](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198728856.003.0006). arXiv: [1402.0526](https://arxiv.org/abs/1402.0526) [[hep-th](#)].

- Linde, Andrei D. (2008). «Inflationary Cosmology». Em: *Lect. Notes Phys.* 738, pp. 1–54. DOI: [10.1007/978-3-540-74353-8_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-74353-8_1). arXiv: 0705.0164 [hep-th].
- Lineweaver, C. H. et al. (1996). «The dipole observed in the COBE DMR four-year data». Em: *Astrophys. J.* 470, pp. 38–42. DOI: [10.1086/177846](https://doi.org/10.1086/177846). arXiv: astro-ph/9601151 [astro-ph].
- LiteBIRD collaboration (2018). «Concept design of the LiteBIRD satellite for CMB B-mode polarization». Em: *Proc.SPIE* 10698, pp. 10698 –10698 –17. DOI: [10.1117/12.2313432](https://doi.org/10.1117/12.2313432). URL: <https://doi.org/10.1117/12.2313432>.
- Ma, Yin-Zhe, Christopher Gordon e Hume A. Feldman (2011). «Peculiar velocity field: Constraining the tilt of the Universe». Em: *Phys. Rev. D* 83 (10), p. 103002. DOI: [10.1103/PhysRevD.83.103002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.103002). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.103002>.
- Messiah A. (1999). «Quantum Mechanics». Em:
- Notari, Alessio e Miguel Quartin (2012). «Measuring our Peculiar Velocity by "Pre-deboosting" the CMB». Em: *JCAP*. arXiv/1112.1400.
- Notari, Alessio e Miguel Quartin (2016). «CMB all-scale blackbody distortions induced by linearizing temperature». Em: *Physical review letters D*. arXiv/1510.08793v3.
- Notari, Alessio, Miguel Quartin e Riccardo Catena (2014). «CMB Aberration and Doppler Effects as a Source of Hemispherical Asymmetries». Em: *JCAP* 1403, p. 019. DOI: [10.1088/1475-7516/2014/03/019](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/03/019). arXiv: 1304.3506 [astro-ph.CO].
- Pereira, Thiago et al. (2010). «Effects of a Cut, Lorentz-Boosted sky on the Angular Power Spectrum». Em: "ArXiv". arXiv/1009.4937.
- Perotto, Laurence et al. (2006). «Probing cosmological parameters with the CMB: forecasts from Monte Carlo simulations». Em: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2006.10, pp. 013–013. DOI: [10.1088/1475-7516/2006/10/013](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2006/10/013). URL: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2006/10/013>.
- Planck Collaboration (2014). «Planck 2013 results. XXVII. Doppler boosting of the CMB: Eppure si muove». Em: *A&A*. arXiv/1303.5087.
- Planck Collaboration (2016). «Planck 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity». Em: *Astron. Astrophys.* 594, A17. DOI: [10.1051/0004-6361/201525836](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525836). arXiv: 1502.01592 [astro-ph.CO].

- Planck Collaboration (2018a). «Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck». Em: [arXiv/1807.06205](https://arxiv.org/abs/1807.06205).
- Planck Collaboration (2018b). «Planck 2018 results. III. High Frequency Instrument data processing and frequency maps». Em: arXiv: [1807.06207](https://arxiv.org/abs/1807.06207) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- Planck Collaboration (2018c). «Planck 2018 results. IV. Diffuse component separation». Em: arXiv: [1807.06208](https://arxiv.org/abs/1807.06208) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- Planck Collaboration (2018d). «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». Em: arXiv: [1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- Planck Collaboration (2018e). «Planck 2018 results. X. Constraints on inflation». Em: arXiv: [1807.06211](https://arxiv.org/abs/1807.06211) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- Quartin, Miguel e Alessio Notari (abr. de 2015a). «Improving Planck calibration by including frequency-dependent relativistic corrections». Em: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2015. DOI: [10.1088/1475-7516/2015/09/050](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/09/050).
- Quartin, Miguel e Alessio Notari (2015b). «On the significance of power asymmetries in Planck CMB data at all scales». Em: *JCAP* 1501.01, p. 008. DOI: [10.1088/1475-7516/2015/01/008](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/01/008). arXiv: [1408.5792](https://arxiv.org/abs/1408.5792) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- Roldan, Omar, Alessio Notari e Miguel Quartin (2016). «Interpreting the CMB aberration and Doppler measurements: boost or intrinsic dipole?» Em: *JCAP* 2016.06. [arXiv/1603.02664](https://arxiv.org/abs/1603.02664), p. 026.
- Roos, Matts (2010). «Dark Matter: The evidence from astronomy, astrophysics and cosmology». Em: *arXiv e-prints*, arXiv:1001.0316, arXiv:1001.0316. arXiv: [1001.0316](https://arxiv.org/abs/1001.0316) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- S. Turner, Michael (jan. de 1992). «Tilted Universe and other remnants of the preinflationary Universe». Em: *Physical review D: Particles and fields* 44. [FermiLab-Pub91/43-A](https://arxiv.org/abs/FermiLab-Pub91/43-A), pp. 3737–3748. DOI: [10.1103/PhysRevD.44.3737](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.44.3737).
- Scott, Douglas e George F. Smoot (2010). «Cosmic Microwave Background Mini-review». Em: *arXiv e-prints*, arXiv:1005.0555, arXiv:1005.0555. arXiv: [1005.0555](https://arxiv.org/abs/1005.0555) [[astro-ph.CO](https://arxiv.org/archive/astro-ph)].
- Silk, J. (fev. de 1968). «Cosmic Black-Body Radiation and Galaxy Formation». Em: 151, p. 459. DOI: [10.1086/149449](https://doi.org/10.1086/149449).

-
- Simons Observatory Collaboration (2018). «The Simons Observatory: Science goals and forecasts». Em: *ArXiv*. [arXiv/1808.07445](https://arxiv.org/abs/1808.07445).
- Starck, J. L., M. J. Fadili e A. Rassat (2013). «Low- ℓ CMB analysis and inpainting». Em: 550, A15, A15. DOI: [10.1051/0004-6361/201220332](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220332). arXiv: [1210.6587](https://arxiv.org/abs/1210.6587) [[astro-ph.CO](#)].
- Sunyaev, R. A. e Y. B. Zeldovich (abr. de 1970). «Small-Scale Fluctuations of Relic Radiation». Em: 7, pp. 3–19. DOI: [10.1007/BF00653471](https://doi.org/10.1007/BF00653471).
- Tsujikawa, Shinji (2003). «Introductory review of cosmic inflation». Em: arXiv: [hep-ph/0304257](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0304257) [[hep-ph](#)].