Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo
Programa de Pós Graduação em Astronomia

Estudo numérico da correlação entre ressonância de movimentos médios e razões de massas planetárias

Viviam Cintra de Alencastro Guimarães

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2021

Estudo numérico da correlação entre ressonância de movimentos médios e razões de massas planetárias

Viviam Cintra de Alencastro Guimarães

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Astronomia).

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci
Coorientador: Cristian Giuppone

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2021

CIP - Catalogação na Publicação

CC575e

Cintra de Alencastro Guimarães, Viviam
Estudo numérico da correlação entre ressonância de movimentos médios e razões de massas planetárias / Viviam Cintra de Alencastro Guimarães. -- Rio de Janeiro, 2021.
133 f.

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci.
Coorientador: Cristian Giuppone.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório do Valongo, Programa de Pós-Graduação em Astronomia, 2021.

1. Mecânica Celeste. 2. Ressonância de Movimentos Médios. 3. Integração Numérica. 4. Mapas Dinâmicos. 5. Dinâmica de Exoplanetas. I. Rodríguez Colucci, Adrián, orient. II. Giuppone, Cristian, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Estudo numérico da correlação entre ressonância de movimentos médios e razões de massas planetárias

Viviam Cintra de Alencastro Guimarães

Dr. Adrian Rodriguez Colucci (Orientador)
Dr. Cristian Andrés Giuppone (Coorientador)

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências - Astronomia.

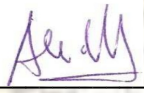
Aprovada por:

Drª. Silvia Maria Giuliatti Winter – (Avaliadora Externa) – UNESP

Dr. Fernando Virgilio Roig – (Avaliador Externo) – Observatório Nacional

Dr. Marcelo Assafin – (Avaliador Interno) – OV/UFRJ

Dr. Cristian Andrés Giuppone – (Coorientador) – Universidad Nacional de Córdoba



Presidente, Dr. Adrian Rodriguez Colucci (Orientador) – OV/UFRJ

Esta defesa realizou-se através de videoconferência, completamente remota, em conformidade com as Resoluções do CEPG n.º 1 de 16 de março de 2020 e n.º 2 de 24 de abril de 2020.

Fevereiro de 2021

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – (Brasil) CAPES – Código de Financiamento 001.

Dedico a dissertação ao meu avô Norbert Peixoto Cintra, que amava estudar matemática, a Terra e as estrelas. Ele foi engenheiro geógrafo e professor condecorado do Instituto Militar de Engenharia. Também, trabalhou no Serviço Geográfico, bem pertinho do Observatório do Valongo, construindo mapas e registrando a topografia do Brasil. Sem seu amor e sua luz, eu não poderia ter encontrado este meu caminho florido que, sem dúvida, é uma continuação do seu.

Agradecimentos

Escrevi esse trabalho com carinho. Estudar Astronomia é a realização de um sonho e muitas pessoas contribuíram para essa alegria. Em eterno primeiro lugar, agradeço à minha família por todo amor e instrução que sempre me deram. As estrelas que guiam minha trajetória são Rosiane e Nelson, Neuza e Norbert, Vera e Paulo, Alexandre e Mariana, Eloah, Yah e nossos queridos primos do Sul. Sem essa constelação de pessoas e meus amados satélites caninos, a Lua e o eterno Skipper, eu não saberia velejar nesse mar.

Agradeço às minhas grandes amigas Mari, Anna, Lu, Marcela e Julia, que acompanham minhas aventuras cósmicas e também me iluminam com seus sorrisos e virtudes. Agradeço à família Milioni pela querida amizade, e também pelo empréstimo do HD externo! Agradeço ao casal Carlos Ayres e Maren Krieger, e a todos os membros do CARJ, que fazem ótimo trabalho de divulgação da Astronomia e me apresentaram aos exoplanetas.

Agradeço aos meus ex-professores da EAC e, especialmente, ao prof. Sérgio, que ensinou Física com bom humor, colocava problemas na superfície de Marte e enriqueceu a nossa percepção da natureza com suas aulas. Agradeço aos meus ex-professores da PUC-Rio por todo o conteúdo que me ensinaram e, especialmente, aos professores Luís Fernando Silva e Ivan Fabio Menezes, pela amizade, pela orientação e por terem me motivado a fazer Mestrado acadêmico, seguindo meu coração.

Agradeço à UFRJ e ao Observatório do Valongo por terem me recebido e me preenchido com tanto conhecimento. Agradeço aos alunos da Pós Graduação do OV pelas dicas e pela parceria e, em especial, à Rayssa, minha fiel amiga de sala e companheira de disciplinas.

Agradeço ao diretor prof. Helio Rocha-Pinto, ao coordenador prof. Thiago Gonçalves e aos funcionários do OV por sua dedicação à prosperidade do Observatório e da ciência nacional. Agradeço aos professores que dividiram sua sabedoria diretamente comigo: prof. Wagner Marcolino, prof. Karín Menéndez-Delmestre, prof. Luan Ghezzi e, do Observatório Nacional, a prof. Daniela Lazzaro e o prof. Fernando Roig. Também agradeço aos demais professores, que me ensinaram por meio de seus trabalhos de divulgação e seminários, presenciais e virtuais. E agradeço à CAPES, pelo programa de bolsas de estudos.

Especialmente, agradeço ao meu orientador de Mestrado, o prof. Adrián Rodríguez, que recebeu uma quantidade astronômica de perguntas durante todo o meu curso e me respondeu todas as vezes com clareza, paciência e respeito. Obrigada pelas aulas, pelas recomendações bibliográficas e pelo acesso a computadores, sem os quais eu não poderia ter desenvolvido este projeto. Agradeço ao prof. Marcelo Assafin, que cedeu espaço em suas máquinas para as integrações e isso foi muito importante para agilizar a geração de resultados!

Agradeço ao meu coorientador Cristian Giuppone, da Universidad Nacional de Córdoba, na Argentina, que me tirou dúvidas, ensinou conceitos teóricos e deu dicas para a construção de mapas. E também agradeço ao ex-aluno do prof. Adrián, o Mateus Santos, que deixou de legado um código em Python para rodar uma sequência de simulações. Com esse código amigo, entendi como eu poderia escrever os programas para o meu projeto. Enfim, eu espero que meu trabalho também abra uma porta para outras pessoas.

Resumo

Estudo numérico da correlação entre ressonância de movimentos médios e razões de massas planetárias

Viviam Cintra de Alencastro Guimarães

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Astronomia).

Nos últimos anos, diversos sistemas planetários foram descobertos e novas missões observacionais estão em desenvolvimento com o propósito de encontrar exoplanetas em zonas habitáveis. Na busca por condições propícias à vida em outros sistemas, aqueles que são dinamicamente estáveis são de especial interesse. Nesse contexto, a ressonância de movimentos médios (RMM) em sistemas multiplanetários é um fenômeno dinâmico importante, determinante para evolução de órbitas a longo prazo.

A RMM pode se manifestar quando os períodos orbitais dos planetas de um sistema obedecem uma razão simples de números inteiros. Se obedecem essa razão e existe uma combinação de ângulos orbitais - um ângulo crítico da ressonância - que se repete, evoluindo no tempo de forma periódica e oscilando ao redor de um ponto de equilíbrio, o sistema é dito capturado em RMM.

Dependendo da configuração dos planetas em RMM, o sistema pode manifestar maiores ou menores variações de elementos orbitais ao longo do tempo. Em alguns casos, as variações podem resultar em interações instáveis entre corpos do sistema devido à proximidade de órbitas ou caoticidade. Em outros, a RMM é capaz de evitar encontros próximos planetários e proteger o sistema de perturbações externas. Além da relevância para a estabilidade de órbitas, a ocorrência de RMM também pode indicar processos possíveis de migração planetária que ocorreram durante a formação de um sistema planetário.

Neste trabalho, uma série de simulações numéricas foram realizadas para sistemas hipotéticos de uma estrela e dois planetas com períodos orbitais iniciais em proporção 2:1. Estudou-se como as razões de massas planetárias se correlacionam com a extensão das regiões de ocorrência de RMM no espaço de excentricidades. Os resultados obtidos incluem mapas dinâmicos de regiões de RMM, de corrotação apsidal e de ressonância de corrotação apsidal simétricas. Os mapas constituem um catálogo que pode ser utilizado para estimar a dinâmica de sistemas observados com razões de períodos orbitais próximas à relação 2:1, sem a necessidade de novas simulações.

Além disso, foi feita uma análise da dinâmica orbital de três sistemas observados, considerando-se os resultados previstos pelo catálogo de mapas. Enfim, foi possível concluir que, de fato, dependendo da razão de massas planetárias, existem excentricidades e condições angulares específicas capazes de promover a dinâmica ressonante em um sistema. No entanto, a extensão da região de

RMM no espaço de semi-eixos maiores e excentricidades, ou seja, na vizinhança da configuração de RMM exata, pode comprometer a estimativa do catálogo para alguns sistemas observados.

palavras chave: *ressonância de movimentos médios*, *corrotação apsidal*, *razões de massas planetárias*, *dinâmica de exoplanetas*, *catálogo*, *mapas dinâmicos*, *problema de três corpos*, *mecânica celeste*

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2021

Abstract

Numerical study of the correlation between mean motion resonance and planetary mass ratios

Viviam Cintra de Alencastro Guimarães

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Astronomia).

Several planetary systems have been discovered in the past years and new observational missions are still under development, with the aim of finding exoplanets in habitable zones. In the search for conditions that are suitable for life, dynamically stable systems are of special interest. In this context, mean motion resonance (MMR) in multiplanetary systems is an important dynamic phenomenon, for it affects their long-term orbital evolution.

A MMR can happen when the orbital periods of planets are proportional to one another, satisfying a simple ratio of whole numbers. If they satisfy this ratio and, also, there is a combination of orbital angles - a resonant critical angle - that repeats over time, evolving periodically and oscillating around an equilibrium point, the system is said to be captured in MMR.

Depending on the configuration of the planets in (or near) MMR, a system may manifest greater or lesser variations in its orbital elements over time. In some cases, these variations may result in unstable interactions between bodies of a system due to orbital proximity or chaoticity. In other cases, a MMR is capable of avoiding close planetary encounters and protecting the system from external perturbations. In addition to having relevance for orbital stability, the occurrence of MMR can also indicate possible processes of planetary migration that occurred during the formation of a planetary system.

In this project, a series of numerical simulations were run for hypothetical systems composed of a star and two planets with initial orbital periods in proportion 2:1. It was studied how planetary mass ratios correlate with the extension of MMR occurrence regions in the space of eccentricities. The results obtained include dynamic maps of symmetric 2:1 MMR, apsidal corotation and apsidal corotation resonance. These maps constitute a catalogue that can be used to estimate the dynamics of observed systems with orbital period ratios close to 2:1, without the need for new simulations.

Moreover, three observed systems had their orbital dynamics analysed, considering predictions which were made using the catalogue of maps. Finally, it was possible to conclude that, depending on the planetary mass ratio, there are specific eccentricities and angular conditions which promote resonant dynamics in a system indeed. However, the extension of the MMR region in the space of semi-major axes and eccentricities, that is, in the neighborhood of the exact MMR configuration, may compromise the estimate of the catalogue for some observed systems.

keywords: *mean motion resonance*, *apsidal corotation*, *planetary mass ratios*, *exoplanet dynamics*, *catalogue*, *dynamic maps*, *three-body problem*, *celestial mechanics*

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2021

Lista de Figuras

1.1 Acima: relação de 1216 exoplanetas com semi-eixo maior e massas determinadas, classificados por raio planetário e excentricidades orbitais. Abaixo: relação de 950 exoplanetas com massas projetadas determinadas, em função da indeterminação das inclinações de planos orbitais e o uso do método de velocidade radial estelar. Dados retirados em 10/2020 do Exoplanet.eu. 2

1.2 Oito discos protoplanetários registrados pelo *High Angular Resolution Project* utilizando o ALMA na faixa de comprimentos de onda em torno de 1.25mm, segundo Huang et al. (2018). No canto superior de cada imagem, está o nome dos objetos e as barras brancas no canto inferior direito equivalem a 10 UA (aproximadamente, a distância do Sol a Saturno). 3

1.3 Simulação hidrodinâmica do sistema HD 73526 com disco protoplanetário, 1400 anos após captura dos dois planetas na RMM 2:1. Os dois planetas com $\sim 2.5 M_J$ e a estrela central são os pontos vermelhos, a cor amarela representa as regiões de maior densidade e a cor azul, as de densidade mais baixa, segundo Kley (2019). 4

1.4 Os satélites naturais de Júpiter, por Paita et al. (2018): Io (vermelho), Europa (verde) e Ganimedes (azul). As três luas orbitam o planeta com períodos na proporção 4:2:1, que também pode ser entendida como duas RMM 2:1 entre pares de luas. Essa RMM de três corpos evita que ocorra a conjunção tripla dos satélites. T é o período de Io e cada imagem mostra o sistema de luas em diferentes instantes de tempo. Considera-se inicialmente Europa e Ganimedes em conjunção. Partindo dessa configuração, dentro de um período orbital de Io, Europa percorre metade de sua órbita e, Ganimedes, 1/4 de órbita. Com esse ritmo, após quatro períodos de Io, Europa orbita Júpiter duas vezes e Ganimedes completa uma única órbita. O instante 4T, que está ausente, é uma reprodução do instante 0. 5

1.5 Número de pares de exoplanetas vs. razão de períodos, para sistemas detectados pela missão Kepler até 2014, segundo Winn & Fabrycky (2015). 6

2.1 Orientação espacial de uma órbita planetária e seus elementos orbitais. Imagem adaptada de (Gurfil (2007)). 17

2.2 Órbita elíptica planetária de semi-eixo maior a e excentricidade e, com um astro massivo em um de seus focos e segundo foco vazio. Excentricidade nula corresponde a uma órbita circular e a distância do foco ao pericentro vale $a(1-e)$. O ângulo $w+f$ chama-se longitude verdadeira. A distância r é dada por $r = \frac{a(1-e^2)}{1+ecos(f)}$. . 17

2.3 Conjunções planetárias e o deslocamento angular da conjução consecutiva. 21

2.4 Perturbações mútuas na RMM e conjunções. As setas representam as forças gravitacioais que atuam sobre m': em amarelo, a força causada pela presença da estrela; em verde, forças perturbativas gravitacionais causadas por m; em azul, a componente tangencial das forças perturbativas mencionadas. Adaptado de Armitage (2010) e Peale (1976). 23

2.5 RMM 2:1 e configurações apsidais. Adaptação de Perryman (2018), figura 10.30. . 24

2.6 Resultados de Michtchenko et al. (2008a). À esquerda: curvas de nível que representam um sistema em diferentes valores de energia, mas com um conjunto específico de valores $\{AM, K, m_2/m_1\}$ e c.i angulares correspondentes a (σ_1, σ_2) $=(\pi, 0), (\pi, \pi), (0, 0), (0, \pi)$ nos quadrantes esquerdo superior e inferior, direito superior e inferior, respectivamente. Para uma mesma energia, c.i. angular e c.i. de excentricidades, à medida que o sistema evolui no tempo, os valores de e_1, e_2 variam segundo uma curva de nível. Os pontos vermelho e preto são soluções de ACR. À direita: curvas teóricas de dinâmica ACR 2:1 para diferentes razões de massas no plano de excentricidades iniciais e c.i (σ_1, σ_2)=(0,0), que corresponde a $(\sigma_1, \Delta\varpi)$=(0,0). . 27

2.7 Curvas teóricas de soluções ACR 2:1 exatas para casos de pericentros anti-alinhados, à esquerda, e alinhados, à direita. Em ambos os casos, as soluções têm σ_1=0° e as curvas se distinguem por razões de massas planetárias (m_{ext}/m_{int}) (Beaugé et al. (2003)). 29

2.8 À esquerda: regiões de dinâmica ACR 2:1 simétrica, assimétrica e anti-simétrica no plano de excentricidades, separadas pelos pontos de equilíbrio angulares de (σ_1, dw). À direita: curvas teóricas de soluções ACR para diferentes razões de massas planetárias, de acordo com Beaugé et al. (2006). 30

2.9 À esquerda: Em cinza claro, está a evolução no plano de excentricidades, por migração adiabática, de um sistema de dois planetas com razão de massas 0.8, em RMM 2:1, inicialmente com órbias circulares. A curva preta preenchida são soluções ACR teóricas para essa razão de massas. À direita: Evoluções de sistemas de diferentes razões de massas, em condições adiabáticas (preto) e não adiabáticas (cinza), por Beaugé et al. (2006). 32

4.1 Estrutura de mapas dinâmicos a vs. e: mapemento das máximas variações de semieixo maior e excentricidade do planeta menos massivo do sistema Kepler-25 nas vizinhanças da RMM 2:1. O ponto vermelho marca a posição do Kepler-25 b, segundo parâmetros planetários de Mills et al. (2019). Estrela de $1.22M_\odot$. Tempo das integrações: 4000 dias. 37

4.2 Estrutura de mapas dinâmicos a vs. e: mapeamento das amplitudes de oscilação do ângulo crítico da RMM 2:1, $\sigma_1 = 2\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1$. Sistema coplanar com longitudes de pericentro e anomalias médias iniciais iguais a 0°. Uma circulação corresponde à amplitude de 180° e os gráficos de evolução temporal estão modulados entre 0° e 360°. As evoluções representadas mostram librações ao redor de $\sigma_1 = 0°$, exceto pelo caso superior à esquerda, em que ocorre circulação do ângulo crítico em uma simulação externa e bem próxima a uma região de oscilação. 38

4.3 Evoluções temporais de ângulos críticos e mapeamento de sua amplitude (em graus) para um sistema coplanar, inicialmente em 2:1 exata, com razão de massas planetárias 1 (i.e. "r=1") e estrela do tipo solar. Pixels brancos correspondem a instabilidades, ou seja, à ocorrência de colisões entre objetos ou ejeções (i.e. algum objeto se afastou da estrela mais de 100 UA). 39

4.4 Evoluções temporais da diferença de longitudes de pericentro e mapeamento de sua amplitude (em graus) para um sistema coplanar em 2:1, com razão de massas planetárias 1 (i.e. "r=1") e estrela do tipo solar. Pixels brancos correspondem à ocorrência de colisões ou ejeções nas simulações. 40

4.5 Estutura de mapas dinâmicos: mapeamento de regiões ACR segundo critérios de amplitude de σ_1 e de $\Delta\varpi$. Mapas com estrela do tipo solar, a_1=0.5 UA e tempo de integração de 240 mil anos. Nos mapas, a cor branca representa simulações com instabilidades, ou seja, simulações em que houve colisão entre planetas, colisão entre planeta e estrela ou ejeção de algum objeto. 44

4.6 Evoluções temporais da excentricidade de planetas em sistemas com razão de períodos 2 e razão de massas 1. Em cada linha de gráficos, aquele à esquerda mostra períodos de perturbação ressonante de um sistema com determinado valor de a_1 e, à direita, está a evolução secular do mesmo sistema. Os períodos ressonante e secular foram indicados nos gráficos do caso $a_1 = 0.0516$ UA com estrela solar e os períodos referentes às outras simulações apresentadas podem ser deduzidos de maneira análoga. Os dois gráficos inferiores são para estrela de 0.5 $M_\odot$ e os demais casos são para $1M_\odot$. 46

5.1 Percentual de simulações em RMM 2:1 vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA. 48
5.2 Percentual de simulações com oscilação de $\Delta\varpi$ vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA. 49
5.3 Percentual de simulações em ACR vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA. 50
5.4 Percentual de simulações em ACR, considerando os totais de ocorrência de ACR de diferentes critérios de amplitude vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA. 51
5.5 Percentual de simulações com circulações de ângulos e instabilidades vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA. 52
5.6 Percentual de simulações com instabilidades vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA. 53
5.7 Gráficos de percentuais de ocorrência em função de razões de massas planetárias. Estrela de massa solar. A coluna de gráficos à esquerda refere-se à posição inicial $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio a $a_1 = 0.5$ UA e à direita a $a_1 = 1$ UA. 55
5.8 Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias. Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 e 0.25, respectivamente. 62
5.9 Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.3, 0.35, 0.4, 0.6 e 0.8, respectivamente. 63
5.10 Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.9, 1.0, 1.2, 1.5 e 1.8, respectivamente. 64
5.11 Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 2, 2.5, 3, 3.5 e 4, respectivamente. 65
5.12 Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 5, 6, 8, 10 e 15, respectivamente. 66
5.13 Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razão de massas planetárias r=20. Estrela de $1M_\odot$.A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. 67
5.14 Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 e 0.25, respectivamente. 68

5.15 Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.3, 0.35, 0.4, 0.6 e 0.8, respectivamente. 69
5.16 Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.9, 1.0, 1.2, 1.5 e 1.8, respectivamente. 70
5.17 Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 2, 2.5, 3, 3.5 e 4, respectivamente. 71
5.18 Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 5, 6, 8, 10 e 15, respectivamente. 72
5.19 Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razão de massas planetárias r=20. Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. 73
5.20 Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 e 0.25, respectivamente. 74
5.21 Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.3, 0.35, 0.4, 0.6 e 0.8, respectivamente. 75
5.22 Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.9, 1.0, 1.2, 1.5 e 1.8, respectivamente. 76
5.23 Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 2, 2.5, 3, 3.5 e 4, respectivamente. 77
5.24 Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 5, 6, 8, 10 e 15, respectivamente. 78
5.25 Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razão de massas planetárias r=20. Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. 79
5.26 Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_\odot$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 e 0.25, respectivamente. 80
5.27 Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_\odot$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 0.3, 0.35, 0.4, 0.6 e 0.8, respectivamente. 81

5.28 Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_\odot$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 0.9, 1.0, 1.2, 1.5 e 1.8, respectivamente. 82
5.29 Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_\odot$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 2, 2.5, 3, 3.5 e 4, respectivamente. 83
5.30 Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_\odot$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 5, 6, 8, 10 e 15, respectivamente. 84
5.31 Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_\odot$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. A linha de mapas tem razão r=20. 85

6.1 Marcação das excentricidades orbitais do HD 155358 em mapas de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, gerados com razão de massas planetárias 0.8, $a_1 = 0.5$ UA, tempo de 240 mil anos, razão de períodos 2 e massa estelar de $1M_\odot$. *Fit* 1 e 2 de Ma et al. (2017) e Robertson et al. (2012), respectivamente. . . 88
6.2 Mapas dinâmicos para o sistema HD 155358 próximo à RMM 2:1, com tempo de integração de 50 anos e com quadrantes angulares (0,0) - valores positivos do eixo vertical - e (0,π) - valores negativos. As colunas de mapas se referem aos *fits* de Ma et al. (2017) e Robertson et al. (2012), respectivamente. Na horizontal: mapas de máxima variação de semi-eixo maior do planeta HD 155358 c, de máxima variação da excentricidade deste planeta e mapas de amplitude de oscilação de σ_1 do sistema. Em branco: simulações com instabilidades. 89
6.3 Simulações seculares do sistema HD 155358 segundo o *fits* de Ma et al. (2017), na coluna de gráficos à esquerda, e de Robertson et al. (2012), na coluna à direita. . . 92
6.4 Marcação das excentricidades de do *fit* de Petigura et al. (2018) para o sistema K2-24 em mapas gerados de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, com razão de massas planetárias 0.8, $a_1 = 0.0516$ UA, tempo de 4 mil anos, razão de períodos 2 e massa estelar de $1M_\odot$. 93
6.5 Mapas dinâmicos para o sistema K2-24 próximo à RMM 2:1, com tempo de integração de 50 anos e quadrantes angulares (0,0) - valores positivos do eixo vertical - e (0,π) - valores negativos. A marcação se refere aos valores (a, e) do planeta externo, c, de acordo com Petigura et al. (2018). À esquerda: mapas de máxima variação de semi-eixo maior, de máxima variação de excentricidade do planeta c. À direita: mapa de amplitude de σ_1. 94
6.6 Simulações seculares do sistema K2-24, com parâmetros do *fit* de Petigura et al. (2018). Na coluna de gráficos à esquerda, utilizou-se c.i. angulares correspondentes ao quadrante (0,0) e, à direita, ao quadrante (0,π). 96
6.7 Mapas dinâmicos para o sistema K2-24 próximo à RMM 2:1, com tempo de integração de 50 anos e com quadrantes angulares (0,0) e (0,π). A marcação se refere aos valores (a, e) do planeta externo, c, de acordo com Petigura et al. (2018). Na primeira linha de mapas, utilizou-se uma estrela de $0.5M_\odot$, na segunda linha, $1.07M_\odot$ - como foi observado -, e na terceira linha, $2M_\odot$. As colunas são mapas de máxima variação de semi-eixo maior e de excentricidade do planeta externo (K2-24 c) e mapas de amplitude de σ_1, respectivamente. 97

6.8 Marcação das excentricidades de do *fit* de Kipping et al. (2019) para o sistema TOI-216 em mapas gerados de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, com razão de massas planetárias 6, $a_1 = 0.0516$ UA, tempo de 4 mil anos, razão de períodos 2 e massa estelar de $1M_\odot$. 98
6.9 Marcação das excentricidades de do *fit* de Kipping et al. (2019) para o sistema TOI-216 em mapas gerados de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, com razão de massas planetárias 200/30, $a_1 = 0.1293$ UA, $a_2 = 0.2069$ UA, tempo de 4 mil anos, razão de períodos 2.0242 e massa estelar de $0.874M_\odot$. 99
6.10 Mapas dinâmicos para o sistema TOI-216 próximo à RMM 2:1, com duração de 18 anos. A coluna de mapas à esquerda tem c.i. angulares correspondentes ao quadrante $(\sigma_1, \Delta\varpi) = (0, 0)$ e, à direita, ao quadrante $(0,\pi)$. A marcação se refere aos valores (a, e) do planeta interno, de acordo com Kipping et al. (2019). De cima para baixo: mapas de máxima variação de semi-eixo maior do planeta b, de máxima variação de excentricidade do planeta b e de amplitude de oscilação de σ_1. 101
6.11 Simulações seculares do sistema TOI-216, com parâmetros do *fit* de Kipping et al. (2019). Na coluna de gráficos à esquerda, utilizou-se c.i. angulares correspondentes ao quadrante (0,0) e, à direita, ao quadrante $(0,\pi)$. 102

Sumário

Agradecimentos **ii**

Resumo **iii**

Abstract **v**

Lista de Figuras **vii**

Sumário **xiii**

1 Introdução **1**

2 Fundamentos Teóricos **8**
2.1 Problema Clássico de N corpos 8
2.1.1 3 Corpos e Coordenadas Heliocêntricas 12
2.1.2 Função Perturbadora e Termos Ressonantes 15
2.2 Ressonância de Movimentos Médios e Conjunções 20
2.3 Ressonância de Corrotação Apsidal 24
2.4 Literatura: RMM, ACR e Razões de Massas Planetárias 25

3 Objetivos **34**

4 Metodologia **35**
4.1 Estrutura de Mapas Dinâmicos 36
4.2 Estudo de Correlação 41
4.2.1 Variação de Razões e Gráficos de Percentuais 41
4.2.2 Definição de Parâmetros de Integração 45

5 Resultados **47**
5.1 Percentuais de Ocorrência de RMM e ACR 47
5.2 Análise e Aspecto de Mapas Dinâmicos 56
5.2.1 Mapas de Amplitudes de Ângulo Crítico 62
5.2.2 Mapas de Amplitudes de $(\varpi_2 - \varpi_1)$ 68
5.2.3 Regiões de Ressonância de Corrotação Apsidal 74
5.2.4 Repetição do Método para Anã Vermelha 80

6 Aplicações **86**
6.1 Marcação de Sistemas em Mapas Dinâmicos 86

6.1.1 Sistema HD 155358 87
6.1.2 Sistema K2-24 93
6.1.3 Sistema TOI-216 98

7 Conclusões **103**
7.1 Sobre as Ocorrências de RMM/ACR 103
7.2 Sobre o Aspecto dos Mapas Dinâmicos 105
7.3 Sobre as Aplicações do Catálogo de Mapas 106

Referências Bibliográficas **107**

A Levantamento de Dados **112**

Capítulo 1

Introdução

Desde a primeira detecção de um exoplaneta em 1992, ao redor do pulsar PSR B1257+12, e do 51 Pegasi b ao redor de uma estrela do tipo solar em 1995, vários outros planetas foram observados utilizando-se diferentes métodos, sendo os principais: trânsito fotométrico, variação de tempo de trânsito (TTV), velocidade radial, microlentes gravitacionais e imageamento direto. Já existem mais de 4000 exoplanetas confirmados[1] e vários casos de sistemas multiplanetários. Diferentemente do que se poderia esperar, sistemas de exoplanetas, em geral, se distinguem bastante do Sistema Solar e a caracterização de tais sistemas revela uma abundância de propriedades físicas e configurações orbitais possíveis.

A União Astronômica Internacional define exoplanetas como quaisquer objetos que orbitem estrelas ou remanescentes estelares - i.e. anãs brancas, estrelas de nêutrons ou buracos negros - não importando o processo de formação e, além disso, um exoplaneta deve ter massa máxima abaixo do limite em que ocorre fusão termonuclear de deutério ($\sim 13\ M_J$ para objetos de metalicidade solar). A massa mínima deve estar de acordo com o que se define como planeta no Sistema Solar. Apesar de haver discussões com respeito a essa última definição, a maioria dos exoplanetas observados possui massa acima de uma massa terrestre, de modo que exoplanetas também são entendidos como objetos aproximadamente esféricos por efeito de sua própria gravidade e que, geralmente, não compartilham suas órbitas com outros objetos de tamanho semelhante.

Em termos de distância média ao centro de massa de um sistema, os exoplanetas podem apresentar órbitas cobrindo uma grande faixa de valores de semi-eixo maior, de décimos a dezenas de unidades astronômicas. Como exemplo extremo, o exoplaneta Kepler-78 b tem um dos menores períodos orbitais já detectados, 8.5 horas de acordo com Howard et al. (2013), estando ~ 30 vezes mais próximo de sua estrela do que Mercúrio está do Sol. Existem gigantes gasosos em órbitas compactas, planetas circumbinários, órbitas mutuamente inclinadas ou não, trajetórias circulares, excêntricas ou já quase parabólicas, entre outros. A Figura 1.1 é uma representação gráfica da variedade de exoplanetas já descobertos, evidenciando o quanto outros sistemas planetários podem ser diferentes do que se tem no Sistema Solar.

Essa diversidade é compreendida em função da quantidade de fatores que podem influenciar na formação e evolução de sistemas planetários. De acordo com os modelos de formação atuais, planetas são subprodutos da formação estelar. Uma nuvem molecular fria composta por gás e

[1] NASA Exoplanet Archive (10/01/21): exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/

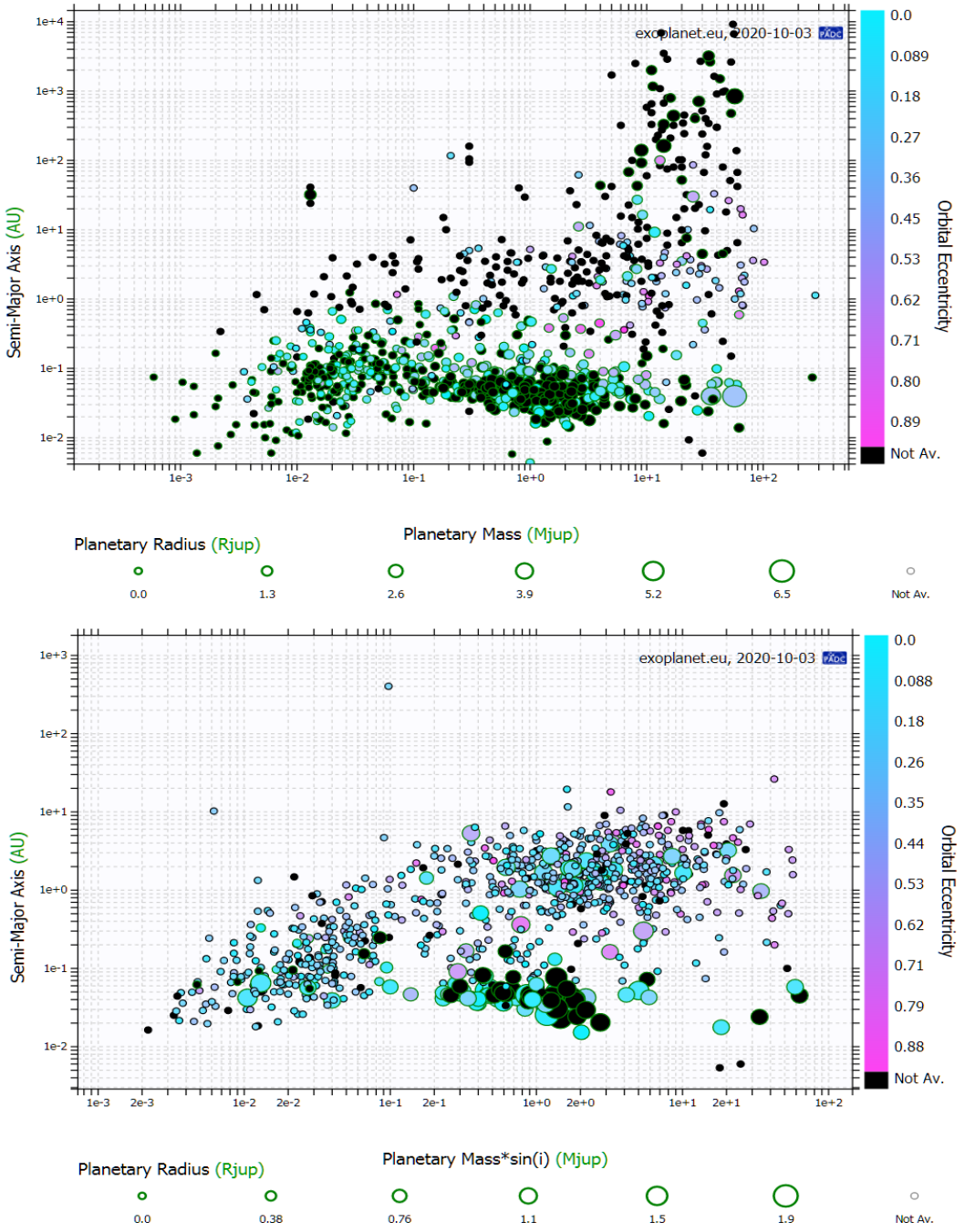


FIGURA 1.1. Acima: relação de 1216 exoplanetas com semi-eixo maior e massas determinadas, classificados por raio planetário e excentricidades orbitais. Abaixo: relação de 950 exoplanetas com massas projetadas determinadas, em função da indeterminação das inclinações de planos orbitais e o uso do método de velocidade radial estelar. Dados retirados em 10/2020 do Exoplanet.eu.

poeira sofre colapso gravitacional, formando uma protoestrela, que acumula massa até iniciar o processo de fusão de hidrogênio. O volume de material que não cai diretamente na protoestrela, que não é acretado pela estrela formada ou dispersado pela atividade estelar, se acumula em um disco em rotação. Inicia-se, então, no disco, um processo de aglomeração de material que evolui em ordem de grandeza: grãos microscópicos crescem e dão origem a pequenos objetos, planetesimais, protoplanetas e, enfim, planetas (Perryman (2018)).

Na Figura 1.2, é possível observar imagens de discos de formação planetária obtidas com o rádio-observatório ALMA. O disco brilha por emissão térmica e espalhamento da radiação do corpo

central, e as falhas escuras entre anéis de poeira e gás correspondem às regiões em que planetas estariam se formando, já tendo acretado boa parte do material disponível nas proximidades de suas órbitas.

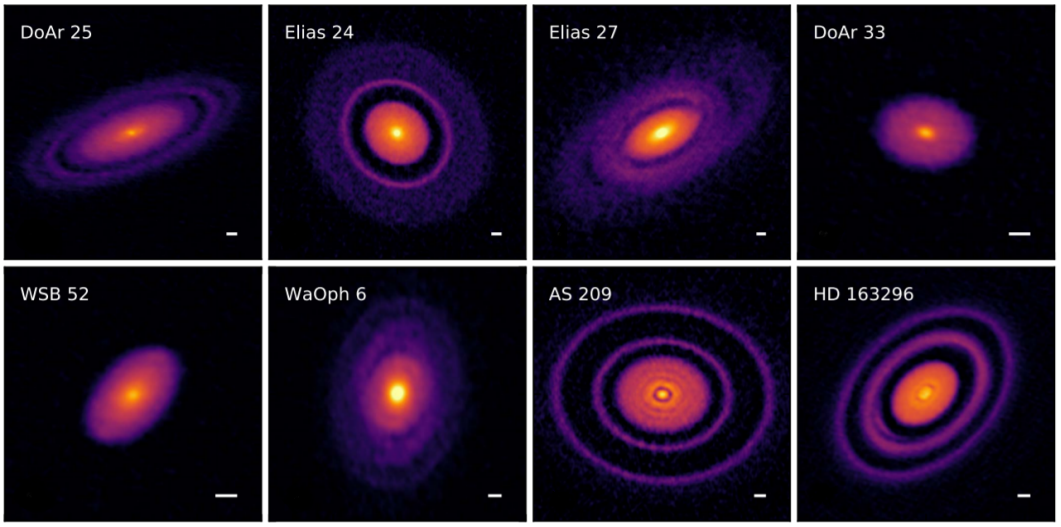


FIGURA 1.2. Oito discos protoplanetários registrados pelo *High Angular Resolution Project* utilizando o ALMA na faixa de comprimentos de onda em torno de 1.25mm, segundo Huang et al. (2018). No canto superior de cada imagem, está o nome dos objetos e as barras brancas no canto inferior direito equivalem a 10 UA (aproximadamente, a distância do Sol a Saturno).

Uma série de fenômenos físicos pode ocorrer no processo de crescimento de núcleos planetários, como interações fluidodinâmicas com o disco de gás e poeira em diferentes cenários de viscosidade, pressão, temperatura e tipos de escoamento, interações gravitacionais com planetésimos ou com regiões mais ou menos densas do disco e interações magnéticas com a estrela, por exemplo. Depois disso, planetas formados ainda evoluem dinamicamente sob interação gravitacional com a estrela e com o que sobrou do disco, podendo sofrer alterações nos elementos orbitais. Nesse contexto, podem ocorrer fenômenos em diferentes escalas de tempo, como migrações por efeito de maré, circularização de órbitas, ressonâncias orbitais de vários tipos e perturbações seculares (Murray & Dermott (2000)).

Os parâmetros da Figura 1.1 correspondem a órbitas Keplerianas, i.e. estáticas, para os planetas na época de observação, mas órbitas reais evoluem (por causa de perturbações, efeitos dissipativos, fenômenos associados à relatividade geral, entre outros) e, portanto, elementos orbitais como semi-eixos, excentricidade, direção de pericentro e inclinação variam para determinadas escalas de tempo. Como resultado, pode haver sistemas sujeitos a instabilidades - ocorrência de encontros próximos, colisões, ejeções ou fragmentação de objetos por maré - e sistemas predominantemente estáveis, que, por exemplo, preservam corpos de dimensões planetárias por bilhões de anos, como é o caso do nosso sistema planetário.

A ressonância de movimentos médios (RMM; em inglês: *mean motion resonance*) é um fenômeno dinâmico que está presente em muitos sistemas de exoplanetas catalogados e, em alguns casos, pode se manifestar dentro do intervalo de tempo de observações (método de TTV). A RMM é essencialmente uma perturbação orbital que pode ocorrer tanto na presença como na ausência de disco e existe quando há alguma comensurabilidade quase exata entre períodos orbitais médios de dois ou mais corpos de um sistema, ou seja, quando a razão de velocidades orbitais médias de dois objetos pode ser expressa por uma fração de números inteiros (em geral, pequenos). Essa relação

de frequências promove uma excitação gravitacional periódica sobre as órbitas dos corpos em ressonância e as transferências de momento angular orbital resultantes influenciam, especialmente, a evolução orbital do corpo de menor massa envolvido na ressonância (Murray & Dermott (2000)).

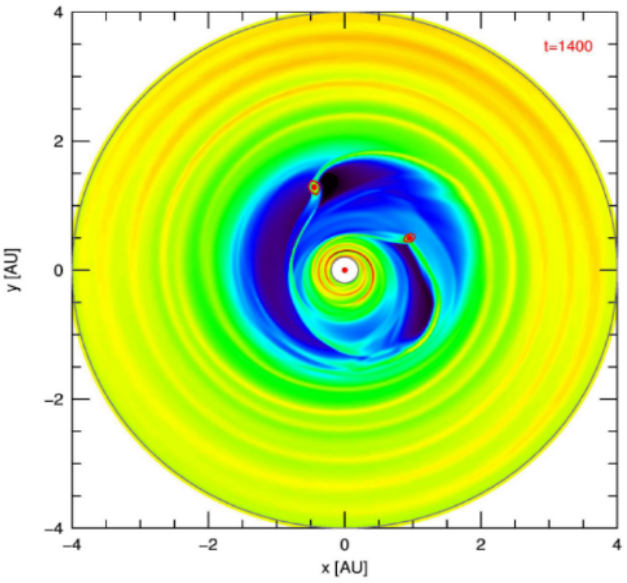


FIGURA 1.3. Simulação hidrodinâmica do sistema HD 73526 com disco protoplanetário, 1400 anos após captura dos dois planetas na RMM 2:1. Os dois planetas com $\sim 2.5 M_J$ e a estrela central são os pontos vermelhos, a cor amarela representa as regiões de maior densidade e a cor azul, as de densidade mais baixa, segundo Kley (2019).

Como será evidente nas próximas seções, este trabalho se concentra nos efeitos da RMM no contexto da evolução temporal de sistemas que já não têm mais disco, mas as razões simples de períodos orbitais, entre outras possíveis causas, originam-se naturalmente de processos de migração planetária em disco de gás, como sugerem simulações hidrodinâmicas realizadas por diferentes pesquisadores (Kley et al. (2005), Kley et al. (2004), Papaloizou & Szuszkiewicz (2005) e Perryman (2018)).

Nesse sentido, exoplanetas descobertos em configurações ressonantes não teriam sido formados nas órbitas atuais, i.e. *in situ*, mas teriam sido *capturados* nelas. Uma vez iniciada a formação de objetos planetários em distâncias variadas com relação à estrela, torques gravitacionais gerados pelo disco podem causar variações nos momentos angulares orbitais dos objetos, fazendo-os se deslocar, i.e. migrar pelo disco, com velocidades diferentes e aproximando-os da configuração de RMM (Armitage (2010)).

Quando os objetos estão próximos da RMM, a perturbação gravitacional mútua é amplificada e ela pode contribuir para que as órbitas fiquem capturadas na RMM. Com a captura, os objetos ainda podem migrar, mas o fazem mantendo a proporção de períodos orbitais médios. A migração conjunta sob interação com o disco ocorre até a dispersão deste. Depois disso, a configuração ressonante pode continuar presente durante o restante da evolução dinâmica do sistema na ausência de disco.

Um outro resultado desse tipo de migração pode ser a excitação de excentricidades orbitais para valores moderados (~ 0.3) (Kley et al. (2004)), mas fenômenos dissipativos, por exemplo efeito de maré entre planetas e estrela, podem contribuir para a circularização das órbitas (Brasser et al. (2019)). A Figura 1.3 ilustra uma simulação realizada para dois planetas orbitando uma estrela

em meio a um disco de formação, já tendo ocorrido a migração que os capturou em configuração ressonante, na qual as órbitas planetárias têm razão de períodos 2:1.

Outro processo que pode resultar em planetas posicionados em RMM é o chamado *planet-planet scattering* (dispersão/espalhamento planeta-planeta), segundo Raymond et al. (2008). Nesse mecanismo, ocorre também a migração de planetas, mas esta se deve mais à interação gravitacional entre eles do que aos torques gravitacionais gerados por um disco de gás ou por um disco de planetésimos. O processo, portanto, é independente da existência de disco, mas pode ser potencializado pela presença de um e pode ser acompanhado de ressonâncias do tipo Lidov-Kozai, i.e. planetas perturbando-se mutuamente, gerando órbitas com oscilações periódicas de excentricidade, sincronizadas com oscilações de inclinação entre planos orbitais.

O *planet-planet scattering* pode ser entendido como a evolução instável de sistemas multiplanetários, em que ocorrem mudanças dramáticas de configuração e, geralmente, ejeção de um ou mais planetas (Perryman (2018)). Um resultado simulado é que podem se formar órbitas altamente excêntricas, nas quais planetas, ao se aproximarem da estrela no periélio, sofrem intensos forçamentos de maré. Mas, como o nome do mecanismo indica, ocorre uma dispersão de planetas e vários tipos de órbitas podem ser gerados. Inclusive, pode acontecer o posicionamento de planetas em RMM de diferentes ordens, segundo Raymond et al. (2008).

Existem também outros tipos de *scattering*, em que a atuação gravitacional de planetésimos e outros materias de um disco podem atuar, junto à interação entre planetas, com mais ou menos relevância para a arquitetura final de um sistema. O *scattering* gravitacional é uma das explicações para o surgimento de cadeias de RMM (Perryman (2018)). Para exemplificar, uma cadeia de RMM famosa é a ressonância de Laplace, existente nas luas mais próximas de Júpiter e que tem sua origem vinculada, essencialmente, a efeitos de maré (Lari et al. (2020)). A ressonância de Laplace é ilustrada na Figura 1.4.

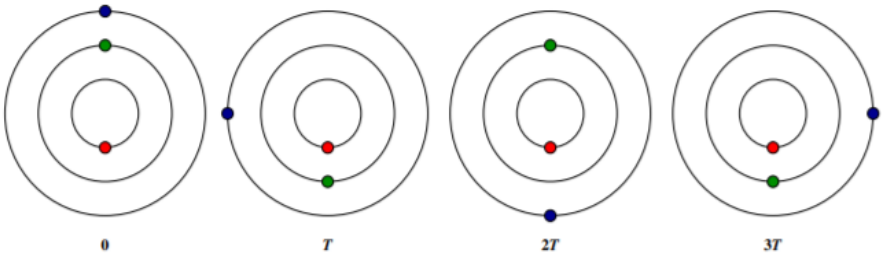


FIGURA 1.4. Os satélites naturais de Júpiter, por Paita et al. (2018): Io (vermelho), Europa (verde) e Ganimedes (azul). As três luas orbitam o planeta com períodos na proporção 4:2:1, que também pode ser entendida como duas RMM 2:1 entre pares de luas. Essa RMM de três corpos evita que ocorra a conjunção tripla dos satélites. T é o período de Io e cada imagem mostra o sistema de luas em diferentes instantes de tempo. Considera-se inicialmente Europa e Ganimedes em conjunção. Partindo dessa configuração, dentro de um período orbital de Io, Europa percorre metade de sua órbita e, Ganimedes, 1/4 de órbita. Com esse ritmo, após quatro períodos de Io, Europa orbita Júpiter duas vezes e Ganimedes completa uma única órbita. O instante 4T, que está ausente, é uma reprodução do instante 0.

No Sistema Solar, há outros exemplos de RMM (Gallardo (2006)). Ela está presente no sistema de satélites de Plutão, entre três de suas luas, Styx, Nix e Hydra (Showalter & Hamilton (2015)), e também atua nos anéis de Saturno (Murray & Dermott (2000)). No Cinturão Principal de Asteroides, existem as chamadas *Kirkwood Gaps*, que são regiões orbitais significativamente marcadas pela escassez de asteroides. Principalmente, as lacunas ocupam as posições de RMM 3:1, 5:2, 7:3 e 2:1 com Júpiter.

Fora do contexto de anéis, luas e asteroides, Netuno e Plutão também compartilham uma relação de períodos médios 3:2. Por causa dessa relação, Netuno e Plutão nunca sofrem encontros próximos, mesmo sob o fato de que a órbita excêntrica de Plutão cruza a de Netuno. Já fora do Sistema Solar, o sistema de quatro exoplanetas Gliese-876 foi o primeiro sistema descoberto a apresentar captura em RMM. Encontrou-se razão de períodos 2:1 entre os planetas GJ876 b e GJ876 c e, mais tarde, inclusive, a relação Laplaciana 4:2:1 entre os planetas b, c e GJ876 e (Martí et al. (2013)).

A RMM 2:1 ocorre com certa frequência em sistemas planetários. De acordo com o levantamento de sistemas realizado para esta dissertação (ver Apêndice), cerca de 40 sistemas apresentam apenas dois exoplanetas e períodos orbitais nessa proporção. Entre eles, estão, por exemplo, os sistemas TOI-216, K2-24 e HD 155358, que têm suas dinâmicas estudadas em seções posteriores. A Figura 1.5 apresenta uma distribuição das razões de períodos de pares de exoplanetas descobertos pelo satélite Kepler até 2014, em que se pode ver tanto um vale como um pico de ocorrência de pares na vizinhança da ressonância 2:1.

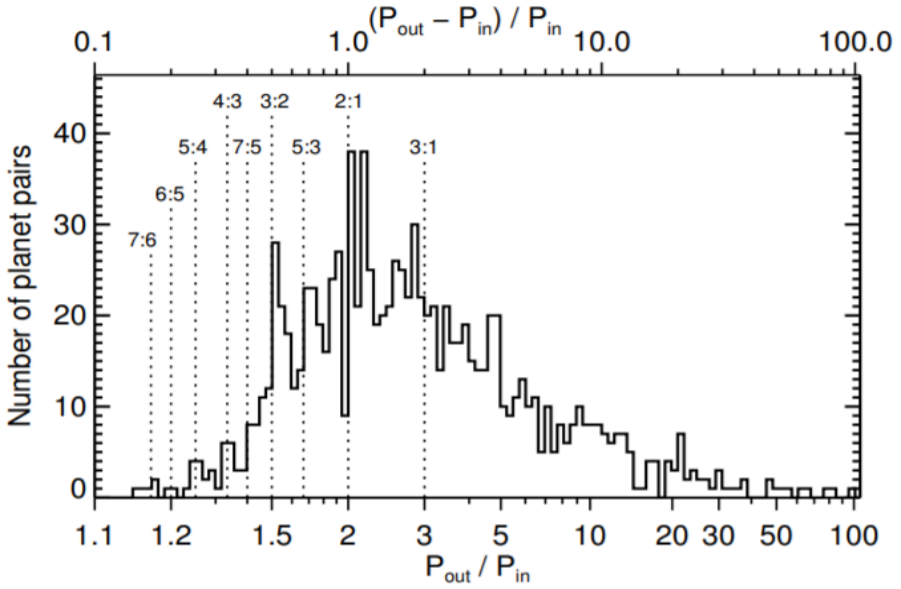


FIGURA 1.5. Número de pares de exoplanetas vs. razão de períodos, para sistemas detectados pela missão Kepler até 2014, segundo Winn & Fabrycky (2015).

Para um sistema estar de fato capturado em RMM, no entanto, não basta haver apenas a proporção simples entre períodos orbitais. O critério para discriminar se dois planetas estão em RMM é a evolução temporal do chamado "ângulo crítico". Esse ângulo é calculado a partir da evolução dos elementos orbitais dos corpos envolvidos e, no caso coplanar, mede o deslocamento angular dos planetas em conjunções consecutivas, com relação à direção de pericentro de algum deles, i.e. o ângulo crítico é uma indicação das posições em que ocorrem conjunções planetárias.

As conjunções são relevantes, pois a maior proximidade entre os planetas proporciona interações gravitacionais mútuas mais intensas. No caso coplanar (em que se concentra este trabalho), então, quando o sistema está capturado em RMM, o deslocamento angular das conjunções fica limitado por uma certa amplitude de oscilação ao redor de um ponto de equilíbrio (determinada direção angular). Se o ângulo crítico circula, entende-se que o sistema não está capturado em RMM (Armitage (2010)) e a direção de conjunções também circula.

Outro fenômeno que pode acontecer no contexto da RMM é a corrotação apsidal. Uma apside é um ponto extremo de uma órbita. Por exemplo, uma órbita elíptica planetária tem duas apsides, o periélio (ou pericentro), que é o ponto da órbita que está mais próximo da estrela, e o afélio, ponto da órbita mais distante da estrela. A linha de apsides de um planeta é a linha que conecta o periélio e o afélio de sua órbita. Na corrotação apsidal, portanto, ocorre uma rotação das linhas de apsides das órbitas de dois planetas e, mais especificamente, ela existe quando a diferença de longitudes de pericentro de dois planetas oscila ao redor de determinada direção de referência.

A chamada ressonância de corrotação apsidal (ACR) - *apsidal corotation resonance* - ocorre quando tanto o ângulo crítico da RMM como a diferença de longitudes de pericentro estão oscilando ao longo do tempo ao redor de pontos de equilíbrio em um sistema (Michtchenko et al. (2008a)). Nas próximas seções, as condições de RMM e ACR serão abordadas com mais detalhe.

Este trabalho consiste em simulações numéricas concentradas no caso da RMM 2:1, com pares de planetas em diferentes condições orbitais coplanares e com diferentes razões de massas. Sistemas que apresentam indeterminação de inclinações orbitais, como aqueles na parte inferior da Figura 1.1, ainda podem ser representados pelas simulações numéricas se eles estiverem próximos da RMM 2:1 e forem assumidos coplanares. Em geral, a coplanaridade é uma propriedade esperada, já que planetas se formam dentro de discos de material aproximadamente planos (Armitage (2010)).

A partir das integrações deste projeto, avalia-se, especialmente, as amplitudes dos ângulos críticos da RMM 2:1 e das diferenças de longitudes de pericentro, distinguindo-se regiões de oscilação e de circulação de ângulos em mapas dinâmicos. Nesse sentido, também são apresentadas as regiões nos mapas em que ocorre o regime de ACR e estuda-se a possibilidade de correlação entre a ocorrência de dinâmicas ressonantes e determinados intervalos de valores de razões de massas planetárias.

