



Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Observatório do Valongo  
Programa de Pós-Graduação em Astronomia



# Dinâmica Orbital de Satélites de Telecomunicação na Órbita de Marte

Henrique Saraiva de Almeida

Rio de Janeiro  
31 de Outubro de 2022

# Dinâmica Orbital de Satélites de Telecomunicação na Órbita de Marte

Henrique Saraiva de Almeida

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Astronomia do Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito necessário para a obtenção do título de Mestre em Ciências (Astronomia).

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci

Rio de Janeiro  
31 de Outubro de 2022

## CIP - Catalogação na Publicação

A447d Almeida, Henrique Saraiva de  
Dinâmica Orbital de Satélites de Telecomunicação  
na Órbita de Marte / Henrique Saraiva de Almeida. --  
Rio de Janeiro, 2022.  
107 f.

Orientador: Adrián Rodriguez Colucci.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do  
Rio de Janeiro, Observatório do Valongo, Programa de  
Pós-Graduação em Astronomia, 2022.

1. Marte. 2. Satélites. 3. Manobras de controle  
orbital. I. Colucci, Adrián Rodriguez, orient. II.  
Título.

# Dinâmica orbital de satélites artificiais de telecomunicação na órbita de Marte

**Henrique Saraiva de Almeida**

**Dr. Adrian Rodriguez Colucci (Orientador)**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências - Astronomia.

Aprovada por:

Dr<sup>a</sup>. Alessandra Ferraz da Silva Ferreira - (Avaliadora Externa/participação remota) – UNESP

Dr. Cristiano Fiorilo de Melo – (Avaliador Externo/participação remota)- UFMG



---

**Presidente, Dr. Adrian Rodriguez Colucci (Orientador) – OV/UFRJ**

Esta defesa realizou-se através de videoconferência, parcialmente remota, em conformidade com as Resoluções do CEPG n.º n.º 6/2021 de 29/10/21 e n.º 87/2022 de 8/07/22 .

Outubro de 2022

# *Agradecimentos*

Carolina, Emília, Teresa, Pedro, Gabriela, Eloísa e Thiago. Cada um de vocês, à sua própria maneira, fez o possível para que eu pudesse me dedicar ao mestrado. Muito obrigado. Eu não teria chegado aqui sem o apoio e o incentivo de vocês.

Ísis e Maya, minhas corujinhas. Vocês são a maior fonte de alegria e coragem da minha vida. Me desculpem pelas ausências e muito obrigado pela paciência.

Aos meus amigos, que pra minha sorte e alegria são muitos para serem todos nomeados. Muito obrigado pelo apoio, incentivo e carinho.

Meus colegas de trabalho da Meccel, muito obrigado pela compreensão com minhas ausências. Eu tenho muita sorte de trabalhar com vocês.

Adrián, muito obrigado pela paciência, compreensão e confiança ao longo do mestrado. A Academia precisa de mais professores como você.

*”Se a penalidade por um crime é uma multa, então a lei só se aplica aos mais pobres.”*

- Wiegraf Folles (Final Fantasy Tactics - Square Enix)

# *Resumo*

## **Dinâmica Orbital de Satélites de Telecomunicação na Órbita de Marte**

Henrique Saraiva de Almeida

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci

RESUMO DA DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO DO VALONGO, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO REQUISITO NECESSÁRIO PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ASTRONOMIA.

Marte é o planeta do Sistema Solar que recebeu o maior número de missões espaciais até o presente momento. Desde a década de sessenta foram mais de trinta missões com destino ao planeta vermelho. No entanto, nenhuma dessas missões teve como objetivo principal a comunicação com as estações de controle na Terra. Assim, tanto o envio de dados como o recebimento de comandos tende a ser precário, limitando o potencial científico de cada missão. Isto é particularmente deficitário para os rovers e demais objetos na superfície do planeta. Este problema vem sendo discutido há décadas pela comunidade científica e algumas propostas de satélites de telecomunicações em Marte já foram realizadas. Neste projeto, utilizamos o software GMAT (General Mission Analysis Tool), desenvolvido pela NASA, com motivo de gerar modelos de satélites em órbitas estacionárias em torno de Marte, sendo estas órbitas circulares, equatoriais e síncronas. Estudamos as forças perturbadoras que alteram a órbita dos satélites, além de propormos um planejamento de manobras que mantém as órbitas controladas e maximizam o período de visibilidade do satélite a partir das estações de controle terrestres.

**Palavras-chave:** *Marte, Satélites, Manobras de controle orbital*

Rio de Janeiro  
Outubro de 2022

# *Abstract*

## **Orbital Dynamics of Artificial Satellites on Mars Orbit**

Henrique Saraiva de Almeida

Advisor: Adrián Rodríguez Colucci

DISSERTATION SUBMITTED TO THE POSTGRADUATE ASTRONOMY PROGRAM OF THE VALONGO OBSERVATORY, FEDERAL UNIVERSITY OF RIO DE JANEIRO, IN FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN ASTRONOMY.

Mars is the solar planet that has been the target of most space missions so far. Since the sixties there have been more than thirty missions whose destination was the Red Planet. However, none of these missions had its communications with Earth stations as its main objective. Thus, sending data and receiving commands leaves much to be desired, limiting the scientific potential of each mission. This is particularly worse for rovers and other objects on the planet's surface. This is a problem that has been discussed for decades by the scientific community and some proposals for telecommunications satellites on Mars have already been made. In this project, we use the GMAT (General Mission Analysis Tool) software, developed by NASA to generate models of satellites in stationary orbits, which are circular, equatorial and synchronous orbits. We also analyze its period of visibility from ground stations. We study the perturbations that take satellites out of orbit and propose a maneuver planning that keeps orbits under control and maximizes the period of visibility by ground stations.

**Keywords:** *Mars, Satellite, Station keeping maneuvers*

Rio de Janeiro

October 2022

# Lista de Figuras

1.1	Exemplo das sondas espaciais <i>Mars Reconnaissance Orbiter</i> e <i>Mars Odyssey Orbiter</i> , ambas da NASA, sendo usadas como <i>realy</i> do rover <i>Curiosity</i> . A frequência do sinal enviado pelo rover depende do receptor escolhido (Frost, 2016) - acessado em 07/06/2018). . . . .	22
2.1	Ilustração da 1ª Lei de Kepler (Virtuous Tecnologia, 2008) - acessado em 06/06/2020). . . . .	25
2.2	Ilustração da 2ª Lei de Kepler (Virtuous Tecnologia, 2008) - acessado em 06/06/2020). . . . .	26
2.3	Órbita de um satélite em torno da Terra. O plano do equador está destacado para facilitar a visualização dos elementos orbitais (Pogurelskiy, 2015) - acessado em 27/06/2020). . . . .	29
2.4	Órbita de um satélite em torno da Terra, vista de uma direção normal à órbita do satélite. A área hachurada indica a região da órbita que está acima do plano do equador (Pogurelskiy, 2015) - acessado em 27/06/2020). . . . .	29
2.5	O problema de $N$ -corpos (Bate et al., 1979) - página 6) . . . . .	31
2.6	O potencial de um sólido (Martins, 2018). . . . .	34
2.7	Comunicações via satélite. O satélite recebe sinais de uma estação de controle e os envia para antenas que estejam em sua área de cobertura (Kim et al., 2020). . . . .	37
2.8	Exemplo de manobra N. Nesse caso o $\Delta \vec{V}$ fornecido pelo disparo dos jatos tem a direção norte. A manobra é executada quando o satélite passa pelo nodo descendente, que se torna o ponto de interseção entre as órbitas pré e pós-manobra (Soop, 1994), página 48). . . . .	39
2.9	Exemplo de manobra E. Nesse caso o $\Delta \vec{V}$ fornecido pelo disparo dos jatos tem a direção leste. Repare que o ponto no qual a manobra é executada se torna o periastro da nova órbita (Soop, 1994), página 53). . . . .	39
2.10	Exemplo de como a excentricidade é afetada por manobras de deriva. (Soop, 1994), página 59). . . . .	40
2.11	Varição da longitude ( $\lambda$ ) de um satélite em órbita estacionária causada por manobra E. Apesar de causar um deslocamento inicial para leste, sentido do $\Delta \vec{V}$ aplicado, rapidamente o satélite se desloca para oeste em função do aumento do semieixo maior (Soop, 1994), página 55). . . . .	40
3.1	Interface gráfica do GMAT. No lado esquerdo está localizada a tabela de recursos; no meio está a sequência de missão; à direita temos três janelas gráficas com as trajetórias calculadas em diferentes sistemas de coordenadas ( <a href="https://gmat.atlassian.net/wiki/spaces/GW/overview">https://gmat.atlassian.net/wiki/spaces/GW/overview</a> - Acessado em 13/05/2018). . . . .	45

3.2	Evoluções da longitude e da excentricidade de um satélite areoestacionário geradas pelo GMAT para o período de um ano. . . . .	47
3.3	Localização das estações da DSN (azul) e da ESTRACK (vermelho). . . .	48
3.4	Janela de visibilidade calculada pelo STK para o mês de fevereiro de 2019. Na cor roxa é o período de visibilidade de Madri, em verde o de Goldstone e em vermelho o de Canberra. . . . .	49
4.1	Evolução da latitude e longitude de um satélite de longitude inicial igual a 167.83°E. . . . .	52
4.2	Evolução dos elementos keplerianos para um satélite de longitude inicial igual a 167.83°E. O intervalo da anomalia média foi modificado de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar sua evolução. . . . .	54
4.3	Evolução dos elementos keplerianos do modelo (1), de longitude inicial igual a 167.83°E. Os intervalos da anomalia média e argumento do periastro foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar sua evolução. . . . .	57
4.4	Evolução da latitude e longitude do modelo 1, de longitude inicial igual a 163.83°E. . . . .	58
4.5	Evolução dos elementos keplerianos do modelo (2), de longitude inicial igual a 254.45°E. O intervalo da anomalia média foi modificado de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar sua evolução. . . . .	59
4.6	Evolução da latitude e longitude do modelo 2, de longitude inicial igual a 254.45°E. . . . .	60
4.7	Evolução dos elementos orbitais do modelo (2), o qual inclui também a pressão de radiação solar. Os intervalos da ascensão reta do nodo ascendente, do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	62
4.8	Evolução da latitude e longitude do modelo (2), o qual inclui também a pressão de radiação solar. . . . .	63
4.9	Comparação entre os elementos keplerianos do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e o modelo 1, que inclui também a perturbação gravitacional causada por Phobos e Deimos. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	65
4.10	Comparação entre a latitude e a longitude do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 1, que inclui também a perturbação gravitacional causada por Phobos e Deimos. . . . .	66
4.12	Comparação entre a latitude e a longitude do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 2, que inclui também a perturbação gravitacional causada pelo Sol. . . . .	67
4.11	Comparação entre os elementos keplerianos do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 2, que inclui também a perturbação gravitacional causada pelo Sol. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	68
4.13	Datas dos solstícios e equinócios de Marte ao longo da evolução da inclinação	69

4.14	Comparação entre os elementos keplerianos do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 3, que inclui também a perturbação gravitacional causada pelo Sol, Phobos, Deimos, Ceres, Lua, demais planetas do Sistema Solar. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	70
4.15	Comparação entre a latitude e a longitude do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 3, que inclui também a perturbação gravitacional causada pelo Sol. . . . .	71
4.16	Evolução da latitude e longitude. As linhas pretas horizontais na evolução da longitude representam os limites do box. . . . .	77
4.17	Evolução da longitude. As linhas pretas horizontais representam os limites do box para cada caso. . . . .	78
4.18	Evolução da latitude. . . . .	79
4.19	Evolução da longitude. As linhas pretas horizontais representam os limites do box para cada caso. . . . .	80
4.20	Evolução da latitude. . . . .	81
5.1	Taxa de variação da longitude em função da longitude para Marte e Terra.(Silva & Romero, 2013). . . . .	87
A.1	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 5.39°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	93
A.2	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 28.71°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	94
A.3	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 52.02°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	95
A.4	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 98.46°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	96
A.5	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 121.58°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	97
A.6	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 144.70°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	98
A.7	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 167.83°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	99

A.8	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 189.48°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	100
A.9	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 211.14°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	101
A.10	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 232.79°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	102
A.11	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 276.36°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	103
A.12	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 298.27°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	104
A.13	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 320.17°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	105
A.14	Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 342.08°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções. . . . .	106

# Lista de Tabelas

1.1	Características físicas e orbitais de Marte e da Terra (Williams, 2020). . .	18
1.2	Características físicas e orbitais de Phobos e Deimos (Williams, 2020). . .	18
1.3	Composição química da atmosfera de Marte (Williams, 2020). . . . .	19
3.1	Pontos de equilíbrio estável, instável e a região onde estão localizados. . .	50
4.1	Órbita inicial usada na análise de longo período. . . . .	52
4.2	Órbitas iniciais usadas na análise do potencial gravitacional de Marte. . .	55
4.3	Órbita inicial usada no planejamento de manobras. . . . .	72
4.4	Intervalo entre manobras e o $\Delta V$ médio calculado GMAT para cada longitude. Nos pontos de equilíbrio não há manobras. . . . .	76
4.5	Período de visibilidade de um satélite em $5.39^\circ$ E . . . . .	81
4.6	Período de visibilidade de um satélite em $28.71^\circ$ E . . . . .	82
4.7	Período de visibilidade de um satélite em $52.02^\circ$ E . . . . .	82
4.8	Período de visibilidade de um satélite em $98.46^\circ$ E . . . . .	82
4.9	Período de visibilidade de um satélite em $121.58^\circ$ E . . . . .	82
4.10	Período de visibilidade de um satélite em $144.70^\circ$ E . . . . .	83
4.11	Período de visibilidade de um satélite em $167.83^\circ$ E . . . . .	83
4.12	Período de visibilidade de um satélite em $189.48^\circ$ E . . . . .	83
4.13	Período de visibilidade de um satélite em $211.14^\circ$ E . . . . .	83
4.14	Período de visibilidade de um satélite em $232.79^\circ$ E . . . . .	84
4.15	Período de visibilidade de um satélite em $276.36^\circ$ E . . . . .	84
4.16	Período de visibilidade de um satélite em $298.27^\circ$ E . . . . .	84
4.17	Período de visibilidade de um satélite em $320.17^\circ$ E . . . . .	84
4.18	Período de visibilidade de um satélite em $342.08^\circ$ E . . . . .	85

# Lista de Abreviaturas e Siglas

<b>DSN</b>	<b>D</b> eep <b>S</b> pace and <b>N</b> etwork (Rede de Espaço Profundo)
<b>SMA</b>	<b>S</b> emi- <b>M</b> ajor <b>A</b> xis (Semieixo Maior)
<b>ECC</b>	<b>E</b> CCentricity (Excentricidade)
<b>INC</b>	<b>I</b> N <b>C</b> lination (Inclinação)
<b>RAAN</b>	<b>R</b> ight <b>A</b> scension of the <b>A</b> scending <b>N</b> ode (Ascensão Reta do Nodo Ascendente)
<b>AOP</b>	<b>A</b> rgument <b>O</b> f <b>P</b> eripsis (Argumento do Periastro)
<b>MAN</b>	<b>M</b> ean <b>A</b> Nomaly (Anomalia Média)
<b>TA</b>	<b>T</b> rue <b>A</b> nomaly (Anomalia Verdadeira)

# Lista de Constantes Físicas

Raio da Terra	$R_{\oplus} = 6378,1366 \text{ km}$
Raio de Marte	$R_{\mars} = 3396,19 \text{ km}$
Massa da Terra	$M_{\oplus} = 5,9724 \times 10^{24} \text{ kg}$
Massa de Marte	$M_{\mars} = 0,6417 \times 10^{24} \text{ kg}$
Período de rotação da Terra	$P_{\oplus} = 23\text{h } 56\text{m } 04,0905\text{s}$
Período de rotação de Marte	$P_{\mars} = 24\text{h } 37\text{m } 22,663\text{s}$
Unidade Astronômica	$\text{AU} = 1,495978707 \times 10^{11} \text{ m}$
Constante Gravitacional Universal	$G = 6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

# Lista de Nomenclaturas

Símbolo	Grandeza	Unidade
$g$	Aceleração da Gravidade	$\text{cm s}^{-2}$
$z$	Altitude	cm

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
1.1	O planeta vermelho . . . . .	17
1.2	Comunicações com Marte . . . . .	21
1.3	Objetivos do trabalho . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Fundamentos Teóricos</b>	<b>25</b>
2.1	Leis de Kepler e Leis de Newton . . . . .	25
2.2	Elementos orbitais . . . . .	27
2.3	Latitude e longitude . . . . .	29
2.4	O Problema de $N$ -corpos . . . . .	30
2.5	O potencial gravitacional . . . . .	34
2.6	Pontos de equilíbrio . . . . .	35
2.7	Pressão de radiação solar . . . . .	36
2.8	Satélites de telecomunicação . . . . .	37
2.9	Órbitas estacionárias e manobras de controle orbital . . . . .	38
2.10	Equação do foguete . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>43</b>
3.1	GMAT . . . . .	44
3.2	STK . . . . .	47
3.3	O potencial de Marte . . . . .	49
3.4	Pontos de equilíbrio de Marte . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>51</b>
4.1	Análise de longo período . . . . .	51
4.2	Análise do potencial de Marte . . . . .	53
4.3	Impacto da pressão de radiação solar . . . . .	61
4.4	Impacto de outros corpos do Sistema Solar . . . . .	64
4.5	Planejamento de manobras . . . . .	72
4.5.1	Resultados . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Discussões e Conclusões</b>	<b>86</b>
5.1	Análise dos resultados . . . . .	86
5.2	Perspectivas futuras . . . . .	88
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>92</b>

**A Evolução dos elementos keplerianos**

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 O planeta vermelho

Marte sempre causou fascínio na humanidade e, com exceção da Terra, é o planeta do Sistema Solar mais bem conhecido e estudado. É chamado também de planeta vermelho devido à sua coloração avermelhada, consequência da abundante quantidade de óxido de ferro presente em sua superfície (Bell III et al., 1990). Sua cor é tão característica que o torna facilmente distinguível de outros corpos celestes. Seu movimento aparente também difere muito dos demais objetos e junto com sua cor, fez com que Marte sempre se destacasse no céu noturno. Há indícios de que sua posição era observada e catalogada sistematicamente por diferentes civilizações, como os egípcios, os chineses e os sumérios, por exemplo (Aveni, 2002).

Marte é um lugar do Sistema Solar de grande interesse por causa de suas similaridades com a Terra. Um dia marciano, chamado de sol, tem duração próxima a um dia terrestre. Seu eixo de rotação é parecida com a inclinação do eixo de rotação da Terra. Como consequência, Marte possui quatro estações climáticas que podem ser comparadas às estações do nosso planeta. As principais características físicas e orbitais de Marte podem ser vistas em comparação com as da Terra na Tabela 1.1.

	<b>Marte</b>	<b>Terra</b>
<b>Massa (<math>10^{24}</math> kg)</b>	0.6417	5.9722
<b>Volume (<math>10^{10}</math> km<sup>3</sup>)</b>	16.318	108.321
<b>Raio equatorial (km)</b>	3396.2	6378.1
<b>Aceleração da gravidade (m/s<sup>2</sup>)</b>	3.71	9.80
<b>Semi-eixo maior (<math>10^6</math> km)</b>	227.956	149.598
<b>Inclinação (graus)</b>	1.848	0.0
<b>Período sideral (dias)</b>	689.980	365.256
<b>Duração do dia (hrs)</b>	24.6597	24.0000
<b>Inclinação do equador (graus)</b>	25.19	23.44
<b>Excentricidade</b>	0.0935	0.0167

TABELA 1.1. Características físicas e orbitais de Marte e da Terra (Williams, 2020).

Marte possui dois satélites naturais, Phobos e Deimos, objetos pequenos, pouco massivos e de formato irregular. A Tabela 1.2 mostra o valor de alguns dos parâmetros físicos de Phobos e Deimos. A inclinação é medida em relação ao equador de Marte.

	<b>Phobos</b>	<b>Deimos</b>
<b>Massa (<math>10^{15}</math> kg)</b>	10.6	2.4
<b>Raio equatorial (km)</b>	13.0	7.8
<b>Semi-eixo maior (km)</b>	9378	23459
<b>Inclinação (graus)</b>	1.08	1.79
<b>Excentricidade</b>	0.0151	0.0005
<b>Período sideral (sol)</b>	0.31891	1.26244

TABELA 1.2. Características físicas e orbitais de Phobos e Deimos (Williams, 2020).

A atmosfera de Marte é composta majoritariamente por dióxido de carbono ( $CO_2$ ), pequenas quantidades de argônio ( $Ar$ ) e nitrogênio ( $N$ ), além de outros gases em menor quantidade (Tabela 1.3). Extremamente rarefeita, está exposta diretamente a ação do vento solar.

<b>Elemento/Molécula</b>	<b>Concentração</b>
Dióxido de carbono	95.1%
Nitrogênio	2.59%
Argônio	1.94%
Oxigênio	0.16%
Monóxido de carbono	0.06%

TABELA 1.3. Composição química da atmosfera de Marte (Williams, 2020).

A baixa pressão atmosférica de Marte não permite que haja água em estado líquido na superfície, mas há indícios areológicos<sup>1</sup> de que no passado isso era diferente. Foram encontrados, por exemplo, alguns depósitos minerais cuja única maneira conhecida de formação envolve a presença de água líquida. Também há certas formas do relevo marciano que são mais facilmente explicáveis se levarmos em conta a presença de água líquida no passado. Há água nos dois pólos de Marte, em forma de gelo. A camada de gelo nos pólos de Marte é permanente, mas parte de seu material evapora quando exposta à luz do Sol e diminui de tamanho. Da mesma forma, o material ao redor dos pólos congela a medida que chega o inverno no respectivo hemisfério (Cantor et al., 2010).

Debates sobre a presença ou não de água líquida em Marte, bem como suas semelhanças com a Terra, inevitavelmente levam a discussões sobre seu potencial de abrigar ou ter abrigado vida em seu passado. Fomentando ainda mais essas discussões, temos certas assinaturas biológicas que podem ser encontradas em Marte, dentre as quais destacamos as do metano ( $CH_4$ ). Produzido na Terra por algumas bactérias e microorganismos, era esperado que na atmosfera de Marte, rica em dióxido de carbono ( $CO_2$ ), o metano fosse rapidamente depletado. Porém, traços de metano se mantêm presentes, indicando que há alguma reação ainda não conhecida, talvez biológica, gerando metano continuamente em Marte (Yung et al., 2018).

A proximidade de Marte com a Terra foi um fator fundamental para sua relevância na Astronomia. Com um semi-eixo maior apenas 1.5 vezes maior que o da Terra, não causa espanto, então, que Marte tenha se tornado um dos principais alvos de observações astronômicas depois do surgimento dos telescópios. Sua proximidade com a Terra e sua

<sup>1</sup>Areologia é a área da ciência que se dedica ao estudo da superfície de Marte.

tênue atmosfera permitiram que fossem feitas observações até então inéditas, e já no século XVIII surgem os primeiros mapas da superfície de Marte (Sheehan, 2002).

A curta distância entre os dois planetas facilitou também o envio de missões ao Planeta Vermelho. Desde a década de 1960 foram mais 50 missões com destino a Marte, a maioria delas enviadas pelos Estados Unidos e pela antiga União Soviética (Stooke, 2012). Depois do fim da Guerra Fria, Europa e Japão passaram a se envolver mais no desenvolvimento de missões para Marte, principalmente em colaborações com a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), a agência espacial estadunidense. Recentemente, China, Emirados Árabes e Índia também enviaram, de maneira bem sucedida, missões a Marte ((Li et al., 2021), (Amiri et al., 2022)).

As primeiras missões enviadas ao planeta tiveram uma baixa taxa de sucesso. Das 12 missões enviadas a Marte na década de sessenta, somente 3 foram bem sucedidas: a *Mariner 4*, *Mariner 6* e *Mariner 7*, todas conduzidas pela NASA. O projeto *Mariner* tinha como objetivo explorar os planetas rochosos do Sistema Solar através de sondas espaciais<sup>2</sup> que realizariam um *fly by*<sup>3</sup> por esses objetos.

Os anos setenta foram melhores para os soviéticos, que realizaram grandes conquistas com seu programa *Mars*, um projeto extremamente ambicioso que visava também o envio de *rovers*<sup>4</sup> para Marte. Eles conseguiram pousar o *rover* da missão *Mars 3* na superfície de Marte, mas perderam o contato poucos segundos depois. Os americanos foram mais bem sucedidos com seu projeto *Viking*, e não só conseguiram pousar os *rovers* das missões *Viking 1* e *Viking 2*, como também os mantiveram operacionais por anos.

Os anos oitenta e noventa foram marcados por uma sucessão de falhas, um panorama que se manteve até os anos 2000, com o sucesso da missão *Spirit* da NASA. Projetada inicialmente para durar 90 sóis, a missão do *rover Spirit* foi estendida inúmeras vezes e durou mais de 5 anos, tornando-se uma das mais bem sucedidas e importantes missões de exploração de Marte até hoje (Stooke, 2015). Depois da *Spirit*, outras missões foram enviadas a Marte e muitas, como a *Curiosity*, ainda estão em operação atualmente, a maioria operada pela NASA.

---

<sup>2</sup>Nave utilizada na exploração espacial.

<sup>3</sup>Estratégia de enviar uma sonda próxima o bastante de um corpo celeste para que ela possa coletar dados científicos.

<sup>4</sup>Veículo usado na exploração espacial, projetado para ser capaz de se locomover na superfície de outro planeta.

## 1.2 Comunicações com Marte

Atualmente, a comunicação com os *rovers* presentes na superfície de Marte e as sondas que orbitam o planeta é feita através de complexos de antenas localizados em diferentes países. Cada agência espacial opera sua rede de antenas de maneira independente, mas existem acordos de cooperação e parceria entre as agências para que elas trabalhem em conjunto em situações excepcionais.

A DSN (*Deep Space Network*) é a rede americana, operada pela NASA. São 3 complexos de antenas afastados cerca de 120° de longitude, localizados em Goldstone (Estados Unidos), Madri (Espanha) e Canberra (Austrália) (Monaghan, 2022).

A ESTRACK (*European Space Tracking*) é a rede europeia, operada pela ESA (*European Space Agency*). São 8 complexos de antenas, dos quais 3 têm antenas dedicadas a comunicação com objetos distantes : New Norcia (Austrália), Cebreros (Espanha) e Malargüe (Argentina) (ESA, 2022).

A CDSN (*Chinese Deep Space Network*), operada pela CNSA (*China National Space Administration*). São 6 estações, todas elas localizadas na própria China em Sheshan, Ürümqi, Miyun, Kunming, Tianma e Jiamusi.

Índia e Japão possuem redes menores, contando com somente uma antena. A estação japonesa é a *Usuda Deep Space Center* (JAXA, 2022), operada pela JAXA (*Japan Aerospace Exploration Agency*), e a indiana é IDSN (*Indian Space Network*), operada pela ISRO (*Indian Space Research Organisation*).

Há também a SDSN (*Soviet Deep Space Network*), a rede soviética usada durante a Guerra Fria. A Rússia atualmente não possui nenhuma missão espacial em andamento além de sua participação na Estação Espacial Internacional, mas a rede da SDSN ainda é mantida operacional pela ROSCOSMOS, a agência espacial russa.

Independente da rede, a comunicação com as sondas que orbitam Marte pode ser feita quando estas ficam visíveis para as antenas na Terra. A comunicação com os *rovers* também pode ser feita diretamente com as antenas terrestres. Porém, o período de visibilidade dos *rovers* é bem menor do que o das sondas e o gasto de energia no envio de sinais diretamente para as antenas é alto. Isso limita a quantidade de dados

científicos que os *rovers* podem mandar para a Terra, limitando também o potencial científico da missão.

A alternativa encontrada foi utilizar as sondas espaciais em órbita como mecanismo de retransmissão (*relay*): os *rovers* transmitem seus dados para as sondas, que então os retransmitem para a Terra (Figura 1.1). Essa estratégia foi adotada pela NASA com as sondas *Odyssey*, MRO (*Mars Reconnaissance Orbiter*) e MAVEN (*Mars Atmospheric and Volatile Evolution*), e pela CNSA com a sonda *Tianwen-1*.

Apesar de funcional, essa prática traz seus próprios riscos e limitações. A primeira delas é a janela de visibilidade das sondas pelos *rovers*, que é de apenas alguns minutos por sol. Ainda que o gasto de energia para enviar dados para as sondas não seja tão grande quanto enviar dados diretamente para a Terra, já que a distância a ser percorrida é bem menor, o curto período de visibilidade não permite a plena transferência dos dados.

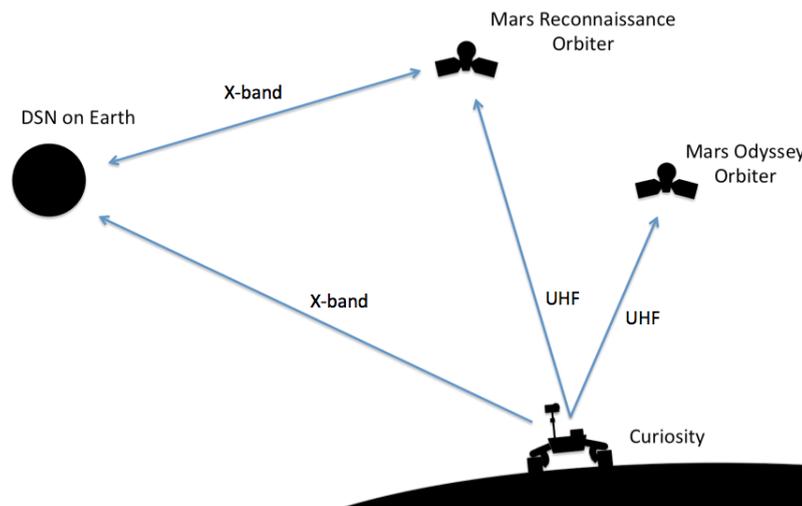


FIGURA 1.1. Exemplo das sondas espaciais *Mars Reconnaissance Orbiter* e *Mars Odyssey Orbiter*, ambas da NASA, sendo usadas como *relays* do rover *Curiosity*. A frequência do sinal enviado pelo rover depende do receptor escolhido (Frost, 2016) - acessado em 07/06/2018).

Outra limitação são as atividades principais dos *rovers* e das sondas, que podem ser afetadas pela transmissão de dados. No sol 408<sup>5</sup> do rover *Opportunity* um trânsito de Deimos deixou de ser observado pois era necessário enviar dados para uma das sondas que estava em seu período de visibilidade.

<sup>5</sup>Maneira de contar a duração de uma missão. Sol 1 corresponde ao primeiro dia de atividades do objeto, sol 2 corresponde ao segundo dia e assim sucessivamente.

