Análise Numérica das Vibrações de uma Corda Elástica com Densidade e Seção Transversal Variáveis

por

Bianca de Souza dos Santos

IM/NCE - UFRJ

2009

Análise Numérica das Vibrações de uma Corda Elástica com Densidade e Seção Transversal Variáveis

Bianca de Souza dos Santos

Tese de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Mauro Antônio Rincon

Rio de Janeiro
Janeiro de 2009

Análise Numérica das Vibrações de uma Corda Elástica com Densidade e Seção Transversal Variáveis

por

Bianca de Souza dos Santos

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Núcleo de Computação Eletrônica - Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Mauro Antônio Rincon, D.Sc. - IM/UFRJ
(Orientador)

Luis Adauto da Justa Medeiros, D.Sc. - IM/UFRJ

Tânia Nunes Rabello, D.Sc. - IM/ITA

Marcello Goulart Teixeira, D.Sc. - IM/IME

Gladson Octaviano Antunes, D.Sc. - IM/UERJ

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
2009

dos Santos, Bianca de Souza.

Análise Numérica das Vibrações de uma Corda Elástica com Densidade e Seção Transversal Variáveis / Bianca de Souza dos Santos. - Rio de Janeiro, 2009.

74 f.; il.

Dissertação (Mestrado em Informática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, 2009.

Orientador: Mauro Antônio Rincon

1. Introdução - Teses. 2. Resultados Básicos - Teses. 3. Método dos Elementos Finitos - Teses - 5. Simulações Numéricas -

I. Mauro Antônio Rincon (Orientador).

II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Núcleo de Computação Eletrônica. III. Título.

Aos meus pais Aurélio e Orcéria
a minha irmã Beatriz

Agradecimentos

À Deus, que é tudo em minha vida, sem Ele, nada sou.

Ao professor e orientador Mauro Antonio Rincon por toda a ajuda, paciência e conhecimentos transmitidos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Juan Bautista Limaco Ferrel e Marcello Goulart Teixeira, pelo grande apoio e incentivo.

Aos meus pais Aurélio e Orcéria e a minha irmã Beatriz pelo incentivo em todos os momentos e apoio incondicional.

Aos colegas de mestrado Cristina, Renata e em especial a Josemeri e Alessandro, que me mostraram o verdadeiro significado da amizade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À banca pela disposição de tempo e colaboração para a finalização deste projeto.

À todos que de alguma forma fazem parte dessa vitória.

Resumo

Neste trabalho, foi feita a Análise Numérica do modelo de Kirchhoff para pequenas vibrações de cordas elásticas com densidade e seção transversal variáveis, além da Análise Numérica do Problema de Carrier. Para resolver numericamente os problemas citados, usamos o Método de Elementos Finitos no espaço e o Método de β-Newmark no tempo. Programas computacionais foram desenvolvidos usando a linguagem C e exemplos numéricos, com tabelas de erro e gráficos serão apresentados.

Abstract

In this work, there was done the Numerical Analysis of the model of Kirchhoff for small vibrations of elastic ropes with density and cross section you were varying, besides the Numerical Analysis of the Problem of Carrier. To resolve numerically the problems quoted above, we use the Method of Finite Elements in the space and the Method of β-Newmark in the time. Computational programs were developed using the language C and numerical examples, with charts of mistake and printers will be introduced.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O estudo de modelos de cordas elásticas abrange muitos campos da ciência com aplicações que vão da Engenharia à Biologia. O chamado modelo de Kirchhoff tem sido muito utilizado no estudo do comportamento elástico de cordas longas, finas e inextensíveis.

Este trabalho, tem por objetivo, encontrar as soluções numéricas através da aplicação de métodos numéricos, tais como, o Método de Elementos Finitos e o Método de Diferenças Finitas, Método de β-Newmark, de três modelos matemáticos, sendo dois deles uma extensão do modelo de Kirchhoff e o outro, refere-se ao Modelo de Carrier.

1.1 Biografia de Kirchhoff

Kirchhoff nasceu em Königsberg, Prússia em 12 de março de 1824 e faleceu em Berlim, Alemanha, em 17 de outubro de 1887. Foi um físico alemão com contribuições científicas principalmente no campo dos circuitos elétricos, na espectroscopia, na emissão de radiação dos corpos negros e na teoria da elasticidade (modelo de placas de Kirchhoff), além de propor o nome de "radiação do corpo negro" em 1862.

Foi o autor de duas leis fundamentais da teoria clássica dos circuitos elétricos e da emissão térmica. Kirchhoff formulou as leis dos nós e das malhas na análise de circuitos elétricos (Leis de Kirchhoff) em 1845, quando ainda era um estudante. Propôs a lei da emissão de radiação térmica em 1859, comprovando-a em 1861. Em 1954 transferiu-se para a Universidade de Heidelberg , onde colaborou em trabalhos sobre espectroscopia com Robert Bunsen, descobrindo juntamente com este os elementos césio e rubídio em 1861, estudando a composição química do Sol através do seu espectro.

Posteriormente propôs as três leis que descrevem a emissão de luz por objetos incandescentes:

1. Um objeto sólido aquecido produz luz com espectro contínuo.
2. Um gás tênue produz luz com linhas espectrais em comprimentos de onda discretos que dependem da composição química do gás.
3. Um objeto sólido a alta temperatura rodeado de um gás tênue a temperaturas inferiores produz luz num espectro contínuo com vazios em comprimentos de onda discretos cujas posições dependem da composição química do gás.

A existência destas leis foi explicada mais tarde por Niels Bohr, contribuindo decisivamente para o nascimento da mecânica quântica.

Capítulo 2

Notações e Conceitos Preliminares

2.1 Notações

Seja $\Omega = (0,1)$ um intervalo limitado do $\mathbb{R}$. Denotemos por $L^2(\Omega)$ o espaço de Hilbert das funções quadrado integráveis de Lebesgue em Ω, $H^s(\Omega)$ o espaço de Sobolev de ordem s. Empregamos esses espaços para s=1 ou s=2.

O produto escalar e norma em $L^2(\Omega)$ são representados por

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx \; ; \qquad |u|^2 = \int_0^1 |u(x)|^2_{\mathbb{R}} dx$$

para u,v $\in L^2(\Omega)$.

Note que $|u|$ é a norma em $L^2(\Omega)$ e $|u(x)|_{\mathbb{R}}$ é o valor absoluto do número real u(x).

As funções $u \in H^1(0,1)$ são contínuas. Então definimos $H^1_0(0,1) = \{u \in H^1(0,1); u(0) = u(1) = 0\}$. O produto escalar e norma em $H^1_0(0,1)$ são definidos por:

$$((u,v)) = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)dx \; ; \qquad ||u||^2 = \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x)\right|^2_{\mathbb{R}} dx$$

Consideremos o espaço $V = H^1_0(0,1) \cap H^2(0,1)$ equipado com o produto escalar e norma dados por:

$$(u,v)_V = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x)dx \; ; \qquad |u|^2_V = \int_0^1 \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x)\right|^2_{\mathbb{R}} dx$$

para todo $u \in V$.

Para $T > 0$, consideremos o cilindro $Q = (0,1) \times (0,T)$ do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. As funções a,b,c,d são definidas em Q com valores nos números positivos $\mathbb{R}^+$. Representamos o intervalo $(0,1)$ por Ω.

Por $L^\infty(Q)$ representamos o espaço de Banach das funções limitadas mensuráveis em Q com valores reais, equipado com a norma:

$$||u||_{L^\infty(Q)} = \sup ess_{(x,t)\in Q}|u(x,t)|_{\mathbb{R}}.$$

2.2 Hipóteses

H1) $c \in C^1(\bar{Q})$ com $c(1,t) \geq 0,\ c(0,t) \leq 0$ para todo $t \geq 0$. [$\bar{Q}$ é o fecho de Q e $C^1(\bar{Q})$ o espaço das funções continuamente diferenciáveis $u : \bar{Q} \to \mathbb{R}$].

H2) a, $\dfrac{\partial a}{\partial t}$, b, $\dfrac{\partial b}{\partial t}$, d, $\dfrac{\partial d}{\partial t}$ pertencem a $L^\infty(Q)$.

H3) $b(x,t) > 0, a(x) \geq a_0 > 0$ em Q.

A não-linearidade no modelo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(x) + b(x,t)\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[c(x,t)\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \ d(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{2.2.1}$$

é do tipo $||u(t)||^2 = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|_{\mathbb{R}}^2 dx$ e cujos coeficientes são definidos da seguinte forma:

$$a(x) = \frac{\tau_0}{\gamma_0 \rho(x)}\ ;\ \ b(x,t) = \frac{E\sigma(x,t)}{\gamma_0^2 \rho(x)}\ ;\ \ c(x,t) = E\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,t)$$

sendo ρ a densidade de massa, σ a seção transversal da corda, τ a tensão, E o módulo do modelo de Young do material e $d(x,t)$ o termo de viscosidade.

Vamos considerar a não linearidade mais geral do tipo $M(||u(t)||^2)$, com $M = M(\lambda), \lambda \geq 0$, satisfazendo certas condições.

H4) M é continuamente derivável com M' em $L^\infty(0,K)$ para todo $K > 0$ e $0 < m_0 \leq M(\lambda) \leq \lambda, M'(\lambda) \geq 0$.

2.3 Formulação e Resultado Principal

Motivados pelo modelo perturbado de Kirchhoff (2.2.1), formulamos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira: dados u_0 e u_1 achar a função $u : Q \to \mathbb{R}$ solução do problema de valor inicial e de fronteira:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Big[a(x) + b(x,t)M(||u(t)||^2)\Big]\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - c(x,t)M(||u(t)||^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \\ + \ d(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \qquad\qquad \text{em} \quad Q \\ u(0,t) = u(1,t) \quad \text{para todo} \ \ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \ \ u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \ \ (0,1) \end{array} \right. \tag{2.3.1}$$

Definição 2.1: Chamamos de solução do problema (2.3.1) uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ nas classes:

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$$

satisfazendo a identidade integral:

$$\int_0^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), v\right)dt - \int_0^T \left(a + b(t)M(||u(t)||^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t), v\right)dt -$$
$$\int_0^T \left(c(t)M(||u(t)||^2)\frac{\partial u}{\partial x}(t), v\right)dt + \int_0^T \left(d(t)\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)dt = 0,$$

para todo $v \in L^2(0,T; L^2(0,1))$ e satisfaz as condições iniciais em (2.3.1).

Teorema 2.1: Suponha $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, satisfazendo a restrição

$$\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right|^2 + ||u_1||^2 < \delta \ , \ \delta > 0$$

onde δ é uma constante que depende de $a(x,t), b(x,t), c(x,t), d(x,t)$ e de suas derivadas em x e t. Então, existe uma única solução de (2.3.1).

Observação: Seja $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma base de $H_0^1(0,1)$ solução do problema espectral.

$$\left|\begin{array}{ll} -\,w_{ixx} = \lambda_i w_i & \text{em } (0,1) \\ \\ w_i(0) = w_i(1) = 0 & \end{array}\right.$$

A demonstração será feita pelo método das aproximações sucessivas. De fato, representamos por $V_0 = \{0\}$ e por $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$, para $m \geq 1$, o subespaço de $V = H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ gerado por $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Definimos $u_0(t)$ para todo $t \in [0,T]$ e definimos $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \in V_m$ a função definida em $[0, T_m]$ com valores em V_m, solução do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left|\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), w\right) - \left(\left[a + b(t)M(||u_{m-1}(t)||^2)\right]\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t), w\right) \; - \left(c(t)M(||u_{m-1}(t)||^2)\dfrac{\partial u_m}{\partial x}(t), w\right) \\ +\left(d(t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(t), w\right) = 0 \quad \text{para todo } \; w \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \qquad \text{em} \quad H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial t}(0) = u_{1m} \to u_1 \qquad \text{em} \quad H_0^1(0,1) \end{array}\right. \tag{2.3.2}$$

As estimativas e a passagem ao limite são provados em [11].

Capítulo 3

Vibrações de cordas elásticas com extremidades fixas

3.1 Formulação do Problema

O modelo proposto nesta tese é uma extensão do modelo de Kirchhoff para pequenas vibrações de cordas elásticas com extremidades móveis dado por

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\dfrac{\tau_0}{m} + \dfrac{k}{m}\dfrac{\gamma(t) - L_0}{L_0} + \dfrac{k}{2m\gamma(t)}\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ , \quad (x,t) \in \hat{Q} \\ u(x,t) = 0\ , \qquad (x,t) \in \hat{E} \\ u(x,0) = u_0(x)\ , \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \qquad \alpha_0 < x < \beta_0 \end{array}\right. \tag{3.1.1}$$

onde

$$\hat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t), \forall t \geq 0\}$$

e sua fronteira definida como

$$\hat{E} = \bigcup_{0<t<T} \{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\}$$

sendo:

- L_0 o tamanho inicial da corda;
- τ_0 a tensão inicial;
- m a massa;

- k o módulo de Young do material vezes a seção transversal da corda;
- $u(x,t)$ o deslocamento vertical do ponto x da corda no tempo t;
- $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funções que dão o movimento dos extremos da corda durante a vibração sendo $\alpha(t) < \beta(t)$ e $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$.