Na próxima parte, são apresentados os fundamentos teóricos do estudo da RMM e é feita uma revisão bibliográfica, trazendo resultados relevantes da literatura sobre a RMM 2:1. Em seguida, são apresentados os objetivos deste projeto de forma mais específica, a metodologia utilizada para a realização de simulações e os resultados obtidos através da análise numérica. Há, então, uma seção concentrada na dinâmica de três sistemas observados e a relação com os resultados gerados. Por fim, chega-se às conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1 Problema Clássico de N corpos

Como mencionado anteriormente, este estudo se concentra na dinâmica de sistemas com um par de planetas orbitando uma estrela, que é um problema gravitacional entre três corpos de massas não desprezíveis. Este é, por sua vez, um caso menor do problema clássico de N corpos (no qual $N \geq 3$), mas que, como esse último, não possui uma solução analítica fechada que possa ser implementada na prática para um caso geral (Beaugé (1997)). Por isso, é comum que esse tipo de problema seja abordado com integrações numéricas, assim como é realizado neste trabalho, com o objetivo de se obter resultados que se aproximam de uma solução exata. Antes de tratar da parte numérica, porém, vale apresentar alguns conceitos teóricos.

A descrição da interação gravitacional pode ser feita com diferentes formalismos da Mecânica. Um deles se baseia nas três leis de movimento de Newton e em sua lei da Gravitação Universal. Segundo as leis de movimento: um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme a não ser que, sobre ele, atue uma força resultante não nula; a força resultante experimentada por um corpo equivale a sua taxa de variação de momento linear; e, para toda ação, existe uma reação igual e oposta. A lei de Gravitação Universal afirma que dois corpos massivos se atraem com uma força que é proporcional ao produto das massas, inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os dois corpos e é orientada no sentido de acelerar um corpo em direção ao outro. Para dois corpos i e j, portanto, tem-se que:

$$\vec{F}_{res,i} = \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \frac{d(m_i\vec{v_i})}{dt} \tag{2.1.1}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{2.1.2}$$

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_im_j}{|\vec{r}_{ij}|^2}\frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|} = \frac{Gm_im_j}{|\vec{r}_{ij}|^3}\vec{r}_{ij} \tag{2.1.3}$$

em que a equação (2.1.1) reflete as duas primeiras leis de movimento de Newton, (2.1.2) a terceira e (2.1.3) a Lei da Gravitação Universal. $\vec{F}_{res,i}$ é a força resultante experimentada por m_i, cujo momento linear é $\vec{p_i}$ com velocidade $\vec{v_i}$ e uma expressão análoga poderia ter sido escrita para m_j. $\vec{F}_{ij}$ é a força experimentada por m_i devido à presença de m_j. Também, $\vec{r}_{ij}$ é um vetor que aponta de m_i para m_j e seu módulo equivale à distância entre as massas i e j, logo, $|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_{ji}|$.

Existindo mais de duas massas, a força gravitacional resultante sobre uma massa m_i específica é o somatório das forças desse tipo que cada massa m_j exerce sobre m_i. Um referencial não acelerado em que valem as leis de Newton é chamado "inercial" e, portanto, se existirem N massas dispostas em um referencial inercial, uma massa m_1 experimenta a seguinte força resultante:

$$\vec{F}_{res,1} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + ... + \vec{F}_{1N} \tag{2.1.4}$$

em que não existe o termo $\vec{F}_{11}$, já que um corpo assumido classicamente como massa pontual não exerce força gravitacional sobre si mesmo. Utilizando a equação (2.1.3), é possível reescrever a equação (2.1.4) para uma massa qualquer m_i como:

$$\vec{F}_{res,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|^3}\vec{r}_{ij} \tag{2.1.5}$$

Assumindo que a massa m_i não varia no tempo e utilizando a equação (2.1.1), a equação (2.1.5) se torna:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|^3}\vec{r}_{ij} \tag{2.1.6}$$

E, portanto, simplificando (2.1.6), a equação de movimento de m_i é:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ij}|^3}\vec{r}_{ij} \tag{2.1.7}$$

Integrando-se essa equação diferencial duas vezes, descobre-se a posição e a velocidade de m_i para qualquer instante de tempo. Mas a dinâmica dessa massa depende de sua posição relativa às outras massas do sistema, de modo que é preciso descobrir as posições de todas as outras N-1 massas para se obter as forças que atuam em m_i em um único instante de tempo. As posições das outras massas, por sua vez, são governadas por equações análogas a (2.1.7). Assim, para se descobrir a dinâmica de qualquer massa é preciso resolver simultaneamente o sistema como um todo, o que envolve N equações diferenciais de segunda ordem, uma para cada corpo.

Os vetores $\vec{r}_i(t)$ e $\vec{v}_i(t)$ equivalem a 6 variáveis incógnitas por massa, já que cada um deles tem 3 coordenadas espaciais. O problema de N massas tem, portanto, 6N variáveis incógnitas que devem seguir da integração de 3N equações (uma equação vetorial de três dimensões como (2.1.7) para cada massa). Além disso, existem dez constantes, i.e. integrais de movimento, associadas ao problema de N corpos, que dizem respeito à dinâmica do centro de massa do sistema, à conservação de momento angular e à conservação de energia mecânica. Elas são importantes, porque permitem diminuir o número de equações que descrevem o sistema. A primeira integral é obtida fazendo-se um somatório sobre todas as massas do problema, utilizando a equação (2.1.6), que fornece:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{0} \tag{2.1.8}$$

O lado direito da equação se anula, pois as forças de ação e reação entre as massas se cancelam mutamente durante o somatório, por consequência de (2.1.2). Pode-se perceber isso escrevendo a

equação (2.1.6) para duas massas (N=2) e somando essas equações:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12} \tag{2.1.9}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_2m_1}{|\vec{r}_{21}|^3}\vec{r}_{21} = -\frac{Gm_2m_1}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12} \tag{2.1.10}$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12} - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_{12}|^3}\vec{r}_{12} = \vec{0} \tag{2.1.11}$$

Por outro lado, o centro de massa do sistema é dado por:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{2.1.12}$$

Se essa expressão for derivada duas vezes, se obtém a expressão para a aceleração do centro de massa:

$$\ddot{\vec{r}}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{2.1.13}$$

Como o numerador em (2.1.13) é $\vec{0}$ pela equação (2.1.8), o centro de massa tem aceleração nula. Integrando-se (2.1.13), obtém-se que a velocidade do centro de massa é um vetor constante e, integrando-se a velocidade, então, nota-se que a posição do centro de massa obedece uma equação de reta. Ou seja, o centro de massa obedece movimento retilíneo uniforme e, se $\vec{a}$ for nulo, o centro de massa não se move:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{2.1.14}$$

Além disso, como o centro de massa não tem aceleração, ele constitui um referencial inercial. Os vetores constantes $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são duas integrais de movimento. Como eles têm 3 componentes espaciais cada, constituem 6 constantes de movimento.

A próxima integral de movimento trata do momento angular do sistema $\vec{L}_N$, que é a soma de momentos angulares das massas individuais:

$$\vec{L}_N(t) = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i(t) \times m_i\vec{v}_i(t)] = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) \tag{2.1.15}$$

Fazendo a derivada temporal do momento angular, tem-se que:

$$\dot{\vec{L}}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i + \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{0} + \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) \tag{2.1.16}$$

em que se usa a propriedade de que o produto vetorial entre dois vetores iguais é $\vec{0}$. Utilizando a equação (2.1.7), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N}(m_i\vec{r}_i \times \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ij}|^3}\vec{r}_{ij}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(\frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ij}|^3}\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij}) \tag{2.1.17}$$

em que

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \vec{r}_i \times \vec{r}_j - \vec{r}_i \times \vec{r}_i = \vec{r}_i \times \vec{r}_j \tag{2.1.18}$$

e, portanto:

$$\dot{L}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (\frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_i \times \vec{r}_j) \tag{2.1.19}$$

É possível provar que o lado direito da equação (2.1.19) também se torna $\vec{0}$ e, novamente, pode-se perceber isso fazendo o lado direito no caso N=2:

$$\dot{L}_2 = m_1 \frac{Gm_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + m_2 \frac{Gm_1}{|\vec{r}_{21}|^3} \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 \tag{2.1.20}$$

$$\dot{L}_2 = \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_1) = \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \vec{0} \tag{2.1.21}$$

Dessa forma, a equação (2.1.19) se torna $\dot{\vec{L}}_N = \vec{0}$ e, então, o momento angular do sistema $\vec{L}_N$ é um vetor constante. Como ele também tem 3 coordenadas espaciais, junto aos vetores anteriores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, definiu-se 9 constantes de movimento.

A décima integral de movimento diz respeito à energia total do sistema. Para encontrá-la, pode-se reescrever a equação (2.1.6), definindo, primeiramente, a seguinte função escalar U:

$$U = -\sum_{i<j}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|} \tag{2.1.22}$$

A equação (2.1.22) fornece a energia potencial gravitacional total de um sistema de N massas. A presença de uma única partícula contribui com:

$$U_i = -Gm_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{m_j}{|\vec{r}_{ij}|} \tag{2.1.23}$$

Considerando-se que $|\vec{r}_{ij}| = ((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^{1/2}$, o gradiente de U_i pode ser escrito como:

$$\nabla_i U_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}\hat{i} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i}\hat{j} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i}\hat{k} = -Gm_i(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{m_j(x_j - x_i)}{|\vec{r}_{ij}|^3}\hat{i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{m_j(y_j - y_i)}{|\vec{r}_{ij}|^3}\hat{j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{m_j(z_j - z_i)}{|\vec{r}_{ij}|^3}\hat{k}) \tag{2.1.24}$$

que equivale a

$$\nabla_i U_i = -Gm_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{ij}|^3} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ij} \tag{2.1.25}$$

Com esse resultado, uma equação de movimento pode ser escrita como:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\nabla_i U_i \tag{2.1.26}$$

Essa equação pode ser multiplicada escalarmente pela velocidade de m_i, como:

$$m_i\dot{\vec{r}}_i.\ddot{\vec{r}}_i = -\dot{\vec{r}}_i.\nabla_i U_i \tag{2.1.27}$$

em que

$$\dot{\vec{r}}_i.\nabla_i U_i = \frac{dU_i}{dt} \tag{2.1.28}$$

porque

$$(\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}).(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \frac{\partial U_i}{\partial y_i}, \frac{\partial U_i}{\partial z_i}) = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U_i}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U_i}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt} = \frac{dU_i}{dt} \tag{2.1.29}$$

Fazendo, então, o somatório em todas as N massas, a equação (2.1.27) leva a:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i.\ddot{\vec{r}}_i = -\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i.\nabla_i U_i = -\sum_{i=1}^{N} \frac{dU_i}{dt} = -\frac{dU}{dt} \tag{2.1.30}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i.\ddot{\vec{r}}_i = -\frac{dU}{dt} \tag{2.1.31}$$

Integrando a equação (2.1.31), chega-se a:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\vec{r}}_i)^2 = -U + constante \tag{2.1.32}$$

em que o termo do lado esquerdo é a energia cinética total T do sistema. Dessa forma, $T + U = constante$, que é a energia mecânica total do sistema e a última integral de movimento.

As 10 constantes apresentadas restringem a dinâmica de um sistema de N corpos, mas não são suficientes para que ela seja resolvida analiticamente. Pelo menos, para dadas condições iniciais e escolha de referencial, é possível definir as constantes de movimento e elas devem ser respeitadas durante a evolução temporal do sistema. Esse fato é importante no contexto de integrações numéricas, porque calcular as constantes, tempo a tempo, durante a simulação permite se obter uma indicação sobre a precisão da integração. Se o valor delas se distancia muito dos valores iniciais, o método numérico está se afastando da solução aproximada que melhor descreve o sistema.

2.1.1 3 Corpos e Coordenadas Heliocêntricas

Com ajuda das integrais de movimento, o problema de 2 corpos tem solução analítica, segundo a qual os corpos orbitam o centro de massa do sistema com trajetórias que descrevem seções cônicas estáticas. Esse é o caso, por exemplo, das órbitas elípticas Keplerianas. Já o problema de 3 corpos não é integrável para um conjunto arbitrário de condições iniciais, porque existem 18 variáveis incógnitas de posição e velocidade e não há integrais de movimento suficientes: existem 10 que foram apresentadas na seção anterior e mais duas que podem ser obtidas por mudanças de variáveis e de referencial. Faltam, assim, 6 leis de conservação para o sistema ser integrável e já foi provado que essas 6 não existem [1].

[1] Notas de Aula *Sistemas Dinâmicos*, por F.V. Roig: http://staff.on.br/froig/apostilas/ncorpos.pdf

A não integrabilidade, porém, não significa que o problema de 3 corpos não tem soluções. Ele já foi abordado por grandes matemáticos que, pelo menos para determinadas geometrias e simplificações (i.e. usando "equações de vínculo", por exemplo: o desprezo de uma das massas nos problemas chamados "restritos"), conseguiram obter expressões analíticas para soluções fazendo uso de expansões com séries de Taylor, séries de Fourier, entre outros (Beaugé (1996)).

Para o caso do problema geral de 3 corpos, em que nenhuma massa é desprezível, um astrônomo teórico finlandês chamado Karl F. Sundman de fato encontrou uma solução geral analítica no começo do século XX, utilizando séries de potências no tempo e introduzindo uma variável auxiliar, com a qual as coordenadas de posição e o tempo são generalizadas para valores complexos (Barrow-Green (2010)). Sundman estudava Mecânica Celeste e, durante a pesquisa sobre o problema de 3 corpos, entitulou seu trabalho como *The Investigation of the Motion of Small Planets and Their Moons, Especially Saturn's Moons, in Order to Treat the Case of Near* ***Commensurability between the Mean Motions*** *of the Perturbing and Perturbed Bodies* (Barrow-Green (2010)).

A solução geral de Sundman para o problema de 3 corpos, porém, não costuma ser utilizada para cálculos astronômicos porque converge muito lentamente, de modo que milhões de termos são necessários para se determinar o movimento de um corpo, mesmo para um intervalo de tempo pequeno, e a solução também não se aplica para integrações numéricas pela dificuldade de se determinar os erros nas soluções (Musielak & Quarles (2014)). Sundman foi homenageado com seu nome em uma cratera da Lua.

Trabalhos de Poincaré, entre outros estudiosos, puderam fornecer informações qualitativas sobre a evolução das trajetórias dos corpos no problema, descobrindo que a dinâmica de 3 corpos, apesar de determinística, de modo geral é caótica, ou seja, imprevisível para longas escalas de tempo e possivelmente muito distinta para pequenas variações nas condições iniciais (Krishnaswami & Senapati (2019)). Apesar dos obstáculos, pode-se provar que existem classes de soluções periódicas, i.e. configurações que se repetem no tempo com determinado período (Meyer (1981)), como seria o caso se todos os corpos de um sistema planetário retornassem exatamente para as mesmas condições iniciais depois de certo tempo.

Uma das análises que permitem obter informações relevantes sobre a maneira com que um sistema evolui, como o comportamento sob RMM, pode ser feita considerando-se que há um corpo mais massivo, dito primário, em torno do qual os outros corpos orbitam traçando, aproximadamente, seções cônicas como as do problema entre 2 corpos (um planeta e uma estrela), que sofrem pequenos desvios ao longo do tempo devido à perturbação gravitacional mútua entre os corpos secundários (Murray & Dermott (2000)).

Considera-se um sistema com massas nomeadas m_o e m_i, em que m_o é um corpo muito mais massivo que os corpos do tipo i. Existem N+1 objetos: o mais massivo m_o e N objetos m_i. As equações de movimento de m_o e de uma massa m_i, respectivamente, podem ser escritas em termos das forças gravitacionais que existem entre os corpos do sistema:

$$m_o \ddot{\vec{r}}_o = G m_o \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{r}_{io}}{|\vec{r}_{io}|^3} \tag{2.1.33}$$

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = -Gm_i\frac{m_o\vec{r}_{io}}{|\vec{r}_{io}|^3} + Gm_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{m_j(\vec{r}_{jo}-\vec{r}_{io})}{|\vec{r}_{ji}|^3} \tag{2.1.34}$$

em que $\vec{r}_o$ e $\vec{r}_i$ são, respectivamente, as posições das massas m_o e m_i com relação à origem de um referencial inercial, $\vec{r}_{io}$ é um vetor que aponta de m_o para m_i e $\vec{r}_{ji}$ é um vetor que aponta de i para um outro corpo secundário, com índice j para distinguir de i. O vetor $\vec{r}_{ji}$ é o mesmo que $\vec{r}_{jo} - \vec{r}_{io}$.

Assim, tem-se que $\vec{r}_{io} = \vec{r}_i - \vec{r}_o$, de modo que, derivando essa expressão duas vezes com relação ao tempo, se obtém:

$$\ddot{\vec{r}}_{io} = \ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{r}}_o \tag{2.1.35}$$

Multiplicando a equação (2.1.35) por m_i em ambos os lados, obtém-se a equação de movimento de m_i no referencial de m_o:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_{io} = m_i\ddot{\vec{r}}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_o \tag{2.1.36}$$

Utilizando (2.1.33) e (2.1.34), a equação (2.1.36) pode ser escrita como:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_{io} = -Gm_i\frac{m_o\vec{r}_{io}}{|\vec{r}_{io}|^3} + Gm_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{m_j(\vec{r}_{jo}-\vec{r}_{io})}{|\vec{r}_{ji}|^3} - Gm_i\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\vec{r}_{io}}{|\vec{r}_{io}|^3} \tag{2.1.37}$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior por m_i e separando uma massa m_i do último somatório, pode-se escrever:

$$\ddot{\vec{r}}_{io} = -G\frac{m_o\vec{r}_{io}}{|\vec{r}_{io}|^3} + G\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{m_j(\vec{r}_{jo}-\vec{r}_{io})}{|\vec{r}_{ji}|^3} - (G\frac{m_i\vec{r}_{io}}{|\vec{r}_{io}|^3} + G\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{m_j\vec{r}_{jo}}{|\vec{r}_{jo}|^3}) \tag{2.1.38}$$

Arrumando os termos, tem-se que:

$$\ddot{\vec{r}}_{io} = -G\frac{(m_o+m_i)\vec{r}_{io}}{|\vec{r}_{io}|^3} + G\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}m_j(\frac{(\vec{r}_{jo}-\vec{r}_{io})}{|\vec{r}_{ji}|^3} - \frac{\vec{r}_{jo}}{|\vec{r}_{jo}|^3}) \tag{2.1.39}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.1.39) diz respeito exclusivamente à interação gravitacional entre uma massa m_i específica e m_o, o que corresponde a um problema de 2 corpos entre m_i e m_o. Esse termo é chamado de "parte Kepleriana" do problema: se não houvesse os corpos m_j, o movimento de m_i obedeceria uma seção cônica estática ao redor de m_o. Já o segundo termo do lado direito da equação (2.1.39) apresenta as posições das massas j com relação à m_i e as posições das m_j com relação a m_o. Esse termo, portanto, representa a perturbação gravitacional que a presença dos corpos m_j causa sobre a órbita de m_i ao redor de m_o. Por causa da perturbação, a órbita de m_i deixa de ser uma seção cônica estática e passa a evoluir no tempo conforme as posições dos objetos variam.

A equação (2.1.39) pode representar, por exemplo, a aceleração de um corpo planetário m_i em coordenadas heliocêntricas, se m_o for o sol, que é um referencial não inercial - já que tem aceleração $\ddot{\vec{r}}_o$ no referencial inercial pela equação (2.1.33). Assumindo um sistema de coordenadas centrado na estrela, por conveniência, o índice "o" dos vetores de posição e suas derivadas temporais são omitidos daqui em diante. Assim, para o caso de apenas três corpos m_o, m_i e m_j, é possível

escrever as equações de movimento dos corpos secundários como:

$$\ddot{\vec{r}}_i + G\frac{(m_o + m_i)\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} = Gm_j(\frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{ji}|^3} - \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3}) \tag{2.1.40}$$

$$\ddot{\vec{r}}_j + G\frac{(m_o + m_j)\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} = Gm_i(\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_{ji}|^3} - \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3}) \tag{2.1.41}$$

2.1.2 Função Perturbadora e Termos Ressonantes

Com ajuda do gradiente de uma função escalar, a equação (2.1.39) - já sem o índice "o" - pode ser escrita como:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \nabla_i(K_i + R_i) \tag{2.1.42}$$

em que K_i é um potencial Kepleriano (pois gera a parte Kepleriana da equação (2.1.39)) e R_i é um potencial chamado "função perturbadora". Os potenciais são:

$$K_i = G\frac{(m_o + m_i)}{|\vec{r}_i|} \tag{2.1.43}$$

$$R_i = G\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}(\frac{m_j}{|\vec{r}_{ji}|} - \frac{m_j\vec{r}_i.\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3}) \tag{2.1.44}$$

O termo $G\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}\frac{m_j}{|\vec{r}_{ji}|}$ se chama "parte direta" da função perturbadora, porque depende das distâncias entre m_i e os corpos m_j. O termo $-G\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}\frac{m_j\vec{r}_i.\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3}$ se chama "parte indireta", porque depende das posições $\vec{r}_j$ dos companheiros de m_i com relação à estrela.

É possível, então, considerar um sistema com três corpos com uma nova notação: o corpo secundário mais interno tem massa m e posição $\vec{r}$ com relação à estrela; o externo tem massa m' e posição $\vec{r'}$ (Murray & Dermott (2000)). Nesse contexto, a função perturbadora (2.1.44) para o corpo interno pode ser escrita como:

$$R = \frac{\mu'}{|\vec{r'} - \vec{r}|} - \mu'\frac{\vec{r}.\vec{r'}}{r'^3} \tag{2.1.45}$$

em que $\mu' = Gm'$. A função perturbadora do corpo secundário externo é:

$$R' = \frac{\mu}{|\vec{r} - \vec{r'}|} - \mu\frac{\vec{r}.\vec{r'}}{r^3} \tag{2.1.46}$$

com $\mu = Gm$.

O termo $|\vec{r'}-\vec{r}|$ que aparece em (2.1.45) pode ser relacionado à lei dos cossenos, considerando que os vetores $\vec{r}$ e $\vec{r'}$ partem da estrela fazendo um (menor) ângulo ψ entre si:

$$|\vec{r'}-\vec{r}|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'cos(\psi) \tag{2.1.47}$$

E, elevando ambos os lados da expressão anterior a $-\frac{1}{2}$, fica:

$$\frac{1}{|\vec{r'}-\vec{r}|} = \frac{1}{r'}[1 - 2\frac{r}{r'}cos(\psi) + (\frac{r}{r'})^2]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.1.48}$$

A expressão (2.1.48), por sua vez, pode ser expandida com os "Polinômios de Legendre", P_l, por meio da seguinte expressão:

$$\frac{1}{|\vec{r'}-\vec{r}|} = \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{r}{r'})^l P_l(cos(\psi)) \tag{2.1.49}$$

Os polinômios podem ser calculados pela Fórmula de Rodrigues (2.1.50), utilizando $x = cos(\psi)$.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \tag{2.1.50}$$

Portanto, os dois primeiros P_l são $P_o = 1$ e $P_1(cos(\psi)) = cos(\psi)$. A série (2.1.49) converge se o planeta interno m sempre tiver distância à estrela que seja menor que aquela do planeta externo m' à estrela, ou seja, assumindo-se que $r < r'$ sempre vale, segundo Murray & Dermott (2000).

Além disso, o produto $\vec{r}.\vec{r'}$ em (2.1.45) vale $\vec{r}.\vec{r'} = rr'cos(\psi)$. Então, a função perturbadora (2.1.45) do corpo secundário mais interno pode ser escrita como:

$$R = \mu'[\frac{1}{r'} + \frac{r}{r'^2}cos(\psi) + \frac{1}{r'}\sum_{l=2}^{\infty}(\frac{r}{r'})^l P_l(cos(\psi))] - \mu'\frac{r}{r'^2}cos(\psi) \tag{2.1.51}$$

O potencial R é derivado em termos das coordendas de m durante a aplicação do grandiente, a qual gera a força perturbadora resultante sobre m. Por isso, na equação (2.1.51), o termo $\frac{1}{r'}$ sozinho dentro do colchete, que não envolve as coordenadas de m, não contribui para a perturbação sobre m e pode ser desprezado (ele se torna 0 na derivação). Assim, arrumando os termos, a função perturbadora associada a m é:

$$R = \frac{\mu'}{r'}\sum_{l=2}^{\infty}(\frac{r}{r'})^l P_l(cos(\psi)) \tag{2.1.52}$$

Com um processo análogo, a partir da equação (2.1.46) se obtém a função perturbadora para o corpo externo m':

$$R' = \frac{\mu}{r'}\sum_{l=2}^{\infty}(\frac{r}{r'})^l P_l(cos(\psi)) + \mu\frac{r}{r'^2}cos\psi - \mu\frac{r'}{r^2}cos\psi \tag{2.1.53}$$

Para interpretar alguns efeitos da perturbação R na dinâmica de um corpo secundário, é possível expressar a equação (2.1.52) como expansão em função de elementos orbitais ao invés de

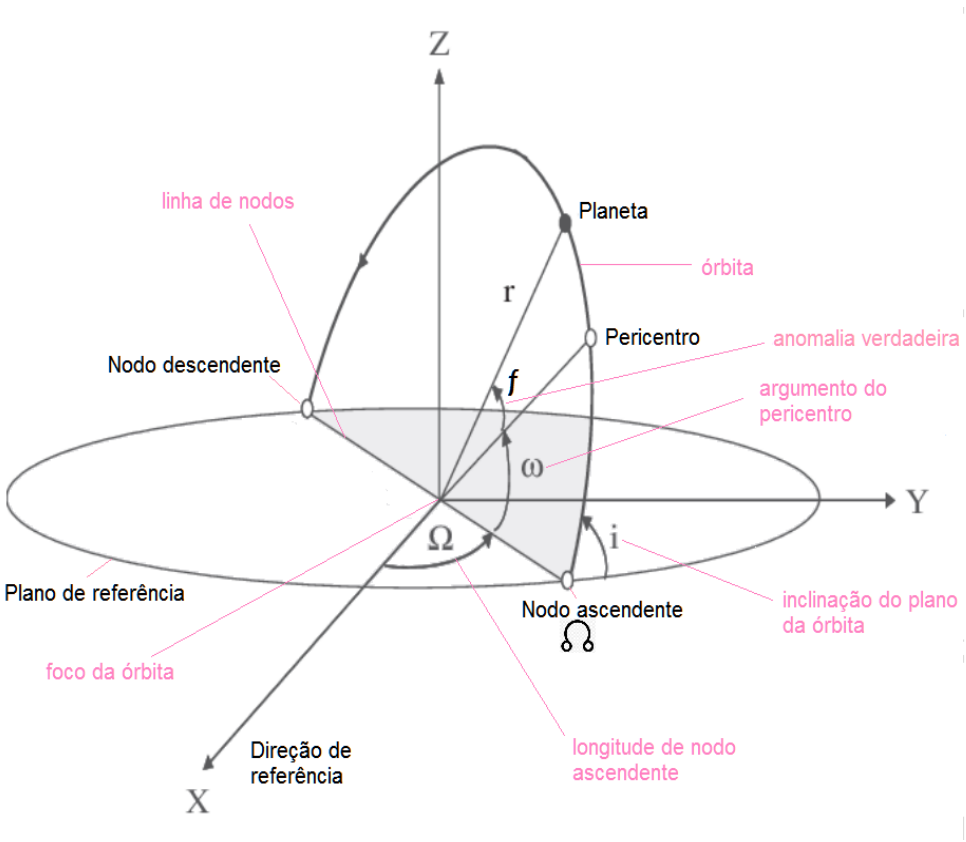


FIGURA 2.1. Orientação espacial de uma órbita planetária e seus elementos orbitais. Imagem adaptada de (Gurfil (2007)).

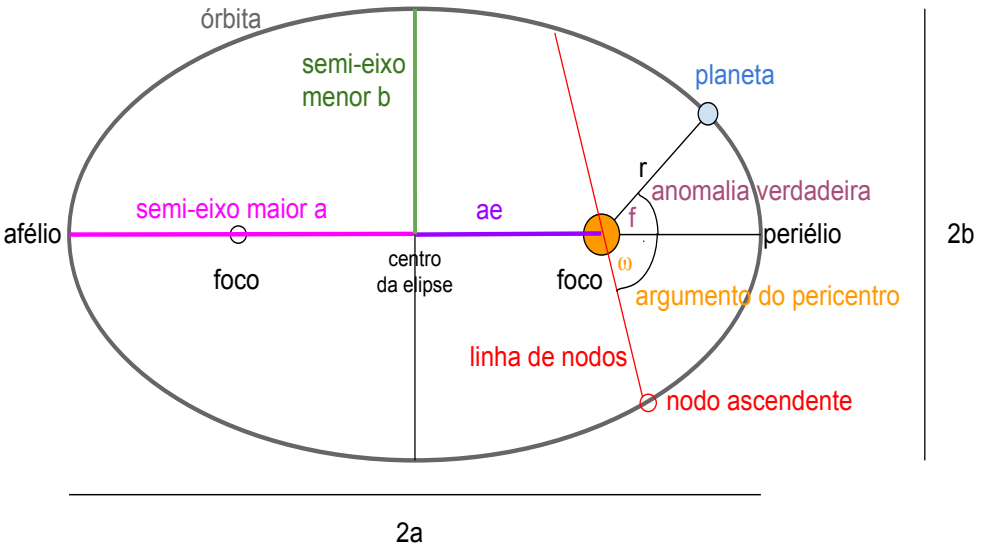


FIGURA 2.2. Órbita elíptica planetária de semi-eixo maior a e excentricidade e, com um astro massivo em um de seus focos e segundo foco vazio. Excentricidade nula corresponde a uma órbita circular e a distância do foco ao pericentro vale $a(1-e)$. O ângulo $w+f$ chama-se longitude verdadeira. A distância r é dada por $r = \frac{a(1-e^2)}{1+ecos(f)}$.

coordenadas Cartesianas (x,y,z). Os elementos orbitais, em princípio, são os parâmetros que descrevem uma seção cônica no problema de 2 corpos. No caso de mais corpos, as órbitas perturbadas não são estáticas, mas podem ser descritas como tangentes a uma sucessão de seções cônicas instantâneas, que têm o corpo mais massivo m_o em um de seus focos. Nesse contexto, os elementos

orbitais instantâneos são chamados "osculadores".

Os elementos orbitais tradicionais são seis: semi-eixo maior a, excentricidade e, inclinação I, argumento do pericentro w, longitude de nodo ascendente Ω e anomalia verdadeira f. Os primeiros dois definem a forma da cônica, os três seguintes definem a orientação da cônica no espaço e a anomalia define a posição do objeto sobre a órbita. Os elementos são ilustrados nas Figuras 2.1 e 2.2, em que o plano de referência é o plano equatorial do corpo primário, e eles se relacionam com coordenadas cartesianas do planeta em sua órbita da seguinte maneira: $x = r[cos(\Omega)cos(\omega + f) - sin(\Omega)sin(\omega + f)cos(I)]$, $y = r[sin(\Omega)cos(\omega + f) + cos(\Omega)sin(\omega + f)cos(I)]$ e $z = r[sin(\omega + f)sin(I)]$.

Antes de comentar sobre a forma da função perturbadora expandida, é preciso definir mais três parâmetros: a longitude média λ, a anomalia média M e a longitude de pericentro ϖ. Também, a velocidade angular de um corpo em órbita elíptica varia ao longo da elipse, mas pode ser calculada uma velocidade média $n = \dfrac{2\pi}{T}$, em que T é um período orbital (Lei de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G(m_o + m_i)}a^3$). Assim, define-se:

$$M = n(t - \tau) \tag{2.1.54}$$

$$\varpi = \Omega + w \tag{2.1.55}$$

$$\lambda = M + \varpi \tag{2.1.56}$$

em que τ é uma constante chamada "tempo de passagem de pericentro". M, ϖ e λ têm dimensões de ângulo, mas não são interpretados geometricamente com facilidade, porque M não descreve a posição do objeto diretamente e ϖ envolve a soma de ângulos que estão em planos diferentes.

Utilizando como elementos os parâmetros a, e, I, ϖ, Ω e λ, é possível expressar (2.1.52) como

$$R = \mu' \sum S(a, a', e, e', I, I')cos\varphi \tag{2.1.57}$$

em que S é uma função, os parâmetros com $'$ se referem à m' e φ tem a forma abaixo (Murray & Dermott (2000)):

$$\varphi = j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega \tag{2.1.58}$$

com j_i sendo inteiros que obedecem

$$\sum_{i=1}^{6} j_i = 0 \tag{2.1.59}$$

Descobrindo a forma explícita de S, é possível encontrar os termos perturbativos que são mais e menos relevantes para a perturbação. O desenvolvimento da expansão de (2.1.52) e (2.1.53) não é simples e pode ser encontrado com mais detalhe em Murray & Dermott (2000). Pode-se notar em (2.1.57), porém, que o potencial perturbador é uma soma de funções que podem ter frequências variadas e que os ângulos φ evoluem segundo uma combinação de ângulos orbitais, havendo uma ponderação desses parâmetros com os valores j_i.

Pelas equações (2.1.54) e (2.1.56), λ tem dependência linear com o tempo e é chamado "ângulo de variação rápida" (Murray & Dermott (2000)). No problema de 2 corpos, em que ϖ é constante, só λ varia com o tempo, devido a M. Para mais que 2 corpos, de modo geral, λ varia

rápido e os outros elementos orbitais variam lentamente. Os ângulos φ que variam rapidamente como argumento do cosseno em (2.1.57) geram perturbações de curto período, que não governam a dinâmica do sistema a longo prazo (e isso pode ser percebido em integrações numéricas). Os termos que governam são aqueles associados a ângulos φ que têm variação mais lenta e, dentro destes, estão os chamados termos "ressonantes" e "seculares" (os últimos tendo frequências mais baixas que os termos ressonantes).

Os termos de (2.1.57), cujos argumentos de cosseno não têm ângulos de variação rápida, são os termos seculares (termos em que j_1 e j_2 são 0). A perturbação secular sempre existe nos sistemas com mais de um corpo secundário. Também, apesar de λ e λ' variarem rapidamente, a combinação de ângulos em (2.1.58) ainda pode ser tal que φ varie lentamente. É isso que acontece nos termos de perturbação ressonantes. Para perceber como essa combinação pode acontecer, utiliza-se as equações (2.1.54) e (2.1.56) para se escrever:

$$j_1\lambda' + j_2\lambda = (j_1 n' + j_2 n)t + j_1(\varpi' - n'\tau') + j_2(\varpi - n\tau) \tag{2.1.60}$$

Em uma combinação tal que $(j_1 n' + j_2 n) \approx 0$, acontece que $j_1\lambda' + j_2\lambda$ só contém parâmetros que variam lentamente e, então, φ, representado pela equação (2.1.58), também conterá apenas termos que variam lentamente. Portanto, $(j_1 n' + j_2 n) \approx 0$ é uma condição que origina termos ressonantes na função perturbadora. Utilizando a definição de n e de n', essa condição pode ser escrita como

$$\frac{T'}{T} \approx \frac{|j_1|}{|j_2|} \tag{2.1.61}$$

em que $\dfrac{|j_1|}{|j_2|}$ é uma razão de números inteiros. Dessa forma, existem contribuições ressonantes na função perturbadora relevantes para a evolução dinâmica de um sistema quando as relações de períodos dos corpos secundários são tais que a equação (2.1.61) é obedecida. Com a Lei de Kepler, a equação (2.1.61) também pode ser escrita em termos de semi-eixos maiores:

$$\frac{a'}{a} \approx \left(\frac{|j_1|}{|j_2|}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{2.1.62}$$

Como essa ressonância se manifesta em função das velocidades médias dos objetos, ela se chama "ressonância de movimentos médios". Além disso, como ela acontece para determinados valores de semi-eixo maior pela equação (2.1.62), a RMM é um fenômeno localizado, i.e. esse tipo de perturbação pode acontecer apenas para pares de órbitas que apresentem determinados valores osculadores de semi-eixo maior. Vale destacar também que perturbações são capazes de causar variações de semi-eixos. Assim, pode acontecer de os corpos saírem da condição de ressonância à medida que o tempo passa. Sair ou não, enfim, depende da evolução temporal dos elementos orbitais e a previsão de órbitas exige resolver a dinâmica do sistema.

2.2 Ressonância de Movimentos Médios e Conjunções

A importância de $\frac{|j_1|}{|j_2|}$ ser uma razão de números inteiros "pequenos", como mencionado na Introdução, está associada com o conceito de ordem da ressonância. A expressão $(j_1 n' + j_2 n) \approx 0$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$(p+q)n' - pn \approx 0 \tag{2.2.1}$$

em que p e q são inteiros, q é chamado "ordem da RMM" e p, "grau" da RMM. Nessa notação, a equação (2.1.61) se torna

$$\frac{T'}{T} \approx \frac{p+q}{p} \tag{2.2.2}$$

Uma RMM 2:1, por exemplo, tem ordem 1 e grau 1. Na expansão da função perturbadora, os cossenos ressonantes são multiplicados por amplitudes proporcionais a excentricidades elevadas à ordem da RMM (e^q). Para órbitas que obedecem a relação de períodos 2:1, a função perturbadora expandida contém argumentos φ ressonantes com $|j_1| = 2$ e $|j_2| = 1$, mas também argumentos com os múltiplos dessa condição, por exemplo, $|j_1| = 6$ e $|j_2| = 3$, $|j_1| = 8$ e $|j_2| = 4$, etc.

Esses argumentos (RMM 8:4 e RMM 6:3) representam, portanto, a mesma RMM 2:1, mas têm ordens 3 e 4, respectivamente. Os argumentos múltiplos são chamados "harmônicos". Como as excentricidades são valores entre 0 e 1, quanto maior a ordem, menor é e^q e, por consequência, menor é a contribuição perturbativa dos termos ressonantes associados aos argumentos de maior ordem.

No caso do problema de 2 planetas coplanares e uma estrela, em que não há nodos Ω e Ω', em acordo com as equações (2.1.58) e (2.1.59), a RMM é representada por dois tipos de argumentos de cosseno ressonantes da função perturbadora:

$$\varphi_1 = (p+q)\lambda' - p\lambda - q\varpi \tag{2.2.3}$$

e

$$\varphi_2 = (p+q)\lambda' - p\lambda - q\varpi' \tag{2.2.4}$$

Como comentado anteriormente, a RMM 2:1 é bem representada pelos argumentos que têm $j_1 = 2$ e $j_2 = 1$ e, portanto:

$$\varphi_1 = 2\lambda' - \lambda - \varpi \tag{2.2.5}$$

e

$$\varphi_2 = 2\lambda' - \lambda - \varpi' \tag{2.2.6}$$

Esses são chamados "ângulos críticos" da RMM 2:1. Quando um sistema está em RMM dita "exata", acontece que φ_1 e/ou φ_2 são constantes no tempo e, então, $\dot{\varphi} = 0$. Nesse caso, o forçamento resultante é tal que, na escala de tempo da perturbação ressonante, não ocorrem variações de semi-eixos e excentricidades no sistema. Este é dito "capturado em RMM".

Quando φ_1 ou φ_2 variam no tempo de forma oscilatória ao redor do ponto de equilíbrio da RMM exata (ou estão "librando", i.e. evoluindo com amplitudes limitadas por valores de "separatriz", que separam os regimes de circulação e de oscilação de ângulo crítico), então o sistema

não está em ressonância exata, mas ainda é dito capturado em RMM. Nesse caso, dentro da escala de tempo da perturbação ressonante, o forçamento é tal que os semi-eixos e as excentricidades das órbitas dos corpos secundários também oscilam, submetidos a certas amplitudes. A captura existe quando $\dot{\varphi} \approx 0$, ou seja, φ varia lentamente ($\varphi \approx constante$).

No caso de variações lentas de ϖ' e ϖ, $\dot{\varphi} \approx 0$ ocorre quando vale a equação (2.2.1), pela argumentação da seção anterior. Mas, se as variações temporais de longitudes de pericentro não forem desprezíveis em relação às velocidades médias orbitais, então, pelas equações (2.2.3) e (2.2.4), na captura ressonante tem-se que:

$$(p+q)\dot{\lambda}' - p\dot{\lambda} - q\dot{\varpi} \approx 0 \tag{2.2.7}$$

e/ou

$$(p+q)\dot{\lambda}' - p\dot{\lambda} - q\dot{\varpi}' \approx 0 \tag{2.2.8}$$

Mas, como as equações (2.2.7) e (2.2.8) não dependem apenas de velocidades angulares médias, a ressonância deixa de ser um fenômeno bem localizado, como era pela equação (2.1.62), que justificava o nome "ressonância de movimentos médios". Assim, se os ângulos críticos dados pelas equações (2.2.3) e (2.2.4) oscilarem, isso indica uma ressonância que não se manifesta apenas para sistemas que têm razões de semi-eixo específicas, mas para sistemas que têm combinações variadas de períodos orbitais e taxas de variação de longitude de pericentro que permitem a oscilação de ângulos críticos.

Quando os ângulos críticos não estão oscilando e, sim, circulando (indo de 0 a 360 graus continuamente), o sistema não está capturado na RMM e, nesse caso, apesar de ainda poder existir contribuições de perturbação em escala de tempo menor que a aquela da perturbação secular, elas muitas vezes se anulam em média, não causam grandes amplitudes de variação de elementos orbitais e não governam a dinâmica do sistema.

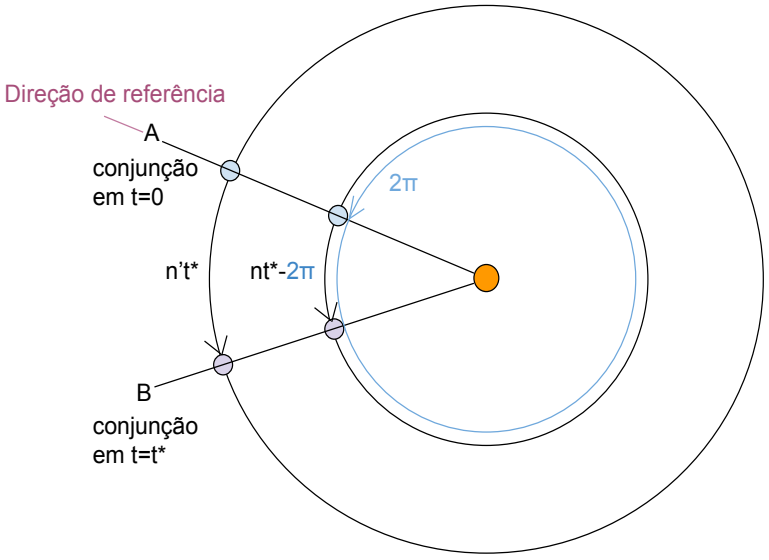


FIGURA 2.3. Conjunções planetárias e o deslocamento angular da conjução consecutiva.

Desprezando variações de longitudes de pericentro, a condição de RMM exata $(p+q)n' - pn = 0$ da equação (2.2.1) com $p+q = 2$ e $q = 1$ pode ser visualizada em termos de conjunções planetárias,

em que $2n' = n$. Considera-se a Figura 2.3: há dois planetas em órbitas coplanares ao redor de uma estrela. Primeiramente, considerando um sistema sem RMM, se uma conjunção ocorre no ponto A em t=0 e depois no ponto B, entre esse dois eventos, o raio vetor do planeta interno varre um ângulo nt^* e o raio vetor do externo varre um ângulo $n't^*$, em que t^* é o tempo entre conjunções.

O ângulo nt^* é maior que 2π, pois o planeta interno tem velocidade angular orbital maior que a do planeta externo e, após a conjunção em A, enquanto o planeta externo se desloca apenas $n't^*$ até a próxima conjunção em B, o interno se desloca uma órbita completa e "mais um pouco". O "pouco" é o deslocamento angular entre conjunções consecutivas. Esse ângulo entre A e B é dado por $nt^* - 2\pi$ e, dessa forma, na conjunção em B, $n't^* = nt^* - 2\pi$, ou seja, $(n' - n)t^* = -2\pi$.

Além disso, se existe a relação ressonante $2n' = n$ (RMM 2:1), então $(n' - 2n')t^* = -2\pi$, i.e., $n't^* = 2\pi$. Dessa forma, como $n't^*$ é o deslocamento angular entre conjunções consecutivas, a condição de ressonância exata está fazendo com que conjunções sempre aconteçam na mesma posição, em A. Esse raciocínio é indicado em Perryman (2018).

Ainda para órbitas coplanares, mas fora da RMM exata, se ocorrer de φ estar oscilando com certo período por causa de algum mecanismo físico, então, pela equação (2.2.5), o ângulo $2\lambda' - \lambda = 2n't - nt$ está oscilando. Reescrevendo, $\varphi = n't + (n' - n)t$. Assim, pode-se perceber que, se t for o tempo entre conjunções consecutivas t^*, tem-se que $\varphi = n't^* + (-2\pi)$. Dessa forma, o ângulo crítico φ oscila se o deslocamento angular entre conjunções consecutivas $n't^*$ estiver oscilando ao redor de determinado valor (direção ângular) ou vice-versa.

Um exemplo utilizado frequentemente para explicar a física da perturbação ressonante é descrito em Armitage (2010) e reproduzido na Figura 2.4, em que há um planeta m' em órbita excêntrica externa a um planeta m muito mais massivo em órbita circular. Pode-se imaginar ambos os planetas movendo-se no sentido anti-horário, o interno mais veloz que o externo.

Quando acontece uma conjunção ou uma oposição, as forças perturbativas mútuas são radiais. Porém, entre uma oposição e a conjunção em A, o planeta externo está "adiantado" em sua órbita com relação ao interno, de modo que há uma componente tangencial da perturbação em m' tendendo a freá-lo (seta azul). Isso leva a uma diminuição da velocidade de m' e, portanto, promove uma diminuição do seu momento angular orbital. Entre a conjunção em A e a próxima oposição, m está "adiantado"em sua órbita com relação a m'. Assim, a componente tangencial da perturbação acelera o movimento de m', o que promove um aumento de momento angular orbital deste corpo. Mas a diminuição e o aumento de momento angular antes e depois de uma conjunção não necessariamente se compensam ao longo do tempo.

Quando as conjunções ocorrem no pericentro ou no afélio, a simetria das órbitas com relação à linha de apsides faz com que a transferência de momento angular média resultante seja nula, mas isso não acontece quando a conjunção ocorre em um outro ponto qualquer da órbita, como em A. Logo antes da conjunção em A, a perturbação sobre m' é mais intensa, porque os planetas estão mais próximos entre si. Logo depois, a perturbação é menos intensa devido à maior distância mútua. Também, à medida que m' se aproxima do afélio, sua velocidade naturalmente diminui (problema de 2 corpos entre m' e a estrela) e, assim, a perturbação sobre m' tem mais tempo para atuar. Ambos esses efeitos fazem com que, da conjunção em A, resulte uma remoção de momento angular de m', pois m' está sendo mais freado do que acelerado pelas componentes tangenciais da força perturbativa.

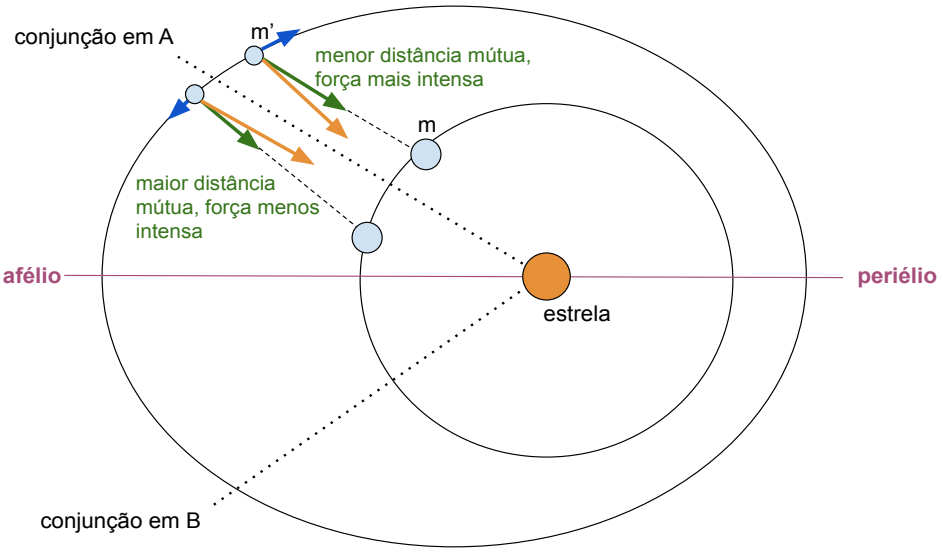


FIGURA 2.4. Perturbações mútuas na RMM e conjunções. As setas representam as forças gravitacioais que atuam sobre m': em amarelo, a força causada pela presença da estrela; em verde, forças perturbativas gravitacionais causadas por m; em azul, a componente tangencial das forças perturbativas mencionadas. Adaptado de Armitage (2010) e Peale (1976).

Além disso, especificamente no caso de sistemas com proporção entre os períodos orbitais do tipo X:1, conjunções consecutivas aconteçam em direções próximas entre si, de modo que o processo de remoção de momento angular se acumula ao longo de uma sequência de conjunções após a conjunção em A. Essa diminuição de momento angular faz com que a órbita de m' sofra uma diminuição de semi-eixos: ela se aproxima da órbita interna e conjunções consecutivas ocorrem com m' cada vez mais perto da direção de seu afélio, pois órbitas internas têm maiores velocidades angulares.

Por outro lado, se uma conjunção acontece em B, ainda com m' e m se movendo no sentido anti-horário, momento angular é adicionado a m' e este objeto aumenta os semi-eixos de sua órbita. Nesse caso, como m' passa a ter período orbital maior, novamente a próxima conjunção ocorre para m' mais próximo de seu afélio. Dessa maneira, ao longo de muitas órbitas, o ponto de conjunção oscila ao redor da direção do afélio e o sistema se mantém com períodos orbitais aproximadamente comensuráveis, mesmo que não exista a ressonância exata. Esse tipo de oscilação estável pode acontecer mesmo quando as órbitas precessionam, também por efeito de perturbações gravitacionais entre os planetas (Perryman (2018)).

É importante reforçar que a descrição da dinâmica ressonante feita com base na Figura 2.4 foi para o caso de objetos secundários que têm massas com ordens de grandeza muito diferentes, pois, na explicação, o corpo m não teve sua órbita perturbada por m' em nenhum momento. Se m' e m forem valores comparáveis, como as massas de dois planetas parecidos, a evolução do sistema é mais complexa, pois ambos os objetos podem sofrer variações orbitais significativas. No entanto, permanece a qualidade de que, na RMM, as conjunções planetárias oscilam ao redor de uma direção de equilíbrio e as variações orbitais de ambos os planetas se devem ao intercâmbio de momento angular orbital que ocorre entre eles.

2.3 Ressonância de Corrotação Apsidal

No caso de sistemas coplanares de dois planetas com períodos aproximadamente em 2:1, quando algum ou os dois ângulos críticos dados pelas equações (2.2.5) e (2.2.6) oscilam periodicamente, a diferença das longitudes de pericentro também pode oscilar. Ela é escrita como

$$(\varpi' - \varpi) = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{2.3.1}$$

Quando um ângulo crítico oscila e a diferença de longitudes de pericentro também, o sistema é dito em "ressonância de corrotação apsidal" (ACR). Em Michtchenko et al. (2008a), é mostrado que, dentro do conjunto de dinâmicas possíveis, existem duas famílias distintas de órbitas periódicas, associadas à libração do ângulo crítico da ressonância e à oscilação de $(\varpi' - \varpi)$, respectivamente, e a dinâmica ACR é uma interseção dessas duas famílias de solução independentes.

Se a oscilação de $(\varpi' - \varpi)$ tiver amplitude baixa e ocorrer ao redor de ângulos como 0 ou π, então as linhas de apsides das órbitas dos dois corpos secundários se mantêm aproximadamente alinhadas à medida que o sistema evolui, mesmo que ambas as órbitas rotacionem. Alguns sistemas observados de fato têm seus pericentros alinhados (órbitas com pericentros na mesma direção), ao passo que outros têm eles anti-alinhados (afélio de uma órbita na direção do pericentro de outra) segundo Perryman (2018).

A Figura 2.5 apresenta configurações orbitais associadas à RMM 2:1 e tipos de movimento apsidal que podem estar presentes em um sistema. Em geral, quando a ressonância é tal que ocorrem conjunções planetárias com pericentros próximos, o sistema é instável e, no cenário não destrutivo, pode simplesmente sair da ressonância. A estabilidade pode ocorrer, no entanto, para diversos outros casos.

Como indicado na imagem, se os planetas estiverem distantes entre si, conjunções tanto nos apocentros quanto nos pericentros alinhados podem ser estáveis. Nesse caso, por causa do alinhamento das apsides, a ressonância é dita "simétrica".

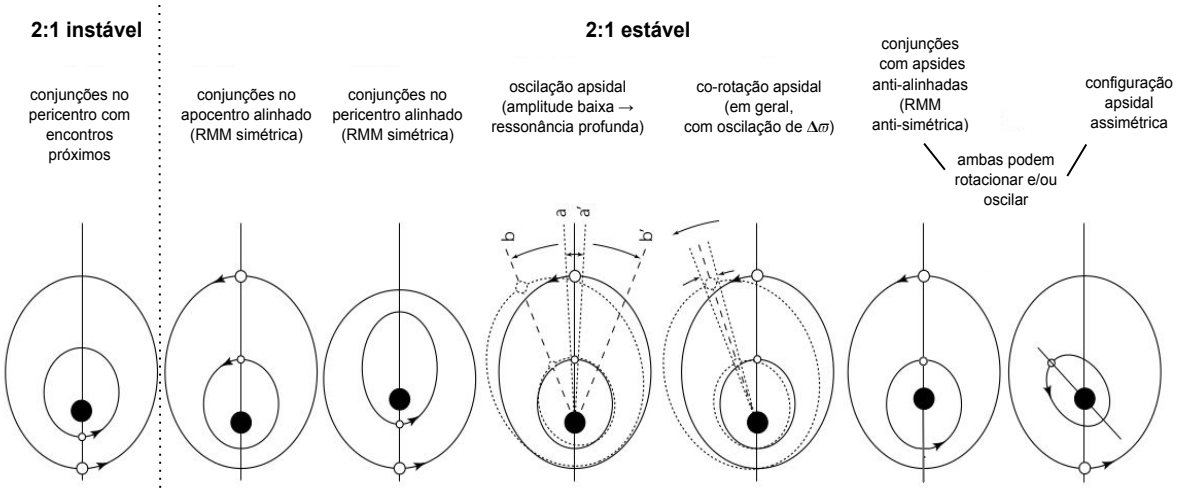


FIGURA 2.5. RMM 2:1 e configurações apsidais. Adaptação de Perryman (2018), figura 10.30.