A vida útil das sondas utilizadas também é um fator de preocupação. Enquanto a *Tianwen-1* é recente, tendo entrado em operação em 2021, as três sondas utilizadas pela NASA já ultrapassaram tempo de vida para qual foram projetadas e em breve será preciso substituí-las. A NASA já está se preparando para isso, e aproveitou a missão *InSight* para realizar um teste de conceito com os satélites MarCO (*Mars Cube One*) (Klesh et al., 2018). Dois satélites, MarCO A e MarCO B foram usados como *relay* durante a descida do *InSight*, transmitindo dados entre as estações na Terra e o *InSight* depois que este saiu da visibilidade das antenas.

Uma missão futura que está sendo discutida é a do NeMO (*Next Mars Orbiter*), anteriormente conhecido como *Mars 2022*. Esse projeto consiste em inserir um satélite em órbita polar que substituirá as sondas atuais e será dedicado a telecomunicações. O seu planejamento inicial previa seu lançamento para este ano, mas ele foi preterido pela missão do *rover Perseverance*.

O NeMO não foi o primeiro satélite de telecomunicações proposto para Marte. Já em 1989, (Badi et al., 1989) apresentava o conceito de um satélite de telecomunicação de órbita síncrona para Marte, uma idéia revisitada por (Lock et al., 2016), que propõe satélites pequenos em órbitas estacionárias. (Silva & Romero, 2013) determinaram as longitudes que otimizam o controle de um satélite estacionário. (Colella et al., 2017) propõe o uso de três satélites em órbitas ligeiramente diferentes da estacionária para garantir uma cobertura total da superfície de Marte sem a necessidade de realizar manobras de correção orbital.

### 1.3 Objetivos do trabalho

A grande maioria dos trabalhos sobre satélites de telecomunicação em Marte envolve o uso da órbita estacionária. Esse tipo de órbita é circular, de inclinação igual a zero e síncrona (tem um semi-eixo tal que seu período orbital é igual ao período de rotação do planeta). Visto por um observador na superfície do planeta, um satélite em órbita estacionária pareceria em repouso. Órbitas estacionárias são vantajosas para satélites de telecomunicação justamente por esse motivo: além de ser mais simples apontar uma antena para um objeto parado, o sinal é transmitido de maneira mais eficiente. As

órbitas estacionárias de Marte são chamadas de órbitas *areoestacionárias*, e sua posição no espaço é chamada de *arco areoestacionário*.

Não encontramos na literatura nenhum trabalho que discutisse como a evolução orbital de um satélite areoestacionário impacta sua visibilidade por parte das estações terrestres. Quando se fala em controle orbital, está se pensando somente na visibilidade entre o satélite e objetos na superfície de Marte. Por sua vez, trabalhos que discutem o envio e recebimento de sinais entre os satélites e as estações terrestres não entram no mérito do controle orbital.

Neste trabalho, propomos uma alternativa que mitiga as dificuldades na telecomunicação de um objeto na superfície de Marte com as estações na Terra. Estudamos a dinâmica de satélites de telecomunicação na órbita de Marte, analisando as principais forças a quais estão acometidos. Propomos órbitas nas quais os satélites devem ser inseridos para otimizar o período de visibilidade por objetos na superfície de Marte e elaboramos uma estratégia de controle que mantém os satélites na órbita desejada. Por fim, estudamos também o período de visibilidade de duas redes de controle: DSN e ESTRACK.

## Capítulo 2

# Fundamentos Teóricos

Neste capítulo, serão apresentados os principais fundamentos e conceitos necessários para a compreensão do trabalho desenvolvido.

### 2.1 Leis de Kepler e Leis de Newton

Depois da morte do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), o astrônomo, astrólogo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) utilizou suas observações astronômicas para determinar as órbitas dos planetas do Sistema Solar. Os principais resultados de seu trabalho, publicado entre 1609 e 1619, são conhecidos como as três Leis de Kepler e são a base de toda a Mecânica Celeste. São elas:

- 1ª Lei de Kepler: As órbitas dos planetas são elipses com o Sol em um dos focos.

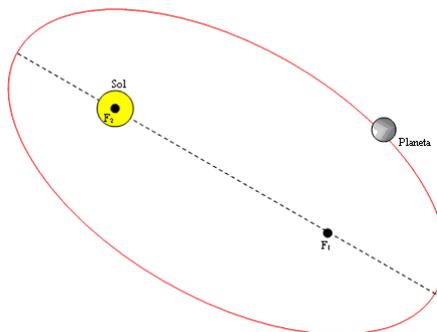


FIGURA 2.1. Ilustração da 1ª Lei de Kepler (Virtuous Tecnologia, 2008) - acessado em 06/06/2020).

• 2ª Lei de Kepler: Os planetas percorrem áreas iguais em tempos iguais ao longo de suas trajetórias orbitais, impondo que suas velocidades variem ao longo de suas órbitas.

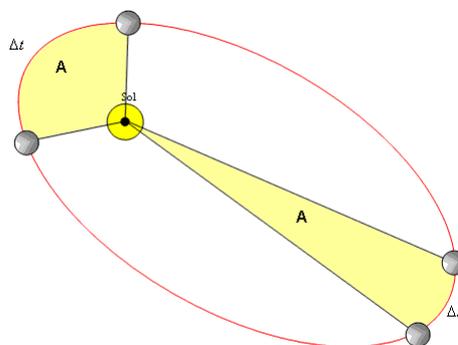


FIGURA 2.2. Ilustração da 2ª Lei de Kepler (Virtuous Tecnologia, 2008) - acessado em 06/06/2020).

• 3ª Lei de Kepler: O quadrado do período orbital  $P$  de um planeta é diretamente proporcional ao cubo de seu semieixo maior  $a$ .

$$P^2 \propto a^3 \quad (2.1)$$

Ainda que revolucionárias, as Leis de Kepler tratam somente da cinemática do movimento planetário, descrevendo as órbitas dos planetas sem se preocupar com os mecanismos que os fazem orbitar o Sol. Coube a Isaac Newton (1643-1727) abordar a dinâmica do movimento planetário e responder essa questão em seu trabalho *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (1687), mais conhecido como *Principia*<sup>1</sup>.

O *Principia* é uma das publicações mais relevantes da Física e marcou o início de uma nova forma de se fazer ciência. Nele, Newton formulou as leis de movimento (conhecidas como as três Leis de Newton), a lei da gravitação universal e também deduziu matematicamente as três leis de Kepler. Tudo isso só foi possível graças a métodos matemáticos que o próprio Newton desenvolveu e que hoje são reconhecidos como a forma geométrica do Cálculo Infinitesimal. Para um dado referencial inercial, as leis citadas são:

• 1ª Lei de Newton: Um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme se a força resultante sobre ele é nula;

<sup>1</sup>Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

• 2ª Lei de Newton: A força resultante  $\vec{F}$  aplicada sobre um corpo é igual a taxa de variação temporal de seu momento linear;

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) \quad (2.2)$$

• 3ª Lei de Newton: Para cada força aplicada por um corpo A em um corpo B, haverá uma força contrária de mesmo módulo e direção, mas com sentido oposto, aplicada pelo corpo B no corpo A;

• Lei da Gravitação Universal: Dois corpos se atraem gravitacionalmente com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas  $m_1$  e  $m_2$ , e inversamente proporcional ao quadrado da distância  $r$  que os separa.

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (2.3)$$

## 2.2 Elementos orbitais

Os elementos orbitais são parâmetros utilizados para descrever e identificar a órbita de um corpo. Existem diferentes conjuntos de elementos orbitais, com os mais comuns sendo os elementos orbitais keplerianos. Definidos em um sistema de coordenadas fixo ao planeta e que não gira com ele, os elementos keplerianos permitem a rápida descrição de órbitas elípticas, bem como identificar a posição de um satélite em qualquer lugar da órbita. Os elementos keplerianos e suas unidades são:

- $a$ : semieixo maior (km);
- $i$ : excentricidade (adimensional);
- $e$ : inclinação (graus/radianos);
- $\Omega$ : ascensão reta do nodo ascendente (graus/radianos);
- $\omega$ : argumento do periastro (graus/radianos);
- $\nu$ : anomalia verdadeira (graus/radianos).

O semieixo maior é o maior braço da elipse e define seu tamanho. A excentricidade é um valor numérico entre zero e um que mede o grau de deformação da elipse. A inclinação, a ascensão reta do nodo ascendente e o argumento do periastro indicam a orientação da órbita; a inclinação é o ângulo entre o plano da órbita e o plano fundamental de referência, a ascensão reta do nodo ascendente é o ângulo entre um ponto de referência e o ponto no qual a elipse intercepta o plano fundamental e o argumento do periastro é o ângulo, ao longo da órbita, entre a ascensão reta do nodo ascendente e o periastro. Por fim, a anomalia verdadeira é o ângulo ao longo da órbita entre o periastro e o objeto e indica a posição do corpo na órbita.

Por suas definições, a ascensão reta do nodo ascendente está atrelada à inclinação e o argumento do periastro atrelado à excentricidade. Isso pode dificultar a determinação desses parâmetros em algumas situações, pois quanto menor a inclinação, mais difícil é determinar os nodos da órbita. E quanto menor a excentricidade, mais difícil é determinar a exata localização do periastro. Note que a ascensão reta do nodo ascendente é medida no plano fundamental de referência, enquanto o argumento do perigeu e a anomalia verdadeira são medidos no plano da órbita.

As Figuras 2.3 e 2.4 (Pogurelskiy, 2015) mostram, em diferentes perspectivas, a órbita de um satélite em torno da Terra. Nesse exemplo, o plano fundamental é o plano do equador terrestre e o ponto de referência para marcação da ascensão reta do nodo ascendente é o ponto vernal. Os elementos orbitais estão destacados e são facilmente identificáveis com a seguinte notação:

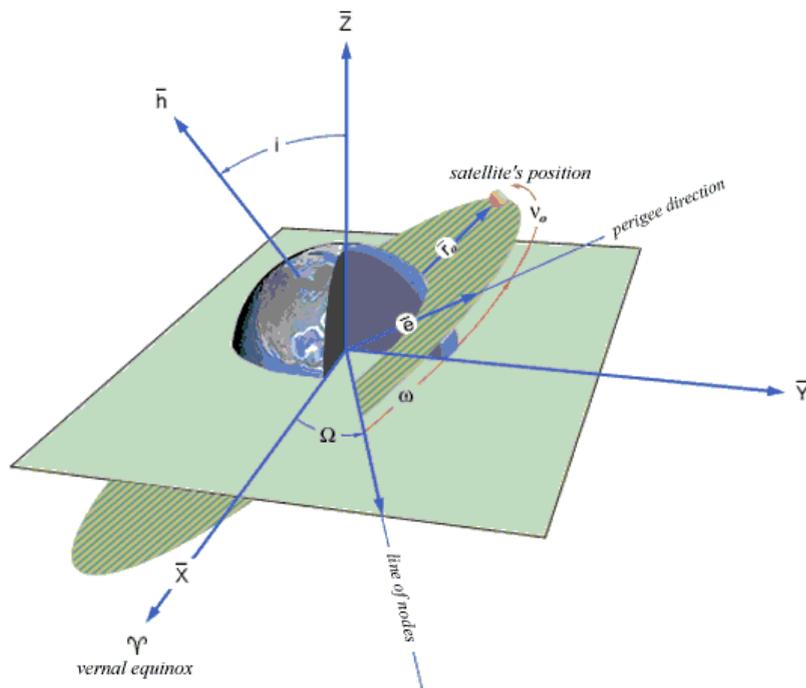


FIGURA 2.3. Órbita de um satélite em torno da Terra. O plano do equador está destacado para facilitar a visualização dos elementos orbitais (Pogurelskiy, 2015) - acessado em 27/06/2020).

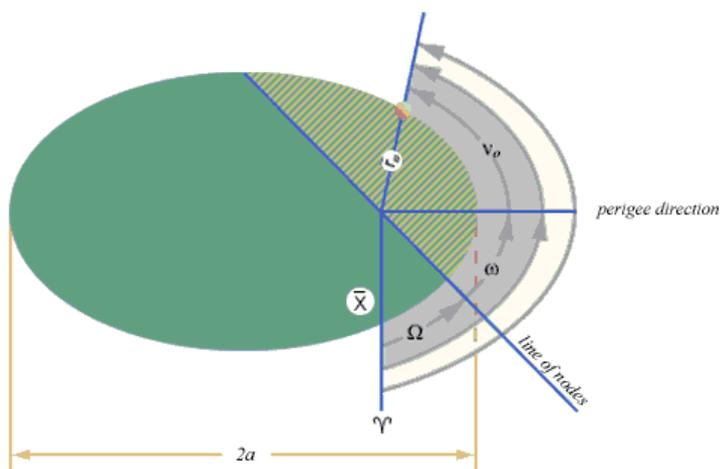


FIGURA 2.4. Órbita de um satélite em torno da Terra, vista de uma direção normal à órbita do satélite. A área hachurada indica a região da órbita que está acima do plano do equador (Pogurelskiy, 2015) - acessado em 27/06/2020).

## 2.3 Latitude e longitude

Latitude e longitude são coordenadas geográficas utilizadas para determinar a localização de um ponto em superfícies esféricas e elipsoidais. A longitude é medida em

graus a partir de um meridiano principal <sup>2</sup>, sendo considerada positiva para o lado leste e negativa para o lado oeste. Já a latitude é medida a partir do equador, sendo positiva para o norte e negativa para o sul, e sua definição varia de acordo com a superfície: em esferas a latitude é o ângulo entre o equador e o raio que passa pelo ponto de interesse; em elipsoides a latitude é chamada de latitude geodésica e é o ângulo entre o equador e a normal ao elipsoide no ponto de interesse (Vallado & McClain, 2004).

A latitude e a longitude de um satélite são, a rigor, a latitude e a longitude da projeção do satélite na superfície do corpo celeste que ele orbita, e variam a medida que o satélite percorre sua órbita. Note, então, que há uma relação entre a latitude e a inclinação orbital, pois o valor máximo da latitude de um satélite não pode ser maior do que a sua inclinação.

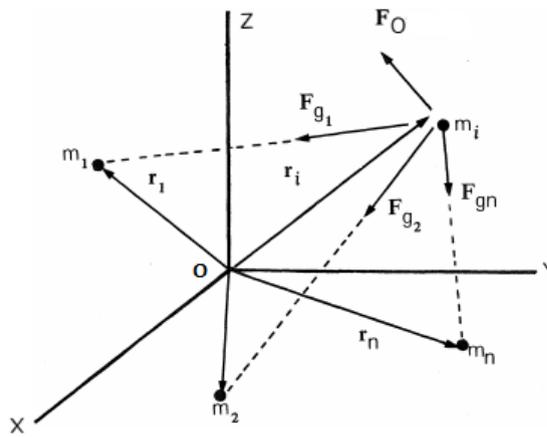
## 2.4 O Problema de $N$ -corpos

O problema de  $N$ -corpos consiste no estudo da evolução dinâmica de um grupo de  $N$  objetos de massas, posições e velocidades iniciais aleatórias, interagindo gravitacionalmente entre si segundo a Lei da Gravitação Universal de Newton. Em sua forma genérica, é um problema que não possui solução. Somente alguns casos particulares, como o problema de 2-corpos e o problema de 3-corpos restrito, são possíveis de se resolver analiticamente. Soluções numéricas com alto grau de acurácia (dentro de um dado intervalo de tempo) podem ser encontradas mediante algumas considerações e aproximações pertinentes.

Considere um sistema formado por  $N$  partículas do qual se quer estudar o movimento de uma partícula  $i$  de massa  $m_i$ , posição inicial  $\vec{r}_i$  e velocidade inicial  $\dot{\vec{r}}_i$ , definidas no sistema de coordenadas de origem  $O$ , como exemplificado na Figura 2.5 (Bate et al., 1979). Sobre esta partícula atuam as forças gravitacionais  $\vec{F}_{gj}$ , exercidas pelos outros objetos  $j$  do sistema, bem como a força  $\vec{F}_o$ , resultante de uma série de outras forças de diferentes naturezas: força eletromagnética, força de arrasto, força da pressão de radiação e outras.

---

<sup>2</sup>O meridião principal de Marte foi definido como aquele que passa pelo centro da cratera Airy-0

FIGURA 2.5. O problema de  $N$ -corpos (Bate et al., 1979) - página 6)

Chamando de  $\vec{F}_g$  a força gravitacional total, têm-se que a força resultante atuando sobre o objeto  $i$  é dada por:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_o \quad (2.4)$$

Substituindo a equação acima em 2.2 e desenvolvendo a derivada obtêm-se a equação de movimento do  $i$ -ésimo corpo em sua forma mais genérica:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_g + \vec{F}_o}{m_i} - \dot{\vec{r}}_i \frac{\dot{m}_i}{m_i} \quad (2.5)$$

A equação 2.5 é uma equação diferencial de segunda ordem, vetorial e não-linear. Como dito anteriormente, não existe solução exata para ela, mas é possível realizar uma série de simplificações e obter uma solução analítica aproximada. A primeira dessas simplificações é referente ao sistema de coordenadas utilizado, que deve ser inercial. A segunda simplificação diz respeito aos corpos do sistema, que devem ser tratados como perfeitamente esféricos e com uma distribuição homogênea de massa. Com isso é possível ignorar variações na força gravitacional causadas pela não-esfericidade do corpo, bem como considerar que o centro de massa se localiza em seu centro. Serão incluídas somente as interações gravitacionais entre os objetos do sistema; interações de qualquer outra natureza serão ignoradas ( $\vec{F}_o = 0$ ). Por fim, considera-se que a massa dos objetos não varia ao longo do tempo ( $\dot{m}_i = 0$ ).

Ao levar em conta as considerações acima na equação 2.5 é possível encontrar a forma clássica da equação de movimento do  $i$ -ésimo corpo:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_g}{m_i} \quad (2.6)$$

O próximo passo é calcular a componente resultante das forças gravitacionais exercidas na partícula  $i$ :

$$\vec{F}_g = -Gm_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_j}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji} \quad (2.7)$$

Portanto:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_j}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji} \quad (2.8)$$

Nas equações acima,  $\vec{r}_{ji}$  é o vetor posição da partícula  $i$  em relação a partícula  $j$ . Logo, a aceleração da partícula  $i$  depende somente da massa e da posição relativa dos demais corpos do sistema. Portanto, para calculá-la, é preciso conhecer o movimento de todas as demais partículas do sistema, evidenciando a dificuldade que é resolver o problema de  $N$ -corpos mesmo em sua forma mais simplificada.

Considere agora as partículas 1 e 2 de massa  $m_1$  e  $m_2$ , e posições iniciais  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , respectivamente, que pertencem ao mesmo sistema inercial de  $n$  partículas. A posição da partícula 2 em relação a partícula 1 é dada por

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.9)$$

Como o sistema de coordenadas escolhido é um sistema inercial, pode-se calcular a aceleração da partícula 2 em relação à partícula 1 simplesmente derivando duas vezes em relação ao tempo a equação 2.9. Se o sistema adotado não fosse inercial, seria preciso considerar as derivadas dos eixos do sistema.

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 \quad (2.10)$$

As expressões para  $\ddot{\vec{r}}_1$  e  $\ddot{\vec{r}}_2$  podem ser facilmente encontradas através da equação 2.8. Os termos referentes às partículas 1 e 2 serão colocados fora dos somatórios para separá-los das demais partículas do sistema:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} - G \sum_{j=3}^N \frac{m_j}{r_{j1}^3} \vec{r}_{j1} \quad (2.11)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G \frac{m_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - G \sum_{j=3}^N \frac{m_j}{r_{j2}^3} \vec{r}_{j2} \quad (2.12)$$

A equação 2.10 ficará então:

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = -G \left( \frac{m_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} - \frac{m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \right) - G \sum_{j=3}^N m_j \left( \frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3} \right) \quad (2.13)$$

Repare que  $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ , o que permite reescrever a equação 2.13 da seguinte forma:

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = -G \left( \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \right) - G \sum_{j=3}^N m_j \left( \frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3} \right) \quad (2.14)$$

A primeira expressão entre parênteses da equação anterior se refere unicamente à interação entre as partículas 1 e 2, enquanto o somatório se refere às perturbações que as partículas 1 e 2 sofrem pelas demais partículas do sistema.

Isso pode ser melhor compreendido ao tomar o tema deste projeto como exemplo: considere que a partícula 1 é o planeta Marte, a partícula 2 é um satélite artificial orbitando Marte e as outras partículas são os demais objetos do Sistema Solar. Portanto, o primeiro termo representa a influência direta de Marte na órbita do satélite e o segundo termo as perturbações causadas no satélite pelos outros corpos do Sistema Solar.

## 2.5 O potencial gravitacional

Na seção anterior, uma série de simplificações foram feitas para que fosse possível encontrar a equação do movimento de uma partícula. Em um estudo mais detalhado ou específico do problema de  $N$ -corpos, essas considerações precisam ser revistas e tratadas de maneira adequada, já que podem ter consequências importantes na evolução dinâmica do sistema. Um exemplo disso é a precessão dos equinócios, fenômeno causado pela não-esfericidade da Terra.

Em problemas de Astrodinâmica nos quais se têm um satélite orbitando um planeta, é preciso considerar a real distribuição de massa e o formato do planeta ao estudar como se dá a evolução orbital do satélite. Torna-se necessário compreender melhor a força gravitacional exercida por um objeto nessas condições não ideais.

Considere um corpo  $Q$  com um formato arbitrário, massa  $m$  distribuída de maneira não-homogênea e densidade  $\rho(r)$ . A uma distância  $R$  de seu centro de massa está uma partícula  $P$  de massa  $M$  (Figura 2.6).

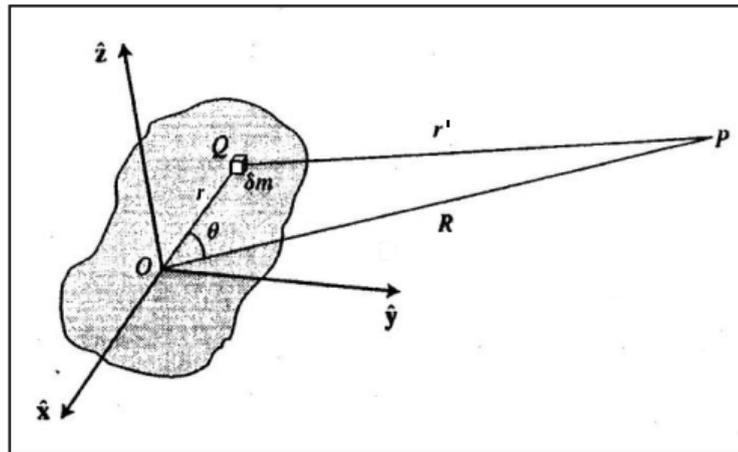


FIGURA 2.6. O potencial de um sólido (Martins, 2018).

A força gravitacional exercida pelo corpo  $Q$  em  $P$  é dada por:

$$\vec{F}_g = -GM \int \frac{\vec{r}'}{r'^3} dm = -GM \iiint \rho(r) \frac{\vec{r}'}{r'^3} dx dy dz \quad (2.15)$$

Note que:

$$\frac{\vec{r}'}{r'^3} = -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r'} \right) \quad (2.16)$$

Ao lembrar da relação entre energia potencial e força ( $\vec{F}_g = -\vec{\nabla}U$ ), percebe-se que podemos simplificar o problema utilizando o potencial gravitacional ao invés da força gravitacional, uma vez que o mesmo é dado por:

$$U = GM \iiint \rho(r) \frac{1}{r'} dx dy dz \quad (2.17)$$

Quando o corpo tem o formato de um esferóide, como no caso dos planetas, a integral acima pode ser calculada através da expansão em harmônicos esféricos<sup>3</sup>. No caso de Marte, após a expansão o potencial é dado por (Genova et al 2016):

$$U = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{l=2}^m \left( \frac{a_e}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l [\bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{lm} \sin(m\phi) \right\} \quad (2.18)$$

Na equação acima,  $M$  é a massa de Marte e  $a_e$  e seu raio equatorial, ambos valores conhecidos.  $\bar{P}_{lm}$  são os polinômios de Legendre normalizados de grau  $l$  e ordem  $m$ , que também tem seus valores conhecidos. Considerando o centro de Marte como origem do sistema e o equador marciano como plano fundamental, as variáveis  $r$ ,  $\lambda$  e  $\phi$  são respectivamente distância radial, longitude e latitude do satélite. Por fim,  $\bar{C}_{lm}$  e  $\bar{S}_{lm}$  são os coeficientes normalizados da expansão em harmônicos esféricos. São esses coeficientes que determinam qual a influência do campo gravitacional de um planeta na órbita de um satélite. No caso de Marte, são obtidos comparando modelos numéricos com dados de sondas espaciais que orbitam o planeta.

## 2.6 Pontos de equilíbrio

O campo gravitacional de um corpo possui dois pontos de interesse, chamados pontos de equilíbrio estável e instável. Nos pontos de equilíbrio instável, a energia

<sup>3</sup>Conjunto de funções que representam a variação temporal das soluções (expressas em coordenadas esféricas) da equação de Laplace.

potencial gravitacional apresenta um máximo local. Uma partícula inicialmente em repouso nesse ponto, ao sofrer uma força externa que a remova do equilíbrio, irá se afastar desse ponto e não retornará ao equilíbrio.

Nos pontos de equilíbrio estável ocorre o oposto e a energia potencial gravitacional apresenta um mínimo local. Ao sofrer uma força que mude levemente sua posição, uma partícula localizada inicialmente no ponto de equilíbrio estável irá retornar a sua posição inicial de equilíbrio. Se o mesmo ocorrer com uma partícula localizada entre os pontos de equilíbrio estável e instável, esta não retornará à sua posição inicial, mas ficará oscilando em torno do ponto de equilíbrio estável.

Isso é particularmente interessante para o controle de satélites, pois significa que quanto mais próximo de um ponto de equilíbrio um satélite estiver, menor será a sua amplitude de oscilação. Portanto, o melhor cenário possível é aquele no qual o satélite está localizado no próprio ponto de equilíbrio.

## 2.7 Pressão de radiação solar

A pressão da radiação  $P$  emitida pelo Sol exerce uma força  $\vec{F}_{rs}$  no satélite, dependente da área  $S$  do satélite iluminada pelos raios solares e de seu coeficiente de reflectividade  $\varepsilon$ :

$$\vec{F}_{rs} = PS(1 + \varepsilon) \quad (2.19)$$

Modelar o efeito dessa força não é trivial. Satélites artificiais são formados por diferentes partes de tamanho, formato e coeficientes de reflectividade diferentes, e que são iluminadas em diferentes momentos da órbita. Logo, é preciso conhecer não apenas a posição do Sol e do satélite, mas também a orientação do satélite em relação ao Sol, a área do satélite iluminada em cada momento da órbita, o coeficiente de reflectividade de cada superfície iluminada e o centro de massa do satélite.

Dois efeitos causados pela pressão de radiação podem ser destacados. O primeiro é o surgimento de um torque no satélite que afeta sua orientação. Esse torque pode ser

desprezado em estudos de dinâmica orbital, mas deve ser incluído em análises que consideram o apontamento do satélite. O outro efeito é uma perturbação na excentricidade do satélite. De acordo com Soop (1994):

$$\vec{e}(t) = \vec{e}_o + \frac{3PS(1 + \varepsilon)Y}{4\pi V} \begin{pmatrix} \cos s_{\odot} \\ \sin s_{\odot} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Na equação 2.20,  $Y$  é o período orbital do planeta em torno do Sol,  $V$  o módulo da velocidade orbital do satélite em torno do planeta e  $s_{\odot}$  é o ângulo sideral da projeção do Sol no plano da órbita. O resultado da equação mostra que a excentricidade se move em um círculo de centro  $e_0$ , raio  $\frac{3PS(1 + \varepsilon)}{4\pi V}$  e período  $Y$ .

## 2.8 Satélites de telecomunicação

Utilizados na Terra desde a década de 60, satélites de telecomunicação captam com suas antenas ondas eletromagnéticas enviadas por um centro de controle (*uplink*), e as retransmitem para antenas localizadas em sua área de cobertura (*downlink*). Sua vantagem é que não precisam de um meio artificial para transmitir seus sinais, tornando mais fácil a comunicação entre localidades distantes umas das outras (Figura 2.7).

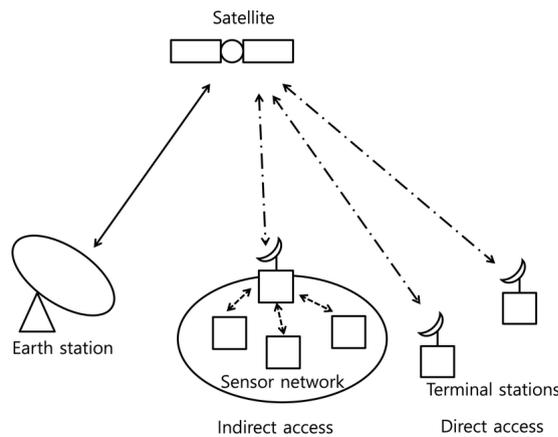


FIGURA 2.7. Comunicações via satélite. O satélite recebe sinais de uma estação de controle e os envia para antenas que estejam em sua área de cobertura (Kim et al., 2020).

O uso de satélites de telecomunicação em Astronomia se torna cada vez mais interessante pois dentre todos os artefatos enviados para outros corpos do Sistema Solar não há nenhum que seja dedicado a comunicação. A prioridade dessas missões, sejam

satélites ou *rovers*, é a obtenção de dados, e o recebimento e envio de sinais para a Terra não são otimizados. São janelas curtas de visibilidade entre a Terra e os objetos, podendo ser de apenas minutos em alguns casos, com uma baixa de transmissão de dados.

## 2.9 Órbitas estacionárias e manobras de controle orbital

Satélites artificiais podem ser inseridos em diferentes órbitas de acordo com seu objetivo. Satélites de imageamento, por exemplo, costumam ficar em órbitas baixas, mais próximos da superfície; satélites meteorológicos, por sua vez, ficam em órbitas mais elevadas. Neste trabalho, estudamos satélites em órbitas *estacionárias*.

Entretanto, uma vez no espaço, a perturbação gravitacional exercida no satélite pelos corpos do Sistema Solar tenderá a removê-lo da órbita estacionária. São definidos então boxes de controle, limites em torno da órbita estacionária nos quais os satélites têm liberdade para oscilar. Antes que o satélite viole esses limites, são realizadas manobras de correção orbital (Pocha, 2012): pequenos jatos localizados no corpo do satélite são disparados de maneira controlada e provocam uma mudança em sua velocidade ( $\Delta\vec{V}$ ) em uma dada direção, colocando novamente o satélite na órbita desejada. Com o passar do tempo, o satélite irá novamente chegar perto de violar esses limites e novas manobras serão feitas.

