UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

RODOLFO ALVES DE OLIVEIRA

Convexidade de Steiner em Grafos

Prof. Dr. Fábio Protti
Orientador

Prof. Dr. Mitre Costa Dourado
Co-orientador

Rio de Janeiro, Agosto de 2009

Ficha Catalográfica

Alves de Oliveira, Rodolfo

Convexidade de Steiner em Grafos / Rodolfo Alves de Oliveira. – Rio de Janeiro: UFRJ IM, 2009.

87 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, BR–RJ, 2009.

Orientador: Fábio Protti; Co-orientador: Mitre Costa Dourado.

I. Protti, Fábio. II. Costa Dourado, Mitre. III. Título.

Convexidade de Steiner em Grafos

Rodolfo Alves de Oliveira

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado por:

____

Prof. Dr. Fábio Protti (Orientador)

____

Prof. Dr. Mitre Costa Dourado (Co-orientador)

____

Profa. Dr. Lilian Markenzon

____

Prof. Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter

____

Profa. Dr. Loana Tito Nogueira

Rio de Janeiro, Agosto de 2009

Dedico este trabalho aos meus diletos pais
e aos meus orientadores.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, eu gostaria de agradecer a Deus e aos meus pais, Nelsindo de Oliveira Filho e Lucimar Alves Santana. E também, minha esposa Juliana Gomes de Oliveira. E por último, porém não menos importante, meus orientadores e grandes amigos Fábio Protti e Mitre Costa Dourado, por toda dedicação, talento e sabedoria.

RESUMO

Neste trabalho reunimos material relacionado ao problema da árvore de Steiner. Entre eles, resultados sobre a convexidade de Steiner em grafos. Também obtivemos alguns resultados computacionais sobre o tema. O problema de encontrar uma árvore de Steiner é conhecido por ser NP-difícil. Neste trabalho, verificamos que existem fortes indícios de que o intervalo de Steiner também seja dessa classe de problemas. Não obstante, conseguimos em alguns casos especiais, como em grafos de distância-hereditária e em subconjuntos de cardinalidade limitada por um inteiro fixo positivo $k \geq 2$, algoritmos eficientes para esse problema. Adaptamos o algoritmo, por nós desenvolvido para encontrar o intervalo de Steiner para um subconjunto de cardinalidade fixa, para gerar todas as árvores de Steiner para o mesmo subconjunto com tempo polinomial de atraso.

Palavras-chave: Complexidade, convexidade, grafo, conjunto geodésico, conjunto monofônico, conjunto de Steiner.

Steiner Convexity in Graphs

ABSTRACT

In this work we have collected stuff related to the Steiner tree problem. Among them, some results about the Steiner convexity in graphs. We have also obtained some computational results on this topic. The problem of finding a Steiner tree is known to be NP-hard. In this work, we have seen that there are strong evidences that the Steiner interval is also in this class of problems. Nevertheless, we have obtained in some special cases, such as distance-hereditary graphs and subsets with sizes limited by a fixed positive integer $k \geq 2$, efficient algorithms for this problem. We have adapted our algorithm, for finding the Steiner interval of a subset with size limited by a fixed integer, to generate all Steiner trees for the same subset with polynomial time delay.

Palavras-chave: complexity, convexity, graph, geodesic set, monophonic set, steiner set.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3DM	Problema Emparelhamento 3-dimensional
IS	Intervalo de Steiner
ISF	Intervalo de Steiner Forte
ISO	Intervalo de Steiner “Otimizado”
ST	Problema da Árvore de Steiner
X3C	Problema da Cobertura Exata por 3-conjuntos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Antes de definirmos o tema desta dissertação, Convexidade de Steiner em Grafos, analisamos diversas publicações referentes à convexidade em grafos. Tendo como base o conhecimento adquirido no projeto de conclusão do curso de graduação, desenvolvido junto ao Prof. Mitre Costa Dourado, tive a oportunidade de trabalhar com os conjuntos convexos que constituem a convexidade geodésica. Por essa razão, optamos por não nos distanciarmos da área de convexidade em grafos, que muito me atrai. Ao longo dos estudos, demos uma grande atenção à árvore de Steiner, em particular à convexidade que envolve tal árvore, por ser um ramo fascinante em grafos e que recentemente vem se tornando um expressivo foco de pesquisas. Dessa forma, tornou-se este o nosso principal tema na dissertação.

O problema da árvore de Steiner é conhecido originalmente como "The Euclidean Steiner Tree Problem", em honra ao Professor Jakob Steiner, que na Universidade de Berlin fez grandes contribuições. Esse problema consiste em encontrar uma árvore de menor comprimento gerada por um conjunto de vértices num plano, sendo permitida a inserções de vértices auxiliares. O problema original possui longas raízes que datam do Século XVII, quando o famoso cientista Pierre Fermat propôs o seguinte problema: localizar no plano um ponto tal que a soma das distâncias do mesmo a três pontos dados é mínima. Esse simples problema instigou cem anos de estudos antes de Heinen propor uma solução completa em 1834. Desde então, levaria mais de cem anos até o problema de Fermat tornar-se popular de novo. Após a publicação de *What is Mathematics*? em 1941, por Courant e Robbins, o problema de Fermat e suas generalizações foram renomeados para Problema da Árvore de Steiner. Esse conteúdo pode ser adquirido nas citações (IVANOV; TUZHILIN, 1994) (HERRING, 2004).

O problema da árvore de Steiner em grafos foi formulado por (HAKIMI, 1971) e (LEVI, 1971). No caso de um grafo G conexo e não ponderado, esse problema consiste em encontrar, para um subconjunto não vazio de vértices W, um subgrafo conexo de tamanho mínimo que contém os vértices de W. Este subgrafo é conhecido como árvore de Steiner para W ou *Steiner W-tree*, onde os vértices de W são chamados de *terminais* e os vértices auxiliares utilizados para criar alguma conexão entre vértices não adjacentes de W em G são chamados de *vértices de Steiner*. Desde então, certas definições e conceitos foram surgindo, tais como: a *distância de Steiner* $d_S(W)$ de W (CHARTRAND et al., 1989), o *intervalo de Steiner* $S(W)$ de W, *conjunto de Steiner* para G (HERNANDO et al., 2005) e o *número de Steiner* $st(G)$ de G (CHARTRAND; ZHANG, 2002). No cotidiano as árvores de Steiner são importantes em várias aplicações, tais como roteamento de redes (KORTE; PRöMEL; STEGER, 1990), reconstrução de árvores filogenéticas (HWANG; RICHARDS; WINTER, 1992) e determinação de interconexões ótimas para circuitos VLSI (*Very Large-Scale Integration*) (KAHNG; ROBINS, 1995). Desafortunadamente, a versão de decisão do problema de encontrar uma árvore de Steiner para um subconjunto não vazio de vértices W é conhecido por ser um problema NP-completo para grafos em geral (HWANG; RICHARDS; WINTER, 1992).

Nesta dissertação nos propomos a reunir informações significativas relacionadas à árvore de Steiner e nos dedicar à convexidade de Steiner definida em (CÁCERES;

A.MÁRQUEZ; PUERTAS, 2008). E mais, veremos as relações da convexidade de Steiner com outras convexidades de maior ênfase em grafos, que são as convexidades geodésica e monofônica (FARBER; JAMISON, 1986). Por seguinte, mostraremos a prova da NP-completude já conhecida nas literaturas do problema da árvore de Steiner e definiremos alguns problemas para o intervalo, com a prova de deles. Além do mais, mostraremos que é possível encontrar conjuntos convexos de Steiner no pior caso em tempo polinomial para grafos de distância-hereditária e verificar se um subconjunto não vazio W é convexo na convexidade de Steiner para um inteiro $k \geq 2$, onde k indica a cardinalidade de W.

Portanto, nosso principal desígnio é criar um material que gere frutos futuros, que seja mais uma fonte de pesquisa na área de convexidade em grafos, em particular na convexidade de Steiner, além de solucionar certos problemas inerentes a essa convexidade. O corpo desta dissertação está dividido em capítulos da seguinte maneira: o Capítulo 1, como podem observar, é essa Introdução; o Capítulo 2 contém algumas noções básicas, conceitos e definições de grafos e convexidade; no Capítulo 3, investigamos a convexidade de Steiner, com seus principais resultados teóricos; no Capítulo 4, analisamos a NP-completude dos problemas envolvendo a árvore de Steiner; no Capítulo 5, estudamos a convexidade de Steiner em grafos de distância-hereditária; no Capítulo 6, tratamos da convexidade de Steiner para subconjuntos de cardinalidade fixa por $k \geq 2$, onde k é um inteiro positivo; e por último, o Capítulo 7, a conclusão desta dissertação.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo daremos as definições e conceitos em grafos que serão ferramentas necessárias para o desenvolvimento dessa dissertação.

2.1 Definições Relacionadas a Grafos

Algumas definições podem ser encontradas no livro (BONDY; MURTY, 1976).

Um grafo é uma noção simples, intuitiva e abstrata, usada para representar a idéia de alguma espécie de relação entre objetos. Graficamente, aparece representado por um diagrama com *nós* ou *vértices*, significando os objetos, unidos por um traço denominado *aresta*, configurando a relação imaginada. Um grafo tem a notação de um par ordenado $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, ..., v_n\}$ é um conjunto (finito) de vértices, e $E = \{e_1, ..., e_m\}$ é um conjunto (finito) de arestas constituídas por pares de elementos de V distintos[1]. A cardinalidade do conjunto de vértices, $|V|$, é denotada por n, e a cardinalidade do conjunto de arestas, $|E|$, é denotada por m. O *tamanho* de um grafo G, denotado por $|G|$, é o valor de $n + m$. Dois vértices

[1]Os conjuntos de vértices e arestas de grafo um G também podem ser representados respectivamente como $V(G)$ e $E(G)$.

de G são ditos *adjacentes* ou *vizinhos* quando possuem uma aresta entre eles. Um grafo G é dito *simples* quando não contém arestas paralelas, que são arestas que possuem os mesmos vértices extremos, ou *laço*, que é uma aresta que tem como extremidades um mesmo vértice. Um subgrafo de G é um grafo cujos vértices e arestas são também vértices e arestas de G. Seja $V' \subseteq V$'. O subgrafo de G com conjunto de vértices V' e que contém todas as arestas de G que ligam cada par de vértices de V' é chamado de subgrafo de G *induzido* por V' e é denotado por $\langle V' \rangle$.

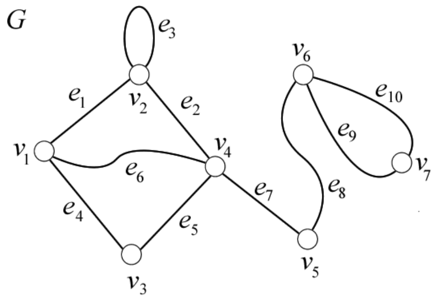

Figura 2.1: Grafo G.

O grafo G na Figura 2.1 possui 7 vértices, onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ($n = 7$), e 10 arestas, onde $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ ($m = 10$). Então, o tamanho de G é 17. Podemos notar que G não é simples, pois a aresta e_3 é um laço e as arestas e_9 e e_{10} são arestas paralelas.

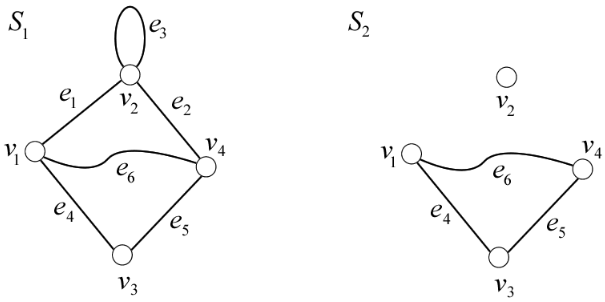

Figura 2.2: S_1 e S_2 subgrafos de G.

Na Figura 2.2 temos dois subgrafos de G, que são S_1 e S_2. O grafo S_1 é um subgrafo induzido de G, pois os vértices v_1, v_2, v_3, v_4 possuem as mesmas arestas do grafo G; porém, o grafo S_2 não é induzido, pois faltam as arestas e_1, e_2, e_3 entre os vértices v_1, v_2, v_4 no grafo original.

Dois grafos G_1 e G_2 são ditos *isomorfos*, denotando por $G_1 \approx G_2$, quando existe uma função bijetora $f : V(G_1) \to V(G_2)$ tal que para cada aresta entre os vértices x e y de G_1 existe uma aresta entre os vértices $f(x)$ e $f(y)$ em G_2. Vejamos a Figura 2.3.

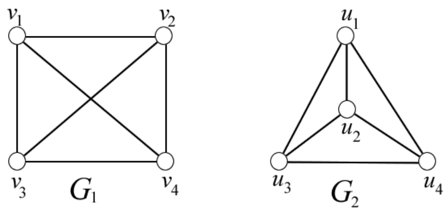

Figura 2.3: Temos que $G_1 \approx G_2$, pois pode-se tomar $f(v_i) = u_i$, $1 \leq i \leq 4$.

Uma *subdivisão elementar* de um grafo não vazio G é a operação de remover alguma aresta uv, e adicionar um vértice w e as arestas uw e wu. Um *subdivisão* de G é um subgrafo obtido de G por uma sequência de subdivisões elementares (incluindo a possibilidade de nenhuma subdivisão). Consequentemente uma subdivisão de G é um grafo obtido pela inserção de vértices (de grau 2) entre as arestas do grafo G. Dois grafos G e H são *homeomorfos* se existe um isomorfismo de alguma subdivisão de G para alguma subdivisão de H. Vejamos um exemplo na Figura 2.4.

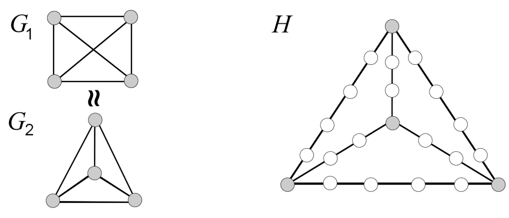

Figura 2.4: Os grafos G_1 e G_2 são homeomorfos a H.

Um *passeio* corresponde a uma sequência de vértices percorridos em um grafo, onde dois vértices consecutivos são adjacentes. Uma *trilha* (ou *trajeto*) é um passeio onde não há repetições de arestas. Um *caminho* é um passeio onde todos os vértices são distintos. Como exemplo, considere o passeio $v_1v_2v_4v_5v_6v_7$ no grafo G da Figura 2.1; como são 6 vértices distintos, temos um caminho. Um grafo é dito *conexo* se para cada par de vértices do grafo existe pelo menos um caminho entre eles. Como exemplo, se tomarmos o subgrafo S_1 da Figura 2.2, podemos observar que ele é conexo, pois entre qualquer par de seus vértices existe um caminho; no entanto, o mesmo não ocorre no subgrafo S_2, pois o vértice v_2 está isolado. Um caminho é chamado de *induzido* se não possui nenhuma aresta ligando dois vértices não consecutivos do mesmo; tal aresta é chamada de *corda*. Um caminho induzido com k vértices é denotado por P_k. Por exemplo, o mesmo caminho $v_1v_2v_4v_5v_6v_7$ citado acima não é induzido, pois existe a corda e_6 entre os vértices v_1 e v_4, não consecutivos no caminho. Se os vértices inicial e final de um caminho são adjacentes, dizemos que o caminho é fechado, e nesse caso é chamado de *ciclo*. Um ciclo sem cordas é denotado por C_k, onde k é o número de vértices (exemplo na Figura 2.6). Um grafo *acíclico* é uma grafo que não contém nenhum ciclo.

Um grafo é *ponderado* quando suas arestas possuem pesos que podem ser positivos ou negativos, onde o peso de alguma aresta e é denotado por $w(e)$. Se for de outra forma, ou seja, *não ponderado*, todas as suas arestas possuem pesos unitários positivos. O custo de um caminho é a soma dos pesos de suas arestas, e quando esse custo é mínimo entre todos os caminhos ligando seus extremos (vértice inicial e final do caminho), o mesmo é dito ser um *caminho mínimo*. É importante citar que todo caminho mínimo é induzido. Essa informação iremos usar mais à frente. A métrica utilizada em grafos para designar uma distância entre dois vértices é representada por $d\,(u, v)$, que indica o custo do caminho mínimo entre os vértices u e v pertencentes ao grafo (exemplo: $d\,(v_1, v_7) = 4$ no grafo G da Figura 2.1, onde o caminho mínimo é $v_1v_4v_5v_6v_7$).

Um grafo é dito de *distância-hereditária* se e somente se em qualquer subgrafo induzido do mesmo os vértices mantêm entre si as mesmas distâncias presentes no grafo original.

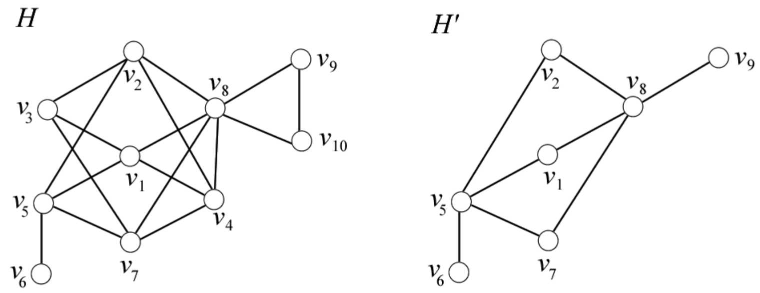

Figura 2.5: Grafo de distância-hereditária H, sendo H' um subgrafo induzido de H.