Também, a oscilação da diferença de longitudes de pericentro (ângulo limitado pelas linhas de apsides) pode ser uma solução estável dentro da RMM 2:1 simétrica. Se o sistema tem oscilação de

$(\varpi' - \varpi)$ com baixas amplitudes, o sistema está em ACR e também pode ser dito em "ressonância profunda" (Perryman (2018)).

A expressão "ressonância profunda" é usada para sistemas que têm pelo menos um ângulo crítico librando com baixa amplitude (em geral, menor que 10°, segundo Veras (2007)), não necessariamente apresentando oscilação de $(\varpi' - \varpi)$ também. Mas, se ambos os ângulos críticos da RMM 2:1 oscilarem com baixas amplitudes, pela equação 2.3.1, $(\varpi' - \varpi)$ também oscila com baixas amplitudes, ou seja, se tem uma ACR "profunda".

Independentemente da presença de RMM, se as linhas apsidais rotacionarem em relação ao fundo de estrelas e o fizerem de tal modo que a diferença de longitudes de pericentro é uma constante ou apresenta oscilações, trata-se de uma corrotação apsidal. No problema plano, essas oscilações ocorrem ao redor de uma direção de equilíbrio que é fixa em relação à direção de um dos pericentros, mas que não é fixa com relação ao fundo de estrelas. Se além da corrotação apsidal ocorre o fenômeno de RMM (oscilação de ângulo crítico), então trata-se de uma ACR.

A ocorrência de ACR 2:1 simétrica com apsides anti-alinhadas também é possível, ou seja, ângulo crítico da ressonância oscilando com ponto de equilíbrio 0 ou π, e $(\varpi' - \varpi)$ oscilando ao redor de π. Esse caso pode se chamar ACR "simétrica anti-alinhada" ou ACR "anti-simétrica". Por fim, se um ângulo crítico da RMM 2:1 e $(\varpi' - \varpi)$ oscilam ao redor de valores diferentes de 0 ou π, trata-se de uma ACR 2:1 "assimétrica".

2.4 Literatura: RMM, ACR e Razões de Massas Planetárias

Trabalhos anteriores já investigaram a dinâmica de sistemas com RMM, indicando que a razão de massas planetárias tem relevância no desenvolvimento de diferentes famílias de soluções estáveis. Nas publicações científicas atuais de Astronomia Dinâmica, a abordagem teórica (analítica ou semi-analítica) do problema de N corpos geralmente é feita com Mecânica Hamiltoniana, que é um caminho diferente daquele apresentado em Fundamentos Teóricos, mas que também fornece as equações de movimento para um sistema. As expansões com esse tipo de abordagem também podem ser trabalhosas; o tema é explorado em livros clássicos de Mecânica Celeste e em artigos mais recentes, como Michtchenko et al. (2006), Beaugé et al. (2003), Batygin & Morbidelli (2013), Beaugé & Michtchenko (2003), Beaugé et al. (2006), Gallardo et al. (2020) entre outros, para o problema de 3 corpos.

Para os propósitos deste projeto, é suficiente compreender que um Hamiltoniano é uma expressão que fornece a energia mecânica total de um sistema e ele assume um valor numérico escalar quando o sistema parte de determinadas condições iniciais. O Hamiltoniano total (ressonante) pode ser escrito como a soma de um termo Kepleriano (que sozinho, fornece órbitas Keplerianas ao redor da estrela) e um termo que origina as perturbações ressonantes e seculares de um sistema próximo a uma comensurabilidade de períodos. Também, segundo Michtchenko et al. (2008a), é possível escrever o Hamiltoniano total para um sistema coplanar de uma estrela e dois planetas na vizinhança de uma RMM como um Hamiltoniano ressonante "semi-analítico médio" (i.e. uma expressão analítica que é ponderada no período sinódico - o tempo entre conjunções consecutivas

- e calculada com auxílio de método numérico). Ele pode ser escrito com a forma:

$$H_{res} = H_{res}(n_1/n_2, e_2, \sigma_1, \Delta\varpi, m_1, m_2, AM, K) \tag{2.4.1}$$

em que n_i são velocidades angulares médias dos planetas, e_2 é a excentricidade da órbita externa, σ_1 é um ângulo crítico da RMM (o mesmo que φ_1 e σ_2 é φ_2), $\Delta\varpi$ é a diferença de longitudes de pericentro, m_i são as massas planetárias, AM é o momento angular total do sistema e K é o "parâmetro de espaçamento" (outra quantidade invariante), dado por

$$K = (p+q)m_1 n_1 a_1^2 + p m_2 n_2 a_2^2 \tag{2.4.2}$$

em que p é o grau e q, a ordem da RMM, e a_i são os semi-eixos maiores orbitais dos planetas. O momento angular orbital total do sistema de dois planetas em termos de elementos orbitais astrocêntricos é:

$$AM = m_1 n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2} + m_2 n_2 a_2^2 \sqrt{1-e_2^2} \tag{2.4.3}$$

De acordo com Michtchenko et al. (2008a), a dinâmica ACR é uma solução estacionária possível para um sistema quando descrito pelo Hamiltoniano ressonante mencionado e o mapeamento da ressonância (i.e. caracterização das órbitas de sistemas próximos à configuração de RMM) em espaços de fases para diferentes razões de massas planetárias permite identificar que tipo de estados dinâmicos um sistema de exoplanetas pode apresentar. Um espaço de fases mostra como variáveis presentes no Hamiltoniano evoluem em sincronia com outras, como na Figura 2.6 à esquerda.

Os trabalhos de Michtchenko et al. (2008a) e Michtchenko et al. (2008b) reconhecem que a dinâmica de sistemas de dois planetas pode variar qualitativamente caso a razão de massas planetárias seja maior ou menor que 1 (sendo razão de massas m_{ext}/m_{int}, em que m_{int} é a massa do planeta interno e m_{ext}, a do externo). Em Michtchenko et al. (2008a), são abordados sistemas de exoplanetas observados, em que o externo é mais massivo que o interno. É mostrado que, para a comensurabilidade de períodos 2:1, dependendo da energia mecânica total de um sistema, do momento angular total, das c.i. de ângulos e da razão de massas planetárias, existem curvas de nível que delimitam a dinâmica de um sistema no plano $e_1 cos(\sigma_1)$ vs. $e_2 cos(\sigma_2)$. Se um sistema parte de determinada c.i. de excentricidades, a maneira com que o sistema evolui está restringida a uma curva de nível. Além disso, a dinâmica ACR corresponde a pontos nesse plano, que são extremos de energia (máximos do Hamiltoniano).

O fato de uma solução ACR exata ser um ponto indica que as excentricidades dessa solução não variam no tempo e, portanto, a dinâmica ACR (no problema ponderado), dentro de um quadrante de c.i. angulares, está associada a um par de c.i. de excentricidades específico se AM, K e razão de massas forem constantes determinadas. Para uma única razão de massas e valor de K (associado a RMM 2:1), permitindo que o momento angular inicial do sistema varie, por exemplo, ao considerar diferentes c.i. de excentricidades, apenas algumas dessas c.i. estão associadas a uma ACR exata. Então, construindo-se um plano de excentricidades iniciais, é possível unir os pontos de dinâmica ACR de diferentes condições de momento angular, traçando uma curva teórica de

soluções ACR possíveis, que é característica para tal razão de massas. A Figura 2.6, à direita, ilustra curvas teóricas de solução ACR para razões de massas distintas.

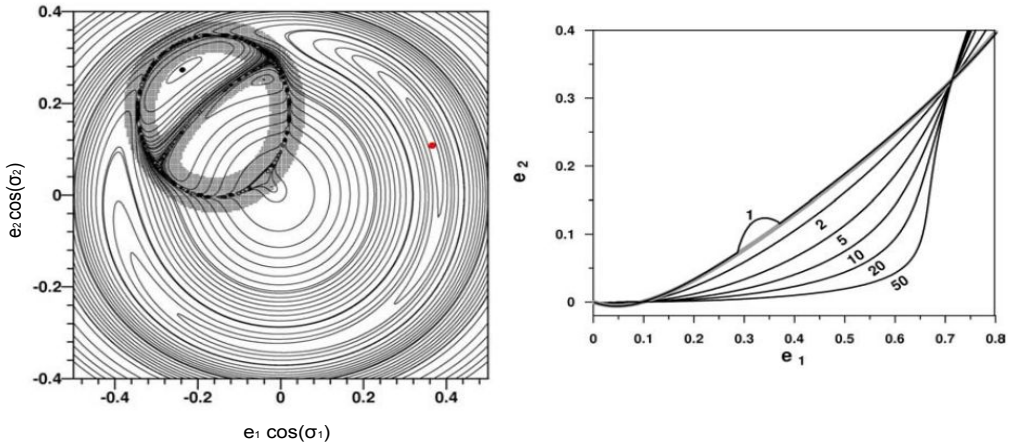


FIGURA 2.6. Resultados de Michtchenko et al. (2008a). À esquerda: curvas de nível que representam um sistema em diferentes valores de energia, mas com um conjunto específico de valores $\{AM, K, m_2/m_1\}$ e c.i angulares correspondentes a (σ_1, σ_2) $=(\pi, 0), (\pi, \pi), (0, 0), (0, \pi)$ nos quadrantes esquerdo superior e inferior, direito superior e inferior, respectivamente. Para uma mesma energia, c.i. angular e c.i. de excentricidades, à medida que o sistema evolui no tempo, os valores de e_1, e_2 variam segundo uma curva de nível. Os pontos vermelho e preto são soluções de ACR. À direita: curvas teóricas de dinâmica ACR 2:1 para diferentes razões de massas no plano de excentricidades iniciais e c.i (σ_1, σ_2)=(0,0), que corresponde a $(\sigma_1, \Delta\varpi)$=(0,0).

Michtchenko et al. (2008a) também afirma que a condição de m_{int} muito menor que m_{ext} se assemelha a uma ressonância interior em analogia com conceitos de dinâmica asteroidal e, como nesse caso, em geral deve estar associada a circulações de $\Delta\varpi$, mesmo que σ_1 libre, de tal forma que razões de massas planetárias muito grandes ($m_{ext}/m_{int} \gg 1$) não devem favorecer a ocorrência de dinâmica ACR.

Outro resultado de Michtchenko et al. (2008a) é que as evoluções temporais de σ e de $\Delta\varpi$ de um sistema em ACR 2:1 também podem ter frequências comensuráveis que influenciam na dinâmica do sistema planetário. Esse tipo de fenômeno é chamado "ressonância secundária" e sua presença também é dependente da razão de massas planetárias. Para um mesmo conjunto de c.i e diferentes razões de massas, o período de $\Delta\varpi$ varia, sendo maior para razões pouco maiores que 1, menor para razões muito maiores que 1 e podendo apresentar um valor máximo, dependendo das excentricidades iniciais associadas a uma mesma razão de massas. Para excentricidades baixas, essas frequências podem ter mesma ordem de grandeza e representar comensurabilidades de baixa ordem importantes, capazes de introduzir novas condições de estabilidade e, também, caoticidade à dinâmica do sistema.

Uma questão relevante mencionada em Michtchenko et al. (2008a) é que, com boa aproximação, uma solução ACR só depende das massas planetárias por meio da razão de massas, mas que para excentricidades muito baixas em um sistema real, pode haver uma dependência com relação a valores de massas individuais. Isso ocorre, porque a razão de períodos de um sistema capturado em RMM 2:1 com baixas excentricidades não é necessariamente igual a 2, por causa da lei de estrutura que aparece em mapas dinâmicos.

A lei é uma curva que pode ser modelada como uma função, relacionando a excentricidades e semi-eixos iniciais possíveis para um planeta em RMM. A função pode ser imaginada como uma curva em L (invertido) traçada na região mais escura e interior à estrutura de *V da ressonância*, aparente na Figura 4.1, e o desvio da RMM/ACR em relação à comensurabilidade exata pode

ser mais ou menos significativo em função de massas individuais. Também, um sistema real pode apresentar outras configurações ressonantes estáveis ao redor de uma ACR 2:1 e o espaço de fases nessas redondezas pode ser sensível a massas individuais.

Essas informações, em princípio, parecem dificultar o presente estudo, que é uma tentativa de catalogar a localização de soluções de RMM (e ACR) com razão de períodos inicial exatamente igual a 2 apenas pela distinção de razões de massas planetárias, sem dependência de massas individuais. Porém, como é explicado adiante em Metodologia, são testadas massas individuais diferentes durante o estudo numérico e as excentricidades simuladas não são sempre baixas. Em Resultados, então, deve ser possível verificar nos mapas gerados, entre outros aspectos, a influência de massas individuais na ocorrência de RMM/ACR com baixas excentricidades.

Em Aplicações, também, sistemas reais com razão de períodos não exatamente igual a 2 são estudados e pode-se comparar as diferenças de dinâmica entre mapas dinâmicos específicos para esses sistemas e aqueles gerados de forma "simplificada", com razão de períodos 2. Felizmente, como afirma Michtchenko et al. (2008a), é possível obter informações importantes sobre a dinâmica de sistemas por meio de mapeamentos - como regiões estáveis ou não, que podem restringir parâmetros orbitais possíveis - mesmo com um conhecimento rudimentar sobre os parâmetros exatos que caracterizam um sistema real.

Em Michtchenko et al. (2008b), é feito um estudo de sistemas em RMM 2:1 com razões de massas planetárias menores que 1. A principal diferença entre os casos de razão maior ou menor que 1 está no contexto de ressonâncias assimétricas. O comportamento de um sistema depende de sua "localização" no espaço de parâmetros que explora a vizinhança da comensurabilidade exata (por exemplo, um plano de c.i. de excentricidade vs. semi-eixos, um *mapa dinâmico*, que indica a estabilidade das simulações em cada ponto do plano, com algum medidor de caos). No caso de ressonâncias assimétricas, o espaço muda significativamente de topologia dependendo da razão de massas, ou seja, mudam as regiões de maior caoticidade, de libração de ângulo crítico e de oscilação/circulação do ângulo secular $\Delta\varpi$.

Os casos assimétricos não são estudados neste projeto, mas, sim, os casos simétricos (alinhados e anti-alinhados) e, embora Michtchenko et al. (2008b) dê ênfase às ACR assimétricas, também traz conclusões importantes sobre os casos simétricos. Por exemplo, Michtchenko et al. (2008b) afirma que, nesse último caso, para razões de massas menores que 1, tanto pode acontecer de o ângulo crítico em libração ser σ_1, como ser aquele que envolve a longitude de pericentro do planeta externo, σ_2 e, para razões maiores que 1, ocorre apenas libração de σ_1.

Neste projeto, para todas as razões de massa testadas, investigou-se apenas ocorrência de RMM com librações de σ_1. Isso foi feito com o objetivo de se observar uma evolução contínua de regiões ressonantes em função de razão de massas apenas, como de fato se verifica em Resultados, já que a libração de σ_1, em princípio, pode se manifestar para qualquer razão de massas. Mas vale comentar que a construção de mapas e a análise de regiões ressonantes com quadrantes de c.i. que favorecem a libração de σ_2 seria uma complementação bem-vinda para este projeto no caso de razões de massas menores que 1 e estaria em acordo com as constatações de Michtchenko et al. (2008b).

Além disso, outra conclusão de Michtchenko et al. (2008b) é que a topologia do espaço de fases ao redor da RMM 2:1 simétrica para razões menores que 1 é análoga àquela para razões

maiores que 1 (fora o caso das excentricidades muito baixas, já comentado, em que pode haver dependência de massas individuais). Dessa forma, existe um certo padrão na distribuição de regiões estáveis/instáveis ao redor de soluções de RMM 2:1 simétricas.

Essa informação é relevante, pois, se o catálogo de mapas aqui gerado se mostrar confiável (ou não) primeiramente para alguns sistemas observados que não têm razão de períodos exatamente 2 como os casos simulados, mas um valor próximo a esse, pode-se assumir que o catálogo também é confiável (ou não) para outros sistemas reais que tenham características semelhantes aos primeiros. Se esse tipo de estudo for realizado futuramente, será possível identificar limites de aplicação ou de validade do catálogo de mapas para a marcação de sistemas reais observados.

Beaugé et al. (2003) é um trabalho mais antigo e apresenta, entre seus resultados, curvas de solução ACR parametrizadas por razões de massas planetárias para o caso simétrico anti-alinhado, nas quais σ_1 oscila em torno de 0 e $\Delta\varpi$ em torno de π. As curvas também são obtidas por meio de um modelo semi-analítico de Hamiltoniano ressonante.

Os autores enfatizam que, no caso simétrico anti-alinhado, as soluções exatas (amplitudes nulas de σ e $\Delta\varpi$) somente existem para baixas excentricidades e não ultrapassam uma "barreira", representada no lado esquerdo da Figura 2.7 como uma reta espessa que divide o plano de excentricidades. Os autores ressaltam o comportamento das curvas, de que para razões de massas mais elevadas, soluções ACR só podem existir no caso de o planeta externo ter excentricidades muito baixas. Além disso, a maior parte da região em que há soluções ACR é preenchida pelos casos em que as razões de massa são menores que 1. Assim, não se espera encontrar sistemas anti-alinhados com dinâmica ACR que apresentem razões de massas planetárias elevadas ($m_{ext}/m_{int} \gg 1$). Esse tipo de resultado também é esperado para o caso de pericentros alinhados, como comentado anteriormente.

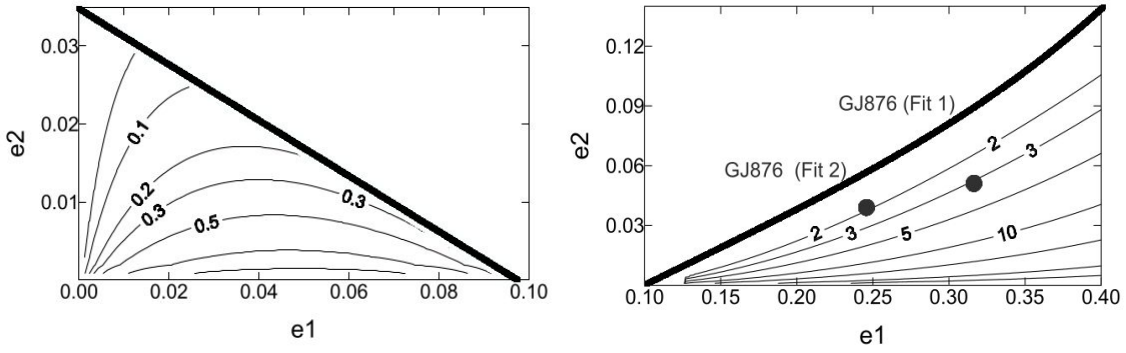


FIGURA 2.7. Curvas teóricas de soluções ACR 2:1 exatas para casos de pericentros anti-alinhados, à esquerda, e alinhados, à direita. Em ambos os casos, as soluções têm σ_1=0° e as curvas se distinguem por razões de massas planetárias (m_{ext}/m_{int}) (Beaugé et al. (2003)).

À direita da Figura 2.7, Beaugé et al. (2003) traçam as curvas de solução ACR para o caso de pericentros alinhados até excentricidades mais baixas que aquelas apresentadas na Figura 2.6. O que é interessante destacar, nesse caso, é a marcação, como pontos, de dois *fits* para um sistema de exoplanetas observado, que têm excentricidades orbitais nas vizinhanças de soluções ACR. Sobre esse aspecto, é comentado em Beaugé et al. (2003) que a existência de ACR poderia lançar luz sobre o processo de formação do GJ876: provavelmente, os planetas teriam sido capturados em ACR devido à ação de forças não-conservativas (como atrito com disco de gás), responsáveis por levar o sistema à configuração extrema de energia.

Com um histórico desse tipo, é plausível que o sistema apresente ACR com amplitudes quase nulas. Os autores ressaltam, porém, que as marcações não estão exatamente em cima de soluções teóricas, indicando que, ou o sistema real de fato não está em ACR exata, ou os próprios *fits* deveriam ser ajustados às soluções ACR exatas associadas à razão de massas planetárias observada. Se o sistema observado não estiver exatamente sobre uma curva de solução ACR, estando de fato apenas próximo dela, em teoria o sistema deve estar com suas excentricidades, ângulo crítico e $\Delta\varpi$ oscilando ao redor da solução ACR. Também, segundo Beaugé et al. (2003), as marcações são relevantes para o estudo da dinâmica de longo prazo, pois conhecer características do centro de corrotação permite que se estime a estabilidade e períodos de oscilação do sistema.

Em Beaugé et al. (2006), é enfatizado que as soluções ACR de amplitude nula são referentes a um Hamiltoniano ponderado em um período sinódico e que, se não for feita essa ponderação, um sistema real, mesmo sobre uma condição de ACR exata, apresenta oscilações de curto período com amplitudes finitas ao redor da solução exata. Essa informação é relevante para a interpretação de marcações de sistemas no plano de excentricidades, como foi feito na Figura 2.7, e, também, para o estudo numérico deste projeto.

Nesse último contexto, como as integrações são feitas a partir de equações de movimento exatas, espera-se que haja uma ausência de simulações em ACR de amplitude nula em mapas dinâmicos gerados. Essa ausência não deve representar, portanto, um desacordo com a teoria e, no lugar das curvas de solução teóricas exatas apresentadas para cada razão de massas planetárias (se elas estão corretas), espera-se encontrar simulações com ângulos crítico e $\Delta\varpi$ oscilando com amplitudes baixas e não nulas.

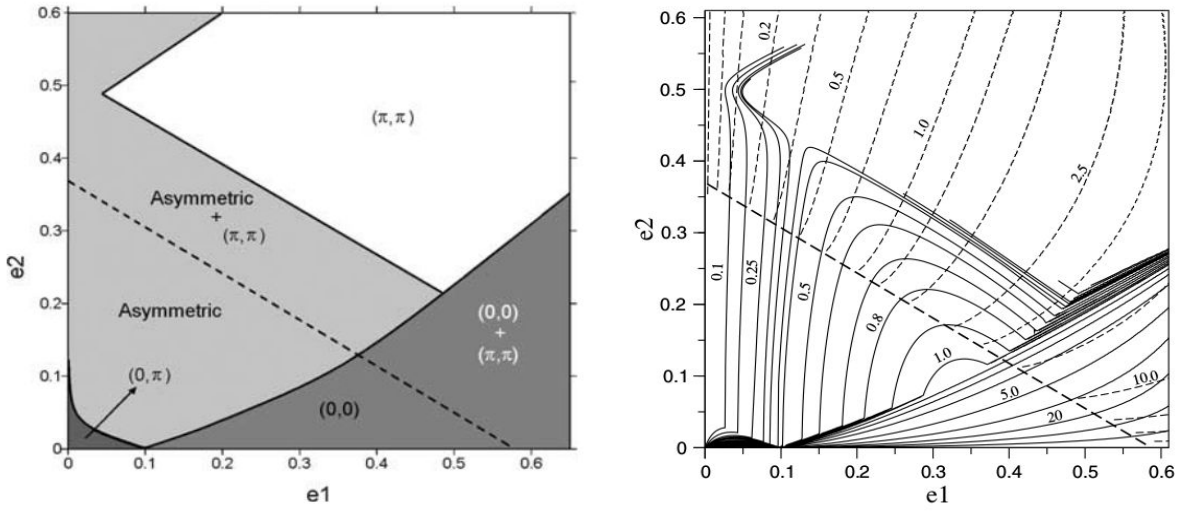


FIGURA 2.8. À esquerda: regiões de dinâmica ACR 2:1 simétrica, assimétrica e anti-simétrica no plano de excentricidades, separadas pelos pontos de equilíbrio angulares de (σ_1, dw). À direita: curvas teóricas de soluções ACR para diferentes razões de massas planetárias, de acordo com Beaugé et al. (2006).

Beaugé et al. (2006) também afirma que as soluções ACR teóricas dependentes exclusivamente de razão de massas são úteis para se vencer os limites de medições do método de velocidade radial estelar, desde que haja fundamento para que um sistema real estudado seja considerado coplanar. Além disso, como o Hamiltoniano pode ser escrito em termos da razão de semi-eixos de um sistema, as soluções teóricas para determinada RMM, em princípio, poderiam ser aplicadas a quaisquer valores de semi-eixos individuais, desde que eles respeitem a proporção da RMM.

Na Figura 2.8, é possível observar, na representação à direita, curvas teóricas de solução ACR 2:1 para diferentes razões de massas, cobrindo um amplo intervalo de excentricidades. Essas soluções foram definidas a partir de um modelo de Hamiltoniano semi-analítico diferente daquele utilizados em Michtchenko et al. (2008a) e Michtchenko et al. (2008b), que era limitado a baixas excentricidades. Beaugé et al. (2006) afirma ainda que, definida a RMM, o modelo teórico utilizado prevê soluções independentemente das distâncias dos planetas à estrela.

Na Figura 2.8 à direita, as novas soluções teóricas estão todas em uma mesma imagem , mas, na realidade, elas existem dentro de quadrantes de c.i. angulares diferentes. Nessa mesma figura, à esquerda, é possível ver esses diferentes domínios angulares previstos por teoria. As soluções ACR para o caso de dois planetas com baixas excentricidades são encontradas, principalmente, no quadrante de c.i. (σ_1, dw)=(0,π), mas também em (0,0). Acima das "barreiras" que delimitam essas regiões, existem as soluções ACR assimétricas, que também dependem de razão de massas e podem ter pontos de equilíbrio angulares muito diferentes de 0 ou π.

Para excentricidades mais elevadas, existem soluções ACR assimétricas, mas também simétricas alinhadas e anti-alinhadas nos quadrantes (0,0) e (π, π). A reta pontilhada representa a ocorrência de cruzamento de órbitas planetárias, em que $a_2(1 - e_2) = a_1(1 + e_1)$. O modelo teórico indica que soluções de corrotação próximas à reta de colisão só são viáveis para massas individuais baixas e que, para massas maiores, não há soluções estáveis possíveis nessa região. Beaugé et al. (2006) sugere que, para estudar o tamanho dessa região de possíveis instabilidades, pode-se utilizar um critério de estabilidade de Hill.

Outro aspecto importante explicado em Beaugé et al. (2006) é que, apesar de não se poder garantir que um sistema real está de fato em ACR apenas pelos valores de suas excentricidades e razões de massas observadas, já que uma ACR pode não ser a única solução estável possível para um sistema nessas condições, a confirmação de dinâmica ACR poderia indicar o tipo de migração que um sistema teria sofrido no passado. Também, no caso de excentricidades moderadas ou altas, a existência de ACR é especialmente plausível, pois a ressonância é um mecanismo capaz de proteger o sistema, impedindo que os planetas sofram encontros próximos, mesmo que as órbitas se cruzem.

Simulações hidrodinâmicas de migração em gás apresentadas por Snellgrove et al. (2001) chegaram a capturas em ACR para diferentes parâmetros de disco. Em Beaugé et al. (2006), foram feitas integrações numéricas utilizando modelos de forças externas não-conservativas variados, simulando sistemas fora, porém próximos da RMM 2:1 simétrica, sob efeito de maré e, também, em interação com disco de planitesimais. Essas simulações se iniciavam com ambos os planetas em órbitas circulares e um resultado interessante é que, para migrações adiabáticas e suficientemente lentas (comparadas com a escala de tempo de perturbações conservativas), um sistema com determinada razão de massas planetárias evolui suas excentricidades, durante a migração, obedecendo linhas teóricas de solução ACR, como aquelas apresentadas na Figura 2.8 à direita.

Na Figura 2.9 à esquerda, estão marcados os pontos da simulação de migração e em cinza claro e a linha preta contínua é a curva de solução ACR 2:1 para a razão de massas simulada (Beaugé et al. (2006)). É possível observar o sistema evoluindo desde excentricidades nulas, na condição lenta adiabática, sobre a curva teórica (ou oscilando ao redor dela), passando pelo quadrante de ângulos (0,π) em excentricidades baixas e, depois, seguindo por soluções do quadrante (0,0). Na Figura 2.9 à direita, há simulações de migração para diferentes razões de massa, em que cinza claro representa migrações não adiabáticas e, em preto, estão migrações adiabáticas. Nota-se que, para

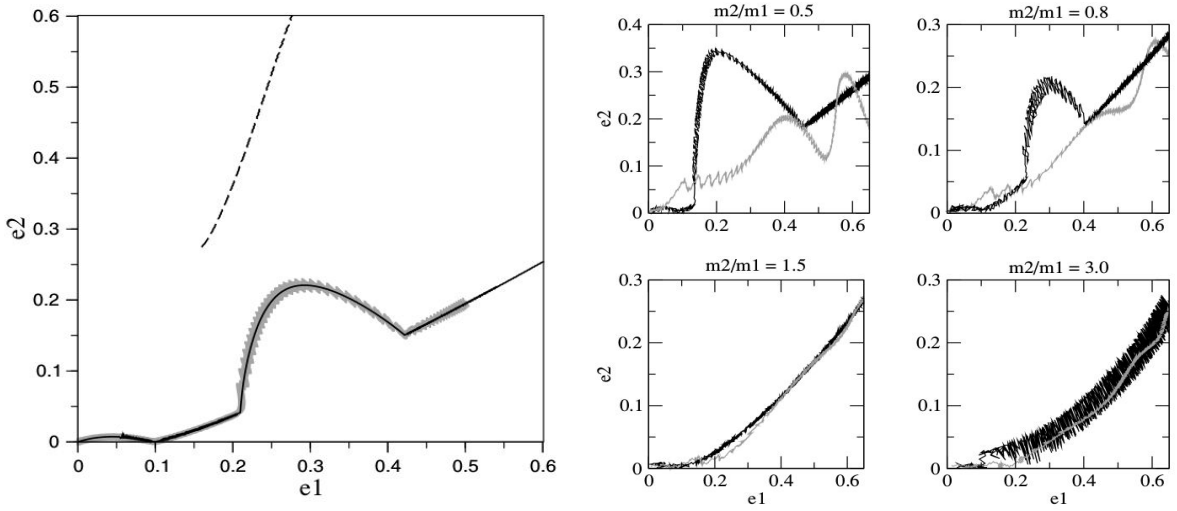


FIGURA 2.9. À esquerda: Em cinza claro, está a evolução no plano de excentricidades, por migração adiabática, de um sistema de dois planetas com razão de massas 0.8, em RMM 2:1, inicialmente com órbias circulares. A curva preta preenchida são soluções ACR teóricas para essa razão de massas. À direita: Evoluções de sistemas de diferentes razões de massas, em condições adiabáticas (preto) e não adiabáticas (cinza), por Beaugé et al. (2006).

razões 1.5 ou maiores, adiabática ou não, a migração tende a seguir a curva teórica de ACR e, para razões de massas baixas, apenas o caso adiabático obedece as soluções teóricas, mas existe uma fase em que o sistema assume um comportamento assimétrico, antes de retornar para a solução simétrica.

Outros trabalhos, como os de Migaszewski (2015) e Deck & Batygin (2015), afirmam que a razão de massas planetárias influencia significativamente na direção de migração em discos de formação, fazendo com que esta seja convergente ou divergente, aproximando os planetas da condição de RMM ou afastando-os. Também, em Deck & Batygin (2015), conclui-se que a capacidade de um sistema escapar de captura ressonante depende da razão de massas planetárias, e que sistemas que sofrem migração do Tipo I com razões menores que 1 tendem a ficar capturados permanentemente. Segundo Kley (2019), a migração Tipo I ocorre para planetas com massas individuais baixas, que interagem fracamente com o disco, sem causar grandes alterações na estrutura deste, e, durante a migração, os planetas em geral estão completamente imersos em gás. Além disso, a migração Tipo I costuma resultar no movimento de planetas em direção à estrela.

Essas informações sugerem que sistemas com razão de massas menores que 1 e com pelo menos uma massa individual observada baixa, marcados sobre ou próximos a uma curva de solução ACR exata, têm um histórico de migração em seu passado, possivelmente adiabática e Tipo I, convergente à posição de RMM, com os planetas tendo se formado mais distantes da estrela do que a posição em que se encontram atualmente e apresentando captura permanente. Essas afirmações não são garantias, mas mostram que a marcação de sistemas em catálogos de regiões ressonantes podem, pelo menos, indicar históricos de formação teoricamente plausíveis e fornecer argumentos para a validade das teorias. Também, mesmo que não seja possível obter uma conclusão definitiva sobre a formação de um sistema específico, marcando uma grande quantidade de sistemas em mapeamentos de ressonância, podem surgir tendências gerais para sistemas em RMM, que deverão ser explicadas com teoria.

Por fim, outro artigo relevante dentro do contexto de estabilidade de sistemas ressonantes e razões de massas planetárias foi realizado por Marzari, F. et al. (2006). Nesse estudo, foram

realizadas integrações numéricas de sistemas em RMM 2:1, com razões de massas e configurações orbitais coplanares variadas (ângulos iniciais e excentricidades assumindo diferentes valores dentro de determinados intervalos). Foi feita uma análise de frequências nos resultados das simulaçoes (*Laskar's Frequency Map Analysis*), que permite obter um valor numérico chamado "parâmetro de difusão" para cada simulação. O parâmetro é um forte indicador de estabilidade a longo prazo (bilhões de anos), segundo os autores. No plano de excentricidades orbitais, foram feitos mapas de difusão para cinco valores de razões de massas planetárias, com o objetivo de se distinguir regiões que promovem sistemas ressonantes estáveis.

A partir de seus resultados numéricos, Marzari, F. et al. (2006) concluem que, uma grande variedade de razões de massas planetárias e parâmetros orbitais podem apresentar estabilidade a longo prazo e que, dentro das órbitas estáveis, a dinâmica ACR é tão frequente quanto à RMM do tipo não ACR. Porém, considerando apenas as órbitas de alta excentricidade, a dinâmica ACR é dominante entre as órbitas estáveis. Os autores ressaltam que planetas, comumente, devem se formar em órbitas quase circulares e que eventuais migrações rumo à captura ressonante são capazes de excitar as excentricidades planetárias. Nesse sentido, planetas em RMM com altas excentricidades provavelmente têm dinâmica ACR.

Segundo Marzari, F. et al. (2006), os sistemas a serem detectados futuramente não devem preencher todas as configurações possíveis de órbitas estáveis e tendências devem surgir. Além disso, também é afirmado que as soluções estacionárias podem ser entendidas como um "esqueleto" para todas as órbitas no problema ressonante coplanar e que, possivelmente, também podem servir de referência para o estudo dinâmico de sistemas com pequenas inclinações entre planos orbitais.

Capítulo 3

Objetivos

Tendo em vista os resultados já existentes na Literatura, relacionando razões de massas planetárias com a ocorrência de RMM/ACR, esta dissertação tem os seguintes objetivos:

- integrar numericamente sistemas de dois planetas com razão de períodos orbitais 2 em diferentes configurações, dentro de um intervalo de razões de massas planetárias representativo para sistemas reais;
- construir mapas dinâmicos no plano de excentricidades iniciais para verificar, em diferentes regiões, o comportamento das amplitudes de oscilação de $\Delta\varpi$ e do ângulo crítico da RMM;
- mapear, no plano das excentricidades iniciais, as regiões de dinâmica ACR simétrica, que se mantêm secularmente com diferentes amplitudes de ângulos $\Delta\varpi$ e σ_1;
- comparar as curvas numéricas de solução ACR com as curvas teóricas de Beaugé et al. (2006) nos diferentes quadrantes de c.i. angulares, para diferentes razões de massas planetárias;
- verificar se os mapas numéricos das regiões de RMM/ACR simétricas são independentes da distância dos planetas em relação à estrela e se são significativamente sensíveis à mudança de massas planetárias individuais e de massa estelar;
- verificar a extensão da região de instabilidade ao redor da curva de cruzamento de órbitas, distinguindo, nos mapas gerados, as simulações que têm ejeções ou colisões de planetas;
- caracterizar o comportamento das regiões de RMM/ACR 2:1 simétricas em correlação com a razão de massas planetárias, quantificando a ocorrência desses tipos de dinâmica nas simulações associadas a cada razão;
- selecionar diferentes sistemas de 2 exoplanetas observados com razão de períodos 2:1, marcá-los como pontos nos mapas dinâmicos gerados para tais razões de massas e identificar que tipo de dinâmica é consistente com a configuração desses sistemas;
- para os sistemas selecionados, construir mapas do tipo semi-eixos vs. excentricidades, analisar o comportamento das configurações orbitais vizinhas aos *fits* observacionais e quantificar amplitudes de evolução das excentricidades, semi-eixos e ângulos críticos.

Capítulo 4

Metodologia

Existem diferentes abordagens possíveis no estudo de ressonâncias de movimentos médios. Neste trabalho, para investigar a correlação entre razões de massas e a existência de captura ressonante em sistemas planetários, foram utilizadas ferramentas de integração numérica e de análise dinâmica. Optou-se por realizar, com o *software* Mercury de Chambers & Migliorini (1997), simulações de sistemas coplanares de uma estrela e dois planetas, que têm comensurabilidade de períodos orbitais 2:1 e razões de massas planetárias dentro de uma faixa de valores pré-estabelecida. Para a análise, foram construídos diferentes tipos de mapas dinâmicos, bem como gráficos específicos da evolução de sistemas a partir de determinadas condições iniciais e gráficos de distribuição percentual da ocorrência de fenômenos de RMM e ACR como função das razões de massas planetárias.

A integração numérica da dinâmica planetária consiste na busca computacional por uma solução das equações de movimento que descrevem o sistema e, por meio dela, pode ser obtida uma previsão da evolução temporal de posição e velocidade (ou de elementos orbitais) de objetos de interesse. Nesse contexto, o Mercury é um integrador de N corpos comumente utilizado em Astronomia Dinâmica e resolve equações de movimento exatas - por exemplo, as expressões (40) e (41) do problema de dois planetas.

Escrito em Fortran, o Mercury opera com base em arquivos de entrada e produz arquivos de saída que fornecem a evolução temporal dos elementos orbitais de um sistema. Com esse programa, é relativamente simples simular um único sistema: basta definir propriedades físicas dos corpos envolvidos (como massas e raios), parâmetros orbitais iniciais (posições e velocidades ou elementos orbitais) e parâmetros associados a uma rotina de integração disponível (método numérico, passo e tempo de integração, critérios de encontro próximo, colisão e ejeção de objetos, entre outros).

Um mapa dinâmico, por sua vez, é construído a partir da manipulação das saídas de uma grande quantidade de integrações individuais, todas realizadas com um mesmo sistema planetário, mas partindo de diferentes condições iniciais. Essas condições determinam os eixos vertical e horizontal do mapa dinâmico e, portanto, um pixel do mapa representa uma única simulação. Esse pixel, em geral, é colorido de acordo com uma escala de cores que revela informações sobre a evolução temporal de algum parâmetro da simulação. Por exemplo, o parâmetro pode ser a máxima amplitude de oscilação de um elemento orbital ou algum outro valor calculado a partir dos elementos orbitais da simulação.

Dependendo da quantidade de simulações desejada (i.e. da grade de condições de iniciais definida), muito ou pouco recurso computacional pode ser necessário para a construção de mapas. Em qualquer caso, é muito útil desenvolver códigos para automatizar a determinação de parâmetros de integração dos arquivos de entrada do Mercury, a execução de simulações, a retirada de dados simulados e a sua manipulação para interpretar resultados. Neste projeto, foram utilizados os computadores com múltiplos processadores do Observatório do Valongo e os clusters Lobo Carneiro da UFRJ [1] e Santos Dumont [2].

Os códigos desenvolvidos foram escritos em Python e permitiram a geração de cinco tipos de mapas dinâmicos que são apresentados em Resultados. Os mapas são: de amplitude de oscilação de ângulo crítico da RMM 2:1; de amplitude de oscilação da diferença de longitudes de pericentro planetárias; de regiões de dinâmica ACR associadas à RMM 2:1; de máxima variação da evolução temporal de semi-eixos maiores; e de máxima variação de excentricidades orbitais. Os primeiros três tipos de mapas foram construídos com base na variação de excentricidades iniciais dos dois planetas do sistema, estando estes com razão de períodos 2 exatamente. Como o ângulo crítico é função das longitudes de pericentro e determina os estados de RMM, as grades desses mapas foram definidas obedecendo c.i. de σ_1 e de $\Delta\varpi$ específicas que são pontos de equilíbrio típicos da RMM 2:1.

Já os mapas de máxima variação de semi-eixos maiores e excentricidades orbitais têm, como grade, valores de semi-eixo maior e excentricidade de planetas na vizinhança da RMM 2:1 exata. Esses mapas costumam variar significativamente de acordo com as massas individuais de planetas e não há um padrão para uma mesma razão de massas planetárias, mas eles têm utilidade na análise dinâmica de sistemas de exoplanetas observados específicos. Como é tratado em Aplicações, alguns sistemas reais foram selecionados para estudo neste projeto com o objetivo de validar as características dinâmicas que os outros mapeamentos de RMM e ACR sugerem.

4.1 Estrutura de Mapas Dinâmicos

A Figura 4.1 apresenta dois mapas dinâmicos do tipo a vs. e gerados com parâmetros do sistema Kepler-25, descoberto por Steffen et al. (2012), considerando que há, no sistema, apenas os dois planetas internos com razão de períodos próxima a 2 e estrela com $1.22 M_{\odot}$. Esses mapas revelam o efeito da perturbação ressonante na evolução de parâmetros orbitais dos planetas - no caso, as máximas variações do semi-eixo maior e da excentricidade do planeta interno. Para construir as simulações dos mapas, as c.i. do planeta mais massivo são fixadas e varia-se as c.i. de semi-eixo maior e excentricidade do planeta menos massivo nas redondezas de sua posição observada.

O tempo de integração de cada simulação deve envolver alguns períodos de perturbação ressonante e pode ser obtido realizando-se simulações curtas antes da geração de mapas. É preciso ter cautela na determinação desse parâmetro, pois, caso contrário, perturbações seculares se manifestam nas integrações e a análise exclusiva do comportamento ressonante é comprometida. Como mostra a Figura 4.1, os mapas apresentam estruturas: regiões de maior ou menor variação

[1] NACAD - Lobo Carneiro: `portal.nacad.ufrj.br`
[2] LNCC Santos Dumont: `sdumont.lncc.br`

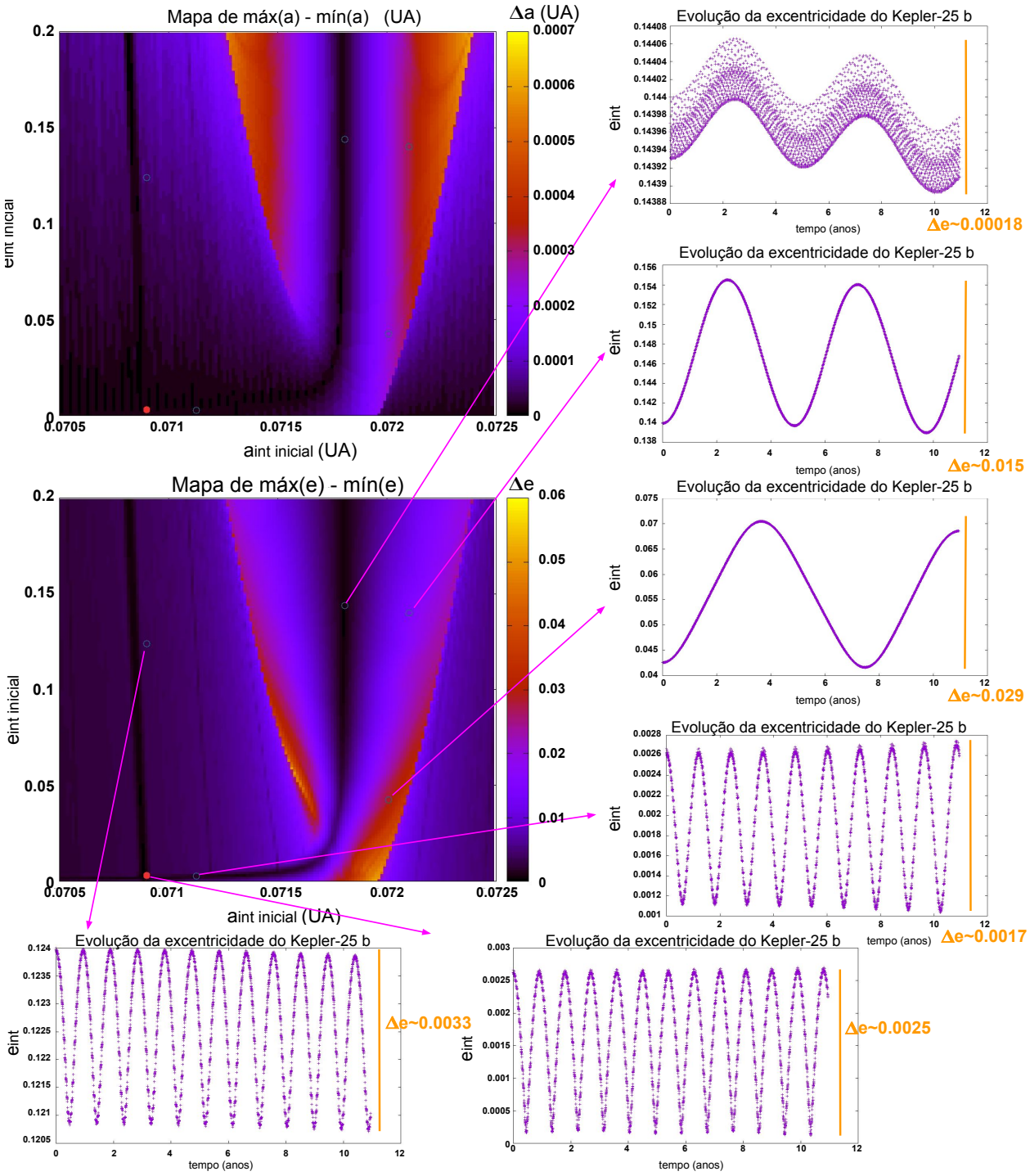


FIGURA 4.1. Estrutura de mapas dinâmicos a vs. e: mapemento das máximas variações de semi-eixo maior e excentricidade do planeta menos massivo do sistema Kepler-25 nas vizinhanças da RMM 2:1. O ponto vermelho marca a posição do Kepler-25 b, segundo parâmetros planetários de Mills et al. (2019). Estrela de $1.22 M_{\odot}$. Tempo das integrações: 4000 dias.

de elementos orbitais. Assim, a construção desses tipos de mapas fornece informações importantes sobre a dinâmica de um sistema que tem períodos orbitais comensuráveis.

Como a determinação do estado de RMM se dá pelo comportamento do ângulo crítico, outro método para investigar a ressonância é mapear a amplitude da evolução temporal do ângulo crítico. O mapa da Figura 4.2 é construído a partir das mesmas simulações que geraram os mapas anteriores, mas permite obter outras informações. Por exemplo, a figura mostra quais são as regiões de captura

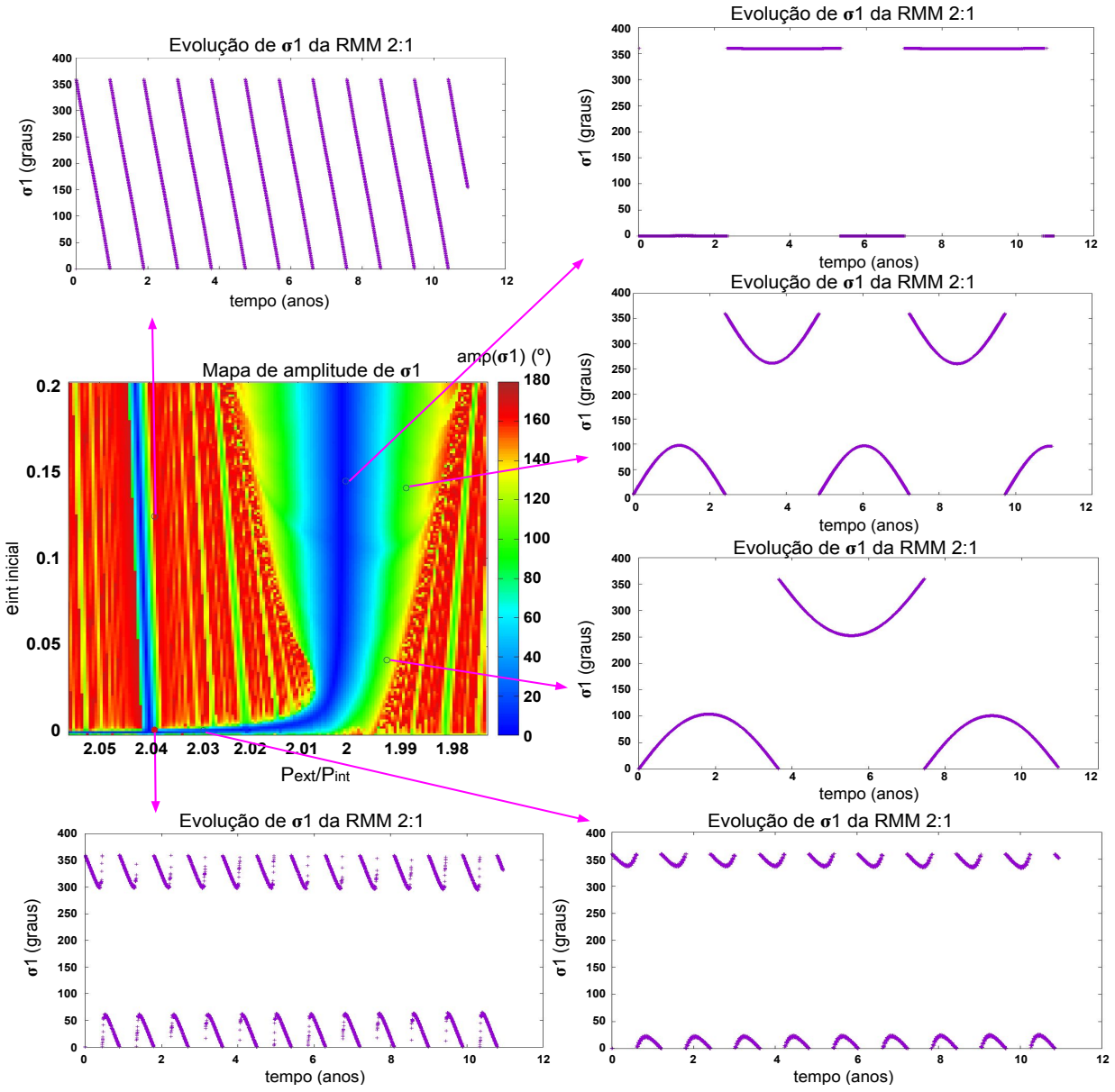


FIGURA 4.2. Estrutura de mapas dinâmicos a vs. e: mapeamento das amplitudes de oscilação do ângulo crítico da RMM 2:1, $\sigma_1 = 2\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1$. Sistema coplanar com longitudes de pericentro e anomalias médias iniciais iguais a 0°. Uma circulação corresponde à amplitude de 180° e os gráficos de evolução temporal estão modulados entre 0° e 360°. As evoluções representadas mostram librações ao redor de $\sigma_1 = 0^\circ$, exceto pelo caso superior à esquerda, em que ocorre circulação do ângulo crítico em uma simulação externa e bem próxima a uma região de oscilação.

ressonante, que são, com mais confiança, as regiões com amplitudes de σ_1 mais baixas e cores frias. Uma amplitude de 180 graus representa a circulação do ângulo crítico. O mapa de amplitude de σ_1 pode mostrar, também, estruturas não muito evidentes nos mapas anteriores, como, por exemplo, a faixa vertical bem marcada de valores de excentricidade que permitem captura ressonante na posição do Kepler-25 b.

Os mapas a vs. e são ferramentas importantes de análise dinâmica e não são constantes para uma mesma razão de massas planetárias. É observado na literatura e na prática, porém, que mapas de regiões ressonantes construídos com grades de condições iniciais do tipo $e_1\cos(\sigma)$ vs. $e_2\cos(\varpi_2 - \varpi_1)$, em geral, são semelhantes entre si para sistemas com uma mesma razão de massas planetárias e uma mesma relação de períodos comensuráveis, quando há proximidade da condição de oscilação da diferença de longitudes de pericentro. Definindo a massa da estrela do sistema,

é possível, portanto, observar a ocorrência de RMM 2:1 coplanar em simulações associadas a um único valor de razão de massas e a um único valor de semi-eixo maior inicial do planeta interno, construindo-se um mapa como o da Figura 4.3.