Neste trabalho, iremos supor que as extremidades são fixas, ou seja, $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = 1$ e ele é dado por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(x) + b(x,t)\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[c(x,t)\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial u}{\partial x} + d(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{3.1.2}$$

e cujos coeficientes definidos por

$$a(x) = \frac{\tau_0}{\gamma_0 \rho(x)}, \tag{3.1.3}$$

$$b(x,t) = \frac{E\ \sigma(x,t)}{\gamma_0^2 \rho(x)} \tag{3.1.4}$$

$$c(x,t) = E\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,t) \tag{3.1.5}$$

O problema que estudaremos será o de determinar uma função $u = u(x,t)$, no espaço das soluções $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, tal que,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(x) + b(x,t)\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[c(x,t)\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ + d(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0\ , \qquad \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ , \qquad 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x)\ , \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \qquad 0 < x < 1 \end{cases} \tag{3.1.6}$$

3.2 Método dos Elementos Finitos

3.2.1 Formulação Variacional

Ao Problema (3.1.6), o Método dos Elementos Finitos não é diretamente aplicável. Primeiramente, faz-se necessário expressar o problema numa forma mais adequada, fórmula esta chamada de Formulação Variacional, para que assim, possamos aplicar o Método de Galerkin, que será visto mais adiante.

Seja $D(\Omega)$ o espaço das funções testes, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e $w \in D(\Omega)$. Multiplicando a primeira equação em (3.1.6) por w e integrando em $\Omega = (0,1)$, tem-se:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w\, dx + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M_1(x,t)w)\, dx - \int_0^1 M_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} w\, dx + \int_0^1 M_3(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} w\, dx = 0 \tag{3.2.1}$$

onde

$$M_1(x,t) = a(x) + b(x,t)\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3.2.2}$$

$$M_2(x,t) = c(x,t)\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3.2.3}$$

$$M_3(x,t) = d(x,t) \tag{3.2.4}$$

3.2.2 Método de Galerkin

O Método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções $H_0^1(\Omega)$ por um subespaço de dimensão finita. Para isto, definimos um subespaço V_m gerado pelos m primeiros elementos da base do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m] \tag{3.2.5}$$

onde $[\varphi_i]_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base de $H_0^1(\Omega)$.

Buscamos, então, uma solução aproximada $u_m = u_m(x,t)$ do Problema (3.1.6), no subespaço V_m.

Solução Aproximada

Aproximamos o Problema (3.1.6) pelo problema de determinar no espaço das soluções V_m , uma função $u_m = u_m(x,t)$, tal que,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, w\right) + \left(\frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}(M_1(x,t)w)\right) - \left(M_2(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial x}, w\right) + \left(M_3(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial t}, w\right) = 0 \; \forall w \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \qquad \text{em } H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \\ \frac{\partial u_m}{\partial t}(0) = u_{1m} \to u_1 \qquad \text{em } H_0^1(0,1) \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Substituindo $u_m = u_m(x,t)$ em (3.2.1), temos:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} w \, dx + \int_0^1 \frac{\partial u_m}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M_1(x,t)w)\, dx - \int_0^1 M_2(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial x} w \, dx \; + \int_0^1 M_3(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial t} w \, dx = 0 \tag{3.2.7}$$

Como $u_m(x,t) \in V_m$, podemos escrever

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in V_m, \tag{3.2.8}$$

e assim, obtemos

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} d_i'(t)\varphi_i(x), \tag{3.2.9}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}, \tag{3.2.10}$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{m} d_i''(t)\varphi_i(x), \tag{3.2.11}$$

Substituindo de (3.2.9) à (3.2.11) em (3.2.7) e tendo $w \in V_m$, podemos tomar em particular, $w = \varphi_j$, $j = 1, \cdots, m$.

Logo, temos então:

$$\sum_{i=1}^{m} d_i''(t)\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx + \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\int_0^1 \frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M_1(x,t)\varphi_j(x))\,dx -$$
$$\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\int_0^1 M_2(x,t)\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x}\,\varphi_j(x)\,dx + \sum_{i=1}^{m} d_i'(t)\int_0^1 M_3(x,t)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0 \tag{3.2.12}$$

3.3 Função de Interpolação

Como já visto anteriormente, V_m é um subespaço de $H_0^1(0,1)$, onde

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m]$$

As funções base φ_i escolhidas são funções de interpolação linear por partes satisfazendo a seguinte condição:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3.3.1}$$

onde $x_j \in [0,1]$ é denominado ponto nodal ou simplesmente nó. Os nós são pontos discretos do intervalo [0,1], distribuídos de forma equidistante ou não. Tomando m divisões em [0,1] definimos o passo

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 1, \cdots, m \tag{3.3.2}$$

No caso dos nós serem equidistantes, $h_i = h = 1/m$.

Em cada intervalo, definimos a função $\varphi_i(x)$ linear por partes satisfazendo a condição (3.3.1). Então, $\varphi_i(x)$ é definida por

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i}, & \forall\, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \forall\, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{3.3.3}$$

cuja derivada é dada por

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_{i-1}}, & \forall\, x \in (x_{i-1}, x_i) \\ -\dfrac{1}{h_i}, & \forall\, x \in (x_i, x_{i+1}) \\ \\ 0, & \forall\, x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \tag{3.3.4}$$

A função φ_i está definida para $i = 1, \ldots, m+1$.

Podemos representar geometricamente as funções φ_i, como mostrado na Figura 3.1.

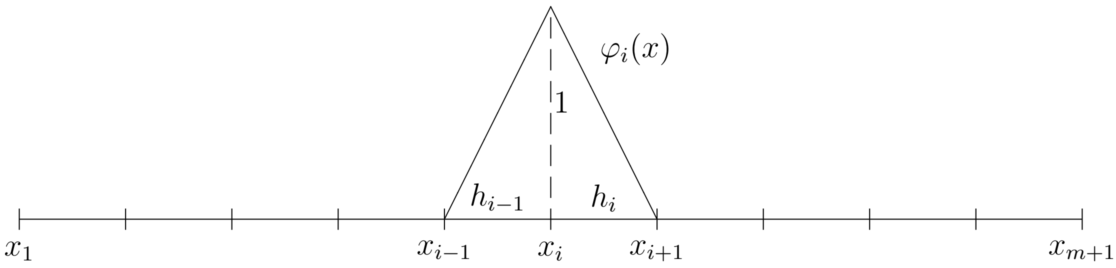

Figura 3.1: Função base

Consideraremos neste trabalho, uma malha uniforme com passo constante $h_i = h = 1/m$ e os pontos nodais dados por

$$x_i = \left((i-1)\frac{1}{m}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, m+1$$

Observamos que com a definição da função em (3.3.3) e (3.3.4), temos:

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{se} \quad |\, i - j \,| \geq 2$$

Assim

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx \quad \text{para} \quad j = i-1, i, i+1 \tag{3.3.5}$$

e

$$\int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x}\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x}\,dx \quad \text{se} \quad |\, i - j \,| \geq 2 \tag{3.3.6}$$

Problema Local

Uma forma mais apropriada de determinar a solução aproximada do Problema (3.2.6), é através de soluções locais. Para obtermos tais soluções locais precisamos considerar uma partição do domínio Ω em subregiões Ω_e, tal que,

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{m} \Omega_e, \quad \Omega_e \cap \Omega_s = \emptyset,\ e \neq s$$

Considere $\Omega = (0,1)$ e uma discretização não necessariamente uniforme dada por

$$x_{i+1} = x_i + h_i, \qquad i = 2, \cdots, m$$

onde $x_1 = 0$ e $x_{m+1} = 1$ devido as condições de fronteira.

Para cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, considere um elemento $\boldsymbol{e}$ denominado elemento finito e as coordenadas locais $[x_1^e, x_2^e] = [x_i, x_{i+1}]$. Geometricamente os m elementos podem ser representados como na Figura 3.2.

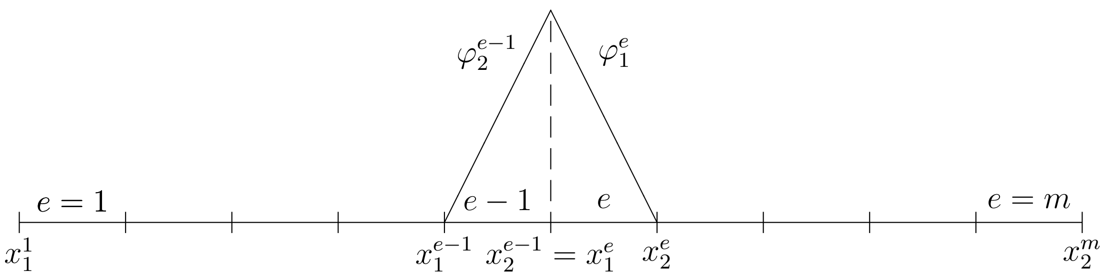

Figura 3.2: Função base local

Então, temos m intervalos chamados de elementos finitos, $[x_1^e, x_2^e]$, $\boldsymbol{e} = 1, \cdots, m$.

Definimos a função de interpolação local $\varphi_a^e(x)$ para cada intervalo local $[x_1^e, x_2^e]$ dada por

$$\varphi_a^e(x) = \begin{cases} \varphi_1^e(x) = \dfrac{x_2^e - x}{h_e}, & \forall\, x \in [x_1^e, x_2^e] \\ \varphi_2^e(x) = \dfrac{x - x_1^e}{h_e}, & \forall\, x \in [x_1^e, x_2^e] \\ 0, & \forall\, x \notin [x_1^e, x_2^e] \end{cases} \tag{3.3.7}$$

onde $h_e = x_2^e - x_1^e$.

A função de interpolação $\varphi_i(x)$ apresentada em (3.3.3) é a junção das funções de interpolação local $\varphi_2^{e-1}(x)$ e $\varphi_1^e(x)$, ou seja,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_2^{e-1}(x), & \forall\, x \in [x_1^{e-1}, x_2^{e-1}] = [x_{i-1}, x_i] \\ \varphi_1^e(x), & \forall\, x \in [x_1^e, x_2^e] = [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \forall\, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{3.3.8}$$

Usando a notação acima, definimos (3.2.12) em termos de cada elemento, ou seja, constantes em cada elemento finito $\boldsymbol{e}$, assim temos:

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^{2} d_a''^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\, dx + \sum_{a=1}^{2} d_a^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(x)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}(M_1(x,t)\varphi_b^e(x))dx - \\ &\sum_{a=1}^{2} d_a^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} M_2(x,t)\frac{\partial \varphi_a^e(x)}{\partial x}\varphi_b^e\, dx + \sum_{a=1}^{2} d_a'^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} M_3(x,t)\varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\, dx \ = 0 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

para $1 \leq a, b \leq 2$ e $\boldsymbol{e} = 1, 2, \cdots, m$.

Devido a existência das funções $M_1(x,t)$, $M_2(x,t)$ e $M_3(x,t)$ nas integrais, a equação é de difícil solução. Considerando o conceito local apresentado anteriormente e tomando que o tamanho h_e de cada elemento é suficientemente pequeno, passaremos então a considerar as funções contínuas $M_1(x,t)$, $M_2(x,t)$ e $M_3(x,t)$ constantes em cada elemento finito $\boldsymbol{e}$.

Logo, linearizando no tempo, tomamos $M_1(x,t) = M_1^e(t)$, $M_2(x,t) = M_2^e(t)$ e $M_3(x,t) = M_3^e(t)$ e considerando x constante em cada elemento finito $\boldsymbol{e}$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^{2} d_a''^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\, dx + \sum_{a=1}^{2} d_a^e(t) M_1^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_b^e(x)}{\partial x}\, dx - \\ &\sum_{a=1}^{2} d_a^e(t) M_2^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(x)}{\partial x}\varphi_b^e(x)\, dx + \sum_{a=1}^{2} d_a'^e(t) M_3^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x) dx = 0 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

onde $1 \leq a, b \leq 2$ e $\boldsymbol{e} = 1, 2, \cdots, m$.

3.4 Cálculo das Matrizes

Denotando por

$$A = \sum_{e=1}^{m} A^e_{ab} \ , \quad B = \sum_{e=1}^{m} B^e_{ab} \ , \quad C = \sum_{e=1}^{m} C^e_{ab} \quad \text{e} \quad D = \sum_{e=1}^{m} D^e_{ab}$$

Restringindo as matrizes A, B, C, D a cada elemento $\boldsymbol{e}$ temos:

$$A^e_{ab} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\, dx \tag{3.4.1}$$

$$B^e_{ab} = M^e_1(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial\varphi^e_a(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi^e_b(x)}{\partial x}\, dx \tag{3.4.2}$$

$$C^e_{ab} = M^e_2(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial\varphi^e_a(x)}{\partial x}\varphi^e_b(x)\, dx \tag{3.4.3}$$

$$D^e_{ab} = M^e_3(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\, dx = M^e_3(t) A^e_{ab} \tag{3.4.4}$$

As matrizes locais A^e_{ab}, B^e_{ab}, C^e_{ab} e D^e_{ab} são de ordem (2×2) onde veremos mais adiante na Seção 3.6. Essas matrizes locais de ordem (2×2) foram introduzidas devido ao fato delas terem muitos zeros, pois $\varphi_a(x)\varphi_b(x) = 0, \quad \text{se} \quad |a-b| \geq 2$.