O grafo H da Figura 2.5 é um grafo de distância-hereditária. Apenas para efeito ilustrativo, podemos verificar que no subgrafo induzido H' todos os vértices mantêm entre si as mesmas distâncias existentes em H, e isso vale para qualquer outro subgrafo induzido do mesmo.

A vizinhança *fechada* de um vértice u, denotada por $N[u]$, é formada por todos os vértices w do grafo que satisfazem $d(u, w) \leq 1$, e a vizinhança *aberta* de um vértice u, denotada por $N(u)$, é formada por todos os vértices w do grafo que satisfazem $d(u, w) = 1$. No grafo H da Figura 2.5, $N[v_1] = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_8\}$ e $N(v_1) = \{v_3, v_4, v_5, v_8\}$. Um vértice v de um grafo é um *gêmeo verdadeiro* (*falso*) de um vértice v' se v e v' têm a mesma vizinhança fechada (respectivamente, aberta) no grafo. Um gêmeo de um vértice v é qualquer vértice gêmeo verdadeiro ou falso de v. Exemplo: os vértices v_2 e v_7 em H são gêmeos, pois v_2 é um falso gêmeo de v_7, e isso se deve pelo fato de ambos possuírem a mesma vizinhança aberta. O *grau* de um vértice v, denotado por $d(v)$, é a quantidade de vértices adjacentes a v Por exemplo, $d(v_8) = 6$ em H. Se um vértice v de G possui grau $d(v) = 1$, o mesmo é chamado de vértice *pendente*; por exemplo, o vértice v_6 em H.

Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico, e os seus vértices pendentes são chamados de *folhas*. Algumas vezes, podemos denotar uma árvore arbitrária com n vértices por T_n. Uma propriedade importante de uma árvore é que $m = n - 1$. Se um grafo não for conexo, apenas acíclico, o mesmo é chamado de *floresta*. Um grafo é chamado de *completo* se para todo par de vértices existe uma aresta entre eles, e é denotado por K_n. Um grafo *bipartido* é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos independentes, isto é, os vértices de cada conjunto não possuem adjacências entre si. Um grafo é chamado de *bipartido completo* se existem todas as arestas possíveis ligando um conjunto independente ao outro, e é denotado por $K_{p,q}$, onde p é a cardinalidade de um dos conjuntos e q a cardinalidade do outro; é claro que $p+q = n$. Um grafo *roda* com $p+1$ vértices, denotado por $W_{1,p}$, é o grafo obtido do ciclo C_p mais um vértice v que é adjacente a todos os vértices do ciclo. Na Figura 2.6 temos alguns exemplos dos grafos citados.

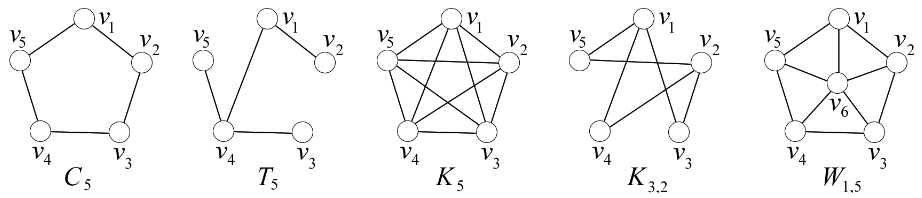

Figura 2.6: Exemplos de grafos: ciclo, árvore, completo, bipartido completo e roda.

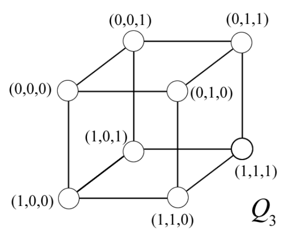

Figura 2.7: Exemplo de um 3-cubo.

Um *k-cubo*, denotado por Q_k, é um grafo bipartido cujos vértices são k-uplas de 0's e 1's, isto é, cada vértice é uma seqüência $(u_1, u_2, ..., u_k)$ onde cada $u_i = 0$ ou 1; além disso, dois vértices são adjacentes em Q_k se e somente se diferem em exatamente uma coordenada da k-upla. Exemplo na Figura 2.7.

Existem também outros tipos de estrutura de grafos, tais como *casa* e *dominó* como podemos ver na Figura 2.8.

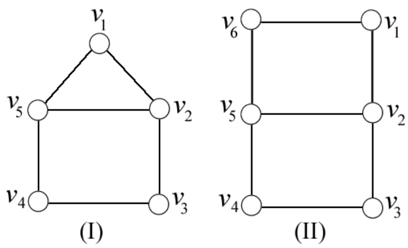

Figura 2.8: Em (I) um grafo casa e em (II) um grafo dominó.

2.2 Convexidade em Grafos

2.2.1 Convexidade e Função Intervalo

As definições desta seção são encontradas nas citações (PELAYO, 2004a) e (VEL, 1993).

Uma *convexidade* sobre um conjunto não vazio V é uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de V, chamados conjuntos convexos, que segue os seguintes axiomas:

(a1) $\emptyset$, $V \in \mathcal{C}$.

(a2) Interseções arbitrárias de conjuntos convexos são conjuntos convexos.

(a3) Qualquer união de conjuntos convexos aninhados por inclusão é um conjunto convexo.

O par $(V,\mathcal{C})$ é chamado de *espaço de convexidade*. O menor conjunto convexo contendo $A \subseteq V$ é denotado por $[A]_{\mathcal{C}}$ e chamado de *envoltória convexa* de A. Um *grafo espaço de convexidade* é um par ordenado $(G,\mathcal{C})$ formado por um grafo conexo G e uma convexidade $\mathcal{C}$ sobre V, tal que $(V,\mathcal{C})$ seja um espaço de convexidade satisfazendo o seguinte axioma adicional:

(a4) Todo membro de $\mathcal{C}$ induz um subgrafo conexo de G.

Seja $I : V \times V \rightarrow 2^V$ uma aplicação tal que:

(I1) $u,v \in I(u,v)$ para todo $u,v \in V$.

(I2) $I(u,v) = I(v,u)$ para todo $u,v \in V$.

Os *subconjuntos I-closed* de V são os subconjuntos $C \subseteq V$ tais que $I\,(C \times C) = C$. A família $\mathcal{C}_I$ de subconjuntos I-closed satisfazem os axiomas (a1), (a2) e (a3) de convexidade. A aplicação I é chamada de *função intervalo* do espaço de convexidade $(V,\mathcal{C}_I)$. Os espaços de convexidade admitindo uma função intervalo são chamados de *espaços de convexidade intervalares*, e podemos denotar um espaço de convexidade intervalar pela tripla $(V,I,\mathcal{C}_I)$, enfatizando a aplicação I. (CALDER, 1971)

2.2.2 Convexidades Geodésica e Monofônica

Em grafos existem diversos tipos de caminhos que são definidos por alguma métrica, e a partir dessas métricas são definidos os espaços de convexidade. Nesta seção da dissertação iremos nos concentrar nas convexidades mais conhecidas em grafos, que são as convexidades *geodésica* e *monofônica* (FARBER; JAMISON, 1986). Ambas as convexidades serão definidas num grafo $G = (V, E)$ conexo e não ponderado.

Um uv-caminho é dito *geodésico* se é um caminho mínimo entre u e v em G. Um uv-caminho é dito *monofônico* se é um caminho induzido entre u e v. O *intervalo geodésico* $I[u, v]$ é o conjunto de todos os vértices pertencentes a algum uv-caminho geodésico. Similarmente, o *intervalo monofônico* $J[u, v]$ é o conjunto de todos os vértices pertencentes a algum uv-caminho monofônico. Para um conjunto $W \subseteq V$, o *intervalo geodésico* $I[W]$ de W é a união de todos os intervalos geodésicos $I[u, v]$ para todos os pares u,$v \in W$. O *intervalo monofônico* de W é definido similarmente. Em outras palavras, temos:

$$I[W] = \bigcup_{u,v \,\in\, W} I[u, v] \text{ e } J[W] = \bigcup_{u,v \,\in\, W} J[u, v]$$

Teorema 2.2.2.1: *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e não ponderado. Então para $W \subseteq V$ vale a seguinte inclusão: $I[W] \subseteq J[W]$.*

Esse resultado se deve ao fato já citado anteriormente, que todo caminho mínimo é um caminho induzido. Logo, os vértices pertencentes a algum caminho mínimo entre um par de vértices de W também são pertencentes a algum caminho induzido entre os mesmos vértices.

Na Figura 2.9.(I) temos um exemplo de um grafo. Considere os vértices v_1 e v_8, aos quais iremos aplicar os intervalos geodésico e monofônico. Na Figura 2.9.(II) temos que $I[v_1, v_8] = \{v_1, v_2, v_4, v_8\}$ e em (III) temos que $J[v_1, v_8] = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Na mesma figura podemos notar a ordem de inclusão do Teorema 2.2.2.1.

Uma importante observação que não poderia deixar de ser feita é que todos os

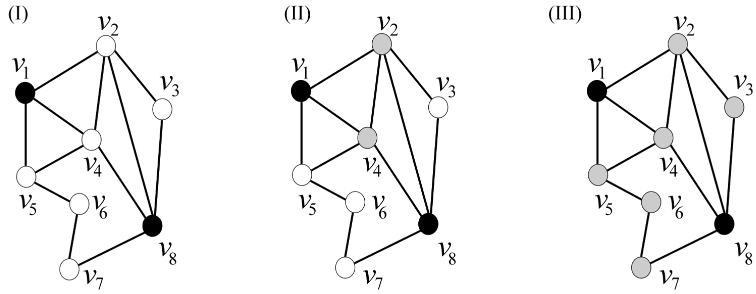

Figura 2.9: Exemplos de caminhos geodésico e monofônico.

caminhos induzidos de um subgrafo induzido H de G ($J_H[W]$) também são caminhos induzidos em G ($J_G[W]$). Consequentemente, $J_H[W] \subseteq J_G[W] = J[W]$, isto é, todo caminho induzido de H entre os pares de W, também são caminhos induzidos de G para os mesmos pares. No entanto, isso não acontece com caminhos mínimos. Em outras palavras, um caminho mínimo em H não é necessariamente um caminho mínimo em G. Esta é a diferença chave entre os intervalos geodésico e monofônico, e que irá nos ajudar nos problemas relacionados à árvore de Steiner.

Antes de continuarmos, repare que I e J são funções intervalo como vimos na Seção 2.2.1; logo ambas definem convexidades. Assim, um conjunto $W \subseteq V$ é chamado de *geodesicamente convexo* ou g-convexo se $I[W] = W$, enquanto é dito *conjunto geodésico* se $I[W] = V$. O *número geodésico* $gn(G)$ é mínima cardinalidade de um conjunto geodésico. Do mesmo modo, W é chamado de *monofonicamente convexo* ou m-convexo se $J[W] = W$, isto é, se o subgrafo induzido por W contém todos os caminhos monofônicos entre u e v, para qualquer par $u,v \in W$; e é dito *conjunto monofônico* se $I[W] = V$. O *número monofônico* $mn(G)$ é mínima cardinalidade de um conjunto monofônico de G. Segue um corolário resultante do teorema anterior.

Corolário 2.2.2.1: *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e não ponderado. Então $gn(G) \geq mn(G)$.*

Continuando, o menor conjunto g-convexo que contém W, denotado por $[W]\,g$, é chamado de *envoltória g-convexa* de W. Claramente podemos observar que $W \subseteq I[W] \subseteq [W]_g \subseteq V$. O conjunto de vértices W é dito ser um *conjunto g-envoltório* se $[W]_g = V$. O *número de envoltória geodésica $ghn\,(G)$* é a cardinalidade do menor conjunto g-envoltório de G. Da mesma forma, o menor conjunto m-convexo que contém W, denotado por $[W]_m$, é chamado *envoltória m-convexa* de W. Claramente podemos observar também que $W \subseteq J\,[W] \subseteq [W]_m \subseteq V$. O subconjunto de vértices W é dito ser um *conjunto m-envoltório* se $[W]_m = V$, e o *número de envoltória monofônica $mhn\,(G)$* é a cardinalidade do menor conjunto m-envoltório de G.

Teorema 2.2.2.2: *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e não ponderado. Então para $W \subseteq V$ vale a seguinte inclusão: $[W]_g \subseteq [W]_m$.*

Corolário 2.2.2.2: *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e não ponderado. Então $ghn\,(G) \geq mhn\,(G)$.*

O problema de encontrar o intervalo geodésico de um subconjunto de vértices W pode resolvido em tempo polinomial. Para isso, basta encontrar todas as distâncias entre os vértices do grafo, e usar uma subrotina de verificar se um vértice w pertence a um dado uv-caminho. No total, temos um tempo $O(n^3)$. Isto é feito da seguinte maneira: para cada par $u, v \in W$, $I\,[u, v] = \{w \in V : d\,(u, w) + d\,(w, v) = d\,(u, v)\}$

Para encontrar a distância entre todos os pares de vértices existe o algoritmo de Floyd (FLOYD, 1962), que também é executado em tempo $O\,(n^3)$. Para encontrar a envoltória g-convexa de W basta aplicar o processo acima iterativamente para cada intervalo encontrado até que o conjunto seja g-convexo, ou seja, se $I\,[W]$ não for g-conexo, então compute $I\,[I\,[W]]$; e se esse não for g-convexo novamente, então compute $I\,[I\,[I\,[W]]]$, e assim por diante. As iterações só terminam quando o conjunto corrente for g-convexo, isto é, quando $I^k[W] = I^{k-1}[W]$, onde o expoente indica o número de iterações executadas. O número de iterações é claramente $O(n)$.

Para o intervalo monofônico não podemos aplicar um processo semelhante, pois em (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2008) temos a demonstração de que o problema de saber se um vértice dado pertence ao intervalo monofônico de W é NP-difícil. Porém, no mesmo artigo, temos que o problema de encontrar a envoltória m-convexa de qualquer subconjunto de vértices W pode ser resolvido em tempo polinomial.

Além disso, tendo como entrada um grafo qualquer, são conhecidos por ser NP-difíceis os problemas de determinação do número geodésico (resp. número de envoltória geodésica) (ATICI, 2002) e do número monofônico (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2008). Já o número de envoltória monofônica pode ser calculado em tempo polinomial; esse resultado encontra-se na versão completa feita a partir do artigo (DOURADO; PROTTI; SZWARCFITER, 2008), que está submetida. Para alguns grafos especiais, já são conhecidos esses valores, como podemos observar na tabela 2.1 obtida de (PELAYO, 2008).

Tabela 2.1: Valores dos respectivos $ghn(G)$, $gn(G)$, $mhn(G)$ e $mn(G)$ para alguns grafos especiais

G	P_n	C_{2l}	C_{2l+1}	T_n	K_n	$K_{p,q}(2 \leq p \leq q)$	$W_{1,p}(p \geq 4)$	Q_k
$gn(G)$	2	2	3	#folhas	n	$\min\{4, p\}$	$\lceil \frac{p}{2} \rceil$	2
$mn(G)$	2	2	2	#folhas	n	$\min\{4, p\}$	2	2
$ghn(G)$	2	2	3	#folhas	n	2	$\lceil \frac{p}{2} \rceil$	2
$mhn(G)$	2	2	2	#folhas	n	2	2	2

Isto é tudo que precisamos para começar nosso objetivo. Essas definições são de suma importância para que tenhamos uma compreensão dos capítulos seguintes.

3 CONVEXIDADE DE STEINER

Após uma breve introdução a grafos e às convexidades geodésica e monofônica, iniciaremos um dos nossos principais objetivos desta dissertação, que é estudar a convexidade de Steiner em grafos.

Todo o grafo $G = (V, E)$ citado a partir de agora é sempre conexo e não ponderados, caso não esteja especificado de outra maneira no texto.

3.1 Árvore de Steiner e Intervalo de Steiner

O *problema da árvore de Steiner* é superficialmente similar ao *problema da árvore geradora mínima*. A diferença entre os dois é que, dado um subconjunto de vértices $W \subseteq V$, o problema da árvore geradora mínima tem como objetivo encontrar um subgrafo conexo contendo apenas os vértices de W e tal que a soma dos pesos das arestas deste subgrafo seja mínima; aqui, obrigatoriamente, $\langle W \rangle$ tem que ser conexo. Já o problema da árvore de Steiner, embora também tenha como objetivo obter um subgrafo conexo com soma mínima dos pesos das arestas, permite que possam ser adicionados vértices de G fora de W; então, para esse problema, $\langle W \rangle$ não precisa ser necessariamente conexo, pois os vértices adicionados criam novas conexões, quantas forem necessárias para "aglutinar" W. Esses vértices que promovem tal feito são chamados de *vértices de Steiner*, e os vértices de W são chamados de *vértices terminais*.