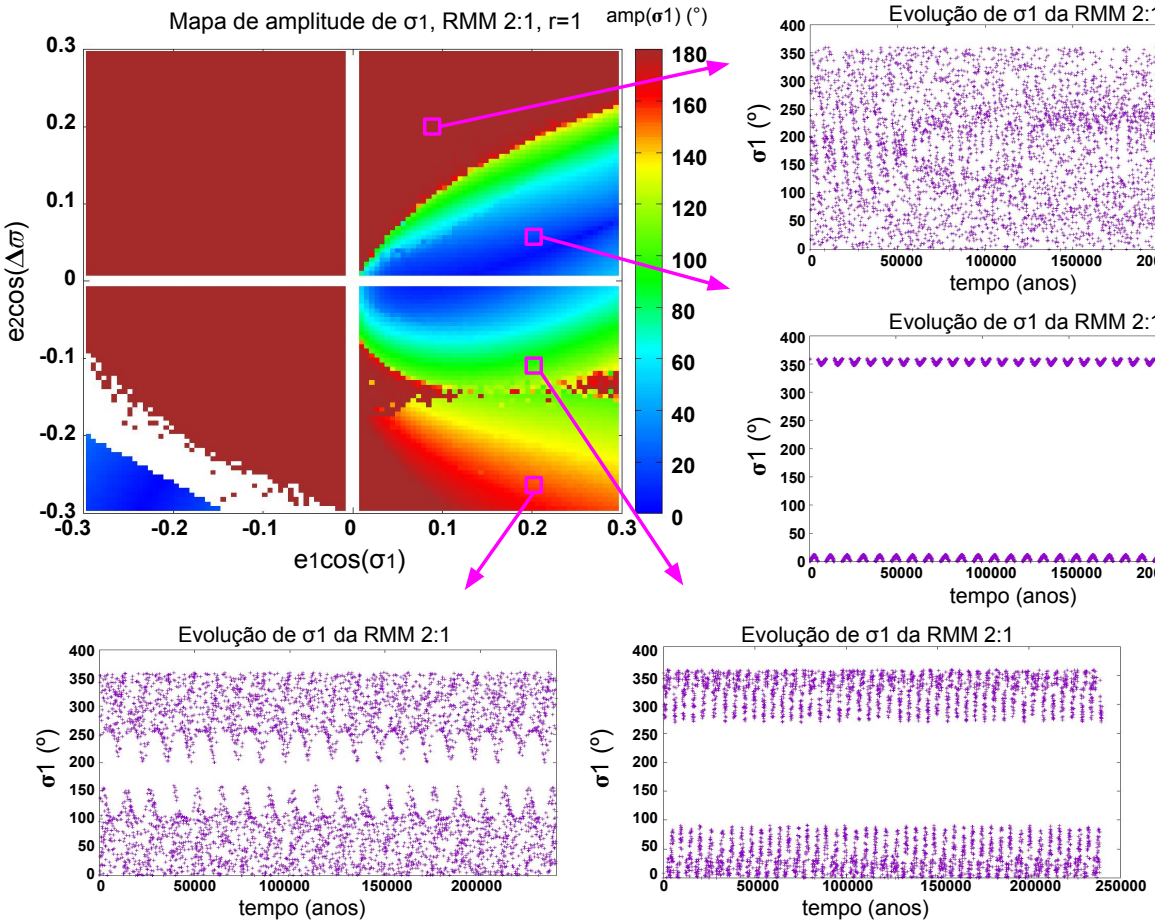


FIGURA 4.3. Evoluções temporais de ângulos críticos e mapeamento de sua amplitude (em graus) para um sistema coplanar, inicialmente em 2:1 exata, com razão de massas planetárias 1 (i.e. "r=1") e estrela do tipo solar. Pixels brancos correspondem a instabilidades, ou seja, à ocorrência de colisões entre objetos ou ejeções (i.e. algum objeto se afastou da estrela mais de 100 UA).

Como antes, cada pixel nesse mapa representa uma simulação e a cor do pixel fornece a amplitude da evolução temporal do ângulo crítico, que indica se a simulação está ou não capturada em RMM. Se o mapa for gerado com uma escala de tempo relativamente longa para o sistema em questão, observa-se regiões de captura ressonante que se mantêm por tempo secular. Nos eixos do mapa, e_1 e e_2 são c.i. de excentricidade dos planetas interno e externo, respectivamente, e os argumentos de cosseno representam c.i. conhecidas (na literatura) de ângulos que podem favorecer a ocorrência de RMM 2:1 em sistemas de dois planetas. Assim, os quatro quadrantes têm c.i.s de ângulo $(\sigma_1, \varpi_2 - \varpi_1) = [(0,0),(0,\pi),(\pi,\pi),(\pi,0)]$, em que $\sigma_1 = 2\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1$, os λ_i são longitudes médias e os ϖ_i são longitudes de pericentro dos planetas.

Pode-se observar que, dependendo das condições iniciais de ângulos e excentricidades, um mesmo sistema com razão de períodos 2:1 pode evoluir de diferentes maneiras e, mesmo havendo o posicionamento de semi-eixos coerente com uma ressonância de movimentos médios exata, ainda é possível que o sistema não fique capturado em ressonância. Isso pode ser verificado nos gráficos de evolução temporal do ângulo crítico, que revelam circulações (como no gráfico superior direito) ou oscilações (librações) mais ou menos regulares e com amplitudes variadas. As frequências de

libração são frequências de ressonância e as amplitudes mais baixas no mapa dinâmico (cores mais frias), em geral, são as que se mantêm por escalas de tempo seculares. Enfim, o tipo de mapa representado na Figura 4.3 revela regiões de ocorrência de RMM 2:1 no plano $e_1\cos(\sigma)$ vs. $e_2\cos(\varpi_2 - \varpi_1)$ para sistemas de dois planetas coplanares com razão de massas 1.

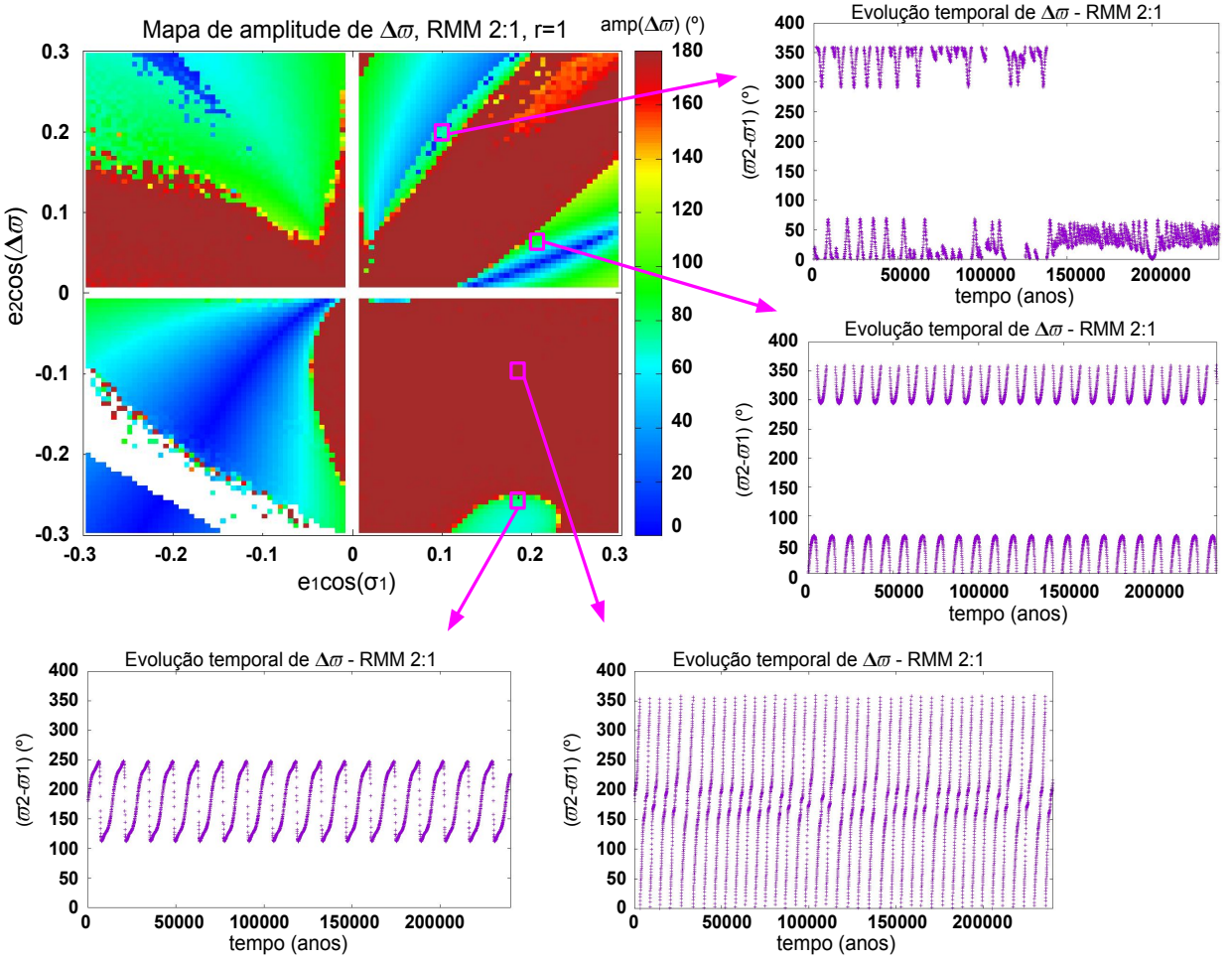


FIGURA 4.4. Evoluções temporais da diferença de longitudes de pericentro e mapeamento de sua amplitude (em graus) para um sistema coplanar em 2:1, com razão de massas planetárias 1 (i.e. "r=1") e estrela do tipo solar. Pixels brancos correspondem à ocorrência de colisões ou ejeções nas simulações.

Também, para sistemas capturados em RMM 2:1, existe a possibilidade de outro ângulo crítico estar librando, como $\sigma_2 = 2\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_2$. No caso coplanar, σ_2 está relacionado com σ_1 pela relação $\sigma_1 - \sigma_2 = \varpi_2 - \varpi_1$. A Figura 4.4 mostra um mapa de amplitudes de oscilação de $(\varpi_2 - \varpi_1)$ e a evolução temporal deste ângulo para simulações que estão em diferentes regiões do plano $e_1\cos(\sigma)$ vs. $e_2\cos(\varpi_2 - \varpi_1)$. As simulações que compõem o mapa de amplitude de $\Delta\varpi$ são as mesmas do mapa de amplitude de σ_1 da Figura 4.3.

Como no caso dos mapas de amplitude de σ_1, os mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ também revelam regiões de circulação ou oscilação de $\Delta\varpi$ para um sistema que parte de diferentes condições iniciais. As regiões com cores mais frias indicam quais condições estão associadas a oscilações de $\Delta\varpi$. Dessa forma, analisando-se simultaneamente os mapas de amplitude $\Delta\varpi$ e de amplitude de σ_1, é possível encontrar regiões em que ambos os ângulos oscilam e que, portanto, apresentam o fenômeno ACR.

4.2 Estudo de Correlação

4.2.1 Variação de Razões e Gráficos de Percentuais

Para se estudar a correlação entre a ocorrência de RMM/ACR e razões de massas planetárias, a estratégia deste projeto consiste, fundamentalmente, na geração de uma grande quantidade de mapas de amplitude de oscilação de ângulo crítico e de amplitude de $\Delta\varpi$, como aqueles das Figuras 4.3 e 4.4. A ideia principal é que esses mapas se diferenciem apenas pelo valor da razão de massas planetárias, de modo que seja possível comparar o comportamento de uma sequência de mapas como função de uma única variável e, então, verificar como a razão de massas se relaciona com a forma das regiões de RMM/ACR.

Uma propriedade observada dos mapas mencionados é que, quando se constrói uma grade de c.i. $e_1\cos(\sigma)$ vs. $e_2\cos(\varpi_2 - \varpi_1)$ fina o suficiente, as regiões de oscilação de σ_1 e de $\Delta\varpi$ são bem definidas para um tempo de integração fixo. Também, como a dinâmica ACR consiste na oscilação simultânea desses dois ângulos, por consequência, as regiões em que ocorrem o fenômeno ACR ficam definidas. Ou seja, mesmo que se afine mais a grade, a aparência geral dos mapas dinâmicos não se altera significativamente para resoluções cada vez maiores. Isso revela que simulações que partem de c.i. parecidas tendem a apresentar amplitudes de ângulo crítico e de $\Delta\varpi$ semelhantes, dentro do tempo integrado, e que as regiões de dinâmica do tipo RMM/ACR configuram uma porcentagem aproximadamente *fixa* da área total do mapa ou do total de simulações realizadas.

Nesse contexto, pode-se supor o seguinte caso: um sistema coplanar de dois planetas se encontra, inicialmente, com uma razão de períodos tal que sugere a existência de uma RMM 2:1 exata. O sistema apresenta valores iniciais (osculadores) específicos de semi-eixos maiores a_1 e a_2, massas planetárias m_1, m_2 e massa da estrela M_{star}, mas há incerteza quanto às suas disposições angulares, por exemplo. Mapas de σ_1 e $\Delta\varpi$, então, são gerados para esse sistema, com grade suficientemente fina dentro de um intervalo de excentricidades $\{e_1, e_2\}$ definido e utilizando condições de ângulos iniciais que favorecem o desenvolvimento de dinâmica ressonante (i.e. pontos de equilíbrio conhecidos). Integra-se por um tempo que engloba perturbações seculares. A totalidade de um mapa (i.e. todas as simulações do mapa), nesse caso, representa 100% de um universo de c.i. e trajetórias evolutivas possíveis para o sistema estudado, se ele tiver excentricidades osculadoras, de fato, dentro do intervalo mapeado e estiver nas proximidades de uma captura em RMM 2:1.

Como mencionado, as trajetórias com dinâmica RMM/ACR são uma porcentagem desse universo de c.i. possíveis. Sozinho, esse número não sugere muito, mas pode apontar uma tendência quando comparado à outras porcentagens, associadas a mapas semelhantes em grade, mas com razões de massas planetárias diferentes. É evidente, nesse caso, que uma comparação está sendo feita entre mapas de sistemas diferentes (porque estes têm massas planetárias diferentes), porém, todos estariam, a princípio, com a mesma condição inicial de períodos 2:1 exata, bem como de a_1 e M_{star}, de modo que qualquer padrão eventualmente encontrado deve estar relacionado a esse tipo específico de configuração.

Também, as porcentagens permitem descobrir se existe alguma razão de massas associada a uma maior quantidade de trajetórias que se mantêm, secularmente, em dinâmica de RMM/ACR 2:1. Se ela existir, dentro do universo de c.i. simulado, um sistema que apresenta tal razão de massas tem maior probabilidade de apresentar captura ressonante do que outros sistemas em 2:1,

com razões de massas diferentes, no cenário em que não há certeza sobre excentricidades e ângulos osculadores.

Por exemplo, um conjunto de mapas associado a diferentes razões de massas (m_2/m_1) pode ser gerado com simulações, nas quais a massa do planeta interno fica fixa enquanto m_2 varia. Os mapas resultantes podem ser comparados entre si a "olho nu", mas é mais fácil verificar as porcentagens de simulações capturadas em ressonância no caso de muitos mapas ou mapas parecidos. Contando-se as simulações que apresentam oscilação de σ_1 e/ou de $\Delta\varpi$ (segundo um critério de contagem que deve ser definido), é possível descobrir se existe algum valor de m_2 (e, assim, também, de m_2/m_1) associado à maior ocorrência de RMM.

Para saber, no entanto, se o comportamento das regiões de RMM é relacionado com a razão de massas propriamente, e não com massas individuais, é preciso utilizar valores diferentes de massas para produzir mapas de uma mesma razão e compará-los. Além disso, para verificar se as regiões de RMM/ACR da 2:1 exata dependem apenas da razão de massas e não de outros parâmetros também, é preciso conferir a semelhança entre mapas de uma mesma razão e com valores diferentes de semi-eixos e de M_{star}, que são os únicos outros parâmetros livres nesse contexto.

Dessa forma, optou-se por simular diferentes conjuntos de mapas de amplitude de σ_1, de $\Delta\varpi$ e, com base nesses dois, construir mapas de dinâmica ACR. Decidiu-se produzir quatro grandes conjuntos de mapas. Os primeiros três referem-se a estrelas do tipo solar e o quarto tem estrela condizente com uma anã vermelha. Em todos os casos, os semi-eixos maiores iniciais dos planetas obedecem a razão de períodos 2:1 exata. Os três primeiros casos se distinguem especialmente pelas posições de a_1 simuladas. Além disso, define-se um intervalo fixo (e discreto) de razão de massas e cada conjunto de mapas é construído com base nesse vetor. Nos mapas associados a uma mesma razão de massas, as massas individuais dos planetas assumem valores diferentes e o conjunto com estrela do tipo anã vermelha tem o mesmo a_1 de um dos conjuntos do tipo solar.

Com essa construção, é possível verificar uma série de aspectos, como a variação dos mapas devido apenas a uma mudança na massa da estrela e a existência de algum padrão nas estruturas ressonantes dos mapas que seja característico da RMM 2:1. Os conjuntos de mapas com estrela do tipo solar segue a seguinte organização:

- Existem três conjuntos de mapas (A, B, C) e cada conjunto tem posicionamentos de RMM 2:1 exata diferentes: no primeiro conjunto, tem-se que a_1 =A, no segundo, a_1 =B, e, no terceiro, a_1 =C.
- Existe um único vetor de razões de massas com X elementos;
- Cada conjunto produz 3X mapas: para cada razão de massas, existe um mapa de amplitude de σ_1, outro de $\Delta\varpi$ e outro de regiões ACR;
- Nos conjuntos A e C, existe um valor fixo de m_1, por exemplo, m_1 =Y, e as massas m_2 são calculadas com base no vetor de razões de massas: m_2 =razão$*m_1$.
- No conjunto B, a massa do planeta interno também é fixa, porém, é diferente daquela dos outros conjuntos. Em B, m_1 = 2Y e a massa do planeta externo varia como m_2 =razão$*m_1$.

Dessa forma, existem três posições de RMM 2:1 sendo testadas. A diferença entre os conjuntos A e C é apenas o valor de a_1. A diferença entre A (ou C) e B é a_1 e o valor fixo de m_1. Se os três conjuntos produzirem mapas iguais ao longo de todo o vetor de razão de massas, então, as estruturas nos mapas devem ser uma propriedade da RMM 2:1, já que este é o único aspecto comum nos três conjuntos (exceto, também, pela massa da estrela). Se os conjuntos A e C produzirem mapas iguais, mas B produzir mapas diferentes, então deve existir um padrão específico da RMM 2:1 nos mapas, mas esse padrão é sensível à massa do planeta interno. Além disso, o quarto conjunto de mapas (D), associado à anã vermelha, é igual ao conjunto A, exceto pela massa da estrela. Assim, D pode ser comparado com A para se verificar se um eventual padrão da 2:1 varia com a massa estelar.

Mais ainda, se, dentro de um conjunto específico, os mapas não variam com a razão de massas, então, não deve existir relação entre as estruturas ressonantes e as razões de massas planetárias. Se, no entanto, dentro de um mesmo conjunto, as regiões ressonantes evoluem de forma contínua e gradual com a mudança de razão de massas, então, isso é um indicativo de que a forma das regiões ressonantes se correlaciona com as razões de massas planetárias. Por outro lado, se os mapas se modificam com a variação da razão de massas de forma descontínua e aparentemente aleatória, é um indicativo de que a correlação não deve existir ou que, se existe, o método aqui proposto não deve ser o melhor para estudá-la.

No caso em que há uma correlação característica da RMM 2:1 e dependente da razão de massas primordialmente, deve ser possível observar a evolução dos mapas como função das razões a "olho nu", se o vetor de razão de massas for bem escolhido e uma quantidade suficiente de mapas for gerada. A forma mais prática de escolher o bom intervalo é graficando a ocorrência de simulações em RMM/ACR (segundo um critério), como função das razões. Um caso interessante vislumbrado é que a ocorrência seja uma função da razão de massas com um ponto de máximo ou de mínimo, pois, nesse caso, existem razões de massas mais ou menos favoráveis à captura ressonante. O caso mais interessante é se existir um pico de ocorrência em determinado valor de razão e a curva de ocorrência decair para ambos os lados dessa razão, sendo possível definir uma razão de massas que é a mais favorável à captura e, também, extrapolar o comportamento da ocorrência para razões infinitamente grandes e infinitamente pequenas, cobrindo todo o intervalo de razões de massas possíveis.

Apesar de ser cansativo, o intervalo de razão de massas ideal é buscado experimentalmente até que seja possível observar um comportamento satisfatório para a curva de ocorrência. Como os mapas levam tempo para ser simulados, essa busca deve ser feita gerando mapas de menor resolução e, uma vez que o intervalo é definido, repete-se a geração de mapas para melhorar a qualidade deles e da curva de ocorrência.

Antes de apresentar como os gráficos de ocorrência são produzidos, propriamente, é preciso explicar como mapas de regiões ACR são construídos e o que é o critério de contagem de simulações em RMM/ACR. Na Figura 4.5, é possível observar os mapas já apresentados de amplitude de σ_1 e de $\Delta\varpi$ para razão de massas planetárias 1 e o mapa inferior é construído a partir desses dois, com um código que verifica se cada simulação dos mapas superiores está ou não com oscilação dos ângulos crítico e $\Delta\varpi$. A verificação é feita utilizando os próprios valores de amplitudes de σ_1 e de $\Delta\varpi$ e segue seis critérios (arbitrários) para determinar as regiões de dinâmica ressonante.

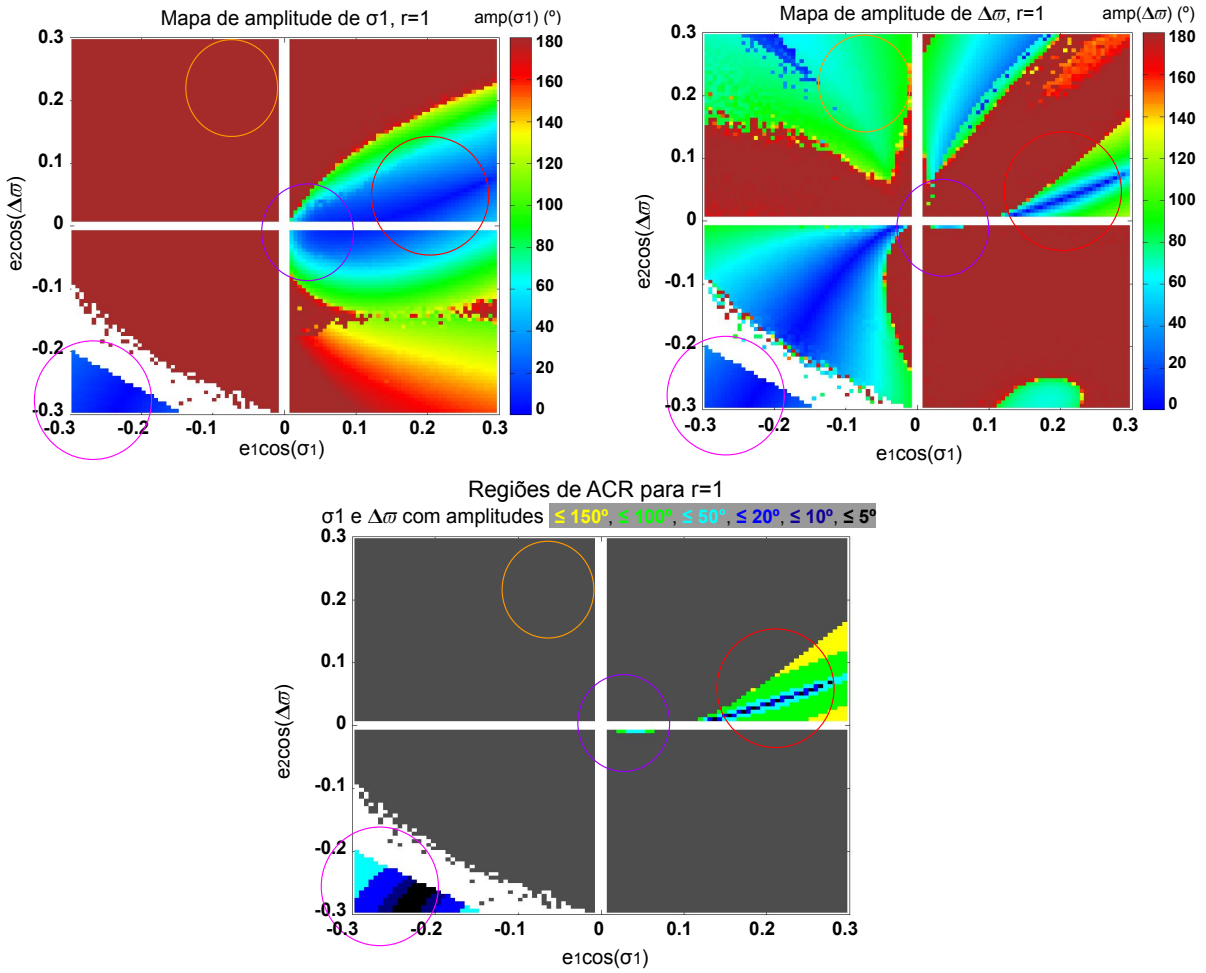


FIGURA 4.5. Estutura de mapas dinâmicos: mapeamento de regiões ACR segundo critérios de amplitude de σ_1 e de $\Delta\varpi$. Mapas com estrela do tipo solar, a_1=0.5 UA e tempo de integração de 240 mil anos. Nos mapas, a cor branca representa simulações com instabilidades, ou seja, simulações em que houve colisão entre planetas, colisão entre planeta e estrela ou ejeção de algum objeto.

Se uma simulação tem σ_1 oscilando com amplitude menor ou igual a 10° e, também, amplitude de $\Delta\varpi$ menor ou igual a 10°, então essa simulação é contada como uma "simulação em RMM segundo o critério de 10°", como uma "simulação com oscilação de $\Delta\varpi$ segundo o critério de 10°" e, também, como uma "simulação em ACR segundo o critério de 10°". No mapa de regiões ACR, essa simulação é colorida com a cor que representa o critério de 10°.

Os círculos coloridos traçados na imagem servem apenas para auxiliar a visualização de como o mapa de regiões ACR funciona. Na região delimitada pelo círculo laranja, σ_1 circula e $\Delta\varpi$ oscila. Assim, as simulações nessa região *não* são contadas como simulações em RMM e são contadas como simulações com oscilação de $\Delta\varpi$ segundo diferentes critérios. Consequentemente, no mapa de ACR, essa região está colorida de cinza, pois não satisfaz nenhum critério de contagem ACR estabelecido e, portanto, não tem dinâmica ACR.

Já a região delimitada pelo círculo vermelho tem oscilação de σ_1 e de $\Delta\varpi$ obedecendo diferentes critérios. Na parte mais interna, os dois ângulos oscilam com amplitudes baixas e, portanto, estão coloridos de azul no mapa de regiões ACR. Existe, então, uma região ao redor da mais interna, na qual $\Delta\varpi$ oscila com amplitudes mais altas enquanto σ_1 oscila com amplitudes ainda baixas. O código confere ambas as amplitudes simultaneamente pelo mesmos critérios, então, no mapa ACR,

essa região está colorida de verde, pois os dois ângulos, σ e $\Delta\varpi$, oscilam com amplitudes menores ou iguais a 100°. Enfim, as simulações contidas nessa região são contadas como "simulações em ACR segundo o critério de 100°".

Finalmente, utilizando as contagens de simulações em ACR segundo os diferentes critérios mencionados e as contagens individuais de simulações com oscilação de σ_1 (RMM) ou de $\Delta\varpi$, também segundo os critérios de amplitude, é possível graficar os percentuais de simulações em diferentes "estados dinâmicos" como uma função da razão de massas. Cada conjunto de mapas (A, B, C solares e o de anã vermelha) tem, para uma mesma razão de massas, um percentual de simulações em RMM, outro de simulações em ACR e outro de simulações com oscilação de $\Delta\varpi$. Então, para cada conjunto de mapas, pode-se construir gráficos de percentual de ocorrência de RMM/ACR em função de razões de massas planetárias, permitindo que se observe o comportamento funcional desses dois parâmetros e que se verifique existência de correlação.

4.2.2 Definição de Parâmetros de Integração

Para realizar as integrações e construir os mapas dinâmicos apresentados em Resultados, definiu-se um vetor de razão de massas com 26 valores. São eles: 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1, 1.2, 1.5, 1.8, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5, 6, 8, 10, 15 e 20. Os conjuntos A, B e C com estrelas de massa e raio solares têm três valores de semi-eixo maior do planeta interno (a_1), respectivamente, 0.0516 UA, 0.5 UA e 1 UA. Os semi-eixos maiores iniciais dos planetas externos foram calculados, respectivamente, pela equação (2.1.62). Os mapas com a_1=0.0516 UA e 1 UA têm massa de planeta interno $m_1 = 4.4M_\oplus$ e o caso $a_1 = 0.5$ UA tem $m_1 = 8.8M_\oplus$. Também, os mapas com estrela do tipo anã vermelha têm a_1 =0.0516 UA e massa de estrela $0.5M_\odot$.

Cada um dos mapas de amplitude de oscilação de σ_1 e de $\Delta\varpi$ foram construídos com quatro quadrantes de simulações, em que cada quadrante tem 50 c.i. de excentricidade do planeta interno e 50 c.i. de excentricidade do planeta externo. Dessa forma, um único mapa tem $50*50*4 = 10$ mil simulações. As excentricidades iniciais variam de 0.01 a 0.3. Esse intervalo de valores foi escolhido com base no levantamento de sistemas próximos à condição 2:1, que foi realizado para este projeto (ver Apêndice) e indica que a grande maioria de sistemas próximos à RMM 2:1 tem excentricidades de ambos os planetas menores que 0.3.

Em todos os mapas dinâmicos gerados, as simulações nas quais aconteceu colisão entre planetas ou entre planeta e estrela foram consideradas *instáveis*. Também, os casos em que algum objeto se afastou da estrela para além de 100 UA foram interpretados como ejeções. Assim, as simulações com colisão ou ejeção de objetos foram consideradas "simulações com instabilidades" e, nos mapas dinâmicos, elas estão coloridas de branco.

Também, os quadrantes de cada mapa são construídos com c.i. de ângulos diferentes. Utilizando o mapa dinâmico da Figura 4.3 como exemplo, o quadrante superior direito tem c.i. de ângulos $\{\varpi_1 = 0°, M_1 = 0°, \varpi_2 = 0°, M_2 = 0°\}$, em que M_1 e M_2 são as anomalias médias iniciais dos planetas interno e externo, respectivamente. Essas c.i são tais que esse quadrante tem, inicialmente, $\sigma_1 = 0°$ e $\Delta\varpi = 0°$. Ainda na Figura 4.3, o quadrante superior esquerdo tem c.i. $\{\varpi_1 = 0°, M_1 = 0°, \varpi_2 = 0°, M_2 = 90°, \sigma_1 = 180°, \Delta\varpi = 0°\}$, o quadrante inferior esquerdo tem $\{\varpi_1 = 0°, M_1 = 0°, \varpi_2 = 180°, M_2 = 90°, \sigma_1 = 180°, \Delta\varpi = 180°\}$ e o inferior direito tem

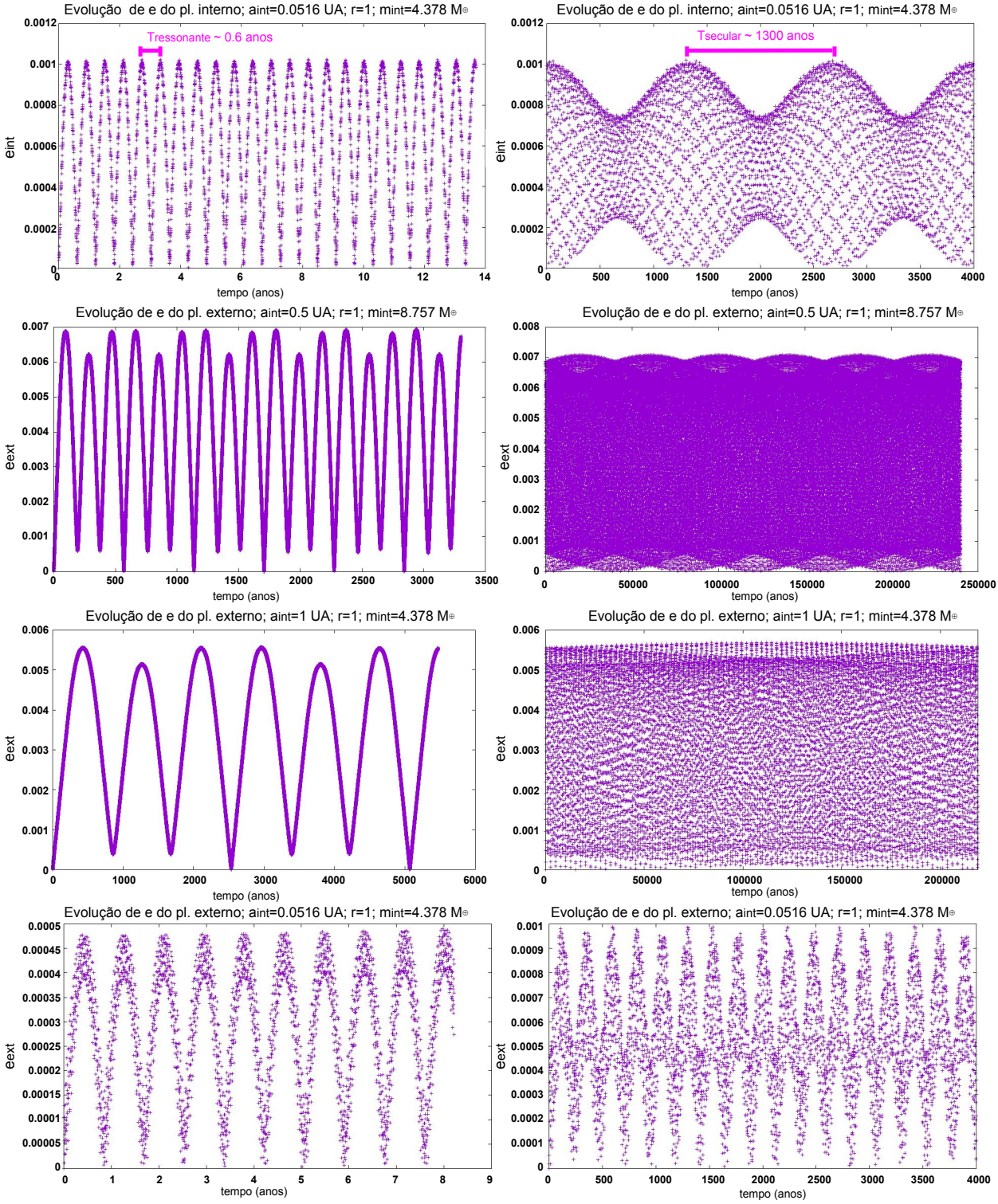


FIGURA 4.6. Evoluções temporais da excentricidade de planetas em sistemas com razão de períodos 2 e razão de massas 1. Em cada linha de gráficos, aquele à esquerda mostra períodos de perturbação ressonante de um sistema com determinado valor de a_1 e, à direita, está a evolução secular do mesmo sistema. Os períodos ressonante e secular foram indicados nos gráficos do caso $a_1 = 0.0516$ UA com estrela solar e os períodos referentes às outras simulações apresentadas podem ser deduzidos de maneira análoga. Os dois gráficos inferiores são para estrela de 0.5 $M_\odot$ e os demais casos são para $1M_\odot$.

$\{\varpi_1 = 0°, M_1 = 0°, \varpi_2 = 180°, M_2 = -180°, \sigma_1 = 0°, \Delta\varpi = 180°\}$. Na Figura 4.6, as simulações têm ângulos iniciais zerados.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Percentuais de Ocorrência de RMM e ACR

Buscando correlacionar a ocorrência de RMM com razões de massas planetárias, foram construídos mapas dinâmicos de amplitude de oscilação de ângulo crítico, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões ACR para 26 razões de massas em 4 situações distintas: estrela solar e semi-eixo maior inicial do planeta interno sendo $a_1 = 0.0516$ UA, $a_1 = 0.5$ UA e $a_1 = 1$UA; e outro caso $a_1 = 0.0516$ UA, mas com estrela de $0.5M_{\odot}$. Todas as integrações realizadas têm c.i. angulares iniciais simétricas e, portanto, as interpretações de resultados neste capítulo valem apenas para RMM/ACR *simétricas*.

No total, foram gerados 312 mapas, com 10 mil simulações cada. Os mapas são apresentados nas seções posteriores. E para facilitar a interpretação do comportamento destes, foram construídos gráficos, relacionando o percentual de ocorrência de oscilação de ângulos com as razões de massas planetárias, dentro de cada uma das 4 diferentes situações mencionadas.

Na Figura 5.1, é possível observar, para o caso de estrela solar e $a_1 = 0.0516$ UA , a ocorrência de simulações com oscilação de σ_1 em função das razões. Nesse caso, cada razão no eixo horizontal está associada a um único mapa de amplitude de σ_1, que tem quadrantes de c.i angulares $(\sigma_1, \varpi_2 - \varpi_1) = [(0,0),(0,\pi),(\pi,\pi),(\pi,0)]$. Assim, na curva roxa superior, um percentual de 30% na razão de massas 3, por exemplo, indica que ocorre RMM em 30% das simulações do mapa dessa razão, com amplitudes de oscilação menores ou iguais a 150°. Também, como um mapa tem 10 mil simulações, 30% são 3000 simulações. As outras curvas coloridas, referentes a outros critérios de amplitude, devem ser interpretadas de maneira análoga à roxa.

Com esse tipo de gráfico, nota-se que, considerando apenas amplitudes de oscilação maiores (critérios de 50, 100 e 150 graus), existe um crescimento aproximadamente linear da ocorrência de RMM com o aumento da razão de massas, até razão próxima a 1. Para razões maiores que esse valor, o percentual de simulações em RMM tende a ser um valor constante, independente da razão de massas. Isso indica que, a ocorrência de RMM com amplitudes grandes se altera em função de razão de massas de forma significativa para razões baixas, mas, para razões maiores que 1, em geral, nenhuma razão é especialmente mais favorável que outra à dinâmica de RMM.

Já a ocorrência de simulações em RMM, com amplitudes baixas de ângulo crítico (critérios de 20, 10 e 5 graus), tem pico sobre razões de massas entre 1 e 1.5. O pico é global para as amplitudes

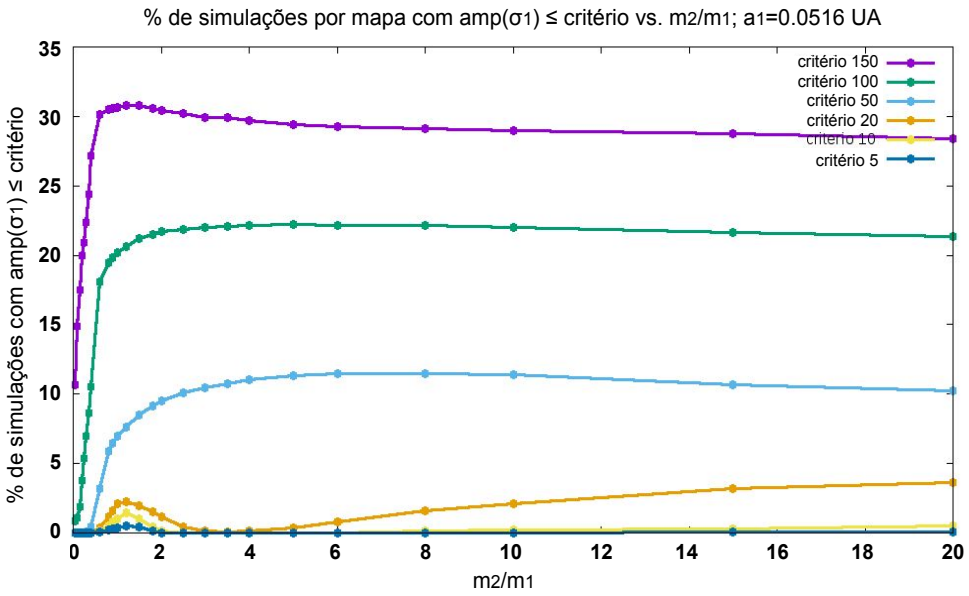


FIGURA 5.1. Percentual de simulações em RMM 2:1 vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA.

menores ou iguais a 10°. Apesar de o valor percentual do pico em si ser baixo, sugerindo poucas simulações com amplitudes baixas, ele ocorre sincronizadamente com a mudança de comportamento das simulações de amplitudes maiores. Isso sugere que há uma diferença no comportamento das soluções de sistemas ressonantes que têm razões maiores ou menores que a faixa de 1 a 1.5 e também indica que as menores amplitudes de ângulo crítico acontecem, preferencialmente, para os sistemas que estão dentro da faixa.

A Figura 5.2 mostra, também para estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA, a ocorrência de simulações com oscilação de $\Delta\varpi$ segundo diferentes critérios de amplitude, para todo o intervalo de razão de massas planetárias testado. No gráfico da Figura 5.2, cada razão está associada a um respectivo mapa de amplitude de $\Delta\varpi$, e um percentual de 65% na curva roxa em razão de massas aproximadamente igual a 1, por exemplo, indica que, no mapa de amplitudes de $\Delta\varpi$ dessa razão, 65% das simulações tiveram oscilação de $\Delta\varpi$ com amplitudes menores ou iguais a 150°.

Na Figura 5.2, é possível notar que a ocorrência de simulações com oscilação de $\Delta\varpi$ de maiores amplitudes (critérios de 150 e 100 graus) tem pico global que ocorre aproximadamente em razão de massas 1 e, à medida que se considera critérios de amplitudes menores, o pico das curvas de ocorrência se deslocam em direção a razões de massas menores. Em todos os casos, a partir de razão de massas 1.5, a ocorrência de oscilações de $\Delta\varpi$ decai continuamente para razões cada vez maiores e, considerando as simulações de mais baixas amplitudes (critérios de 10 e 5 graus), a ocorrência tende para 0 para razões iguais a 20 (e, extrapolando, também maiores que 20).

Considerando-se todas as curvas da Figura 5.2, qualquer razão de massas menor que 3 tem maior ocorrência de oscilação de $\Delta\varpi$ do que razões maiores que 3. Também, para os critérios de 20, 10 e 5 graus, existe um segundo pico de ocorrência de oscilação para razões de massas dentro da faixa de 1 a 1.5. Além disso, é possível notar que a ocorrência de oscilação de $\Delta\varpi$, para razões menores que 6, assume valores percentuais maiores que a ocorrência de oscilação de σ_1 nos mapas, indicada pela Figura 5.1. Isso sugere que, não havendo preferência por quadrantes angulares dos mapas (i.e. considerando todos os quadrantes igualmente possíveis), a oscilação do ângulo secular

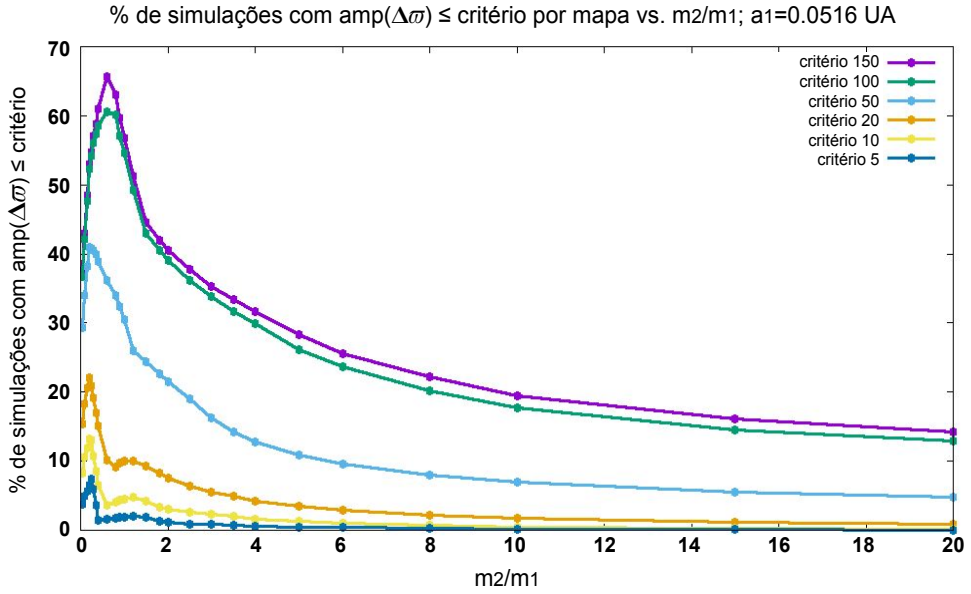


FIGURA 5.2. Percentual de simulações com oscilação de $\Delta\varpi$ vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA.

é mais frequente que a RMM dentre as simulações com razão de períodos orbitais 2 e razões de massas planetárias baixas. Para razões maiores que 6, porém, RMM é mais frequente.

Os picos de ocorrência mencionados são relevantes, porque, quando acontecem para a mesma faixa de razão de massas nas Figuras 5.1 e 5.2, promovem a ocorrência da dinâmica ACR, em que ambos os ângulos, σ_1 e $\Delta\varpi$, estão em regime oscilatório. Na Figura 5.3, é possível observar a ocorrência de ACR como função das razões de massas planetárias. Os critérios valem para σ_1 e $\Delta\varpi$ simultaneamente, ou seja, se, em uma simulação associada à razão X, a amplitude de σ_1 é 90° e a de $\Delta\varpi$ é 110°, a simulação satisfaz o apenas o critério de 150°, em que ambos os ângulos têm amplitudes menores ou iguais a 150°. Se, por exemplo, a amplitude de σ_1 é 5° e a de $\Delta\varpi$ é 15°, tal simulação satisfaz os critérios de 20, 50, 100 e 150 graus e, então, é contabilizada nas curvas percentuais desses quatro critérios.

A Figura 5.3 indica que, para razões de massas menores que 1, existe um pico de ocorrência de simulações com grandes amplitudes de ângulo crítico e/ou $\Delta\varpi$ (critério de 150°). Esse pico refere-se, de fato, a simulações de grandes amplitudes principalmente, porque as curvas dos critérios de amplitudes menores apresentam percentuais de ocorrência muito mais baixos nessa faixa de razões de massas. Portanto, há poucas simulações com ambos os ângulos σ_1 e $\Delta\varpi$ com amplitudes baixas nessa faixa de razões de massas, em comparação com a quantidade de simulações que têm algum desses ângulos oscilando com grandes amplitudes.

Ainda observando a curva do critério de 150°, nota-se que ela se sobrepõe àquela do critério de 100° para razões próximas a 2 e, a partir desse valor, aproximadamente, ambas as curvas decaem conforme a razão de massas aumenta, tendendo assintoticamente para 0% nas proximidades da razão 20. Para razões maiores que 10, as curvas dos critérios de 150, 100 e 50 graus se sobrepõem, e para razões maiores, estas também se sobrepõem às curvas dos critérios de 20, 10 e 5 graus. Isso significa que a ocorrência de simulações em ACR, a partir de razão 2, tende a diminuir nos mapas, de modo geral, à medida que a razão aumenta e as simulações com amplitudes de

oscilação maiores ficam menos frequentes, restando cada vez menos simulações em ACR e, estas, apresentando amplitudes cada vez mais baixas de σ_1 e de $\Delta\varpi$ simultaneamente.

Outra informação da Figura 5.3 é que existe um pico de ocorrência de ACR com amplitudes menores que 100° para razões de massas entre 1 e 2. Esse pico condiz com os picos de ocorrência de RMM e de oscilação de $\Delta\varpi$ existentes nessa faixa de razões, observados nas Figuras 5.1 e 5.2. O pico de ACR é especialmente bem marcado para os casos de amplitudes menores (critérios de 20, 10 e 5 graus) e ocorre em razão 1.2. Isso indica que razões próximas a 1.2 promovem e concentram a ocorrência de simulações em ACR 2:1 de baixas amplitudes nos mapas dinâmicos gerados. E mesmo as simulações com amplitudes maiores, que obedecem os critérios de 50 e 100 graus, também têm a dinâmica ACR favorecida dentro da faixa de razões de massas entre 1 e 2, em comparação com o restante do intervalo de razões testado.

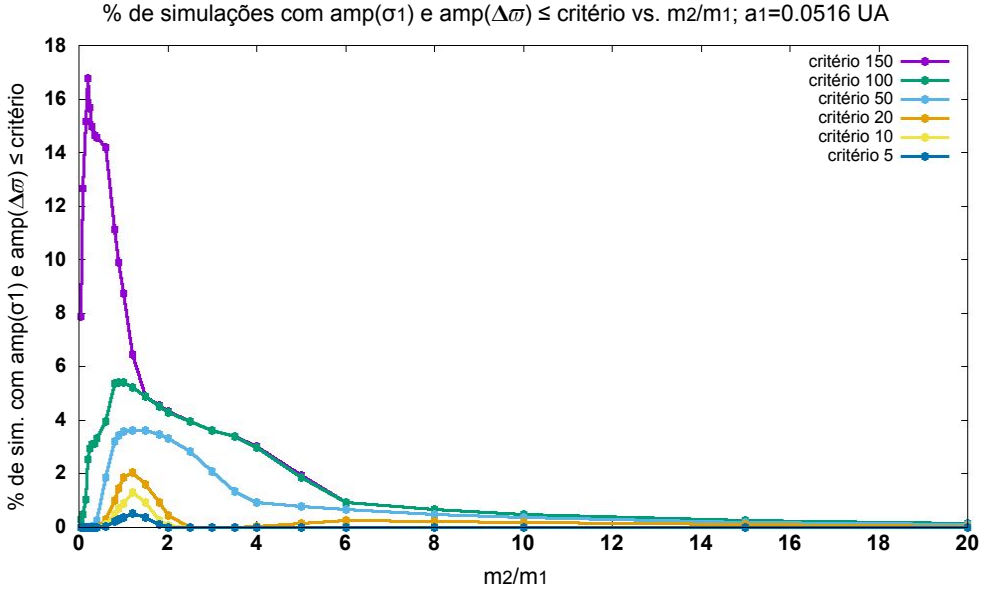


FIGURA 5.3. Percentual de simulações em ACR vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA.

Os valores percentuais da Figura 5.3 são calculados sobre o valor 10 mil, que corresponde ao número de simulações em um mapa de uma razão de massas específica. É possível construir, também, um outro gráfico, em que o percentual de ocorrência de ACR em cada razão de massas é calculado sobre o total de simulações realizadas, que satisfizeram um critério de ACR. Esse gráfico é apresentado na Figura 5.4.

Para exemplificar o que são os percentuais na Figura 5.4: foram testadas 26 razões de massas para o caso estrela solar e $a_1 = 0.0516$ UA, e cada razão corresponde a 10 mil simulações; assim, considerando todas as razões, existe um total de 260 mil simulações. Dentro das 260 mil, 198 tiveram ACR com amplitudes de σ_1 e $\Delta\varpi$ simultaneamente menores ou iguais a 5°, 480 com amplitudes menores ou iguais a 10°, 1069 com amplitudes menores ou iguais a 20°, 3632 com amplitudes menores ou iguais a 50°, 7425 com amplitudes menores ou iguais a 100° e 19503 com amplitudes menores que 150°.

Observando a Figura 5.4, considerando o total de 198 simulações com ACR de amplitudes menores ou iguais a 5° (curva azul escura, critério de 5°), cerca de 25% das 198 ocorreram para razão de massas 1.2. A utilidade desse tipo de gráfico está na identificação dos valores de razão de

massas que promovem a dinâmica ACR especialmente, considerando as diferentes amplitudes de oscilação de ângulos. As linhas verticais na Figura 5.4 foram traçadas com base em somatórios de porcentagem, calculados a partir dos resultados das simulações.

Percebe-se que 90% das simulações com ACR de amplitudes baixas (critérios de 5 e 10 graus) acontecem para razões de massas planetárias menores que 1.5. Para amplitudes que obedecem os critérios de 20 e 50 graus (o que inclui os casos das baixas amplitudes), 90% das simulações com ACR se concentram nas razões de massas menores que 2.5 e, considerando os critérios para maiores amplitudes (critérios de 100 e 150 graus), 90% das simulações com ACR ocorrem para razões de massas menores que 4. Esse resultado indica que razões de massas menores que 4 estão associadas à grande maioria das simulações em que ocorre ACR, para quaisquer amplitudes. Além disso, as ACR de amplitudes mais baixas acontecem preferencialmente para razões mais baixas, como as menores que 2.5 ou 1.5.

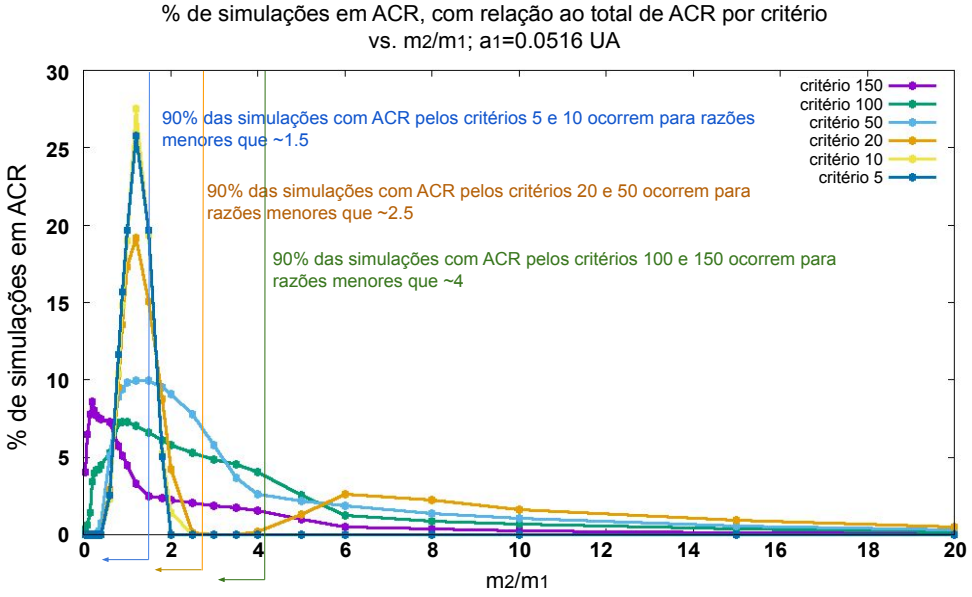


FIGURA 5.4. Percentual de simulações em ACR, considerando os totais de ocorrência de ACR de diferentes critérios de amplitude vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA.

A Figura 5.5, por sua vez, mostra a ocorrência de circulações de σ_1 e de $\Delta\varpi$ nos mapas gerados para cada razões de massas e também mostra o percentual de simulações em que houve colisões entre quaisquer corpos do sistema ou ejeção de objetos (i.e. quando estes assumem distâncias ao corpo central maiores que 100 UA). As colisões são do tipo planeta-planeta ou acontecem entre algum planeta e a estrela, e as circulações foram contabilizadas por meio das simulações que tiveram "amplitudes" maiores ou iguais a 178°. Os percentuais são calculados sobre o valor 10 mil, que é a quantidade de simulações em um mapa de determinada razão.