3.5 Integração Numérica

Utilizaremos um método de integração numérica chamado de Quadratura Gaussiana com dois pontos ζ_1 e ζ_2, que são exatos para polinômio de grau ≤ 3, com o intuito de tornar mais flexível a montagem das matrizes locais apresentadas em (3.4.1), (3.4.2) , (3.4.3) e (3.4.4).

A quadratura Gaussiana no caso unidimensional é dada por

$$\int_{-1}^{1} q(\zeta_l)\, d\zeta = \sum_{l=1}^{N} q(\zeta_l) w_l$$

onde N é o número de pontos de integração, ζ_l é a coordenada e w_l é o peso associado a ζ_1. Quando $N = 2$, então, $\zeta_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\zeta_2$ e $w_1 = w_2 = 1$. Nestas condições o erro de integração é dado por

$$E_G = \frac{1}{135}\frac{d^4 q(\zeta)}{d\zeta^4}$$

e a integral é calculada por

$$\int_{-1}^{1} q(\zeta)\, d\zeta = q\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + q\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Desde que o intervalo de integração da função q é o intervalo fechado [-1,1] então, para calcular as matrizes locais do elemento $\boldsymbol{e}$, cujas coordenadas são dadas por $[x_1^e, x_2^e]$, precisamos fazer a seguinte transformação isoparamétrica:

$$\begin{aligned} \xi : [x_1^e, x_2^e] &\to [-1,1] \\ x \longmapsto \xi(x) &= \frac{1}{h_e}(2x - x_1^e - x_2^e) \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

onde $h_e = x_2^e - x_1^e$. A função inversa ξ^{-1} de ξ é dada por

$$\begin{aligned} x^e : [-1,1] &\to [x_1^e, x_2^e] \\ \xi \longmapsto x^e(\xi) &= \frac{1}{2}(x_1^e + x_2^e + h_e \xi) \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Além disso,

$$\frac{dx^e}{d\xi} = \frac{h_e}{2} \tag{3.5.3}$$

Agora, iremos calcular as matrizes locais.

3.6 Matrizes Locais A_{ab}^e ,B_{ab}^e ,C_{ab}^e e D_{ab}^e

Temos m elementos para os $(m+1)$ nós da discretizaąão de $\Omega = (0,1)$, onde temos que:

$$A = \sum_{e=1}^{m} A_{ab}^e \ , \quad B = \sum_{e=1}^{m} B_{ab}^e \ , \quad C = \sum_{e=1}^{m} C_{ab}^e \quad e \quad D = \sum_{e=1}^{m} D_{ab}^e$$

As funções φ_1^e e φ_2^e são as únicas funções de interpolação não nulas no intervalo $[x_1^e, x_2^e]$ em (3.3.7). Logo, a matriz local A_{ab}^e , já vista anteriormente em (3.4.1), foi definida como sendo de ordem (2×2), pois os elementos A^e_{11}, A^e_{12}, A^e_{21} e A^e_{22} que pertencem a $\boldsymbol{e}$-ésima e $(\boldsymbol{e}+1)$-ésima linhas e colunas são os únicos não necessariamente nulos. Assim temos:

$$A^e_{ab} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & & & \\ & A^e_{11} & A^e_{12} & \\ & A^e_{21} & A^e_{22} & \\ & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \quad e \\ \leftarrow \quad e+1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Logo, podemos representar os elementos A^e_{11}, A^e_{12}, A^e_{21} e A^e_{22} respectivamente por A^e_{ee}, $A^e_{e,e+1}$, $A^e_{e+1,e}$ e $A^e_{e+1,e+1}$. Faremos o mesmo com as matrizes B^e_{ab}, C^e_{ab} e D^e_{ab}, donde obtemos:

$$A^e_{ab} = \begin{bmatrix} A^e_{11} & A^e_{12} \\ A^e_{21} & A^e_{22} \end{bmatrix}, \quad B^e_{ab} = \begin{bmatrix} B^e_{11} & B^e_{12} \\ B^e_{21} & B^e_{22} \end{bmatrix}, \quad C^e_{ab} = \begin{bmatrix} C^e_{11} & C^e_{12} \\ C^e_{21} & C^e_{22} \end{bmatrix},$$

$$D^e_{ab} = \begin{bmatrix} D^e_{11} & D^e_{12} \\ D^e_{21} & D^e_{22} \end{bmatrix}$$

cuja ordem das submatrizes é (2×2) formados pelos coeficientes de coordenadas não nulas.

3.6.1 Matriz Local A^e_{ab}

Temos que a matriz local A^e_{ab} em (3.4.1) é dada por

$$A^e_{ab} = \int_{x^e_1}^{x^e_2} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\, dx$$

com $1 \leq a, b \leq 2$.

Ao aplicar a transformação isoparamétrica (3.5.1) em (3.4.1), temos:

$$A^e_{ab} = \int_{-1}^{1} \varphi^e_a(\xi)\varphi^e_b(\xi)\frac{h_e}{2}\, d\xi = \int_{-1}^{1} q(\xi)\, d\xi = q\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + q\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \tag{3.6.1}$$

onde

$$q(\xi) = \frac{h_e}{2}\varphi^e_a(\xi)\varphi^e_b(\xi)$$

Antes de explicitarmos a função $q(\xi)$, é preciso, primeiramente, definir a função de interpolação $\varphi_a^e(\xi)$ no intervalo [-1, 1]. Por exemplo, usando polinômio de grau 1, temos:

$$\varphi_a^e(\xi) = \begin{cases} \varphi_1^e(\xi) = \dfrac{(1-\xi)}{2}, & \forall\, \xi \in [-1,1] \\ \varphi_2^e(\xi) = \dfrac{(1+\xi)}{2}, & \forall\, \xi \in [-1,1] \\ 0, & \forall\, \xi \notin [-1,1] \end{cases} \tag{3.6.2}$$

Temos que, a função $\varphi_a^e(x)$ definida em (3.3.7) para $x \in [x_1^e, x_2^e]$ é equivalente à função $\varphi_a^e(\xi)$ definida em (3.6.2) para $\xi \in [-1,1]$.

Utilizando a função (3.6.2) em (3.6.1), obtemos os elementos da matriz local A_{ab}^e dada por

$$A_{ab}^e = \begin{bmatrix} A_{11}^e & A_{12}^e \\ A_{21}^e & A_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11}^e &= \int_{-1}^{1} q(\xi)\, d\xi = \frac{h_e}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_1^e(\xi)\varphi_1^e(\xi)\, d\xi = \frac{h_e}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1-\xi)}{2}\, d\xi \\ &= \frac{h_e}{8}\int_{-1}^{1}\left(1-2\xi+\xi^2\right) d\xi = \frac{h_e}{3} \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

$$\begin{aligned} A_{12}^e &= \int_{-1}^{1} q(\xi)\, d\xi = \frac{h_e}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_1^e(\xi)\varphi_2^e(\xi)\, d\xi = \frac{h_e}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(1-\xi)}{2}\frac{(1+\xi)}{2}\, d\xi \\ &= \frac{h_e}{8}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right) d\xi = \frac{h_e}{6} \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

Por se tratar de uma matriz simétrica temos que, $A_{21}^e = A_{12}^e$.

$$\begin{aligned} A_{22}^e &= \int_{-1}^{1} q(\xi)\, d\xi = \frac{h_e}{2}\int_{-1}^{1} \varphi_2^e(\xi)\varphi_2^e(\xi)\, d\xi = \frac{h_e}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(1+\xi)}{2}\frac{(1+\xi)}{2}\, d\xi \\ &= \frac{h_e}{8}\int_{-1}^{1}\left(1+2\xi+\xi^2\right) d\xi = \frac{h_e}{3} \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Como a malha é uniforme, temos $h = h_e$ e de (3.6.3), (3.6.4) e (3.6.5) temos que a matriz local A_{ab}^e é da seguinte forma:

$$A_{ab}^e = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.6.6}$$

3.6.2 Matriz Local B^e_{ab}

Temos que a matriz local B^e_{ab}, vista anteriormente em (3.4.2), é dada por

$$B^e_{ab} = M^e_1(t) \int_{x^e_1}^{x^e_2} \frac{\partial \varphi^e_a(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi^e_b(x)}{\partial x} \, dx$$

para $1 \leq a, b \leq 2$. Podemos reescrever B^e_{ab} como

$$B^e_{ab} = M^e_1(t) \hat{B}^e_{ab} \tag{3.6.7}$$

onde

$$\hat{B}^e_{ab} = \int_{x^e_1}^{x^e_2} \frac{\partial \varphi^e_a(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi^e_b(x)}{\partial x} \, dx \tag{3.6.8}$$

Ao aplicar a transformação isoparamétrica (3.5.1) em (3.6.8), temos:

$$\hat{B}^e_{ab} = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h_e} \frac{\partial \varphi^e_a(\xi)}{\partial \xi} \frac{2}{h_e} \frac{\partial \varphi^e_b(\xi)}{\partial \xi} \frac{h_e}{2} \, d\xi = \int_{-1}^{1} q(\xi) \, d\xi = q\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + q\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \tag{3.6.9}$$

onde

$$q(\xi) = \frac{2}{h_e} \left(\frac{\partial \varphi^e_a(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \varphi^e_b(\xi)}{d\xi} \right)$$

Antes de explicitarmos a função $q(\xi)$, é preciso primeiramente definir a função de interpolação $\varphi_a(\xi)$ no intervalo [-1, 1]. Derivando (3.6.2), obtemos:

$$\frac{\partial \varphi^e_a(\xi)}{\partial \xi} = \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi^e_1(\xi)}{\partial \xi} = -\dfrac{1}{2} & \forall\, \xi \in [-1, 1] \\ \dfrac{\partial \varphi^e_2(\xi)}{\partial \xi} = \dfrac{1}{2} & \forall\, \xi \in [-1, 1] \\ 0 & \forall\, \xi \notin [-1, 1] \end{cases} \tag{3.6.10}$$

Utilizando a função (3.6.10) em (3.6.9), obteremos os elementos da matriz local $\hat{B}^e_{ab}$, dada por

$$\hat{B}^e_{ab} = \begin{bmatrix} \hat{B}^e_{11} & \hat{B}^e_{12} \\ \hat{B}^e_{21} & \hat{B}^e_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}^e_{11} = \int_{-1}^{1} q(\xi) \, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h_e} \frac{\partial \varphi^e_1(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi^e_1(\xi)}{\partial \xi} \, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h_e} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) d\xi$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2h_e} \, d\xi = \frac{1}{h_e} \tag{3.6.11}$$

$$\hat{B}_{12}^{e} = \int_{-1}^{1} q(\xi) \, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h_e} \frac{\partial \varphi_1^e(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_2^e(\xi)}{\partial \xi} \, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h_e} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) d\xi$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{2h_e} \, d\xi = -\frac{1}{h_e} \tag{3.6.12}$$

Por se tratar de uma matriz simétrica temos que, $\hat{B}_{21}^{e} = \hat{B}_{12}^{e}$.

$$\hat{B}_{22}^{e} = \int_{-1}^{1} q(\xi) \, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h_e} \frac{\partial \varphi_2^e(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_2^e(\xi)}{\partial \xi} \, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h_e} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) d\xi$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2h_e} \, d\xi = \frac{1}{h_e} \tag{3.6.13}$$

Como $h = h_e$ e de (3.6.11) a (3.6.13), temos que a matriz local $\hat{B}_{ab}^{e}$ é dada por

$$\hat{B}_{ab}^{e} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.6.14}$$

Logo, substituindo (3.6.14) em (3.6.7), temos a matriz local B_{ab}^{e} é da seguinte forma:

$$B_{ab}^{e} = \frac{M_1^e(t)}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.6.15}$$

3.6.3 Matriz Local C_{ab}^{e}

Temos que a matriz local C_{ab}^{e}, vista anteriormente em (3.4.3) é dada por

$$C_{ab}^{e} = M_2^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(x)}{\partial x} \varphi_b^e(x) \, dx = M_2^e(t) \hat{C}_{ab}^{e} \tag{3.6.16}$$

onde

$$\hat{C}_{ab}^{e} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(x)}{\partial x} \varphi_b^e(x) \, dx \tag{3.6.17}$$

para $1 \leq a, b \leq 2$.