Na Figura 3.1.(I) nós temos um grafo ponderado e conexo com os vértices de W selecionados pintados de preto, e na Figura 3.1.(II) nós temos a árvore geradora mínima para os vértices de W com o somatório dos pesos igual a e na Figura 3.1.(III) temos a árvore de Steiner para esse mesmo conjunto com o somatório dos pesos igual a .

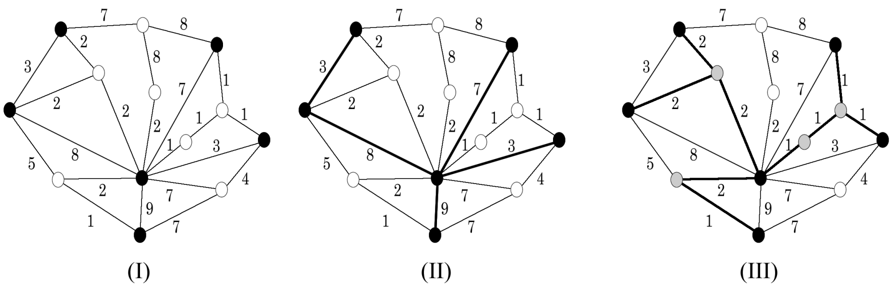

Figura 3.1: Árvore geradora mínima para o subgrafo induzido por W e a árvore de Steiner para W.

Seguiremos com as seguintes definições: dados um grafo $G = (V, E)$ conexo e não ponderado e um conjunto não vazio W de vértices contidos em V, um subgrafo conexo de G com número mínimo de arestas que contém W é obviamente uma árvore; tal árvore é chamada de *árvore de Steiner para* W (*Steiner* W*-tree*). A *distância de Steiner* $d_S(W)$ de W é a cardinalidade de arestas de uma árvore de Steiner para W (HERNANDO et al., 2005). O *intervalo de Steiner* $S(W)$ de W consiste de todos os vértices que pertencem a alguma árvore de Steiner para W. Se $S(W) = V$, então W é chamado de *conjunto de Steiner* para G. O *número de Steiner* de G, $st(G)$, é definido como a menor cardinalidade de um conjunto de Steiner de G (CHARTRAND; ZHANG, 2002). Para os mesmos grafos especiais citados na tabela da Seção 2.2.2, já são conhecidos seus respectivos números de Steiner. Veja a Tabela 3.1 (HERNANDO et al., 2005).

Tabela 3.1: Valor do $st(G)$ para alguns grafos especiais

G	P_n	C_{2l}	C_{2l+1}	T_n	K_n	$K_{p,q}(2 \leq p \leq q)$	$W_{1,p}(p \geq 4)$	Q_k
$st(G)$	2	2	3	#folhas	n	p	$p-2$	2

Na Figura 3.2.(I) temos um exemplo de um grafo e um subconjunto de seus vértices $W = \{v_1, v_6, v_{11}\}$, e na Figura 3.2.(II) o intervalo de Steiner para W. Então, $S(W) = \{v_1, v_6, v_{11}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}\}$. Note que esses vértices formam uma árvore, e não existe nenhum outro subgrafo conexo que contenha os vértices de W de tamanho menor. Se houvesse outro subgrafo com o mesmo tamanho dessa árvore, os vértices do mesmo fariam parte do intervalo de Steiner para W; como não existe, temos apenas uma árvore no intervalo de Steiner para W.

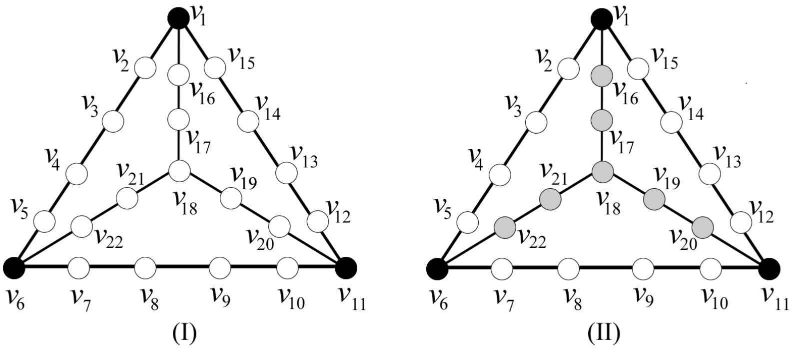

Figura 3.2: Intervalo de Steiner para $W = \{v_1, v_6, v_{11}\}$.

A versão de decisão do problema de encontrar uma árvore de Steiner para um subconjunto não vazio de vértices W é conhecido por ser um problema NP-completo para grafos em geral, tal assunto será tratado no próximo capítulo.

O intervalo de Steiner para todo W de cardinalidade 2 é o intervalo geodésico de W, pois o menor subgrafo conexo que contém um par de vértices é um caminho mínimo entre eles.

Proposição 3.1.1: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W \subseteq V$. Se $|W| = 2$ então $I[W] = S(W)$.*

Em (CHARTRAND; ZHANG, 2002), os autores haviam provado o teorema de que todo conjunto de Steiner era um conjunto geodésico. Mas esse resultado foi refutado por Pelayo em (PELAYO, 2004b) através de um contra-exemplo. Na Figura 3.3 temos um grafo, denotado por J_7, que contém um conjunto de Steiner que não é um conjunto geodésico. Por exemplo, $W_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ é um conjunto de Steiner que não é um conjunto geodésico. Porém, para $W_2 = \{v_1, v_4, v_7\}$, temos $S(W_2) = I(W_2) = V$.

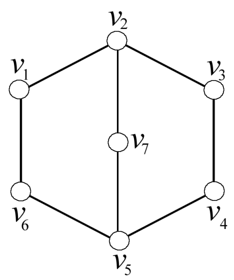

Figura 3.3: Conjunto de Steiner e conjunto geodésico.

Um corolário imediato que provinha do "teorema errado" era que $gn(G) \leq st(G)$. Mas na Figura 3.4 temos um contra-exemplo para tal afirmação. Pois para $W = \{v_1, v_4, v_7\}$ temos que $S(W) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$, então W é um conjunto de Steiner e não existe nenhum outro subconjunto de menor cardinalidade que seja um conjunto de Steiner, ou seja, $st(G) = 3$. O intervalo geodésico do mesmo subconjunto W é $I[W] = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$, ou seja, W não é um conjunto geodésico. Além do mais, não existe nenhum outro subconjunto de vértices com a mesma cardinalidade de W que seja um conjunto geodésico. Um conjunto geodésico para o contra-exemplo é $Y = W \cup \{v_{10}\}$, ou seja, $gn(G) = 4$. Então o corolário é falso, pois $4 = gn(G) > st(G) = 3$.

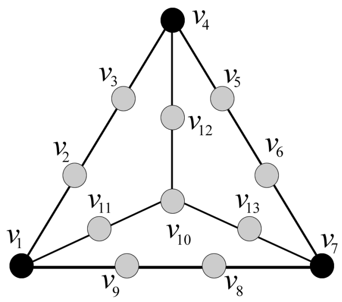

Figura 3.4: Contra-exemplo.

A proposição abaixo é um resultado que pode parecer óbvio para alguns; porém, para evitar qualquer tipo de dúvida, não deixaremos de citá-la.

Proposição 3.1.2: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W \subseteq V$ tal que $\langle W \rangle$ é conexo. Então, $S(W) = W$.*

Prova. Por contradição. Suponha que $S(W) \neq W$. Então, sem perda de generalidade, suponha $S(W) = W \cup V'$, onde V' é um subconjunto não vazio de vértices de V que não contém nenhum vértice de W. Com isso, temos que $W \cup V'$ é a união dos conjuntos de vértices que pertencem a alguma árvore de Steiner para W. Então, seja T uma árvore de Steiner para W que possui alguns vértices de V'. Por definição, T é um subgrafo conexo de tamanho mínimo que contém W, com mais do que $|W| - 1$ arestas. Mas existe uma árvore geradora T' de $\langle W \rangle$ com exatamente $|W| - 1$ arestas. Logo $|T| > |T'|$. Absurdo. □

Corolário 3.1.1: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W \subseteq V$, então $S(W) = S(S(W))$.*

Prova. Como todos os vértices de $S(W)$ pertencem a alguma árvore de Steiner para W, temos que $S(W)$ é um subgrafo induzido de G. Logo, através da Proposição 3.1.2, conclui-se a prova. □

Lema 3.1.1: (HERNANDO et al., 2005) *Seja* $G = (V, E)$ *um grafo conexo. Sejam também* $W \subseteq V$ *e* T *uma árvore de Steiner para* W*. Então* $V(T) \subseteq J[W]$*.*

Prova. Seja H o subgrafo de G induzido por $V(T)$. Para cada par $u, v \in W$, denotemos por $\rho_{u,v}$ um caminho induzido em H ligando u e v. Notemos que pelo fato de H ser um subgrafo induzido de G, $\rho_{u,v}$ também é um uv-caminho induzido em G. Em particular, temos que $V(\rho_{u,v}) \subseteq J[u, v]$. Seja $F = \bigcup_{u,v \in W} \rho_{u,v}$, isto é, F é a união de $\rho_{u,v}$ de todos os pares de vértices de W. Temos que $V(F) = \bigcup_{u,v \in W} V(\rho_{u,v}) \subseteq J[W]$.

Claramente, F induz um subgrafo conexo de H (e consequentemente de G) que contém todos os vértices de W. Denotemos por F' um árvore geradora de $\langle F \rangle$; então, F' é uma árvore em G que contém todos os vértices de W tal que $V(F') \subseteq V(T)$. Visto que T é uma árvore de Steiner para W, podemos observar que F' também é uma árvore de Steiner para W. Então $V(F') = V(T)$. Consequentemente, temos que $V(T) = V(F') = V(F) \subseteq J[W]$. $\square$

Teorema 3.1.1: (HERNANDO et al., 2005) *Todo conjunto de Steiner de um grafo conexo* $G = (V, E)$ *é um conjunto monofônico.*

Prova. Seja $W \subseteq V$ um conjunto de Steiner de G. Então $V(G)$ é o conjunto de todos os vértices que pertencem a alguma árvore de Steiner para W. Pelo Lema 3.1.1, para cada árvore T de Steiner para W em G, temos que $V(T) \subseteq J[W]$. Consequentemente, temos que $V(G) \subseteq J[W]$. Com isso mostramos que W é um conjunto monofônico em G. $\square$

O teorema acima nos mostra que para um subconjunto não vazio de vértices W de G vale a inclusão $S(W) \subseteq J[W]$. Em outras palavras, todos os vértices internos a alguma árvore de Steiner para W ou pertencem a W ou a algum caminho monofônico entre dois vértices de W. Como uma consequência imediata deste teorema, temos:

Corolário 3.1.2: (HERNANDO et al., 2005) *Para todo grafo conexo* $G = (V, E)$, $mhn(G) \leq mn(G) \leq st(G)$.

3.2 Conjunto Convexo de Steiner

Assim como vimos nas convexidades geodésica e monofônica as definições relacionadas a conjunto convexo e a envoltória convexa, formularemos uma estrutura de mesmo molde para a convexidade de Steiner. Em nossa primeira análise, descobrimos que o intervalo de Steiner para um subconjunto não vazio de vértices W não gera conjuntos que podem ser ditos convexos. Um exemplo está na Figura 3.5.

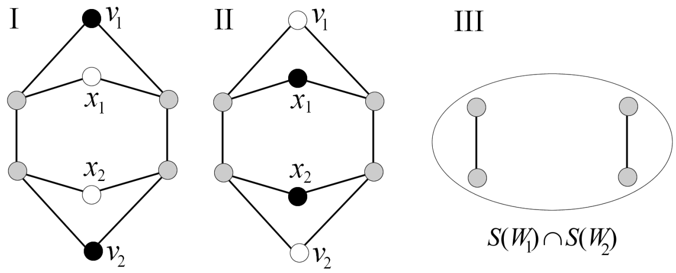

Figura 3.5: O intervalo de Steiner não define uma convexidade.

Suponha que o intervalo de Steiner para qualquer subconjunto de vértices $W \subseteq V$ constitui uma convexidade sobre V. Utilizaremos a Figura 3.5 para modelar um contra-exemplo. Na Figura 3.5.(I) temos o intervalo de Steiner para $W_1 = \{v_1, v_2\}$ e na Figura 3.5.(II) temos o intervalo de Steiner para $W_2 = \{x_1, x_2\}$. Em ambos, o intervalo de Steiner para seus respectivos subconjuntos gera conjuntos supostamente convexo, pois sabemos pelo Corolário 3.1.1 que $S(W_1) = S(S(W_1))$ e que $S(W_2) = S(S(W_2))$. Contudo, a interseção nesse caso não é um conjunto conexo

(Figura 3.5.(III)), então nem podemos dizer que este conjunto é uma árvore. Logo contradiz o axioma (a2) de convexidade definido na Seção 2.2.1.

Em (CÁCERES; A.MÁRQUEZ; PUERTAS, 2008) é representada a seguinte definição de convexidade envolvendo o intervalo de Steiner:

"*Seja G um grafo conexo. Um subconjunto $W \subseteq V$ é dito ser St-convexo (Steiner convexo) se, para qualquer $A \subseteq W$, todos os vértices em todas as árvores de Steiner de A pertencem a W*".

Nós trabalharemos com essa definição de convexidade de Steiner. Para melhor desenvolvimento deste trabalho, antes de continuarmos, baseado nas considerações que vimos agora, definiremos o *intervalo de Steiner forte* para um subconjunto de vértices W, denotado por $S[W]$, como um conjunto formado por todos os vértices v tal que $v \in S(A)$ para algum $A \subseteq W$.

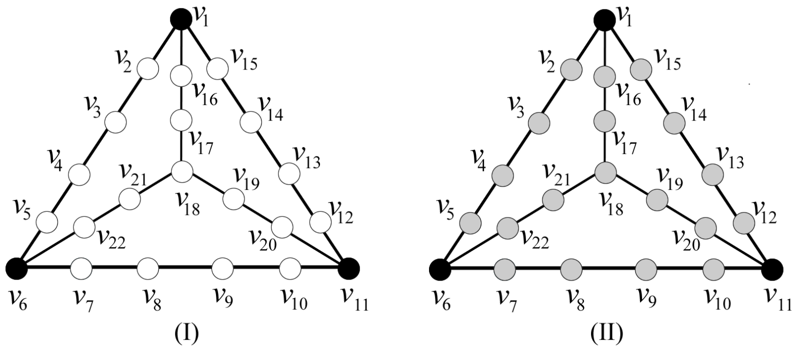

Figura 3.6: Intervalo de Steiner forte.

Na Figura 3.6.(I), temos o mesmo grafo já visto na Figura 3.2.(I), com os vértices de $W = \{v_1, v_6, v_{11}\}$, e na Figura 3.6.(II) temos o intervalo de Steiner forte para W. Os subconjuntos de W de cardinalidade um são considerados triviais, pois o menor subgrafo conexo que contém um vértice é formado por ele mesmo. Agora, para os subconjuntos de cardinalidade dois, temos $A_1 = \{v_1, v_6\}$, $A_2 = \{v_6, v_{11}\}$ e $A_3 =$

$\{v_1, v_{11}\}$; então, temos $S(A_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $S(A_2) = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ e $S(A_3) = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_1\}$. E por último, para A_4 de cardinalidade três, temos o mesmo intervalo da Figura 3.2.(II), pois $A_4 = W$. Logo o intervalo de Steiner forte para W é formado por todos os vértices mostrados na Figura 3.6.(II).

O intervalo de Steiner forte aplicado a um subconjunto de vértices nem sempre é um conjunto convexo. Podemos observar na Figura 3.7 que o intervalo de Steiner forte para o subconjunto de vértices $W = \{v_1, v_6, v_{11}\}$ é formado por todos os vértices do grafo, exceto o vértice v_{23}. Se eliminarmos o vértice v_{23}, podemos observar que o grafo é o mesmo da Figura 3.6. O conjunto $S[W]$ não é convexo, e para mostrar tal afirmação, basta verificarmos se o intervalo de Steiner forte para $S[W]$, $S[S[W]]$, resulta nos mesmos vértices de $S[W]$, pois se houver qualquer outro vértice que não esteja em $S[W]$, este não é convexo (o método é similar ao algoritmo para encontrar a envoltória g-convexa visto na Seção 2.2.2). Podemos notar que para o subconjunto $A = \{v_9, v_{19}\}$ contido em $S[W]$ resulta em $S(A) = \{v_9, v_{19}, v_{23}\}$. Mas v_{23} não pertence a $S[W]$, então v_{23} faz parte do menor subconjunto convexo que contém W. Logo $S[W]$ não é convexo.