As "amplitudes" de 178° ou mais não são de fato amplitudes, porque representam circulações de ângulo. Devido à lógica da programação utilizada, e ao fato de que os resultados das simulações são valores discretos e não curvas contínuas de evolução temporal moduladas entre 0° e 360°, foi preciso definir um valor de "amplitude" para implementar um critério de circulação e realizar a contagem de simulações que obedecem tal critério. Dessa forma, os percentuais de simulações com circulação de σ_1 nos mapas de cada razão não são simplesmente 100% menos o percentual de simulações com amplitudes maiores que 150°, apresentados na Figura 5.1, mas um valor percentual ligeiramente mais baixo que essa diferença. Pois, por exemplo, simulações com amplitudes de 170°

não foram contadas nem como oscilações segundo os critérios de oscilação (de 5, 10, 20, 50, 100 e 150 graus) nem como circulações.

Mesmo assim, a Figura 5.5 indica que a quantidade de circulações de σ_1 e de $\Delta\varpi$ nos mapas de diferentes razões tem o comportamento oposto às curvas de ocorrência de oscilação com amplitudes grandes, vistas anteriormente. Assim, a menor quantidade de circulações de σ_1 ocorre próximo à razão de massas 1, quando se tem a maior quantidade de simulações com oscilação de σ_1 nos mapas. E a menor quantidade de circulações de $\Delta\varpi$ ocorre também próximo à razão 1, quando há um pico de ocorrência de oscilações desse ângulo. Esse resultado já era esperado, uma vez que as regiões de oscilação e as de circulação são, quase, opostos complementares nos mapas gerados. O que traz informação nova, porém, é a curva de ocorrência de colisões e ejeções, chamada curva de instabilidades, representada em azul claro.

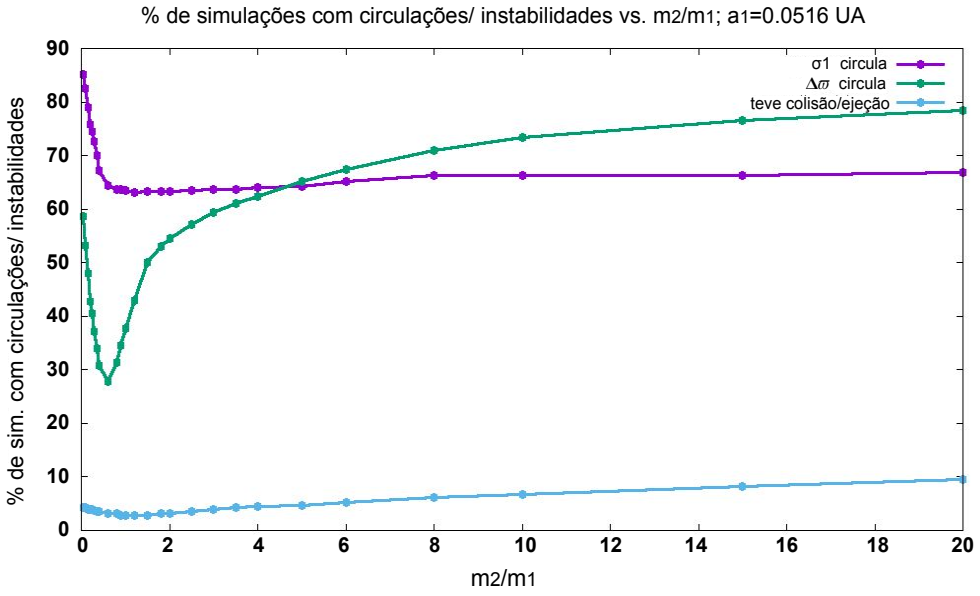


FIGURA 5.5. Percentual de simulações com circulações de ângulos e instabilidades vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA.

Um *zoom* da curva de instabilidades é mostrado na Figura 5.6. Nesse caso, é possível observar que a menor ocorrência de simulações instáveis em mapas acontece na faixa de razões de massas entre 1 e 1.5, o mesmo intervalo de razões em que há uma mudança nas curvas de ocorrência de RMM e uma promoção da ocorrência de simulações com dinâmica de ACR 2:1. Dessa maneira, é possível concluir que tal intervalo de razões de massas planetárias não só é favorável à ACR, mas também promove a estabilidade das simulações de modo geral.

Também é possível notar que as instabilidades aumentam à medida que o valor das razões de massas cresce e, portanto, razões grandes (já maiores que 10, por exemplo) não só desfavorecem a dinâmica ACR, como argumentado antes, mas também promovem instabilidades na dinâmica de sistemas próximos à RMM 2:1.

É importante ressaltar que as interpretações estão sendo feitas *de modo geral*, ou seja, um sistema específico com razão de períodos 2, com determinados valores de excentricidades e de ângulos iniciais, não necessariamente terá sua estabilidade prejudicada, caso tenha razões de massas 20, por exemplo. Também, não necessariamente apresentará dinâmica estável, nem RMM/ACR,

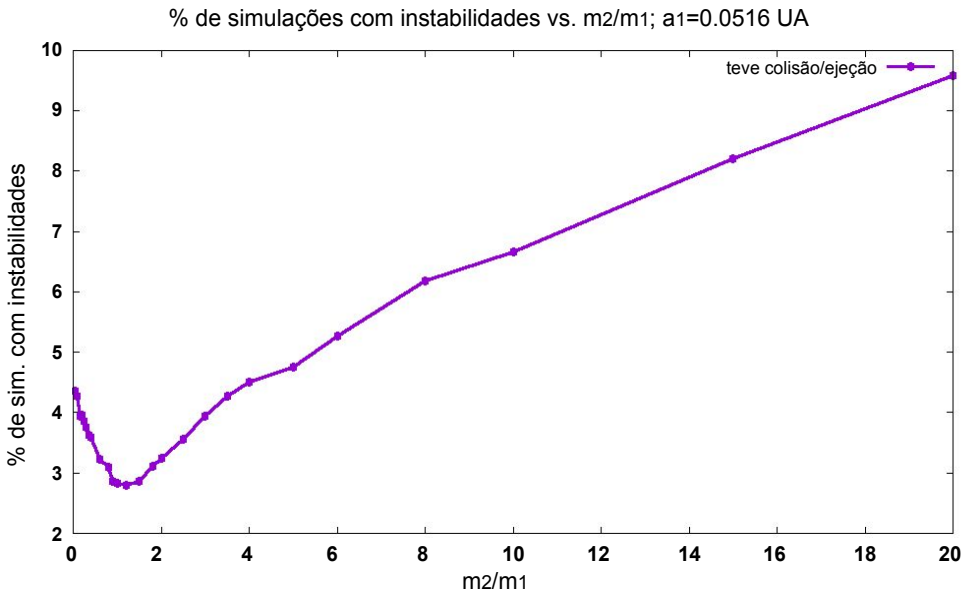


FIGURA 5.6. Percentual de simulações com instabilidades vs. Razões de massas planetárias. Estrela de massa solar e $a_1 = 0.0516$ UA.

se tiver razão de massas entre 1 e 2. Os resultados apresentados mostram apenas o comportamento geral das simulações realizadas.

No entanto, se não houver certeza quanto às condições angulares de um sistema, se sua razão de massas for conhecida e suas excentricidades forem menores que 0.3, como as simuladas neste trabalho, então, com ajuda dos resultados, é possível *estimar*, sem realizar novas simulações, qual tipo de dinâmica é mais (ou menos) condizente com as características de tal sistema.

Por exemplo, é preciso ter bons motivos para argumentar que um sistema de razão maior que 10 tem dinâmica ACR, já que as chances de isso ocorrer, segundo as simulações, é extremamente baixa e, também, é preciso considerar que, se existe ACR, provavelmente é de baixas amplitudes, como indica a Figura 5.3. A estimativa pode ser auxiliada, também, pela marcação do sistema como um ponto nos mapas associados à razão de massas mais adequada, apresentados na próxima seção.

Os gráficos apresentados até o momento foram, todos, para o caso de estrela de massa solar e planeta interno com semi-eixo maior inicial $a_1 = 0.0516$ UA. A fim de observar se os resultados variam conforme se utiliza massas individuais distintas para uma mesma razão de massas planetárias e, também, diferentes posições de a_1, foram simulados os casos de estrela solar e $a_1 = 0.0516$ UA, $a_1 = 0.5$ UA e $a_1 = 1$ UA, como explicados em Metodologia. A Figura 5.7 mostra o que se obteve de tais simulações.

Nessa Figura, existem três colunas, referentes às três posições de a_1, respectivamente. Na primeira linha, estão os gráficos de percentual de ocorrência de RMM segundo os diferentes critérios; na segunda linha, os de ocorrência de oscilação de $\Delta\varpi$; e, na terceira linha, os de ocorrência de ACR como função das razões de massas. Na quarta linha estão gráficos, cujos percentuais foram calculados sobre o valor total de simulações em ACR segundo os critérios de amplitude estabelecidos. Esses gráficos foram construídos de maneira análoga à Figura 5.4, já explicada. E, enfim, na quinta linha da Figura 5.7, estão os gráficos de ocorrência de circulações e instabilidades.

Nota-se que os resultados obtidos são bastante semelhantes, não importando os semi-eixos maiores das órbitas dos dois planetas. Os casos de $a_1 = 0.5$ UA e $a_1 = 1$ UA são os mais parecidos entre si, embora tenham valores de massas individuais diferentes para as mesmas razões de massas planetárias, indicando que, de fato, há dependência forte das ocorrências com as razões e não com massas individuais. A maior diferença no aspecto das curvas de ocorrência está entre o caso de $a_1 = 0.0516$ UA e os outros. Para as mesmas razões de massas, ocorre mais simulações com oscilação de $\Delta\varpi$ para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e também há maior ocorrência de dinâmica ACR de grandes amplitudes para esse caso, em comparação com os outros.

Existe, portanto, variação das soluções ACR de maiores amplitudes dependendo da distância do planeta interno à estrela (i.e. da escala do sistema). Mas, observando apenas as simulações em ACR com baixas amplitudes de oscilação (critérios de 5, 10, 20 graus), os resultados são bastante semelhantes para os três posicionamentos testados e os picos de ocorrência de ACR de menor amplitude (critério de 5°) está sempre na razão de massas 1.2.

Essas simulações com ACR de baixas amplitudes são os casos mais próximos das soluções exatas (amplitudes nulas) apresentadas por Beaugé et al. (2006). O autores dessa referência concluíram não haver variação dos resultados teóricos de ACR 2:1 exata dependendo da distância do planeta interno à estrela, e esse comportamento se reproduziu, pelo menos aproximadamente para os casos de menor amplitude, nos resultados numéricos deste trabalho. A concentração de ocorrência de simulações em ACR simétricas (alinhadas e anti-alinhadas) na razão de massas 1.2 especificamente, porém, parece ser um resultado novo, ausente na literatura atual.

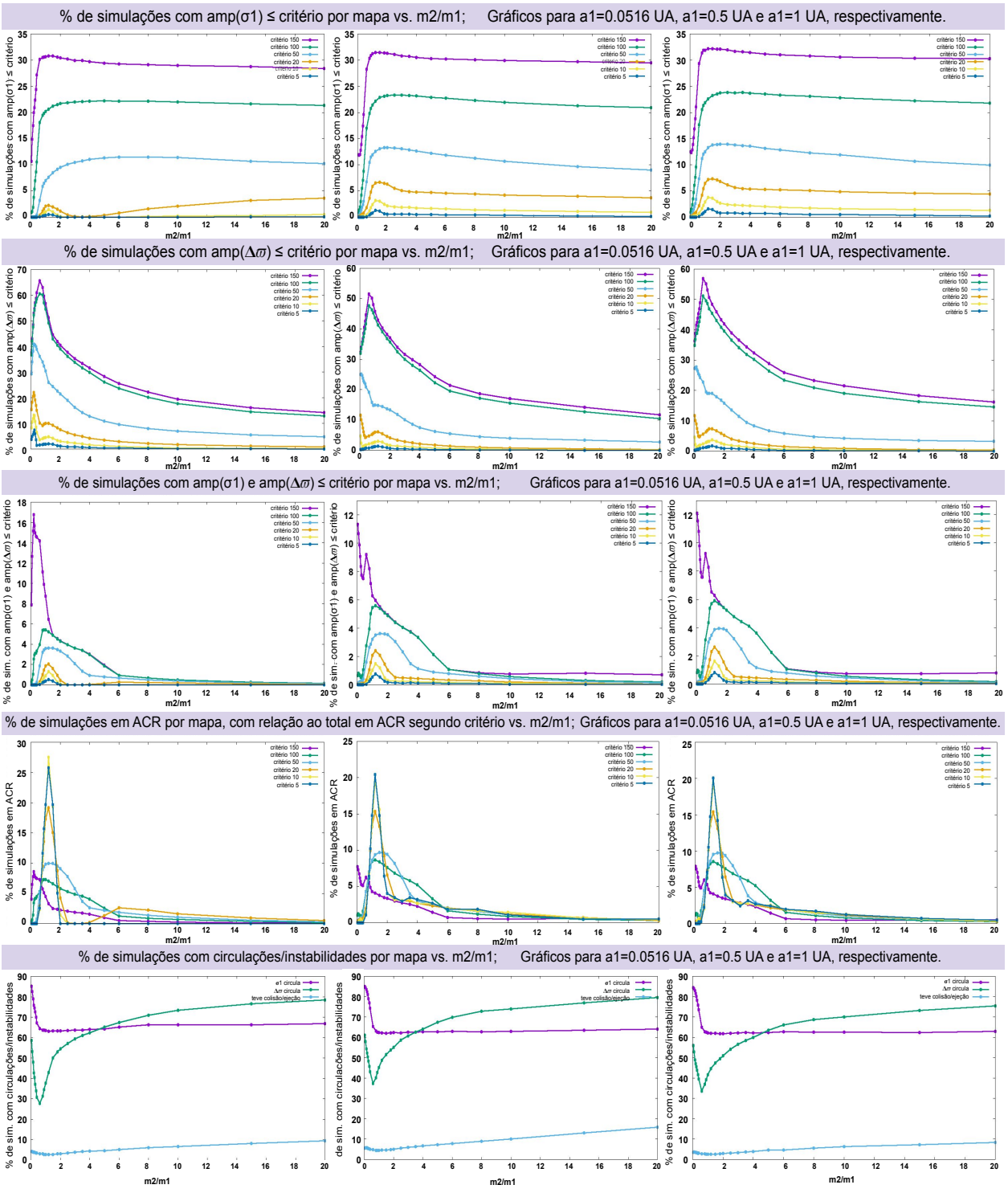


FIGURA 5.7. Gráficos de percentuais de ocorrência em função de razões de massas planetárias. Estrela de massa solar. A coluna de gráficos à esquerda refere-se à posição inicial $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio a $a_1 = 0.5$ UA e à direita a $a_1 = 1$ UA.

5.2 Análise e Aspecto de Mapas Dinâmicos

Os gráficos de percentuais de ocorrência apresentados anteriormente foram gerados a partir das simulações que constituem os mapas dinâmicos de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR em diferentes razões de massas planetárias. Todos esses mapas gerados podem ser observados adiante nesta seção, nas Figuras 5.8 até 5.31. Vale conferir a forma deles antes de seguir com o texto.

Nas Figuras 5.8 a 5.13, são mostrados os mapas de amplitude de ângulo crítico da RMM 2:1 simétrica. Cada linha se refere a uma razão de massas específica e há três colunas de mapas. As colunas têm as posições de planeta interno, a_1, iguais a 0.0516, 0.5 e 1 UA, respectivamente, e as simulações são para estrela solar. Nos gráficos de percentuais de ocorrência da seção anterior, foi possível identificar a evolução dos percentuais de RMM em função das razões de massas. Já com mapas em si, pode-se observar em quais regiões do plano de excentricidades e ângulos de equilíbrio acontecem as oscilações de diferentes amplitudes, circulações e instabilidades.

É evidente nos mapas que, para todas as razões, os casos de a_1 igual a 0.5 e 1 UA evoluem da mesma forma e o caso mais próximo da estrela, com $a_1 = 0.0516$ UA, assemelha-se aos outros casos mais pela evolução dos quadrantes (0,0) e (π, π). Em todos os casos de a_1 e para todas as razões testadas, não há RMM no quadrante (π,0). Também, é possível notar que, a partir de razão 0.9 e para todos a_1, as regiões de RMM não mudam mais significativamente de forma e de localização nos mapas.

Além disso, na evolução dos mapas, as regiões de RMM com razões de massas baixas, menores que 0.25, se concentram no quadrante de ângulos (0,π) e em valores de excentricidade e_2 mais altos. À medida que a razão de massas aumenta, as regiões de RMM "avançam" para as baixas excentricidades de e_1 e e_2, inclusive emergindo no quadrante (0,0). As regiões de RMM passam, então, a existir e evoluir como função da razão de massas, especialmente, dentro dos quadrantes (0,π) e (0,0).

Também, nos quadrantes (0,0) e (0,π), pode-se notar que, para razões baixas, ocorrem mais oscilações de grandes amplitudes e as de menor amplitude começam a surgir no interior das regiões de amplitudes maiores, à medida que a razão de massas aumenta. Pela escala de cor, é difícil distinguir, nos mapas de amplitude de σ_1, a existência das amplitudes menores que 10°, que apareceram nas contagens percentuais aumentando em quantidade até razões entre 1 e 1.5 e diminuindo para razões maiores que essa faixa de valores. Mas, é possível identificar, nesses mapas, que as menores amplitudes nos quadrantes (0,0) e (0,π) ocorrem para excentricidades do planeta externo, em geral, menores que 0.1. Nos mapas de regiões de ACR, que serão comentados adiante, é possível localizar as simulações com amplitudes menores que 10°.

Voltando para os mapas de amplitude de σ_1, da razão 0.6 em diante, nota-se que a RMM nos quadrantes (0,0) e (0,π) pode acontecer para todos os valores de excentricidade do planeta interno entre 0 a 0.3, mas não para todas as do planeta externo. Para excentricidades de planeta interno cada vez maiores, pode ocorrer RMM com valores de e_2 também cada vez maiores, chegando aproximadamente até $e_2 = 0.25$.

Outro aspecto percebido é que, a partir de razão 0.3, surgem simulações em RMM no quadrante (π, π) para valores de excentricidade que estão acima de uma faixa de instabilidades bem

marcada, dentro da qual ocorre cruzamento de órbitas. As instabilidades (i.e colisões e ejeções) se concentram especialmente nesse quadrante e a evolução dele com o aumento da razão de massas é independente da distância dos planetas à estrela. Observando a evolução de uma coluna de mapas qualquer, é possível identificar a faixa de instabilidades diminuindo de espessura até razões próximas de 1 e, então, aumentando de espessura para razões cada vez maiores, como foi indicado anteriormente pelas curvas de percentuais. Para uma mesma razão de massas, porém, a espessura da faixa pode ser levemente diferente entre os casos de diferentes a_1.

Como comentado em Literatura, Beaugé et al. (2006) sugere que o tamanho da faixa de instabilidades pode ser estudado utilizando um critério de estabilidade de Hill, em que se define uma distância mínima entre os objetos, a partir da qual já se prevê a ocorrência de instabilidades. Neste projeto, não se usou critério de Hill, então, é possível que a faixa de instabilidades seja maior do que a que aparece nos mapas. Beaugé et al. (2006) também comenta que, pela teoria, soluções de RMM próximas à reta de cruzamento de órbitas só são viáveis para massas individuais baixas e que, para massas maiores, não há soluções estáveis nessa região. Nos mapas numéricos, para uma mesma razão, um mapa de $a_1 = 0.5$ UA tem massas individuais maiores que o caso $a_1 = 1$ UA e pode-se notar, em concordância com a teoria, que a faixa de instabilidades no caso de maiores massas individuais é sempre maior que no caso de menores, para todas as razões de massas planetárias testadas.

Os mapas de amplitude de σ_1 mostram que a localização de simulações em RMM 2:1 simétricas não cobrem toda a área dos mapas e, dependendo da razão de massas planetárias, elas existem para pares de valores de excentricidade e ângulos de equilíbrio específicos. Vale comentar que, para razões menores que 1, como afirmado por Michtchenko et al. (2008b), também é possível que σ_2 oscile para a RMM 2:1 simétrica. Então, podem existir novas regiões de oscilação de ângulo crítico em eventuais mapas de amplitude de σ_2. Por fim, os mapas de amplitude de σ_1 para estrela solar também sugerem que a evolução das regiões de RMM como função da razão de massas segue um padrão aparentemente independente de a_1, exceto para o caso de razões de massas baixas em maior proximidade com a estrela ($a_1 = 0.0516$ UA).

As Figuras 5.14 a 5.19 mostram os mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ para as mesmas simulações que constituíram os mapas de amplitude de σ_1. É possível notar que os casos de a_1 igual 0.5 e 1 UA têm regiões de oscilação de $\Delta\varpi$ semelhantes, que, novamente, evoluem da mesma maneira como função da razão de massas. O caso $a_1 = 0.0516$ UA se distingue destes dois, especialmente, pela evolução da região de oscilação no quadrante $(0,\pi)$ em razões baixas, de 0.05 a 0.4.

Pode-se observar, também, que não ocorre oscilação de $\Delta\varpi$ no quadrante $(0,\pi)$ para razões de 1.8 a 5 e isso vale para qualquer posição de a_1. Mas, da razão 6 em diante, podem ocorrer oscilações de $\Delta\varpi$ para valores de excentricidades e_1 e e_2 mais altos, com e_2, no geral, maior que 0.2. Além disso, percebe-se que, diferentemente dos mapas de regiões de RMM comentados anteriormente, há oscilação de $\Delta\varpi$ no quadrante $(\pi,0)$ para todas as razões de massas testadas e que, assim como para os demais quadrantes, há uma maior ocorrência de simulações com amplitudes menores (cor azul mais forte) para razões baixas. À medida que a razão se aproxima de valores mais altos como aqueles entre 10 e 20, as regiões de oscilação de $\Delta\varpi$ diminuem e os valores de excentricidades associados à oscilação ficam mais limitados.

É possível notar ainda, a partir da razão de massas planetárias 0.3, o crescimento de uma região de oscilação no quadrante (0,0) em valores de e_2 baixos (menores que 0.05) e e_1 maior que

0.1. Com o aumento da razão de massas, essa região cresce, alcançando valores maiores de e_1, que chega a 0.3, e de e_2, que pode valer até pouco menos que 0.2 quando e_1 é 0.3.

Também, cresce no interior dessa região uma faixa central com amplitudes baixas. No caso $a_1 = 0.0516$ UA, a faixa alcança $e_1 = 0.3$ na razão de massas 0.8 e, nos outros casos de a_1, em razão 1. Mais ainda, essa mesma faixa se aproxima cada vez mais de valores de e_2 menores, à medida que a razão de massas aumenta. Esse comportamento é relevante, porque uma região de oscilação no quadrante (0,0) em e_2 baixos também existe nos mapas de amplitude de σ_1 para razões próximas de 1 ou maiores. Dessa forma, a faixa de baixas amplitudes também se manifesta nos mapas numéricos de regiões de ACR comentados mais adiante.

No quadrante (π, π) dos mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ com razão 6, independentemente de a_1, ocorre oscilação de $\Delta\varpi$ para e_1 maior que 0.05 até 0.3, com e_2 podendo assumir valores entre 0 e 0.1. Essa região de oscilação "triangular" também tem uma faixa central de baixas amplitudes e, à medida que a razão de massas aumenta, os valores de e_2 possíveis diminuem, os valores mínimos de e_1 da região aumentam e a faixa de baixas amplitudes se aproxima de e_2 cada vez menores.

Nos mapas de amplitude de σ_1, foi visto que só há RMM no quadrante (π, π) para excentricidades que estão acima de uma faixa de instabilidades. Essa mesma região do quadrante possui oscilação de $\Delta\varpi$ com razões de massas de 0.3 a 5. Assim, nos mapas de regiões ACR, essa é a única região do quadrante (π, π) capaz de produzir ACR simétrica com oscilação de σ_1. Por fim, o quadrante $(\pi,0)$ não é capaz de produzir esse tipo de ACR, pois não há oscilação de σ_1 para nenhuma razão de massas.

As Figuras 5.20 a 5.25 mostram os mapas de regiões de ACR para as diferentes razões de massas e estrela solar. As cores nos mapas indicam os diferentes critérios simultâneos de amplitude de oscilação de σ_1 e de $\Delta\varpi$. Em amarelo, estão as simulações que têm σ_1 e $\Delta\varpi$ com amplitudes menores ou iguais a 150°. Se as simulações satisfizerem um critério de amplitudes mais baixo, como o de 100°, passam a ser coloridas de verde, ao invés de amarelo. Se tiverem amplitudes menores ou iguais a 50°, se tornam *cyan*; se tiverem amplitudes menores ou iguais a 20°, se tornam azul; menores ou iguais a 10° se tornam azul escuro e menores ou iguais a 5° se tornam preto. Em cinza, estão as regiões que não satisfazem nenhum critério de amplitude, então, são assumidas como regiões nas quais não ocorre ACR. E, em branco estão, novamente, as simulações com instabilidades.

Como os mapas de amplitude de σ_1 e de $\Delta\varpi$ são muito parecidos para os casos de a_1 igual a 0.5 e 1 UA para as mesmas razões de massas, essa semelhança se reflete nos mapas de ACR para esses a_1. Mas, para as três posições de a_1, para razões de 0.05 a 0.25, só ocorre ACR no quadrante $(0,\pi)$ e prevalecem as amplitudes altas (critérios de 150° e de 100°). Para $a_1 = 0.0516$ UA, de fato, só ocorrem amplitudes elevadas, mas para a_1 igual a 0.5 e 1 UA, desde razão de massas 0.05 até razão 0.6, existem simulações com amplitude de σ_1 e de $\Delta\varpi$ menores ou iguais a 20° para determinados pares de excentricidades.

Em razão de massas 0.3, nas três posições de a_1, começa a surgir uma região de ACR simétrica no quadrante (0,0), que parte de $e_1 = 0.1$ e tem amplitudes altas, obedecendo o critério de 150°. Essa região de ACR cresce para valores de e_1 e e_2 mais elevados, à medida que a razão de massas aumenta, e começa a apresentar uma faixa de mais baixas amplitudes em seu interior, menores que 50°. Em razão 0.8, a região de ACR do quadrante (0,0) já cobre valores de e_2 de 0 a 0.2

nas três posições de a_1. A faixa central de baixas amplitudes desce como um todo para valores de e_2 menores, quando a razão de massas aumenta, e isso está em acordo com o modelo teórico de Beaugé et al. (2006). No modelo de Beaugé et al. (2006), as curvas de solução teóricas são para ACR exatas, de amplitudes nulas devido ao Hamiltoniano ressonante ponderado, mas, nos mapas numéricos deste projeto, aparecem curvas de solução com baixas amplitudes no lugar das de amplitudes nulas, como era de se esperar no problema não ponderado, também segundo Beaugé et al. (2006).

Um comportamento percebido é que, no quadrante (0,0), desde razão 0.6, já ocorre ACR sob o critério de 10° para os casos de a_1 igual a 0.5 e 1 UA. Mas, para $a_1 = 0.0516$ UA, só existem simulações com amplitudes tão baixas nesse quadrante a partir de razão 4. Também, no caso de a_1 igual a 0.5 e 1 UA, a faixa de simulações com amplitudes menores que 10° surge primeiro para valores de e_1 menores, a partir de 0.1 aproximadamente e, à medida que a razão de massas aumenta, existe para valores de e_1 maiores. Já no caso de $a_1 = 0.0516$ UA, as simulações com ACR sob o critério de 10° surgem em razão 4 para valores de e_1 próximos a 0.3 e, à medida que a razão de massas aumenta, a faixa de menores amplitudes avança para valores de e_1 menores e então, também como nos casos de a_1 igual a 0.5 e 1 UA, desce como um todo para valores de e_2 menores.

A partir de razão 0.3, no quadrante (π, π), começa surgir uma região de ACR com amplitudes menores ou iguais a 100°, para excentricidades acima da faixa de instabilidades. Existe ACR acima dessa faixa até na razão de massas 5. Também, a partir de razão 0.6, começa a surgir uma faixa de simulações com oscilações de amplitudes baixas, menores que 5°, que se sobressaem em razão 1.2. As simulações em ACR de baixas amplitudes nesse quadrante, em união com aquelas do quadrante (0,0), são responsáveis pelo pico de ocorrência de ACR de amplitudes menores que 5° em razão 1.2, visto anteriormente nos gráficos de percentual de ocorrência.

Outro comportamento observado nos mapas de regiões de ACR é que, a partir de razão 1.5, praticamente não ocorre mais ACR com amplitudes entre 100 e 150 graus, pois não há mais simulações que obedecem o critério de 150°, mas há aquelas que obedecem o de 100°. Para razões de massas maiores que 10, no entanto, ocorre ACR de amplitudes mais elevadas no quadrante (0,π) para excentricidades altas em a_1 igual a 0.5 e 1 UA, mas não para o a_1 mais próximo da estrela.

Percebe-se que, nos mapas de regiões de ACR, a evolução no quadrante (π, π) em função da razão de massas é sempre a mesma. Em todas as razões e valores de a_1, não ocorre ACR simétrica no quadrante (π,0), pois não ocorre oscilação de σ_1. Além disso, considerando-se os quadrantes (0,0) e (0,π), a partir de razão 1.8, existem praticamente as mesmas regiões de ACR com amplitudes menores ou iguais a 50° e menores ou iguais a 100°. E, a partir de razão 6 até 20, existe também sempre as mesmas regiões de ACR com amplitudes menores ou iguais a 20 graus, independentemente da posição dos planetas com relação à estrela, embora isso não ocorra para os critérios de 10° e de 5°.

Conclui-se, portanto, que a evolução dos mapas de região ACR com a razão de massas pode mudar em função de a_1 nos quadrantes (0,0) e (0,π), especialmente, nas razões de massas planetárias baixas e, também, no que se refere à ocorrência das menores amplitudes de oscilação de σ_1 e de $\Delta\varpi$ (critérios de 10° e 5°). Isso parece contradizer os gráficos de percentuais de ocorrência de ACR, os quais indicam que as curvas dos critérios de 10 e 5° são semelhantes independentemente de a_1 e com pico em razão 1.2. Nos mapas, no entanto, é possível ver que a semelhança de curvas

de ocorrência se deve à contagem de simulações de baixas amplitudes no quadrante (π, π), pois, nos quadrantes (0,0) e (0,π), não ocorrem simulações sob os critérios de 10 ou 5° para $a_1 = 0.0516$ UA, embora elas ocorram para os outros a_1.

No quadrante (0,0), as regiões de ACR só existem a partir da razão 0.3 e, nesse quadrante, para razões maiores, é possível observar que o centro das faixas de menores amplitudes nos mapas de uma mesma razão estão sempre no mesmo lugar. Este é o local esperado para curvas de soluções exatas teóricas. O quadrante (π, π), por sua vez, evolui com a razão de massas obedecendo um mesmo padrão, independente de a_1 e, também nese quadrante, as faixas de amplitudes baixas são bem marcadas, indicando onde devem estar as soluções exatas teóricas de qualquer modelo aproximado.

Na Figura 2.8, foram apresentadas as previsões teóricas de Beaugé et al. (2006) para a localização das soluções de ACR exatas de diferentes razões de massas planetárias. Infelizmente, não foi possível sobrepor as curvas teóricas nos resultados numéricos deste projeto, porém, é possível notar aspectos em concordância nesses dois trabalhos.

No quadrante (0,0), o modelo teórico de Beaugé et al. (2006) prevê que existem curvas de ACR exatas para razões maiores que 0.45 e que deve existir curva para razão 20 em valores de e_2 próximos de 0. Segundo o modelo, todas as curvas desse quadrante se iniciam em $e_1 = 0.1$ e ocupam uma região aproximadamente triangular, considerando as excentricidades limitadas pelo valor 0.3.

Também se prevê que, à medida que a razão de massas aumenta, a curva de solução exata se "deita" sobre valores de e_2 menores e que as curvas de ACR simétricas de razão menor que 1 partem de $e_1 = 0.1$ como as de razão 1, mas são mais "curtas" que estas e, então, a curva de razão 1 existe para e_1 próximo a 0.3 e e_2 menor que 0.1, mas as curvas de razões menores não chegam a essas excentricidades. Todos esses comportamentos também podem ser observados nos mapas numéricos de regiões de ACR, nas curvas de menores amplitudes (critérios de 10° e de 5°) nos casos $a_1 = 0.5$ e $a_1 = 1$ UA.

No quadrante (0,π), o modelo de Beaugé et al. (2006) prevê que as curvas de solução ACR exata estão nas regiões de baixas excentricidades, ou seja, perto da origem do quadrante; que existem curvas para razões entre 0.1 e 0.4; e que as curvas se aproximam de valores de e_2 menores e se "esticam" sobre valores de e_1 maiores (até 0.1), conforme a razão de massas aumenta e se aproxima de 0.4. No quadrante (π, π), o modelo prevê que as soluções estão além da reta de cruzamento de órbitas; que, para excentricidades restritas ao valor máximo de 0.3, as soluções exatas existem para razões de massas entre 0.5 e 1.5, aproximadamente; e que as curvas existentes se deslocam de valores de e_1 menores para maiores, à medida que a razão de massas aumenta.

Ainda, o modelo prevê que não há curvas de solução ACR para o quadrante (π,0). Todos esses comportamentos também são percebidos, pelo menos aproximadamente, nas simulações de menor amplitude (critério de 5°) que aparecem nos mapas numéricos de $a_1 = 0.5$ e $a_1 = 1$ UA. Além disso, Michtchenko et al. (2008a), Michtchenko et al. (2008b) e Beaugé et al. (2006) comentaram que razões de massas altas não favorecem a dinâmica ACR nos quadrantes (0,0) e (0,π) devido à circulação de $\Delta\varpi$ e isso foi observado nos mapas numéricos, à medida que se aproximou de razão 20.

E um último aspecto observado nos mapas de estrela solar é que os casos de a_1 igual a 0.5 e 1 UA, apesar de terem massas planetárias individuais diferentes para uma mesma razão de massas, têm as mesmas regiões de ACR para baixas excentricidades nos quadrantes (0,π) e (0,0). Isso indica que, embora uma lei de estrutura possa desviar a posição das soluções ACR em função de massas individuais, esse efeito não se mostrou significativo nos mapas gerados.

As Figuras 5.26 a 5.31 são mapas de amplitude de oscilação de σ_1, de oscilação de $\Delta\varpi$ e de regiões ACR para o caso de estrela com $0.5M_\odot$, $a_1 = 0.0516$ UA e as mesmas razões de massas que foram testadas no caso de estrela solar. É evidente que os mapas são muito semelhantes ao caso solar com $a_1 = 0.0516$ UA e, portanto, a evolução das regiões de RMM, de oscilação de $\Delta\varpi$ e de ACR em função das razões de massas não são significativamente modificadas pela alteração de massa estelar, embora possam ser pela distância do planeta interno à estrela (i.e. o valor de a_1), no caso de razões baixas.

Nas Figuras 5.26 a 5.31, fica mais fácil identificar a concordância entre os mapas de regiões ACR e os outros dois tipos de mapas. É possível perceber quais valores de excentricidades e de ângulos de equilíbrio estão associados à oscilações e qual ângulo, σ_1 ou $\Delta\varpi$, tem maior amplitude em determinado ponto do mapa, fazendo com que um critério de menor ou maior amplitude de oscilação se manifeste nos mapas de ACR no mesmo ponto.

Nota-se, por exemplo, que, no quadrante (0,0), o crescimento da faixa de ACR de menores amplitudes de oscilação se dá, especialmente, por causa do crescimento de uma faixa de baixas amplitudes de oscilação nos mapas de amplitude de $\Delta\varpi$. Também se nota que, embora a faixa de menores amplitudes avance de valores menores de e_1 para maiores, quando a razão de massas aumenta nos mapas de $\Delta\varpi$, existe oscilação com baixas amplitudes nos mapas de RMM em valores de e_1 maiores, já próximos de 0.3.

Esses dois comportamentos, quando combinados, é que determinam se a faixa de baixas amplitudes, nos mapas de ACR, avançam em direção a e_1 maiores ou menores, quando a razão de massas aumenta. Enfim, essa mesma explicação deve valer para os mapas de estrela solar, em que, com o aumento da razão de massas, foi possível notar uma diferença no "sentido de avanço" da faixa de baixas amplitudes, dependendo do valor de a_1.

5.2.1 Mapas de Amplitudes de Ângulo Crítico

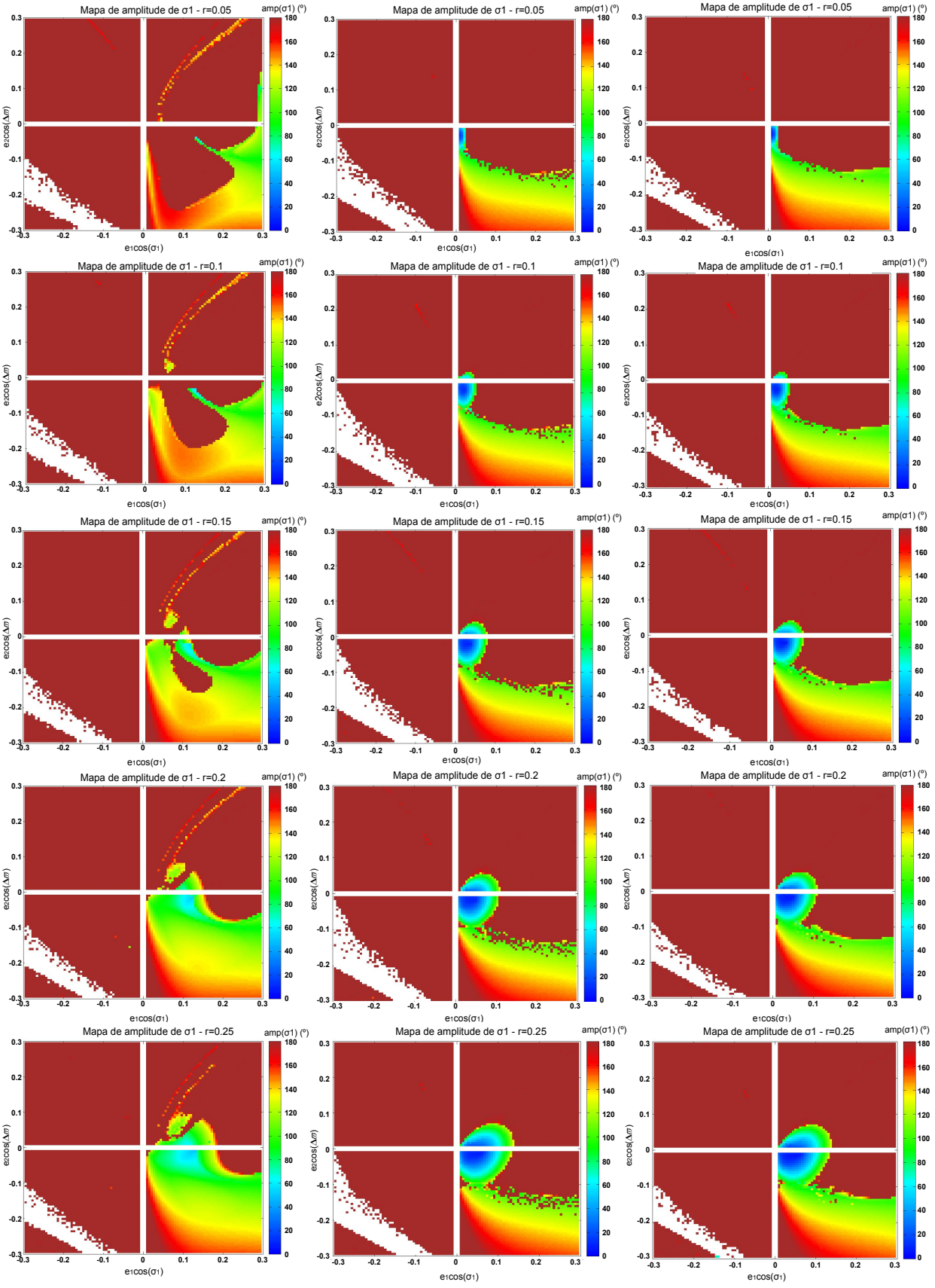


FIGURA 5.8. Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias. Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 e 0.25, respectivamente.

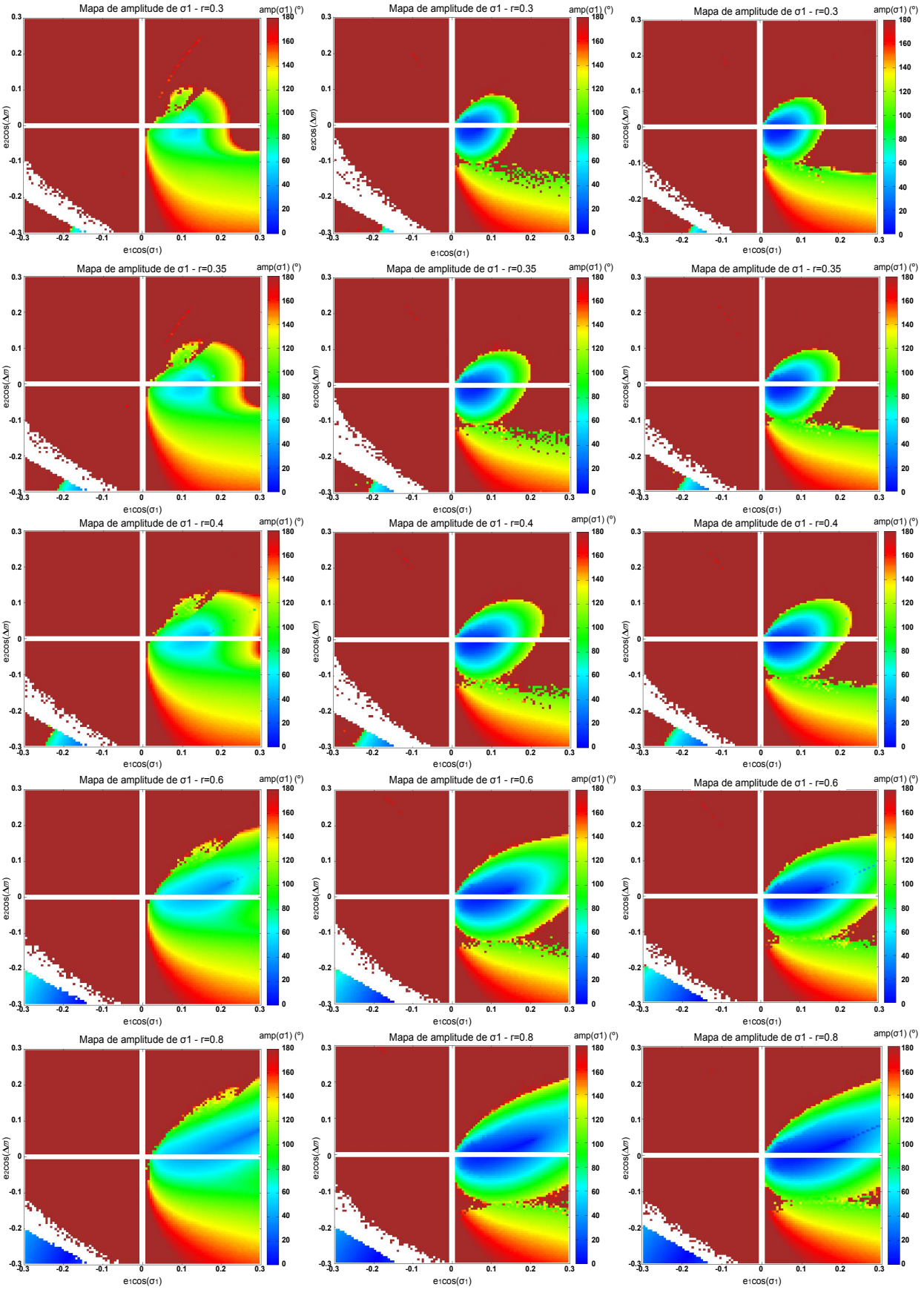


FIGURA 5.9. Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.3, 0.35, 0.4, 0.6 e 0.8, respectivamente.

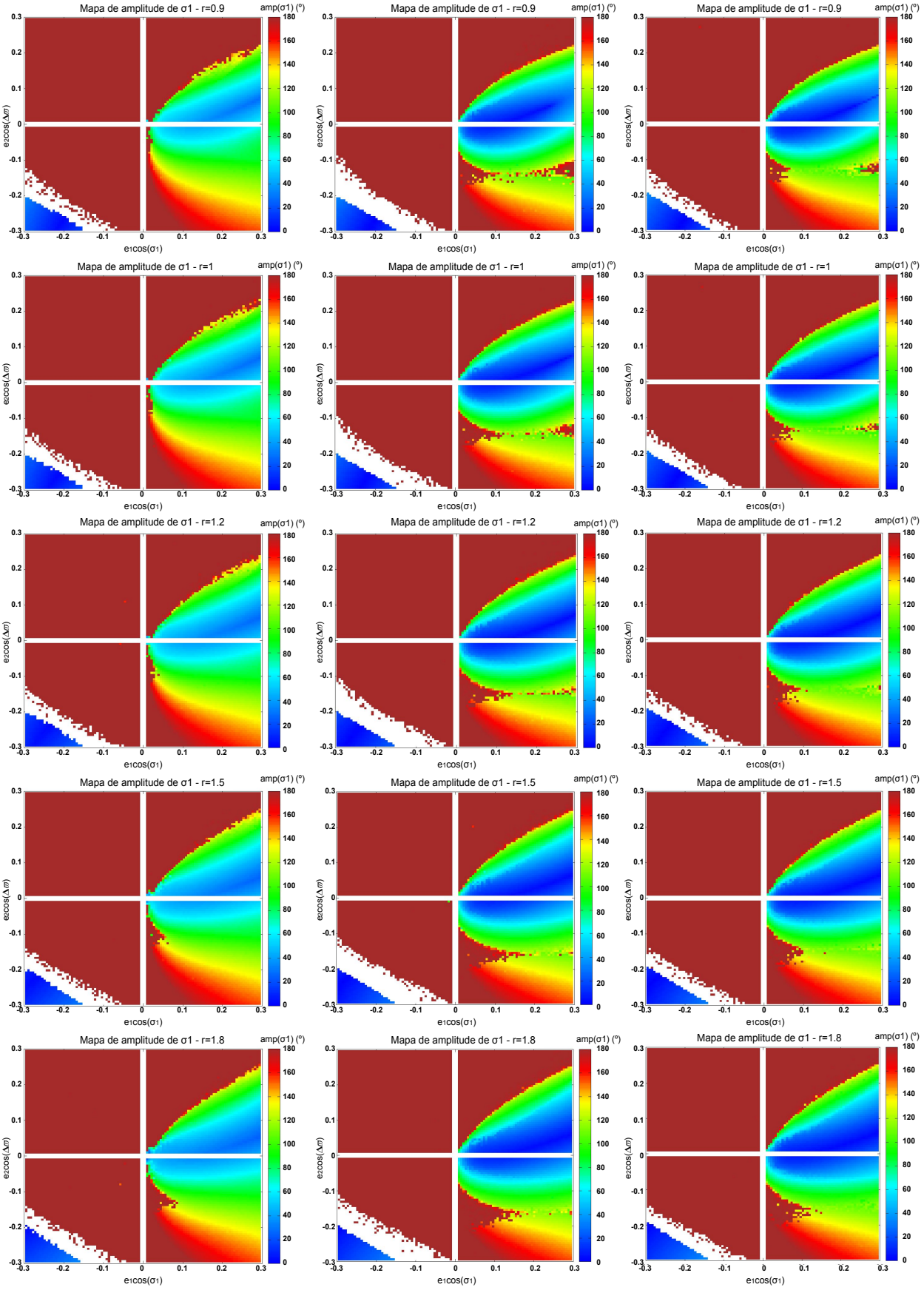


FIGURA 5.10. Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.9, 1.0, 1.2, 1.5 e 1.8, respectivamente.

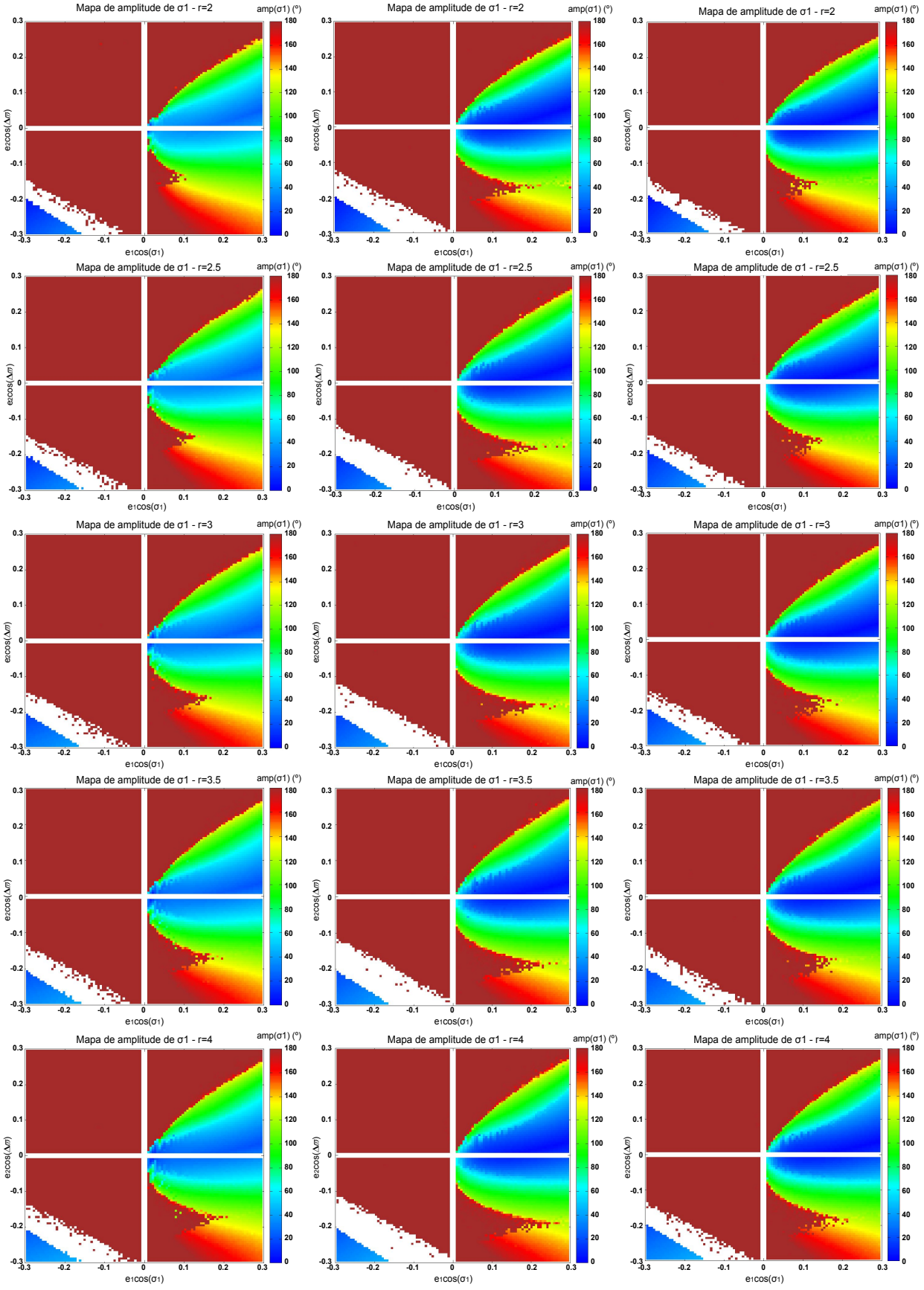


FIGURA 5.11. Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 2, 2.5, 3, 3.5 e 4, respectivamente.

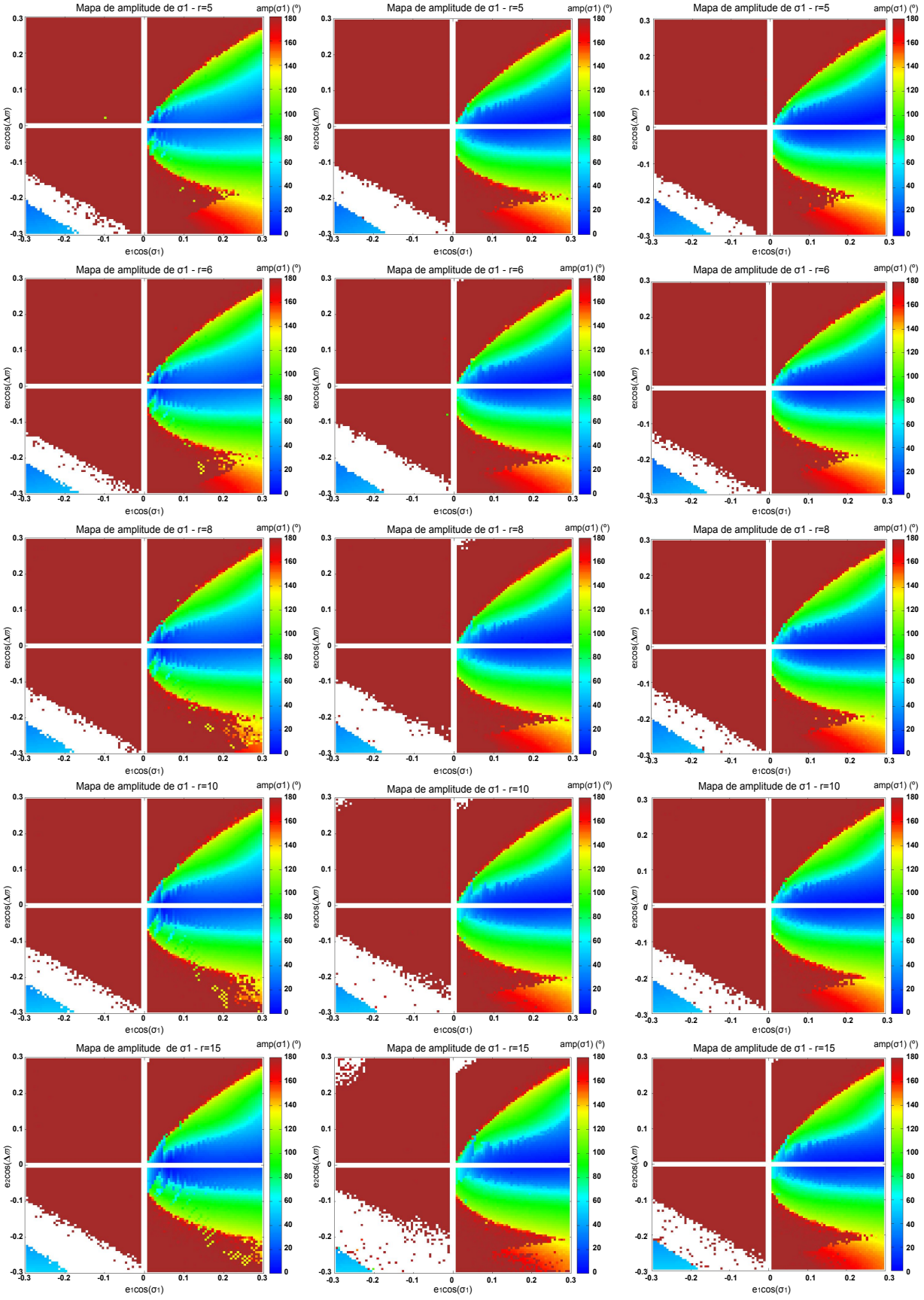


FIGURA 5.12. Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 5, 6, 8, 10 e 15, respectivamente.