Ao aplicar a transformação isoparamétrica (3.5.1) em (3.6.17), temos:

$$\hat{C}^e_{ab} = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h_e} \frac{\partial \varphi^e_a(\xi)}{\partial \xi} \varphi^e_b(\xi) \frac{h_e}{2}\, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi^e_a(\xi)}{\partial \xi} \varphi^e_b(\xi)\, d\xi \tag{3.6.18}$$

pois

$$\frac{\partial \varphi^e_a}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^e_a}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_e} \frac{\partial \varphi^e_a}{\partial \xi}$$

Logo, utilizando a função (3.6.2) e (3.6.10) em (3.6.18), obteremos cada elemento da matriz local $\hat{C}^e_{ab}$ dada por

$$\hat{C}^e_{ab} = \begin{bmatrix} \hat{C}^e_{11} & \hat{C}^e_{12} \\ \hat{C}^e_{21} & \hat{C}^e_{22} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{C}^e_{11} &= \int_{-1}^{1} q(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi^e_1(\xi)}{\partial \xi} \varphi^e_1(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right) d\xi \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{\xi - 1}{4}\right) d\xi = -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.6.19}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}^e_{12} &= \int_{-1}^{1} q(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi^e_1(\xi)}{\partial \xi} \varphi^e_2(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right) d\xi \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{-\xi - 1}{4}\right) d\xi = -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.6.20}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}^e_{21} &= \int_{-1}^{1} q(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi^e_2(\xi)}{\partial \xi} \varphi^e_1(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right) d\xi \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-\xi}{4}\right) d\xi = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.6.21}$$

$$\begin{aligned} \hat{C}^e_{22} &= \int_{-1}^{1} q(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi^e_2(\xi)}{\partial \xi} \varphi^e_2(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right) d\xi \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+\xi}{4}\right) d\xi = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.6.22}$$

De (3.6.19) a (3.6.22) temos que a matriz local $\hat{C}^e_{ab}$ é uma matriz anti-simétrica dada por

$$\hat{C}^e_{ab} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.6.23}$$

Logo, substituindo (3.6.23) em (3.6.16), temos a matriz local C^e_{ab} é da seguinte forma:

$$C^e_{ab} = M^e_2(t)\hat{C}^e_{ab} = M^e_2(t)\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -M^e_2(t) & -M^e_2(t) \\ M^e_2(t) & M^e_2(t) \end{bmatrix} \tag{3.6.24}$$

3.6.4 Matriz Local D^e_{ab}

Temos que a matriz D^e_{ab} vista anteriormente em (3.4.4) é dada por

$$D^e_{ab} = M^e_3(t)\int_{x^e_1}^{x^e_2} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\,dx = M^e_3(t)A^e_{ab} \tag{3.6.25}$$

onde

$$A^e_{ab} = \int_{x^e_1}^{x^e_2} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\,dx \tag{3.6.26}$$

para $1 \leq a, b \leq 2$.

De (3.6.6), temos:

$$A^e_{ab} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.6.27}$$

Logo, substituindo (3.6.27) em (3.6.25), temos a matriz local D^e_{ab} dada por

$$D^e_{ab} = \frac{hM^e_3(t)}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.6.28}$$

3.7 Matrizes Globais A, B, C e D

Nesta Seção, faremos a montagem das matrizes globais a partir das matrizes locais, uma vez que:

$$A = \sum_{e=1}^{m} A^e_{ab}\ , \quad B = \sum_{e=1}^{m} B^e_{ab}\ , \quad C = \sum_{e=1}^{m} C^e_{ab} \quad e \quad D = \sum_{e=1}^{m} D^e_{ab}$$

3.7.1 Matriz Global A

Consideraremos a matriz local definida em (3.4.1) e a função $\varphi_a^e(x)$ definida em (3.3.7) onde $[x_1^e, x_2^e] = [x_e, x_{e+1}]$. Consideraremos também $i = j = \boldsymbol{e}$, no cálculo do coeficiente da matriz A_{ee}. Temos:

$$A_{ee} = \int_0^1 \varphi_e(x)\varphi_e(x)\, dx = \int_{x_{e-1}}^{x_e} \varphi_e(x)\varphi_e(x)\, dx + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_e(x)\varphi_e(x)\, dx \tag{3.7.1}$$

Donde obtemos

$$A_{ee} = \int_{x_1^{e-1}}^{x_2^{e-1}} \varphi_2^{e-1}(x)\varphi_2^{e-1}(x)\, dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_1^e(x)\varphi_1^e(x)\, dx$$

$$A_{ee} = A_{22}^{e-1} + A_{11}^e \tag{3.7.2}$$

para $\boldsymbol{e} = 2, 3, \cdots, m$. Temos então que A_{22}^{e-1} e A_{11}^e são os coeficientes das matrizes locais M^{e-1} e M^e de ordem (2×2).

Da mesma forma, obtemos:

$$A_{e,e+1} = \int_0^1 \varphi_e(x)\varphi_{e+1}(x)\, dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_e(x)\varphi_{e+1}(x)\, dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_1(x)\varphi_2(x)\, dx = A_{12} \tag{3.7.3}$$

$$A_{e+1,e} = \int_0^1 \varphi_{e+1}(x)\varphi_e(x)\, dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_{e+1}(x)\varphi_e(x)\, dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_2(x)\varphi_1(x)\, dx = A_{21} \tag{3.7.4}$$

Generalizando, temos o seguinte algoritmo na composição dos coeficientes da matriz global:

$$\begin{aligned} &\text{Para } e = 2, 3, \cdots, m, \text{ temos} \\ &A_{ee} = A_{22}^{e-1} + A_{11}^e \\ &A_{e,e+1} = A_{12}^e \\ &A_{e+1,e} = A_{21}^e \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

onde

$$A_{11} = \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_1(x)\, dx = \int_{x_1^1}^{x_2^1} \varphi_1(x)\varphi_1(x)\, dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_1^1(x)\varphi_1^1(x)\, dx = A_{11}^1 \tag{3.7.6}$$

Analogamente, temos:

$$A_{m+1,m+1} = \int_{x_1^m}^{x_2^m} \varphi_2^m(x)\varphi_2^m(x)\, dx = A_{22}^m \tag{3.7.7}$$

De (3.7.5) a (3.7.7), obtemos a matriz global A dada pelo algoritmo:

$$\begin{aligned}
&A_{11} = A_{11}^{1} & \\
&A_{ee} = A_{22}^{e-1} + A_{11}^{e} & e = 2, 3, \cdots, m \\
&A_{e,e+1} = A_{12}^{e} & e = 1, 2, \cdots, m \\
&A_{e+1,e} = A_{21}^{e} & e = 1, 2, \cdots, m \\
&A_{m+1,m+1} = A_{22}^{m} &
\end{aligned} \tag{3.7.8}$$

Sendo A_{ab}^{e} a matriz local dada em (3.6.6) por

$$A_{ab}^{e} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo (3.7.8) na matriz A_{ab}^{e} e sendo ela simétrica e tridiagonal, achamos mais conveniente colocá-la na forma de coluna, ou seja, como a matriz é tridiagonal, os outros elementos são nulos, logo colocamos as 3 diagonais em forma de coluna, onde teremos:

$$A = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.9}$$

3.7.2 Matriz Global B

Sendo B_{ab}^{e} a matriz local dada em (3.6.15) por

$$B_{ab}^{e} = \frac{M_1^{e}(t)}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo (3.7.8) na matriz B_{ab}^{e} e sendo ela simétrica e tridiagonal, achamos mais conveniente colocá-la na forma de coluna, onde teremos:

$$B = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & M_1^{1}(t) + M_1^{2}(t) & -M_1^{1}(t) \\ -M_1^{1}(t) & M_1^{2}(t) + M_1^{3}(t) & -M_1^{2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -M_1^{m-2}(t) & M_1^{m-1}(t) + M_1^{m}(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.10}$$

3.7.3 Matriz Global C

Sendo C^e_{ab}, a matriz local dada em (3.6.24) por

$$C^e_{ab} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -M^e_2(t) & -M^e_2(t) \\ M^e_2(t) & M^e_2(t) \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo (3.7.8) na matriz C^e_{ab} e sendo ela tridiagonal, achamos mais conveniente colocá-la na forma de coluna, onde teremos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{M^1_2(t)}{2} - \dfrac{M^2_2(t)}{2} & -\dfrac{M^1_2(t)}{2} \\ \dfrac{M^1_2(t)}{2} & \dfrac{M^2_2(t)}{2} - \dfrac{M^3_2(t)}{2} & -\dfrac{M^2_2(t)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{M^{m-2}_2(t)}{2} & \dfrac{M^{m-1}_2(t)}{2} - \dfrac{M^m_2(t)}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.11}$$

3.7.4 Matriz Global D

Sendo D^e_{ab}, a matriz local dada em (3.6.28) por

$$D^e_{ab} = \frac{hM^e_3(t)}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo (3.7.8), na matriz D^e_{ab} e sendo ela simétrica e tridiagonal, achamos mais conveniente colocá-la na forma de coluna, onde teremos:

$$D = h\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{M^1_3(t) + M^2_3(t)}{3} & \dfrac{M^1_3(t)}{3} \\ \dfrac{M^1_3(t)}{3} & \dfrac{M^2_3(t) + M^3_3(t)}{3} & \dfrac{M^2_3(t)}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{M^{m-2}_3(t)}{3} & \dfrac{M^{m-1}_3(t) + M^m_3(t)}{3} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.12}$$

Substituindo de (3.7.9) a (3.7.12) em (3.3.10) podemos escrever (3.3.10) no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$Ad''(t) + (B - C)d(t) + Dd'(t) = 0$$

onde denotamos

$$d(t) = d^m(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_m(t) \end{bmatrix} \tag{3.7.13}$$

3.8 Método de β-Newmark

Matematicamente, a equação $Ad''(t) + Bd(t) - Cd(t) + Dd'(t) = 0$ representa um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e, em particular, a solução das equações não são tão triviais. Logo, o Método escolhido para resolver o sistema de equações diferencias de segunda ordem foi o Método de β-Newmark, que consiste em um Método de Diferenças Finitas que estudaremos a seguir.

Seja o intervalo de tempo fixo $[0, T]$. Dividiremos esse intervalo em N passos de tempos iguais de tamanho Δt, onde

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

e os tempos discretos no intervalo $[0, T]$ denotaremos por

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \cdots, N.$$

Assim, para qualquer função tempo-dependente, denotaremos $d^n = d(t_n)$ e consideremos as seguintes interpolações de Newmark com parâmetro $\beta \geq \dfrac{1}{4}$

$$d^n = \beta d^{n+1} + (1 - 2\beta)d^n + \beta d^{n-1} \tag{3.8.1}$$

onde β é usado para estabilizar o sistema aproximado e as aproximações de diferenças para a primeira e segunda derivadas dadas por

$$\begin{aligned} (d')^n &= \frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t} \\ (d'')^n &= \frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2} \end{aligned} \tag{3.8.2}$$

A aproximação da primeira derivada $(d')^n$ pode ser obtida seguindo as Fórmulas de Taylor, dada por

$$d(t + \Delta t) = d(t) + \Delta t d'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} d''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} d'''(t) \tag{3.8.3}$$

e de forma análoga

$$d(t-\Delta t) = d(t) - \Delta t d'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} d''(t) - \frac{\Delta t^3}{3!} d'''(t) \qquad (3.8.4)$$

Subtraindo (3.8.3)-(3.8.4), obtemos:

$$d(t+\Delta t) - d(t-\Delta t) = 2\Delta t d'(t) + \frac{\Delta t^3}{3} d'''(t)$$

Logo,

$$d'(t) = \frac{d(t+\Delta t) - d(t-\Delta t)}{2\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{6} d'''(t)$$

Então, tem-se:

$$d'(t) \cong \frac{1}{2\Delta t}\Big(d(t+\Delta t) - d(t-\Delta t)\Big)\ , \qquad \text{com erro } \ \mathrm{O}(\Delta t^2) \qquad (3.8.5)$$

Assim, no tempo discreto, temos:

$$(d')^n \cong \frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t} \qquad (3.8.6)$$

E a aproximação da segunda derivada $(d'')^n$ também é obtida seguindo as Fórmulas de Taylor, dada por

$$d(t+\Delta t) = d(t) + \Delta t d'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} d''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} d'''(t) + \frac{\Delta t^4}{4!} d^{iv}(t) \qquad (3.8.7)$$

$$d(t-\Delta t) = d(t) - \Delta t d'(t) + \frac{\Delta t^2}{2} d''(t) - \frac{\Delta t^3}{3!} d'''(t) + \frac{\Delta t^4}{4!} d^{iv}(t) \qquad (3.8.8)$$

Somando (3.8.7) e (3.8.8), obtemos:

$$d(t+\Delta t) + d(t-\Delta t) = 2d(t) + \Delta t^2 d''(t) + \frac{\Delta t^4}{12} d^{iv}(t)$$

Logo,

$$d''(t) = \frac{d(t+\Delta t) + d(t-\Delta t) - 2d(t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} d^{iv}(t)$$

Então, tem-se:

$$d''(t) \cong \frac{d(t+\Delta t) - 2d(t) + d(t-\Delta t)}{\Delta t^2}\ , \qquad \text{com erro } \ \mathrm{O}(\Delta t^2) \qquad (3.8.9)$$

Assim, no tempo discreto, temos:

$$(d'')^n \cong \frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2} \qquad (3.8.10)$$

Usando as aproximações, a discretização no tempo do sistema

$$Ad''(t) + Bd(t) - Cd(t) + Dd'(t) = 0$$

é dada por

$$\begin{aligned} &A\left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + B\left(\beta d^{n+1} + (1-2\beta)d^n + \beta d^{n-1}\right) - \\ &C\left(\beta d^{n+1} + (1-2\beta)d^n + \beta d^{n-1}\right) + D\left(\frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.8.11}$$

Então obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta(B-C) + \frac{D}{2\Delta t}\right)d^{n+1} &= \left(\frac{2A}{\Delta t^2} - (1-2\beta)(B-C)\right)d^n \\ &-\left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta(B-C) - \frac{D}{2\Delta t}\right)d^{n-1} \end{aligned} \tag{3.8.12}$$

Reescreveremos o sistema acima como

$$G(t_n)d^{n+1} = D1(t_n)d^n - D2(t_n)d^{n-1} \tag{3.8.13}$$

onde

- $G = A + \Delta t^2\beta B - \Delta t^2\beta C + \Delta t\dfrac{D}{2}$
- $D1 = 2A - \Delta t^2(1-2\beta)B + \Delta t^2(1-2\beta)C$
- $D2 = A + \Delta t^2\beta B - \Delta t^2\beta C - \Delta t\dfrac{D}{2}$

Quando considerarmos n=0, precisaremos calcular d^{-1}. O cálculo de d^{-1} será feito pela diferença central dada por:

$$d^{-1} = d^1 - 2\Delta t d'(0)$$

O sistema visto anteriormente é resolvido de forma recursiva para n. Logo, para $n = 0$, temos o sistema

$$G(t_0)d^1 = D1(t_0)d^0 - D2(t_0)d^{-1}$$

Logo, podemos então, obter d^1 resolvendo o sistema acima, já que conhecemos d^0 através das condições iniciais e d^{-1} pela diferença central.