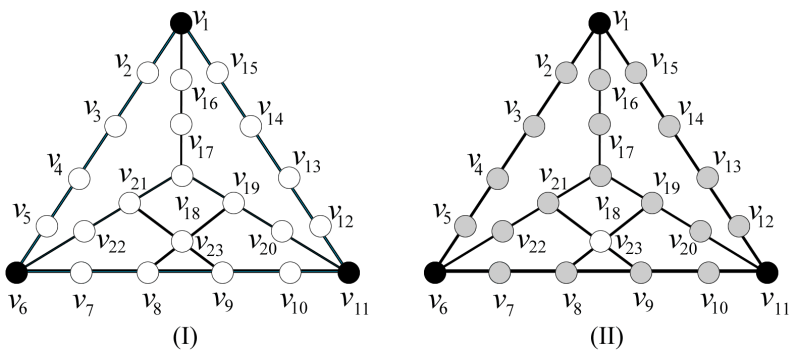

Figura 3.7: Intervalo de Steiner forte nem sempre é convexo.

Proposição 3.2.1: *Sejam $G = (V, E)$ grafo conexo e $W \subseteq V$. Então, $S(W) \subseteq S[W]$.*

Então, formalizando, um conjunto $W \subseteq V$ será chamado de *convexo de Steiner* ou St-convexo se $S[W] = W$, enquanto ele será dito *conjunto Steiner forte de G* se $S[W] = V$. O *número de Steiner forte*, denotado por $st_f n(G)$, é a cardinalidade mínima de um conjunto Steiner forte de G.

Corolário 3.2.1: *Para todo grafo conexo $G = (V, E)$, $st_f n(G) \leq st(G)$.*

Ao menor conjunto St-convexo que contém W denotaremos por $[W]_{St}$, e o chamaremos de *envoltória St-convexa* de W. Certamente, $W \subseteq S(W) \subseteq S[W] \subseteq [W]_{St} \subseteq V$. Um conjunto de vértices W será dito *conjunto St-envoltório* se $[W]_{St} = V$. O *número envoltório de Steiner*, que denotaremos por $st_f hn(G)$, é a cardinalidade do menor conjunto St-envoltório de G. Os valores referentes a $st_f n(G)$ e $st_f hn(G)$ para os grafos especiais citados em tabelas anteriores serão vistos após os teoremas que vêm a seguir.

Teorema 3.2.1: *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Então para $W \subseteq V$ vale a seguinte ordem de inclusões: $I[W] \subseteq S[W] \subseteq J[W]$.*

Prova. Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W \subseteq V$. Como $S[W]$ é formado por todos os vértices de todos os intervalos $S(A_i)$, $A_i \subseteq W$, temos que para cada subconjunto A_i de W com cardinalidade 2, $S(A_i)$ é formado por todos os vértices em caminhos mínimos entre dois vértices de A_i, ou seja, um intervalo geodésico entre os vértices. Então vale a inclusão $I[W] \subseteq S[W]$.

Continuando, pelo Lema 3.1.1 temos que $S(A_i) \subseteq J[A_i]$. Mas para todo i temos que $\bigcup J[A_i] \subseteq J[W]$. Então vale a inclusão $\bigcup S(A_i) \subseteq J[W]$ para todo i. Isto é, $S[W] \subseteq J[W]$.

Concluindo, $I[W] \subseteq S[W] \subseteq J[W]$ para qualquer $W \subseteq V$. $\square$

Na Figura 3.8 temos, para $W = \{v_1, v_6, v_{11}\}$, o conjunto $I[W]$ representado em (I), $S[W]$ representado em (II), e $J[W]$ representado em (III).

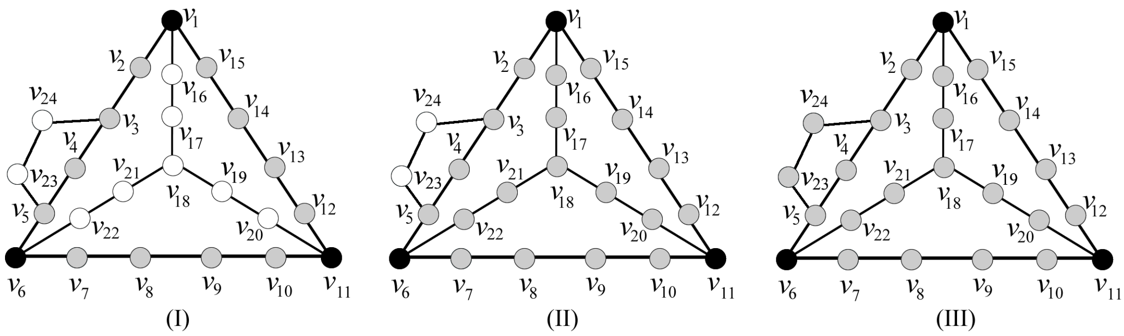

Figura 3.8: Inclusão dos intervalos geodésico, de Steiner forte e monofônico.

Uma idéia que poderíamos ter: será que $[W]_{St} \subseteq J[W]$? Na verdade não! Um contra-exemplo para essa questão está na Figura 3.9. Nela podemos observar que para $W = \{v_1, v_7\}$ em (I), temos que $J[W]$ em (II) contém todos os vértices exceto o vértice v_3. Mas o vértice v_3 pertence a $[W]_{St}$, pois para o subconjunto $A = \{v_4, v_6\}$ de $[W]_{St}$, temos que $S(A) = \{v_3, v_4, v_6\}$. Logo, para um W qualquer, não podemos garantir que $[W]_{St} \subseteq J[W]$.

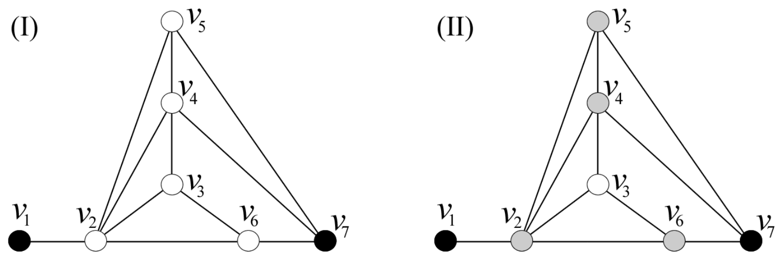

Figura 3.9: Intervalo de Steiner forte e o menor conjunto m-convexo para W.

Teorema 3.2.2: (CÁCERES; A.MÁRQUEZ; PUERTAS, 2008) *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Então para $W \subseteq V$ vale a seguinte ordem de inclusões: $[W]_g \subseteq [W]_{St} \subseteq [W]_m$.*

Além disso, temos que para qualquer $W \subseteq V$, vale $I[W] \subseteq S[W]$ e $[W]_g \subseteq [W]_{St}$.

Então, respectivamente, temos que $st_f n(G) \leq gn(G)$ e $st_f hn(G) \leq ghn(G)$. Por essa razão, na Tabela 3.2, os valores relacionados aos números do Steiner forte e geodésico são os mesmos da Tabela 2.1, pois não existem valores menores para $st_f n(G)$ e $st_f hn(G)$ nos casos citados.

Tabela 3.2: Valor de $st_f n(G)$ e $st_f hn(G)$ para alguns grafos especiais

G	P_n	C_{2l}	C_{2l+1}	T_n	K_n	$K_{p,q}(2 \leq p \leq q)$	$W_{1,p}(p \geq 4)$	Q_k
$st_f n(G)$	2	2	3	#folhas	n	$\min\{4, p\}$	$\lceil \frac{p}{2} \rceil$	2
$st_f hn(G)$	2	2	3	#folhas	n	2	$\lceil \frac{p}{2} \rceil$	2

Existem também estudos sobre a *convexidade local de Steiner*, mas esse assunto deixaremos apenas como citação em (HENNING; NIELSEN; OELLERMANN, 2009).

4 COMPLEXIDADE DO INTERVALO DE STEINER

Nesta seção iremos nos empenhar na complexidade dos problemas relacionados à árvore de Steiner, visto que a St-convexidade depende dessas árvores (para um dado subconjunto). Como já havíamos mencionado anteriormente, a versão de decisão do problema de encontrar uma árvore de Steiner para um subconjunto não vazio de vértices W é conhecido por ser um problema NP-completo para grafos em geral (HWANG; RICHARDS; WINTER, 1992), ou seja, não existe nenhum algoritmo polinomial que resolva este problema, a menos que P = NP. Em (FOMIN; GRANDONI; KRATSCH, 2008) temos um algoritmo que resolve o problema de encontrar uma árvore de Steiner em tempo $O(1.5949^n)$ com espaço polinomial e um outro algoritmo que resolve em tempo $O(1.3533^n)$ com espaço exponencial. No entanto, não encontramos nada referente ao intervalo de Steiner ou como isso afeta os problemas relacionados à St-convexidade. Nosso primeiro passo é apresentar a prova já conhecida da NP-completude do problema de decisão relacionado à árvore de Steiner. Em seguida, formularemos um problema de decisão para o intervalo de Steiner e outro para o intervalo de Steiner forte. E por último, definiremos um problema próximo ao problema do intervalo de Steiner seguido por sua prova de NP-completude. Nesta seção faremos o uso de siglas para mencionar alguns problemas existentes ou definidos por nós.

4.1 Complexidade do Problema da Árvore de Steiner

A prova será feita com base em um exercício desenvolvido por Alessandro Santuari em 2003 na Universidade de Trento.

Um problema de otimização é dito NP-difícil se a sua versão de decisão é um problema NP-difícil. O problema da árvore de Steiner em grafos (ST) é definido como um problema de decisão da seguinte maneira:

ST - ÁRVORE DE STEINER

Instância: Um grafo G conexo e não ponderado, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ e um número $k \in \mathbb{N}$.

Pergunta: Existe uma subárvore de G que inclui todos os vértices de W e que tenha no máximo k arestas?

Uma prova de NP-completude de um problema é feita pela redução polinomial de algum outro problema já sabido ser NP-completo.

A prova seguirá os seguintes passos informados por (GAREY; JOHNSON, 1990) para mostrar que um problema Π é NP-completo:

1. mostrar que Π está em NP;
2. selecionar um problema NP-completo Π';
3. construir uma transformação f de Π' para Π;
4. provar que f é uma transformação polinomial.

Teorema 4.1.1: ST *é NP-completo.*

Antes precisamos ter certeza de que o problema ST está em NP. Assuma que $\langle G, W, k\rangle$ é uma instância que admite a resposta *sim*. Nesse caso, dada uma hipotética solução positiva $T \subseteq G$, podemos verificar em tempo polinomial que:

- T é realmente um árvore: é um conjunto conexo e acíclico;
- a árvore T inclui todos os de W;
- o número de arestas usadas pela árvore não é maior do que k.

Podemos prosseguir para o próximo passo: selecionar um apropriado e conhecido problema NP-completo para a redução. O problema utilizado para tal é o problema da cobertura exata por 3-conjuntos (*Exact Cover by 3-Sets*, abreviado por X3C). Este problema bem conhecido é mencionado entre os problemas básicos NP-completos em (GAREY; JOHNSON, 1990) como uma generalização do problema do emparelhamento 3-dimensional (*3-Dimensional Matching*, abreviado por 3DM).

O problema X3C é definido como um problema de decisão da seguinte maneira:

X3C - COBERTURA EXATA POR 3-CONJUNTOS

Instâncias: um conjunto finito X com $|X| = 3q$ e uma coleção C de conjuntos de 3-elementos de X, $C = \{C_1, ..., C_n\}$, $C_i \subseteq X$, isto é, $|C_i| = 3$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Pergunta: A coleção C contém uma *cobertura exata* para X, isto é, uma subcoleção $C' \subseteq C$ tal que todo elemento de X ocorre em exatamente um membro de C'?

Note que se C' é uma subcoleção para a qual a instância $\langle X, C\rangle$ de X3C produz resposta *sim* então:

- os membros da solução C' formam uma partição do conjunto X;
- $|C'| = q$.

Agora estamos preparados para o próximo passo: construir uma função de transformação de X3C para ST, que será feita através de um conjunto de regras para construir uma instância de ST a partir de um instância genérica de X3C. Depois, iremos provar que tal transformação é executável em tempo polinomial.

Dada uma instância de X3C, definida pelo conjunto $X = \{x_1, ..., x_{3q}\}$ e uma coleção de conjuntos de 3-elementos $C = \{C_1, ..., C_n\}$, temos que construir uma instância de ST especificando o grafo G, o conjunto dos terminais W e o limite superior no tamanho k da árvore geradora.

- Defina o conjunto dos vértices como:

  $$V(G) = \{v\} \cup \{c_1, ..., c_n\} \cup \{x_1, ..., x_{3q}\},$$

  isto é, basicamente colocamos um novo vértice v, um vértice para cada membro de C e um vértice para cada elemento de X.

- Agora defina o conjunto das arestas:

  $$E(G) = \{vc_1, ..., vc_n\} \cup \left(\bigcup_{x_j \, \in \, C_i} \{c_i x_j\} \right),$$

  Há uma aresta de v para cada vértice c_i e uma aresta $c_i x_j$ se o elemento x_j aparece no conjunto C_i da instância de X3C.

- O conjunto dos terminais $W \subseteq V$ é:

$$W = \{v, x_1, ..., x_{3q}\}.$$

- Defina k igual a $4q$.

É fácil observar que a redução de X3C para ST pode ser feita em tempo polinomial. O grafo construído segundo estas regras está na Figura 4.1. A posição estratégica do novo vértice v faz com que tenhamos certeza de que o grafo gerado é conexo.

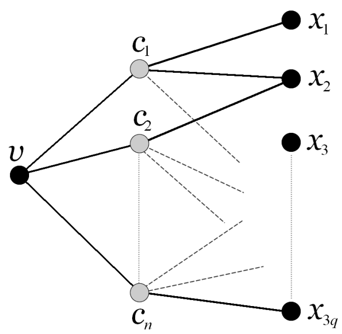

Figura 4.1: O grafo construído pelo processo de transformação.

Agora, iremos provar que existe uma árvore de Steiner com não mais do que k arestas se e somente se existe uma cobertura exata para a instância do problema X3C.

Lema 4.1.1: *$\langle X, C\rangle$ pertence a X3C se e somente se $\langle G, W, k\rangle$ pertence a ST.*

Prova. Dividiremos a prova em duas partes, uma para cada implicação.

- X3C $\Rightarrow$ ST

  Suponha que exista uma 3-cobertura exata C' para o problema X3C. Claramente, C' usa exatamente q subconjuntos. Sem perda de generalidade, suponha que eles sejam $C_1, ..., C_q$. Logo, a árvore de Steiner consistindo das arestas:

- $vc_1, ..., vc_q$

- c_ix_j, se $x_j \in C_i$, para $1 \leq i \leq q$

é uma árvore de Steiner resolvendo o problema ST com $q + 3q = 4q = k$ arestas. Assim, se existe uma 3-cobertura exata, então há uma árvore de Steiner usando não mais do que k arestas.

- X3C $\Leftarrow$ ST

  Suponha agora que exista uma árvore de Steiner T com no máximo $4q$ arestas. Uma vez que T é uma árvore de Steiner e tem no máximo $4q+1$ vértices, temos que, de acordo com a definição de árvore de Steiner, T deve conter todos os vértices terminais $x_1, ..., x_{3q}, v$. Então, T contém no máximo q vértices do conjunto C. Mas o grau dos vértices em C (considerando somente as arestas incidentes a $x_1, ..., x_{3q}$) é 3, isto é, é impossível atingir todos os $3q$ vértices de $x_1, ..., x_{3q}$ se a árvore contiver menos do que $4q + 1$ vértices. Podemos concluir que T tem exatamente $4q$ arestas e contém q vértices de C. Sem perda de generalidade, suponha que esses vértices sejam $c_1, ..., c_q$; então, a solução C' do problema X3C é dada pelo conjunto:

$$C' = \{C_1, ..., C_q\}$$

Isso conclui a prova. $\square$

4.2 Complexidade de Problemas Relacionados à Árvore de Steiner

Nossa pretensão nesta seção é investigar a complexidade de certos problemas relacionados à arvore de Steiner. Como vimos na seção anterior, o problema ST é NP-completo. A seguir enunciamos os problemas que vamos considerar nesta seção.

IS - INTERVALO DE STEINER

Instâncias: Um grafo G conexo e não ponderado, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ e um vértice $x \in V(G) \backslash W$.

Pergunta: Existe em G alguma árvore de Steiner para W que contenha x?

ISF - INTERVALO DE STEINER FORTE

Instâncias: Um grafo G conexo e não ponderado, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ e um vértice $x \in V(G) \backslash W$.

Pergunta: Existe em G alguma árvore de Steiner para um subconjunto qualquer A de W tal que esta árvore contenha x?

ISO - INTERVALO DE STEINER "OTIMIZADO"

Instâncias: Um grafo G conexo e não ponderado, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$, um vértice $x \in V(G) \backslash W$ e um número $k \in \mathbb{N}$.

Pergunta: Existe em G alguma árvore que contenha $W \cup \{x\}$ com k arestas tal que não exista nenhuma outra árvore que contenha W com $k - 1$ arestas?

Observe que se tivermos um algoritmo que sabe decidir o problema IS, então temos um algoritmo que computa o intervalo de Steiner para W: basta executar o algoritmo para IS para cada $x \in V \backslash W$. O mesmo se pode dizer para o problema ISF.