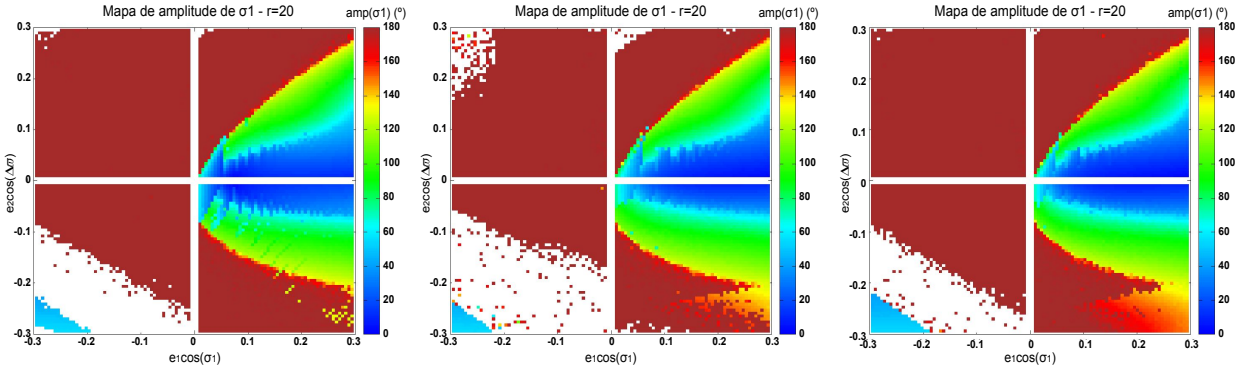


FIGURA 5.13. Mapas de amplitude de σ_1 para diferentes posições a_1 e razão de massas planetárias r=20. Estrela de $1M_{\odot}$.A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA.

5.2.2 Mapas de Amplitudes de $(\varpi_2 - \varpi_1)$

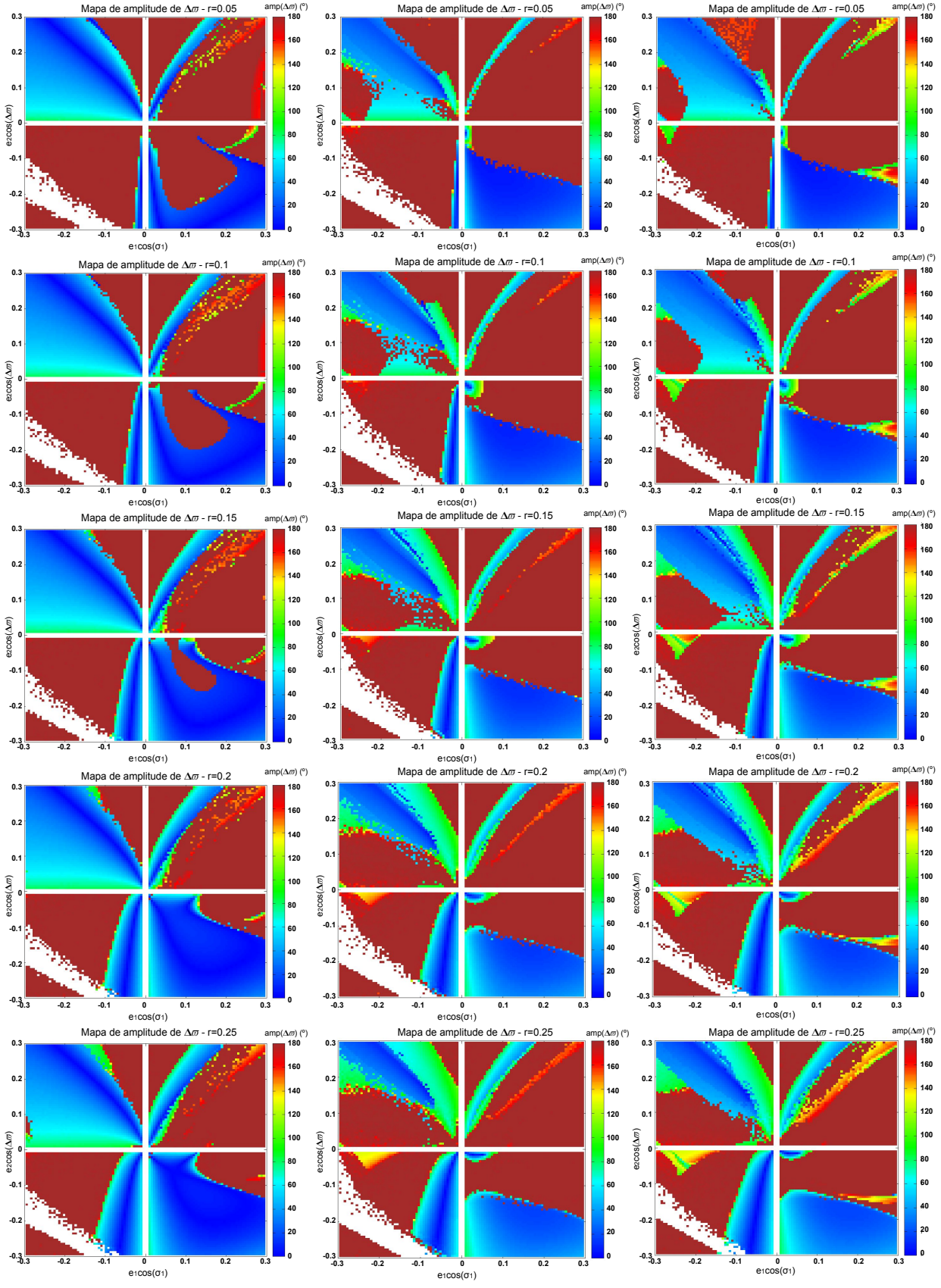


FIGURA 5.14. Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 e 0.25, respectivamente.

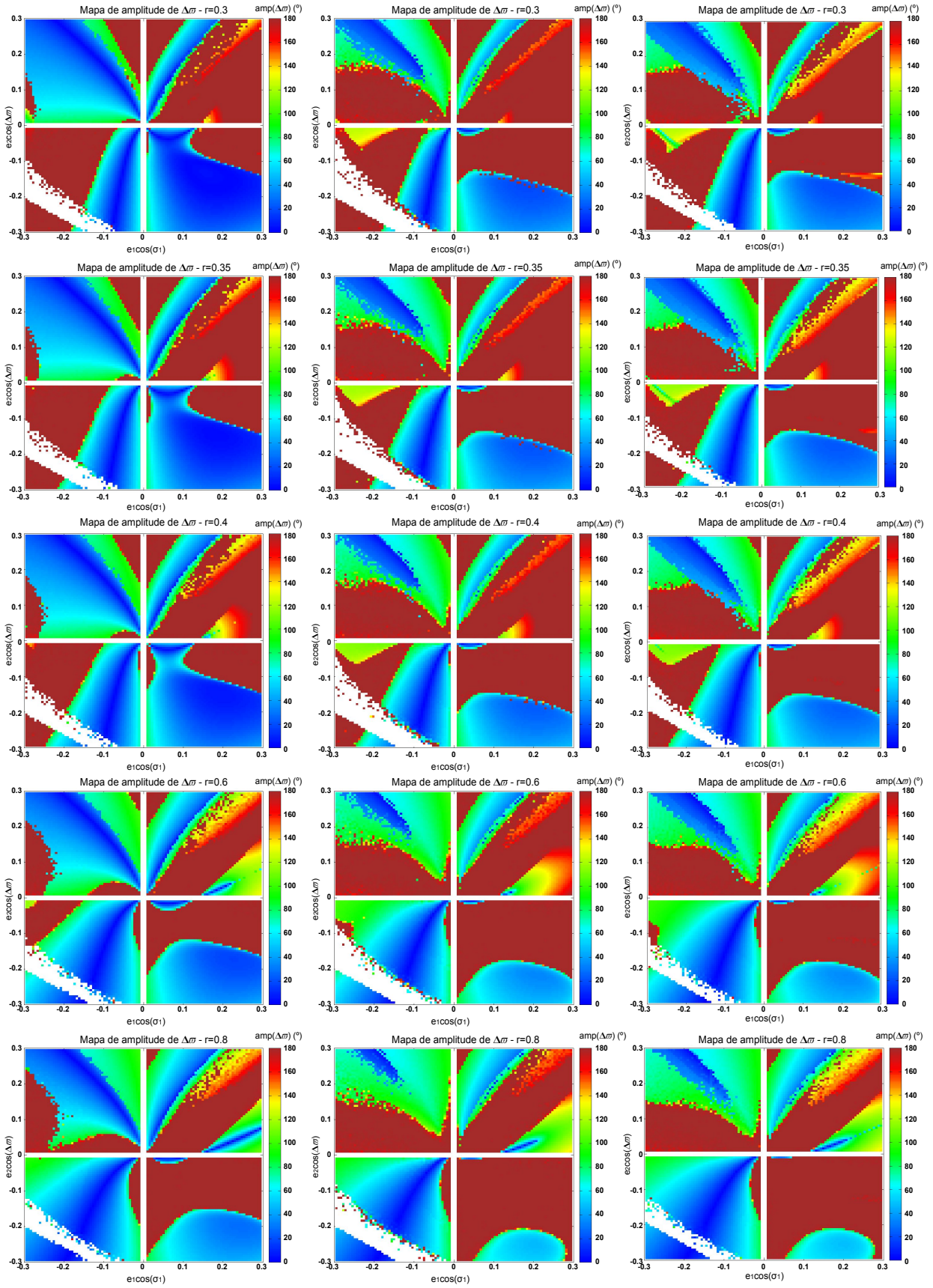


FIGURA 5.15. Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.3, 0.35, 0.4, 0.6 e 0.8, respectivamente.

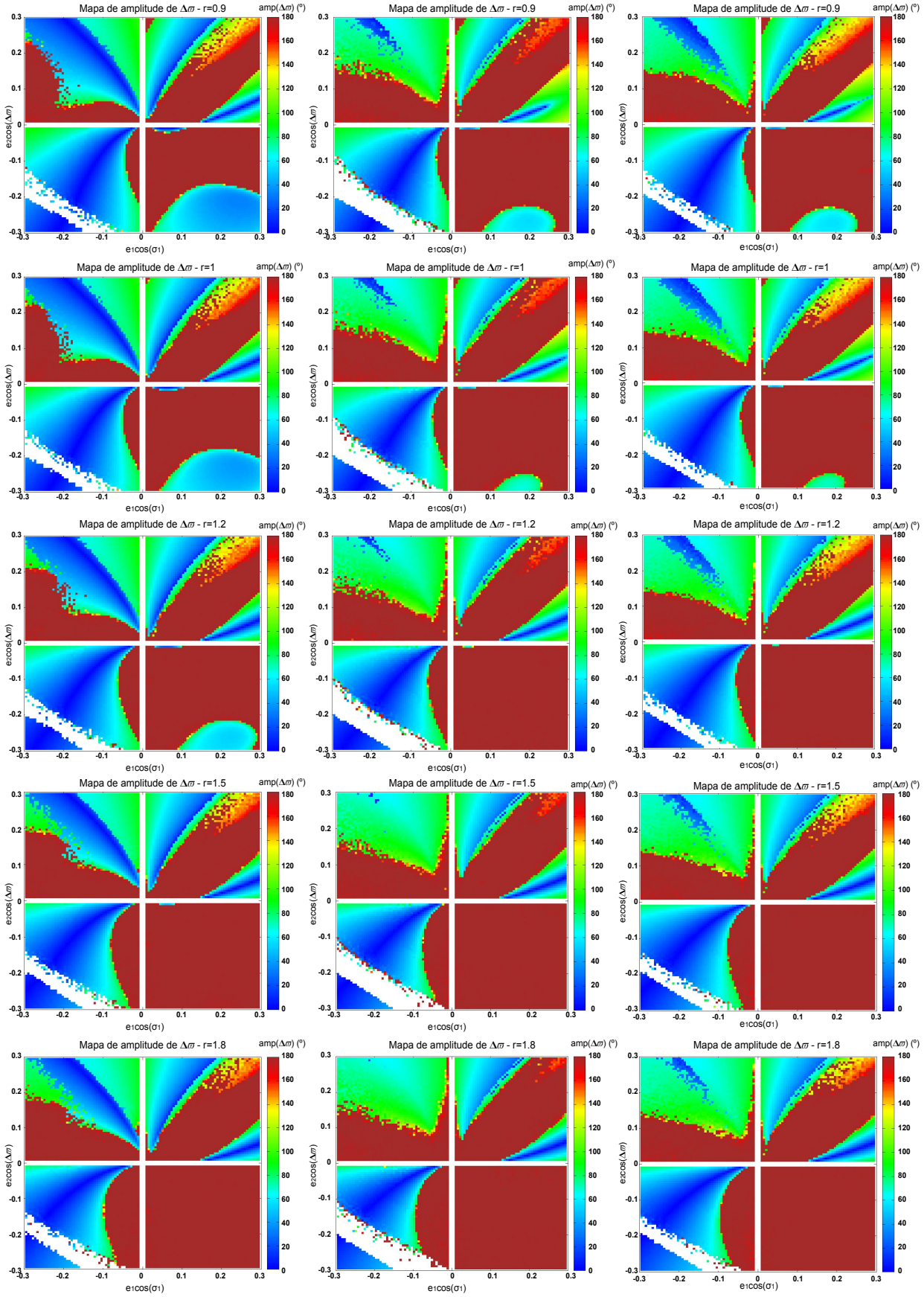


FIGURA 5.16. Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.9, 1.0, 1.2, 1.5 e 1.8, respectivamente.

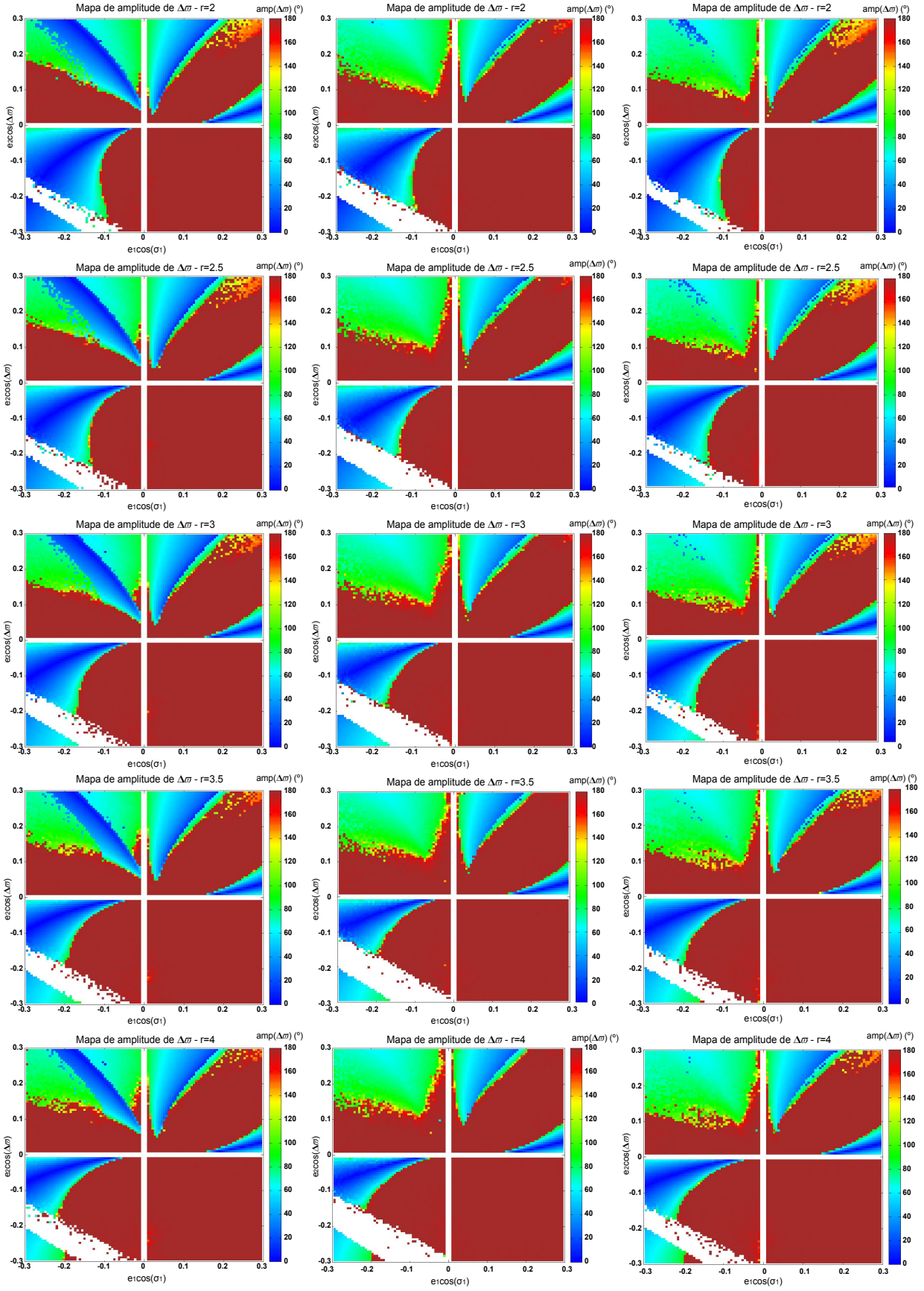


FIGURA 5.17. Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 2, 2.5, 3, 3.5 e 4, respectivamente.

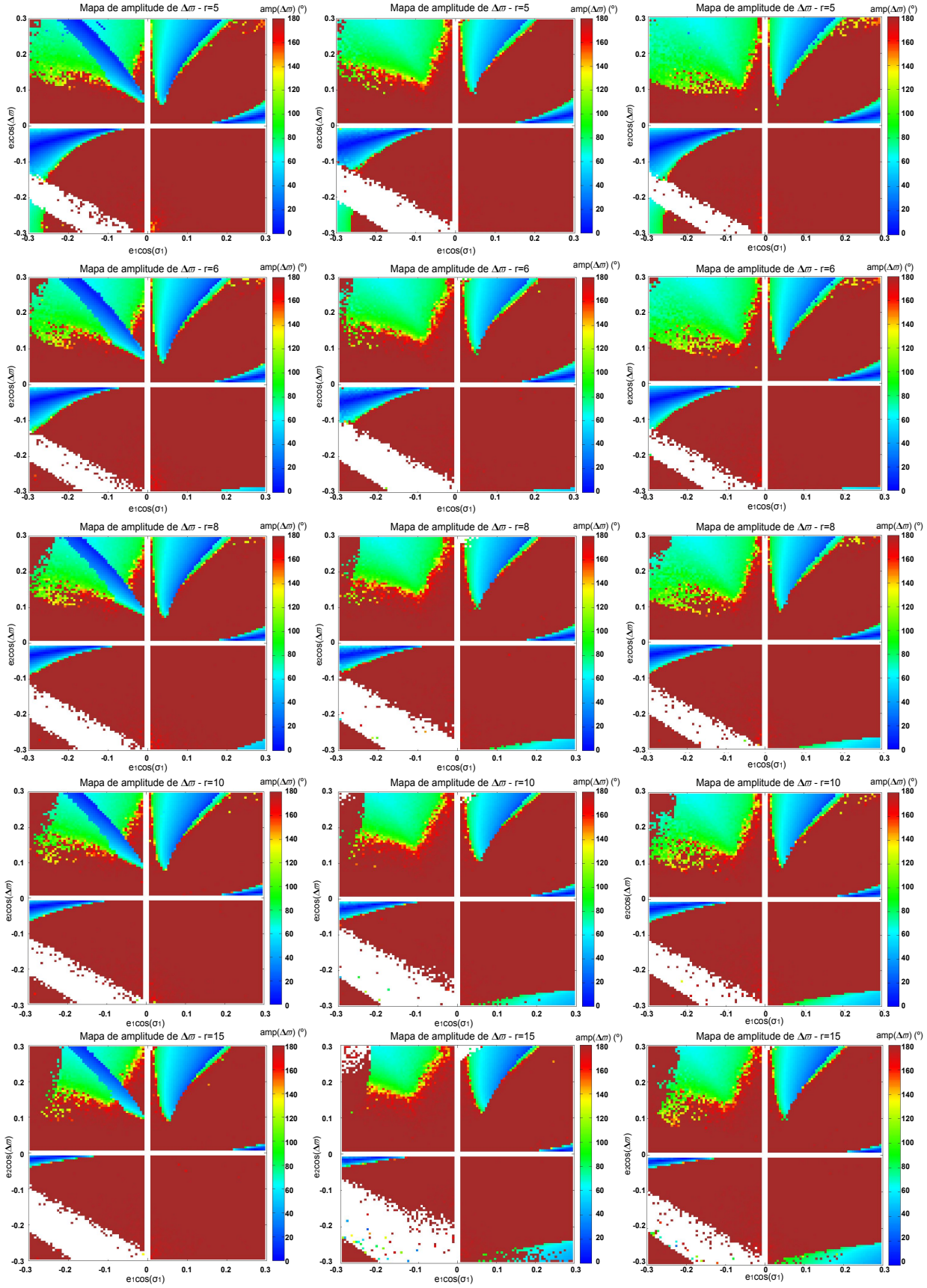


FIGURA 5.18. Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 5, 6, 8, 10 e 15, respectivamente.

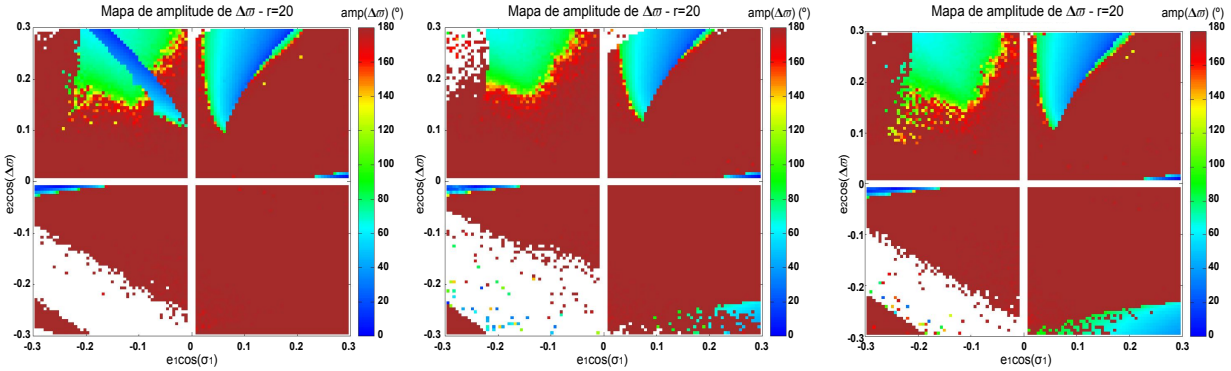


FIGURA 5.19. Mapas de amplitude de $\Delta\varpi$ para diferentes posições a_1 e razão de massas planetárias r=20. Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA.

5.2.3 Regiões de Ressonância de Corrotação Apsidal

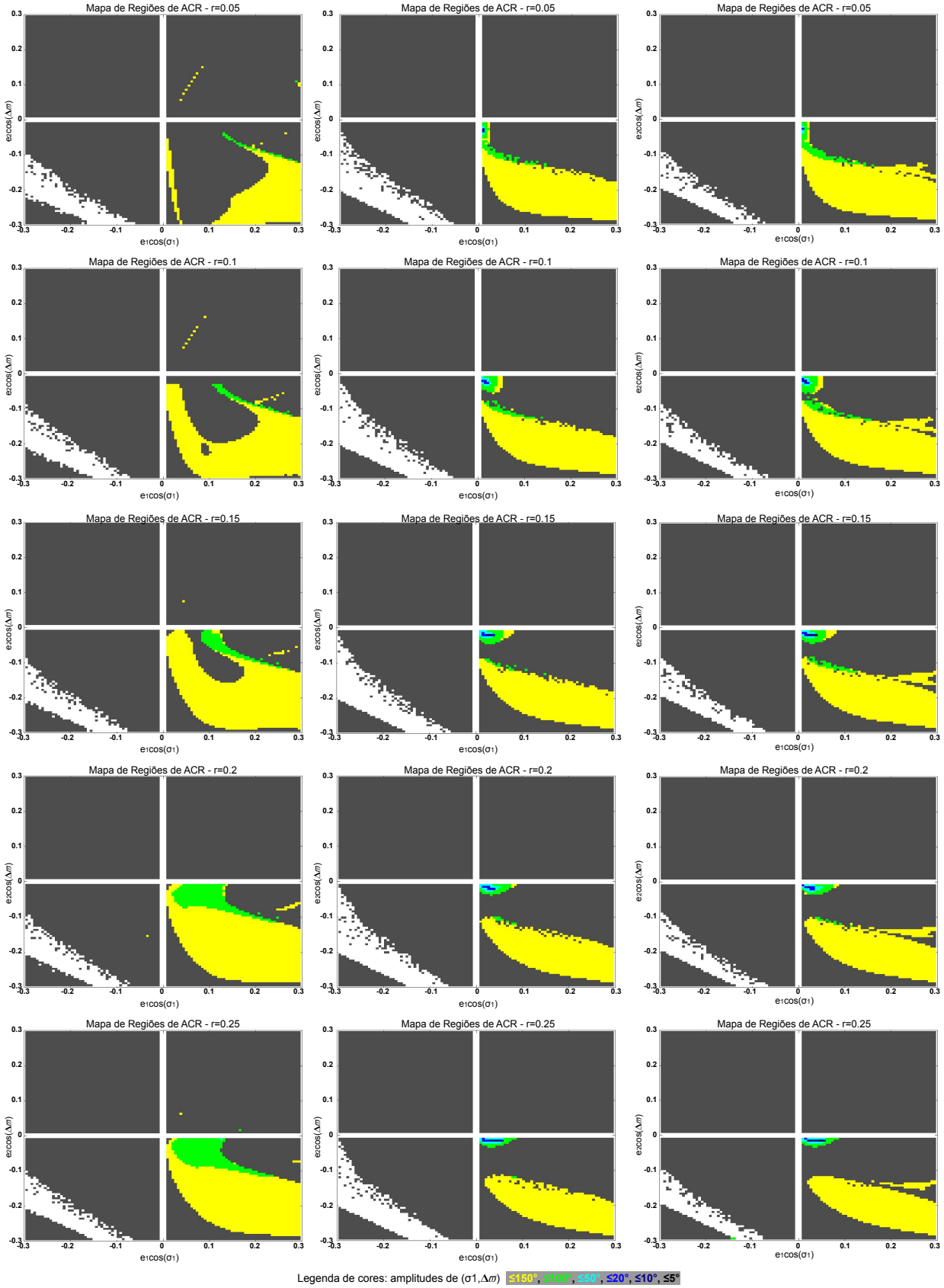


FIGURA 5.20. Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 e 0.25, respectivamente.

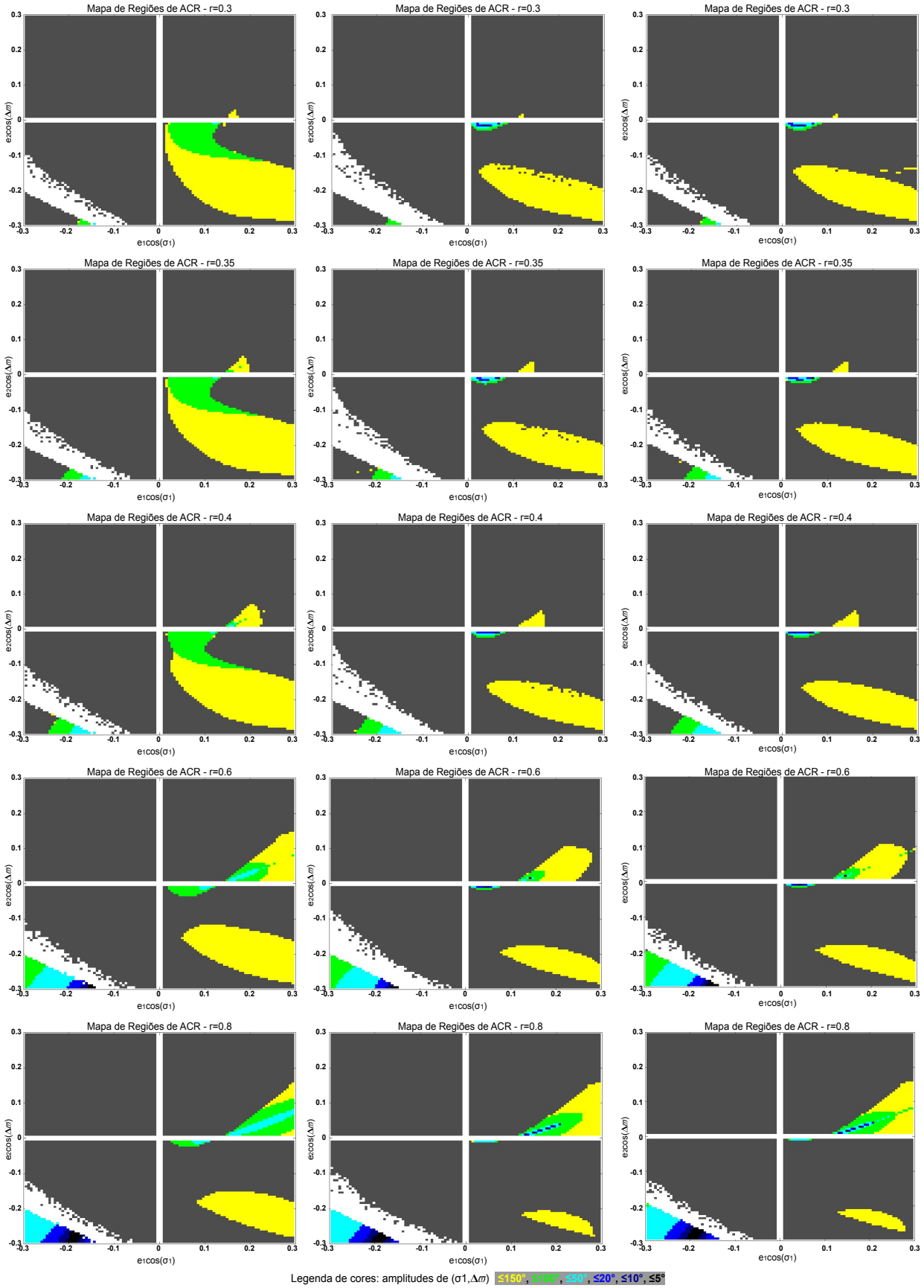


FIGURA 5.21. Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.3, 0.35, 0.4, 0.6 e 0.8, respectivamente.

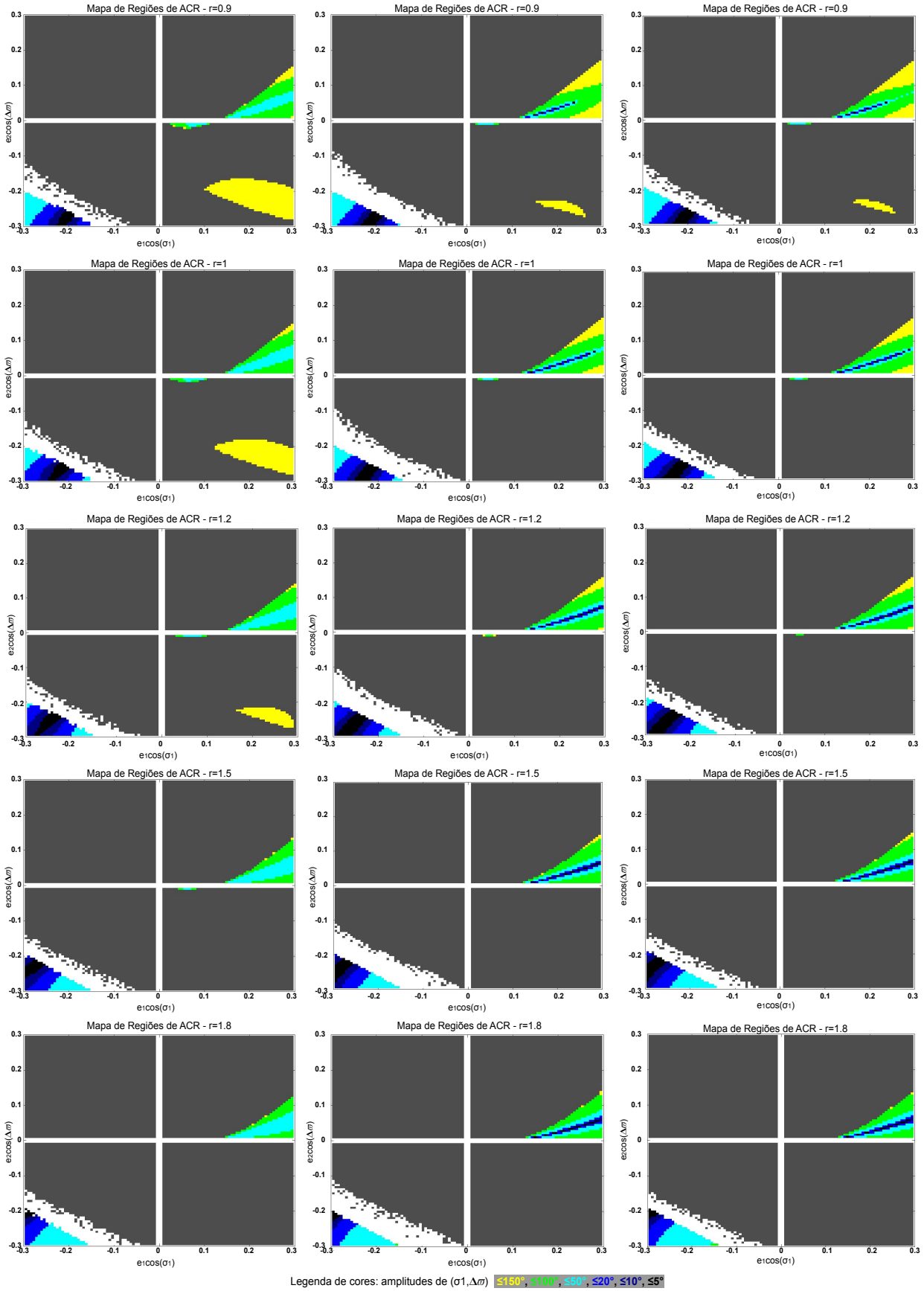


FIGURA 5.22. Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 0.9, 1.0, 1.2, 1.5 e 1.8, respectivamente.

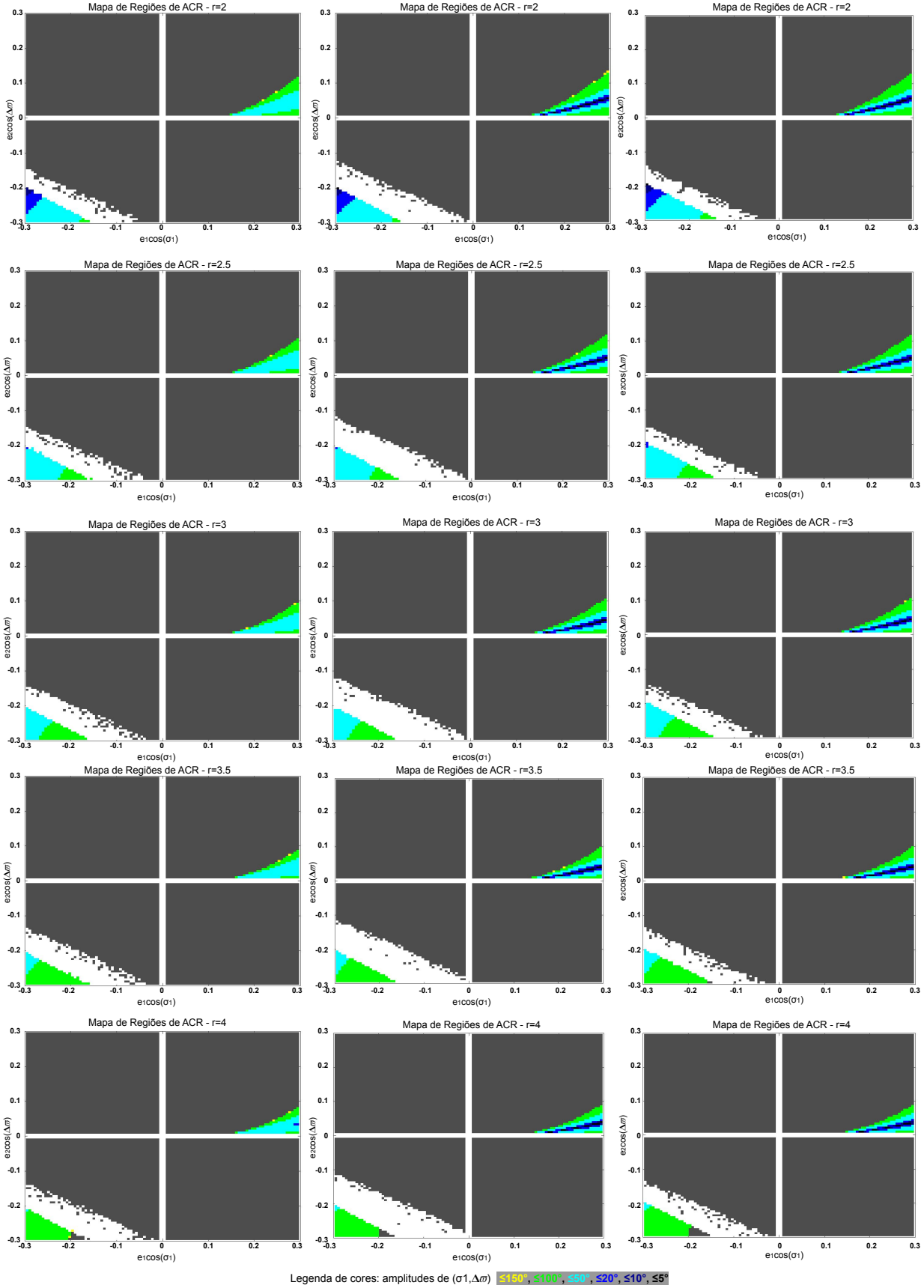


FIGURA 5.23. Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_\odot$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 2, 2.5, 3, 3.5 e 4, respectivamente.

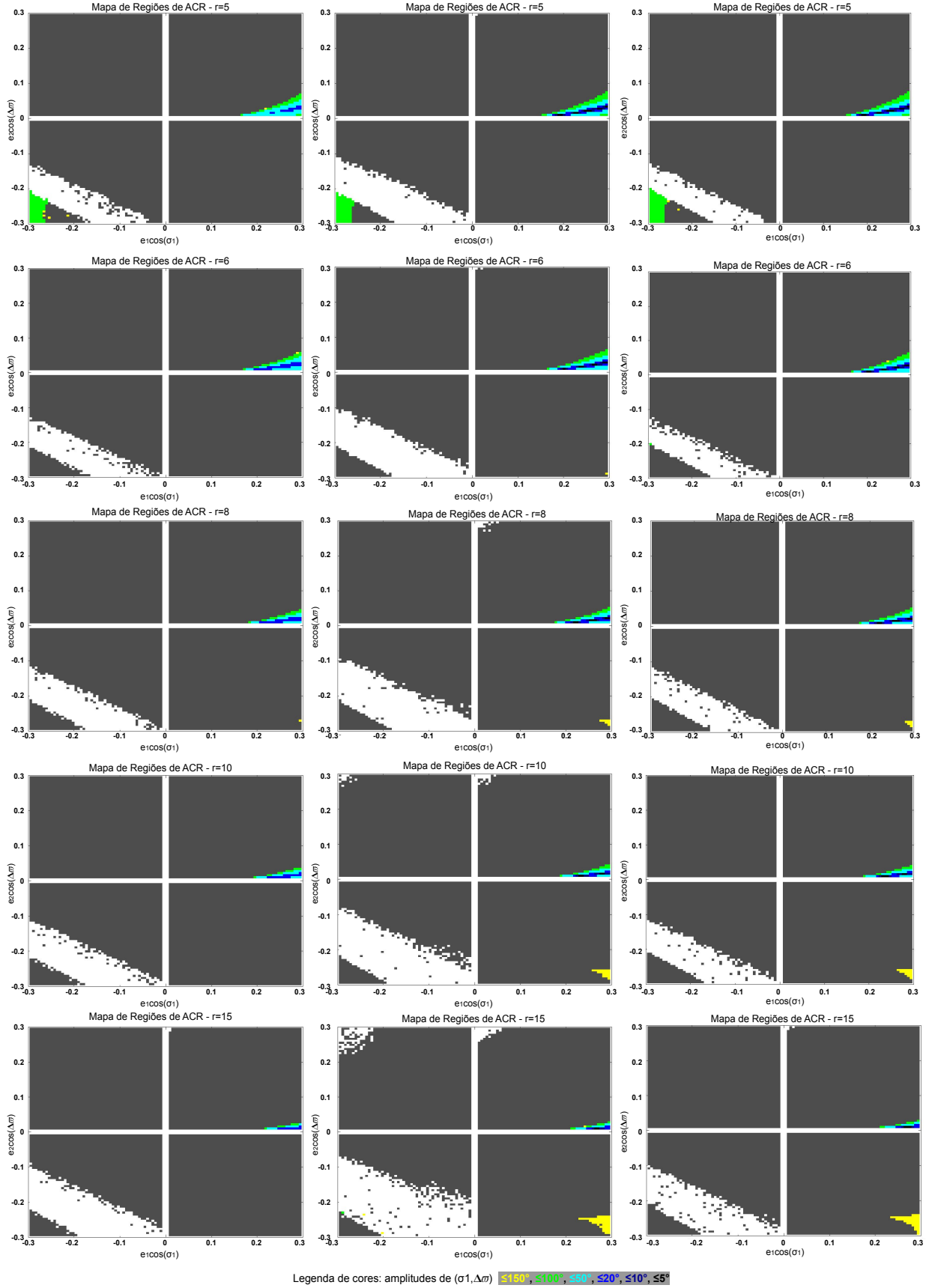


FIGURA 5.24. Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razões de massas planetárias (r). Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA. As linhas de mapas têm razões 5, 6, 8, 10 e 15, respectivamente.

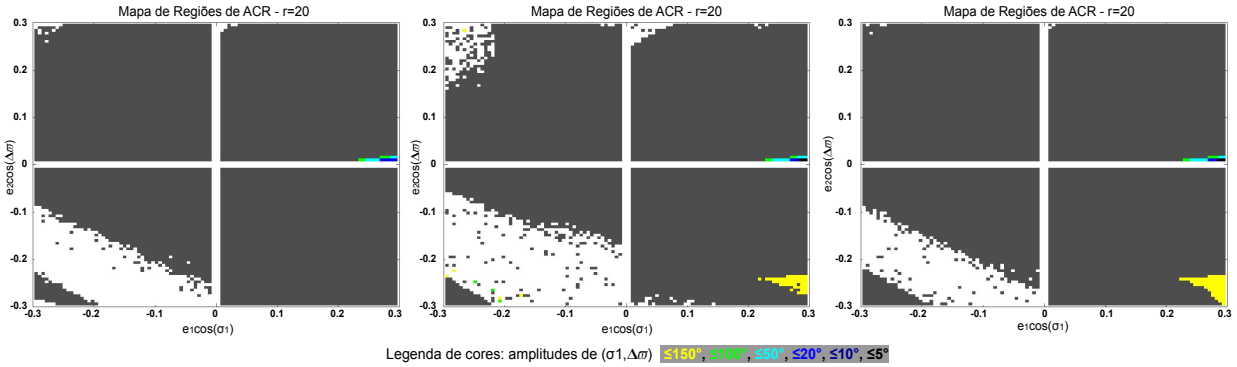


FIGURA 5.25. Regiões de ACR para diferentes posições a_1 e razão de massas planetárias r=20. Estrela de $1M_{\odot}$. A coluna de mapas da esquerda tem $a_1 = 0.0516$ UA, a do meio, $a_1 = 0.5$ UA e, a da direita, $a_1 = 1$ UA.

5.2.4 Repetição do Método para Anã Vermelha

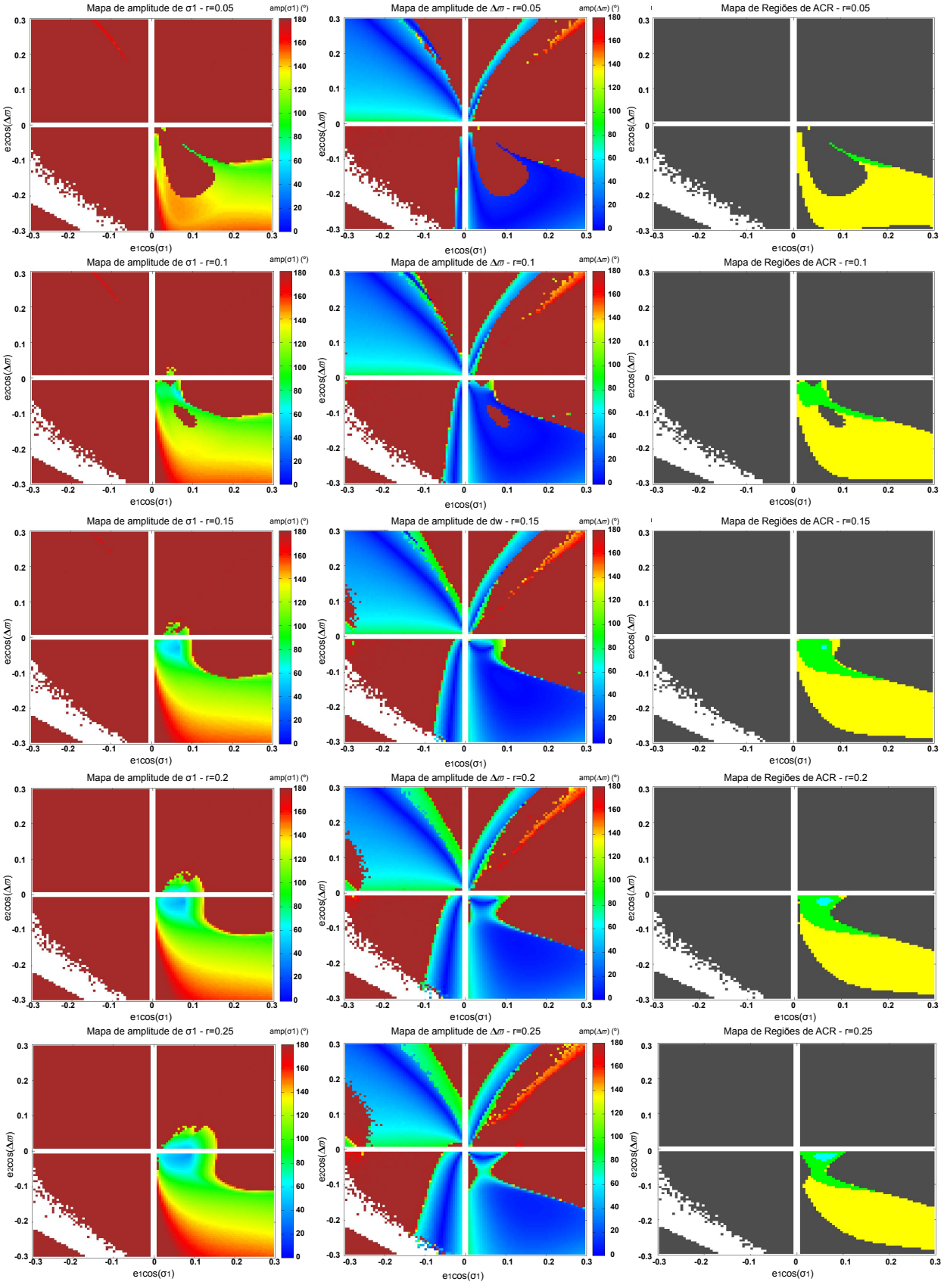


FIGURA 5.26. Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_\odot$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 e 0.25, respectivamente.

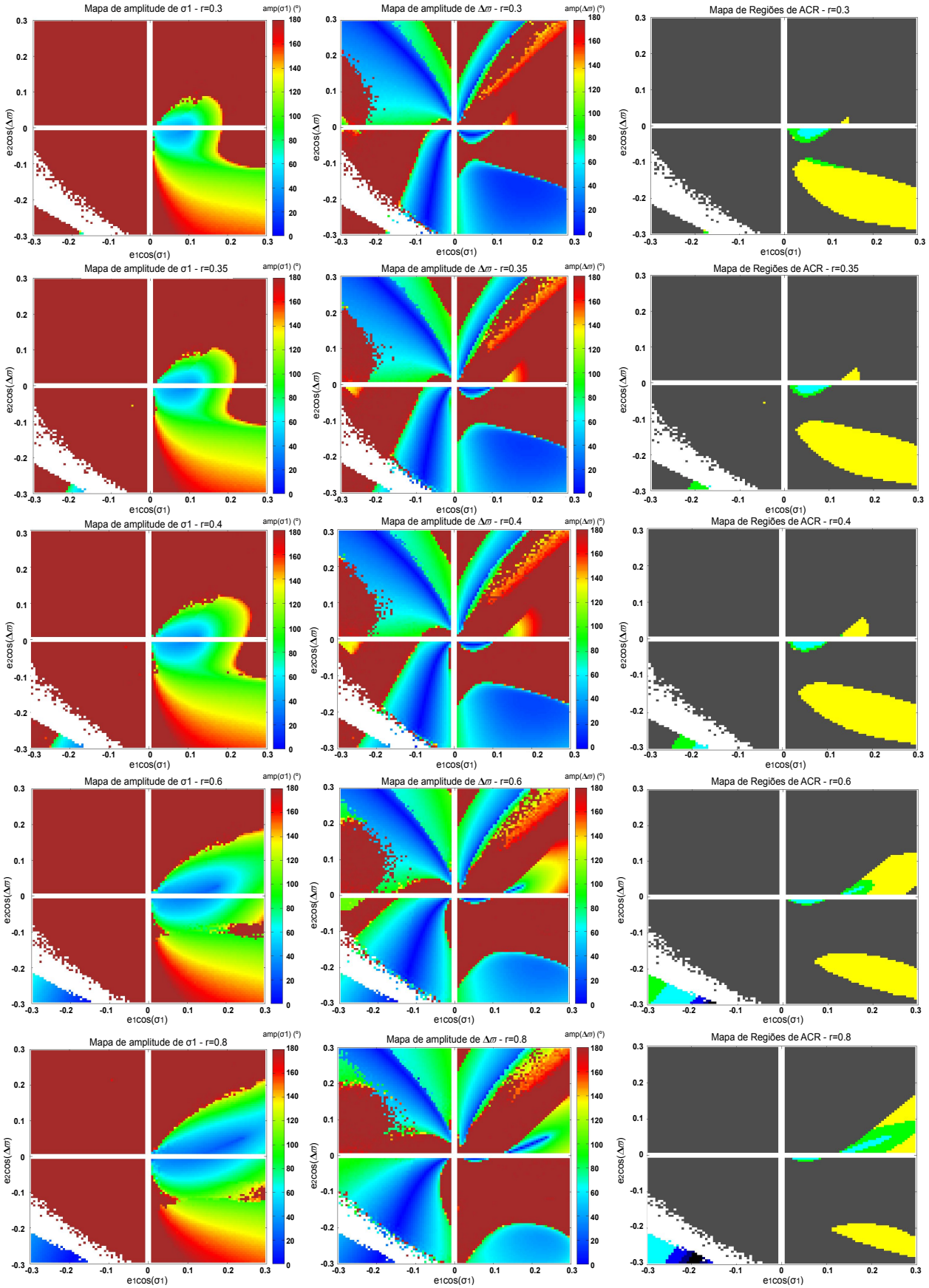


FIGURA 5.27. Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_{\odot}$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 0.3, 0.35, 0.4, 0.6 e 0.8, respectivamente.