Como já conhecemos os valores de d^0 e d^1, podemos então calcular o valor de d^2, para $n = 1$ e assim sucessivamente.

Na resolução do sistema linear utilizamos o Método de Eliminação de Gauss.

3.9 Cálculo do Erro

O conhecimento da solução possibilitará o cálculo do erro definido por

$$E(x) = u(x) - u_m(x) \tag{3.9.1}$$

A norma em $L^2(0,1)$ do erro E é definida por

$$\|E\|_0 = \left(\int_0^1 |E|^2 dx\right)^{1/2} \tag{3.9.2}$$

e pode ser calculada, usando o método do ponto médio quadrático

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \sum_{i=2}^{m} \left(\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right)^2 \cdot h_i \tag{3.9.3}$$

Logo, obtemos:

$$\|E\|_0 = \left(\sum_{i=2}^{m} (E_{i+1}+E_i)^2 \, \frac{h_i}{4}\right)^{1/2} \tag{3.9.4}$$

Como trabalhamos com uma malha uniforme de comprimento $h_i = h = \dfrac{1}{m}$, temos:

$$\|E\|_0 = \left(\sum_{i=2}^{m} (E_{i+1}+E_i)^2 \frac{1}{4m}\right)^{1/2} \tag{3.9.5}$$

E, a norma em $H_0^1(0,1)$ do erro E é definida por

$$\|E\|_1^2 = \int_0^1 \left(|E|^2 + \left|\frac{dE}{dx}\right|^2\right) dx = \int_0^1 |E|^2 dx + \int_0^1 \left|\frac{dE}{dx}\right|^2 dx \tag{3.9.6}$$

Temos que,

$$\begin{gathered} \int_0^1 |E|^2 dx = \|E\|_0^2 \quad \text{e} \\ \int_0^1 \left|\frac{dE}{dx}\right|^2 dx = \sum_{i=2}^{m} \left(\frac{dE}{dx}(x_i)\right)^2 \cdot h_i = \sum_{i=2}^{m} \left(\frac{E_{i+1}-E_i}{h_i}\right)^2 \cdot h_i \end{gathered} \tag{3.9.7}$$

Portanto,

$$\begin{gathered} \|E\|_1^2 = \sum_{i=2}^{m} (E_{i+1}+E_i)^2 \, \frac{h_i}{4} + \sum_{i=2}^{m} \left(\frac{E_{i+1}-E_i}{h_i}\right)^2 \cdot h_i \\ \Longrightarrow \|E\|_1 = \left(\sum_{i=2}^{m} (E_{i+1}+E_i)^2 \, \frac{h_i}{4} + \sum_{i=2}^{m} (E_{i+1}-E_i)^2 \frac{1}{h_i}\right)^{1/2} \end{gathered} \tag{3.9.8}$$

Como trabalhamos com $h_i = h = \dfrac{1}{m}$, temos:

$$\|E\|_1 = \left(\sum_{i=2}^{m}\left((E_{i+1}+E_i)^2\frac{1}{4m} + (E_{i+1}-E_i)^2\ m\right)\right)^{1/2} \tag{3.9.9}$$

Também, se $E(x,t) = u(x,t) - u_m(x,t)$, então a norma em $L^{\infty}(0,T;L^2(0,1))$ do erro E é definida por

$$\begin{aligned} \|E\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(0,1))} &= \max_{0\leq n\leq N} |E(x_i,t_n)|_{L^2(0,1)} \\ &= \max_{0\leq n\leq N}\left(\sum_{i=2}^{m}[E(x_{i+1},t_n)+E(x_i,t_n)]^2\ \frac{h_i}{4}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.9.10}$$

Sabendo que o comprimento da malha é $h_i = h = \dfrac{1}{m}$, temos:

$$\|E\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(0,1))} = \max_{0\leq n\leq N}\left(\sum_{i=2}^{m}[E(x_{i+1},t_n)+E(x_i,t_n)]^2\frac{1}{4m}\right)^{1/2} \tag{3.9.11}$$

E a norma em $L^{\infty}(0,T;H_0^1(0,1))$ do erro E é definida por

$$\begin{aligned} \|E\|_{L^{\infty}(0,T;H_0^1(0,1))} &= \max_{0\leq n\leq N} \|E(x_i,t_n)\|_{H_0^1(0,1)} \\ &= \max_{0\leq n\leq N}\left(\sum_{i=2}^{m}[E(x_{i+1},t_n)+E(x_i,t_n)]^2\ \frac{h_i}{4} + \sum_{i=2}^{m}[E(x_{i+1},t_n)-E(x_i,t_n)]^2\frac{1}{h_i}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.9.12}$$

onde, tomando $h_i = h = \dfrac{1}{m}$, tem-se

$$\begin{aligned} \|E\|_{L^{\infty}(0,T;H_0^1(0,1))} = \max_{0\leq n\leq N}\Bigg(\sum_{i=2}^{m}\Bigg([E(x_{i+1},t_n)+E(x_i,t_n)]^2\frac{1}{4m} + \\ [E(x_{i+1},t_n)-E(x_i,t_n)]^2\Bigg)\Bigg)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.9.13}$$

3.10 Simulações Numéricas

Serão mostrados nesta seção, alguns exemplos numéricos com o intuito de ilustrar algumas características do modelo de Kirchhoff para pequenas vibrações de cordas elásticas com densidade e seção transversal variáveis.

Resolver o problema (3.2.6), ou seja, encontrar $u_m(x,t)$ implica em encontrar uma solução aproximada do problema (3.1.6).

A força externa aplicada é, em nosso caso, nula. Mas, para constatarmos que a solução aproximada está sendo obtida corretamente, faremos exemplos numéricos cuja força será não nula. Donde teremos o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(x) + b(x,t)\displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left[c(x,t)\displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial u}{\partial x} & \\ + \, d(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) \ , & \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , & 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & 0 < x < 1 \end{cases} \tag{3.10.1}$$

No cálculo dessa força externa $f(x,t)$, substituimos a solução exata $u(x,t)$ definida a priori e respeitando as condições de fronteira, na equação definida em (3.10.1). Posteriormente, aplicamos o Método de β-Newmark no seguinte sistema de equações ordinárias

$$Ad''(t) + Bd(t) - Cd(t) + Dd'(t) = F$$

Aplicando o Método de β-Newmark no sistema acima, temos:

$$A\left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + B\left(\beta d^{n+1} + (1-2\beta)d^n + \beta d^{n-1}\right) - C\left(\beta d^{n+1} + (1-2\beta)d^n + \beta d^{n-1}\right)$$
$$+ D\left(\frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t}\right) = (\beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1})$$

Donde obtemos

$$\left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta(B-C) + \frac{D}{2\Delta t}\right)d^{n+1} = (\beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1}) +$$
$$\left(\frac{2A}{\Delta t^2} - (1-2\beta)(B-C)\right)d^n - \left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta(B-C) - \frac{D}{2\Delta t}\right)d^{n-1}$$

Reescreveremos então, o sistema acima como

$$G(t_n)d^{n+1} = F^{*n} + D1(t_n)d^n - D2(t_n)d^{n-1}$$

onde

- $G = A + \Delta t^2 \beta B - \Delta t^2 \beta C + \Delta t \dfrac{D}{2}$
- $F^{*n} = \beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1}$
- $D1 = 2A - \Delta t^2(1-2\beta)B + \Delta t^2(1-2\beta)C$
- $D2 = A + \Delta t^2 \beta B - \Delta t^2 \beta C - \Delta t \dfrac{D}{2}$

Os exemplos que veremos adiante, mostram o movimento de uma corda que possui seus extremos fixos.

3.10.1 Exemplo 1

Considere a solução exata para o problema (3.10.1) dada por

$$u(x,t) = \frac{(x^2-x)e^{-t}}{\pi^2}$$

com posição inicial da corda

$$u(x,0) = \frac{(x^2-x)}{\pi^2}$$

e velocidade inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{(x^2-x)}{\pi^2}$$

onde

- $a(x,t) = x+1$, ou seja, $\tau_0 = 1$, $\rho(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $\gamma_0 = 1$ (pois as extremidades são fixas $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = 1$)
- $b(x,t) = x^2 + x$, ou seja, $E = 1$ e $\sigma(x,t) = x$
- $c(x,t) = 1$
- $d(x,t) = 1$

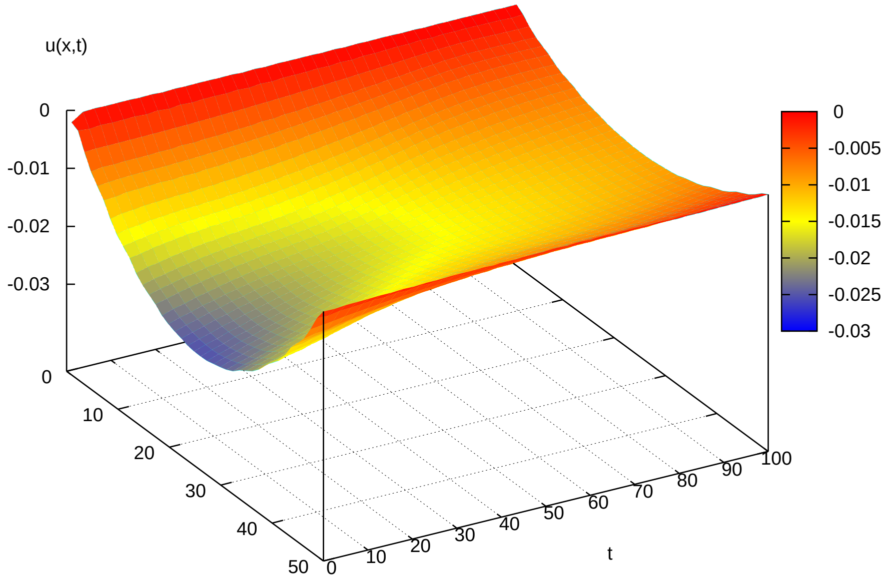

Figura 3.3: Gráfico de $u_m(x,t)$

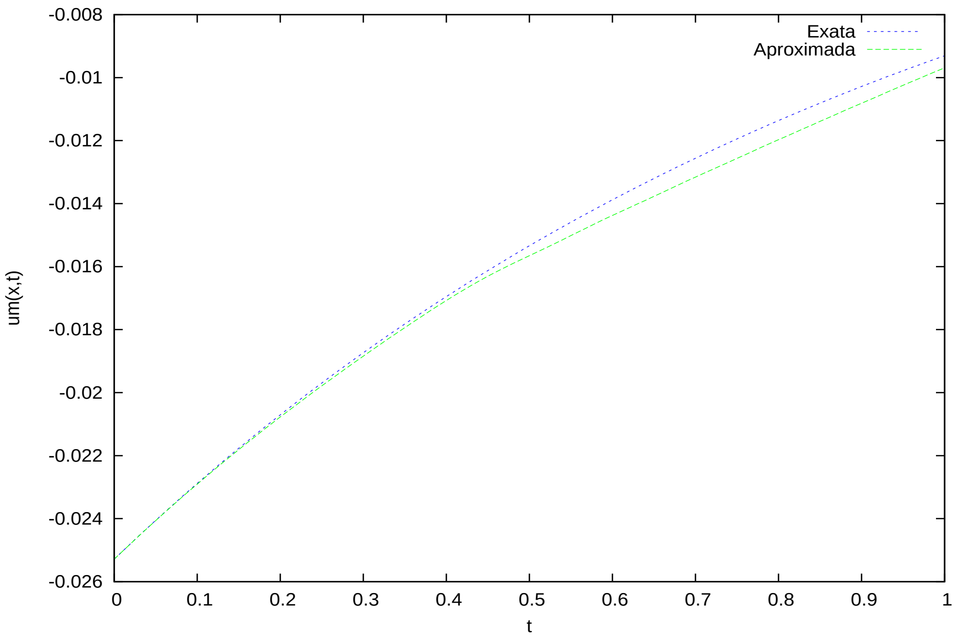

Figura 3.4: $u_m(25,t)$ e $u(25,t)$

A Figura 3.3 mostra o movimento de uma corda com extremos fixos.

A Figura 3.4 representa as soluções exata e aproximada no ponto x = 25 (quantidade de elementos considerados) com $t \; \epsilon \; [0, 1]$. Verificamos que a solução aproximada encontrada para o problema (3.10.1) está próxima da solução exata conhecida, cujo erro podemos ver na Tabela 3.1.