Observe também que se a resposta de ISO é *sim* para uma dada instância onde para

$k \neq 0$ é mínimo, então x pertence a uma árvore de Steiner para W. O problema ISO é uma tentativa de formular uma versão de otimização (incluindo um inteiro k minimizante) para o problema IS. Assim, IS parece ser tão difícil quanto ISO, ou até mais difícil. Aparentemente o problema ISO seria mais fácil se pensássemos na pergunta apenas como: Existe alguma árvore com no máximo k aresta que contenha $W \cup \{x\}$. Bem, mesmo que sempre pudéssemos responder essa pergunta para qualquer entrada, nada nos garantiria a pertinência de x em alguma árvore de Steiner para W, pois poderíamos ter casos de árvore que contém W com menos do que k arestas.

Um fato interessante que vale a pena mencionar é que não sabemos até o momento dizer se IS, ISF e ISO pertencem a NP (ou a co-NP). Por exemplo, concentremo-nos no problema IS. Um certificado para a resposta *sim* nesse caso seria uma árvore de Steiner T para W contendo x. Mas para assegurar que T é uma árvore de Steiner, deveríamos incluir no certificado algo que nos mostrasse que nenhuma outra árvore em G com menos arestas do que T pode conter W. Não vemos até o momento como incluir esta informação no certificado utilizando espaço polinomial. Um certificado para a resposta *não* apresenta problema semelhante, pois deve mostrar que nenhuma árvore de Steiner para W pode conter x. No entanto, podemos provar que o problema ISO é NP-difícil, através de uma redução de X3C, similar à redução para o problema ST. Os demais problemas (IS e ISF) permancem sem uma demonstração de NP-dificuldade.

Teorema 4.2.2: *O problema ISO é NP-difícil.*

Considere uma entrada para o problema X3C qualquer $\langle X, C\rangle$ para X3C, construiremos o grafo G^* da seguinte maneira:

- defina o conjunto dos vértices como:

$$V(G^*) = \{x, v\} \cup \{c_1, ..., c_n\} \cup \{x_1, ..., x_{3q}\}$$

Nós colocamos os novos vértices x e v, um vértice para cada membro de C e um vértice para cada elemento de X.

- agora defina o conjunto das arestas:

$$E(G^*) = \{vx\} \cup \{xc_1, ..., xc_n\} \cup \left(\bigcup_{x_j \in C_i} \{c_i x_j\} \right)$$

O vértice v é adjacente ao vértice x. Há também uma aresta de x para cada vértice c_i e uma aresta $c_i x_j$ se o elemento x_j aparece entre o conjunto C_i da instância de X3C.

- o conjunto dos terminais $W^* \subseteq V(G^*)$ é:

$$W^* = \{v, x_1, ..., x_{3q}\}.$$

- Selecione o vértice x em $V(G^*)$.

- Seja k^* igual a $4q + 1$.

Vejamos o resultado do grafo G^* na Figura 4.2.

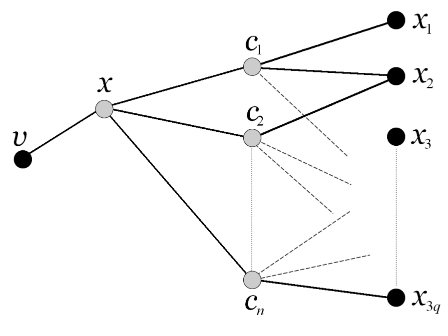

Figura 4.2: Grafo gerado pela transformação para ISO.

Prova. Dividiremos a prova em duas partes, uma para cada implicação.

- X3C $\Rightarrow$ ISO

  Seja C' uma solução para o problema X3C. Então C' usa exatamente q subconjuntos. Sem perda de generalidade, suponha que sejam $C_1, ..., C_q$. Então a árvore T consistindo das arestas:

  - vx

  - $xc_1, ..., xc_q$

  - $c_i x_j$, se $x_j \in C_i$, para $1 \leq i \leq q$

  possui a cardinalidade de arestas igual a $1 + q + 3q = 4q + 1 = k^*$.

  Contudo, temos que T possui exatamente k^* arestas. É obvio que não conseguimos nenhuma outra árvore que contenha W^* menor do que T. Portanto, se existe uma cobertura exata por 3 conjuntos, então também existe a árvore T, onde $x \in T$ é não folha, com não mais do que k^* arestas e não existe outra árvore com menos do que k^* arestas.

- X3C $\Leftarrow$ ISO

  Suponha que existe uma árvore T com não mais do que k^* arestas e não existe árvore contendo W^* com menos do que k^* arestas. A árvore T possui $4q + 2$ vértices. Assim, T deve incluir todos os vértices v e $x_1, ..., x_{3q}$, somando $3q + 1$ vértices. Mas o vértice x é não terminal, logo ele deve pertencer a T. Então devemos escolher q vértices para não ultrapassarmos o limite de $4q+2$ vértices, mas esses q vértices só podem ser dos vértices dentre $(c_1, ..., c_n)$ adjacentes a $3q$ vértices x_j, para $1 \leq j \leq 3q$, para que a árvore seja conexa em G^*. Portanto, isso implica numa cobertura exata por 3-conjuntos.

Isso conclui a prova. $\square$

5 INTERVALO DE STEINER EM GRAFOS DE DISTÂNCIA-HEREDITÁRIA

Como vimos na seção anterior, o problema de encontrar o intervalo de Steiner para um subconjunto não vazio de vértices W, apesar de termos deixado o problema em aberto, por enquanto, temos fortes razões de acreditar em sua dificuldade. Mas para alguns grafos especiais esse problema passa a ser mais fácil, no sentido de uma implementação em tempo polinomial. Então nesta seção veremos o quão fácil se torna o problema do intervalo de Steiner quando o grafo em questão é um grafo de distância-hereditária e como isso afeta a St-convexidade. A escolha por este tipo de grafo não foi aleatória, pois tínhamos como base de (HOWORKA, 1993) a seguinte informação: um grafo de distância-hereditária é um grafo do qual todo caminho monofônico é geodésico. Logo, nosso objetivo nesta seção é analisar a St-convexidade para grafos de distância-hereditária.

5.1 Intervalo de Steiner em Grafos de Distância-hereditária

Antes de nos aprofundarmos no assunto, vejamos algumas definições e alguns resultados relacionados a grafos de distância-hereditária de (OELLERMANN; PUERTAS, 2007).

Um grafo conexo G é *Steiner distância-hereditária* se para todo subconjunto W de vértices de G e todo subgrafo induzido conexo H de G que contém W, temos que $d_H(W) = d_G(W)$, onde $d_H(W)$ é a distância de Steiner para W em H e $d_G(W)$ é a distância de Steiner para W em G.

Teorema 5.1.1: (DAY; OELLERMANN; SWART, 1994) *Se G é um grafo de distância-hereditária, então G é Steiner distância-hereditátia.*

Teorema 5.1.2: (HOWORKA, 1993) *Um grafo G é de distância-hereditária se, e somente se, todo ciclo de comprimento menor que cinco contém um par de cordas interceptadas.*

Teorema 5.1.3: (BANDELT; MULDER, 1986)(HAMMER; MAFFRAY, 1990). *Um grafo G de ordem n é de distância-hereditária se, e somente se, existe uma sequência de subgrafos G_1, G_2,..., G_{n-1}, tal que $G_1 \approx K_2$ e para cada $2 \leq i \leq n-1$, G é obtido pela adição de novo vértice pendente, ou gêmeo de algum vértice v' de G_{i-1}.*

Proposição 5.1.1: (OELLERMANN; PUERTAS, 2007) *Se G é um grafo de distância-hereditária e W um subconjunto de vértices de G, então $S(W) \subseteq I[W]$.*

Prova. Seja $v \in S(W)$. Se $v \in W$, então $v \in I[W]$. Então, suponha que $v \in S(W) - W$. Então existe uma árvore de Steiner T para W que contém o vértice v. Então seja $H = \langle V(T) \rangle$. Então $V(H) - 1 = d_G(W)$. A remoção do vértice v de H torna H desconexo (não conexo), caso contrário, $H - v$ seria um subgrafo conexo de G que contém W e visto que G é Steiner distância-hereditária, $H - v$ contêm uma árvore de Steiner para W tal que $d_G(W) = d_H(W) \leq |V(H)| - 2$, do qual é impossível.

Sejam x e y vértices de W que pertencem a distintas componentes C_1 e C_2 de $H - v$, respectivamente. Seja P um caminho obtido pelo caminho mínimo $x \to v$ em $\langle V(C_1) \cup \{v\} \rangle$ seguido pelo caminho mínimo $v \to y$ em $\langle V(C_2) \cup \{v\} \rangle$. Então P não possui corda. Visto que G é de distância-hereditária, o subgrafo induzido pelos os vértices de P deve conter um cominho mínimo $x \to y$. Por esta razão P é necessariamente um caminho mínimo $x \to y$. Então todo vértice de $V(G) - S$ pertence a um caminho mínimo entre algum par de vértices em S. O resultado agora procede. $\square$

Agora vejamos o algoritmo que, dado um grafo G de distância-hereditária e W um subconjunto de vértices de G com cardinalidade maior ou igual a 2, encontra o intervalo de Steiner para W:

ALGORITMO (*Intervalo de Steiner em Grafos de Distância-hereditária*)

(1) *Seja $H = \langle I\,[W] \rangle$. Visto que H é conexo e induzido, H é um subgrafo de G com distância-hereditária.*

(2) *Rotule todos os vértices de H que pertencem a W com T e os outros vértices com F. (Nós associamos com cada vértice v de H um conjunto $s(v)$ de vértices do grafo original H. Esses conjuntos serão usados para construir o intervalo de Steiner para W.) Para cada $v \in V(H)$ inicialize $s(v) \leftarrow \{v\}$ e $S(W) \leftarrow \emptyset$.*

(3) *Se $|W| = 2$, vá para o passo 7. ($|W|$ é a cardinalidade de W.)*

(4) *Enquanto $|W| \geq 3$ e H conter um vértice pendente u, prossiga: Se u estiver rotulado com T, faça $S(W) \leftarrow S(W) \cup s(u)$, rotule o vizinho u' de u com rotule T, $H \leftarrow H - u$ e $W \leftarrow (W - u) \cup \{u'\}$; caso contrário, se u estiver rotulado* *com F faça $H \leftarrow H - u$. Agora se $|W| \geq 3$ (mas H não contém algum vértice pendente), vá para o passo 5; caso contrário, vá para o passo 7 (desde que $|W| = 2$).*

(5) *Enquanto $|W| \geq 3$ e H conter algum par de vértices u, v de gêmeos, dos quais ambos estão rotulados por T (ou F, respectivamente), escolha um vértice através de um critério pré-definido e o remova (seja v o vértice escolhido) de H e W, e modifique $s(u)$, isto é, $H \leftarrow H - v$, $W \leftarrow W - \{v\}$ e faça $s(u) \leftarrow s(u) \cup s(v)$. Agora se $|W| \geq 3$ (mas não persistem qualquer gêmeos de mesma rotulação), prossiga para o passo 6; caso contrário, vá para o passo 7 (desde que $|W| = 2$).*

(6) *Enquanto $|W| \geq 3$ e H conter par de vértices u, v de gêmeos, do qual u esteja rotulado por T (F) e v esteja rotulado por F (T), então remova o vértice rotulado por F, isto é, defina $H \leftarrow H - v$ e retorne ao passo 4.*

(7) *Se $|W| = 2$, digo $S = \{x, y\}$, então faça $S(W) \leftarrow S(W) \cup s(u)_{u \,\in\, I_H[x,y]}$. Retorne $S(W)$ e pare.*

A corretude desse algoritmo se encontra na citação de onde ele foi tirado (OELLERMANN; PUERTAS, 2007). Mas iremos ilustrar sua execução para o grafo G da Figura 5.1, o mesmo que fora exibido na Seção 2.1 quando definimos grafos de distância-hereditária. Nós iremos encontrar o intervalo de Steiner para $W = \{v_2, v_6, v_9\}$ seguindo os passos do algoritmo.

No passo 1 do algoritmo o conjunto $H = \langle I\,[W] \rangle$, ou seja, $H = \left\langle \bigcup_{a,b \,\in\, W} I\,[a,b] \right\rangle = \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$.

No passo 2 temos a rotulação dos vértices de H e as inicializações dos conjuntos $s(v_1) \leftarrow \{v_1\}$, $s(v_2) \leftarrow \{v_2\}$, $s(v_5) \leftarrow \{v_5\}$, $s(v_6) \leftarrow \{v_6\}$, $s(v_7) \leftarrow \{v_7\}$, $s(v_8) \leftarrow$

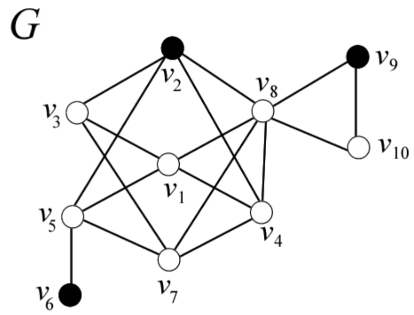

Figura 5.1: Grafo de distância-hereditária.

$\{v_8\}$ e $s(v_9) \leftarrow \{v_9\}$, e também o conjunto $S(W) \leftarrow \emptyset$. Esse último conjunto é o conjunto solução do intervalo de Steiner para W retornado pelo algoritmo.

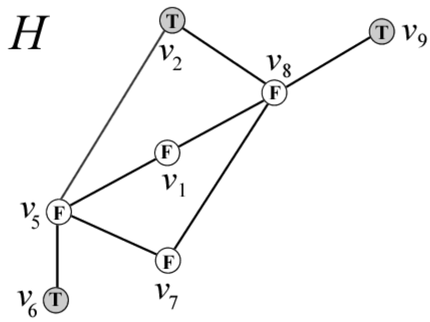

Figura 5.2: O subconjunto H rotulado.

Como o nosso W não é satisfeito para o passo 3, pois sua cardinalidade é 3, iremos ao passo 4.

No passo 4, temos um laço enquanto que só termina quando é insatisfeito, ou seja, quando W passa ter cardinalidade 2 ou quando é efetuada toda remoção dos vértices pendentes em H. Como podemos observar na Figura 5.2, os vértices pendentes em H são v_6 e v_9. Então, como primeira iteração do passo 4, pegaremos v_6. Como v_6 está rotulado por T, faremos $S(W) \leftarrow S(W) \cup s(v_6)$ e seu vizinho v_5 passará a ser rotulado por T e irá pertencer a W. Em seguida removeremos v_6 de H e de W. Mesmo acontece com v_9, pois também está rotulado por T. Contudo, na Figura 5.3, temos como fica o subconjunto H após essas iterações.

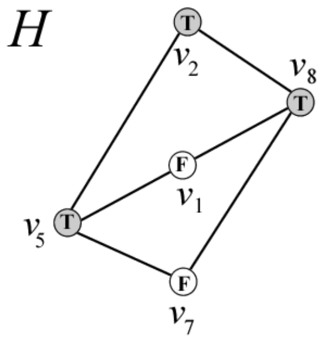

Figura 5.3: O subconjunto H com os vértices pendentes removidos.

No passo 5, temos outro laço enquanto que só termina quando W passa ter cardinalidade 2 ou quando os vértices que são gêmeos não possuem a mesma rotulação. Como podemos observar na Figura 5.3, os vértices v_1 e v_7 são gêmeos com a mesma rotulação, assim como os vértices v_5 e v_8 também são gêmeos com a mesma rotulação. Então, primeiramente, pegaremos os vértices v_1 e v_7. Como critério de remoção, pegaremos o vértice de maior índice, v_7, e o removeremos de H (não faremos a remoção em S, pois o vértice v_7 não pertence a S) e $s(v_1) \leftarrow s(v_1) \cup s(v_7)$. Na Figura 5.4 temos como fica H após essa iteração.

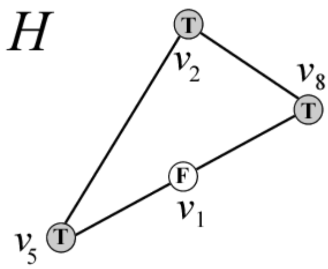

Figura 5.4: O subconjunto H com a remoção do vértice v_7, gêmeo de v_1.

Continuando o passo 5, ainda temos os vértices v_5 e v_8 gêmeos, repare que após a remoção do vértice v_7 ambos não deixaram de ser gêmeos. Então, seguindo o mesmo critério de remoção anterior, pegaremos o vértice de maior índice, v_8, e o removeremos de H e S, $s(v_5) \leftarrow s(v_5) \cup s(v_8)$. Na Figura 5.5 temos como fica H após essa iteração.

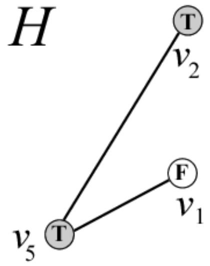

Figura 5.5: O subconjunto H com a remoção do vértice v_8, gêmeo de v_5.

Como fim do passo 5, seguiremos ao passo 7 sem passar no passo 6, pois W passa a ter cardinalidade 2.