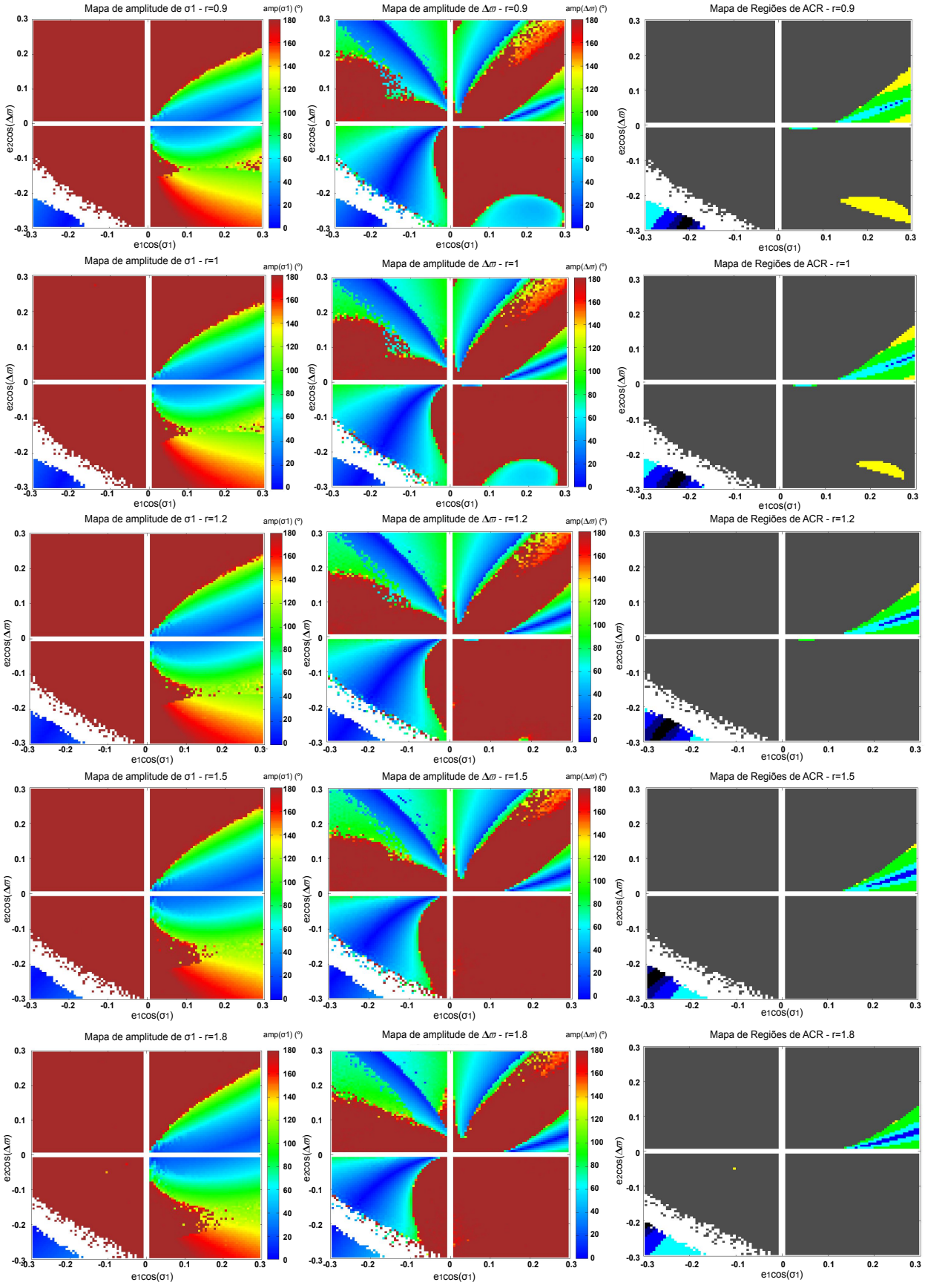


FIGURA 5.28. Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_\odot$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 0.9, 1.0, 1.2, 1.5 e 1.8, respectivamente.

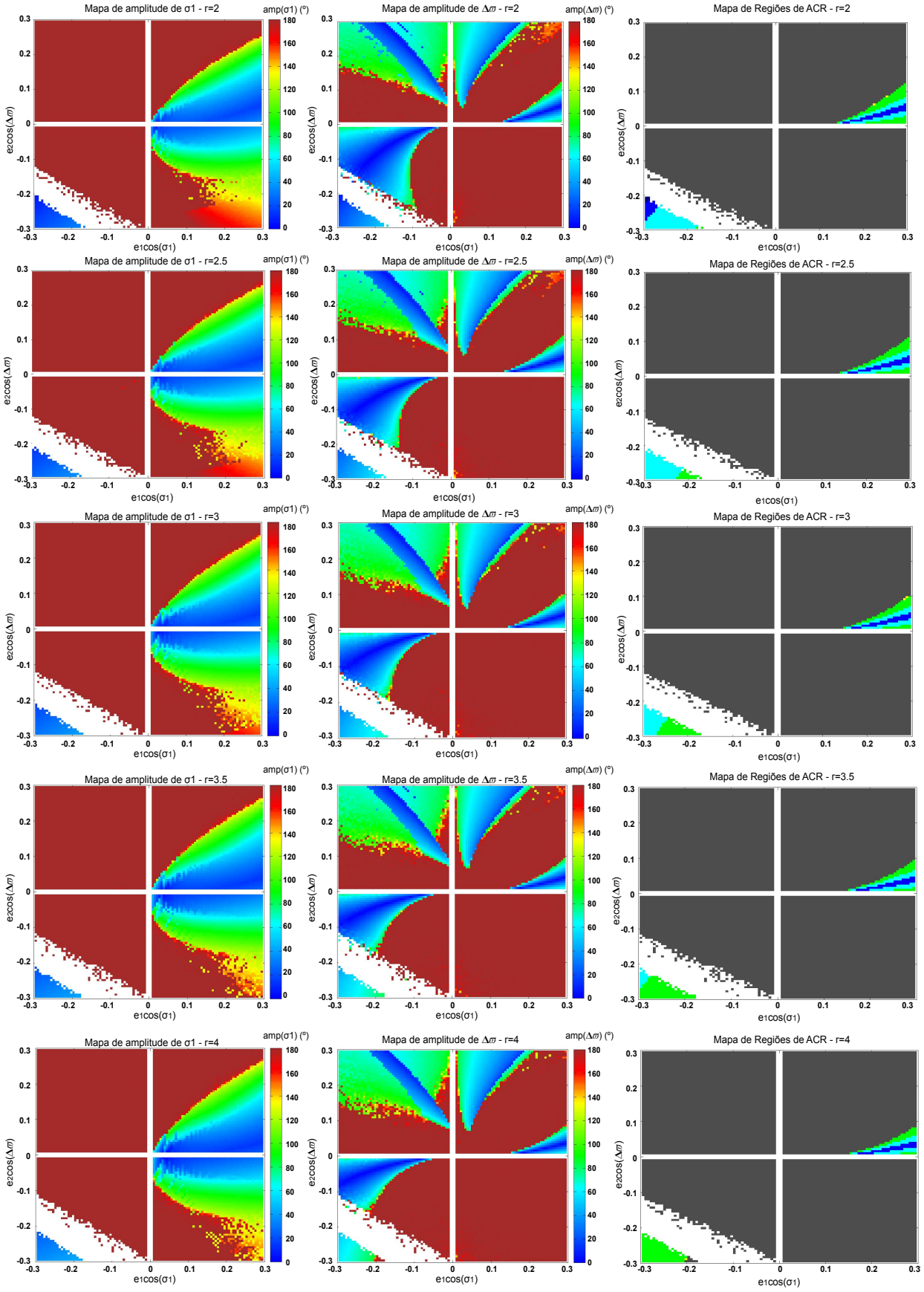


FIGURA 5.29. Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_{\odot}$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 2, 2.5, 3, 3.5 e 4, respectivamente.

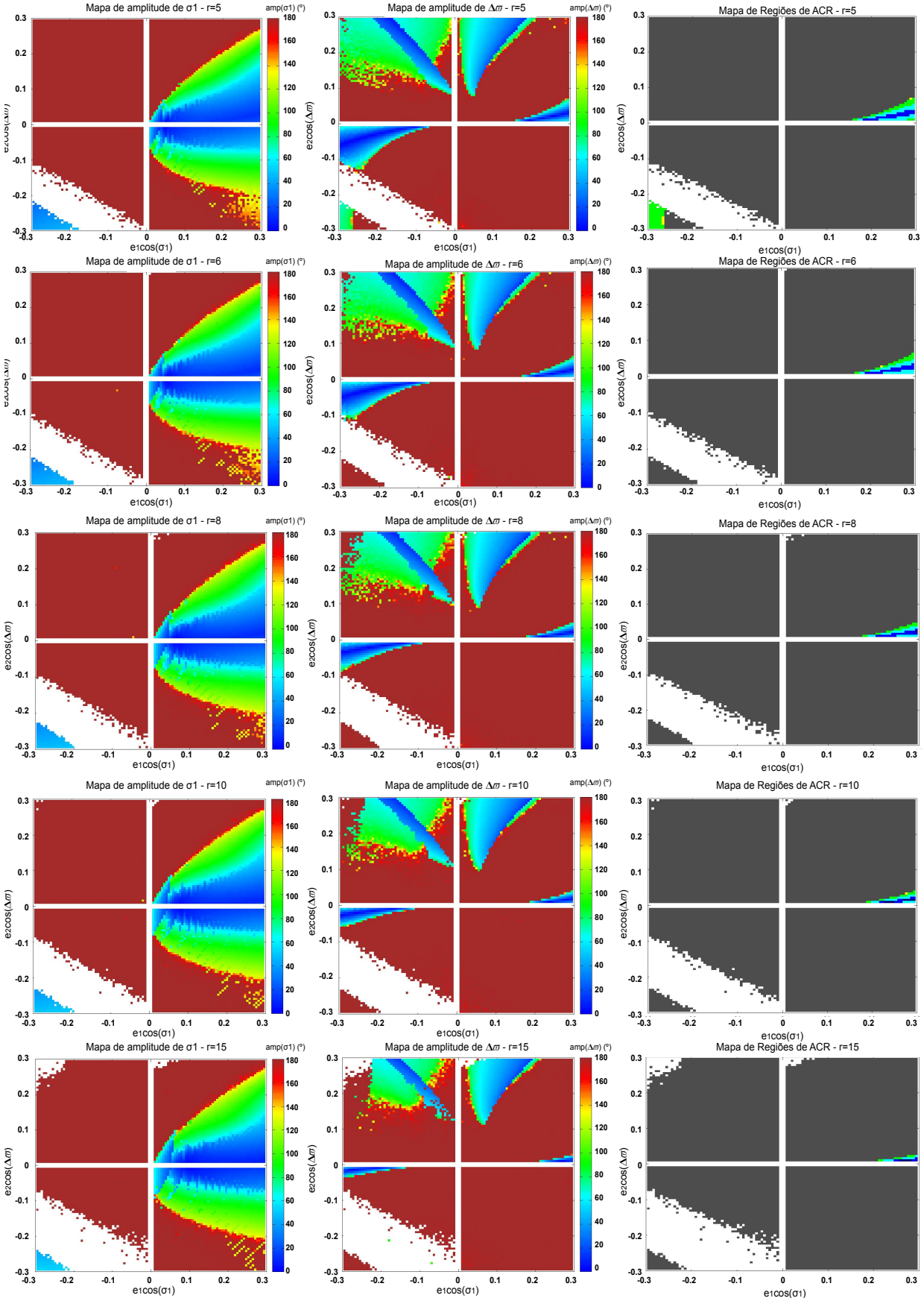


FIGURA 5.30. Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_{\odot}$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. As linhas de mapas têm razões (r) 5, 6, 8, 10 e 15, respectivamente.

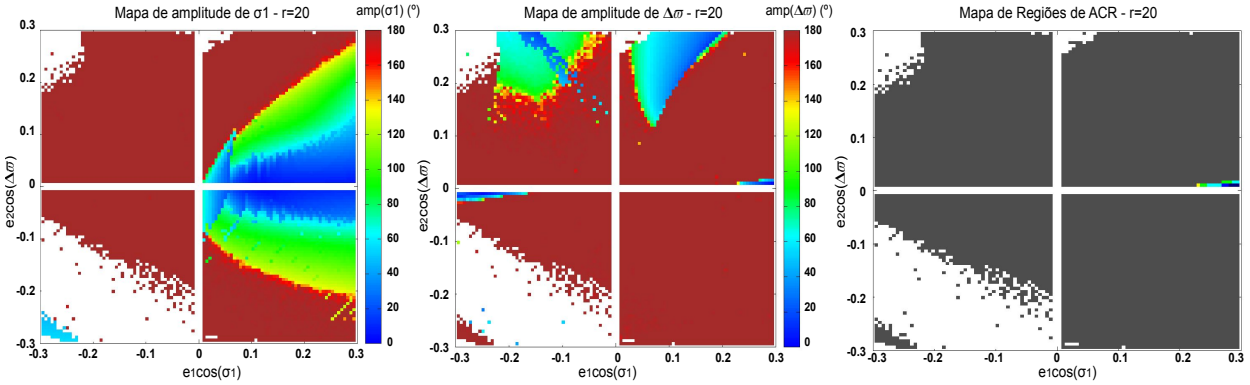


FIGURA 5.31. Mapas Dinâmicos para o caso $a_1 = 0.0516$ UA e estrela de $0.5M_{\odot}$. A coluna da esquerda tem mapas de amplitude de σ_1, a do meio, mapas de amplitudes de $\Delta\varpi$ e, a da direita, mapas de regiões de ACR. A linha de mapas tem razão r=20.

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Marcação de Sistemas em Mapas Dinâmicos

Os mapas de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR apresentados no capítulo anterior constituem um catálogo de mapas dinâmicos. Nesta seção, três sistemas de exoplanetas observados próximos à condição de RMM 2:1, com razões de massas planetárias conhecidas, são marcados como pontos (e_1, e_2) em mapas do catálogo.

Selecionou-se os sistemas HD 155358, K2-24 e TOI-216 para estudo, que foram descobertos e caracterizados apenas recentemente e, assim, as simulações apresentadas neste capítulo são contribuições científicas originais deste projeto. Os pontos (e_1, e_2) são marcados nos mapas que têm razão de massas planetárias e massa estelar mais próximas àquelas dos sistemas observados. Fazendo isso, é obtida uma previsão sobre o comportamento dos sistemas em diferentes condições angulares e pode-se descobrir quais são os quadrantes de c.i., cujas regiões de ressonância "contêm" um sistema marcado.

Tais quadrantes, em princípio, são uma indicação de quais condições angulares permitem que a dinâmica de RMM (e ACR) se desenvolva em um sistema e se mantenha estável por tempo secular. Então, utilizando as c.i. angulares indicadas, são construídos novos mapas dinâmicos para o sistema observado, na vizinhança da RMM 2:1. Nos novos mapas, as cores indicam a máxima variação de semi-eixo maior do planeta menos massivo, a máxima variação da excentricidade do planeta menos massivo e a amplitude do ângulo crítico σ_1. A grade dos mapas são "razão de períodos inicial vs. excentricidade inicial do planeta menos massivo" e o tempo das simulações são alguns períodos de perturbação ressonante, estes obtidos em simulações experimentais.

Com os mapas de razão de períodos vs. excentricidade, é possível conhecer os efeitos da ressonância em um sistema (em especial, na órbita do planeta menos massivo, que sofre maiores variações de elementos orbitais do que a de seus companheiros quando perturbada) e na vizinhança de suas condições orbitais. Também, pode-se verificar se as marcações do sistema nos mapas do catálogo gerado fornecem informações coerentes com a dinâmica do sistema em sua configuração real. Essa verificação é importante, pois os mapas do catálogo foram construídos para sistemas que partem exatamente da razão de períodos 2 em condições de a_1 e massa estelar específicas, e os sistemas observados partem de razões de períodos próximas a 2, com seus próprios valores de semi-eixos, de ângulos e de massa estelar.

Assim, se os mapas do catálogo fizerem boa previsão sobre a dinâmica de um sistema real (i.e. uma previsão coerente com as simulações que normalmente são feitas na literatura para um sistema quando descoberto nas proximidades da RMM 2:1, como mapas dinâmicos e integrações seculares), o catálogo deve ser válido para outros sistemas sem a necessidade imediata de simulação destes ou, pelo menos, de sistemas semelhantes àqueles que uma vez foram verificados.

6.1.1 Sistema HD 155358

HD 155358 é uma estrela de $0.92 M_{\odot}$, tipo espectral G0, temperatura efetiva de 5900 K e metalicidade [Fe/H] de -0.51 (dex). Estima-se que sua idade é de 10.7 bilhões de anos e ela está a uma distância de 43 pc. Robertson et al. (2012) descobriram dois planetas em órbita ao redor da estrela com o método de velocidade radial. Segundo os autores, o sistema é notável, porque tem planetas gigantes, mesmo apresentando uma das metalicidades estelares mais baixas entre os sistemas que têm companheiros planetários. Além disso, os planetas estão próximos à condição de RMM 2:1, com parâmetros:

Planeta	$m \sin I$ (M_J)	a (UA)	e	ϖ (°)	M (°)
HD 155358 b	0.85±0.05	0.64±0.01	0.17±0.03	143±11	129±0.7
HD 155358 c	0.82±0.07	1.02±0.02	0.16±0.1	180±26	233±0.9

Tabela 6.1. Dados planetários do sistema HD 155358, segundo Robertson et al. (2012).

Já um artigo mais recente, Ma et al. (2017) propôs um novo ajuste coplanar para o HD 155358, em que as excentricidades dos planetas são diminuídas com o objetivo de se verificar se o sistema poderia estar em ACR, com um histórico possível de migração adiabática em disco de gás. Essa migração é simulada no artigo e, a partir dela, chega-se a conclusão de que o sistema está capturado em RMM 2:1, mas não em ACR, pois o disco teria se dissipado antes de uma ACR poder se estabelecer com excentricidades orbitais mais baixas que as do *fit* proposto. Nesse estudo, os parâmetros orbitais do sistema foram estabelecidos como:

Planeta	$m \sin I$ (M_J)	a (UA)	e	ϖ (º)	M (º)
HD 155358 b	1.03±0.02	0.64±0.01	0.14±0.02	147±8.1	33.5±0.5
HD 155358 c	0.85±0.03	1.02±0.01	0.11±0.01	337±34.9	0±0.7

Tabela 6.2. Dados planetários do sistema HD 155358, segundo Ma et al. (2017).

Pode-se notar que, além de excentricidades, os dois *fits* diferem entre si no valor das massas planetárias mínimas e, principalmente, nas condições angulares obtidas. As condições descritas por Robertson et al. (2012) e Ma et al. (2017) são tais que o sistema poderia estar em regime oscilatório nas proximidades de $\sigma_1 = 0$ e $\Delta\varpi = 0^{\circ}$ (com razão de massas planetárias 0.96) e de $\sigma_1 = 0$ e $\Delta\varpi = 180^{\circ}$ (com razão 0.82), respectivamente, que são pontos de equilíbrio conhecidos para as oscilações de ângulo crítico e da diferença de longitudes de pericentro. Então, apenas com os valores dos *fits*, é possível fazer a suposição inicial de que o sistema apresenta ACR 2:1, o que só poderia ser verificado por meio de simulações.

Na Figura 6.1, as excentricidades orbitais dos dois *fits* foram marcadas como pontos nos quatro quadrantes de c.i. angulares de mapas gerados para razão de massas 0.8 - que são muito parecidos com os mapas de razões 0.9 e 1. Apenas com a marcação, os mapas já indicam que os quadrantes (0,0) e (0,π) são os únicos capazes de promover RMM simétrica que se mantém por tempo secular para ambos os *fits*, embora, no quadrante (0,0), o *Fit* 2 esteja sobre uma região de separação entre regime oscilatório e circulatório de σ_1, que pode apresentar comportamento caótico.

Além disso, os mapas indicam que, para esses *fits*, as amplitudes de ângulo crítico devem estar entre 70° e 140°. Também, embora os pontos estejam dentro de regiões de RMM nos mapas de razão 0.8, eles caem em regiões de circulação de $\Delta\varpi$ e, por isso, estão fora da região de ACR 2:1 em qualquer caso. Os valores de Ma et al. (2017) de fato se aproximam da região de ACR no quadrante (0,0), mas não chegam a adentrá-la e, no quadrante (π,π), os valores de Robertson et al. (2012) se aproximam da faixa de instabilidades.

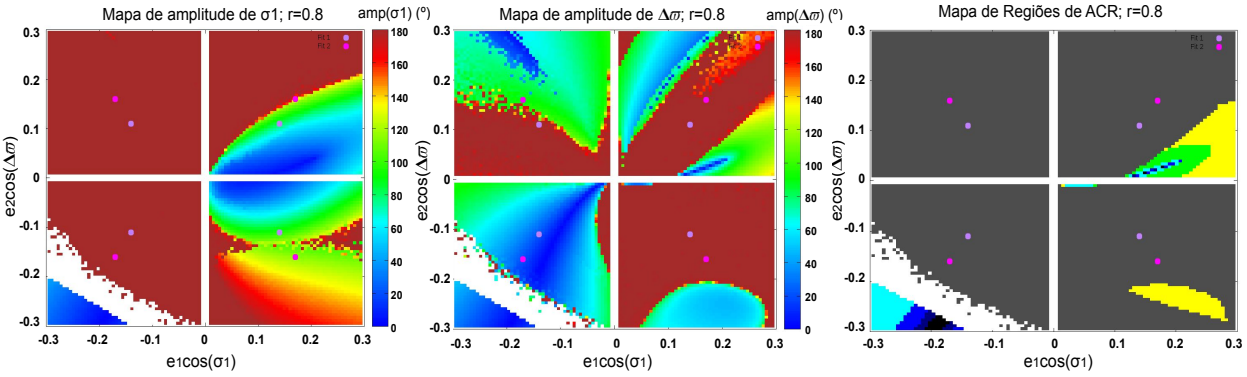


FIGURA 6.1. Marcação das excentricidades orbitais do HD 155358 em mapas de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, gerados com razão de massas planetárias 0.8, $a_1 = 0.5$ UA, tempo de 240 mil anos, razão de períodos 2 e massa estelar de $1M_\odot$. *Fit* 1 e 2 de Ma et al. (2017) e Robertson et al. (2012), respectivamente.

A Figura 6.2, por sua vez, mostra mapas dinâmicos para ambos os *fits* na vizinhança da razão de períodos 2. A coluna de mapas à esquerda foi gerada com valores fixos de massas planetárias mínimas, excentricidade e semi-eixo maior do planeta interno do *fit* de Ma et al. (2017) e, à direita, com valores de Robertson et al. (2012), ambos os casos, com estrela de massa e raio correspondentes à HD 155358. Para gerar as duas colunas de mapas, variou-se a posição do planeta externo, HD 155358 c, entre valores de semi-eixo maior de 0.95 a 1.06 UA e, também, suas excentricidades, de 0.01 a 0.3, enquanto o planeta b foi mantido com as c.i. de semi-eixo e excentricidade dos respectivos *fits*.

Cada mapa é composto de dois quadrantes de c.i. angulares: o superior (valores positivos no eixo y) corresponde ao quadrante de c.i. $(\sigma, \Delta\varpi) = (0, 0)$ e o inferior (valores negativos), ao quadrante (0,π). Esses são os quadrantes angulares que foram identificados na Figura 6.1 como promotores de RMM para o sistema e que compartilham suas regiões de ressonância de forma contínua nos mapas do catálogo: no quadrante (0,π), um mesmo valor de e_1 tem valores correspondentes de e_2 para que o sistema esteja em RMM, e essa faixa vertical de região RMM é continuada no quadrante (0,0), que também tem seus valores de e_2 associados ao mesmo e_1. Essa continuidade entre quadrantes também se manifesta nos mapas da Figura 6.2 entre os quadrantes (0,0) e (0,π), que então se "encaixam" um no outro.

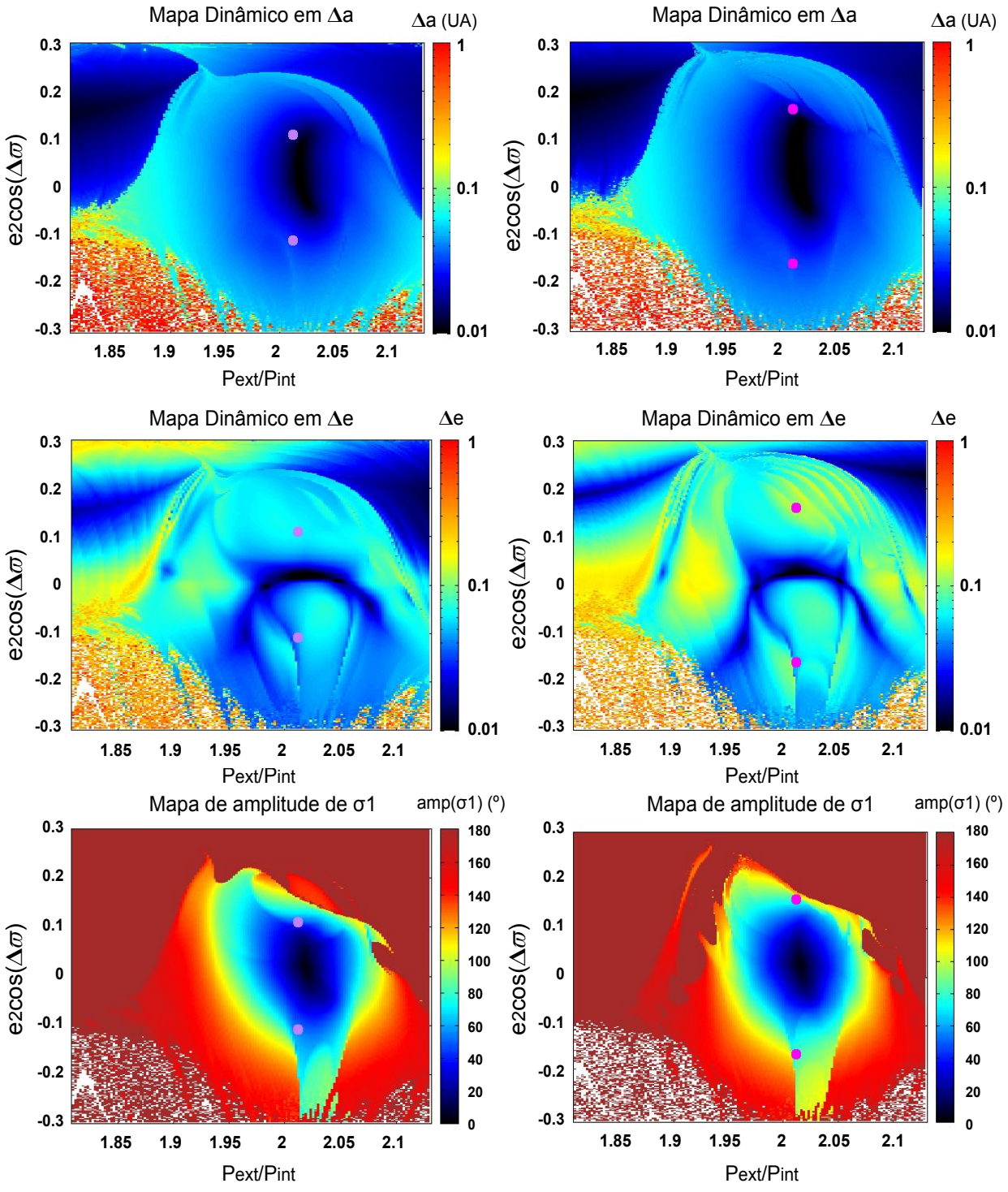


FIGURA 6.2. Mapas dinâmicos para o sistema HD 155358 próximo à RMM 2:1, com tempo de integração de 50 anos e com quadrantes angulares (0,0) - valores positivos do eixo vertical - e $(0,\pi)$ - valores negativos. As colunas de mapas se referem aos *fits* de Ma et al. (2017) e Robertson et al. (2012), respectivamente. Na horizontal: mapas de máxima variação de semi-eixo maior do planeta HD 155358 c, de máxima variação da excentricidade deste planeta e mapas de amplitude de oscilação de σ_1 do sistema. Em branco: simulações com instabilidades.

Na Figura 6.2, em cada quadrante, o planeta c foi marcado como um ponto de c.i. (a_c, e_c) (i.e. com semi-eixo maior transformado em razão de períodos, por meio de $P_{ext}/P_{int} = (a_c/a_b)^{3/2}$, em que a_b é o semi-eixo maior do planeta b). Os mapas indicam, para o planeta externo, a máxima variação de seu semi-eixo maior, Δa, de sua excentricidade, Δe, e a amplitude de σ_1 em diferentes regiões. Para o *fit* de Robertson et al. (2012), as simulações foram feitas por 100 anos e, para o *fit*

de Ma et al. (2017), por 50 anos.

Com esses novos mapas, é possível observar que o planeta externo do sistema HD 155358, em ambos os *fits*, está dentro de uma faixa de razão de períodos entre 2 e 2.05 e está nas bordas de uma região de baixas variações de semi-eixo maior. Para ambos os *fits*, nos mapas de Δa e quadrante (0,0), o HD 155358 c apresenta variações de semi-eixo maior da ordem de 0.01 UA, ao passo que, no quadrante (0,π), as variações são de 0.04 UA, aproximadamente. Já nos mapas de Δe, as variações de excentricidade do planeta externo nos quadrantes (0,0) e (0, π) são da ordem de 0.1 e 0.04, respectivamente.

É possível notar que, nos mapas do catálogo apresentados na Figura 6.1, uma excentricidade e_2 do planeta menos massivo variando verticalmente um valor de 0.1 no quadrante (0,0) já é capaz de deslocar os *fits* da região de ocorrência de RMM, especialmente no caso do *Fit* 2, e introduzir caoticidade ao sistema. Nos mapas de amplitude de ângulo crítico da Figura 6.2, é possível constatar, também, que *fit* de Robertson et al. (2012) está nas bordas de uma região de oscilação, especialmente no quadrante (0,0).

Além disso, nota-se que, nos mapas da Figura 6.2, os centros da ressonância (i.e. as regiões de menor amplitudes de oscilação de σ_1) estão deslocados para razões de períodos ligeiramente maiores que 2, estando aproximadamente em 2.025. As marcações dos *fits* na Figura 6.1 indicou valores de amplitude de σ_1 maiores que aqueles que os *fits* apresentam em suas respectivas posições nos mapas da Figura 6.2. Neste caso, as amplitudes são de 60° para o *fit* de Ma et al. (2017) e de 80° para o *fit* de Robertson et al. (2012), aproximadamente.

Também, o mapa de amplitude de σ_1 da Figura 6.1 indica que, para as excentricidades de planeta interno dos *fits*, existe região de RMM com amplitudes de até 100° para valores de e_2 entre 0 e 0.15, aproximadamente. E, nos mapas de amplitude de σ_1 da Figura 6.2 para ambos os *fits*, essa, de fato, é uma boa estimativa da faixa de valores de e_2 associadas à ocorrência de RMM com amplitudes até 100° sobre a razão de períodos 2.

O fato do sistema estar dentro de regiões de RMM nos mapas de amplitude de ângulo crítico para ambos os *fits* na Figura 6.2, em geral, não significa que uma condição de oscilação permanece por tempos muito maiores que os de perturbação ressonante simulados, exceto para os casos de menores amplitudes (porque o código que computa as amplitudes não verifica, especificamente, se σ_1 é uma função periódica). Mas, como a região de RMM para a razão de períodos 2 e $e_1 = 0.14$ se mantém no mapa da Figura 6.1 por tempo secular, pode-se sugerir que o *fit* de Ma et al. (2017) nos quadrantes (0,0) e (0,π), marcado na Figura 6.2, também é capaz de se manter secularmente em condição de RMM. Isso, pois, na Figura 6.2, a região de RMM sobre razão de períodos 2 corresponde a bordas de uma região de oscilação centrada em 2.025.

Enfim, pode-se dizer que as previsões de dinâmica indicadas pelas marcações em mapas do catálogo estão coerentes com as possíveis evoluções do HD 155358 apresentadas nos mapas dinâmicos em escala de tempo ressonante, mesmo este não estando exatamente com períodos em 2:1. Além disso, a ausência de dinâmica ACR, confirmada pelas simulações de Ma et al. (2017) também concorda com o que os mapas do catálogo previram para um sistema com razão de massas próxima a 0.8 e os valores de excentricidade propostos nos *fits*.

Na Figura 6.3, observa-se duas colunas de gráficos que mostram a evolução secular do HD 155358 de acordo com os parâmetros dos *fits*, inclusive, suas c.i. de ângulos. Na coluna à esquerda,

estão as evoluções temporais das excentricidades dos planetas b e c, a evolução do ângulo crítico σ_1 e a evolução de $\Delta\varpi$, para os valores de Ma et al. (2017). Na coluna à direita, estão os gráficos para os valores de Robertson et al. (2012). É possível observar que, de fato, o *fit* de Ma et al. (2017) tem oscilação de σ_1 que se mantém por tempo secular ao redor de 0°, o que não acontece para o *fit* de Robertson et al. (2012), que circula ocasionalmente. Além disso, para ambos os *fits*, ocorre a circulação de $\Delta\varpi$.

Também, pode-se notar que a excentricidade do planeta c em Robertson et al. (2012) tem variação máxima de 0.16, aproximadamente, ao passo que, para Ma et al. (2017), a máxima variação é de 0.075. A Figura 6.1 indicou que o *fit* de Robertson et al. (2012) poderia sair da condição de RMM no quadrante (0,0), se sofresse variações horizontais de e_1 (e_b), ou verticais de e_2 (e_c) significativas, e isso de fato se manifestou nas simulações seculares.

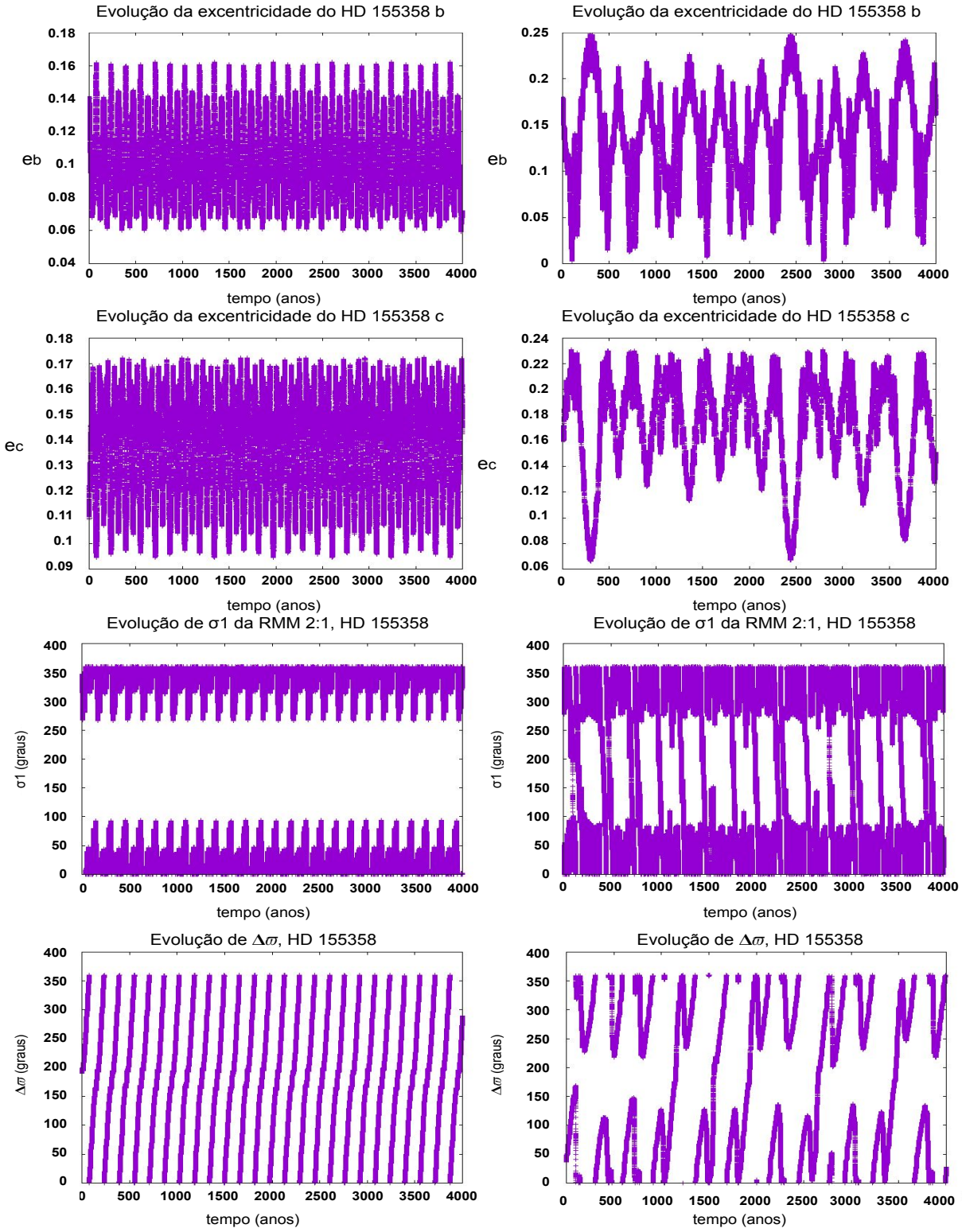


FIGURA 6.3. Simulações seculares do sistema HD 155358 segundo o *fits* de Ma et al. (2017), na coluna de gráficos à esquerda, e de Robertson et al. (2012), na coluna à direita.

6.1.2 Sistema K2-24

De acordo com Petigura et al. (2018), K2-24 é uma estrela de 1.07 $\pm 0.06 M_{\odot}$, raio de 1.16 $\pm 0.04 R_{\odot}$, temperatura efetiva de 5625 $\pm$60 K e metalicidade [Fe/H] +0.34 (dex). Ela está acompanhada de dois planetas que foram detectados pelo método de velocidade radial e acompanhados posteriormente por TTV (variação de tempo de trânsito), por Petigura et al. (2018). Os planetas interno e externo têm órbitas próximas à condição de RMM 2:1. Petigura et al. (2018) propõem, a partir de seus resultados combinando os dados de velocidade radial e de TTV, que os parâmetros planetários do sistema K2-24 são:

Planeta	m ($M_{\oplus}$)	Raio ($R_{\oplus}$)	T (dias)	e
K2-24 b	$19 \pm^{2.2}_{2.1}$	5.4 $\pm$0.2	20.88977 $\pm^{0.00034}_{0.00035}$	0.06 $\pm$0.01
K2-24 c	$15 \pm^{1.9}_{1.8}$	7.5 $\pm$0.3	42.3391 $\pm$0.0012	$<$ 0.07 (90% de confiança)

Tabela 6.3. Dados planetários do sistema K2-24, segundo Petigura et al. (2018).

Apesar de comentar que medições futuras poderão oferecer uma melhor caracterização do sistema K2-24, Petigura et al. (2018) expressa que, pelos dados coletados, o sistema não deve estar capturado em ressonância e a evolução das excentricidades deve se manifestar, principalmente, devido a perturbações seculares. Os autores interpretam que as excentricidades do sistema podem ter sido excitadas por mecanismos diferentes, como migração divergente - em que os planetas teriam cruzado a separatriz da RMM 2:1 -, interações estocásticas entre os planetas recém formados e um disco de gás turbulento ou interação com planetésimos.

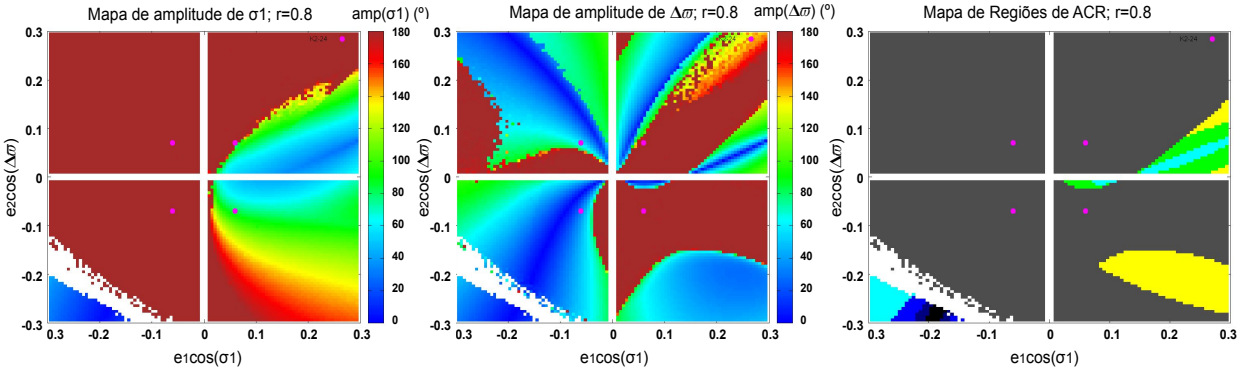


Figura 6.4. Marcação das excentricidades de do *fit* de Petigura et al. (2018) para o sistema K2-24 em mapas gerados de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, com razão de massas planetárias 0.8, $a_1 = 0.0516$ UA, tempo de 4 mil anos, razão de períodos 2 e massa estelar de $1 M_{\odot}$.

Na Figura 6.4, o sistema foi marcado em mapas do catálogo de razão 0.8 para estrela de massa solar. A marcação sugere que o sistema poderia apresentar RMM, sem ACR, no caso de apresentar ângulos próximo à condição $\sigma_1 = 0$ e $\Delta\varpi = \pi$. Na Figura 6.5, porém, novos mapas dinâmicos foram construídos em escala de tempo de perturbação ressonante, com os parâmetros propostos por Petigura et al. (2018), e é possível observar que o sistema está deslocado para razões de período maiores que 2 e está além da região de RMM.

De acordo com os resultados da Figura 6.5, o planeta K2-24 c apresenta variações máximas de semi-eixo maior e de excentricidade da ordem de 0.0003 UA e 0.002 no quadrante (0,0), respectivamente, em escala de tempo de 50 anos. No quadrante (0,π), as variações desses parâmetros são

de 0.0007 UA e 0.006, respectivamente. Além disso, o mapa de amplitude de ângulo crítico indica que ocorre circulação de σ_1 no sistema, para a atual configuração.

Assim, a dinâmica prevista pelos mapas do catálogo não estão em concordância com as dinâmicas possíveis para o sistema, indicadas na Figura 6.5, embora ele esteja próximo da RMM 2:1. Esse caso mostra que o uso do catálogo tem limitações, que se manifestam devido a forma da região de RMM no espaço de excentricidades e semi-eixos iniciais.

Anteriormente, no sistema HD 155358, foi observado que a previsão do catálogo está coerente com os mapas do tipo a vs. e, embora o sistema esteja sobre razão de períodos entre 2 e 2.05 nos *fits* de Robertson et al. (2012) e Ma et al. (2017). Já no caso do sistema K2-24, os períodos determinados satisfazem razão de períodos entre 2.02 e 2.04 e, mesmo assim, o sistema está fora da região de RMM.

É possível notar, no entanto, que, se o sistema estivesse sobre a razão de períodos 2 ou mais próximo dela, estaria em uma configuração capaz de apresentar RMM que se mantém por tempo secular, especialmente no quadrante (0,π), e, se os valores de e_c fossem mais baixos, também no quadrante (0,0). Nesse caso, os mapas do catálogo indicam que a excentricidade do planeta externo poderia cobrir valores até 0.08, aproximadamente, mantendo-se em RMM com amplitudes, em geral, menores que 120 graus. E essa estimativa concorda com o mapa de amplitude de σ_1 da Figura 6.5, sobre a razão de períodos 2.

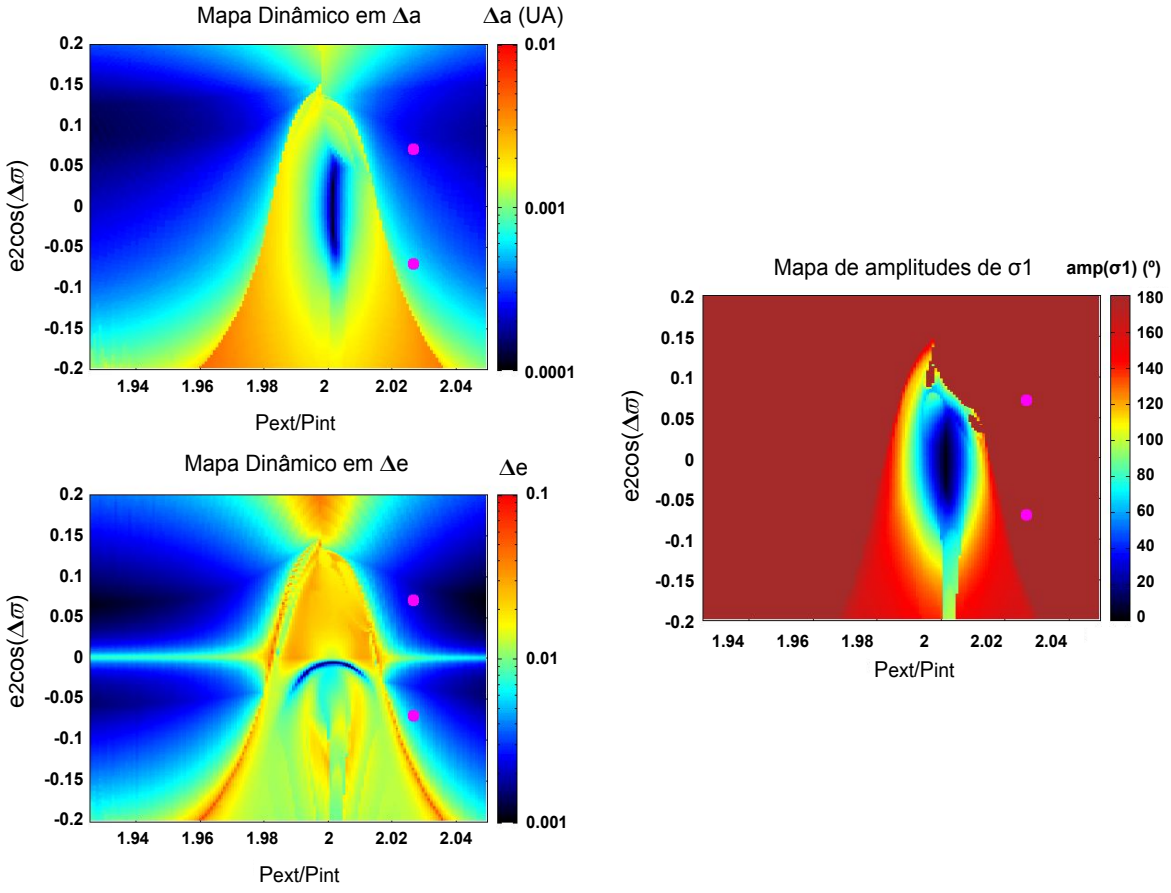


Figura 6.5. Mapas dinâmicos para o sistema K2-24 próximo à RMM 2:1, com tempo de integração de 50 anos e quadrantes angulares (0,0) - valores positivos do eixo vertical - e (0,π) - valores negativos. A marcação se refere aos valores (a, e) do planeta externo, c, de acordo com Petigura et al. (2018). À esquerda: mapas de máxima variação de semi-eixo maior, de máxima variação de excentricidade do planeta c. À direita: mapa de amplitude de σ_1.

De qualquer forma, como o sistema está fora da região de RMM nos mapas da Figura 6.5, também não pode desenvolver RMM (e ACR) que se mantém por tempo secular. No entanto, o sistema K2-24 teve seus parâmetros definidos em 2018 e suas órbitas ainda podem ser melhor caracterizadas quanto às excentricidades e, também, às condições angulares. Então, é possível que a marcação do sistema em mapas ainda se aproxime da região de RMM, embora dificilmente adentre ela, como a Figura 6.5 sugere.

Na Figura 6.6, mostra-se os gráficos das evoluções de excentricidades dos planetas K2-24 b e c, de σ_1 e de $\Delta\varpi$, por 4000 anos, com os parâmetros fornecidos por Petigura et al. (2018) ($e_c = 0.07$) e c.i. angulares correspondentes aos quadrantes (0,0) e (0,π). Pode-se perceber que, na configuração de semi-eixos e excentricidades atuais, o sistema evolui com circulação de σ_1, como indicado pelos mapas da Figura 6.5 e com oscilação de $\Delta\varpi$, em ambos os quadrantes angulares. Se o sistema observado tiver ângulos próximos às condições dos quadrantes (0,0) e (0,π), portanto, evolui sem RMM, mas com corrotação apsidal ao redor de 0 ou π, respectivamente.

Apesar de os mapas do catálogo gerado não terem previsto a dinâmica do sistema K2-24 corretamente, vale comentar um último aspecto. A forma da região de oscilação de ângulo crítico nos mapas de razão de períodos vs. e_2 nos sistemas HD 155358 e K2-24 são parecidas, embora a região do HD 155358 cubra uma faixa mais larga de valores de semi-eixos maiores a_2. Os sistemas diferem entre si não só por seus parâmetros orbitais, mas pela massa estelar, que é mais baixa no caso do HD 155358. Observando esse fato, a Figura 6.7 mostra simulações que foram realizadas para o sistema K2-24, com os mesmos parâmetros planetários utilizados na Figura 6.5, porém, com massas estelares de $0.5M_\odot$ na primeira linha de mapas e de $2M_\odot$ na terceira linha. A linha intermediária é uma reprodução da Figura 6.5, para fins de comparação.

Então, na Figura 6.7, pode-se notar que as regiões de RMM nos mapas de razão de períodos vs. e_2 têm aproximadamente a mesma "altura" nos valores de excentricidades, mas o aumento da massa estelar faz com que a largura da região se estreite por inteiro. Como se nota, o estreitamento é capaz de impedir que a RMM se desenvolva em um sistema e esse é motivo pelo qual a dinâmica do K2-24 não foi bem estimada pelos mapas do catálogo, embora, utilizando eles, tenha sido possível estimar a dinâmica do sistema HD 155358. Essa observação é importante, pois um sistema semelhante ao K2-24 em parâmetros orbitais e massas planetárias, mas que apresenta massa estelar mais baixa, por exemplo, não necessariamente desobedece a estimativa do catálogo.

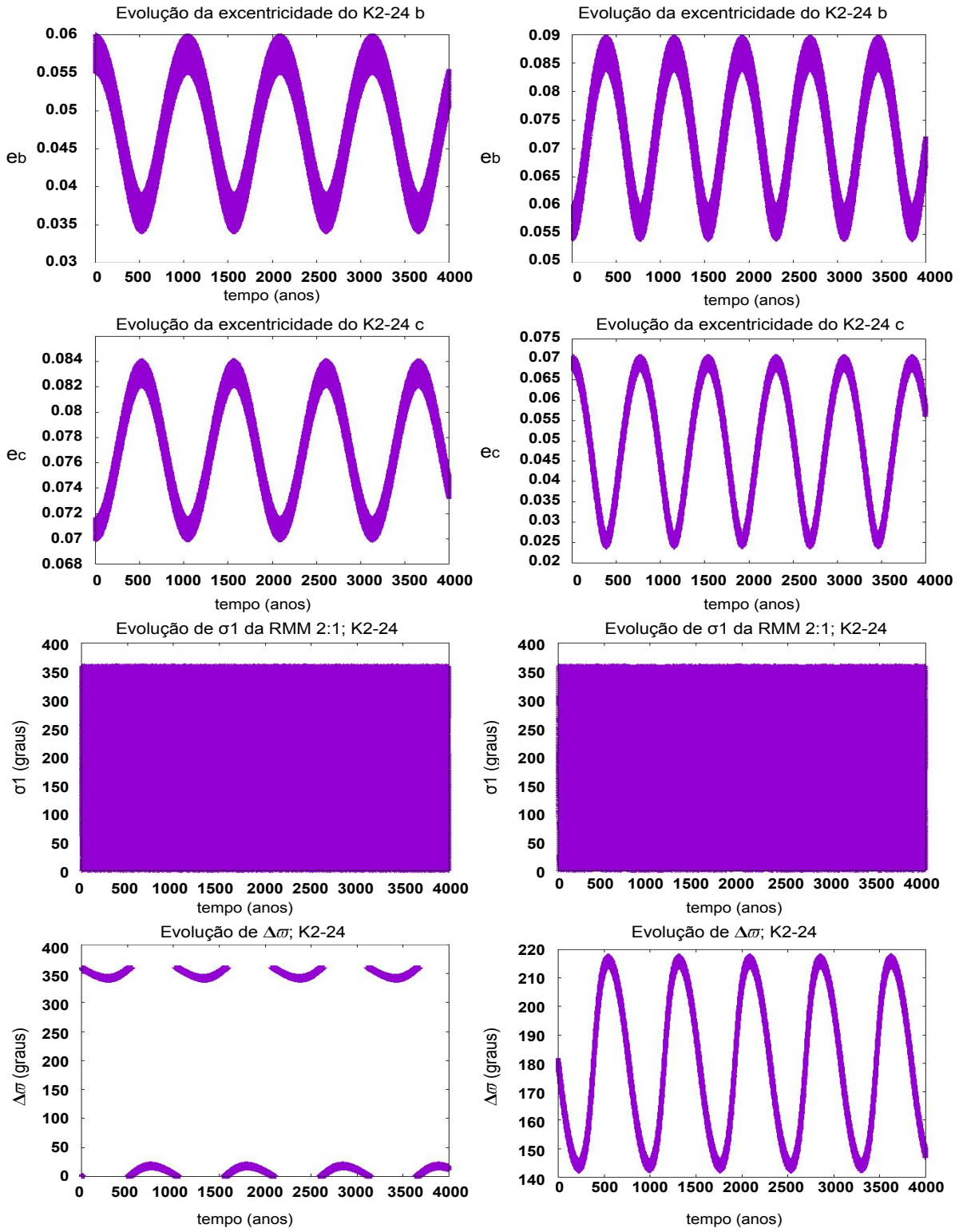


FIGURA 6.6. Simulações seculares do sistema K2-24, com parâmetros do *fit* de Petigura et al. (2018). Na coluna de gráficos à esquerda, utilizou-se c.i. angulares correspondentes ao quadrante (0,0) e, à direita, ao quadrante $(0,\pi)$.