Nel	N	T	β	$E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$	$E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$
50	50	1.0	0.25	0.000123	0.000750
50	50	1.0	0.5	0.000123	0.000749
50	50	1.0	1.0	0.000123	0.000749
50	100	1.0	0.25	0.000122	0.000745
50	100	1.0	0.5	0.000122	0.000745
50	100	1.0	1.0	0.000122	0.000745
100	50	1.0	0.25	0.000123	0.000774
100	50	1.0	0.5	0.000123	0.000773
100	50	1.0	1.0	0.000123	0.000773
100	100	1.0	0.25	0.000123	0.000769
100	100	1.0	0.5	0.000123	0.000769
100	100	1.0	1.0	0.000123	0.000769

Tabela 3.1: Exemplo 1

Na Tabela 3.1, temos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ e $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ obtiveram melhores resultados quando tomamos $Nel = 50$, $N = 100$, $T = 1.0$ e $\beta = 0.25$, 0.5 e 1.0.

Consideraremos agora, a força externa nula com o intuito de encontrarmos uma solução aproximada para o problema (3.1.6).

A Figura 3.5 representa esta solução.

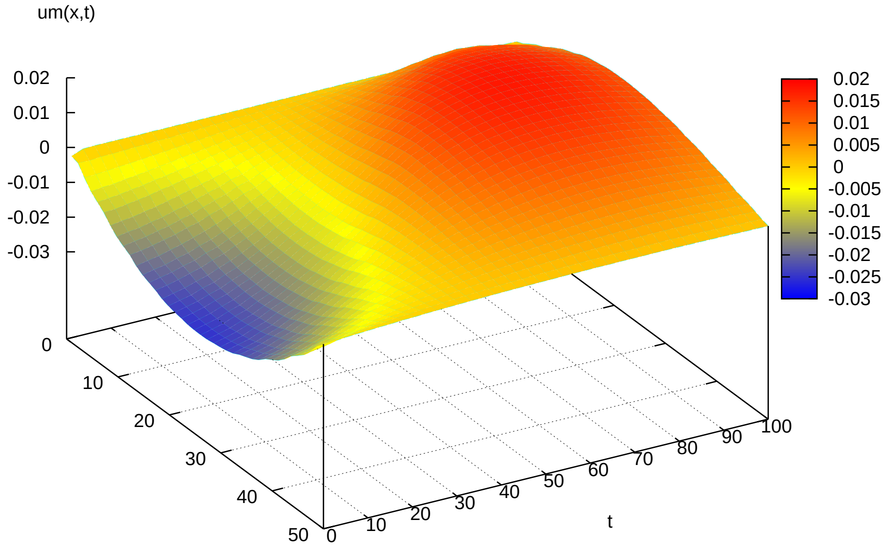

Figura 3.5: Gráfico de $u_m(x,t)$

3.10.2 Exemplo 2

Considere a solução exata para o problema (3.10.1) dada por

$$u(x,t) = \frac{sen(\pi x)cos(\pi t)}{\pi^2}$$

com posição inicial da corda

$$u(x,0) = \frac{sen(\pi x)}{\pi^2}$$

e velocidade inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

onde

- $a(x,t) = x+1$, ou seja, $\tau_0 = 1$, $\rho(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $\gamma_0 = 1$ (pois as extremidades são fixas $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = 1$)
- $b(x,t) = x^2 + x$, ou seja, $E = 1$ e $\sigma(x,t) = x$
- $c(x,t) = 1$
- $d(x,t) = 1$

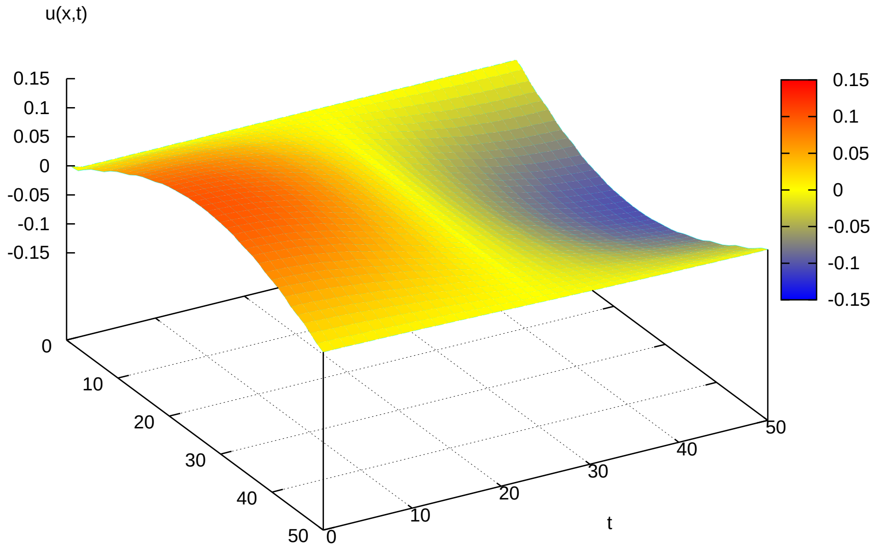

Figura 3.6: Gráfico de $u_m(x,t)$

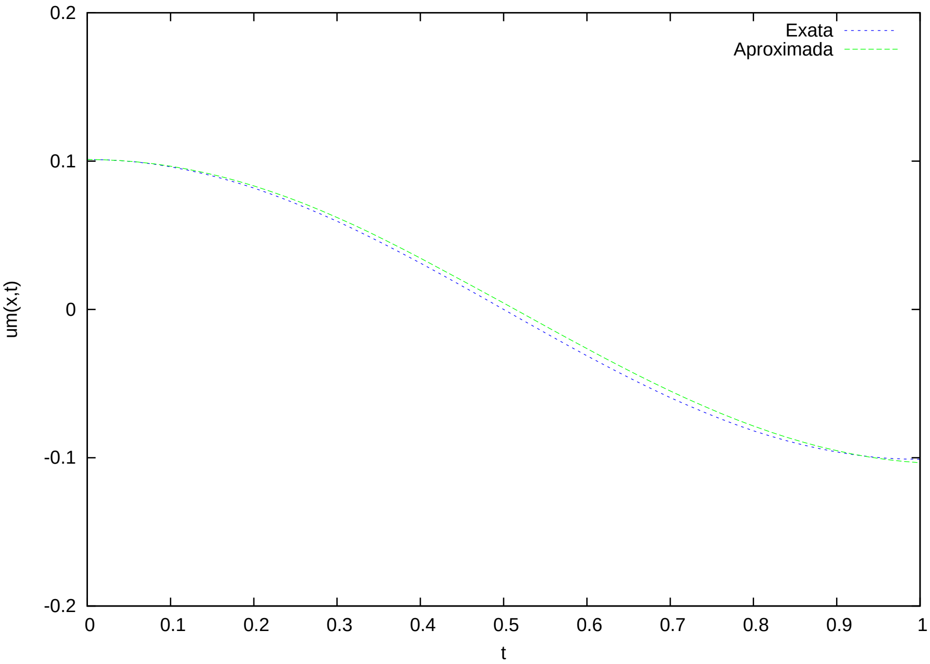

Figura 3.7: $u_m(25,t)$ e $u(25,t)$

A Figura 3.7 representa as soluções exata e aproximada no ponto x = 25 com $t \epsilon [0, 1]$. Verificamos que a solução aproximada encontrada para o problema (3.10.1) está próxima da solução exata conhecida, cujo erro podemos ver na Tabela 3.2.

Nel	N	T	β	$E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$	$E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$
50	50	1.0	0.25	0.005719	0.034281
50	50	1.0	0.5	0.005735	0.034373
50	50	1.0	1.0	0.005762	0.034649
50	100	1.0	0.25	0.005731	0.034588
50	100	1.0	0.5	0.005735	0.034529
50	100	1.0	1.0	0.005742	0.034476
100	50	1.0	0.25	0.005731	0.035643
100	50	1.0	0.5	0.005747	0.035801
100	50	1.0	1.0	0.005774	0.036045
100	100	1.0	0.25	0.005743	0.035871
100	100	1.0	0.5	0.005747	0.035835
100	100	1.0	1.0	0.005754	0.035897

Tabela 3.2: Exemplo 2

Na Tabela 3.2, temos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ e $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ obtiveram melhores resultados quando tomamos $Nel = 50$, $N = 50$, $T = 1.0$ e $\beta = 0.25$.

Consideraremos agora a força externa nula.

A Figura 3.8 representa esta solução.

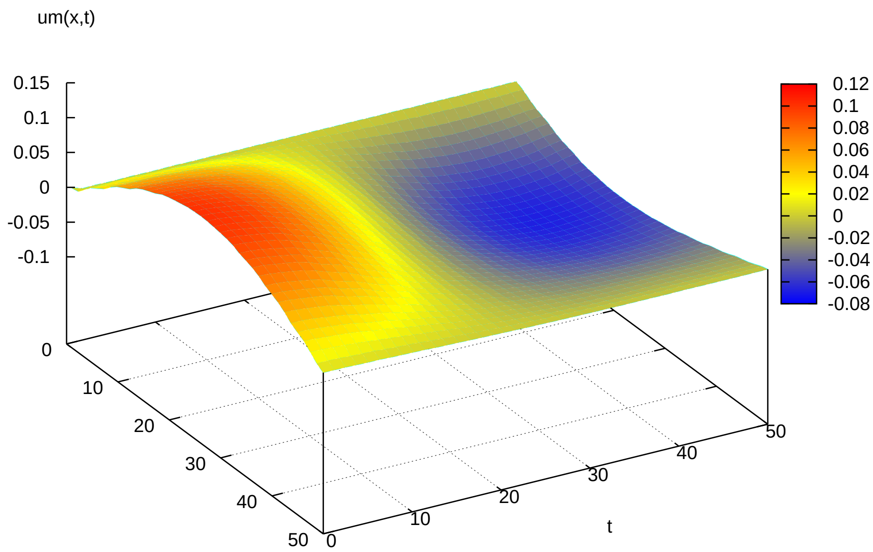

Figura 3.8: Gráfico de $u_m(x,t)$

3.10.3 Exemplo 3

Considere a solução exata para o problema (3.10.1) dada por

$$u(x,t) = \frac{(x^2 - x)e^{-t}}{\pi^4}$$

com posição inicial da corda

$$u(x,0) = \frac{(x^2 - x)}{\pi^4}$$

e velocidade inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{(x^2 - x)}{\pi^4}$$

onde

- $a(x,t) = 1 + \dfrac{x}{10}$, ou seja, $\tau_0 = 1$, $\rho(x) = \dfrac{10}{x+10}$ e $\gamma_0 = 1$ (pois as extremidades são fixas $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = 1$)
- $b(x,t) = x(x+10)$, ou seja, $E = 1$ e $\sigma(x,t) = \dfrac{x}{10}$
- $c(x,t) = \dfrac{1}{10}$
- $d(x,t) = 1$

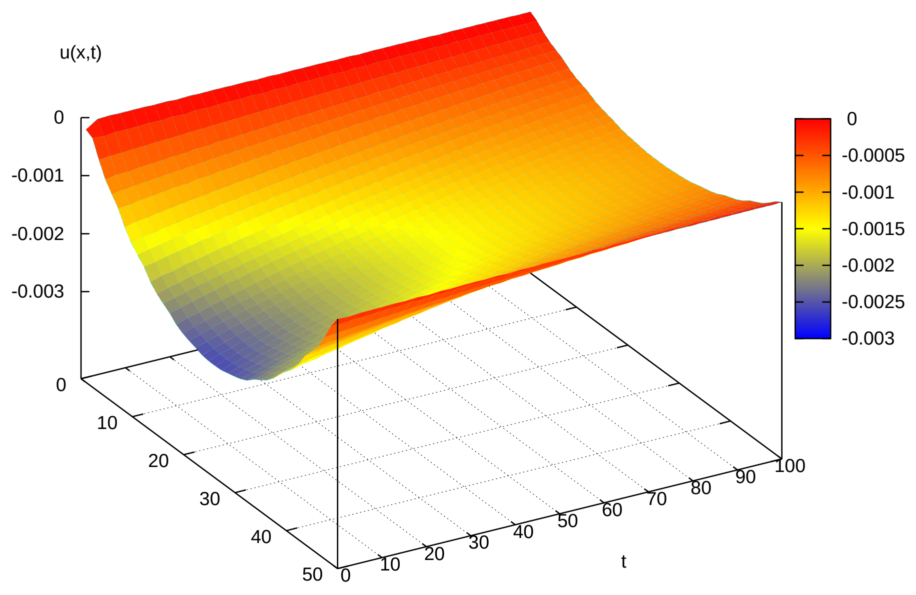

Figura 3.9: Gráfico de $u_m(x,t)$

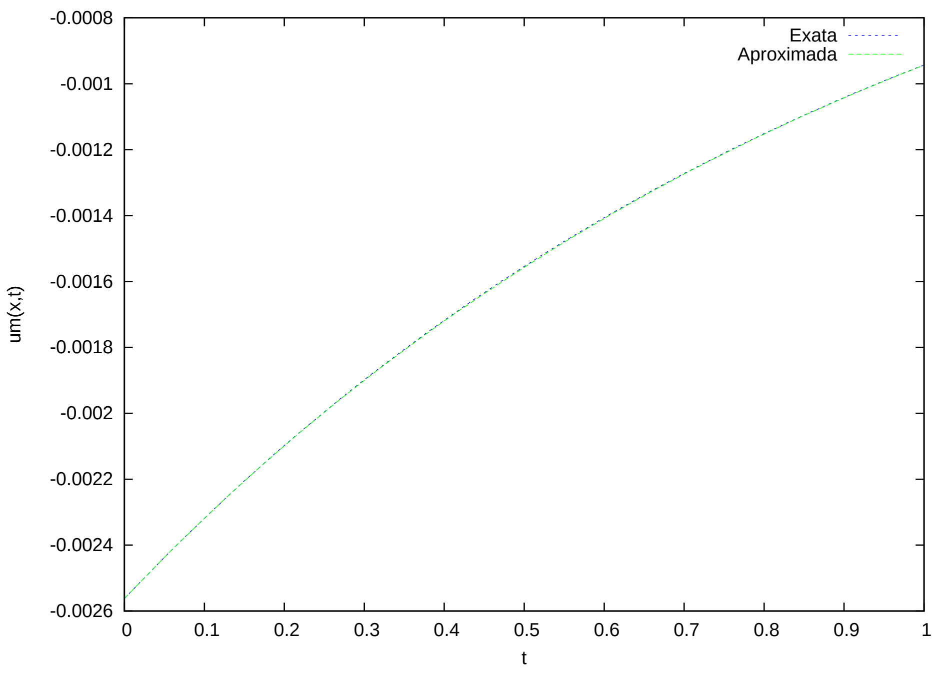

Figura 3.10: $u_m(25,t)$ e $u(25,t)$

A Figura 3.10 representa as soluções exata e aproximada no ponto x = 25 com $t \epsilon [0,1]$. Verificamos que a solução aproximada encontrada para o problema (3.10.1) está próxima da solução exata conhecida, cujo erro podemos ver na Tabela 3.3.