No passo 7, como $W = \{v_2, v_5\}$, então $S(W) \leftarrow S(W) \cup s(v_2) \cup s(v_5)$, ou seja, $S(W) = s(v_2) \cup s(v_5) \cup s(v_6) \cup s(v_9)$, pois $s(v_6)$ e $s(v_9)$ já pertenciam ao $S(W)$. Os conjuntos $s(v_5)$ e $s(v_6)$ estão em $S(W)$ porque v_5 e v_6 pertencem a intervalo geodésico entre eles. Contudo, o intervalo de Steiner para $W = \{v_2, v_6, v_9\}$ são os vértices pertencentes a todos os conjuntos $s(v_i)$, $1 \leq i \leq 9$, que estão em $S(W)$, ou seja, são os vértices $S(W) = \{v_2, v_5, v_6, v_8, v_9\}$ como nos mostra a Figura 5.6.

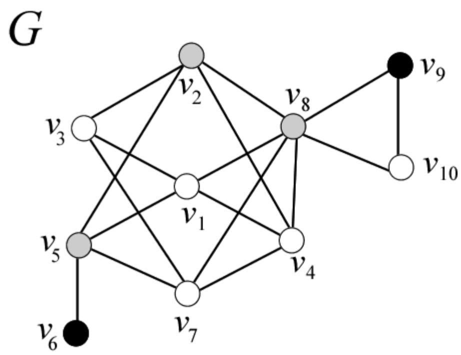

Figura 5.6: A intervalo de Steiner para W no grafo G.

Na Seção 3.1, havíamos visto que nem todo conjunto de Steiner é um conjunto geodésico para um grafo genérico. Porém, esse conceito muda quando o grafo é de distância-hereditária. Uma razão para isto é teorema a seguir:

Teorema 5.1.4: (OELLERMANN; PUERTAS, 2007) *Se G é um grafo de distância-hereditária, então $gn(G) \leq st(G)$.*

Uma pergunta, será que é possível encontrar o intervalo de Steiner forte para um subconjunto de vértices W de um grafo G de distância-hereditária em tempo polinomial? A resposta é sim! Uma razão para isto é o Teorema 5.1.5.

Teorema 5.1.5: *Sejam G um grafo conexo de distância-hereditária e W um subconjunto de vértices de G, então $I[W] = S[W]$.*

Prova. Seja G um grafo conexo de distância-hereditária e W um subconjunto de vértices de G. Para G conexo, nós temos pelo Teorema 3.2.1 que vale a seguinte inclusão: $I[W] \subseteq S[W] \subseteq J[W]$. Mas G é de distância-hereditária, então todo caminho monofônico em G é geodésico, ou seja, $I[W] = J[W]$ para todo W de G. Contudo, pela ordem de inclusão, nós temos que $I[W] = S[W] = J[W]$ para todo W de G. Logo $I[W] = S[W]$. $\square$

Corolário 5.1.1: *Se G é um grafo de distância-hereditária, então $gn(G) = st_f n(G)$.*

Pelo fato de $I[W] = S[W]$, nós podemos encontrar o $S[W]$ em tempo polinomial. Para isso, basta executar o algoritmo citado na Seção 2.2.2 que encontrar $I[W]$ em tempo polinomial para qualquer W de G.

5.2 Resultados

Logo, vimos que assim como podemos encontrar o intervalo de Steiner para qualquer subconjunto não vazio de vértices em grafos de distância-hereditária em tempo polinomial, nós podemos encontrar o intervalo de Steiner forte também em grandeza polinomial. Então, pelo Teorema 5.1.5, podemos afirmar que o tempo para encontrar $S[W]$, onde W é um subconjunto não vazio de um grafo de distância-hereditária em tempo $O(n^3)$.

Teorema 5.2.1: *Dado um grafo de distância-hereditária $G = (V, E)$ conexo e um subconjunto de vértices W de G. Então podemos encontrar $S[W]$ em tempo $O(n^3)$.*

Então num processo recursivo na cardinalidade de vértices, podemos concluir o teorema a seguir:

Teorema 5.2.2: *Dado um grafo de distância-hereditária $G = (V, E)$ conexo e um subconjunto de vértices W de G. Então podemos encontrar $[W]_{St}$ em tempo polinomial.*

Então para verificar se um subconjunto é St-convexo também pode ser feito em tempo polinomial, na verdade no mesmo tempo gasto para encontrar o intervalo de Steiner forte, então temos que:

Corolário 5.2.1: *Dado um grafo de distância-hereditária $G = (V, E)$ conexo e um subconjunto de vértices W de G. Então podemos verificar se W é um conjunto St-convexo tempo $O(n^3)$.*

E por último, temos como consequência do Teorema 5.1.5:

Corolário 5.2.2: *Se G é um grafo de distância-hereditária, então $ghn(G) = st_f hn(G)$.*

Com isso, concluímos nossas análises em grafos de distância-hereditária.

6 INTERVALO DE STEINER PARA SUBCONJUNTOS DE CARDINALIDADE FIXA

Uma outra abordagem que foi considerada por nós é analisar a complexidade do problema do intervalo de Steiner quando a quantidade de terminais é limitada por um inteiro $k \geq 2$ fixo. Então nosso objetivo é verificar se é possível encontrar de forma eficiente a envoltória St-convexa para um subconjunto W de cardinalidade fixa. Em nossa insaciada busca por respostas, encontramos os seguintes resultados já desenvolvidos em algumas referências relacionadas. No clássico artigo (DREYFUS; WAGNER, 1972), os autores apresentaram um algoritmo que encontra uma árvore de Steiner para um conjunto W de cardinalidade fixa k em tempo $O(3^k n + 2^k n^2 + nm)$; esse custo computacional foi melhorado em (MöLLE; RICHTER; ROSSMANITH., 2006) para $(2 + \delta)^k poly(n)$, para um arbitrário $\delta > 0$; e, logo em seguida, para $O(2^k n^2 + nm)$ em (BJöRKLUND et al., 2007). Todos os algoritmos citados utilizam a técnica de programação dinâmica, armazenando informações auxiliares para todo subconjunto de W, e usam um espaço exponencial. Em (FOMIN; GRANDONI; KRATSCH, 2008) temos um algoritmo que resolve o problema da árvore de Steiner no tempo $O(5.96^k n^{O(\log k)})$ e com espaço polinomial.

No entanto, não encontramos nada referente ao problema do intervalo de Steiner para um subconjunto de vértices W de cardinalidade limitada por k. Com esta motivação, optamos por esse problema.

6.1 Definições e Resultados

Inicialmente, para um grafo $G = (V, E)$ conexo e não ponderado, e W_k um subconjunto não vazio de vértices de G com $k \geq 2$ terminais (k fixo *a priori*), sejam T uma árvore de Steiner para W_k e S o conjunto dos vértices de Steiner em T (claro que $S \subseteq V \backslash W_k$). Definamos:

Definição 6.1.1: Seja S_1 o subconjunto de vértices de S tal que para todo $x \in S_1$, $d(x) > 2$ em T. Os vértices pertencentes a S_1 chamaremos de *roteadores*.

Definição 6.1.2: Seja S_2 o subconjunto de vértices de S tal que para todo $x \in S_2$, $d(x) = 2$ em T. Os vértices pertencentes a S_2 chamaremos de *elos*.

Definição 6.1.3: Um caminho em T que conecta um vértice $u \in W_k \cup S_1$ a outro vértice $v \in W_k \cup S_1$, cujos vértices internos são todos elos, será chamado de *cadeia*. Denotaremos por C_M o conjunto das cadeias de T.

Proposição 6.1.1: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W_k \subseteq V$. Se T é uma árvore de Steiner para W_k, então todas as cadeias de T são caminhos mínimos.*

Prova. Suponha por absurdo que exista uma cadeia C entre os vértices u e v pertencentes a $W_k \cup S_1$ em T tal que C não seja um caminho mínimo entre os extremos. Se removermos C de T, teremos pelo menos dois subgrafos induzidos conexos T_1 e T_2, que são duas subárvores de T. Se associarmos u e v com P, onde P é constituído pelos vértices internos de um caminho mínimo entre u e v, obteremos o subgrafo conexo $H = T_1 \cup T_2 \cup P$. Claramente $|H| < |T|$, pois $|P| < |C|$. Impossível, pois T é uma árvore de Steiner para W_k, em outras palavras, o menor subgrafo conexo que contém W_k. $\square$

Definamos $I(x, y) = I[u, v] \setminus \{u, v\}$ para $u, v \in V$.

Teorema 6.1.1: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W_k \subseteq V$. Para pares de vértices u, v e x, y, extremos de cadeias não idênticas em T, para T uma árvore de Steiner para W_k, vale que $I\,(u, v) \cap I\,(x, y) = \emptyset$.*

Prova. Suponha que existam dois pares de vértices u, v e x, y, extremos de cadeias não idênticas em T, tal que $I\,(u, v) \cap I\,(x, y) \neq \emptyset$. Então construiremos H, um subgrafo conexo quase idêntico a T, exceto pelas cadeias entre os pares u, v e x, y, que serão substituídas por dois caminhos mínimos com a interseção não vazia de vértices existentes nos respectivos intervalos $I\,(u, v)$ e $I\,(x, y)$. Então podemos afirmar que existe pelo menos um vértice z, pertencente a esses caminhos mínimos, que não possui grau inferior a 3 em H (Figura 6.1).

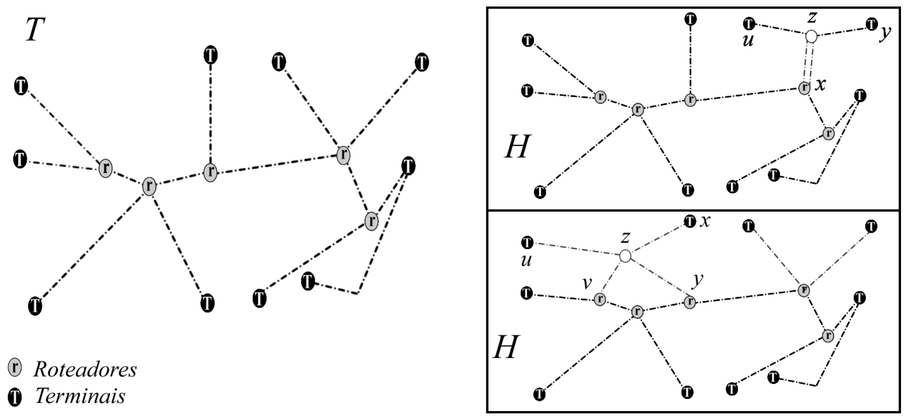

Figura 6.1: Os possíveis subgrafo H com a existência de pelo menos um vértice z em $I\,(u, v) \cap I\,(x, y)$, para entre pares de vértices u, v e x, y, extremos de cadeias não idênticas em T.

Claro que ambos os caminhos mínimos que contêm z não são cadeias de T simultaneamente, pois senão z pertenceria a S_1, já que $d(z) \geq 3$ em H. Assim, podemos concluir que $|V(H)| \leq |V(T)| - 1$. Isso implica que $|H| < |T|$. Mas $w_k \subset H$. Logo, um absurdo! $\square$

Proposição 6.1.2: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W_k \subseteq V$. Se T é uma árvore de Steiner para W_k sendo S_1 o conjunto dos roteadores e C_M o conjunto das cadeias, então para T temos que $|C_M| = |W_k| + |S_1| - 1$.*

Prova. Por indução em $|C_M|$.

Para $|C_M| = 1$, esse único caminho só pode ser entre dois vértices de W_k. Logo $k = 2$, e vale $|C_M| = (|W_2| + |S_1|) - 1 = (2 + 0) - 1 = 1$

Para $|C_M| = 2$, esses caminhos só podem ser entre três vértices de W_k, pois nenhum vértice de S_1 tem grau 2. Logo $k = 3$, e vale $|C_M| = (|W_3| + |S_1|) - 1 = (3 + 0) - 1 = 2$

Para $|C_M| = 3$, esses caminhos só podem ser entre quatro vértices de W_k ou entre três de W_k e um de S_1. Logo, ou vale $k = 4$ e $|C_M| = (|W_4| + |S_1|) - 1 = (4 + 0) - 1 = 3$, ou vale $k = 3$ e $|C_M| = (|W_3| + |S_1|) - 1 = (3 + 1) - 1 = 3$.

Suponha que a proposição vale para um número de cadeias inferior a $|C_M|$. Temos que a remoção de uma cadeia C de C_M, com vértices extremos u e v pertencentes a $W_k \cup S_1$, desconecta a árvore T. Assim, passamos a ter pelo menos duas subárvores isoladas entre si, que chamaremos de T_i e T_j. Então, sem perda de generalidade, sejam $u \in T_i$ e $v \in T_j$. Sejam também os subconjuntos disjuntos de vértices W_i e S_1^i contidos em T_i, e os subconjuntos de vértices W_j e S_1^j contidos em T_j, onde $W_i \cup W_j = W_k$ e $S_1^i \cup S_1^j = S_1$. Se $u \notin W_i$ (ou $v \notin W_j$) façamos $W_i \leftarrow W_i \cup \{u\}$ e $S_1^i \leftarrow S_1^i - u$ (resp. $W_j \leftarrow W_j \cup \{v\}$ e $S_1^j \leftarrow S_1^j - u$). Com isso, temos que T_i e T_j são árvores de Steiner, respectivamente, para W_i e W_j; caso contrário, conseguiríamos outras subárvores de menor cardinalidade do que T_i ou T_j, e T não seria um árvore de Steiner para W_k, já que $T = T_i \cup T_j \cup C$. Então para essas duas subárvores T_i e T_j vale a proposição, ou seja:

$|C_M^i| = (|W_i| + |S_1^i|) - 1$ e $\left|C_M^j\right| = (|W_j| + \left|S_1^j\right|) - 1.$

Com a inserção dos vértices de C entre os vértices u e v temos:

$|C_M| = |C_M^i| + \left|C_M^j\right| + 1 = [(|W_i| + |S_1^i|) - 1] + \left[(|W_j| + \left|S_1^j\right|) - 1\right] + 1 = (|W_i| + |W_i|) + (|S_1^i| + \left|S_1^j\right|) - 1.$

Se refizermos as trocas que foram feitas dos vértices u e v com seus respectivos terminais e roteadores das subárvores T_i e T_j, temos que $|C_M| = (|W_k| + |S_1|) - 1$. Logo, provamos a proposição. □

Proposição 6.1.3: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W_k \subseteq V$. Sejam também T uma árvore de Steiner para W_k e S_1 o conjunto dos roteadores de T. Então $|S_1| \leq |W_k| - 2$.*

Prova. Façamos a análise do somatório dos graus dos vértices de W_k e S_1. Para que tenhamos o número máximo de vértices roteadores é preciso que todos os vértices de S_1 tenham grau 3, e os vértices terminais devem todos ser folhas. Então, o somatório dos graus tem que ser igual a $|W_k| + 3\,|S_1|$. Por outro lado, o somatório dos graus equivale a duas vezes o número de cadeias existentes em T, pois cada cadeia contribui com uma unidade em grau para cada vértice extremo contido em $W_k \cup S_1$. Então $2\,|C_M| = |W_k| + 3\,|S_1|$. Pela Proposição 6.1.2 temos que $|C_M| = (|W_k| + |S_1|) - 1$, então $2\,[(|W_k| + |S_1|) - 1] = |W_k| + 3\,|S_1|$. Resolvendo temos que $|S_1| = |W_k| - 2$. Logo vale a proposição. □

Antes de continuarmos, definiremos mais algumas ferramentas que serão importantes mais à frente. Então, para $G = (V, E)$ e subconjuntos $X \subseteq V$ e $Y \subseteq V \backslash X$, definamos:

Definição 6.1.4: Denotaremos por $K_{|Q|}$ um grafo completo constituído dos vértices de $Q = X \cup Y$ com arestas ponderadas pelas distâncias dos pares de vértices de Q no grafo original G.

Definição 6.1.5: A *família de templates* $\mathcal{T}(X, Y) = \{\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_p\}$ é a família formada por todas as árvores geradoras mínimas de $K_{|Q|}$ (chamadas aqui de *templates*) tal que cada *template* $\mathcal{T}_i$, $1 \leq i \leq p$, possui os vértices de Y com grau superior a 2.

Definição 6.1.6: O *peso de um template* $\mathcal{T}$ é definido por $peso(\mathcal{T}) = \sum_{uv \in \mathcal{T}} d_G(u, v)$, isto é, o $peso(\mathcal{T})$ é soma das distâncias $d(u, v)$ em G para cada aresta em $\mathcal{T}$.

Definição 6.1.7: Dizemos que uma *árvore* T *é gerada por um template* $\mathcal{T}$ quando T é formada substituindo-se cada aresta uv de $\mathcal{T}$ por um caminho mínimo entre u e v em G.

Definição 6.1.8: Os *templates mínimos para* X são todos os templates mínimos que contém os vértices de $X \cup Y'$, para todo $Y' \subseteq V \backslash X$.