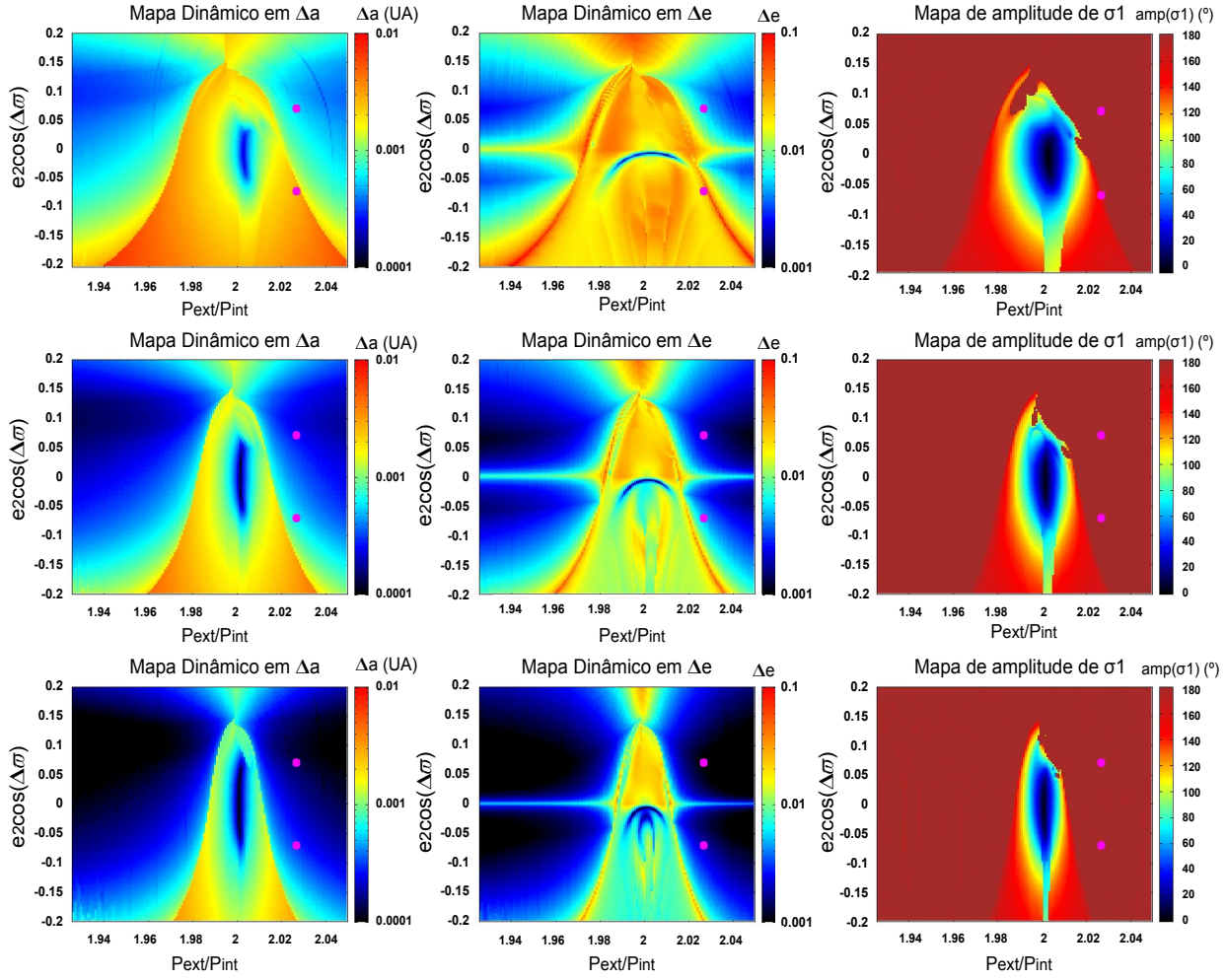


FIGURA 6.7. Mapas dinâmicos para o sistema K2-24 próximo à RMM 2:1, com tempo de integração de 50 anos e com quadrantes angulares (0,0) e (0,π). A marcação se refere aos valores (a, e) do planeta externo, c, de acordo com Petigura et al. (2018). Na primeira linha de mapas, utilizou-se uma estrela de $0.5M_{\odot}$, na segunda linha, $1.07M_{\odot}$ - como foi observado -, e na terceira linha, $2M_{\odot}$. As colunas são mapas de máxima variação de semi-eixo maior e de excentricidade do planeta externo (K2-24 c) e mapas de amplitude de σ_1, respectivamente.

6.1.3 Sistema TOI-216

Kipping et al. (2019) anunciou que a estrela TOI-216 é acompanhada por dois planetas próximos à RMM 2:1. Os planetas foram descobertos com o telescópio espacial TESS [1] (Transiting Exoplanet Survey Satellite), que tem sua importância por ser o substituto do satélite Kepler e foi lançado com o objetivo de dar continuidade à busca por sistemas de exoplanetas. O TOI-216 foi observado pelo método do transito e de TTV (Kipping et al. (2019)). A estrela está a 178.84 $\pm^{0.89}_{0.88}$ pc, tem massa de $0.874\pm^{0.035}_{0.034} M_\odot$, raio $0.838\pm^{0.043}_{0.030} R_\odot$ e temperatura efetiva de 5026±125 K. Estimou-se os seguintes parâmetros para os planetas:

Planeta	m ($M_\oplus$)	Raio ($R_\oplus$)	a (UA)	e	T (dias)
TOI-216 b	$30\ \pm^{20}_{14}$	$7.69\ \pm^{1.62}_{0.83}$	$0.1293\pm^{0.0067}_{0.0051}$	$0.132\pm^{0.059}_{0.023}$	$17.089\ \pm^{0.011}_{0.015}$
TOI-216 c	$200\pm^{170}_{100}$	$11.29\pm^{0.58}_{0.42}$	$0.2069\pm^{0.0107}_{0.0082}$	$0.029\pm^{0.037}_{0.020}$	$34.556\ \pm^{0.014}_{0.010}$

TABELA 6.4. Dados planetários do sistema TOI-216, segundo Kipping et al. (2019).

A Figura 6.8 mostra a marcação das excentricidades desse sistema em mapas do catálogo para razão de massas planetárias 6 e estrela com $1M_\odot$, indicando que o sistema está dentro de regiões de RMM com amplitudes de σ_1 menores que 60° nos quadrantes de c.i. angulares (0,0) e (0,π), mas está fora de regiões de oscilação de $\Delta\varpi$ e, portanto, de ocorrência de ACR.

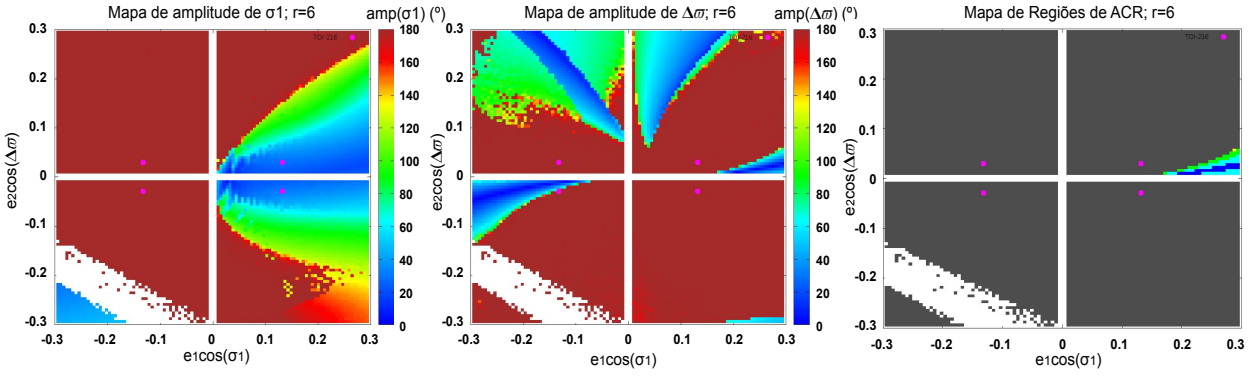


FIGURA 6.8. Marcação das excentricidades de do *fit* de Kipping et al. (2019) para o sistema TOI-216 em mapas gerados de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, com razão de massas planetárias 6, $a_1 = 0.0516$ UA, tempo de 4 mil anos, razão de períodos 2 e massa estelar de $1M_\odot$.

Na Figura 6.9, para comparação, estão mapas análogos aos da Figura 6.8, mas que foram construídos com os parâmetros propostos por Kipping et al. (2019) para o sistema TOI-216, que tem razão de períodos 2.0242, aproximadamente, estrela menos massiva que o sol e semi-eixo maior do planeta interno 0.1293. É possível observar que os mapas são semelhantes aos do catálogo, e não iguais a eles.

No entanto, as estruturas principais seculares dos mapas se mantêm nos dois casos, como a faixa de instabilidades no quadrante (π,π), mais acentuada nos mapas específicos para o TOI-216, e a região de RMM contínua entre os quadrantes (0,0) e (0,π), embora esta última seja ligeiramente diferente para valores de e_1 e e_2 menores que 0.1. Também, nota-se o aspecto das regiões de oscilação de $\Delta\varpi$ nos quatro quadrantes angulares, que são um pouco menores para os mapas do TOI-216, e a localização da região de ACR no quadrante (0,0). É possível observar que, tanto

[1] www.nasa.gov/tess-transiting-exoplanet-survey-satellite

nos mapas do catálogo de parâmetros mais próximos aos do sistema TOI-216, como nos mapas específicos para o TOI-216, propriamente, o sistema está em regiões de RMM nos quadrantes (0,0) e (0,π).

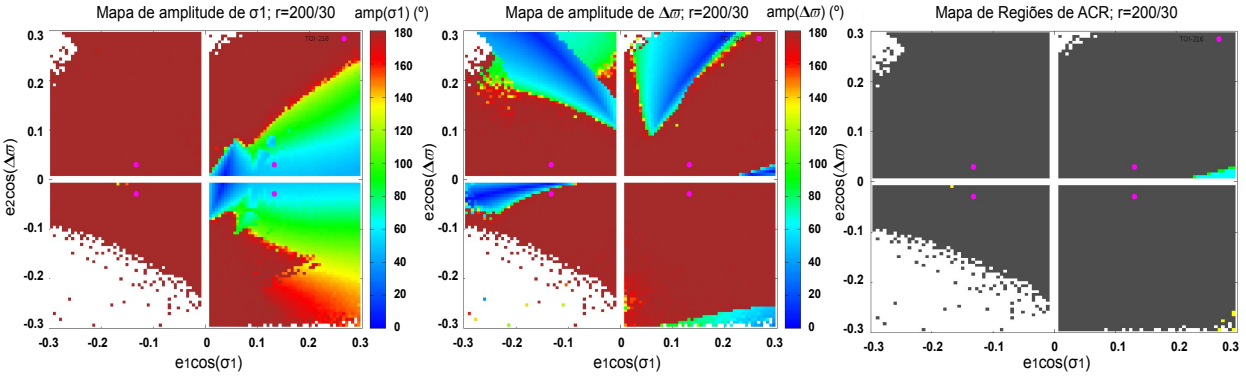


FIGURA 6.9. Marcação das excentricidades de do *fit* de Kipping et al. (2019) para o sistema TOI-216 em mapas gerados de amplitude de σ_1, de amplitude de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, com razão de massas planetárias 200/30, $a_1 = 0.1293$ UA, $a_2 = 0.2069$ UA, tempo de 4 mil anos, razão de períodos 2.0242 e massa estelar de $0.874 M_\odot$.

Na Figura 6.10, é possível observar mapas de máxima variação de semi-eixo maior e de excentricidade do planeta menos massivo, TOI-216 b, bem como de amplitude de σ_1, simulados com tempo final de 18 anos. Na coluna de mapas à esquerda, utilizou-se, como c.i. angulares, aquelas correspondentes ao quadrante (0,0) dos mapas $e_1 cos(\sigma_1)$ vs. $e_2 cos(\Delta\varpi)$ e, na coluna de mapas à direita da Figura 6.10, c.i. correspondentes ao quadrante (0,π).

Os mapas da Figura 6.10 foram dispostos separadamente, e não com quadrantes (0,0) e (0,π) "encaixados" como foi feito na Figura 6.2, pois as regiões de RMM não se comunicam de forma contínua nos mapas $e_1 cos(\sigma_1)$ vs. $e_2 cos(\Delta\varpi)$ ao longo de um valor e_2 fixo, como fazem para uma mesma c.i. de e_1. E os mapas dinâmicos da Figura 6.10 foram construídos com uma mesma c.i. e_c, variando-se apenas o semi-eixo maior e a excentricidade iniciais do planeta interno (b) do sistema.

É possível notar, na Figura 6.10 que existem estruturas em forma de V no espaço de razões de períodos orbitais e excentricidades, associadas à perturbação ressonante no sistema TOI-216, e que os mapas para ambos os quadrantes (0,0) e (0,π) são semelhantes. Utilizando os dados do planeta TOI-216 b, ele foi marcado com um ponto nos mapas, que se localiza dentro de uma região de baixas variações máximas de semi-eixo maior e de excentricidade, bem como de oscilação de ângulo crítico. Dos mapas, deduz-se que a máxima variação de semi-eixo maior do TOI-216 b é da ordem de 0.001 UA, sua máxima variação de excentricidade é da ordem de 0.04 e a amplitude de σ_1 é da ordem de 60°, dentro da escala de tempo de 18 anos.

Nesses mapas, é possível observar o comportamento comentado em Literatura, de que a condição de RMM para baixas excentricidades pode se desviar da posição em que ocorre a razão de períodos 2 exata, seguindo uma curva que pode ser modelada como lei de estrutura. Para o sistema TOI-216, esse desvio ocorre em direção a valores de a_b menores (razões de período maiores que 2), principalmente, para excentricidades e_b menores que 0.15.

Na Figura 6.11, pode-se observar a evolução das excentricidades orbitais dos planetas e dos ângulos σ_1 e $\Delta\varpi$ do sistema, que foram simuladas com os parâmetros de Kipping et al. (2019) e com as c.i. angulares dos quadrantes (0,0) e (0,π). Nessas condições, assim como indicaram os mapas do catálogo, o sistema se mantém em RMM por tempo secular com amplitude de ângulo

crítico menor que 60°, embora o catálogo tenha indicado amplitudes de cerca de 50° e as simulações individuais revelam valores entre 50 e 60°.

Além disso, o sistema não apresenta ACR, pois está em região de circulação de $\Delta\varpi$, como os mapas do catálogo sugerem, e as evoluções da Figura 6.11 confirmam esse comportamento. No caso do sistema TOI-216, portanto, as previsões do catálogo de mapas estão coerentes com as dinâmicas possíveis para o sistema com seus próprios parâmetros, se este tiver, de fato, condições angulares que permitem a dinâmica de RMM e estão próximas das c.i. angulares simuladas.

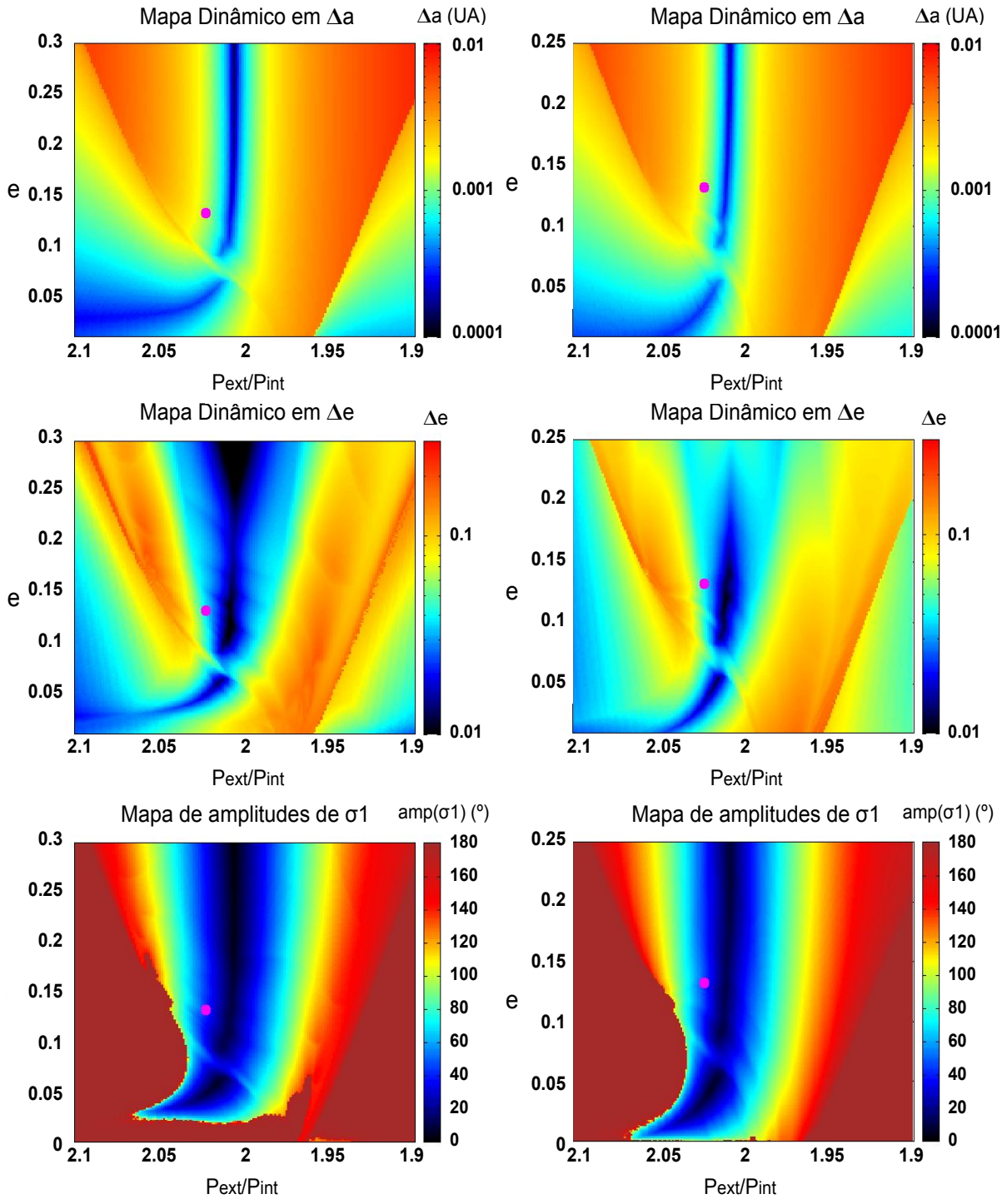


FIGURA 6.10. Mapas dinâmicos para o sistema TOI-216 próximo à RMM 2:1, com duração de 18 anos. A coluna de mapas à esquerda tem c.i. angulares correspondentes ao quadrante $(\sigma_1, \Delta\varpi) = (0, 0)$ e, à direita, ao quadrante $(0,\pi)$. A marcação se refere aos valores (a, e) do planeta interno, de acordo com Kipping et al. (2019). De cima para baixo: mapas de máxima variação de semi-eixo maior do planeta b, de máxima variação de excentricidade do planeta b e de amplitude de oscilação de σ_1.

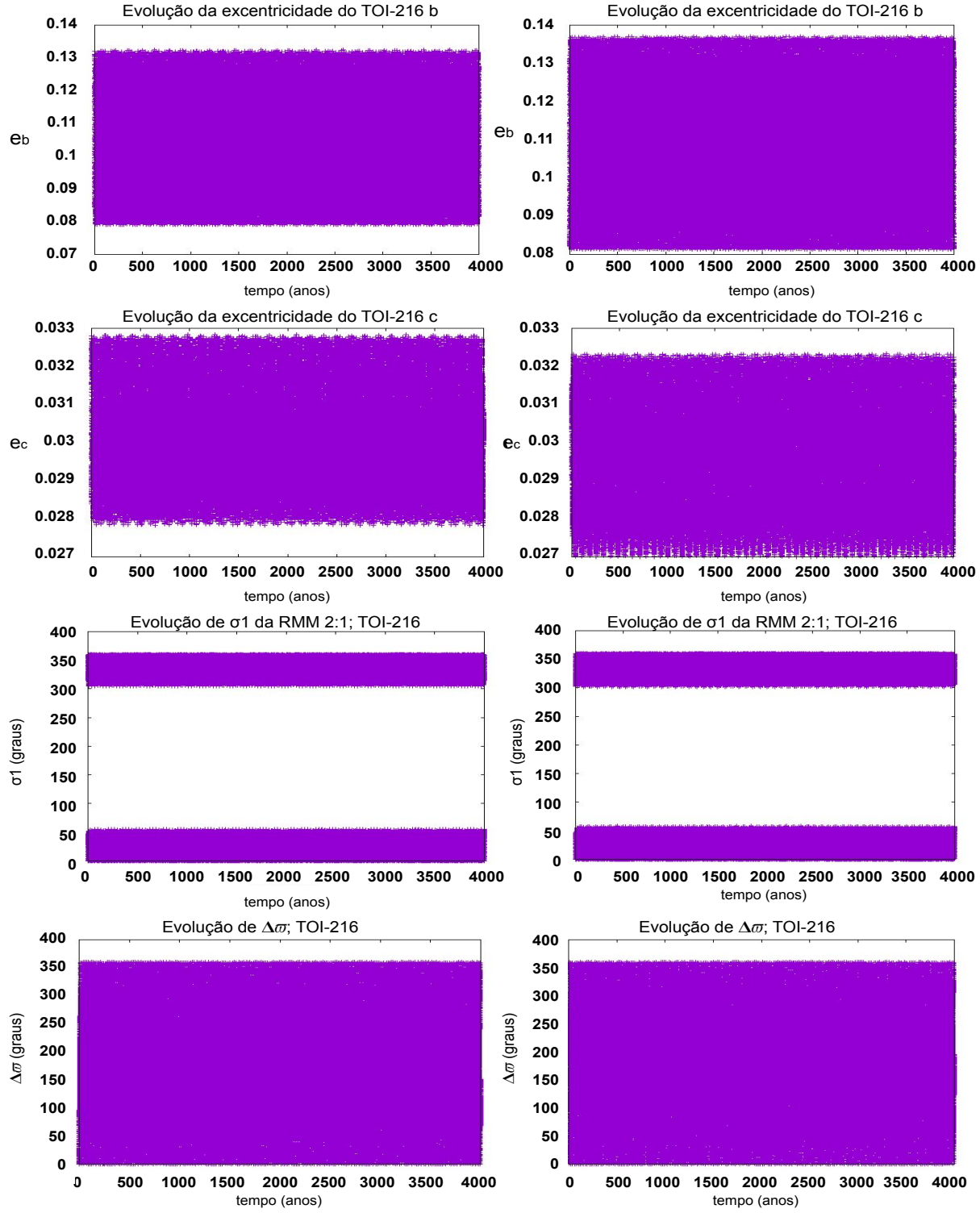


FIGURA 6.11. Simulações seculares do sistema TOI-216, com parâmetros do *fit* de Kipping et al. (2019). Na coluna de gráficos à esquerda, utilizou-se c.i. angulares correspondentes ao quadrante (0,0) e, à direita, ao quadrante $(0,\pi)$.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho, uma série de simulações numéricas foram realizadas para sistemas hipotéticos de uma estrela e dois planetas com períodos orbitais iniciais em proporção 2:1 e estudou-se como as razões de massas planetárias se correlacionam com a extensão das regiões de ocorrência de RMM *simétricas* no espaço de excentricidades. Em Resultados, foram construídos gráficos de percentuais de ocorrência de RMM, de oscilação de $\Delta\varpi$, de dinâmica de ACR, de circulação de ângulos e de instabilidades como função das razões de massas planetárias.

Também, foi possível observar a evolução das regiões de ressonância com o aumento da razão em mapas de grade $e_1 cos(\sigma_1)$ vs. $e_2 cos(\Delta\varpi)$ para sistemas com estrela de massa solar e de $0.5 M_\odot$, em diferentes condições de semi-eixos iniciais. Esses mapas constituem um catálogo que pode ser utilizado para estimar a dinâmica de sistemas reais que estão próximos à RMM 2:1, têm razão de massas planetárias definida e são coplanares. No catálogo, para cada razão de massas, pôde-se distinguir as condições iniciais de excentricidade e de ângulos associadas à dinâmica ACR e, também, a regimes oscilatórios e circulatórios de ângulo crítico da RMM e de $\Delta\varpi$ separadamente.

Mais ainda, utilizando mapas do catálogo, estimou-se a dinâmica de sistemas reais selecionados para estudo e comparações foram feitas entre as estimativas e simulações seculares dos sistemas. Também, comparou-se as estimativas baseadas no catálogo com mapas do tipo a vs. e gerados para cada sistema.

7.1 Sobre as Ocorrências de RMM/ACR

Para alguns sistemas planetários observados, existem ajustes orbitais que restringem configurações angulares possíveis. As simulações de sistemas hipotéticos realizadas neste trabalho, porém, consideraram diferentes quadrantes de c.i. angulares sendo igualmente possíveis. Assim, não havendo preferência quanto às condições angulares de um sistema, os gráficos de percentuais de ocorrência indicaram que, independentemente dos semi-eixos dos planetas em 2:1, ocorre um crescimento aproximadamente linear da ocorrência de RMM com o aumento da razão de massas até razão próxima a 1, sendo esta razão, portanto, mais favorável à RMM. Para razões maiores que 1, o percentual de simulações em RMM permanece constante ou decai muito gradualmente, indicando que a ocorrência de RMM se correlaciona com razão de massas de forma significativa

para razões baixas, mas, para valores maiores que 1, em geral, nenhuma razão é especialmente mais favorável que outra à dinâmica de RMM.

Considerando-se apenas a ocorrência de RMM com amplitudes de σ_1 menores ou iguais a 10°, no entanto, ela é maior sobre razões de massas entre 1 e 1.5, se reduzindo a 0% já para razões maiores que 4. Como existe essa mudança nas ocorrências de RMM, bem marcada pela faixa de razões próximas a 1, sugere-se que deve haver uma diferença no comportamento geral das soluções de sistemas em RMM simétrica que têm razões maiores ou menores que essa faixa e, também, que as menores amplitudes de ângulo crítico acontecem, preferencialmente, para os sistemas que têm razões dentro da faixa.

As curvas de ocorrência de oscilação de $\Delta\varpi$ indicaram, também, que razões de massas próximas a 1 são favoráveis à corrotação apsidal e que, à medida que a razão aumenta, a ocorrência desse tipo de dinâmica diminui. Além disso, notou-se que a ocorrência de oscilação de $\Delta\varpi$, para razões menores que 6, assume valores percentuais maiores que a ocorrência de RMM, indicando que, no caso em que não há preferência de condições angulares, o fenômeno de corrotação apsidal é mais comum do que a RMM simétrica dentro das simulações com períodos orbitais em 2:1. Para razões maiores que 6, no entanto, a RMM é mais comum.

Como uma combinação das ocorrências de RMM e de oscilação de $\Delta\varpi$, existe uma maior frequência das simulações em ACR simétrica para razões de massas mais baixas que 1, que acontece devido a uma maior quantidade de simulações com amplitudes de σ_1 maiores que 100°. Considerando apenas as simulações de amplitudes de σ_1 e de $\Delta\varpi$ menores que 20°, a maior ocorrência de ACR acontece para razão de massas planetárias 1.2, sendo esta, portanto, a razão mais favorável às oscilações de baixa amplitude.

Também, independentemente de critérios de amplitude, a ocorrência de ACR diminui a partir de razão de massas 2, de modo geral, tendendo assintoticamente a 0% para razões maiores que 20. Além disso, a ACR de grandes amplitudes se torna cada vez menos provável para razões maiores que 2, restando, principalmente, sistemas com amplitudes de σ_1 e de $\Delta\varpi$ menores que 50° para razões entre 6 e 20.

Considerando-se todas as simulações que desenvolveram ACR, 90% daquelas com amplitudes de σ_1 e $\Delta\varpi$ menores que 10°, 50° e 150° têm razões de massas menores que 1.5, 2.5 e 4, respectivamente. Assim, razões maiores que 4 não são favoráveis ao fenômeno de ACR e, também, ACR de amplitudes baixas acontecem preferencialmente para razões menores que 2.5 ou 1.5.

Além disso, a menor ocorrência de simulações instáveis (com colisão e/ou ejeção) acontece na faixa de razões de massas entre 1 e 1.5, o mesmo intervalo em que há uma mudança nas curvas de ocorrência de RMM e uma promoção da ocorrência de simulações com RMM/ACR 2:1. Então, tal intervalo de razões não só é favorável à ACR, mas também promove a estabilidade das simulações de modo geral. Também, a partir de razão de massas 1.5, a ocorrência de instabilidades cresce com o aumento da razão de massas.

7.2 Sobre o Aspecto dos Mapas Dinâmicos

Observando os mapas de amplitude de σ_1, de $\Delta\varpi$ e de regiões de ACR, os casos de a_1 igual a 0.5 e 1 UA evoluem da mesma forma com o aumento da razão de massas. O caso com $a_1 = 0.0516$ UA, porém, assemelha-se aos outros pela evolução dos quadrantes $(\sigma_1, \Delta\varpi)$=(0,0) e (π, π), mas difere no (0,π), especialmente, para razões de massas baixas. Assim, as regiões de RMM/ACR não são totalmente independentes da distância dos planetas à estrela, porém, os casos mais distantes revelam que existe um padrão na evolução das regiões em função da razão de massas que é próprio da RMM 2:1. Também, os mapas simulados com estrela de $0.5M_{\odot}$ são semelhantes ao caso solar de mesmo a_1 e, portanto, a evolução das regiões em função das razões não depende fortemente da massa estelar.

As regiões de RMM 2:1 para razões de massas menores que 0.25 se concentram no quadrante de ângulos (0,π) e têm amplitudes de σ_1 em geral maiores que 50°. À medida que a razão de massas aumenta, as regiões avançam para as baixas excentricidades e emergem no quadrante (0,0). As regiões passam, então, a existir e evoluir em função da razão de massas, especialmente, dentro dos quadrantes (0,π) e (0,0) e as simulações com menores amplitudes de σ_1 surgem no interior das regiões de amplitudes maiores. Esse processo ocorre para qualquer a_1. A partir de razão 0.9, as regiões de RMM não mudam mais significativamente de forma e de localização nos mapas, independentemente de a_1.

As menores amplitudes de σ_1, considerando-se os quadrantes (0,0) e (0,π) e todas as razões de massas, ocorrem para excentricidades do planeta externo, em geral, menores que 0.1. Também, a partir de razão 0.3, surge RMM no quadrante (π, π) para valores de excentricidade que estão acima de uma faixa de instabilidades bem marcada, dentro da qual ocorre cruzamento de órbitas. Instabilidades se concentram especialmente nesse quadrante. A faixa diminui de espessura até razões próximas de 1 e aumenta para razões cada vez maiores e, para uma mesma razão de massas, a espessura pode ser diferente entre os casos de diferentes a_1 e de massas planetárias individuais.

Os mapas de regiões de RMM mostram que as simulações em RMM 2:1 simétricas não se distribuem aleatoriamente no espaço de excentricidades e, dependendo da razão de massas planetárias, existem valores de excentricidade e ângulos capazes de promover essa dinâmica. Porém, para razões menores que 1, como afirmado por Michtchenko et al. (2008b), também é possível que σ_2 oscile para a RMM 2:1 simétrica. Então, podem existir regiões adicionais de oscilação de ângulo crítico em eventuais mapas de amplitude de σ_2.

Nos mapas de amplitude de $\Delta\varpi$, os casos de a_1 igual 0.5 e 1 UA também têm regiões de oscilação de $\Delta\varpi$ semelhantes, que evoluem da mesma maneira como função da razão de massas e isso se reproduz nos mapas de regiões de ACR. Como antes, o caso de $a_1 = 0.0516$ UA se distingue, especialmente, pela evolução pelo quadrante (0,π) em razões menores que 0.4. Não ocorre oscilação de $\Delta\varpi$ no quadrante (0,π) para razões de 1.8 a 5 para qualquer a_1. Mas, de razão 6 em diante, pode ocorrer oscilações de $\Delta\varpi$ para valores de e_2, em geral, maiores que 0.2. E, ao contrário do que acontece nos mapas de regiões de RMM, ocorre oscilação de $\Delta\varpi$ no quadrante (π,0) para todas as razões de massas testadas.

A partir da razão de massas planetárias 0.3, cresce uma região de oscilação de $\Delta\varpi$ no quadrante (0,0) em valores de e_2 baixos (menores que 0.05) e e_1 maior que 0.1. Com o aumento da

razão de massas, a região alcança valores maiores de e_1 e de e_2. A forma da região é aproximadamente triangular: e_2 chega a pouco menos que 0.2 quando e_1 assume o valor máximo testado de 0.3. E, no interior da região triangular, com o aumento da razão de massas, cresce uma faixa central de simulações que têm amplitudes baixas de $\Delta\varpi$ e apresentam ACR.

Essa faixa desce como um todo para valores de e_2 menores, quando a razão de massas aumenta e isso é mais evidente para razões a partir de 0.8. Tal comportamento concorda com o modelo teórico de Beaugé et al. (2006) para as curvas de solução ACR exatas. No modelo, as curvas correspondem a ACR de amplitudes nulas, mas, nos mapas numéricos deste projeto, aparecem curvas de baixas amplitudes no lugar das de amplitudes nulas, como se espera no problema não ponderado. O modelo também descreve bem o comportamento das curvas numéricas nos outros quadrantes.

Para qualquer a_1, só ocorre ACR no quadrante (0,π) para razões de massas de 0.05 a 0.25, prevalecendo as de amplitudes maiores que 100°. Também, a partir de razão 0.3, em (π, π), começa surgir uma região de ACR com amplitudes menores que 100°, para excentricidades acima da faixa de instabilidades. Existe ACR acima dessa faixa até na razão de massas 5. Ainda acima da faixa de instabilidades, a partir de razão 0.6, surge uma região com simulações com oscilações de amplitudes baixas, menores que 5°, que se sobressaem em razão 1.2. Essas simulações, em união com aquelas de baixa amplitude do quadrante (0,0), são responsáveis pelo pico de ocorrência de ACR de amplitudes menores que 5° em razão 1.2.

Nos mapas de regiões de ACR, a evolução no quadrante (π, π) em função da razão de massas é independente de a_1. Nos quadrantes (0,0) e (0,π), a partir de razão 1.8, existem as mesmas regiões de ACR com amplitudes menores que 50° para uma mesma razão de massas planetárias. A partir de razão 6, há também sempre as mesmas regiões de ACR com amplitudes menores que 20° para uma mesma razão, independentemente de a_1, indicando que estas são regiões características da RMM 2:1. Considerando as menores amplitudes de oscilação, no entanto, há diferenças entre o caso de planeta interno mais próximo da estrela e os outros.

7.3 Sobre as Aplicações do Catálogo de Mapas

Na seção Aplicações, comparou-se previsões de dinâmica indicadas pelo catálogo de mapas gerado com a análise de três sistemas observados de diferentes razões de massas planetárias: HD 155358, K2-24 e TOI-216. No primeiro caso, as previsões se mostraram coerentes com as simulações seculares realizadas para o sistema e, também, com mapas a vs. e que foram construídos com parâmetros específicos do HD 155358, explorando a vizinhança da RMM 2:1.

No caso do sistema K2-24, porém, mostrou-se que o catálogo tem limitações, as quais se manifestam devido à forma da região de RMM no espaço de excentricidades e semi-eixos iniciais. Observou-se que as regiões de RMM nesse espaço para os sistemas HD 155358 e K2-24 são parecidas, embora a região do HD 155358 cubra um intervalo maior de semi-eixos. Simulando o sistema K2-24 com outras massas estelares, notou-se que o aumento da massa da estrela estreita significativamente a região de RMM nos mapas do tipo a vs. e, o que pode dificultar que um sistema esteja capturado em ressonância.

A massa estelar do K2-24 não permite RMM para a configuração planetária observada e por isso, a dinâmica desse sistema não foi bem estimada pelos mapas do catálogo, embora ele tivesse períodos próximos à relação 2:1. Outro eventual sistema com parâmetros planetários semelhantes aos do K2-24 e com estrela menos massiva, porém, não necessariamente desobedece a estimativa do catálogo.

Quanto ao TOI-216, mostrou-se que os mapas do catálogo estão coerentes com as estruturas que aparecem em mapas gerados especificamente para este sistema, embora a faixa de instabilidades no quadrante (π, π) é mais acentuada para o sistema real. Também, as simulações seculares realizadas obedecem a estimativa do catálogo.

Pode-se concluir, enfim, que quanto mais próximo um sistema observado está da razão de períodos 2:1 exata, mais confiável é a estimativa de dinâmica que pode ser feita a partir do catálogo gerado, em especial, quando a massa da estrela é menor que $1M_{\odot}$. Ambos os sistemas TOI-216 e HD 155358, cujas dinâmicas foram bem descritas por mapas do catálogo, têm massa estelar menor que $1M_{\odot}$, diferentemente do caso K2-24, e a menor massa estelar se mostrou associada a regiões de RMM mais largas no intervalo de semi-eixos maiores ao redor da posição de RMM 2:1 exata.

Referências Bibliográficas

Philip J. Armitage. *Astrophysics of Planet Formation*. 2010.

June Barrow-Green. The dramatic episode of sundman. *Historia Mathematica*, 37(2):164 – 203, 2010. ISSN 0315-0860. doi: https://doi.org/10.1016/j.hm.2009.12.004.

K. Batygin & A. Morbidelli. Analytical treatment of planetary resonances. *Astronomy and Astrophysics*, 556:A28, 2013. doi: 10.1051/0004-6361/201220907.

C. Beaugé. On a Global Expansion of the Disturbing Function in the Planar Elliptic Restricted Three-Body Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 64(4):313–350, 1996. doi: 10.1007/BF00054551.

C. Beaugé & T. A. Michtchenko. Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 341(3):760–770, 2003. doi: 10.1046/j.1365-8711.2003.06345.x.

C. Beaugé, S. Ferraz-Mello, & T. A. Michtchenko. Extrasolar Planets in Mean-Motion Resonance: Apses Alignment and Asymmetric Stationary Solutions. *Astrophysical Journal*, 593(2):1124–1133, 2003. doi: 10.1086/376568.

C. Beaugé. On a global expansion of the planar disturbing function. 01 1997. doi: 10.1007/978-94-011-5510-6_22.

C. Beaugé, T. A. Michtchenko, & S. Ferraz-Mello. Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 365(4):1160–1170, 2006. ISSN 0035-8711. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09779.x.

R. Brasser, A. C. Barr, & V. Dobos. The tidal parameters of TRAPPIST-1b and c. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(1):34–47, 2019. doi: 10.1093/MonthlyNoticesoftheRoyalAstronomicalSociety/stz1231.

J. E. Chambers & F. Migliorini. Mercury - A New Software Package for Orbital Integrations. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, volume 29 of *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, page 27.06, 1997.

Katherine M. Deck & Konstantin Batygin. Migration of Two Massive Planets into (and out of) First Order Mean Motion Resonances. *Astrophysical Journal*, 810(2):119, 2015. doi: 10.1088/0004-637X/810/2/119.

Tabaré Gallardo. Atlas of the mean motion resonances in the Solar System. *Icarus*, 184(1):29–38, 2006. doi: 10.1016/j.icarus.2006.04.001.

Tabaré Gallardo, Cristián Beaugé, & Cristian A. Giuppone. Semi-analytical model for planetary resonances: application to planets around single and binary stars. *Astronomy and Astrophysics*, 2020.

Pini Gurfil. Nonlinear feedback control of low-thrust orbital transfer in a central gravitational field. *Acta Astronautica*, 60:631–648, 2007. doi: 10.1016/j.actaastro.2006.10.001.

Andrew W. Howard, Roberto Sanchis-Ojeda, Geoffrey W. Marcy, John Asher Johnson, Joshua N. Winn, Howard Isaacson, Debra A. Fischer, Benjamin J. Fulton, Evan Sinukoff, & Jonathan J. Fortney. A rocky composition for an Earth-sized exoplanet. Nature, 503(7476):381–384, November 2013. doi: 10.1038/nature12767.

Jane Huang, Sean M. Andrews, Cornelis P. Dullemond, Andrea Isella, Laura M. Pérez, Viviana V. Guzmán, Karin I. Öberg, Zhaohuan Zhu, Shangjia Zhang, Xue-Ning Bai, Myriam Benisty, Tilman Birnstiel, John M. Carpenter, A. Meredith Hughes, Luca Ricci, Erik Weaver, & David J. Wilner. The Disk Substructures at High Angular Resolution Project (DSHARP). II. Characteristics of Annular Substructures. *Astrophysical Journal*, 869(2):L42, 2018. doi: 10.3847/2041-8213/aaf740.

David Kipping, David Nesvorný, Joel Hartman, Guillermo Torres, Gaspar Bakos, Tiffany Jansen, & Alex Teachey. A resonant pair of warm giant planets revealed by TESS. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 486(4):4980–4986, 2019. doi: 10.1093/MonthlyNoticesoftheRoyalAstronomicalSociety/stz1141.

W. Kley, J. Peitz, & G. Bryden. Evolution of planetary systems in resonance. *Astronomy and Astrophysics*, 414:735–747, 2004. doi: 10.1051/0004-6361:20031589.

W. Kley, M. H. Lee, N. Murray, & S. J. Peale. Modeling the resonant planetary system GJ 876. *Astronomy and Astrophysics*, 437(2):727–742, 2005. doi: 10.1051/0004-6361:20052656.

Wilhelm Kley. Planet Formation and Disk-Planet Interactions. *Saas-Fee Advanced Course*, 45: 151, 2019. doi: 10.1007/978-3-662-58687-7_2.

Govind S. Krishnaswami & Himalaya Senapati. An introduction to the classical three-body problem: From periodic solutions to instabilities and chaos. *Resonance*, 24:87–114, 2019. doi: 10.1007/s12045-019-0760-1.

Giacomo Lari, Melaine Saillenfest, & Marco Fenucci. Long-term evolution of the Galilean satellites: the capture of Callisto into resonance. A&A, 639:A40, July 2020. doi: 10.1051/0004-6361/202037445.

Da-Zhu Ma, Yan-Ning Fu, & Xiao-Li Wang. The orbital configuration of the two interacting Jupiters in HD 155358 system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 470(1): 706–712, 2017. doi: 10.1093/MonthlyNoticesoftheRoyalAstronomicalSociety/stx1230.

J. G. Martí, C. A. Giuppone, & C. Beaugé. Dynamical analysis of the Gliese-876 Laplace resonance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433(2):928–934, 2013. doi: 10.1093/MonthlyNoticesoftheRoyalAstronomicalSociety/stt765.

Marzari, F., Scholl, H., & Tricarico, P. A numerical study of the 2:1 planetary resonance. *A&A*, 453(1):341–348, 2006. doi: 10.1051/0004-6361:20054655.

Kenneth R. Meyer. Periodic solutions of the N-body problem. *Journal of Differential Equations*, 39(1):2–38, 1981. doi: 10.1016/0022-0396(81)90081-4.

T. A. Michtchenko, C. Beaugé, & S. Ferraz-Mello. Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(4):411–432, 2006. doi: 10.1007/s10569-006-9009-x.

T. A. Michtchenko, C. Beaugé, & S. Ferraz-Mello. Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - I. Systems with a more massive outer planet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387(2):747–758, 2008a. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13278.x.

T. A. Michtchenko, C. Beaugé, & S. Ferraz-Mello. Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391(1):215–227, 2008b. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13867.x.

Cezary Migaszewski. On the migration of two planets in a disc and the formation of mean motion resonances. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 453(2):1632–1643, 2015. doi: 10.1093/MonthlyNoticesoftheRoyalAstronomicalSociety/stv1739.

Sean M. Mills, Andrew W. Howard, Lauren M. Weiss, Jason H. Steffen, Howard Isaacson, Benjamin J. Fulton, Erik A. Petigura, Molly R. Kosiarek, Lea A. Hirsch, & John H. Boisvert. Long-period Giant Companions to Three Compact, Multiplanet Systems. *Astronomical Journal*, 157 (4):145, 2019. doi: 10.3847/1538-3881/ab0899.

Carl D. Murray & Stanley F. Dermott. *Solar System Dynamics*. 2000.

Z. E. Musielak & B. Quarles. The three-body problem. *Reports on Progress in Physics*, 77(6): 065901, 2014. doi: 10.1088/0034-4885/77/6/065901.

F. Paita, A. Celletti, & G. Pucacco. Element history of the Laplace resonance: a dynamical approach. *Astronomy and Astrophysics*, 617:A35, 2018. doi: 10.1051/0004-6361/201832856.

J. C. B. Papaloizou & E. Szuszkiewicz. On the migration-induced resonances in a system of two planets with masses in the Earth mass range. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 363(1):153–176, 2005. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09427.x.

S. J. Peale. Orbital resonance in the solar system. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 14:215–246, 1976. doi: 10.1146/annurev.aa.14.090176.001243.

Michael Perryman. *The Exoplanet Handbook*. 2018.

Erik A. Petigura, Björn Benneke, Konstantin Batygin, Benjamin J. Fulton, Michael Werner, Jessica E. Krick, Varoujan Gorjian, Evan Sinukoff, Katherine M. Deck, Sean M. Mills, & Drake Deming. Dynamics and Formation of the Near-resonant K2-24 System: Insights from Transit-timing Variations and Radial Velocities. *Astronomical Journal*, 156(3):89, 2018. doi: 10.3847/1538-3881/aaceac.

Sean N. Raymond, Rory Barnes, Philip J. Armitage, & Noel Gorelick. Mean motion resonances from planet-planet scattering. *The Astrophysical Journal*, 687(2):L107–L110, oct 2008. doi: 10.1086/593301.

Sean N. Raymond, Rory Barnes, Philip J. Armitage, & Noel Gorelick. Mean Motion Resonances from Planet-Planet Scattering. ApJ, 687(2):L107, November 2008. doi: 10.1086/593301.

Paul Robertson, Michael Endl, William D. Cochran, Phillip J. MacQueen, Robert A. Wittenmyer, J. Horner, Erik J. Brugamyer, Attila E. Simon, Stuart I. Barnes, & Caroline Caldwell. The McDonald Observatory Planet Search: New Long-period Giant Planets and Two Interacting Jupiters in the HD 155358 System. *Astrophysical Journal*, 749(1):39, 2012. doi: 10.1088/0004-637X/749/1/39.

M. R. Showalter & D. P. Hamilton. Resonant interactions and chaotic rotation of Pluto's small moons. *Nature*, 522(7554):45–49, 2015. doi: 10.1038/nature14469.

M. D. Snellgrove, J. C. B. Papaloizou, & R. P. Nelson. On disc driven inward migration of resonantly coupled planets with application to the system around GJ876. *Astronomy and Astrophysics*, 374: 1092–1099, 2001. doi: 10.1051/0004-6361:20010779.

Jason H. Steffen, Daniel C. Fabrycky, Eric B. Ford, Joshua A. Carter, Jean-Michel Désert, Francois Fressin, Matthew J. Holman, Jack J. Lissauer, Althea V. Moorhead, Jason F. Rowe, Darin Ragozzine, William F. Welsh, Natalie M. Batalha, William J. Borucki, Lars A. Buchhave, Steve Bryson, Douglas A. Caldwell, David Charbonneau, David R. Ciardi, William D. Cochran, Michael Endl, Mark E. Everett, Thomas N. Gautier, Ron L. Gilliland, Forrest R. Girouard, Jon M. Jenkins, Elliott Horch, Steve B. Howell, Howard Isaacson, Todd C. Klaus, David G. Koch, David W. Latham, Jie Li, Philip Lucas, Phillip J. MacQueen, Geoffrey W. Marcy, Sean McCauliff, Christopher K. Middour, Robert L. Morris, Fergal R. Mullally, Samuel N. Quinn, Elisa V. Quintana, Avi Shporer, Martin Still, Peter Tenenbaum, Susan E. Thompson, Joseph D. Twicken, & Jeffery Van Cleve. Transit timing observations from Kepler - III. Confirmation of four multiple planet systems by a Fourier-domain study of anticorrelated transit timing variations. MNRAS, 421(3):2342–2354, April 2012. doi: 10.1111/j.1365-2966.2012.20467.x.

Dimitri Veras. A resonant-term-based model including a nascent disk, precession, and oblateness: application to GJ 876. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 99(3):197–243, 2007. doi: 10.1007/s10569-007-9097-2.

Joshua N. Winn & Daniel C. Fabrycky. The Occurrence and Architecture of Exoplanetary Systems. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 53:409–447, 2015. doi: 10.1146/annurev-astro-082214-122246.

Apêndice A

Levantamento de Dados

Sistemas de dois planetas próximos à RMM 2:1

Planeta	T (dias)	T_{ext}/T_{int}	a (UA)	e	Massa (M_J)	Tipo	m_2/m_1	M* ($M_\odot$)
24 Sex b	452.80	1.95	1.33	0.09	1.99	Msin I	0.43	1.54
24 Sex c	883.00		2.08	0.29	0.86	Msin I		
HD 128311 b	453.02	2.03	1.08	0.30	1.77	Msin I	2.14	0.83
HD 128311 c	921.54		1.74	0.16	3.79	Massa		
HD 155358 b	**194.9**	**2.02**	**0.64**	**0.17**	**0.85**	**M**sin I	**0.96**	**0.92**
HD 155358 c	**392.2**		**1.02**	**0.16**	**0.82**	**M**sin I		
HD 73526 b	188.30	2.01	0.65	0.19	3.08	Msin I	0.73	1.14
HD 73526 c	379.10		1.03	0.28	2.25	Msin I		
HD 82943 b	441.47	2.01	1.18	0.16	1.68	Massa	0.86	1.20
HD 82943 c	220.08		0.74	0.37	1.96	Massa		
HIP 54373 b	7.76	1.95	0.06	0.20	0.03	Msin I	1.44	0.57
HIP 54373 c	15.14		0.10	0.20	0.04	Msin I		
K2-24 b	**20.89**	**2.03**	**0.15**	**0.06**	**0.06**	**Massa**	**0.79**	**1.07**
K2-24 c	**42.34**		**0.24**	**0.07**	**0.05**	**Massa**		
NN Ser c	5573.55	1.93	5.35	0.08	7.33	Massa	3.19	0.54
NN Ser d	2883.50		3.43	0.19	2.30	Massa		
TOI-216 b	**17.09**		**0.13**	**0.13**	**0.09**	**Massa**		
TOI-216 c	**34.56**	**2.02**	**0.21**	**0.03**	**0.63**	**Massa**	**6.67**	**0.87**
Kepler-27 b	15.33	2.04	0.12		9.11	Massa	1.51	0.65
Kepler-27 c	31.33		0.19		13.80	Massa		
Kepler-328 b	34.92	2.04			0.09	Massa	1.38	
Kepler-328 c	71.31				0.12	Massa		1.10
Kepler-396 b	42.99	2.06	0.37		0.24	Massa	0.24	0.81
Kepler-396 c	88.51		0.23		0.06	Massa		
Kepler-406 b	2.43	1.91			0.02	Massa	0.45	1.07
Kepler-406 c	4.62				0.01	Massa		
Kepler-57 b	5.73	2.03			18.86	Massa	0.37	0.83
Kepler-57 c	11.61				6.95	Massa		
TOI-1130 b	4.07	2.05	0.04	0.22				0.68
TOI-1130 c	8.35		0.07	0.05	0.97	Massa		
K2-172 b	14.32	2.07						0.93
K2-172 c	29.63							
K2-190 b	10.10	2.14						0.90
K2-190 c	21.57							
K2-8 b	10.35	2.04	0.09					0.78
K2-8 c	5.06		0.05					

Tabela A.1. Sistemas com apenas dois planetas confirmados e com planetas próximos à razão de períodos 2:1. Dados retirados dos bancos Exoplanet.eu e NASA Exoplanet Archive (outubro de 2020). Em negrito, estão os sistemas que foram escolhidos para estudo neste projeto.

Planeta	T (dias)	T_{ext}/T_{int}	a (UA)	e	Massa (M_J)	Tipo	m_2/m_1	M* ($M_\odot$)
Kepler-120 b	6.31	2.03	0.06					
Kepler-120 c	12.79		0.09					
Kepler-123 b	17.23	1.93	0.14					1.03
Kepler-123 c	26.70		0.18					
Kepler-1530 b	2.59	2.05						0.92
Kepler-1530 c	5.32							
Kepler-183 b	5.69	2.05	0.06					
Kepler-183 c	11.64		0.10					
Kepler-189 b	10.40	1.94	0.09					0.79
Kepler-189 c	20.13		0.14					
Kepler-213 b	2.46	1.96	0.04					0.94
Kepler-213 c	4.82		0.06					
Kepler-231 b	10.07	1.91	0.07					0.58
Kepler-231 c	19.27		0.11					
Kepler-297 b	38.87	1.93	0.22					
Kepler-297 c	74.92		0.34					
Kepler-330 b	8.26	1.93	0.08					0.78
Kepler-330 c	15.96		0.12					
Kepler-333 b	12.55	1.92	0.09					0.54
Kepler-333 c	24.09		0.14					
Kepler-349 b	5.93	2.07	0.07					0.97
Kepler-349 c	12.25		0.11					
Kepler-371 b	34.76	1.96	0.20					0.94
Kepler-371 c	67.97		0.31					
Kepler-380 b	3.93	1.94	0.05					1.05
Kepler-380 c	7.63		0.08					
Kepler-384 b	22.60	2.01	0.15					0.76
Kepler-384 c	45.35		0.24					
Kepler-386 b	12.31	2.05	0.10					0.74
Kepler-386 c	25.19		0.16					
Kepler-390 b	6.74	1.94	0.07					0.67
Kepler-390 c	13.06		0.10					
Kepler-392 b	5.34	1.95	0.06					1.13
Kepler-392 c	10.42		0.09					
Kepler-415 b	4.18	2.09			0.38	Massa		0.67
Kepler-415 c	8.71							
Kepler-416 b	6.32	1.93			0.18	Massa		1.00
Kepler-416 c	12.21							

Tabela A.2. Sistemas com apenas dois planetas confirmados e com planetas próximos à razão de períodos 2:1. Dados retirados dos bancos Exoplanet.eu e NASA Exoplanet Archive (outubro de 2020).