Manobras de controle de satélites estacionários são categorizadas de acordo com a direção do  $\Delta\vec{V}$  aplicado, que pode ser tanto na direção ortogonal quanto na direção tangencial ao plano da órbita. As manobras da direção ortogonal são chamadas de manobras de inclinação e podem ser tanto manobras N (Norte, positivas) como manobras S (Sul, negativas). Essas manobras são executadas quando o satélite passa pelos nodos de sua órbita e seu efeito é mudar a inclinação e a ascensão reta do nodo ascendente (Figura 2.8). Manobras N são executadas quando o satélite passa pelo nodo descendente e manobras S quando passa pelo nodo ascendente. O efeito das manobras N e S é o mesmo, só mudando o ponto da órbita em que são executadas.

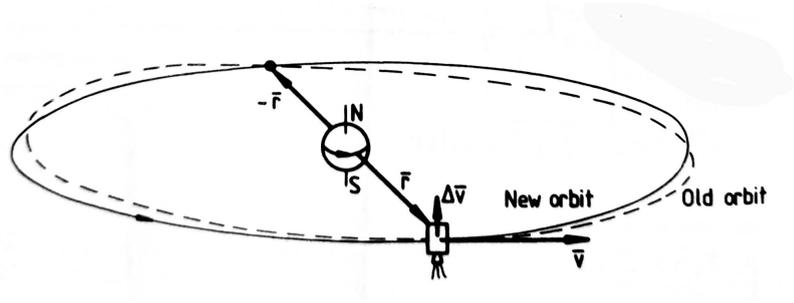


FIGURA 2.8. Exemplo de manobra N. Nesse caso o  $\Delta\vec{V}$  fornecido pelo disparo dos jatos tem a direção norte. A manobra é executada quando o satélite passa pelo nó descendente, que se torna o ponto de interseção entre as órbitas pré e pós-manobra (Soop, 1994), página 48).

As manobras na direção tangencial ao plano da órbita são chamadas de manobra de deriva e podem ser tanto manobras W (Oeste, negativas) como manobras E (Leste, positivas). Seu efeito é mudar a excentricidade e o semieixo maior (Figura 2.9), o que se traduz em uma mudança na taxa de variação da longitude do satélite, chamada de *drift* ou deriva. São as manobras responsáveis por manter a órbita circular e síncrona.

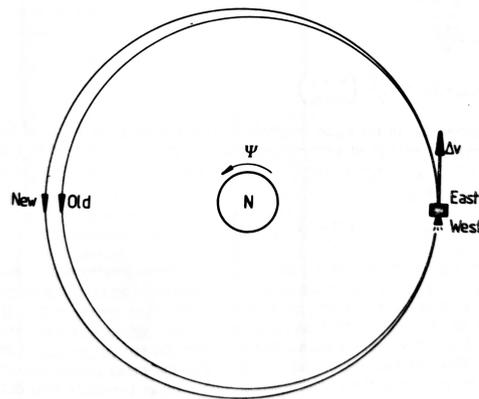


FIGURA 2.9. Exemplo de manobra E. Nesse caso o  $\Delta\vec{V}$  fornecido pelo disparo dos jatos tem a direção leste. Repare que o ponto no qual a manobra é executada se torna o periastro da nova órbita (Soop, 1994), página 53).

Diferente das manobras de inclinação, que somente são executadas nos nodos da órbita, as manobras de longitude podem ser realizadas em qualquer ponto da órbita. No entanto, o horário de execução e a direção da manobra vão afetar diretamente a excentricidade da órbita. Este processo está ilustrado na Figura 2.10. Nela é possível visualizar como manobras E e W realizadas no mesmo horário causam efeitos contrários no vetor excentricidade.

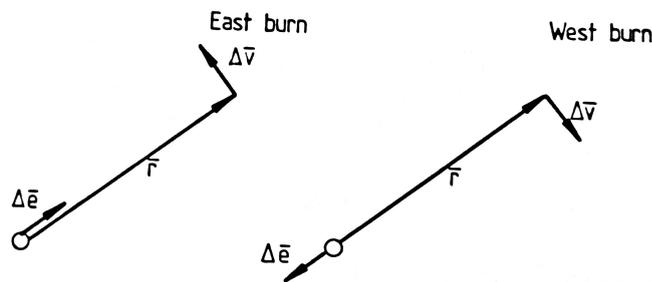


FIGURA 2.10. Exemplo de como a excentricidade é afetada por manobras de deriva. (Soop, 1994), página 59).

A deriva é controlada pelo sentido do  $\Delta\vec{V}$  aplicado: manobras W diminuem o semieixo maior e provocam uma deriva no sentido leste, enquanto manobras E aumentam o semieixo maior e provocam no sentido oeste.

Como pode ser visto na Figura 2.11, o  $\Delta\vec{V}$  aplicado em um sentido faz o satélite se deslocar no sentido oposto. Este efeito é consequência da mudança no semieixo maior. Para um satélite orbitando a Terra, por exemplo, uma manobra E causa um aumento do semieixo maior e, em consequência, provoca também um aumento do período do satélite. Este passa a se deslocar com uma velocidade menor que a de rotação do planeta e para um observador na superfície o satélite parece se deslocar para o oeste (Figura 2.11).

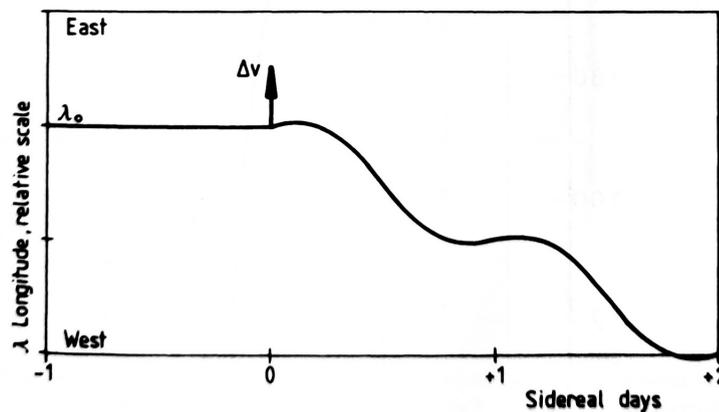


FIGURA 2.11. Variação da longitude ( $\lambda$ ) de um satélite em órbita estacionária causada por manobra E. Apesar de causar um deslocamento inicial para leste, sentido do  $\Delta\vec{V}$  aplicado, rapidamente o satélite se desloca para oeste em função do aumento do semieixo maior (Soop, 1994), página 55).

Para realizar as manobras, o satélite gasta combustível de sua reserva. Uma vez que não haja mais combustível, o satélite perde a capacidade de realizar manobras e fica livre no espaço. O tipo de combustível varia de acordo com o sistema de propulsão utilizado. O mais comum é o de propulsão química, bi-propelente, que utiliza como

combustível uma mistura entre hidrazina ( $N_2H_4$ ) e um oxidante (Mazouffre, 2016). Um outro sistema de propulsão cujo uso tem crescido nos últimos anos é o de propulsão iônica, que utiliza um gás inerte de xenônio (Xe) como combustível.

O planejamento de manobras de controle orbital é complexo. Além das questões de dinâmica orbital envolvidas, com motivo de que as manobras possam ser realizadas com eficiência, poupando o máximo de combustível possível, é preciso também conhecer a configuração do satélite, como, por exemplo:

- A localização e orientação dos jatos no corpo do satélite;
- Quais jatos podem ser disparados e por quanto tempo podem ser disparados durante a manobra;
- O centro de massa do satélite, que varia ao longo da manobra devido ao gasto de combustível;
- A área efetiva do satélite no momento da manobra.

## 2.10 Equação do foguete

A equação do foguete descreve o movimento de veículos que, devido ao princípio de conservação da energia, são capazes de adquirir aceleração ao expelir parte de sua massa (Soop, 1994). Ela fornece a variação de velocidade  $\Delta v$  alcançada por um satélite, por exemplo, ao expelir uma quantidade  $\Delta m$  de combustível. É normalmente retratada da seguinte forma:

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln \frac{m + \Delta m}{m} \quad (2.21)$$

Na equação 2.21 temos:

- $I_{sp}(s)$ : impulso específico, uma medida de quão eficiente um elemento propulsor é capaz de gerar empuxo
- $g_0(m/s^2)$ : aceleração da gravidade padrão
- $m(kg)$ : massa do satélite

- $\Delta m(kg)$ : massa de combustível

## Capítulo 3

# Metodologia

A etapa inicial do trabalho consistiu em entender como a órbita de um satélite areoestacionário evolui ao longo do tempo e quais são suas principais fontes de perturbação. Geramos uma série de modelos<sup>1</sup>, nos quais o satélite oscila livremente, sem qualquer tipo de manobra de controle orbital. A posterior comparação entre esses modelos nos permitiu inferir qual é a maior fonte de influência em cada elemento orbital.

Primeiro propagamos por 100 anos a órbita de um satélite areoestacionário. Nessa propagação foram incluídos todos os planetas do Sistema Solar, o Sol, Phobos e Deimos, a Lua, Plutão e Ceres. Também foi incluída a pressão de radiação solar. A propagação da órbita para esse longo período nos permite ter uma visão geral de como os elementos orbitais evoluem.

A etapa seguinte foi estudar o efeito do potencial gravitacional de Marte em um satélite areoestacionário. Dois modelos foram gerados, um deles com o satélite em um ponto de equilíbrio estável e o outro com o satélite em um ponto de equilíbrio instável. Dessa maneira podemos entender como diferentes regimes de influência causada pelo potencial de Marte afeta a evolução dos elementos orbitais.

Em seguida nos dedicamos a entender os efeitos da pressão de radiação solar. Incluímos seus efeitos em um dos modelos anteriores e comparamos os resultados. Não incluímos nenhuma outra fonte de perturbação tal que os efeitos da pressão de radiação ficassem mais evidentes.

---

<sup>1</sup>Simulações da evolução orbital de um satélite areoestacionário ao longo do tempo.

Por fim, analisamos a influência causada pelos demais objetos do Sistema Solar. Para isso geramos uma série de modelos nos quais variamos os corpos celestes presentes.

Uma vez terminado esse trabalho de análise, estabelecemos uma estratégia de controle para satélites areoestacionários e a simulamos para diferentes longitudes iniciais, estimando o gasto de combustível necessário através da equação do foguete. Calculamos também o período de visibilidade do satélite pelas estações da DSN.

Nas seções a seguir, detalharemos sobre os *softwares* que utilizamos e sobre suas configurações, bem como sobre o potencial de Marte utilizado em nossos modelos.

### 3.1 GMAT

Os modelos utilizados foram gerados no GMAT (*General Mission Analysis Tool*), um software *open source*<sup>2</sup> desenvolvido pela NASA com a contribuição de algumas empresas do setor privado e entidades públicas. Completamente gratuito, foi elaborado não só para ser utilizado em missões reais, mas também para ser uma ferramenta de educação e ensino.

O GMAT modela e otimiza a trajetória de voo de satélites e sondas em missões realizadas no Sistema Solar. Ele resolve o problema de N-corpos de maneira numérica, levando em conta potencial gravitacional do objeto principal (neste caso, Marte) e tratando os demais objetos como massas pontuais.

Essa ferramenta tem sido utilizada em uma série de missões espaciais (Hughes, 2015) como a LCROSS (*Lunar Crater Observation and Sensing Satellite*), a LRO (*Lunar Reconnaissance Orbiter*), a OSIRIS-REx (*Origins, Spectral Interpretation, Resource Identification, Security, Regolith Explorer*), a MMS (*Magnetospheric Multiscale Mission*) e a TESS (*Transiting Exoplanet Survey Satellite*). Também foi utilizado pela indústria e pela academia ((Leppinen, 2016), (Mahdi, 2015)).

O GMAT permite que sejam criados e configurados uma série de recursos que serão utilizados na missão. Esses recursos se dividem em duas categorias: recursos físicos e de análise. Os recursos físicos envolvem os satélites, sondas e seus componentes, estações

---

<sup>2</sup>Softwares ou aplicativos que disponibilizam seu código fonte, permitindo que modificações sejam feitas por seus usuários.

terrenas e objetos planetários, como planetas, satélites naturais e asteróides. Os recursos de análise incluem propagadores, integradores numéricos, funções de interpolação, recursos gráficos e outros. Os recursos são alocados na chamada sequência de missão, onde são definidas as atividades que devem ser realizadas.

O GMAT possui uma extensa base de dados com informações sobre os parâmetros físicos dos principais objetos do Sistema Solar. Possui também vetores de estados destes mesmos objetos, os quais propaga para a órbita desejada pelo usuário. A maioria dos parâmetros dessa base de dados pode ser substituída por dados fornecidos pelo usuário, conferindo uma ampla flexibilidade no uso do *software*.

É possível escrever subrotinas no GMAT e há uma integração com outros produtos da NASA, como dados SPICE<sup>3</sup>, e também com o MATLAB. A Figura 3.1 mostra um exemplo da interface gráfica do GMAT em uma missão lunar. Nela podemos ver alguns dos recursos configurados, a sequência de missão planejada e algumas saídas gráficas com as trajetórias calculadas.

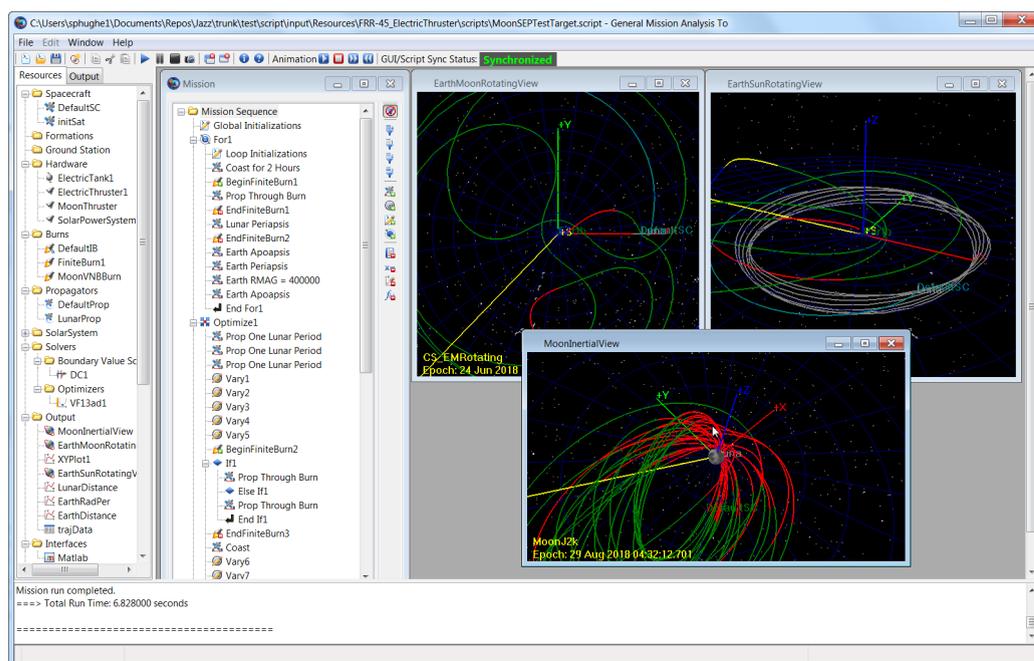


FIGURA 3.1. Interface gráfica do GMAT. No lado esquerdo está localizada a tabela de recursos; no meio está a sequência de missão; à direita temos três janelas gráficas com as trajetórias calculadas em diferentes sistemas de coordenadas (<https://gmt.atlassian.net/wiki/spaces/GW/overview> - Acessado em 13/05/2018).

<sup>3</sup>Sistema de dados desenvolvido pela NASA que contém informações sobre a órbita, geometria e orientação de sondas espaciais e objetos naturais do Sistema Solar.

Uma das etapas mais importantes do uso do GMAT é a configuração do satélite. Suas propriedades físicas, como a massa e a área efetiva, irão afetar sua evolução dinâmica ao longo do tempo. Além disso, para calcular corretamente as manobras de controle é preciso conhecer as características do sistema de propulsão adotado. Dado que são muitas as possibilidades, optamos por fazer algumas simplificações. A primeira diz respeito às especificações do satélite. Decidimos usar o satélite padrão do GMAT, com uma massa de 850 kg e uma área efetiva de pressão de radiação de  $1 \text{ m}^2$ .

A segunda simplificação se refere as manobras. Vamos considerar que todas as manobras são *impulsivas*, ou seja, todo o  $\Delta V$  é aplicado instantaneamente e em uma só direção. Tratar as manobras como impulsivas nos permite focar na questão dinâmica, sem levar em conta as características do sistema de propulsão.

Não iremos incluir nos nossos modelos análises do torque sofrido pelo satélite devido à pressão de radiação e as manobras de controle. Também não levaremos em consideração qualquer aspecto da transmissão de dados, nos atendo puramente a questão dinâmica.

Utilizamos um sistema de coordenadas inerciais em nossos modelos. O GMAT utiliza como referência o equador do objeto principal na época J2000<sup>4</sup>, com a seguinte definição para os eixos:

- Eixo-x: direção da linha formada pela interseção do equador do objeto principal e o equador médio da Terra na época J2000;
- Eixo-z: direção do eixo de rotação do objeto principal na época J2000;
- Eixo-y: direção que completa o sistema dextrogiro.

Dentre todos os integradores numéricos disponíveis no GMAT que podem ser usados para a propagação de órbita escolhemos usar o *PrinceDormand78*, um integrador Runge-Kutta com passo adaptativo de oitava ordem e sétima ordem de controle de erro. É o integrador padrão do GMAT e o mais recomendado para uso geral.

Abaixo um exemplo da evolução da longitude e excentricidade de um satélite areoestacionário gerado pelo GMAT para o período de um ano.

---

<sup>4</sup>Uma época de referência em Astronomia. Corresponde a 01/01/2000 - 12:00:00.000

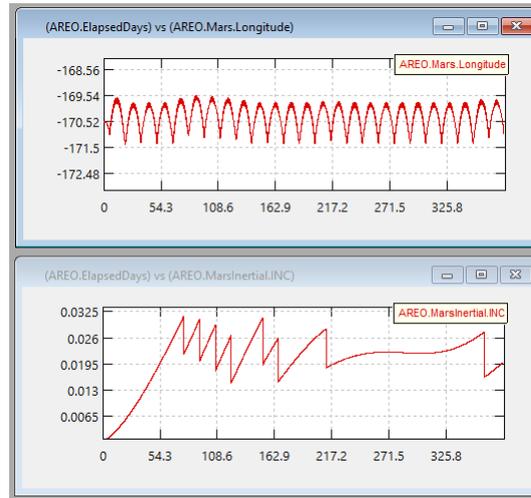


FIGURA 3.2. Evoluções da longitude e da excentricidade de um satélite areoestacionário geradas pelo GMAT para o período de um ano.

### 3.2 STK

Outro software utilizado foi o STK (*System Tool Kit*), pertencente a AGI (*Analytical Graphic, Inc.*). Diferente do GMAT, que é restrito ao planejamento e análise de missões espaciais, o STK permite também a modelagem de ativos em ambientes terrestres, marinhos e aéreos. É uma ferramenta mais complexa, com mais recursos e mais funcionalidades que o GMAT, sendo utilizada por empresas e organizações dos mais variados setores, como a própria NASA, a ESA, empresas de telecomunicação, empresas de transporte marítimo e o Departamento de Defesa Norte Americano (AGI, 1989).

O STK foi utilizado no estudo de visibilidade do satélite pelas estações da DSN e da ESTRACK (Figura 3.3) ao longo da missão. Os dados do satélite são importados do GMAT, que possui a opção de gerar um arquivo de efemérides em um formato aceito pelo STK, e as estações da DSN foram configuradas manualmente no STK. Alguns corpos celestes podem ocultar momentaneamente o satélite e precisam ser levados em consideração. Estes foram o próprio Marte, a Lua, o Sol, Mercúrio, Vênus, Phobos, Deimos e Ceres.

As antenas da DSN tem uma série de limitações e restrições ao receber e transmitir dados para os objetos observados (Slobin, 2016). A primeira limitação é mecânica: a elevação mínima que as antenas atingem é de  $6^\circ$ , e qualquer objeto abaixo disso é invisível pra elas. A segunda limitação é de relevo, pois dependendo da direção do objeto de

interesse pode haver algo na linha de visada, até mesmo um dos prédios administrativos da estação ou uma outra antena. Por fim, por uma questão de segurança das pessoas que trabalham nas estações, as antenas só enviam sinais para o satélite que estejam com uma elevação mínima maior que  $10^\circ$ . Não encontramos qualquer material de referência sobre as limitações das antenas da ESTRACK, então assumimos que elas são iguais as das antenas da DSN. Por causa dessas limitações, o cálculo de visibilidade só foi feito para satélites com uma elevação mínima maior que  $10^\circ$ .

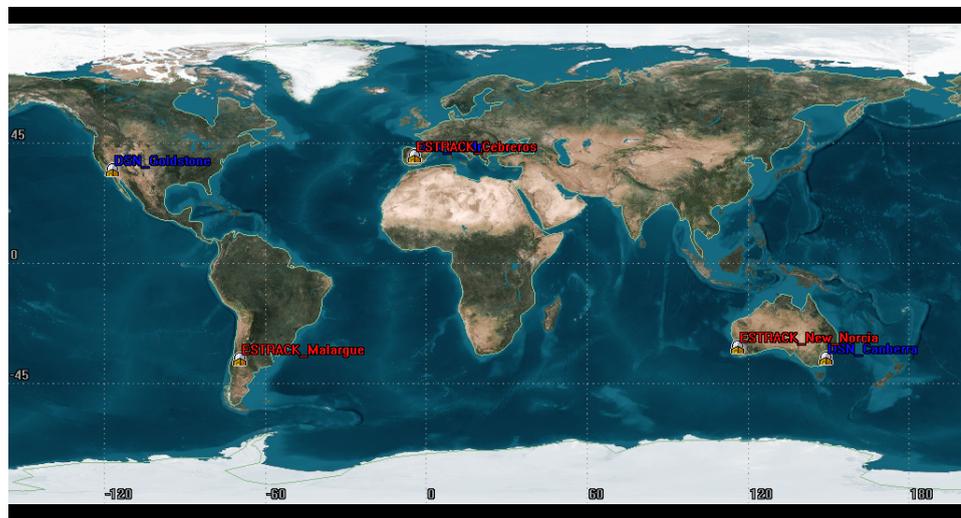


FIGURA 3.3. Localização das estações da DSN (azul) e da ESTRACK (vermelho).

O STK possui duas versões: uma paga e outra gratuita. Utilizamos a versão gratuita do STK neste trabalho. Apesar da maioria dos recursos, principalmente os propagadores e integradores numéricos, estarem disponíveis somente na versão paga, a ferramenta do STK que realiza o cálculo de visibilidade está disponível também na versão gratuita.

Abaixo segue um exemplo do resultado gerado no STK, mostrando as janelas de visibilidade de cada estação da DSN para um satélite areoestacionário em fevereiro de 2019.

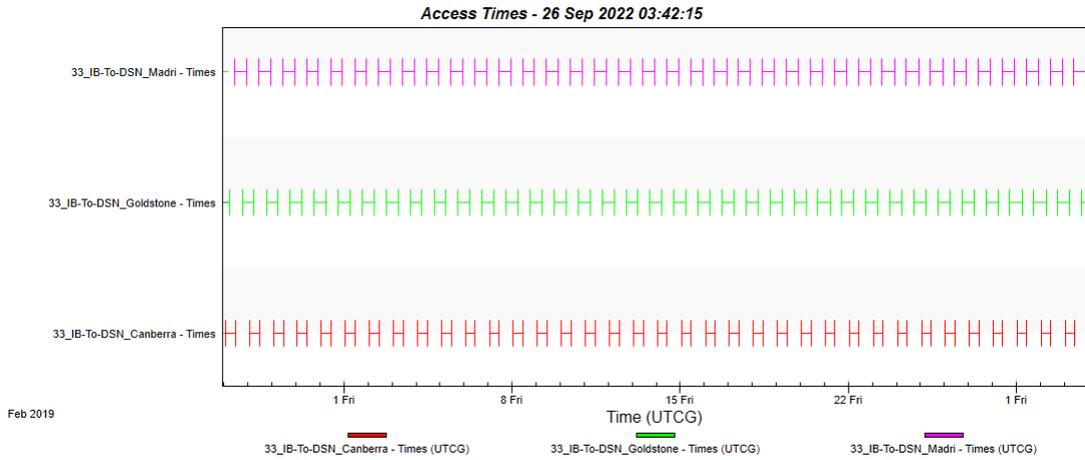


FIGURA 3.4. Janela de visibilidade calculada pelo STK para o mês de fevereiro de 2019. Na cor roxa é o período de visibilidade de Madri, em verde o de Goldstone e em vermelho o de Canberra.

### 3.3 O potencial de Marte

O potencial de Marte nativo do GMAT é o MARS50c (Konopliv & Sjogren, 1995). Ele foi desenvolvido em 1995, utilizando dados das sondas *Viking* e *Mariner9*. Optamos por usar uma versão mais recente do potencial de Marte em nossos modelos, o GMMM-3 (Genova et al., 2016). Calculado em um dos institutos da NASA, o *Goddard Space Flight Center*, a partir dos dados observacionais das sondas espaciais MRO, MGS e *Mars Odyssey*. Os coeficientes  $\bar{C}_{lm}$  e  $\bar{S}_{lm}$  são obtidos por meio de expansões vão até grau e ordem 120, e incluem os efeitos da variação de massa atmosférica causada pelo ciclo de dióxido de carbono ( $CO_2$ ).

### 3.4 Pontos de equilíbrio de Marte

Os pontos de equilíbrio do campo gravitacional de Marte foram derivados de maneira analítica por diferentes autores, como Alvarellos (2009) e Liu et al. (2012). Utilizamos os resultados de Silva & Romero (2013), que além da análise analítica realizaram também uma análise numérica, obtendo os seguintes resultados:

<b>Longitude (E)</b>	<b>Tipo</b>	<b>Região</b>
75.1	Instável	Syrtis Major Planum
167.83	Estável	Elysium Planitia
254.45	Instável	Tharsis
342.08	Estável	Iani Chaos

TABELA 3.1. Pontos de equilíbrio estável, instável e a região onde estão localizados.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Análise de longo período

Nosso estudo começa com uma análise da propagação de longo período para um satélite em órbita areoestacionária. Essa análise nos dá uma informação geral de como a órbita evolui, servindo de referência para as análises posteriores. A órbita foi propagada por 100 anos. Foram incluídas as perturbações gravitacionais causadas por todos os planetas do Sistema Solar mais Phobos, Deimos, Ceres, Plutão, o Sol e a Lua. Também foi incluída a perturbação causada pela pressão de radiação solar.

A época inicial é 01/JAN/1990 12:00:00.000 e foi escolhida de maneira arbitrária. Os valores do semieixo maior, excentricidade e inclinação foram definidos para termos uma órbita areoestacionária. A ascensão reta do nodo ascendente e o argumento do periastro foram escolhidos de maneira arbitrária<sup>1</sup>. As anomalias foram definidas de forma que a longitude inicial fosse o ponto de equilíbrio estável em  $167.83^\circ E^2$ .

Os resultados das evolução dos elementos orbitais podem ser vistos nas figuras 4.1 e 4.2.

---

<sup>1</sup>O GMAT exige que todos os elementos orbitais sejam definidos pelo usuário. Portanto, também é preciso definir valores para ascensão reta do nodo ascendente e argumento do periastro nos casos de órbitas equatoriais e circulares, ainda que teoricamente isso não faça sentido.

<sup>2</sup>Há uma relação intrínseca no GMAT entre a anomalia verdadeira e longitude areodésica.

<b>Época</b>	01 Jan 1990 12:00:00.000
<b>SMA (km)</b>	20428
<b>ECC</b>	0.0
<b>INC (graus)</b>	0.0
<b>RAAN (graus)</b>	0.0
<b>AOP (graus)</b>	0.0
<b>TA (graus)</b>	127.1815

TABELA 4.1. Órbita inicial usada na análise de longo período.

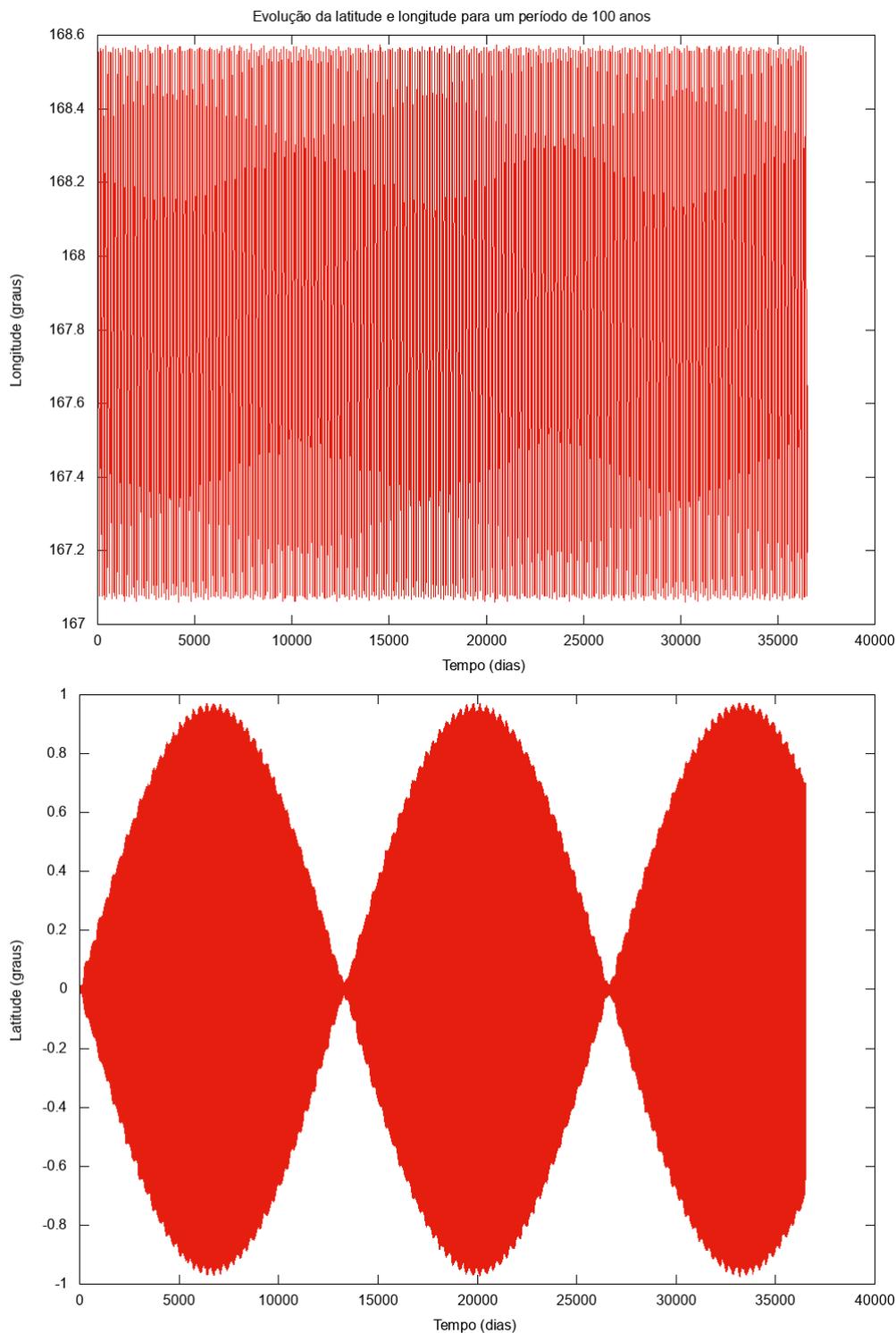


FIGURA 4.1. Evolução da latitude e longitude de um satélite de longitude inicial igual a 167.83°E.