Nel	N	T	β	$E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$	$E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$
50	50	1.0	0.25	0.000016	0.000097
50	50	1.0	0.5	0.000016	0.000097
50	50	1.0	1.0	0.000016	0.000097
50	100	1.0	0.25	0.000016	0.000097
50	100	1.0	0.5	0.000016	0.000097
50	100	1.0	1.0	0.000016	0.000097
100	50	1.0	0.25	0.000016	0.000100
100	50	1.0	0.5	0.000016	0.000100
100	50	1.0	1.0	0.000016	0.000100
100	100	1.0	0.25	0.000016	0.000099
100	100	1.0	0.5	0.000016	0.000099
100	100	1.0	1.0	0.000016	0.000099

Tabela 3.3: Exemplo 3

Na Tabela 3.3, temos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ e $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ apresentam bons resultados.

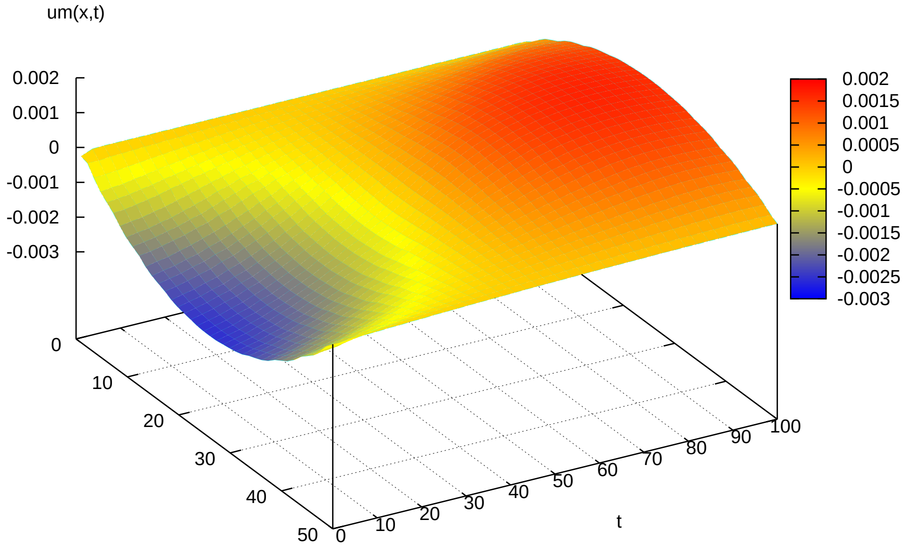

Figura 3.11: Gráfico de $u_m(x,t)$

Considerando agora a força externa nula, cujo objetivo é encontrarmos uma solução aproximada para o problema (3.1.6), temos a Figura 3.11 que mostra o movimento de uma corda que possui seus extremos fixos.

Capítulo 4

Vibração de Cordas Elásticas

4.1 Formulação do Problema

O modelo proposto a seguir também é uma extensão do modelo de Kirchhoff para pequenas vibrações de cordas elásticas e o modelo é dado por

$$\rho(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[b(x,t)\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho'(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{4.1.1}$$

onde

$$b(x,t) = \frac{E\sigma(x,t)}{\gamma_o^2 \rho(x,t)}$$

$u(x,t)$ é o deslocamento vertical do ponto x da corda no tempo t, ρ é a densidade de massa, σ é a seção transversal da corda, γ é a tensão e E o módulo do modelo de Young do material e $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são funções que dão movimento nos extremos da corda durante a vibração, sendo $\alpha(t) < \beta(t)$ e $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$.

No nosso modelo, consideraremos as extremidades fixas, ou seja, $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = 1$.

O problema que estudaremos será o de determinar uma função $u = u(x,t)$, no espaço das soluções $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, tal que,

$$\begin{cases} \rho(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[b(x,t)\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho'(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0\ , \quad \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ , \qquad\qquad 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x)\ , \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \qquad 0 < x < 1 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

4.2 Método dos Elementos Finitos

4.2.1 Formulação Variacional

Seja $D(\Omega)$ o espaço das funções testes, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e $w \in D(\Omega)$. Multiplicando a primeira equação do Problema (4.1.2) por w e integrando em $\Omega = (0,1)$, tem-se:

$$\int_0^1 M_1(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w\,dx + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M_2(x,t)w)\,dx + \int_0^1 M_3(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} w\,dx = 0 \qquad (4.2.1)$$

onde

$$M_1(x,t) = \rho(x,t) \qquad (4.2.2)$$

$$M_2(x,t) = b(x,t)\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (4.2.3)$$

$$M_3(x,t) = \rho'(x,t) \qquad (4.2.4)$$

4.2.2 Método de Galerkin

Considere um subespaço V_m gerado pelos m primeiros elementos da base do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m] \qquad (4.2.5)$$

onde $[\varphi_i]_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base de $H_0^1(\Omega)$.

Buscamos, então, uma solução aproximada $u_m = u_m(x,t)$ do Problema (4.1.2), no subespaço V_m.

Solução Aproximada

Aproximamos o Problema (4.1.2), pelo problema de determinar no espaço das soluções V_m, uma função $u_m = u_m(x,t)$, tal que,

$$\begin{cases} \left(M_1(x,t)\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, w\right) + \left(\dfrac{\partial u_m}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial x}(M_2(x,t)w)\right) + \left(M_3(x,t)\dfrac{\partial u_m}{\partial t}, w\right) = 0 \quad \forall w \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \qquad \text{em } H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial t}(0) = u_{1m} \to u_1 \qquad \text{em } H_0^1(0,1) \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Substituindo $u_m = u_m(x,t)$ na equação (4.2.1), temos:

$$\int_0^1 M_1(x,t)\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} w\,dx + \int_0^1 \frac{\partial u_m}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M_2(x,t)w)\,dx + \int_0^1 M_3(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial t} w\,dx = 0 \tag{4.2.7}$$

Como $u_m(x,t) \in V_m$, podemos escrever

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in V_m \tag{4.2.8}$$

e assim obtemos:

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \sum_{i=1}^m d_i'(t)\varphi_i(x), \tag{4.2.9}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum_{i=1}^m d_i(t)\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}, \tag{4.2.10}$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^m d_i''(t)\varphi_i(x), \tag{4.2.11}$$

Substituindo de (4.2.9) à (4.2.11) em (4.2.7) e tendo $w \in V_m$, podemos tomar em particular, $w = \varphi_j$, $j = 1, \cdots, m$.

$$\sum_{i=1}^m d_i''(t)\int_0^1 M_1(x,t)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx + \sum_{i=1}^m d_i(t)\int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M_2(x,t)\varphi_j(x))\,dx$$

$$+ \sum_{i=1}^m d_i'(t)\int_0^1 M_3(x,t)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \tag{4.2.12}$$

4.3 Função de Interpolação

Usando a Seção 3.3 (Função de Interpolação juntamente com Problema Local) mencionada no Capítulo 3, obtemos a seguinte equação:

$$\sum_{a=1}^{2} d_a''^e(t)\int_{x_1^e}^{x_2^e} M_1(x,t)\varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\,dx + \sum_{a=1}^{2} d_a^e(t)\int_{x_1^e}^{x_2^e}\frac{\partial\varphi_a^e(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M_2(x,t)\varphi_b^e(x))\,dx$$
$$+\sum_{a=1}^{2} d_a'^e(t)\int_{x_1^e}^{x_2^e} M_3(x,t)\varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\,dx = 0 \tag{4.3.1}$$

para $1 \leq a, b \leq 2$ e $\boldsymbol{e} = 1, 2, \cdots, m$.

Devido a existência das funções $M_1(x,t)$, $M_2(x,t)$ e $M_3(x,t)$ nas integrais, consideraremos essas funções constantes em cada elemento finito $\boldsymbol{e}$. Logo, tomando $M_1(x,t) = M_1^e(t)$, $M_2(x,t) = M_2^e(t)$ e $M_3(x,t) = M_3^e(t)$ e considerando x constante em cada elemento finito $\boldsymbol{e}$, obtemos:

$$\sum_{a=1}^{2} d_a''^e(t)M_1^e(t)\int_{x_1^e}^{x_2^e}\varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\,dx + \sum_{a=1}^{2} d_a^e(t)M_2^e(t)\int_{x_1^e}^{x_2^e}\frac{\partial\varphi_a^e(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_b^e(x)}{\partial x}\,dx$$
$$+\sum_{a=1}^{2} d_a'^e(t)M_3^e(t)\int_{x_1^e}^{x_2^e}\varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\,dx = 0 \tag{4.3.2}$$

para $1 \leq a, b \leq 2$ e $\boldsymbol{e} = 1, 2, \cdots, m$.

4.4 Cálculo das Matrizes

Denotando por

$$A = \sum_{e=1}^{m} A_{ab}^e\ , \qquad B = \sum_{e=1}^{m} B_{ab}^e \qquad \text{e} \qquad D = \sum_{e=1}^{m} D_{ab}^e$$

Restringindo as matrizes A, B, D a cada elemento $\boldsymbol{e}$ temos:

$$A_{ab}^e = M_1^e(t)\int_{x_1^e}^{x_2^e}\varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\,dx \tag{4.4.1}$$

$$B_{ab}^e = M_2^e(t)\int_{x_1^e}^{x_2^e}\frac{\partial\varphi_a^e(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_b^e(x)}{\partial x}\,dx \tag{4.4.2}$$

$$D^e_{ab} = M^e_3(t) \int_{x^e_1}^{x^e_2} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\, dx = M^e_3(t) A^e_{ab} \qquad (4.4.3)$$

para $1 \leq a, b \leq 2$.

As matrizes locais A^e_{ab}, B^e_{ab} e D^e_{ab} são de ordem (2×2). Essas matrizes locais de ordem (2×2) foram introduzidas devido ao fato delas terem muitos zeros, pois $\varphi_a(x)\varphi_b(x) = 0$, se $|a - b| \geq 2$.

4.5 Matrizes Locais A^e_{ab}, B^e_{ab} e D^e_{ab}

4.5.1 Matriz Local A^e_{ab}

A matriz local simétrica A^e_{ab} dada em (4.4.1) por:

$$A^e_{ab} = M^e_1(t) \int_{x^e_1}^{x^e_2} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\, dx$$

com $1 \leq a, b \leq 2$.

Aplicando a transformação isoparamétrica vista anteriormente no Capítulo 3 (3.5.1) em (4.4.1) e utilizando a função definida em (3.6.2), vista também no Capítulo anterior, obteremos os elementos da matriz local A^e_{ab} dados por

$$A^e_{ab} = \frac{hM^e_1(t)}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.5.1)$$

4.5.2 Matriz Local B^e_{ab}

A matriz local simétrica B^e_{ab} dada em (4.4.2) por

$$B^e_{ab} = M^e_2(t) \int_{x^e_1}^{x^e_2} \frac{\partial\varphi^e_a(x)}{\partial x} \frac{\partial\varphi^e_b(x)}{\partial x}\, dx$$

com $1 \leq a, b \leq 2$.

Aplicando a transformação isoparamétrica vista anteriormente no Capítulo 3 (3.5.1) em (4.4.2) e utilizando a função definida em (3.6.10), vista também no Capítulo anterior, obteremos os elementos da matriz local B^e_{ab} dados por

$$B^e_{ab} = \frac{M^e_2(t)}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.5.2)$$

4.5.3 Matriz Local D^e_{ab}

A matriz local simétrica D^e_{ab} dada em (4.4.3) por:

$$D^e_{ab} = M^e_3(t) \int_{x_1}^{x_2} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\, dx$$

com $1 \leq a, b \leq 2$.