É fato que, para qualquer árvore de Steiner T para W_k com roteadores em S_1, temos que a árvore T pode ser gerada por algum template da família $\mathcal{T}(W_k, S_1)$, pois as cadeias de T são formadas por vértices pertencentes a caminhos mínimos entre dois vértices de $W_k \cup S_1$ (Proposição 6.1.1), e os vértices de S_1 possuem grau superior a 2 por definição. E mais, o mesmo template que gera a árvore T é um dos templates mínimos para W_k, pois nenhum template mínimo para W_k é capaz de gerar árvores menores do que T, pois T é definida como o menor subgrafo conexo de G que contém

W_k. Com essas informações, vejamos o resultado a seguir:

Lema 6.1.1: *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W_k \subseteq V$. Se T é uma árvore gerada por $\mathcal{T}$, um template mínimo para W_k, então peso($\mathcal{T}$) $= d_S(W_k)$.*

Prova. Suponha que $peso(\mathcal{T}) \neq d_S(W_k)$. Isso implica que $peso(\mathcal{T}) > d_S(W_k)$, pois T é o menor subgrafo conexo de G que contém W_k. Como já mencionamos, uma árvore de Steiner pode ser gerada por algum template da família $\mathcal{T}(W_k, S_1)$, onde S_1 é o conjunto de vértices roteadores da árvore. Consequentemente, o template que gera T não é um template mínimo para W_k, pois existe um template em $\mathcal{T}(W_k, S_1)$. Logo, temos um absurdo! □

Como consequência temos o seguinte resultado:

Teorema 6.1.2: *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Uma árvore T é de Steiner para $W_k \subseteq V$ se, e somente se, T é uma das árvores geradas por algum template mínimo para W_k.*

Corolário 6.1.1: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W_k \subseteq V$. Se $\mathcal{T}$ é um template mínimo para W_k e $uv, xy \in E(\mathcal{T})$ são arestas distintas, então a interseção entre os conjuntos de vértices internos de quaisquer dois caminhos mínimos em G entre u, v e x, y é vazia.*

Assim, as mesmas nomenclaturas usadas para árvores de Steiner em relação a um subconjunto não vazio de vértices W_k podem ser usadas para as árvores geradas pelos templates mínimos para o mesmo conjunto W_k.

Corolário 6.1.2: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $W_k \subseteq V$. O intervalo de Steiner de W_k, $S(W_k)$, além dos vértices em W_k, consiste dos vértices roteadores e* *dos elos de todas as árvores geradas por todos os templates mínimos para* W_k.

O número de árvores de Steiner pode ser exponencial para um subconjunto de vértices de cardinalidade fixa. Um argumento para esse fato é que entre dois vértices pode haver um número exponencial de caminhos mínimos, então entre os terminais e roteadores pode haver um número exponencial de cadeias. No entanto, veremos que o número de templates não é exponencial quando o subconjunto utilizado para defini-los possui cardinalidade fixa. Podemos assim gerar todas as famílias de templates e, logo após, selecionar apenas os templates mínimos. A partir das arestas desses templates mínimos poderemos encontrar os elos em tempo polinomial. Dessa forma, seremos capazes de encontrar o intervalo de Steiner para qualquer subconjunto de cardinalidade fixa em tempo polinomial.

Para efeito ilustrativo, mostraremos na Figura 6.2 como será feito o processo para encontrar um template. Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e não ponderado, $W_5 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ o conjunto de vértices terminais, e $Y = \{s_1, s_2\}$ contido em $V \backslash W_k$. Ao lado, temos o grafo $K_{|Q|}$ (Definição 6.1.4).

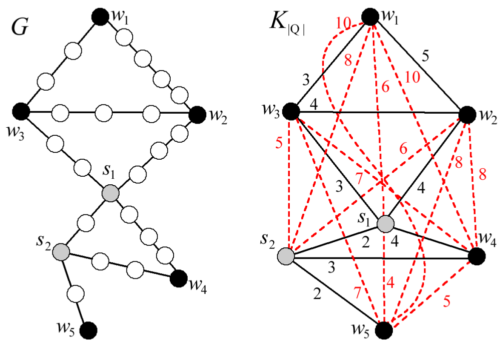

Figura 6.2: Geração do grafo $K_{|Q|}$ a partir de G.

Nesse novo grafo com arestas ponderadas $K_{|Q|}$, temos na Figura 6.3 suas duas únicas árvores geradoras mínimas T_1^* e T_2^*. Essas árvores geradoras mínimas são templates para W_5 em G.

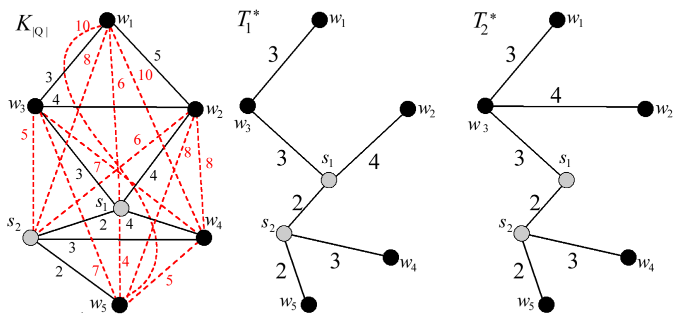

Figura 6.3: Árvores geradoras mínimas de $K_{|Q|}$.

Temos então os templates:

1. $\mathcal{T}_1 = \{(w_1, w_3), (w_2, s_1), (w_3, s_1), (s_1, s_2), (w_4, s_2), (w_5, s_2)\}$ de T_1^*.
2. $\mathcal{T}_2 = \{(w_1, w_3), (w_2, w_3), (w_3, s_1), (s_1, s_2), (w_4, s_2), (w_5, s_2)\}$ de T_2^*.

Os templates $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ não são da mesma família, assim como definimos (Definição 6.1.5), pois as árvores geradas por $\mathcal{T}_1$ possuem como roteadores s_1 e s_2, e as árvores geradas por $\mathcal{T}_2$ possuem apenas o roteador s_2.

Na Figura 6.4 temos as árvores T_1 e T_2 geradas pelos respectivos templates $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, que são árvores homeomorfas a T_1^* e T_2^* (os pesos das arestas são associados a caminhos formados por vértices de G entre seus extremos). Não existem mais árvores que possam ser geradas pelos dois templates, pois para cada aresta de ambos os templates existe apenas um caminho mínimo em G. Além disso, podemos notar que não conseguimos nenhuma árvore de menor tamanho que contenha W_5. Então podemos afirmar que essas árvores são de Steiner para W_5 e, consequentemente, os templates $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são mínimos.

Assim, se quisermos encontrar todos os templates mínimos para um subconjunto de vértices W_k, poderíamos fazer uma busca de todos os conjuntos de roteadores

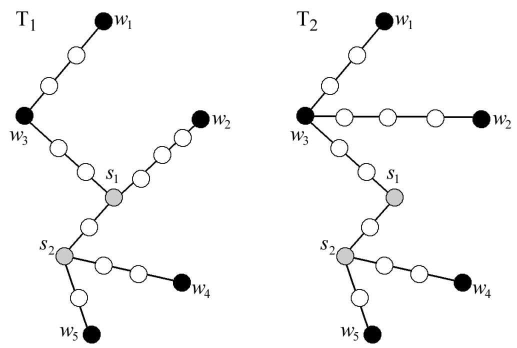

Figura 6.4: Árvores de Steiner para W_5 de G.

possíveis em $V \backslash W_k$, e selecionar apenas os que formam templates mínimos. Para isso deveríamos fazer todas as combinações possíveis para o conjunto S_1 em $V \backslash W_k$. Como vimos na Proposição 6.1.3, temos que o número de roteadores é limitado ($|S_1| \leq |W_k| - 2$). Portanto, temos um limite para os termos da combinação quando construímos os templates; porém, não temos um controle nos elementos a serem combinados, pois esses estão em V. Concluindo, temos que a cardinalidade de vértices a serem combinados é igual a $|S_1| = |V| - |W_k|$. Isto é, para $|V| = n$ e $|W_k| = k$, temos que o total de combinações é dado por:

$$\frac{(n-k)!}{0!(n-k)!} + ... + \frac{(n-k)!}{(k-2)!(n-2k+2)!} < O(n^{k-2}). \tag{6.1}$$

Logo, através do número de combinações, podemos dizer que o número de templates é polinomial ($O(n^{k-2})$) pois k é uma constante. Isto é, podemos enumerar todos os templates em tempo polinomial.

Mas, para cada conjunto de possíveis roteadores, devemos verificar se os templates associados são mínimos. Para isso seguiremos o mesmo processo exibido anteriormente, construindo um grafo completo ponderado pelas distâncias entre vértices de G, e em seguida encontrar as árvores geradoras mínimas para o mesmo. Por (EPP-

STEIN, 1995) sabemos que um algoritmo para listar todas as árvores geradoras mínimas possui um custo $O(m + n \log n + q)$, onde q denota o número de árvores geradoras mínimas. Mas esses tempos relacionados às árvores geradoras mínimas citados são constantes para $K_{|Q|}$, pois seu número de vértices é limitado por $2k - 2$. Já temos assim ferramentas suficientes para descrevermos um algoritmo que gera todas as árvores de Steiner contendo W_k. É o que faremos na próxima seção.

6.2 Algoritmo para o Intervalo de Steiner

Nesta seção descreveremos um algoritmo que encontra o intervalo de Steiner de um subconjunto W_k de cardinalidade fixa em tempo polinomial, a partir dos resultados adquiridos na seção anterior. Na verdade, a computação de tal intervalo será subproduto de um algoritmo que enumera todos os templates para W_k. Outro subproduto de tal algoritmo será a enumeração com atraso polinomial de todas as árvores de Steiner contendo W_k.

Como já vimos, podemos encontrar todas as famílias de templates de árvores de Steiner para um subconjunto de vértices de cardinalidade fixa em tempo polinomial. A partir desses templates, podemos selecionar os mínimos. Em seguida, desses templates poderemos encontrar todos os vértices pertencentes a alguma árvore de Steiner para o mesmo subconjunto em tempo polinomial, através da pesquisa de caminhos mínimos. Seguindo essas idéias, construímos o algoritmo a seguir:

6.2.1 Algoritmo

INTERVALO_DE_STEINER(G, W_k)

1. calcule $d_G(u,v)$ para todo par $u, v \in V(G)$
2. inicialize $S_{W_k} \leftarrow \emptyset$ (S_{W_k} será a saída do algoritmo)
3. inicialize $d_S \leftarrow \infty$
4. para cada $Y \subseteq V(G) \backslash W_k$ tal que $|Y| \leq |W_k| - 2$ faça
    - 4.1. construa $K_{|W_k \cup Y|}$
    - 4.2. encontre uma árvore geradora mínima $\mathcal{T}$ de $K_{|W_k \cup Y|}$
    - 4.3. se $peso(\mathcal{T}) < d_S$ então
        - 4.3.1. atualize $d_S \leftarrow peso(\mathcal{T})$
        - 4.3.2. $d_S \leftarrow \emptyset$
    - 4.4. se $peso(\mathcal{T}) = d_S$ então
        - 4.4.1. para cada árvore geradora mínima $\mathcal{T}'$ de $K_{|W_k \cup Y|}$ faça
            - 4.4.1.1. $S_{W_k} \leftarrow S_{W_k} \cup$ (CADEIA$(\mathcal{T}')$)
5. retorne S_{W_k}

A função CADEIA$(\mathcal{T}')$ é utilizada para encontrar os vértices de G que pertencem a caminhos mínimos entre pares de vértices adjacentes em $\mathcal{T}'$. Como a árvore $\mathcal{T}'$ representa um template mínimo, esses vértices são elos.

CADEIA($\mathcal{T}'$)

1. inicialize $S \leftarrow V(\mathcal{T}')$
2. para cada aresta uv de $\mathcal{T}'$ faça
    2.1. para cada $z \notin S$ faça
        2.1.1. se $d(u, v) = d(u, z) + d(z, v)$
            2.1.1.1. $S \leftarrow S \cup \{z\}$
3. retorne S

6.2.2 Corretude

Teorema 6.2.2.1: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo não ponderado e $W_k \subseteq V$ de cardinalidade fixa k. Então o algoritmo acima retorna todos os vértices pertencentes a alguma árvore de Steiner para W_k.*

Prova. Queremos provar que $S_{W_k} = S(W_k)$. Então façamos as seguintes análises:

(i) $S_{W_k} \subseteq S(W_k)$

Suponha que exista um vértice $x \in S_{W_k}$ tal que $x \notin S(W_k)$. Então existe algum template $\mathcal{T}$ construído pelo algoritmo que nos retorna o conjunto contendo x. Então o template $\mathcal{T}$ é considerado mínimo para W_k pelo algoritmo, pois o mesmo respeita d_S, que é o valor mínimo dentre os pesos de todos os templates. Mas pelo Lema 6.1.1, temos que $d_S = d_S(W_k)$. Temos assim um template que pode gerar uma árvore que contém x, que possui o mesmo número de arestas de uma árvore de Steiner para W_k, mas que não é uma árvore de Steiner para W_k. Logo, temos um absurdo! Podemos dessa forma concluir que $S_{W_k} \subseteq S(W_k)$.

(ii) $S_{W_k} \supseteq S(W_k)$

Seja T uma árvore de Steiner para W_k com conjunto dos roteadores S_1 e com conjunto de elos S_2. Façamos as seguintes análises:

(ii_1) Seja $x \in W_k$. Então, $x \in S(W_k)$. Mas os vértices de W_k também estão em qualquer template gerado pelo algoritmo. Nesse caso, temos que $x \in S_{W_k}$.

(ii_2) Seja $x \in S_1$. Em algum momento da execução do algoritmo, o conjunto S_1 será escolhido, pois $S_1 \subseteq V \backslash W_k$. Após a construção de $K_{|W_k \cup Y|}$, onde $Y = S_1$, serão determinadas as arestas de $\mathcal{T}$. Esse template é mínimo pelo Teorema 6.1.2. Logo $x \in S_{W_k}$.

(ii_3) Seja $x \in S_2$. Por definição, o vértice x pertence a algum caminho mínimo (cadeia) correspondente a alguma aresta de $\mathcal{T}$. Então, sem perda de generalidade, sejam u e v os extremos desta tal cadeia. Por ii_1 e ii_2, temos que os vértices u e v fazem parte de S_{W_k}. Logo $x \in S_{W_k}$.

Portanto, $S_{W_k} \supseteq S(W_k)$.

Concluímos que o algoritmo retorna todos os vértices pertencentes a alguma árvore de Steiner para W_k. $\square$

6.2.3 Análise de Complexidade

Nesta seção faremos a análise de complexidade do algoritmo que encontra o intervalo de Steiner para um subconjunto W_k de cardinalidade fixa k. Na linha 1 do algoritmo INTERVALO_DE_STEINER, podemos encontrar a distância entre todos os pares de vértices de G em tempo (n^3), como já mencionado, pelo algoritmo em (FLOYD, 1962). Na linha 4, o tempo de execução é $O(n^{k-2})$. A linha 4.1 e a linha 4.2 são executadas em tempo constante, pois o número de vértices de $K_{|W_k \cup Y|}$ é limitado por uma constante. O cálculo do peso na linha 4.3 também é realizado em tempo constante. Temos por (EPPSTEIN, 1995) que podemos listar todas as árvores ge-radoras mínimas em tempo $O(m + n \log n + q)$, onde q denota o número de árvores geradoras mínimas; então, o tempo de execução da linha 4.4.1 é constante, já que, para templates, $n \leq 2k - 2$. A função CADEIA pode ser claramente executada em tempo $O(n)$. Concluindo, a complexidade de execução do algoritmo INTERVALO_DE_STEINER é $O(n^{k-2})$ vezes $O(n)$, isto é, $O(n^{k-1})$.

6.3 Algoritmo para o Intervalo de Steiner Forte

O Intervalo de Steiner forte de um subconjunto não vazio de vértices W_k contido num grafo conexo e não ponderado G consiste dos vértices de todas as árvores de Steiner para todo subconjunto de W_k. Então construiremos este algoritmo baseando-nos no algoritmo anterior, aplicado a cada subconjunto de W_k.

6.3.1 Algoritmo

INTERVALO_DE_STEINER_FORTE(G, W_k)

1. inicialize $SF_{W_k} \leftarrow \emptyset$

2. para cada $A \subseteq W_k$ tal que $|A| \geq 2$ faça

    2.1. $SF_{W_k} \leftarrow SF_{W_k} \cup$ INTERVALO_DE_STEINER(G, A)

5. retorna SF_{W_k}

6.3.2 Corretude

Teorema 6.3.2.1 *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e não ponderado e $W_k \subseteq V$ de cardinalidade fixa k. Então o algoritmo acima retorna todos os vértices que pertencem a alguma árvore de Steiner para algum subconjunto de W_k.*

Prova. Esse resultado é imediato do Teorema 6.2.2.1, pois o algoritmo segue a definição do intervalo de Steiner forte. □

6.3.3 Análise de Complexidade

Agora iremos fazer a análise do algoritmo INTERVALO_DE_STEINER_FORTE. Na linha 2 temos que o número de subconjuntos de W_k é $O(2^k)$. Como já vimos, o algoritmo INTERVALO_DE_STEINER encontra um árvore de Steiner para W_k em tempo $O(n^{k-1})$. Então o algoritmo INTERVALO_DE_STEINER_FORTE é executado em tempo $O(2^k)$ vezes $O(n^{k-1})$, isto é, $O(n^{k-1})$.