O semieixo maior apresenta uma baixa amplitude de oscilação pois a longitude inicial do satélite é um dos pontos de equilíbrio estável. A baixa oscilação do semieixo maior se reflete na baixa deriva do satélite. Podemos ver na Figura 4.1 que a amplitude de oscilação da longitude é menor que  $1^\circ$ .

A excentricidade não atinge valores elevados, permanecendo menor que  $1 \times 10^{-4}$  a maior parte do período. Isso afeta o argumento do periastro e a anomalia média, cuja determinação será mais difícil nesses casos. Para explicitar isso, nos gráficos da evolução do argumento do periastro e da anomalia média os dados foram plotados com duas cores diferentes: vermelho para os casos onde a excentricidade é menor que  $1 \times 10^{-4}$  e preto nos casos onde é maior que  $1 \times 10^{-4}$ .

Com um ciclo de aproximadamente 36 anos, a inclinação também não atinge valores elevados e permanece menor que  $1^\circ$  ao longo de todo período. A ascensão reta do nodo ascendente e a latitude acompanham a evolução da inclinação, tendo ciclo de mesma duração. A ascensão reta do nodo ascendente converge para valores próximos de  $300^\circ$  e vai diminuindo até a inclinação atingir seu mínimo, onde então retorna para seu valor inicial e reinicia o ciclo; a latitude oscila sem jamais atingir um valor maior que a inclinação.

## 4.2 Análise do potencial de Marte

Propagamos dois modelos por 10 anos usando somente o potencial de Marte como fonte de perturbação da órbita. Os dois modelos começam na mesma época mas em longitudes iniciais diferentes: o modelo (1) no ponto de equilíbrio estável em  $167.83^\circ\text{E}$ , e o modelo (2) no ponto de equilíbrio instável em  $254.45^\circ\text{E}$ . Esses pontos foram escolhidos para podermos analisar como as órbitas evoluem partindo de extremos opostos. As órbitas estão descritas na Tabela 4.2.



	<b>Modelo 1</b>	<b>Modelo 2</b>
<b>SMA (km)</b>	20428	20428
<b>ECC</b>	0.0	0.0
<b>INC (graus)</b>	0.0	0.0
<b>RAAN (graus)</b>	0.0	0.0
<b>AOP (graus)</b>	0.0	0.0
<b>TA (graus)</b>	29.1735 E	115.7933 E

TABELA 4.2. Órbitas iniciais usadas na análise do potencial gravitacional de Marte.

A época inicial é 29/JUN/2018 12:00:00.000 e foi escolhida de maneira arbitrária; os valores do semieixo maior, excentricidade e inclinação foram definidos para termos uma órbita areoestacionária. A ascensão reta do nodo ascendente e o argumento do periastro foram escolhidos de maneira arbitrária. As anomalias foram definidas de forma que a longitudes iniciais dos modelos (1) e (2) fossem, respectivamente, o ponto de equilíbrio estável em  $167.83^\circ$  E e o ponto de equilíbrio instável em  $254.45^\circ$  E. Não conseguimos especificar a longitude como um parâmetro de entrada do GMAT. Foi preciso definir valores para a anomalia verdadeira que na mudança de sistemas de coordenadas correspondessem aos valores desejados para a longitude inicial.

Os resultados do modelo (1) podem ser vistos nas Figuras 4.3 e 4.4, e os resultados do modelo (2) nas Figuras 4.5 e 4.6.

A grande diferença entre os modelos (1) e (2) é a evolução do semieixo maior: enquanto no modelo (1) a amplitude de oscilação fica em torno de 5 km, no modelo (2) ela chega a ser maior que 100 km. Isso se reflete na evolução da longitude: para o modelo 1 a deriva será a menor possível e o satélite ficará restrito ao entorno de sua longitude inicial. Por outro lado, no modelo (2), a deriva será tanta que o satélite percorrerá todo o arco areoestacionário.

Nos dois modelos a inclinação não cresce muito e se mantém menor que  $0.05^\circ$  ao longo dos 10 anos, menos do que o alcançado para o mesmo intervalo de tempo na propagação de longo período. Isso confirma que o potencial de Marte não tem uma influência muito grande na evolução da inclinação. Como esperado, a latitude e a ascensão reta do nodo ascendente tem o comportamento igual ao da propagação de longo período, com a única diferença sendo os valores encontrados.

A excentricidade atinge valores mais altos no modelo (2), próximos de  $2 \times 10^{-4}$ , enquanto no modelo (1) ela sequer chega a  $1.5 \times 10^{-4}$ . Apesar de pequena, essa diferença causa mudanças na evolução do argumento do periastro e da anomalia média, que oscilam mais no modelo (2). É um resultado diferente do encontrado na propagação de longo período, onde menores valores da excentricidade estão associados a uma maior oscilação destes dois elementos. Uma possível explicação para essa discrepância é a ausência da pressão de radiação neste caso, pois como vimos no capítulo 2, ela influencia de maneira direta a evolução da excentricidade.

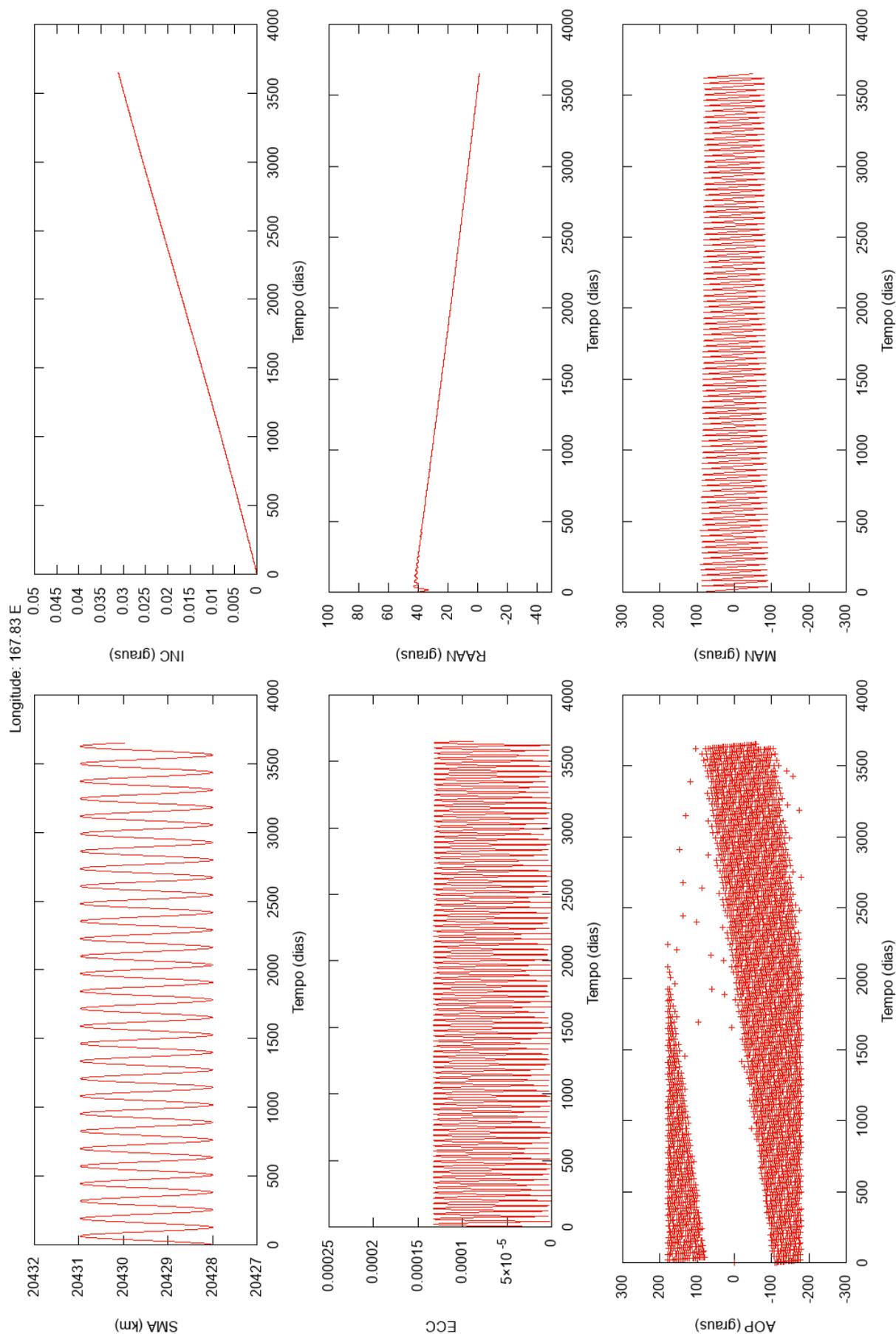


FIGURA 4.3. Evolução dos elementos keplerianos do modelo (1), de longitude inicial igual a 167.83°E. Os intervalos da anomalia média e argumento do periastro foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar sua evolução.

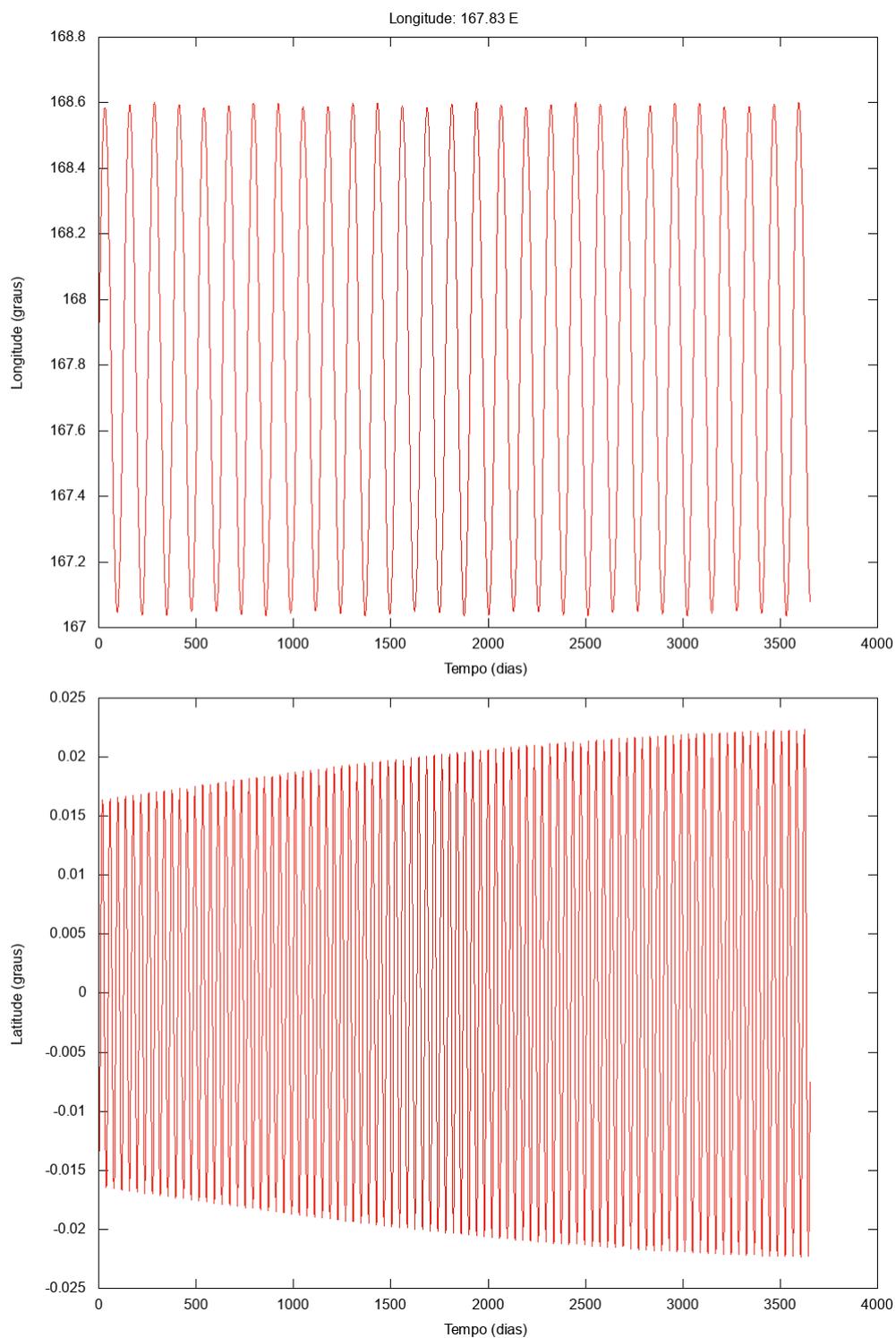


FIGURA 4.4. Evolução da latitude e longitude do modelo 1, de longitude inicial igual a 163.83°E.

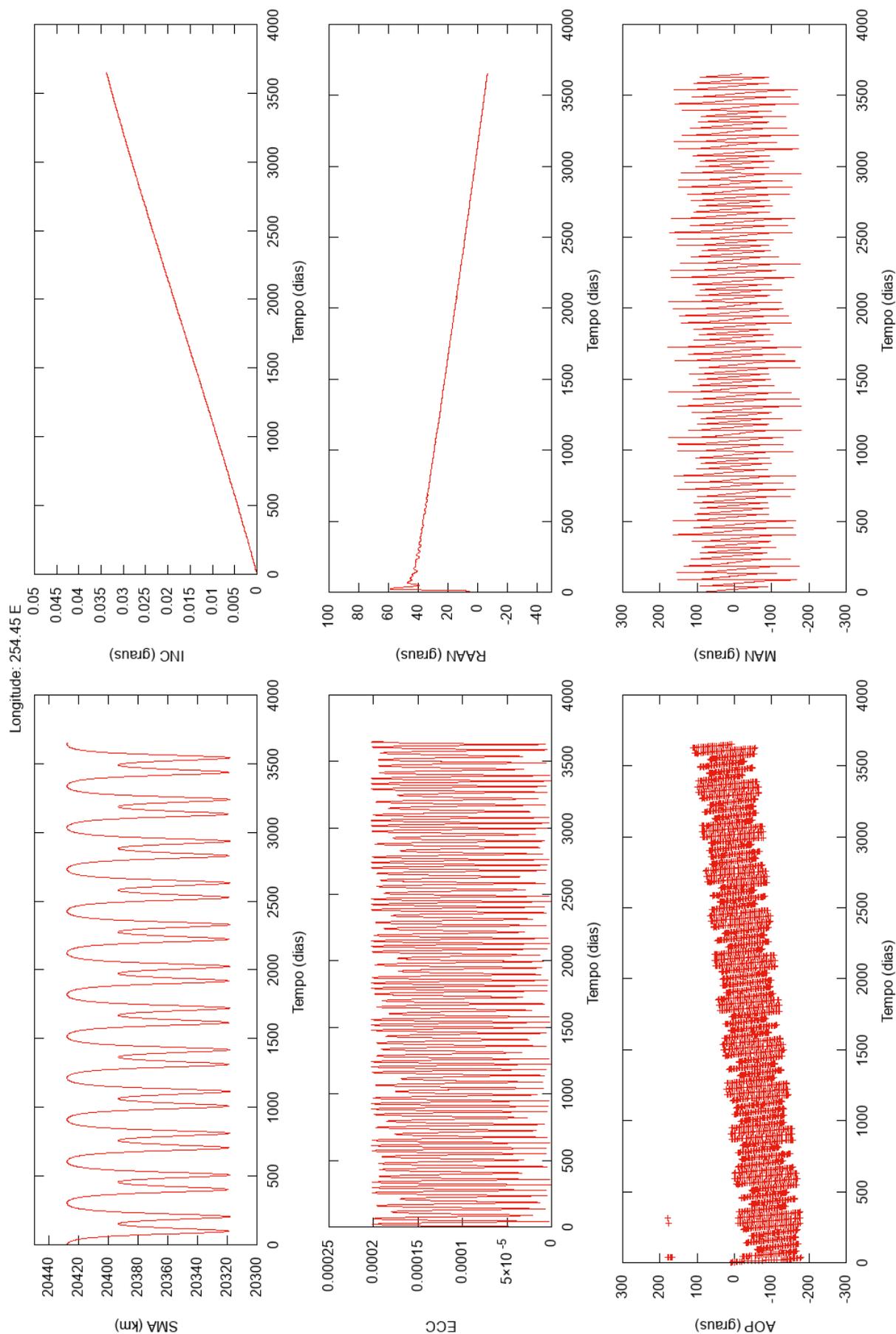


FIGURA 4.5. Evolução dos elementos keplerianos do modelo (2), de longitude inicial igual a 254.45°E. O intervalo da anomalia média foi modificado de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar sua evolução.

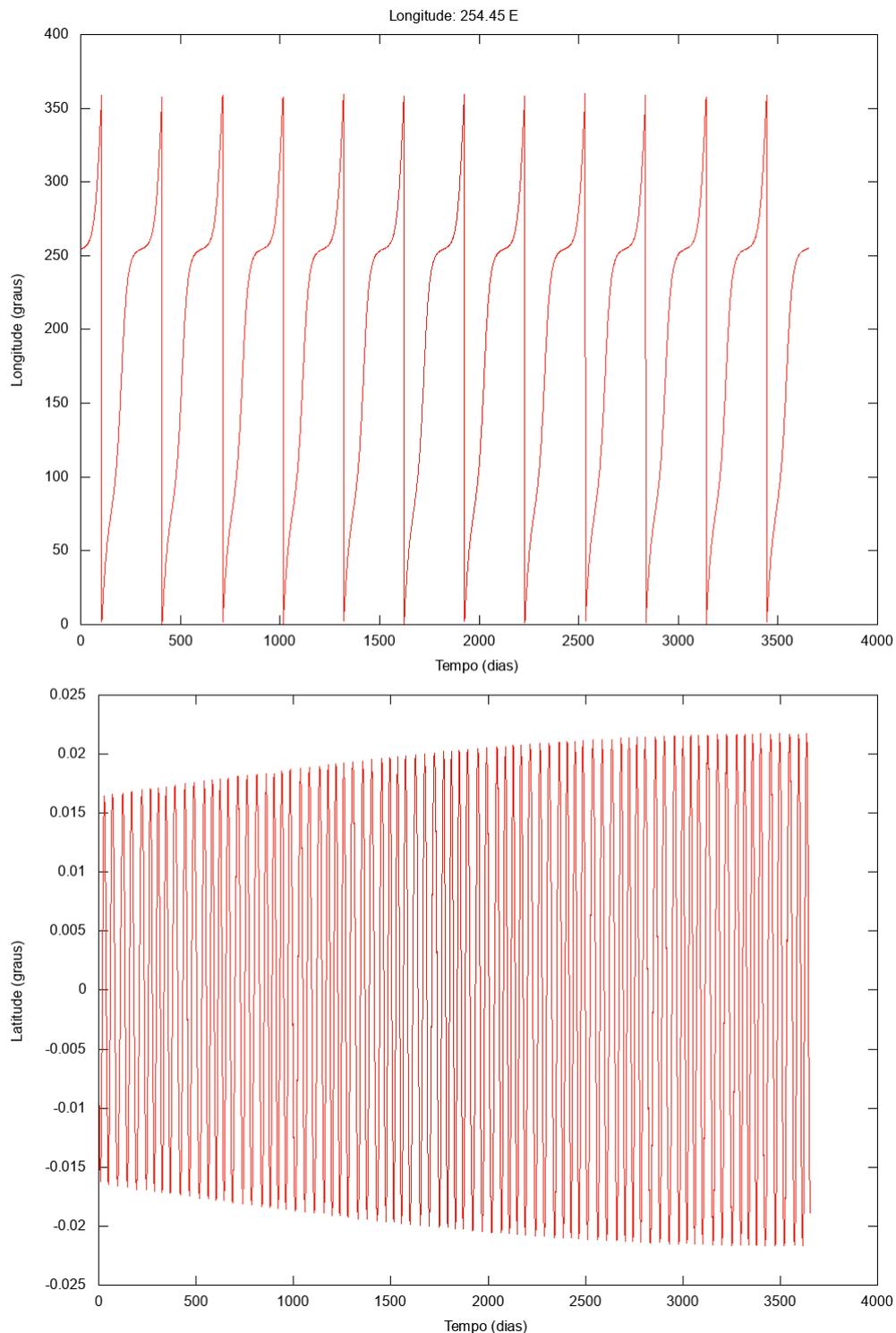


FIGURA 4.6. Evolução da latitude e longitude do modelo 2, de longitude inicial igual a  $254.45^{\circ}\text{E}$ .

Esses resultados nos mostram que o elemento orbital mais afetado pelo potencial de Marte é o semieixo maior. Apesar dos outros elementos variarem com a mudança de longitude inicial, nenhuma dessas variações é comparável com a variação do semieixo maior. Consequentemente, a deriva do satélite dependerá de sua longitude inicial.

### 4.3 Impacto da pressão de radiação solar

Para estudar a perturbação causada pela pressão de radiação solar em um satélite areoestacionário, foram gerados dois modelos (1) e (2) partindo da mesma órbita inicial (Tabela 4.2) que o modelo (1) da seção anterior e propagados por 10 anos.

A época inicial foi escolhida de maneira arbitrária; os valores do semieixo maior, excentricidade e inclinação foram definidos para termos uma órbita areoestacionária. A ascensão reta do nodo ascendente e o argumento do periastro foram escolhidos de maneira arbitrária. A anomalia foi definida de forma que a longitude inicial fosse o ponto de equilíbrio estável em  $167.83^\circ\text{E}$ .

O modelo (1) é o mesmo usado na seção anterior, incluindo somente o potencial de Marte, corpo central do sistema. No modelo (2) foi incluída também a pressão de radiação solar. Não foram colocados outros corpos do Sistema Solar para que os efeitos da pressão de radiação solar ficassem em evidência. Os resultados do modelo (2) podem ser vistos nas Figuras 4.7 e 4.8.

Comparando os resultados dos modelos (1) (Figuras 4.3 e 4.4) e (2) vemos que não há mudanças significativas entre eles para o semieixo maior, inclinação, ascensão reta do nodo ascendente, latitude e longitude. O impacto da pressão de radiação nesses elementos é pequeno e pode ser desprezado para propagações com esse intervalo de tempo.

Em compensação, a excentricidade, o argumento do periastro e a anomalia média têm comportamentos substancialmente diferentes. O caráter oscilatório da evolução da excentricidade se torna muito mais pronunciado quando levamos em conta a pressão de radiação, e isso afeta também o argumento do periastro e a anomalia média. Isso já era esperado, pois como vimos no capítulo 2, um dos principais efeitos da pressão de radiação é modificar a excentricidade.

Comparando os resultados obtidos na análise de longo período com os resultados do modelo (2) podemos ver que a variação da inclinação é muito menor nesses dois casos, não chegando sequer a atingir  $0.05^\circ$  em 10 anos. Isto pode indicar que a pressão de radiação não influencia de forma significativa a evolução da inclinação do satélite.

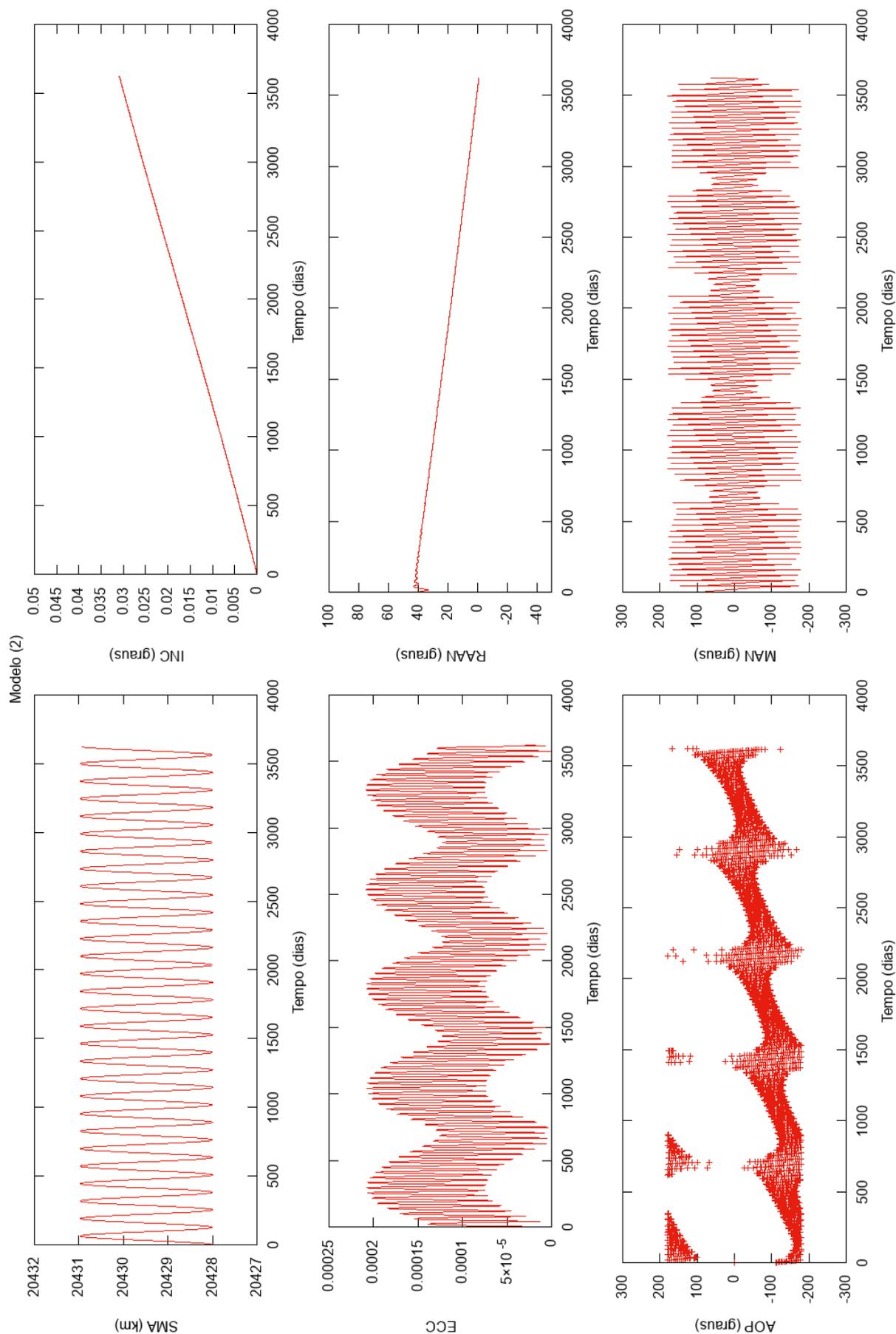


FIGURA 4.7. Evolução dos elementos orbitais do modelo (2), o qual inclui também a pressão de radiação solar. Os intervalos da ascensão reta do nodo ascendente, do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

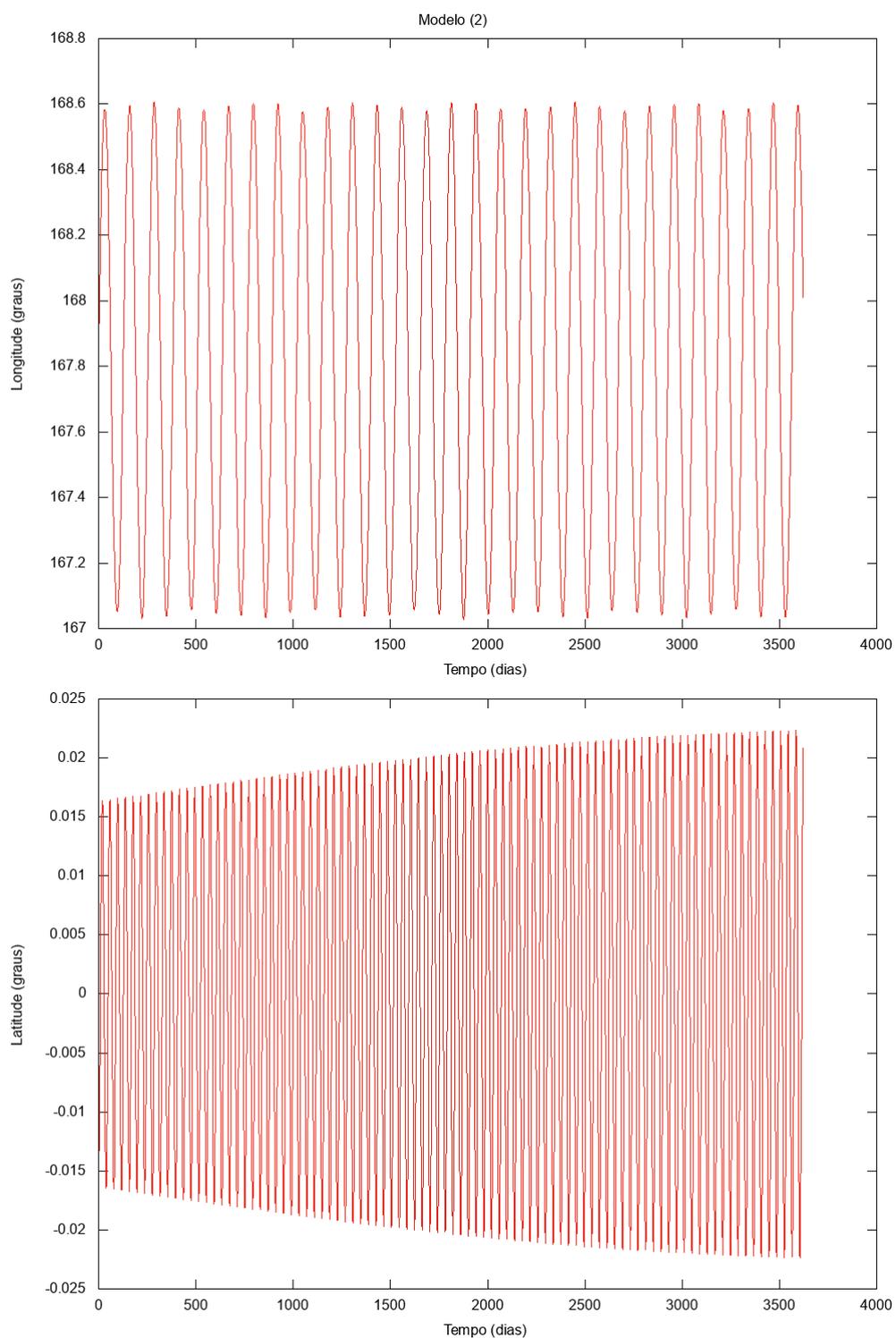


FIGURA 4.8. Evolução da latitude e longitude do modelo (2), o qual inclui também a pressão de radiação solar.

## 4.4 Impacto de outros corpos do Sistema Solar

O próximo passo foi entender como os outros objetos do Sistema Solar afetam de maneira individual um satélite em uma órbita areoestacionária. Uma série de modelos foi gerada para isso, todos eles com um satélite partindo da mesma órbita inicial escolhida anteriormente (Tabela 4.2), e também propagados por 10 anos:

Como vimos na seção anterior, a pressão de radiação é essencial na evolução da excentricidade. Por isso decidimos mantê-la em todos os modelos gerados nesta etapa do trabalho. Consideramos o modelo (2) gerado na seção anterior como nosso modelo padrão.

Nos modelos seguintes acrescentamos outros corpos celestes para posterior comparação com o modelo padrão. Dessa forma conseguimos avaliar de que forma cada objeto afeta individualmente a órbita de um satélite areoestacionário. Três modelos foram gerados para comparação com o modelo padrão:

- Modelo (1): Phobos e Deimos
- Modelo (2): Sol
- Modelo (3): Sol, Phobos, Deimos, Ceres, Lua, demais planetas do Sistema Solar

Os resultados das evoluções orbitais resultantes dos modelos (1), (2) e (3) e suas comparações com o modelo padrão podem ser vistos nas Figuras 4.9 e 4.10, 4.11 e 4.12, 4.14 e 4.15, respectivamente.

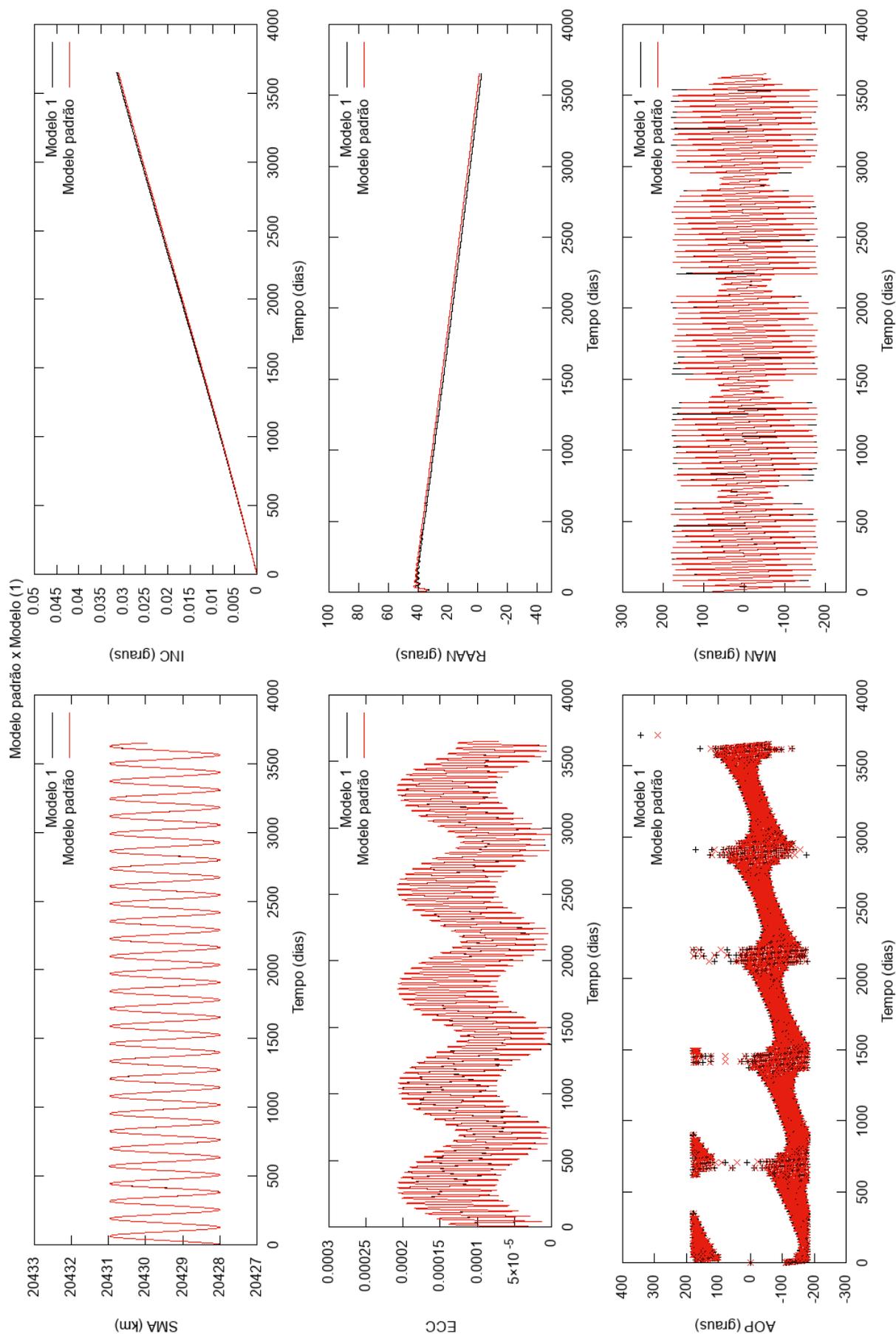


FIGURA 4.9. Comparação entre os elementos keplerianos do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e o modelo 1, que inclui também a perturbação gravitacional causada por Phobos e Deimos. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

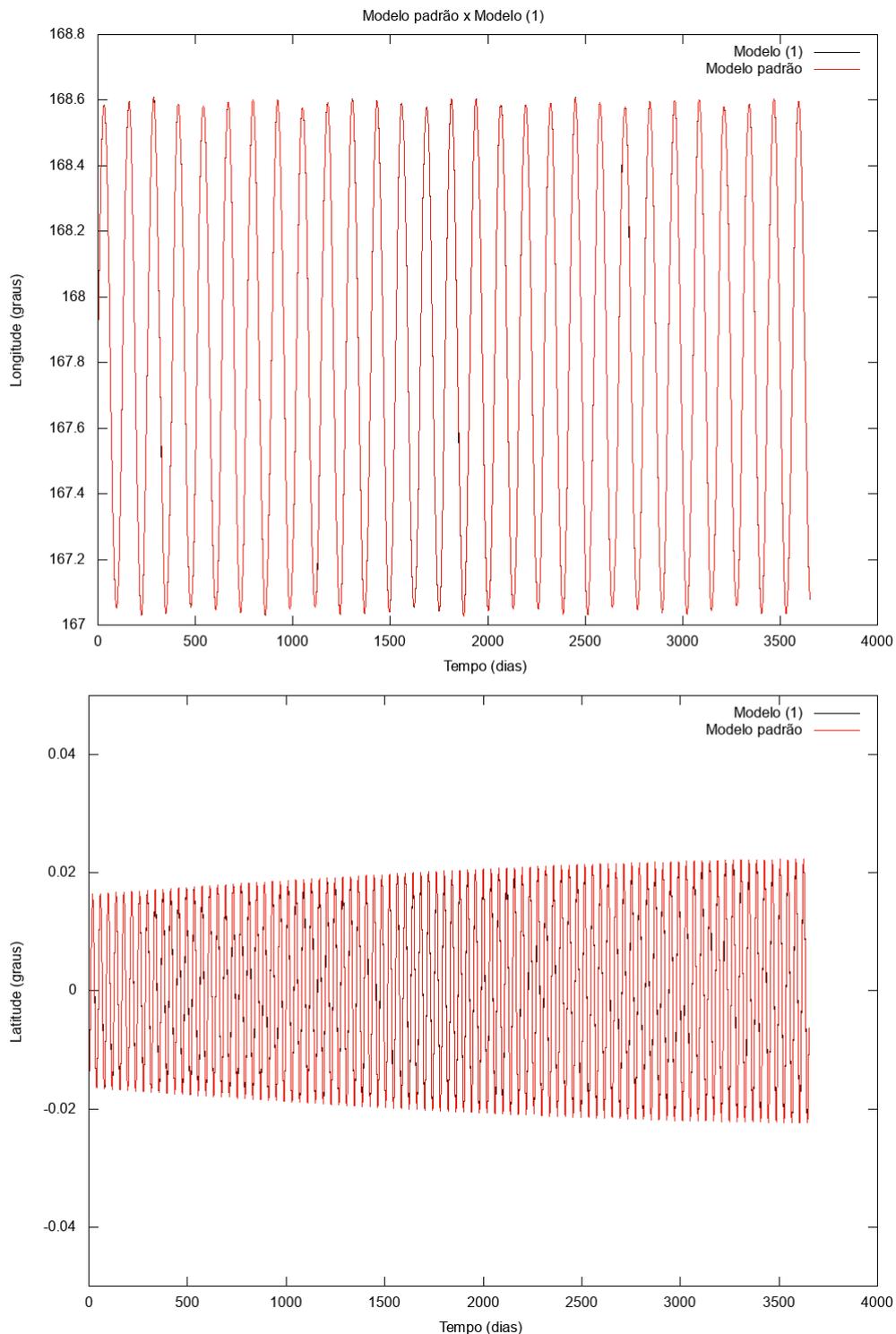


FIGURA 4.10. Comparação entre a latitude e a longitude do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 1, que inclui também a perturbação gravitacional causada por Phobos e Deimos.

De acordo com a Figura 4.9 podemos ver que Phobos e Deimos só causam um leve impacto na inclinação, fazendo com que esta aumente ligeiramente mais rápido, o que também afeta a evolução da ascensão reta do nodo ascendente. Para todos os

demais elementos orbitais a presença de Phobos e Deimos pode ser desprezada. Esse resultado não causa surpresa uma vez que Phobos e Deimos são objetos pequenos e pouco massivos.

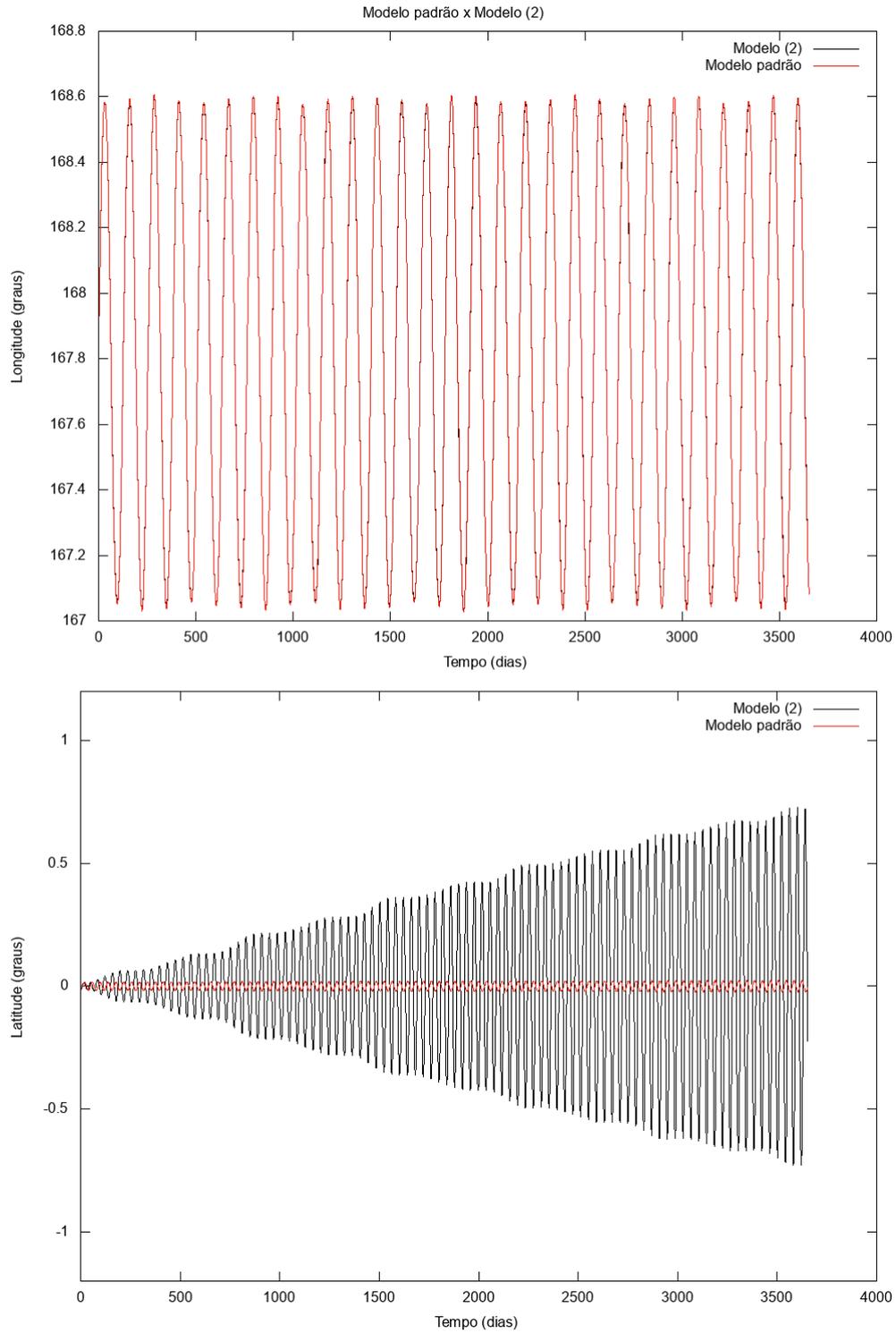


FIGURA 4.12. Comparação entre a latitude e a longitude do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 2, que inclui também a perturbação gravitacional causada pelo Sol.

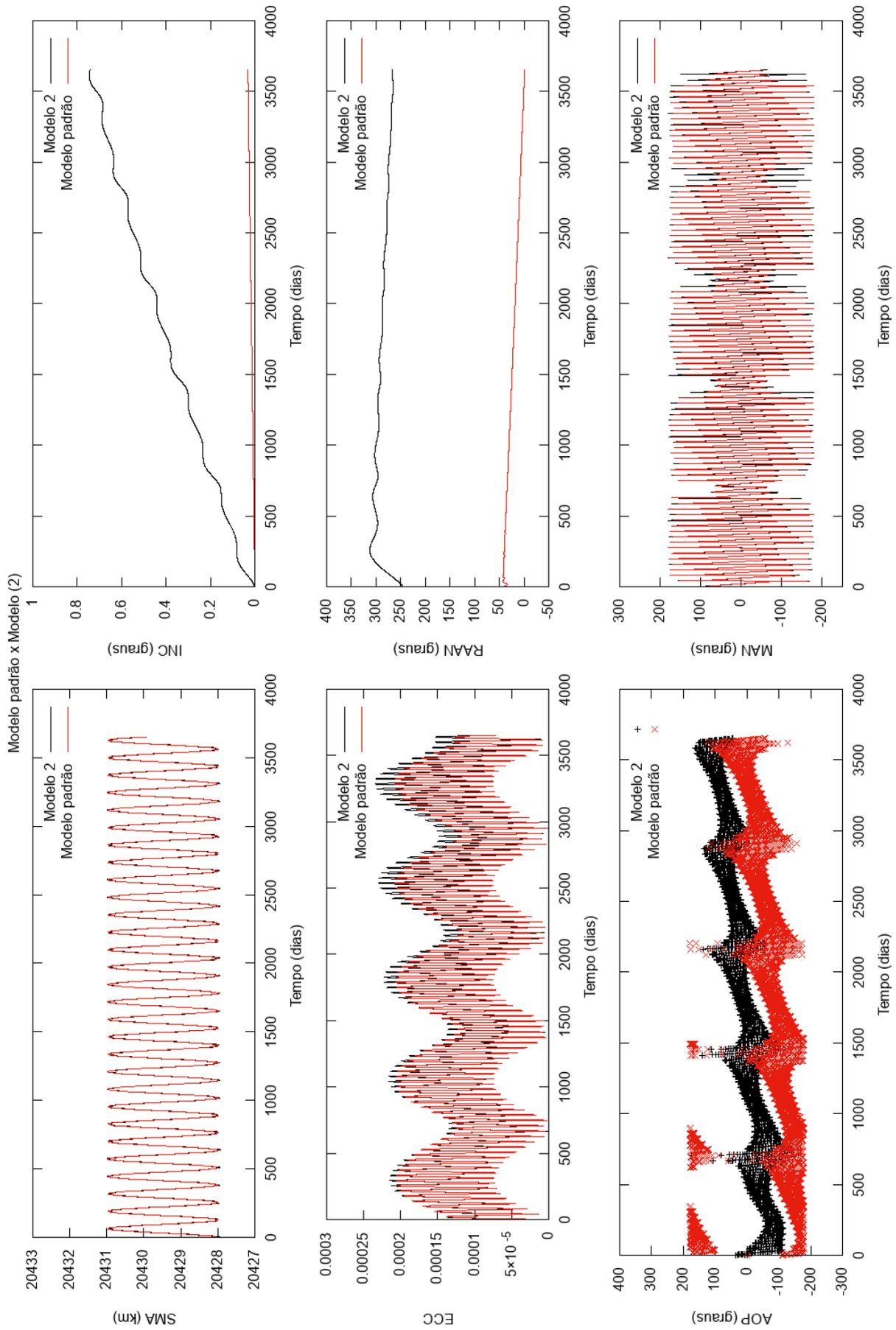


FIGURA 4.11. Comparação entre os elementos keplerianos do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 2, que inclui também a perturbação gravitacional causada pelo Sol. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

Na Figura 4.11 percebemos como o Sol afeta de maneira significativa a evolução da inclinação. Ela evolui de maneira regular, alternando entre períodos de baixa e alta variação. Estes períodos correspondem, respectivamente, aos equinócios e aos solstícios, como evidenciado na Figura 4.13. Nela temos novamente a evolução da inclinação junto com as datas dos equinócios e solstícios do hemisfério norte de Marte, de acordo com Cantor et al. (2010). Nos equinócios, representados pelos quadrados amarelos e marrons, a perturbação na inclinação será mínima, pois o satélite em sua órbita equatorial estará no mesmo plano que o Sol. Logo, a componente da força gravitacional normal ao plano da órbita será a menor possível. Nos equinócios, representados pelos círculos vermelhos e azuis, o Sol estará em sua elevação máxima e essa componente normal será maior.

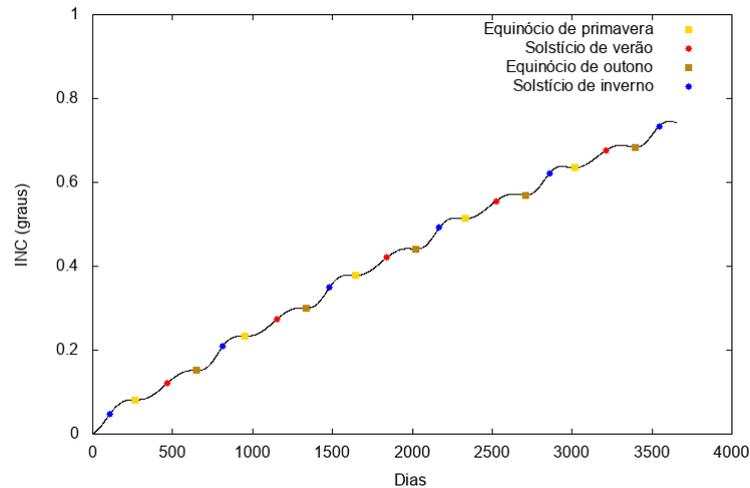


FIGURA 4.13. Datas dos solstícios e equinócios de Marte ao longo da evolução da inclinação

A excentricidade e a anomalia média diferem do modelo padrão, principalmente no final do período de análise; a tendência é de que as diferenças aumentariam caso o período de propagação fosse maior. O argumento do periastro apresenta a mesma tendência de evolução, apenas deslocado para valores maiores.

Como pode ser visto na Figura 4.14, os resultados do modelo (3) são virtualmente idênticos aos do modelo (2). Podemos inferir que por estarem muito distantes, os outros planetas do Sistema Solar não afetam a órbita de satélites areoestacionários e não precisam ser incluídos nos modelos.

Analisando os resultados obtidos, concluímos que a órbita de um satélite areoestacionário é afetada principalmente por Marte, pelo Sol e pela pressão de radiação solar. Marte é a principal fonte de perturbação da deriva, o Sol a principal fonte de perturbação

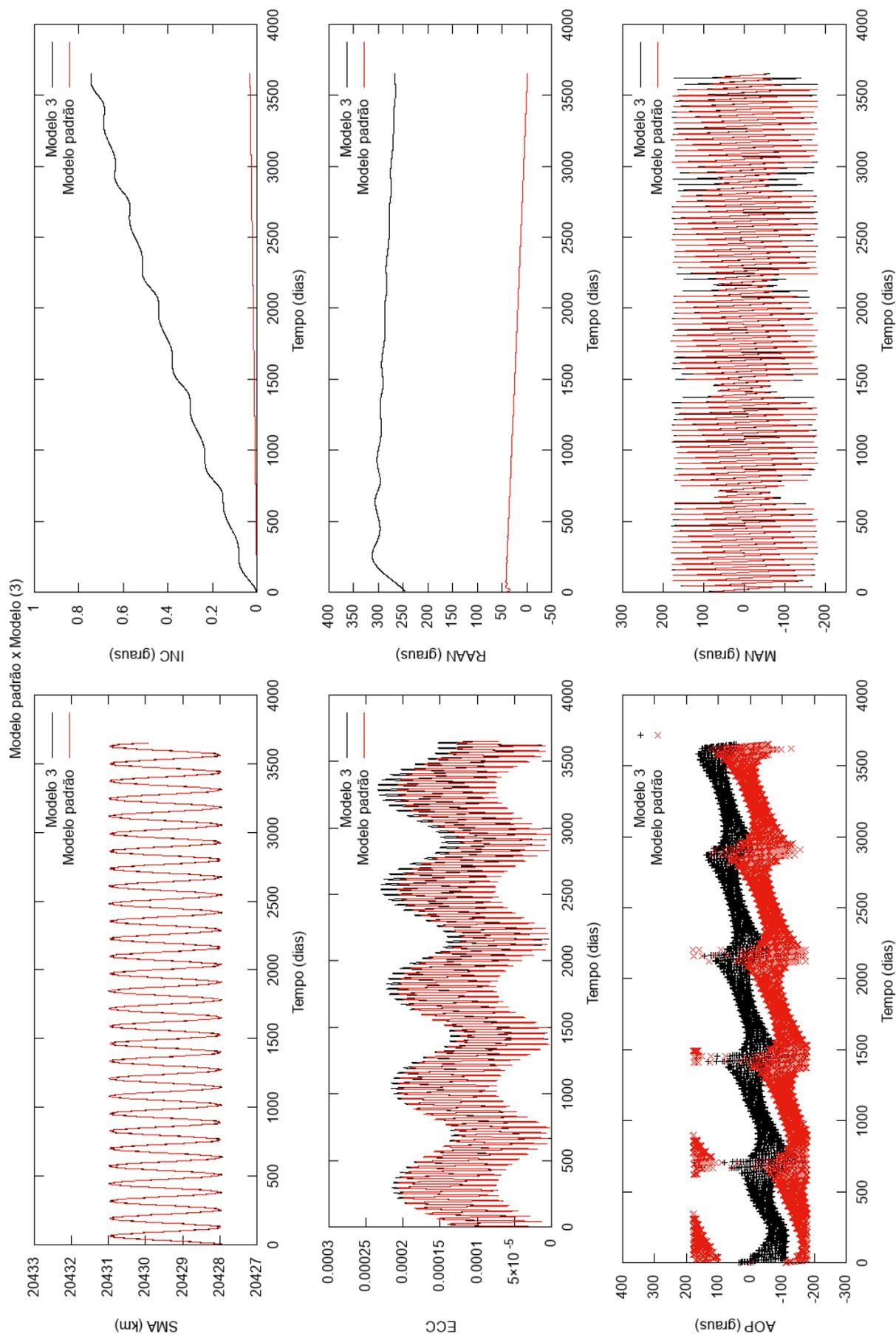


FIGURA 4.14. Comparação entre os elementos keplerianos do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 3, que inclui também a perturbação gravitacional causada pelo Sol, Phobos, Deimos, Ceres, Lua, demais planetas do Sistema Solar. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

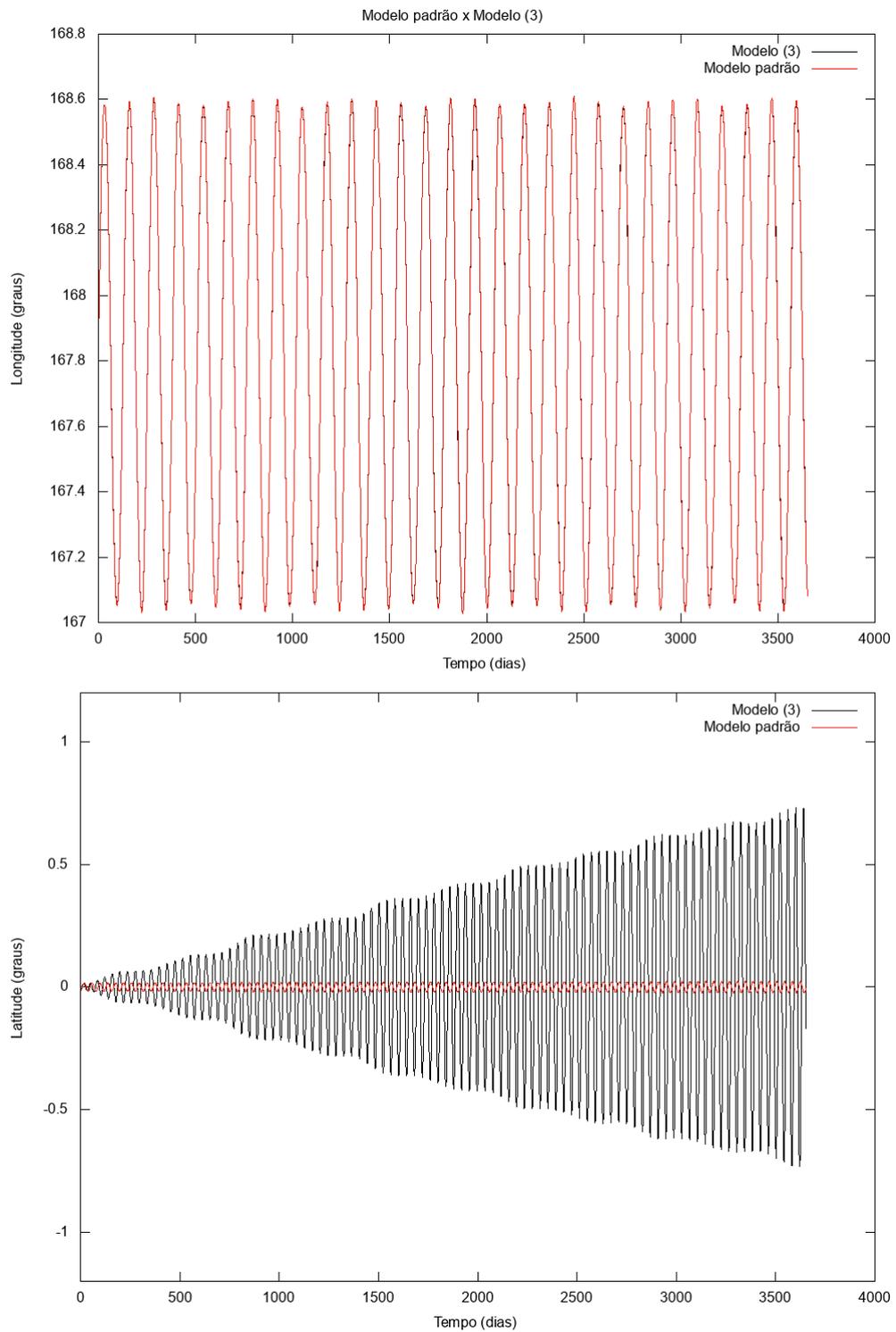


FIGURA 4.15. Comparação entre a latitude e a longitude do modelo padrão, que inclui somente a perturbação causada por Marte, e do modelo 3, que inclui também a perturbação gravitacional causada pelo Sol.

da inclinação e a pressão de radiação é a principal fonte de perturbação da excentricidade. Phobos e Deimos, como já dito anteriormente, apesar de estarem próximos são pouco massivos e só causam uma leve perturbação na inclinação, enquanto os demais objetos do Sistema Solar podem ser desprezados pois estão muito distantes para que seu impacto seja relevante.

## 4.5 Planejamento de manobras

Uma vez feita a análise inicial e identificando as principais fontes de perturbação na órbita de um satélite areoestacionário, continuamos para a etapa seguinte do trabalho: estabelecer uma estratégia de controle. Elaboramos e montamos um plano de manobras para satélites com a seguinte órbita inicial:

<b>Época</b>	29 Jun 2018 12:00:00.000
<b>SMA (km)</b>	20428
<b>ECC</b>	0.00025
<b>INC (graus)</b>	0.001
<b>RAAN (graus)</b>	0.0
<b>AOP (graus)</b>	0.0
<b>TA (graus)</b>	Variada

TABELA 4.3. Órbita inicial usada no planejamento de manobras.

A época inicial, a ascensão reta do nodo ascendente e o argumento do periastró foram escolhidos de maneira arbitrária; o semieixo maior foi escolhido de forma que a órbita estivesse no arco estacionário; a excentricidade e a inclinação tem valores próximos, mas diferentes de 0. Precisamos fazer isso por uma questão operacional: o GMAT não consegue calcular as primeiras manobras corretamente quando os valores iniciais da excentricidade e inclinação são iguais a 0.

Variamos o valor inicial da anomalia verdadeira para elaborar planos de manobra para satélites localizados em diferentes longitudes iniciais, escolhidas da seguinte forma: tomamos 3 longitudes, igualmente espaçadas, entre os pares formados pelos pontos de equilíbrio estável e instável. Incluímos também os dois pontos de equilíbrio estável. Os

pontos de equilíbrio instável não foram incluídos por serem de pouca utilidade em um caso real. As longitudes selecionadas foram:

- 5.39°
- 28.71°
- 52.02°
- 98.46°
- 121.58°
- 144.70°
- 167.83°
- 189.48°
- 211.14°
- 232.79°
- 276.36°
- 298.27°
- 320.17°
- 342.08°

A primeira etapa para se definir a estratégia de controle de um satélite é determinar o tamanho de seu box de controle, ou seja, definir os limites nos quais o satélite pode oscilar. Quanto maior for o box maior será o intervalo entre as manobras, algo benéfico do ponto de vista operacional pois reduz o número de atividades realizadas pelo satélite. No entanto, permitir que o satélite oscile muito pode prejudicar o apontamento das antenas.