6.4 Resultados

Vimos pelos algoritmos acima que podemos encontrar os dois tipos de intervalos de Steiner em tempo polinomial, para subconjunto de cardinalidade fixa $k \geq 2$. É fato que a eficiência dos algoritmos depende de k; logo, para $k << n$, mais eficientes eles são. Um outro fato importante: não podemos encontrar a envoltória St-convexa para um subconjunto de cardinalidade fixa $k \geq 2$ em tempo polinomial utilizando nosso algoritmo, pois em um processo iterativo ocorre a alteração do tamanho do subconjunto sobre o qual estamos trabalhando; desta maneira, o mesmo deixa de ter cardinalidade fixa. Porém, podemos verificar se um conjunto é St-convexo em tempo polinomial se limitarmos o tamanho do conjunto por um inteiro fixo, como veremos no teorema a seguir.

Teorema 6.4.1: *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e não ponderado e $W_k \subseteq V$ de cardinalidade fixa k. Então podemos verificar em tempo polinomial se W_k é um conjunto St-convexo.*

Prova. Basta aplicar o algoritmo que encontra o intervalo de Steiner forte, e depois verificar se $SF_{W_k} = W_k$ em tempo $O(n)$. Logo, podemos verificar em tempo polinomial se W_k é um conjunto St-convexo. $\square$

Além disso, esse capítulo nos trouxe bons frutos. Havíamos comentado que o número de árvores de Steiner para um conjunto W_k é exponencial, independentemente se o conjunto W_k possuir cardinalidade fixa ou não. Porém, descobrimos que podemos enumerar todas as árvores de Steiner para um subconjunto de cardinalidade fixa com atraso polinomial. A partir disso, desenvolvemos um algoritmo que imprime todas as árvores de Steiner com atraso $O(n)$ por árvore de um mesmo template, e o submetemos para o *V Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium* (LAGOS 2009). O nome do artigo é "*Generating all the Steiner trees and computing Steiner intervals for a fixed number of terminals*". O artigo foi aceito no congresso.

O algoritmo funciona da seguinte forma: dado um template $\mathcal{T}$ mínimo para W_k, o algoritmo define uma sequência das arestas de $\mathcal{T}$, e ordena os vértices dos caminhos mínimos entre os extremos de cada aresta de $\mathcal{T}$ por níveis, onde cada nível i contém os vértices que distam i de um extremo escolhido.

Como exemplo, tomaremos $\mathcal{T} = \{(v_4, v_7), (v_2, v_7), (v_6, v_7), (v_1, v_6), (v_1, v_8), (v_1, v_5), (v_1, v_3)\}$ como podemos ver na Figura 6.5.

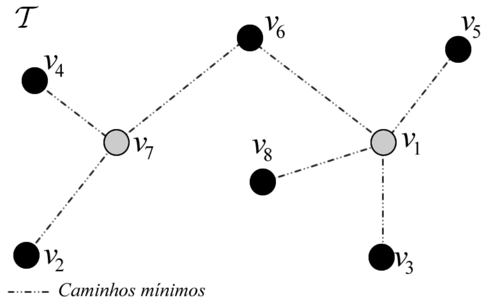

Figura 6.5: Exemplo de template $\mathcal{T}$.

Sabemos que uma árvore com a estrutura de $\mathcal{T}$ acrescida de vértices internos de caminho mínimos entre extremos de arestas de $\mathcal{T}$ gera uma árvore de Steiner, já que $\mathcal{T}$ é um template mínimo (Teorema 6.1.2). Então, para cada aresta vv' de $\mathcal{T}$, façamos uma divisão por níveis dos vértices internos de caminhos mínimos ligando v a v'. Vejamos na Figura 6.6 o exemplo para o par v_1, v_3, onde os níveis são dados pela distância dos vértices a v_1.

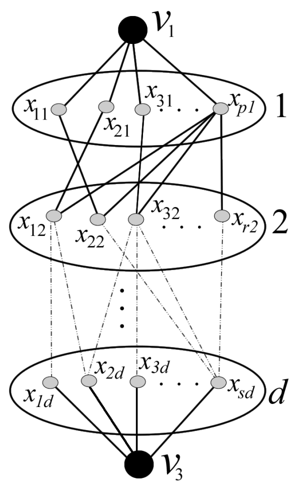

Figura 6.6: Conjunto dos vértices de $I(v_1, v_3)$ separados por níveis.

Suponha que T seja a primeira árvore gerada pela computação de caminhos mínimos entre cada par v, v' tal que vv' é uma aresta de $\mathcal{T}$. Como o par v_1, v_3 é o último na ordenação do template (veja a definição de $\mathcal{T}$ acima), iremos considerá-lo como o último de uma sequência escolhida pelo algoritmo. Seja também $C = \{x_{11}, x_{22}, ..., x_{sd}\}$ uma cadeia de T entre os vértices v_1 e v_3. Após a impressão de T, devemos imprimir uma nova árvore T'. Para isto, basta fazer uma escolha dos vértices na ordem decrescente dos níveis. Por exemplo, na cadeia C temos que o último vértice é x_{sd}, então devemos tomar o vértice $x_{j,d-1}$ que antecede x_{sd} na cadeia e verificar se $x_{j,d-1}$ é adjacente a mais algum vértice do nível d diferente de x_{sd}. Em caso afirmativo, devemos construir um caminho de $x_{j,d-1}$ a v_3. Caso contrário, devemos descer para o nível $d-2$ e fazer a mesma verificação de adjacência. Esse é um processo de *backtracking*. Em resumo, a partir da impressão dos vértices de um nível qualquer i, devemos sempre buscar no nível $i-1$ um vértice x e verificar se há adjacência de x com algum vértice do nível i, tal que ele não constitua um caminho já gerado.

Após a impressão de todos os caminhos entre o par $v_1, v_3 \in \mathcal{T}$, devemos passar para a próxima cadeia de C' de T. Evidentemente, qualquer troca de vértices que gere algum caminho mínimo no comprimento de C' é uma cadeia; então, fixando essa nova cadeia, voltaremos ao par v_1, v_3 e iremos refazer toda a geração de caminhos mínimos entre eles e imprimi-los. Esse processo é feito para cada par que gera uma cadeia em $\mathcal{T}$. É óbvio que isso é um processo exponencial.

A complexidade desse processo, entre a impressão de uma árvore e outra de um mesmo template, como havíamos dito, é $O(n)$ para árvores do mesmo template. Esse argumento é dado pelo motivo da complexidade ser *amortizada*, pois os vértices que são a entrada do problema estão distribuídos em conjuntos de vértices internos de caminhos mínimos que são mutuamente disjuntos (Corolário 6.1.1). Porém, para construir a primeira árvore de um template o tempo gasto é de $O(n^k)$, pois não armazenamos os vértices roteadores. Dessa forma, sendo T a primeira árvore gerada por um template $\mathcal{T}$ gerada em tempo $O(n^k)$, o tempo gasto para gerar a próxima árvore T' do mesmo template é $O(n)$. O mesmo ocorre na impressão de uma árvore, pois podemos imprimir até n vértices.

Podemos gerar a primeira árvore em tempo constante e deixar o tempo de atraso linear para geração do resto das árvores, independente de ser árvore do mesmo template ou não, mas isso nos custa uma complexidade de espaço exponencial, se pensarmos em armazenar todos os roteadores que geram árvores de Steiner para W_k.

7 CONCLUSÃO

Nessa dissertação estudamos diversos aspectos da convexidade de Steiner, analisando e respondendo certos problemas. Todas essas informações foram surgindo ao longo de nossas pesquisas, nas quais sempre tentamos buscar respostas para nossas dúvidas até concluirmos este trabalho.

Nós também abordamos o problema de encontrar o intervalo de Steiner e como isso afeta aos problemas de verificar se um conjunto é St-convexo ou encontrar a envoltória St-convexa. Embora não tenhamos mostrado a NP-completude do intervalo de Steiner, nós mostramos que o problema ISO, um problema próximo ao problema do intervalo de Steiner, é um problema NP-difícil. Uma ferramenta também utilizada por nós foi analisar semelhanças do intervalo de Steiner com os intervalos geodésico e monofônico, pois ao voltarmos nossas pesquisas para grafos de distância-hereditária tais semelhanças nos foram muito úteis, pois os problemas referentes à St-convexidade possuem a mesma propriedade da convexidade geodésica. Existem outras classes de grafos que o problema passa a ser mais "flexível", além dos grafos de distância-hereditária. Uma outra classe que também podemos citar são os grafos *house-hole-domino free (HHD-free)* que são grafos que não possuem subgrafos induzidos do tipo casa, dominó ou ciclos C_k, para $k \geq 5$ (BRANDSTäDT;

LE; SPINRAD, 1999). Em (CÁCERES; A.MÁRQUEZ; PUERTAS, 2008) temos o seguinte teorema: *Seja G é um grafo HHD-free conexo e $W \subseteq V(G)$. Então W é um conjunto g-convexo se e somente se for um conjunto St-convexo.* Então, como os problemas de verificar se um conjunto é g-convexo ou encontrar a envoltória g-convexa para subconjuntos não vazios podem ser resolvidos em tempo polinomial, então podemos concluir que os mesmos problemas na St-convexidade também podem ser resolvidos em tempo polinomial. Além disso, vimos também que quando a cardinalidade do subconjunto W é limitado por um inteiro k, conseguimos obter um algoritmo eficiente para calcular o intervalo de Steiner, onde $k << n$.

Uma outra maneira de se lidar com problemas que não conhecemos algoritmos polinomiais, que não citamos neste trabalho, é através da utilização de métodos heurísticos. Reunimos alguns artigos, mas não desenvolvemos nada relacionado a este tema. Mas apenas a título de curiosidade separamos algumas citações, como (ROBINS; ZELIKOVSKY, 2000), (GRöPL et al., 2002), (ZHOU, 2003) e (RIZZI, 2003).

Em trabalhos futuros pretendemos provar a NP-completude dos problemas IS e ISF do Capítulo 4 e também analisaremos as complexidades de achar o número de Steiner, o número de Steiner forte e o número envoltório de Steiner para qualquer grafo G. Esses problemas de encontrar esses números para as convexidades geodésicos e monofônicos, exceto número de envoltória monofônica, já são conhecidos por serem “difíceis”.

REFERÊNCIAS

ATICI, M. Computational Complexity of Geodetic Set. **Int. J. Comput. Math**, v.79, n.5, p.587–591, 2002.

BANDELT, H.; MULDER, H. Distance-hereditary graphs. **J. Comb. Theory, Ser. B**, v.41, p.182–208, 1986.

BJöRKLUND, A.; HUSFELDT, T.; KASKI, P.; KOIVISTO, M. Fourier meets Möbious: fast subset convolution. IN STOC 2007. p.67–74. 2007. ACM Press.

BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory With Applications**. 2th.ed. New York, Oxford: North Holland, 1976.

BRANDSTäDT, A.; LE, V. B.; SPINRAD, J. P. **Graph classes**: a survey. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

CÁCERES, J.; A.MÁRQUEZ; PUERTAS, M. Steiner distance and convexity in graphs. **Eur. J. Comb.**, v.29, n.3, p.726–736, 2008.

CALDER, J. Some elementary properties of interval convexities. **J. London Math. Soc.**, n.s2-3, p.422–428, 1971.

CHARTRAND, G.; OELLERMANN, O.; TIAN, S.; ZOU, H. Steiner distance in graphs. **Math. Bohem.**, v.144, n.4, p.399–410, 1989.

CHARTRAND, G.; ZHANG, P. The Steiner number of a graph. DISC. MATH. v.242, p.41–54. 2002.

DAY, D.; OELLERMANN, O.; SWART, H. Steiner Distance-Hereditary Graphs. **SIAM J. Discret. Math.**, v.7, n.3, p.437–442, 1994.

DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. Algorithmic Aspects of Monophonic Convexity. ELECTRONIC NOTES IN DISCRETE MATHEMATICS. v.30, p.177–182. 2008.

DREYFUS, S.; WAGNER, R. The Steiner problem in graphs. **Networks**, v.1, p.195–207, 1972.

EPPSTEIN, D. **Representing all minimum spanning trees with applications to counting and generation**. Irvine, CA, 92697-3425, USA: Univ. of California, Irvine, Dept. of Information and Computer Science, 1995. Disponível em: <`http://www.ics.uci.edu/~eppstein/pubs/Epp-TR-95-50.pdf`>. Acesso em Maio. 21, 2009. (95-50).

FARBER, M.; JAMISON, R. E. Convexity in graphs and hypergraphs. **SIAM J. Algebraic Discrete Methods**, Philadelphia, PA, USA, v.7, n.3, p.433–444, 1986.

FLOYD, R. W. Algorithm 97: shortest path. **Communications of the Association for Computing Machinery**, v.5, p.345, 1962.

FOMIN, F. V.; GRANDONI, F.; KRATSCH, D. Faster Steiner tree computation in polynomial-space. LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE. v.5193, p.430–441. 2008. Proceedings of the 16th Annual European Symposium on Algorithms, Karlsruhe, Germany.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness**. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1990.

GRöPL, C.; HOUGARDY, S.; NIERHOFF, T.; PRöMEL, H. J. Steiner trees in uniformly quasi-bipartite graphs. **Inf. Process. Lett.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.83, n.4, p.195–200, 2002.

HAKIMI, S. Steiner´s problem in graphs and its implications. **Networks**, p.113–133, 1971.

HAMMER, P. L.; MAFFRAY, F. Completely separable graphs. DISCRETE APPLIED MATHEMATICS. v.27, n.1-2, p.85–99. 1990.

HENNING, M. A.; NIELSEN, M. H.; OELLERMANN, O. R. Local Steiner convexity. **Eur. J. Comb.**, v.30, n.5, p.1186–1193, 2009.

HERNANDO, C.; T. JIANG, M. M.; PELAYO, I.; SEARA, C. On the steiner, geodetic and hull numbers of graphs. **Discrete Mathematics**, v.293, p.139–154, 2005.

HERRING, M. **The Euclidean Steiner Tree Problem**. Denison Unversity, 2004. Disponível em: <`http://www.denison.edu/academics/departments/mathcs/herring.pdf`>. Acesso em Maio. 21, 2009.

HOWORKA, E. A characterization of distance-hereditary graphs. **Quart. J. Math. Comput. Modelling 17**, 1993.

HWANG, F.; RICHARDS, D.; WINTER, P. **The Steiner Tree Problem**. Amsterdam: North Holland, 1992.

IVANOV, A. O.; TUZHILIN, A. A. **Minimal Networks**: the steiner problem and its generalizations. CRC Press, 1994.

KAHNG, A.; ROBINS, G. **On Optimal Interconnections for VLSI**. Dordrecht: Kluwer, 1995.

KORTE, B.; PRöMEL, H. J.; STEGER, A. **Steiner trees in VLSI-layout**. In Paths, Flows, and VLSI-Layout, 1990.

LEVI, A. Y. Algorithm for shortest connection of a group of graph vertices. **Soviet Mathematical Doklady**, v.12, p.1477–1481, 1971.

MöLLE, D.; RICHTER, S.; ROSSMANITH., P. A faster algorithm for the Steiner tree problem. IN STACS 2006. p.561–570. 2006.

OELLERMANN, O.; PUERTAS, M. Steiner intervals and Steiner geodetic number in distance-hereditary graphs. **Discrete Mathematics**, v.307, p.88–96, 2007.

PELAYO, I. Not every Steiner set is geodetic, a note on “The Steiner number of a graph” by G. Chartrand and P. Zhang [Discrete Mathematics 242 (2002) 41-54]. **Discrete Mathematics**, v.280, p.259–263, 2004.

PELAYO, I. Generalizing the Krein-Milman property in graph convexity spaces: a short survey. **RMS Lecture Notes Series in Mathematics**, v.5, p.131–142, 2008.

PELAYO, I. M. **On convexity in graphs**. Universitat Politècnica de Catalunya, 2004. Disponível em: <`http://www-ma3.upc.es/users/pelayo/research/Definitions.pdf`>. Acesso em Maio. 21, 2009. (MSC: 05C12; 05C05; 05C35).

RIZZI, R. On Rajagopalan and Vazirani's 3/2-approximation bound for the Iterated 1-Steiner heuristic. **Inf. Process. Lett.**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.86, n.6, p.335–338, 2003.

ROBINS, G.; ZELIKOVSKY, A. Improved Steiner tree approximation in graphs. SODA '00: PROCEEDINGS OF THE ELEVENTH ANNUAL ACM-SIAM SYMPOSIUM ON DISCRETE ALGORITHMS, Philadelphia, PA, USA. p.770–779. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

VEL, M. V. de. **Theory of Convex Structures**. Amsterdam: North Holland, 1993.

ZHOU, H. Efficient Steiner tree construction based on spanning graphs. ISPD '03: PROCEEDINGS OF THE 2003 INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON PHYSICAL DESIGN, New York, NY, USA. p.152–157. ACM, 2003.