Vimos em nossas análises que o impacto na deriva varia de acordo com a longitude do satélite. Isso significa que o período no qual o satélite ficará dentro do box também varia com sua posição, ficando mais tempo dentro do box em longitudes próximas do

ponto de equilíbrio estável. Dependendo do tamanho do box, será preciso fazer manobras com muita frequência, o que não é desejável operacionalmente.

Optamos por manter um box de controle de  $\pm 1^\circ$  para a longitude e  $\pm 0.05^\circ$  para a latitude, variando o número de dias entre as manobras de acordo com a necessidade. O box da deriva parece grande, principalmente se comparamos com os boxes de controle de satélites estacionários na órbita da Terra, mas o potencial de Marte tem um efeito muito maior do que o potencial da Terra. Definir uma estratégia de controle para um box menor é um dos objetivos de uma continuação deste projeto. Além disso, procuramos sempre deixar uma margem nos boxes de controle. Essa é uma prática comum da indústria para que, em caso de emergência, haja tempo de realizar alguma operação com o satélite enquanto este ainda se encontra dentro do box.

Nossa estratégia para controle da deriva foi realizar as manobras em um intervalo fixo de dias, definido por nós. Calculamos o  $\Delta V$  das manobras com o GMAT através do recurso *DifferentialCorrector*, uma solução numérica usada para resolver problemas de valores de contorno. Definimos longitudes alvo para cada caso, e o  $\Delta V$  era calculado de forma que o satélite atingisse a longitude alvo depois de um determinado número de dias, quando seria realizada uma nova manobra. O GMAT possui uma série de algoritmos implementados no *DifferentialCorrector* e optamos por usar o seu padrão, o algoritmo de Newton-Raphson.

Para o controle da inclinação, optamos por realizar manobras com  $\Delta V = \pm 0.3$  m/s<sup>3</sup>, valor escolhido com base na literatura (Romero et al., 2015). As manobras são realizadas na primeira passagem por um dos nodos após a inclinação ficar maior que  $0.025^\circ$ . Durante o período dos equinócios, quando a perturbação na inclinação é mínima, o satélite ficará mais de 100 dias sem precisar realizar manobras de inclinação.

Para impedir que o GMAT planejasse manobras de inclinação e deriva para o mesmo dia<sup>4</sup>, estabelecemos que as manobras de inclinação só poderiam ser realizadas 3 dias antes das manobras de deriva. Devido a esse vínculo, muitas vezes as manobras são planejadas para alguns dias depois da inclinação ficar maior que  $0.025^\circ$ , porém ainda longe de alcançar o limite do box.

---

<sup>3</sup>O  $\Delta V$  é positivo para manobras N e negativo para manobras S.

<sup>4</sup>Não há um empecilho em termos de dinâmica orbital, mas não é uma prática recomendada operacionalmente.

A maior dificuldade do trabalho foi ajustar os horários das manobras de deriva. Como vimos no Capítulo 2, o horário no qual manobras de deriva são realizadas afeta diretamente a excentricidade, podendo causar um efeito indesejado na evolução deste parâmetro. Tentamos configurar o *DifferentialCorrector* para que ele também calculasse o horário de execução da manobra que reduziria a excentricidade o máximo possível, mas não obtivemos sucesso. A solução encontrada foi estabelecer um horário fixo, no qual todas as manobras seriam executadas.

Configuramos o GMAT para que as manobras W fossem realizadas na passagem do satélite pelo periastro e as manobras E na passagem pelo apoastro. Com essa estratégia buscamos reduzir a excentricidade a cada manobra. Conseguimos resultados satisfatórios com essa abordagem, no entanto uma otimização do horário de execução das manobras é algo que deve ser estudado com mais detalhes em uma continuação do trabalho.

Uma estimativa do gasto de combustível necessário para a realização de cada manobra foi realizada através da equação do foguete. Utilizamos o  $\Delta\vec{V}$  calculado pelo GMAT para obter o gasto de combustível  $\Delta m$  com as manobra. O impulso específico utilizado foi de 10 s, um valor comum na indústria (Vallado & McClain, 2004).

A parte final foi o cálculo do período de visibilidade do satélite pela estações da DSN. Esse cálculo foi feito no em outro *software*, o STK, usando as efemérides geradas pelo GMAT.

#### 4.5.1 Resultados

Os resultados seguem abaixo. Na Tabela 4.4 mostramos o  $\Delta V$  médio calculado pelo GMAT, o intervalo máximo de dias entre as manobras de deriva que encontramos e o gasto de combustível  $\Delta m$  calculado através da equação do foguete. O sinal do  $\Delta V$  indica a direção da manobra: positivo significa uma manobra E, negativo significa uma manobra W.

Exibimos a evolução da longitude e latitude dos pontos de equilíbrio estável na Figura 4.16. Nos pontos de equilíbrio estável a perturbação causada pelo potencial de Marte é a menor possível, não sendo preciso realizar manobras de deriva para manter o satélite dentro do box. Somente manobras de inclinação serão executadas.

Nas Figuras 4.17 e 4.18 temos a evolução da longitude e latitude de todos os pontos de longitude nos quais é preciso realizar manobras W para manter o satélite no box. Podemos ver que os satélites se mantêm dentro do box de controle durante todo o período, para todas as longitudes iniciais.

Nas Figuras 4.19 e 4.20 temos a evolução da longitude e latitude de todos os pontos de longitude nos quais é preciso realizar manobras E para manter os satélites no box. Podemos ver que os satélite se mantêm dentro do box de controle durante todo o período, para todas as longitudes iniciais.

Nas Tabelas 4.5 até 4.18 temos os períodos máximo, mínimo e médio de visibilidade por parte das estações da DSN e da ESTRACK.

Por fim, no apêndices A se encontram, respectivamente, figuras com os demais elementos orbitais para cada longitude.

<b>Longitude (E)</b>	<b>Intervalo entre manobras (dias)</b>	$\Delta V$ (m/s)	$\Delta m$ (kg)
5.39	14	-0.9354	0.2702
28.71	13	-1.1582	0.3345
52.02	16	-0.9549	0.2758
75.34	-	-	-
98.46	14	0.8907	0.2573
121.58	11	1.0729	0.3099
144.70	13	0.9514	0.2748
167.83	-	-	-
189.48	14	-1.0509	0.3035
211.14	11	-1.2323	0.3559
232.79	10	-1.0526	0.3040
254.45	-	-	-
276.36	12	1.0008	0.2911
298.27	12	1.1951	0.3452
320.17	12	1.1107	0.3208
342.08	-	-	-

TABELA 4.4. Intervalo entre manobras e o  $\Delta V$  médio calculado GMAT para cada longitude. Nos pontos de equilíbrio não há manobras.

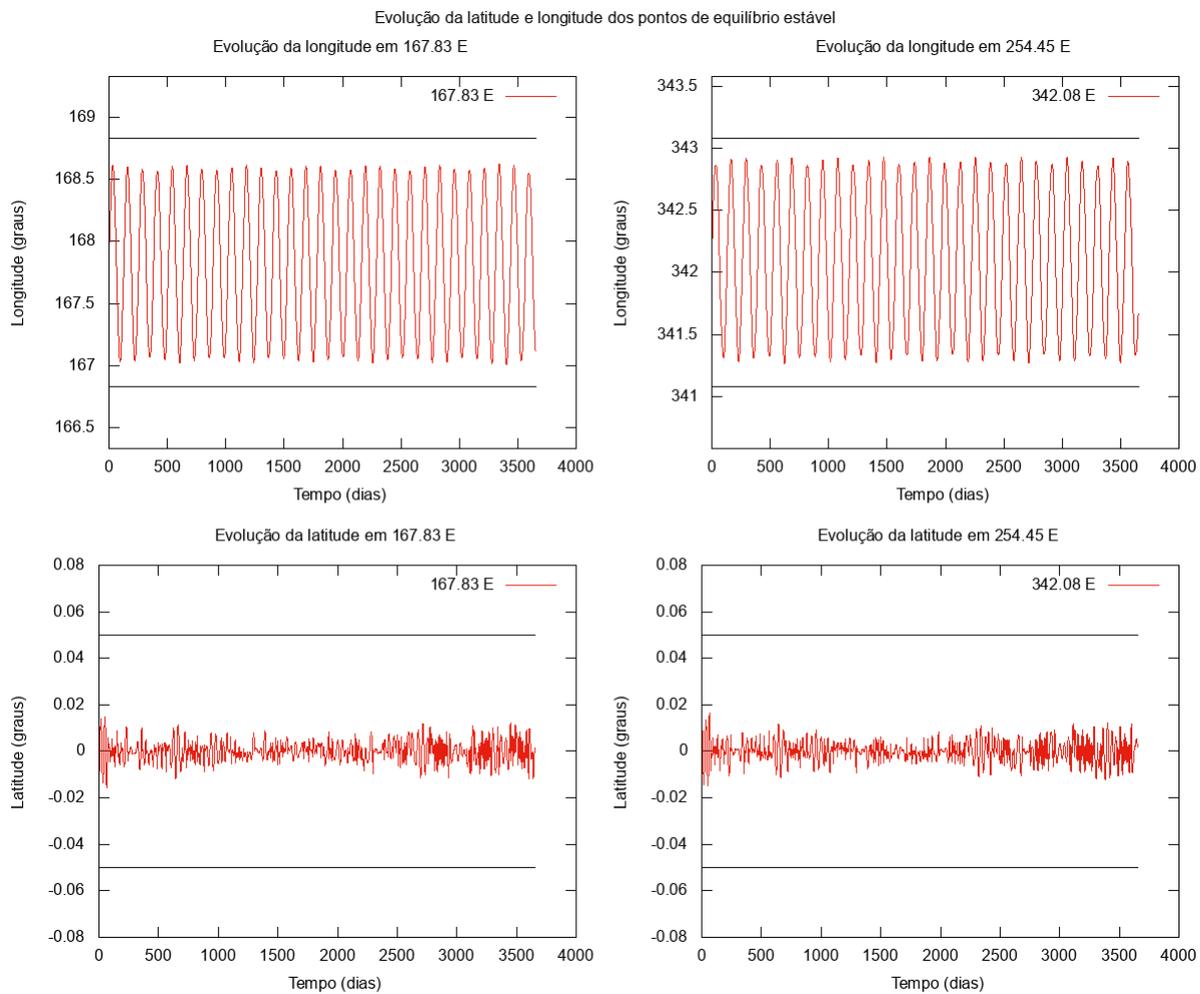


FIGURA 4.16. Evolução da latitude e longitude. As linhas pretas horizontais na evolução da longitude representam os limites do box.

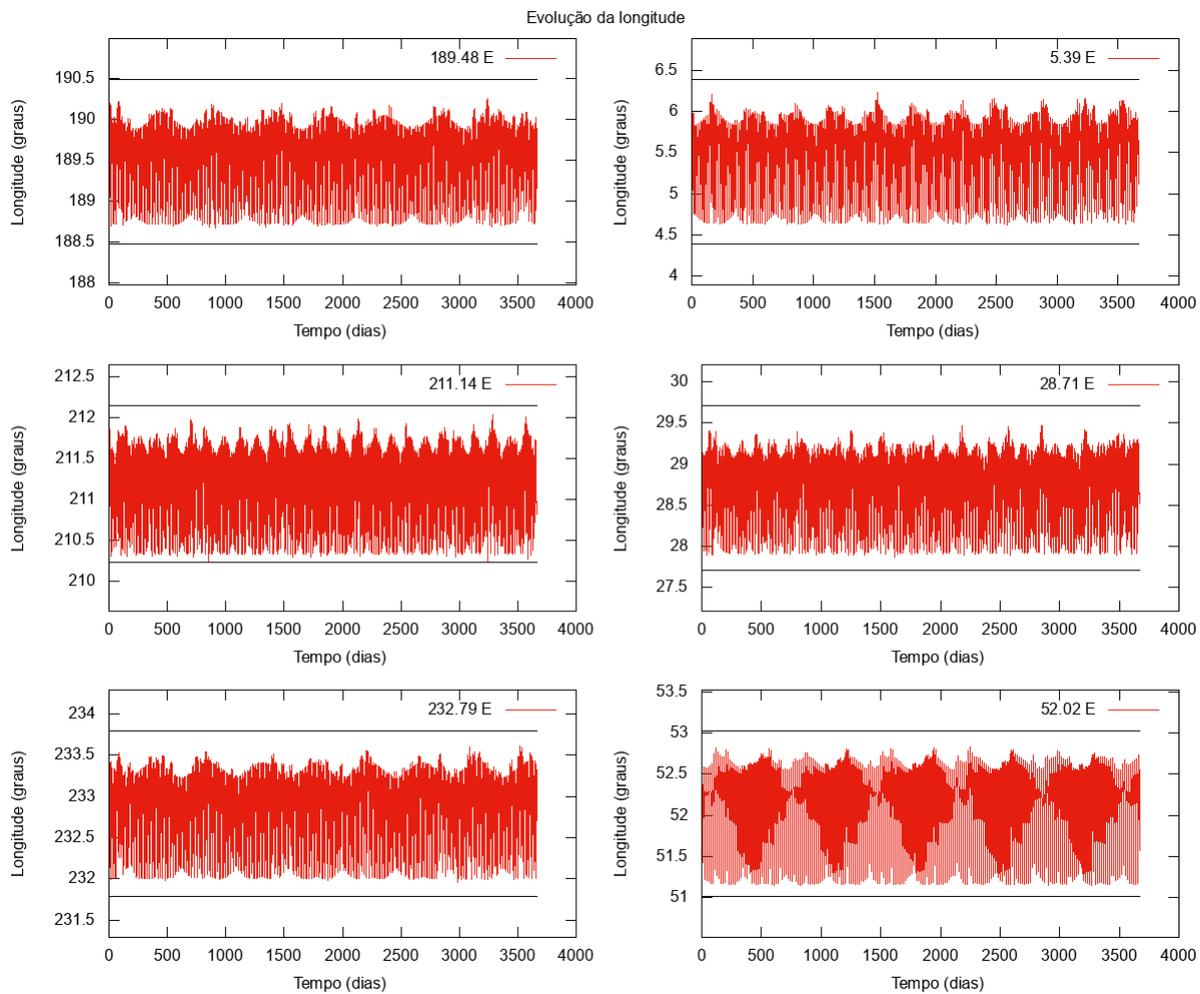


FIGURA 4.17. Evolução da longitude. As linhas pretas horizontais representam os limites do box para cada caso.

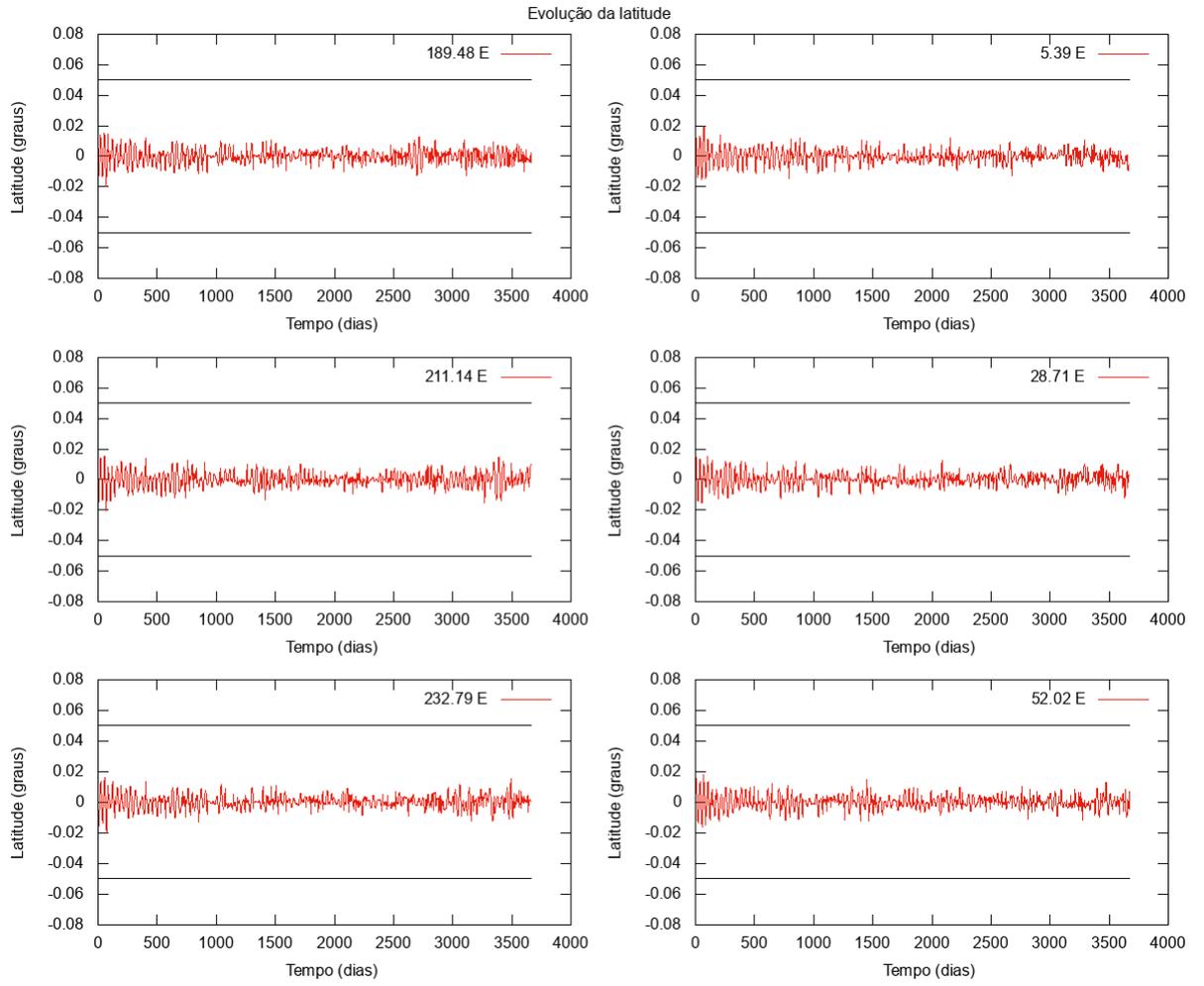


FIGURA 4.18. Evolução da latitude.

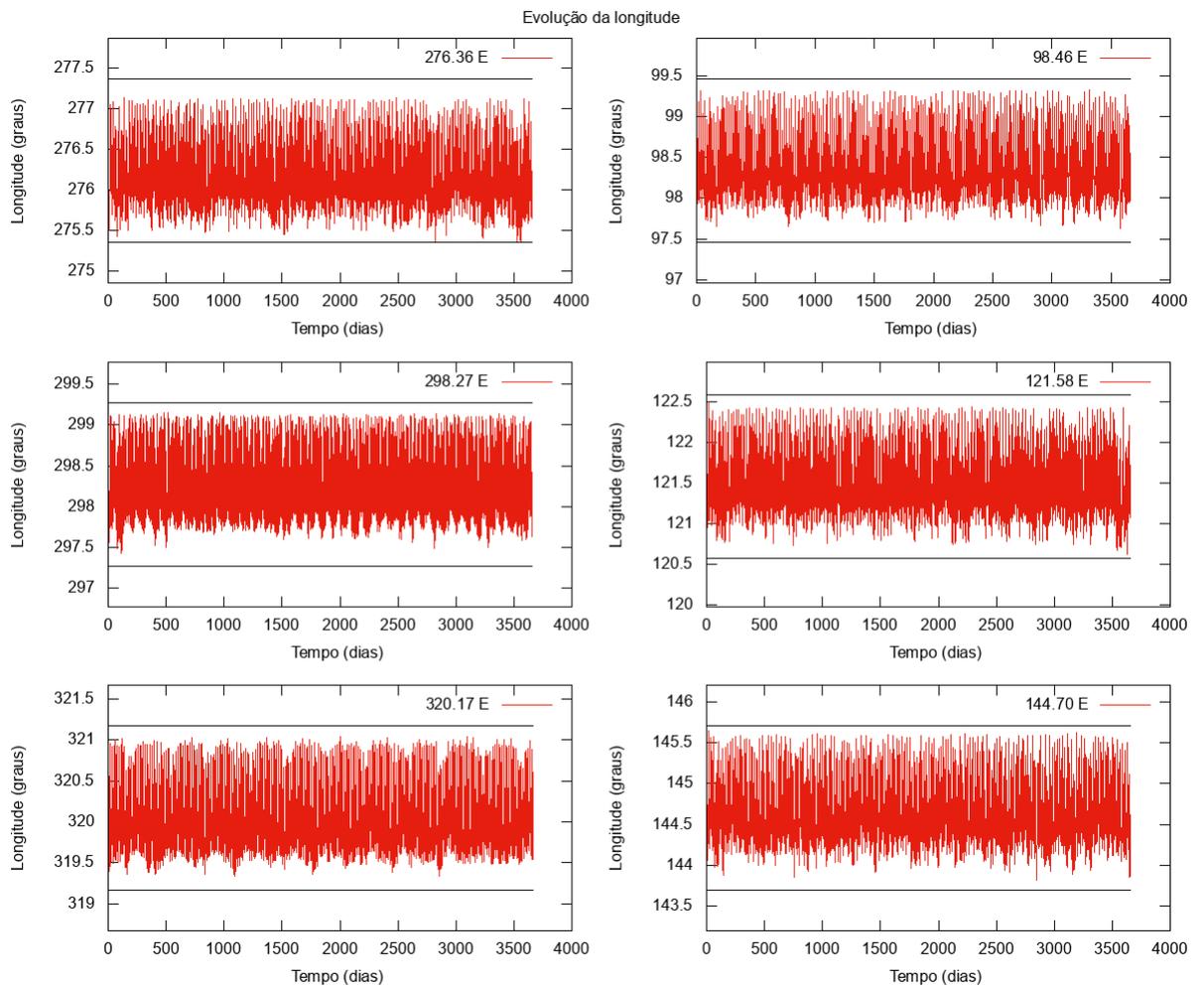


FIGURA 4.19. Evolução da longitude. As linhas pretas horizontais representam os limites do box para cada caso.

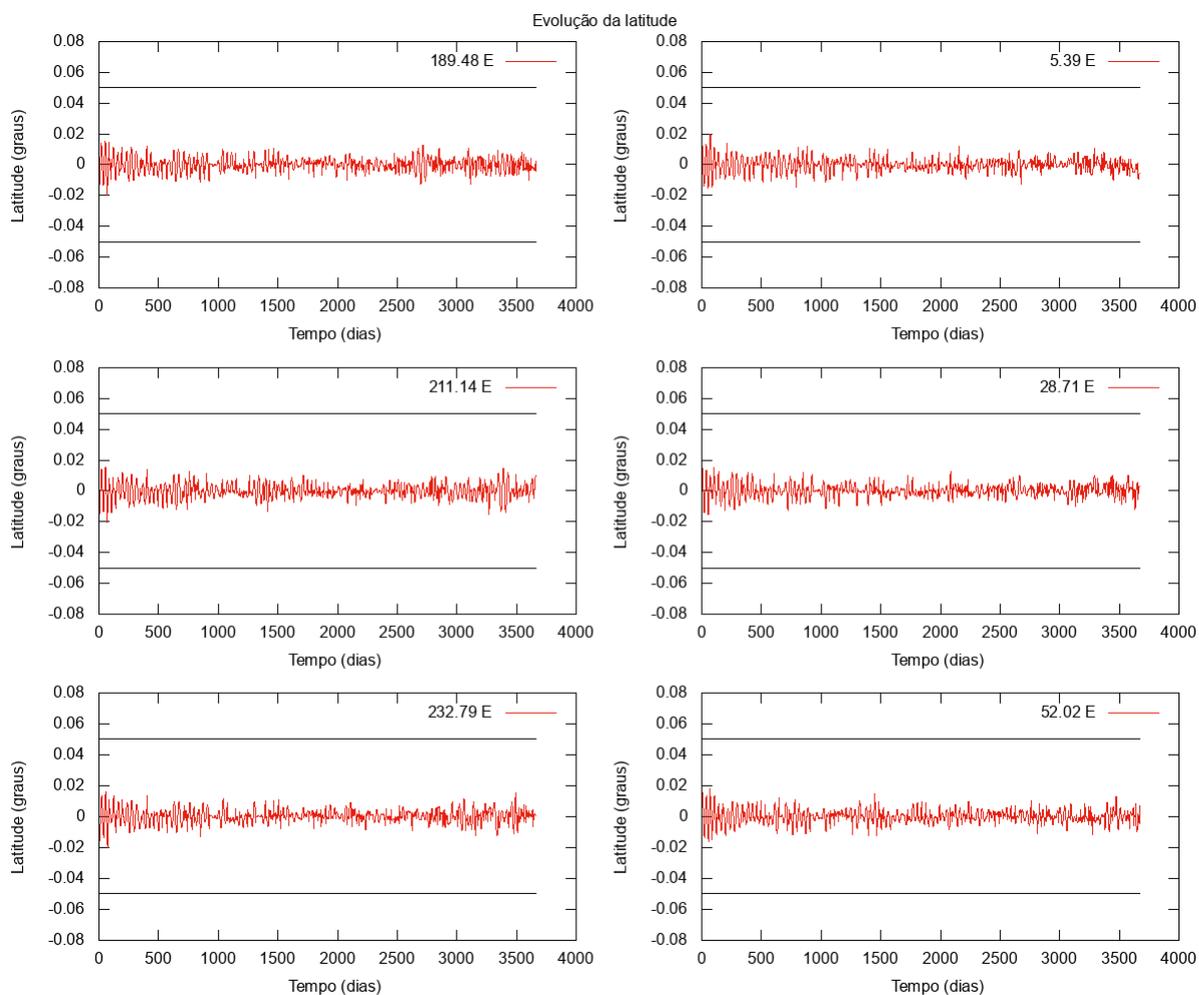


FIGURA 4.20. Evolução da latitude.

Longitude: 5.39° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	9h	9h 24m	9h 18m	9h 6m	8h 54m	9h 18m

TABELA 4.5. Período de visibilidade de um satélite em 5.39° E

Longitude: 28.71° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	9h	9h 24m	9h 18m	9h 6m	8h 54m	9h 18m

TABELA 4.6. Período de visibilidade de um satélite em 28.71° E

Longitude: 52.02° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	9h	9h 24m	9h 18m	9h 6m	8h 54m	9h 18m

TABELA 4.7. Período de visibilidade de um satélite em 52.02° E

Longitude: 98.46° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	9h	9h 30m	9h 24m	9h 6m	8h 54m	9h 24m

TABELA 4.8. Período de visibilidade de um satélite em 98.46° E

Longitude: 121.58° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 30m	9h 24m	9h 12m	8h 54m	9h 24m

TABELA 4.9. Período de visibilidade de um satélite em 121.58° E

Longitude: 144.70° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 30m	9h 24m	9h 12m	8h 54m	9h 24m

TABELA 4.10. Período de visibilidade de um satélite em 144.70° E

Longitude: 167.83° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 50m	12h 48m	13h 12m	12h 31m	12h 52m	13h 12m
<b>Menor período</b>	3m	2m	1m	1m	1m	2m
<b>Período médio</b>	8h 58m	9h 30m	9h 24m	9h 24m	8h 59m	9h 4m

TABELA 4.11. Período de visibilidade de um satélite em 167.83° E

Longitude: 189.48° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 24m	9h 24m	9h 12m	9h	9h 24m

TABELA 4.12. Período de visibilidade de um satélite em 189.48° E

Longitude: 211.14° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 24m	9h 24m	9h 12m	9h	9h 24m

TABELA 4.13. Período de visibilidade de um satélite em 211.14° E

Longitude: 232.79° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 24m	9h 24m	9h 12m	9h	9h 24m

TABELA 4.14. Período de visibilidade de um satélite em 232.79° E

Longitude: 276.36° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 24m	9h 24m	9h 6m	8h 54m	9h 24m

TABELA 4.15. Período de visibilidade de um satélite em 276.36° E

Longitude: 298.27° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 24m	9h 24m	9h 6m	8h 54m	9h 24m

TABELA 4.16. Período de visibilidade de um satélite em 298.27° E

Longitude: 320.17° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 24m	9h 24m	9h 6m	8h 54m	9h 24m

TABELA 4.17. Período de visibilidade de um satélite em 320.17° E

Longitude: 342.08° E						
Rede	DSN			ESTRACK		
Estação	Canberra	Goldstone	Madri	New Norcia	Malargüe	Cebreros
<b>Maior período</b>	12h 48m	12h 48m	13h 12m	12h 30m	12h 48m	13h 12m
<b>Menor período</b>	1m	1m	1m	1m	1m	1m
<b>Período médio</b>	8h 54m	9h 24m	9h 24m	9h 6m	8h 54m	9h 24m

TABELA 4.18. Período de visibilidade de um satélite em 342.08° E

## Capítulo 5

# Discussões e Conclusões

Neste trabalho utilizamos o *software* GMAT para estudar a dinâmica orbital de satélites de telecomunicação em órbitas areoestacionárias. Analizamos as forças perturbadoras as quais estão acometidos e propomos uma estratégia de controle que os mantém dentro do box por um período de 10 anos. Calculamos também o período de visibilidade entre as estações das redes da DSN e da ESTRACK e os satélites modelados. Os resultados obtidos serão discutidos a seguir.

### 5.1 Análise dos resultados

Os resultados apresentados no capítulo anterior mostram que é possível manter um satélite areoestacionário dentro do box com a estratégia adotada. A latitude fica bem controlada em todos os pontos de longitudes escolhidos para a análise e há margem de segurança. A longitude também evolui de maneira controlada e o box de controle não é violado em momento algum. Entretanto, não foi possível obter uma margem de segurança satisfatória para os pontos de longitude em  $211.14^{\circ}\text{E}$  e  $276.36^{\circ}\text{E}$ . Nesses dois casos, o satélite oscila até o limite do box, sem deixar qualquer margem.

Nos pontos de equilíbrio estável não há necessidade de realizar manobras de deriva, uma vez que a oscilação natural da longitude é menor do que o box escolhido de  $\pm 1^{\circ}$ . Vimos no capítulo anterior, na seção de análise de longo período, que mesmo oscilando livremente a latitude não chega a  $1^{\circ}$ . Logo, se houver flexibilidade para manter um box de latitude igual ao de longitude,  $\pm 1^{\circ}$ , é possível manter um satélite em órbita

areoestacionária nos pontos de equilíbrio estável indefinidamente sem precisar realizar manobras de controle orbital.

A Tabela 4.4 mostra que o  $\Delta V$  médio das manobras de deriva tende a aumentar a medida que nos afastamos dos pontos de equilíbrio, atinge um valor máximo na longitude intermediária entre os pontos de equilíbrio e depois volta a diminuir. O inverso acontece com o intervalo entre as manobras, que é maior em longitudes próximas aos pontos de equilíbrio. Isso significa que nas longitudes médias entre os pontos de equilíbrio será preciso realizar manobras de deriva maiores com uma frequência maior, um indicativo de que nessas longitudes a perturbação causada pelo potencial de Marte é a maior possível.

Esse resultado corrobora com os resultados obtidos por Silva & Romero (2013), já citado anteriormente. Neste trabalho os autores fazem análises analíticas e numéricas do potencial gravitacional de Marte, concluindo que a variação da longitude é maior nas longitudes equidistantes dos pontos de equilíbrio (Figura 5.1).

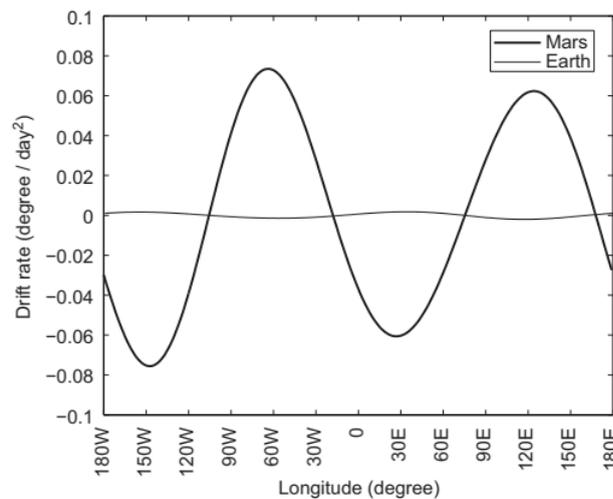


FIGURA 5.1. Taxa de variação da longitude em função da longitude para Marte e Terra.(Silva & Romero, 2013).

As Tabelas 4.5 até 4.17 mostram os períodos de visibilidade dos satélites localizados nas longitudes selecionadas pelas estações da DSN e da ESTRACK. Comparando as tabelas, é possível ver que os períodos de visibilidade praticamente não variam com a longitude. Esse resultado não é inesperado, uma vez que o box de controle é o mesmo em todos os casos. Apenas o que vai mudar é a estação que visualizará o satélite primeiro.

## 5.2 Perspectivas futuras

Nossos resultados são satisfatórios para os objetivos inicialmente propostos neste trabalho, que se trata de uma modelagem dinâmica da evolução orbital de satélites areoestacionários. Para tanto, foi preciso realizar simplificações na modelagem desenvolvida. Para que os resultados possam ser de fato aplicáveis em uma missão futura, é preciso refinar nossa estratégia para que ela se torne ainda mais eficiente. É necessário também aumentar o grau de complexidade dos modelos, incluindo informações sobre as especificações do satélite.

O primeiro passo é refinar a estratégia de controle, desenvolvendo algum mecanismo que calcule os horários das manobras de deriva de forma que elas tenham um efeito benéfico à excentricidade. Como dito anteriormente, determinar o horário das manobras foi nossa maior dificuldade e é o ponto que deve ser adereçado de imediato.

As etapas seguintes seriam tratar as manobras como contínuas ao invés de impulsivas, e incluir uma modelagem do sistema de propulsão dos satélites. Ambas podem ser feitas no GMAT. Assim, nos aproximaríamos mais da realidade, onde o  $\Delta V$  é aplicado em um determinado intervalo de tempo, e a massa varia ao longo da manobra devido ao consumo de combustível.

Por fim, é preciso levar em consideração a área efetiva do satélite para calcular o torque sofrido por ele devido à pressão de radiação e aos próprios disparos dos jatos de controle. Poderemos, então, elaborar uma estratégia para manter o apontamento do satélite.

# Referências Bibliográficas

AGI. 1989, Analytical Graphics Inc., <https://www.agi.com/>

Alvarellos, J. L. 2009, The Journal of the Astronautical Sciences, 57, 701

Amiri, H., Brain, D., Sharaf, O., et al. 2022, Space Science Reviews, 218, 1

Aveny, A. F. 2002, Empires of Time: Calendars, Clocks, and Cultures, Revised Edition (University Press of Colorado)

Badi, D. M., Farmer, J. T., Garn, P. A., & Martin, G. L. 1989, Conceptual design of a synchronous Mars telecommunications satellite, Tech. rep.

Bate, R. R., Mueller, D. D., & White, J. E. 1979, Fundamentals of astrodynamics (Peter Smith Publisher)

Bell III, J. F., McCord, T. B., & Owensby, P. D. 1990, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 95, 14447

Cantor, B. A., James, P. B., & Calvin, W. M. 2010, Icarus, 208, 61

Colella, E., Ortore, E., Circi, C., & Condoleo, E. 2017, Earth, Moon, and Planets, 120, 31

ESA. 2022, Estrack ground stations, [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Operations/ESA\\_Ground\\_Stations/Estrack\\_ground\\_stations](https://www.esa.int/Enabling_Support/Operations/ESA_Ground_Stations/Estrack_ground_stations)

Frost, R. 2016, Robert Frost: How does the Mars Rover communicate with Earth, despite being so far away?, [https://www.quora.com/Robert\\_Frost\\_How\\_does\\_the\\_Mars\\_Rover\\_communicate\\_with\\_Earth\\_despite\\_being\\_so\\_far\\_away](https://www.quora.com/Robert_Frost_How_does_the_Mars_Rover_communicate_with_Earth_despite_being_so_far_away)

Genova, A., Goossens, S., Lemoine, F. G., et al. 2016, Icarus, 272, 228

- Hughes, S. 2015, NASA Usage, <https://gmat.atlassian.net/wiki/spaces/GW/overview>
- JAXA. 2022, Usuda Deep Space Center, <https://www.isas.jaxa.jp/en/about/facilities/usuda.html>
- Kim, B., Yu, H., & Noh, S. 2020, *Sensors*, 20, 355
- Klesh, A., Clement, B., Colley, C., et al. 2018
- Konopliv, A. S., & Sjogren, W. L. 1995, The JOL Mars Gravity Field, Mars50c, Based Upon Viking and Mariner9 Doppler Tracking Data, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Leppinen, H. 2016, *Acta Astronautica*, 121, 23
- Li, C., Zhang, R., Yu, D., et al. 2021, *Space Science Reviews*, 217, 1
- Liu, X.-D., Baoyin, H., & Ma, X.-R. 2012, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 12, 551
- Lock, R. E., Edwards, C. D., Nicholas, A. K., Woolley, R., & Bell, D. J. 2016, in 2016 IEEE Aerospace Conference, IEEE, 1–12
- Mahdi, M. C. 2015, *Artificial Satellites*, 50, 157
- Martins, R. V. 2018, *Notas de aula - Astrodinâmica Capítulo 3*
- Mazouffre, S. 2016, *Plasma Sources Science and Technology*, 25
- Monaghan, H. 2022, Deep Space Network, [https://www.nasa.gov/directorates/heo/scan/services/networks/deep\\_space\\_network/about](https://www.nasa.gov/directorates/heo/scan/services/networks/deep_space_network/about)
- Pocha, J. J. 2012, *An Introduction to Mission Design for Geostationary Satellites*, Vol. 1 (Springer Science & Business Media)
- Pogurelskiy, O. 2015, Keplerian orbital elements - part 2, <https://pt.slideshare.net/ssusere91f32/2-lecture-46533636>
- Romero, P., Barderas, G., & García-Roldán, J. M. 2015, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38, 2223

- Sheehan, W. 2002, *The planet Mars: a history of observations and discovery* (The University of Arizona Press)
- Silva, J. J., & Romero, P. 2013, *Planetary and Space Science*, 87, 14
- Slobin, S. D. 2016, *DS 301 - Coverage and Geometry*, Tech. rep., Jet Propulsion Laboratory
- Soop, E. M. 1994, *Handbook of geostationary orbits* (Kluwer Academic Publisher)
- Stooke, P. J. 2012, *The International Atlas of Mars Exploration - The First Fiva Decades* (Cambridge University Press)
- Stooke, P. J. 2015, *The International Atlas of Mars Exploration - From Spirit to Curiosity* (Cambridge University Press)
- Vallado, D. A., & McClain, W. D. 2004, *Fundamentals of astrodynamics and applications*, second edition (Kluwer Academic Publisher)
- Virtuous Tecnologia, d. I. 2008, *Leis de Kepler*, <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/GravitacaoUniversal/lk.php>
- Williams, D. R. 2020, *Mars Fact Sheet*, <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/marsfact.html>
- Yung, Y. L., Chen, P., Neelson, K., et al. 2018, *Astrobiology*, 18, 1221

## Apêndice A

# Evolução dos elementos keplerianos

Neste apêndice estão dispostas as figuras que mostram a evolução dos elementos keplerianos para cada longitude utilizada em nosso estudo do planejamento de manobras.

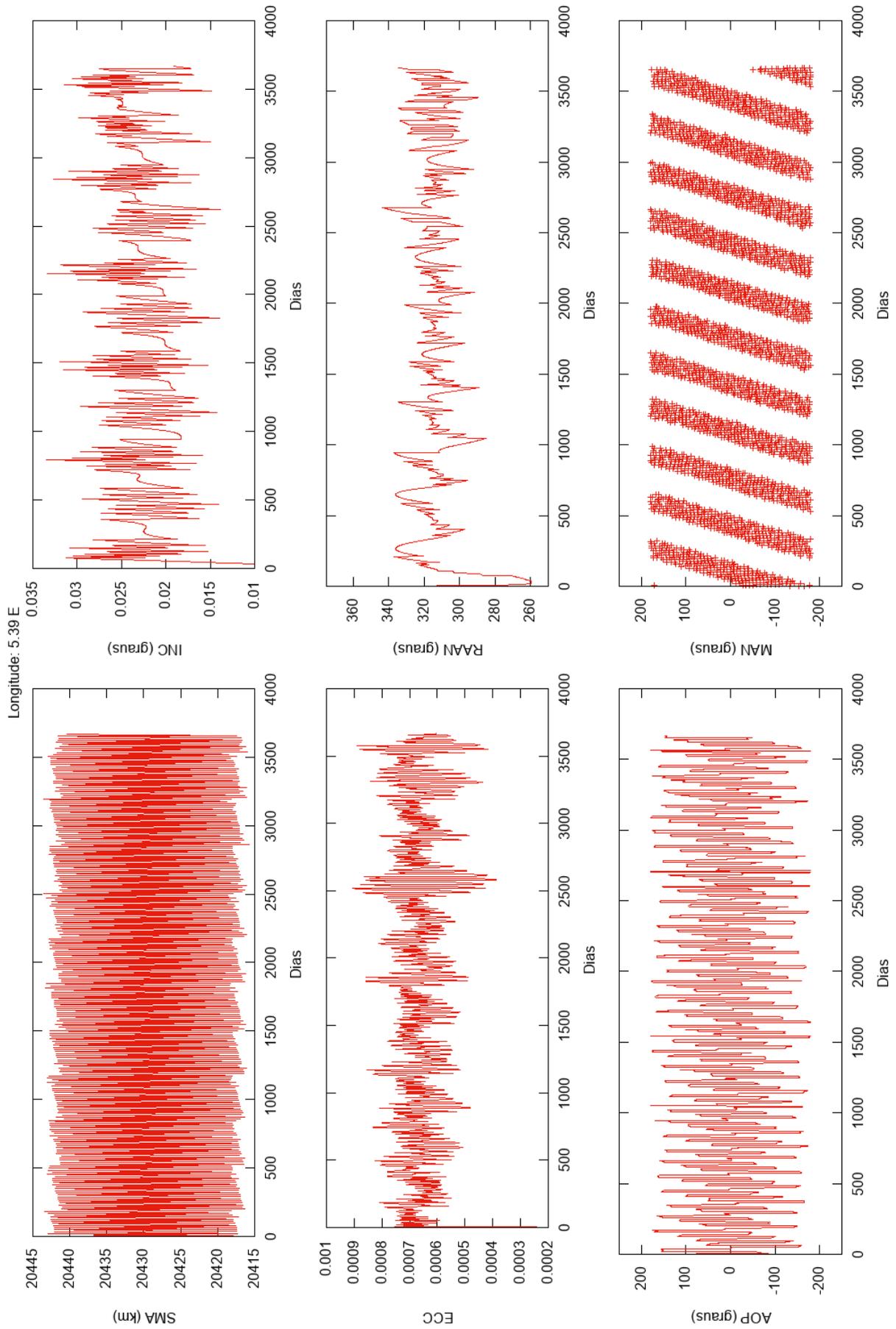


FIGURA A.1. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 5.39°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

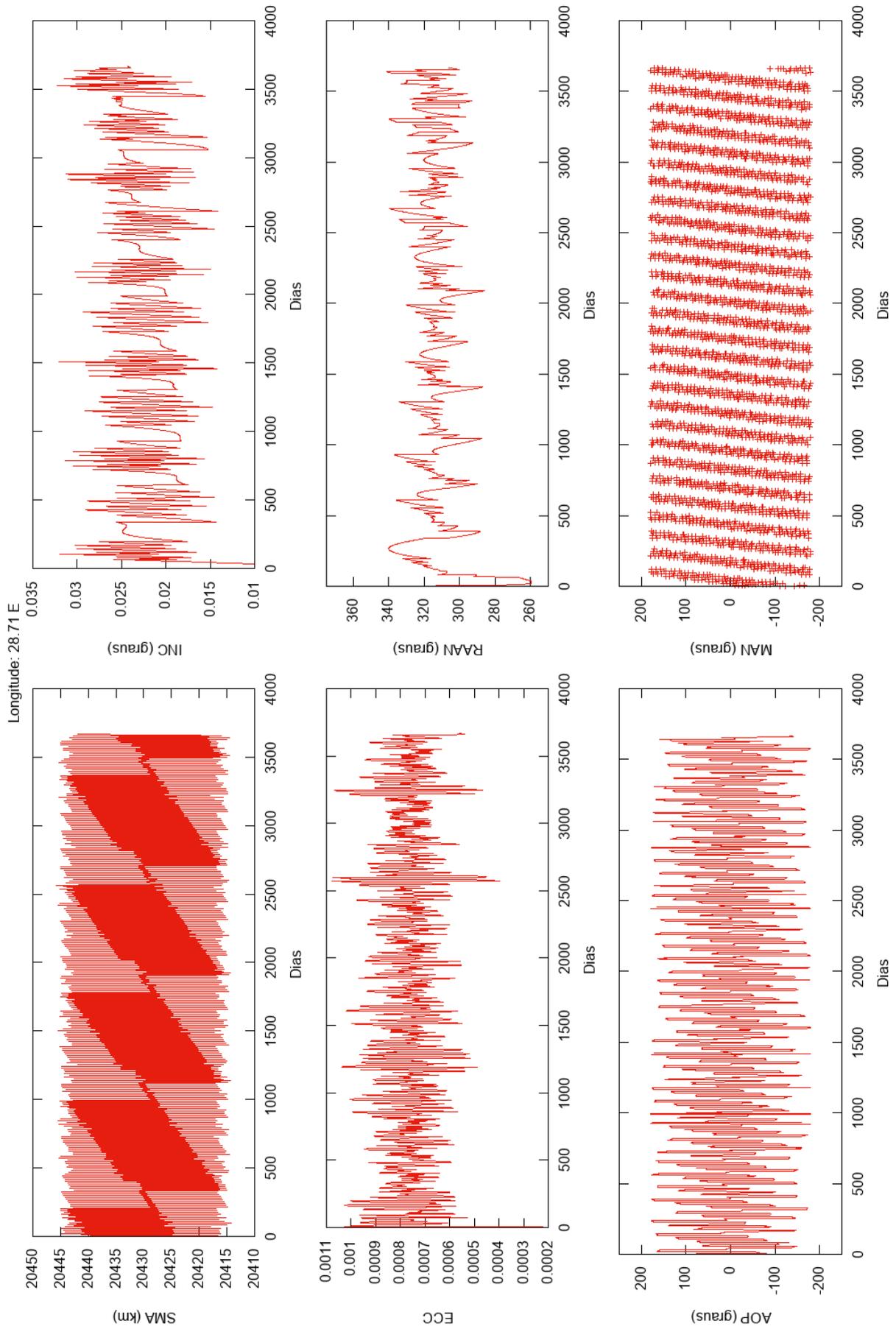


FIGURA A.2. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 28.71°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

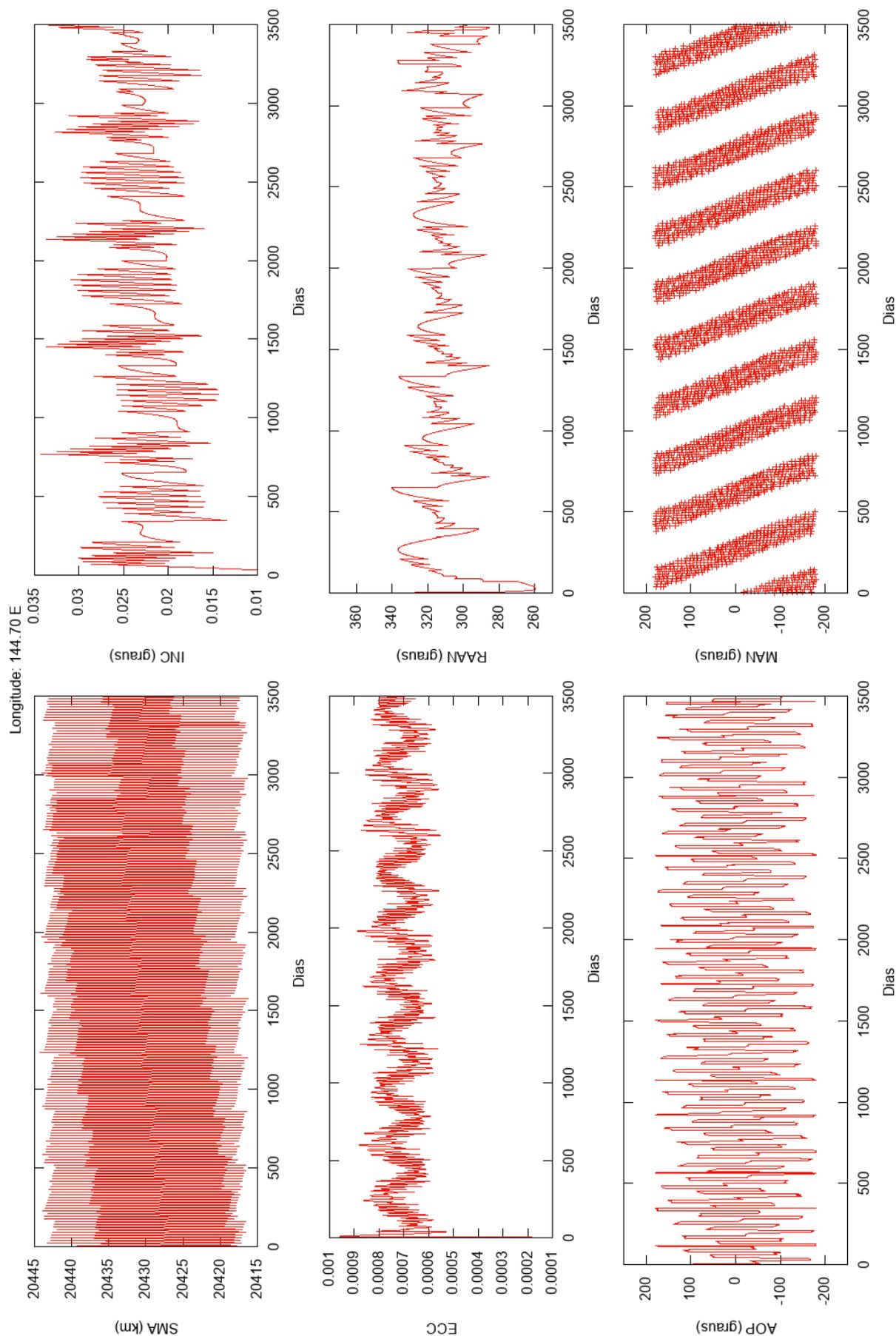


FIGURA A.3. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 52.02°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

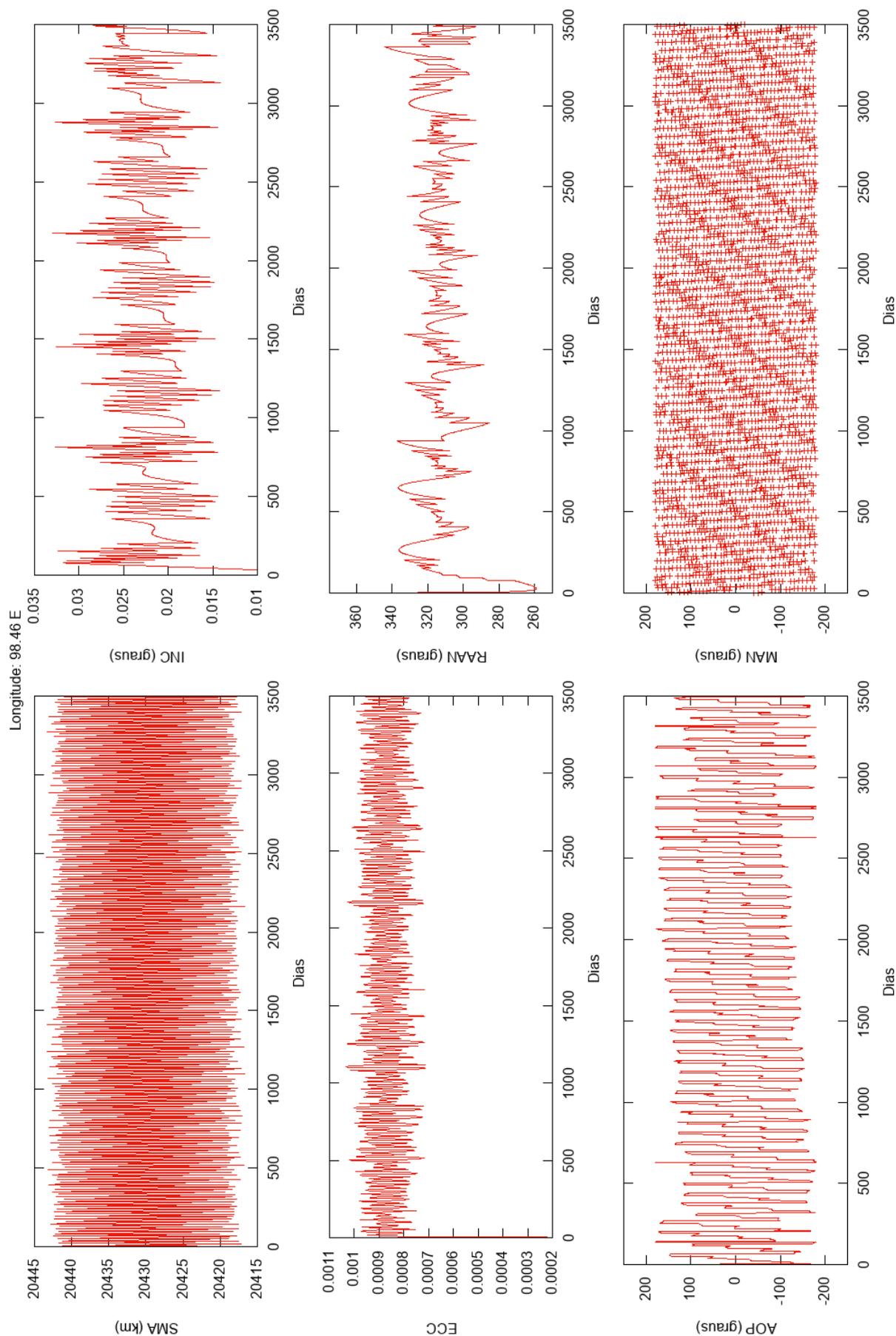


FIGURA A.4. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 98.46°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

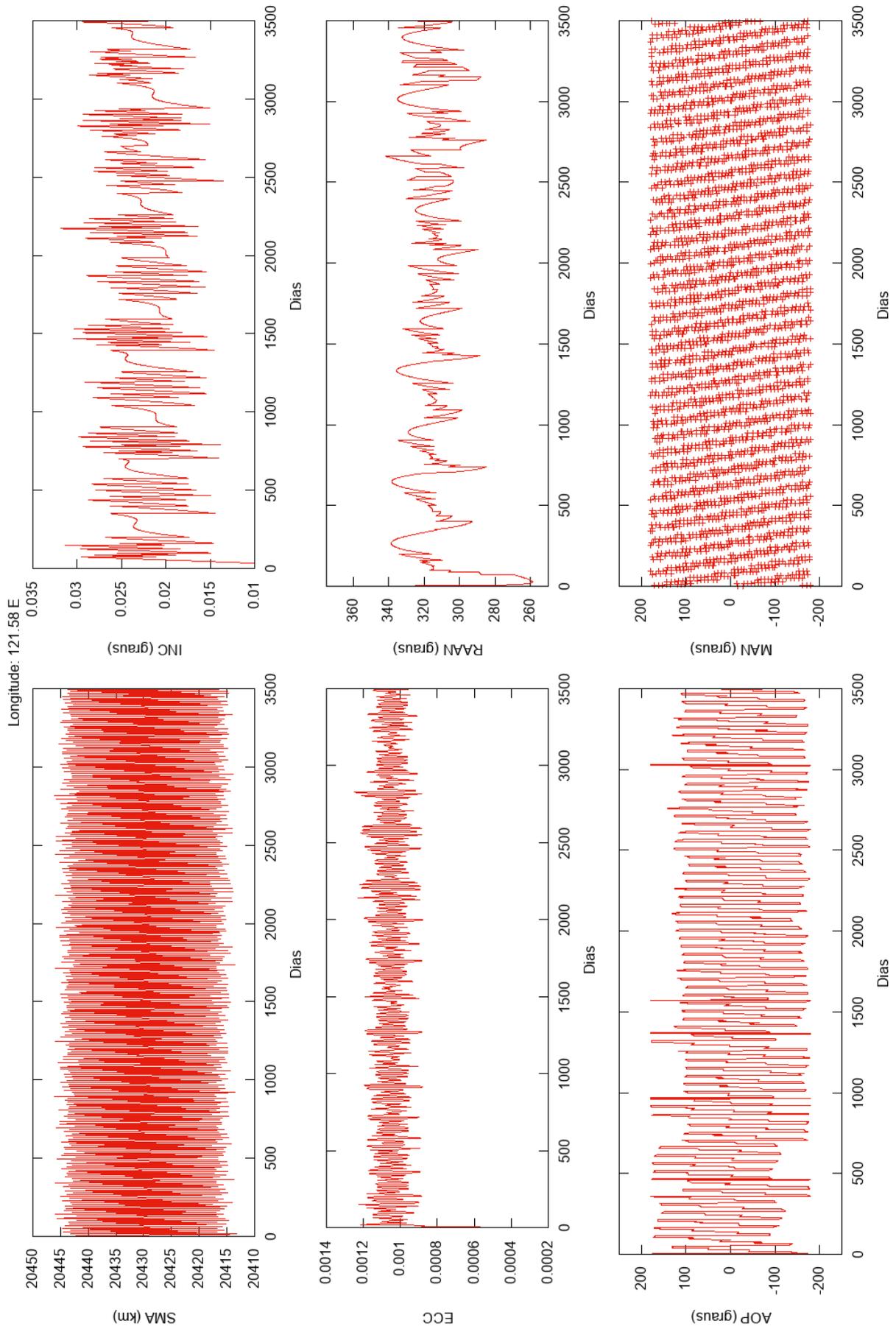


FIGURA A.5. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 121.58°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

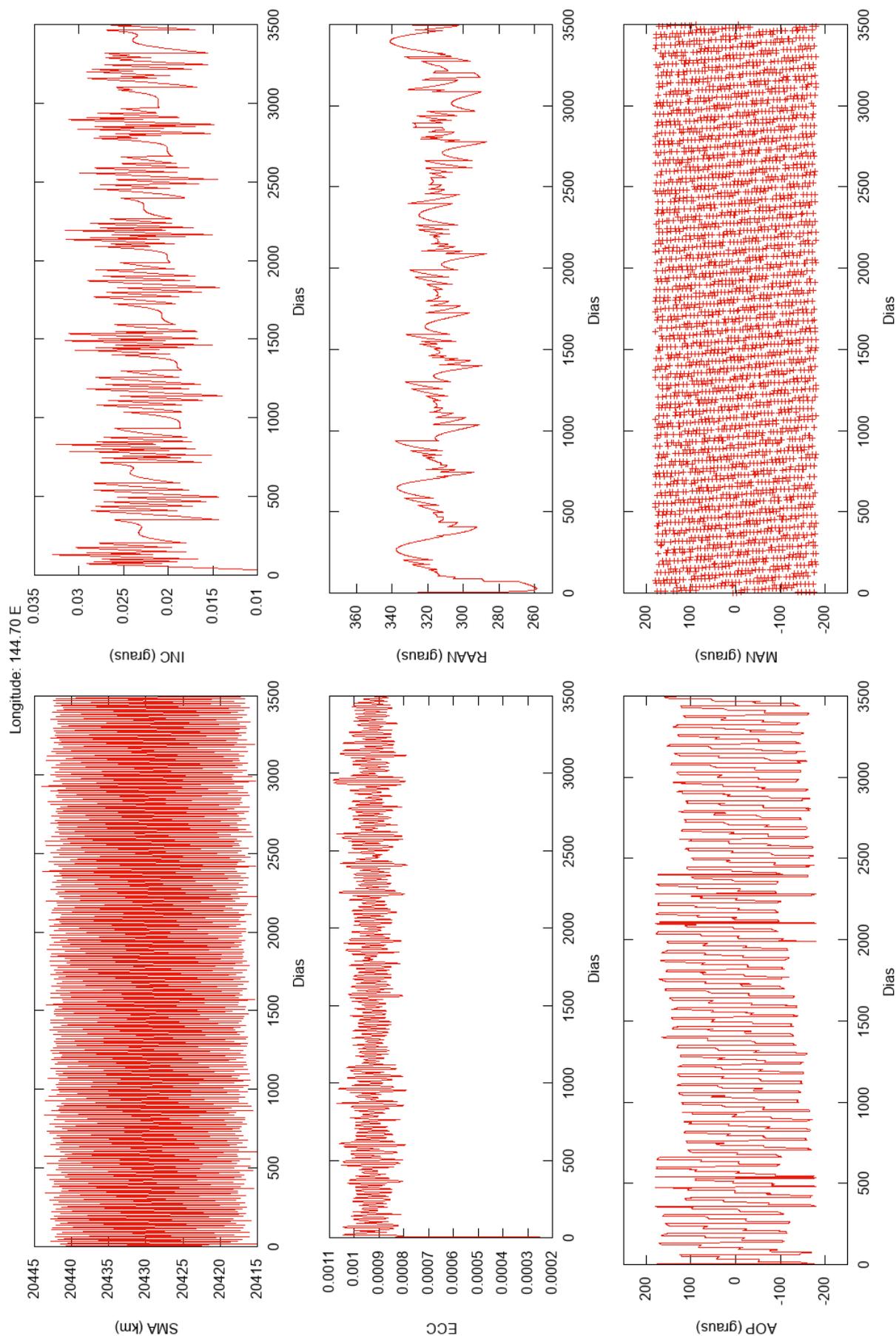


FIGURA A.6. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 144.70°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

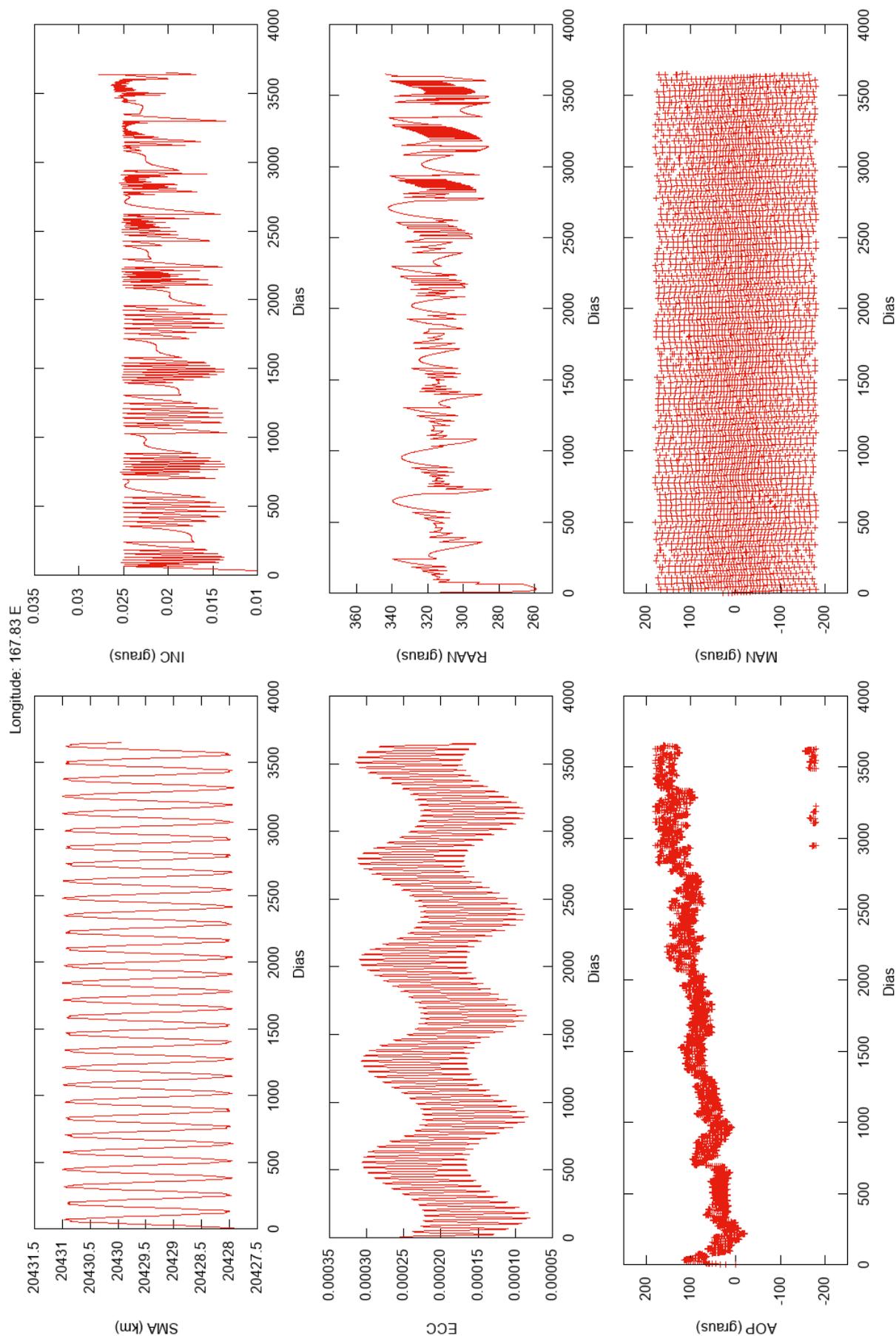


FIGURA A.7. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 167.83°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

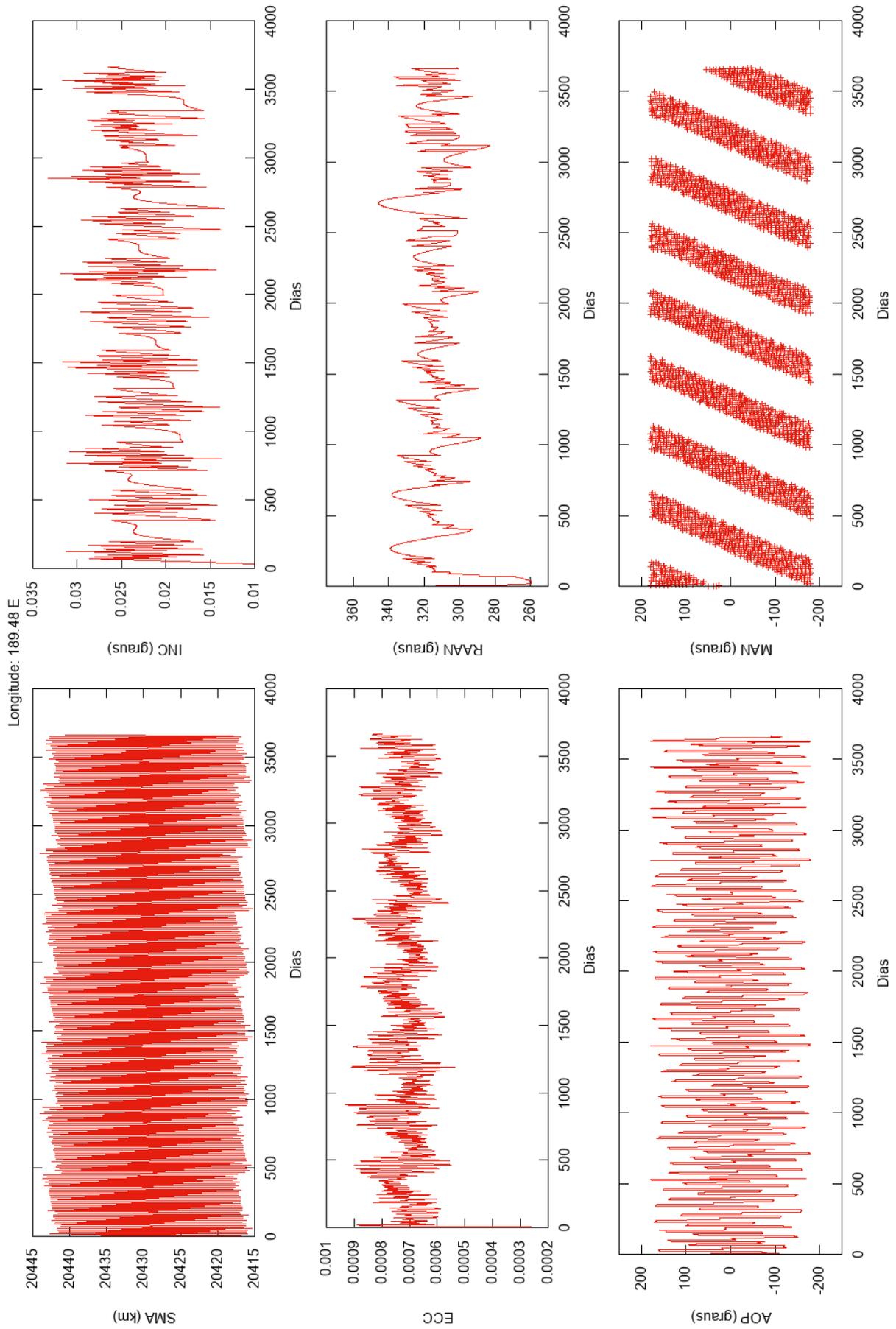


FIGURA A.8. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 189.48°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

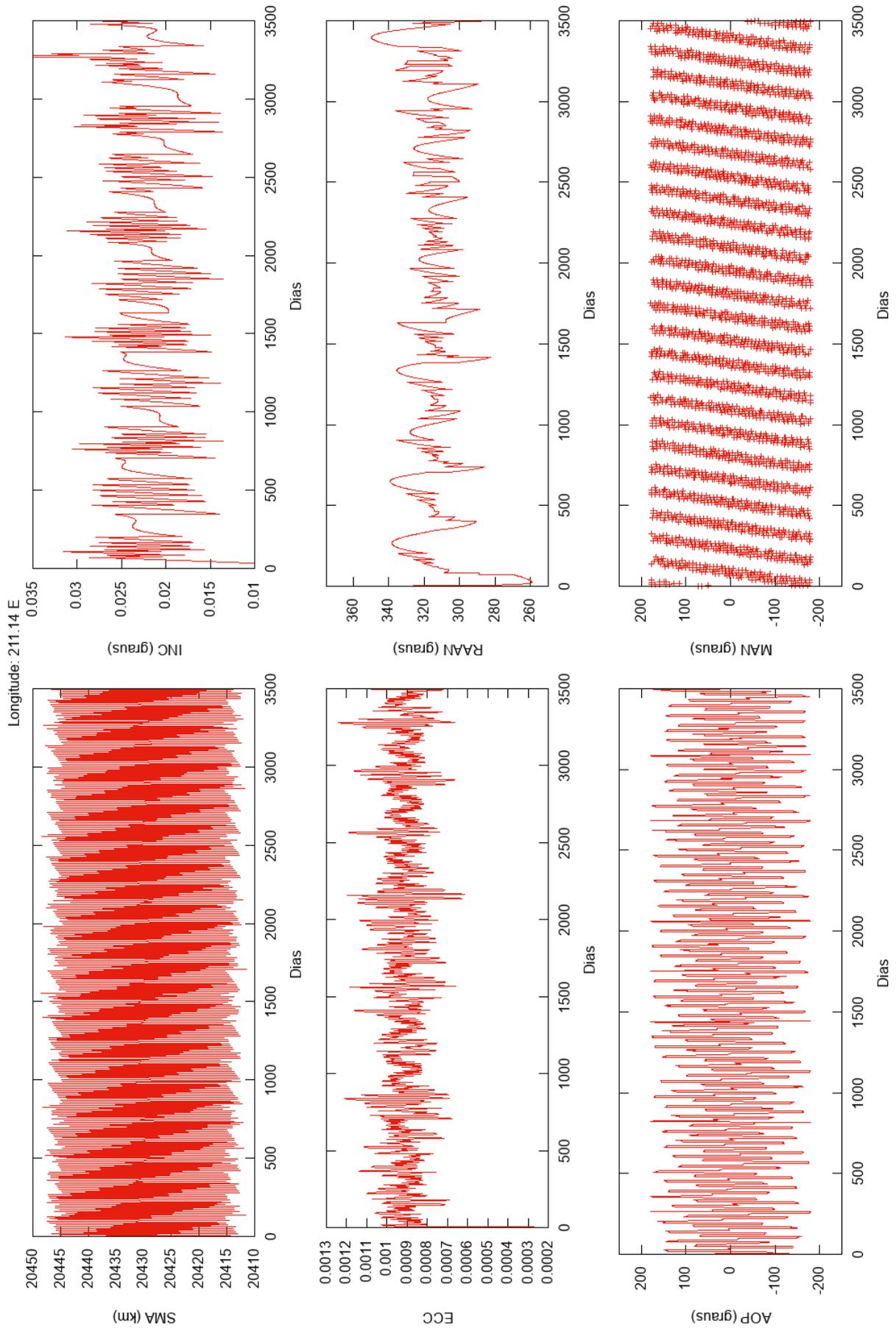


FIGURA A.9. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 211.14°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

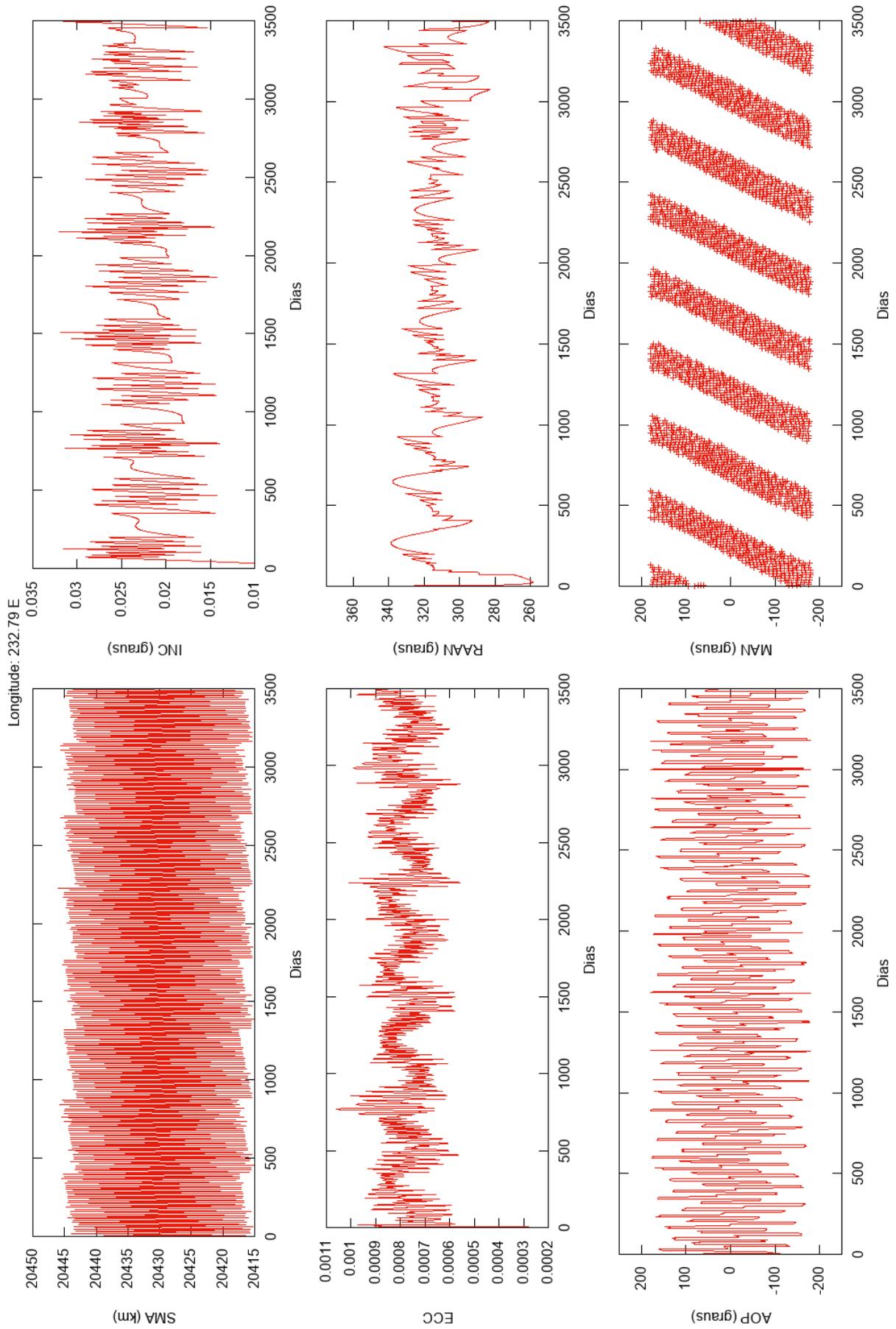


FIGURA A.10. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 232.79°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

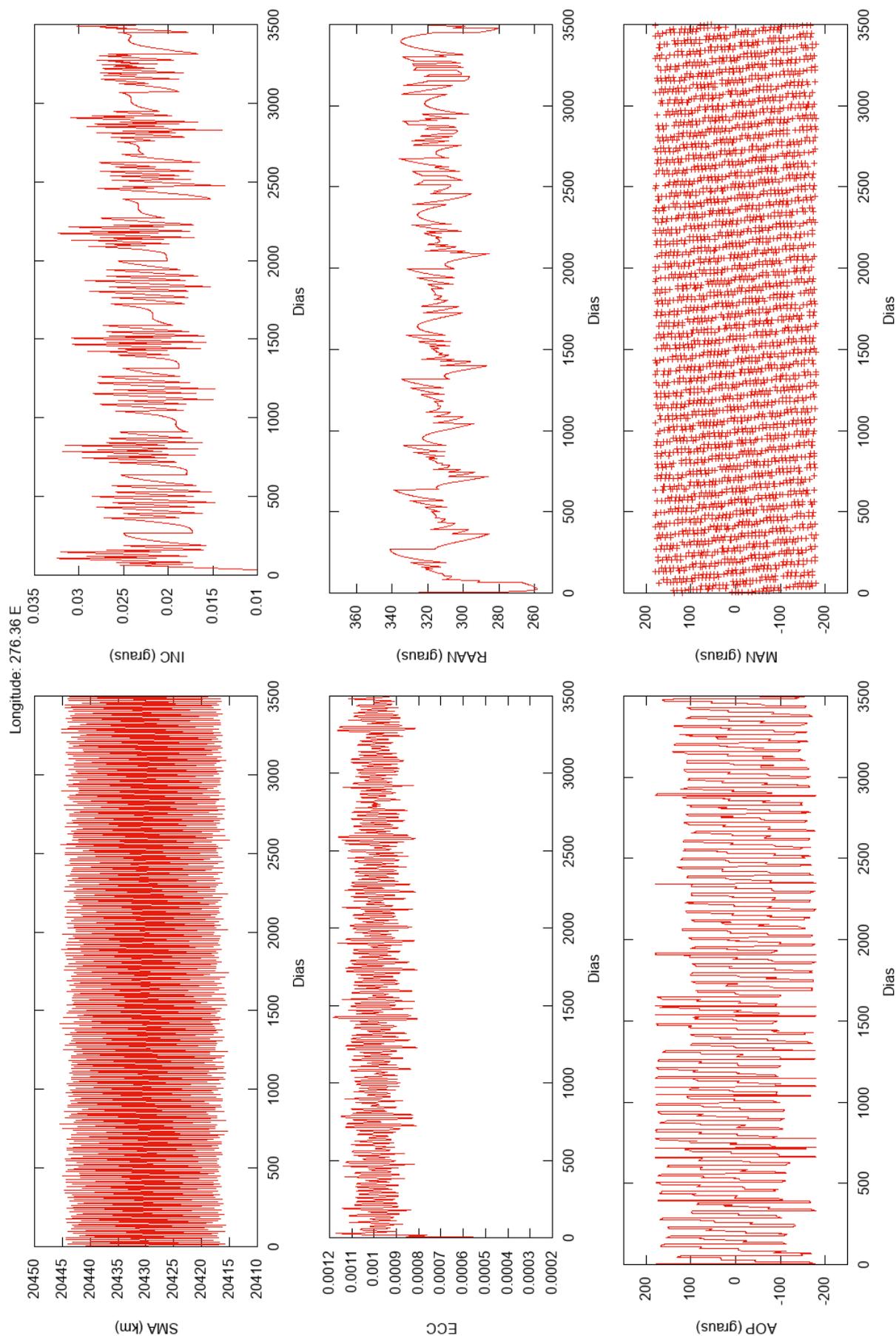


FIGURA A.11. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 276.36°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

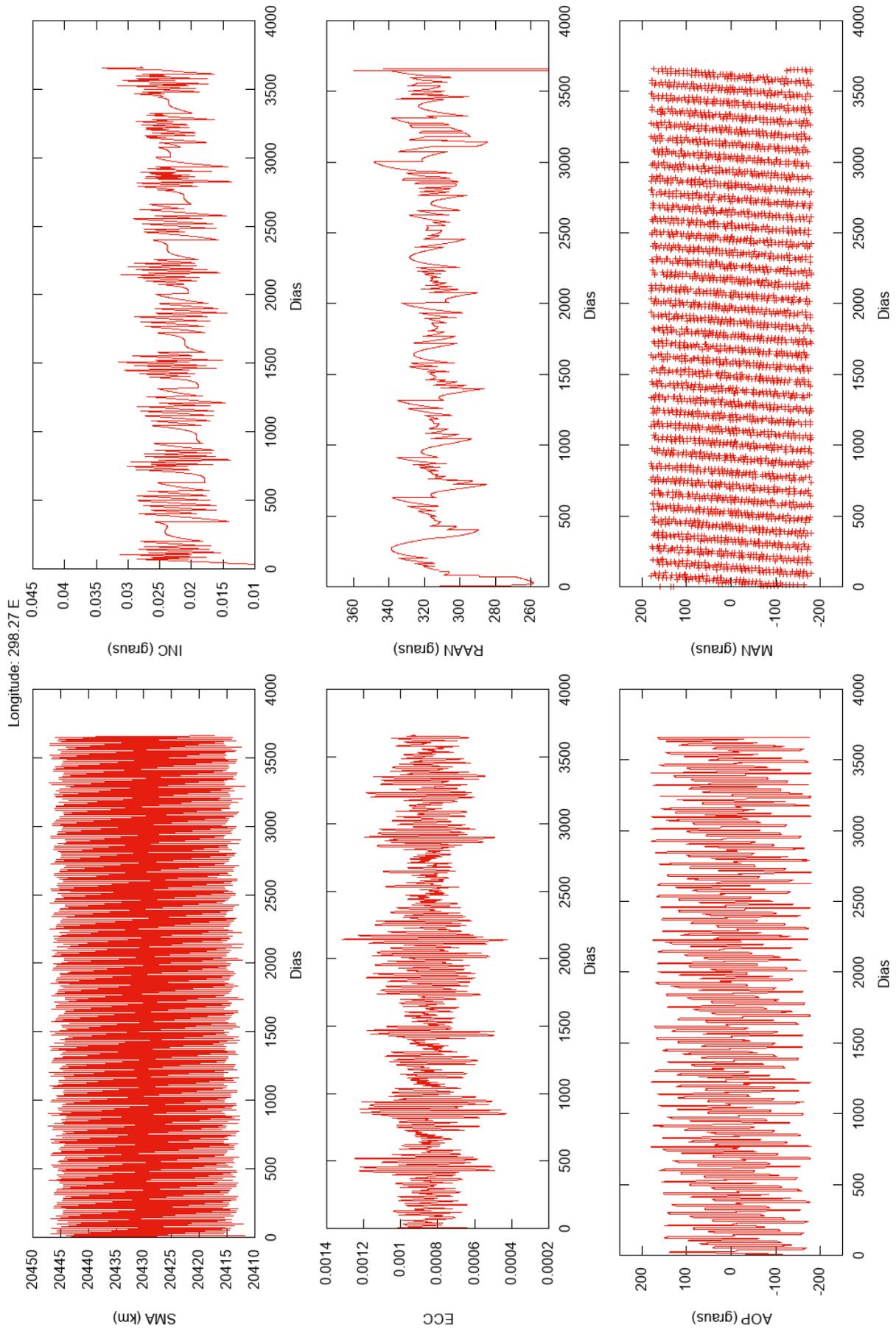


FIGURA A.12. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 298.27°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

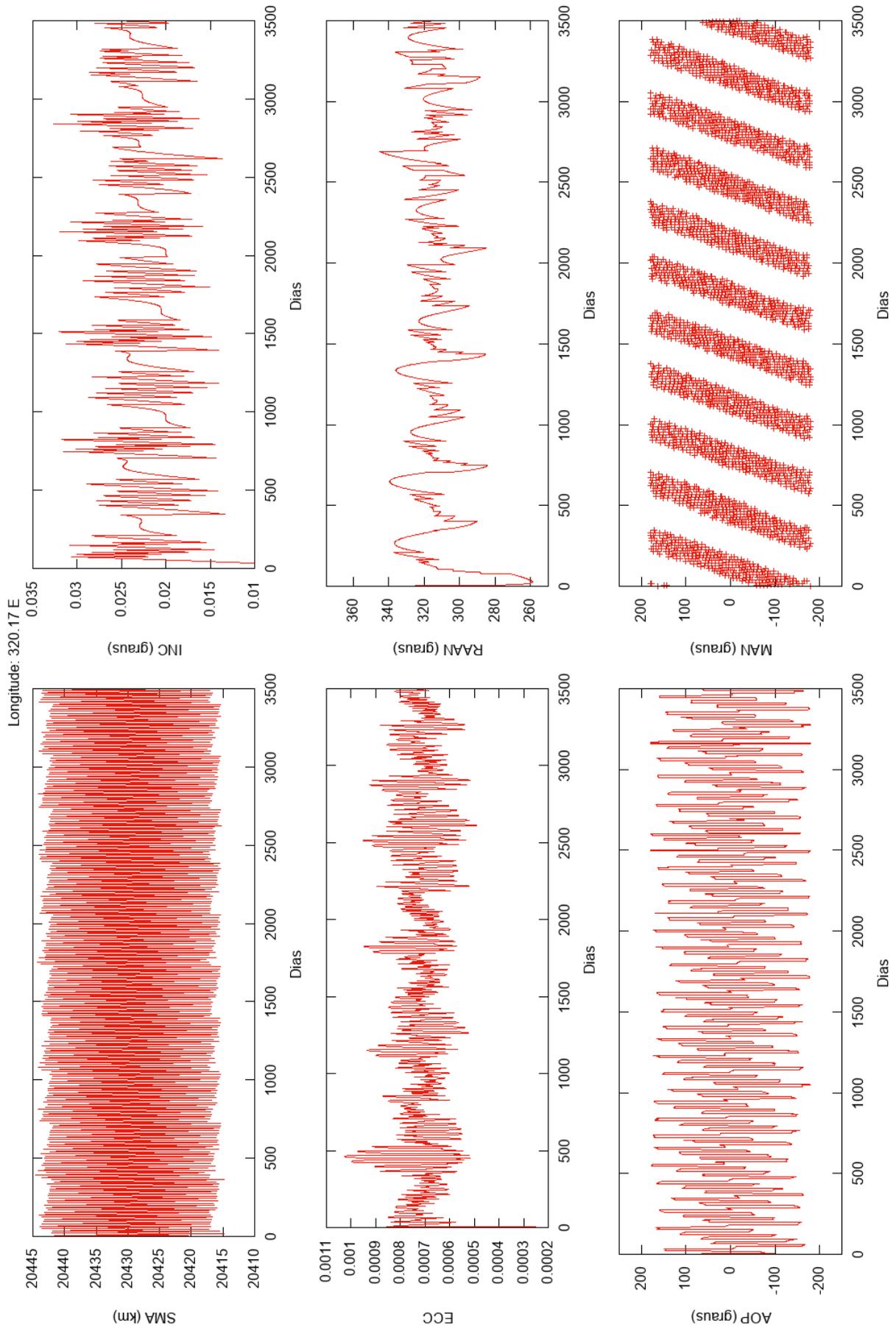


FIGURA A.13. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 320.17°E. Os intervalos do argumento do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.

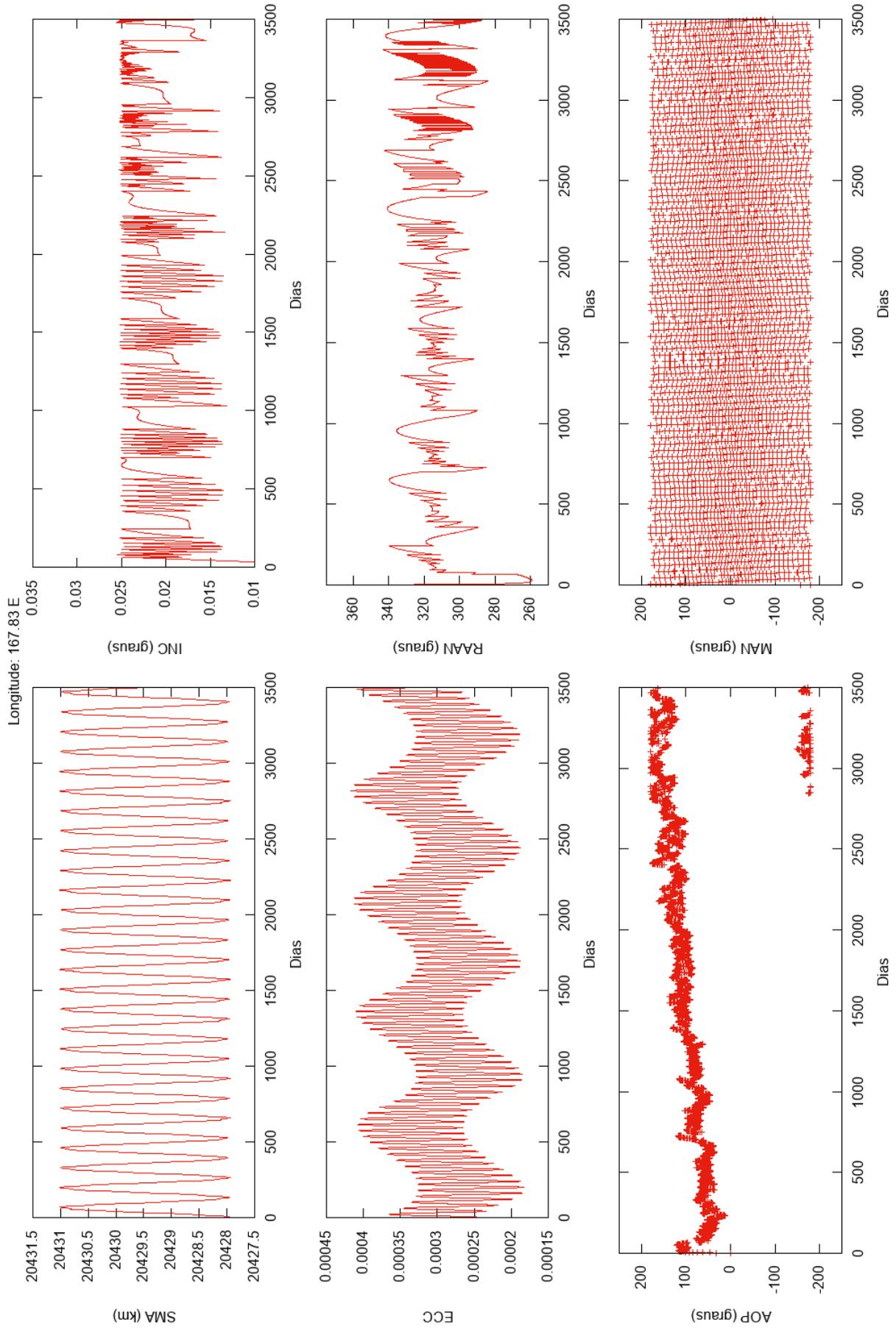


FIGURA A.14. Evolução dos elementos keplerianos de um satélite na longitude inicial 342.08°E. Os intervalos do periastro e da anomalia média foram modificados de [0,360] para [-180, 180] para que fosse mais fácil acompanhar suas evoluções.