Aplicando a transformação isoparamétrica vista anteriormente no Capítulo 3 (3.5.1) em (4.4.3) e utilizando a função definida em (3.6.2), vista também no Capítulo anterior, obteremos os elementos da matriz local D^e_{ab} dados por:

$$D^e_{ab} = \frac{hM^e_3(t)}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.5.3}$$

4.6 Matrizes Globais A, B e D

4.6.1 Matriz Global A

Sendo A^e_{ab} , a matriz local dada em (4.5.1) por

$$A^e_{ab} = \frac{hM^e_1(t)}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo visto anteriormente no Capítulo 3 em (3.7.8) na matriz A^e_{ab} e sendo ela simétrica e tridiagonal, optamos por colocá-la na forma de coluna, onde temos:

$$A = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 0 & 2(M^1_1(t) + M^2_1(t)) & 1 \\ 1 & 2(M^2_1(t) + M^3_1(t)) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2(M^{m-1}_1(t) + M^m_1(t)) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6.1}$$

4.6.2 Matriz Global B

Sendo B^e_{ab} , a matriz local dada em (4.5.2) por

$$B^e_{ab} = \frac{M^e_2(t)}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo (3.7.8) na matriz B^e_{ab} e sendo ela simétrica e tridiagonal, optamos por colocá-la na forma de coluna, onde temos:

$$B = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & M_2^1(t) + M_2^2(t) & -M_2^1(t) \\ -M_2^1(t) & M_2^2(t) + M_2^3(t) & -M_2^2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -M_2^{m-2}(t) & M_2^{m-1}(t) + M_2^m(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6.2}$$

4.6.3 Matriz Global D

Sendo D^e_{ab} , a matriz local dada em (4.5.3) por

$$D^e_{ab} = \frac{hM_3^e(t)}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo (3.7.8) na matriz D^e_{ab} e sendo ela simétrica e tridiagonal, optamos por colocá-la na forma de coluna, onde temos:

$$D = h\begin{bmatrix} 0 & \left(\dfrac{M_3^1(t) + M_3^2(t)}{3}\right) & \dfrac{M_3^1(t)}{3} \\ \dfrac{M_3^1(t)}{3} & \left(\dfrac{M_3^2(t) + M_3^3(t)}{3}\right) & \dfrac{M_3^2(t)}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{M_3^{m-2}(t)}{3} & \left(\dfrac{M_3^{m-1}(t) + M_3^m(t)}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6.3}$$

Substituindo de (4.6.1) a (4.6.3) em (4.3.2) podemos escrever (4.3.2) no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$Ad''(t) + Bd(t) + Dd'(t) = 0$$

onde denotamos

$$d(t) = d^m(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_m(t) \end{bmatrix} \tag{4.6.4}$$

4.7 Método de β-Newmark

A equação $Ad''(t)+Bd(t)+Dd'(t)=0$ representa um sistema de equações diferencias ordinárias de segunda ordem e o método escolhido para resolver esse sistema foi o método de β-Newmark, visto anteriormente no Capítulo 3, em (3.8).

Usando as aproximações já vistas no Capítulo 3, a discretização no tempo é dada por:

$$A\left(\frac{d^{n+1}-2d^{n}+d^{n-1}}{\Delta t^{2}}\right)+B\left(\beta d^{n+1}+(1-2\beta)d^{n}+\beta d^{n-1}\right)\;+\;D\left(\frac{d^{n+1}-d^{n-1}}{2\Delta t}\right)=0 \tag{4.7.1}$$

onde obtemos

$$\left(\frac{A}{\Delta t^{2}}+\beta B+\frac{D}{2\Delta t}\right)d^{n+1}=\left(\frac{2A}{\Delta t^{2}}-(1-2\beta)B\right)d^{n}\;-\;\left(\frac{A}{\Delta t^{2}}+\beta B-\frac{D}{2\Delta t}\right)d^{n-1} \tag{4.7.2}$$

Reescreveremos o sistema acima como

$$G(t_n)d^{n+1}=D1(t_n)d^{n}-D2(t_n)d^{n-1} \tag{4.7.3}$$

onde

- $G=A+\Delta t^{2}\beta B+\Delta t\dfrac{D}{2}$
- $D1=2A-\Delta t^{2}(1-2\beta)B$
- $D2=A+\Delta t^{2}\beta B-\Delta t\dfrac{D}{2}$

O sistema acima é resolvido de forma recursiva para n. Logo, para $n=0$, temos o sistema

$$G(t_0)d^{1}=D1(t_0)d^{0}-D2(t_0)d^{-1}$$

Logo, podemos então, obter d^1 resolvendo o sistema acima, já que conhecemos d^0 através das condições iniciais e d^{-1} pela diferença central, dada por

$$d^{-1}=d^{1}-2\Delta t d'(0)$$

Como já conhecemos os valores de d^0, d^1, podemos então calcular o valor de d^2 para $n=1$ e assim sucessivamente.

Na resolução do sistema linear utilizamos o Método de Eliminação de Gauss.

4.8 Simulações Numéricas

Serão mostrados nesta seção, alguns exemplos numéricos com o intuito de ilustrar algumas características do modelo de Kirchhoff para pequenas vibrações de cordas elásticas com densidade e seção transversal variáveis.

Resolver o problema (4.2.6), ou seja, encontrar $u_m(x,t)$ implica em encontrar uma solução aproximada do problema (4.1.2).

A força externa aplicada é, em nosso caso, nula. Mas, para constatarmos que a solução aproximada está sendo obtida corretamente, faremos exemplos numéricos cuja força será não nula. Donde teremos o problema

$$\begin{cases} \rho(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[b(x,t)\displaystyle\int_0^1 \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho'(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)\ , & \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ , & 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x)\ , \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & 0 < x < 1 \end{cases} \tag{4.8.1}$$

No cálculo dessa força externa $f(x,t)$, substituimos a solução exata $u(x,t)$ definida a priori e respeitando as condições de fronteira, na equação definida em (4.8.1). Posteriormente, aplicamos o Método de β-Newmark no seguinte sistema de equações ordinárias

$$Ad''(t) + Bd(t) + Dd'(t) = F$$

Aplicando o Método de β-Newmark no sistema acima, temos:

$$A\left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + B\left(\beta d^{n+1} + (1-2\beta)d^n + \beta d^{n-1}\right) + D\left(\frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t}\right) =$$
$$(\beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1})$$

Donde obtemos

$$\left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta B + \frac{D}{2\Delta t}\right)d^{n+1} = (\beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1}) +$$
$$\left(\frac{2A}{\Delta t^2} - (1-2\beta)B\right)d^n - \left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta B - \frac{D}{2\Delta t}\right)d^{n-1}$$

Reescreveremos então, o sistema acima como

$$G(t_n)d^{n+1} = F^{*n} + D1(t_n)d^n - D2(t_n)d^{n-1}$$

onde

- $G = A + \Delta t^2 \beta B + \Delta t \dfrac{D}{2}$
- $F^{*n} = \beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1}$
- $D1 = 2A - \Delta t^2(1-2\beta)B$
- $D2 = A + \Delta t^2 \beta B - \Delta t \dfrac{D}{2}$

Os exemplos que veremos adiante, mostram o movimento de uma corda que possui seus extremos fixos.

4.8.1 Exemplo 1

Considere a solução exata para o problema (4.8.1) dada por

$$u(x,t) = \frac{(x^2 - x)e^{-t}}{\pi^4}$$

com posição inicial da corda

$$u(x,0) = \frac{(x^2 - x)}{\pi^4}$$

e velocidade inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{(x^2 - x)}{\pi^4}$$

onde

- $\rho(x,t) = 1 + \dfrac{x}{10}$
- $\rho'(x,t) = \dfrac{1}{10}$
- $b(x,t) = 1$, ou seja, $E = 1$, $\sigma(x,t) = 1 + \dfrac{x}{10}$ e $\gamma_0 = 1$ (pois as extremidades são fixas $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = 1$)

A Figura 4.1 mostra o movimento de uma corda com extremos fixos.

A Figura 4.2 representa as soluções exata e aproximada no ponto x = 25 com $t \in [0,1]$. Verificamos que a solução aproximada encontrada para o problema (4.8.1) está bem próxima da solução exata conhecida, cujo erro podemos ver na Tabela 4.1.

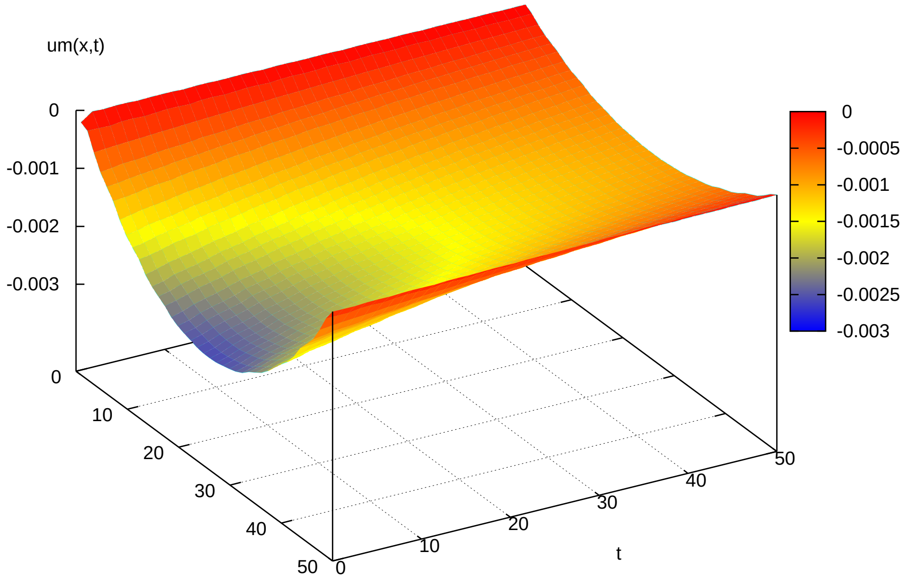

Figura 4.1: Gráfico de $u_m(x,t)$

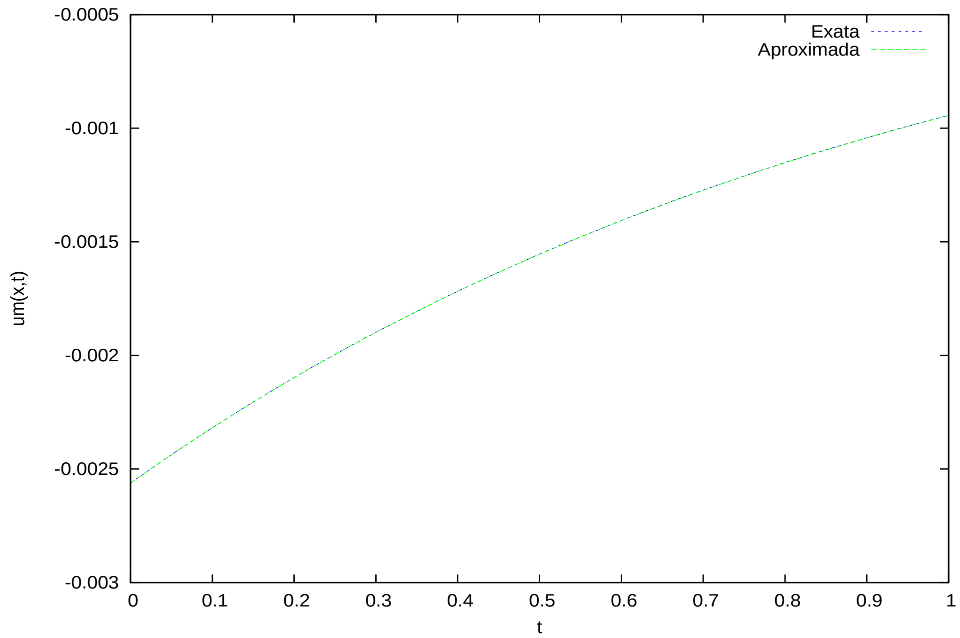

Figura 4.2: $u_m(25,t)$ e $u(25,t)$

Nel	N	T	β	$E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$	$E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$
50	50	1.0	0.25	0.000001	0.000002
50	50	1.0	0.5	0.000001	0.000002
50	50	1.0	1.0	0.000001	0.000003
50	100	1.0	0.25	0.000001	0.000002
50	100	1.0	0.5	0.000001	0.000002
50	100	1.0	1.0	0.000001	0.000002
100	50	1.0	0.25	0.000001	0.000001
100	50	1.0	0.5	0.000001	0.000002
100	50	1.0	1.0	0.000001	0.000002
100	100	1.0	0.25	0.000000	0.000001
100	100	1.0	0.5	0.000000	0.000001
100	100	1.0	1.0	0.000000	0.000001

Tabela 4.1: Exemplo 1

Na Tabela 4.1, considerando $Nel = N = 50$, $T = 1.0$ e β variando, temos que:

- Para $\beta = 0.25$, $\beta = 0.5$ e $\beta = 1.0$ percebemos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ apresenta bons resultados e para $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.5$, percebemos que $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ apresenta um melhor resultado do que para $\beta = 1.0$.

Considerando agora, $Nel = 50$, $N = 100$, $T = 1.0$ e β variando, temos que:

- Para $\beta = 0.25$, $\beta = 0.5$ e $\beta = 1.0$ percebemos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ e $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ apresentam bons resultados.

Considerando, $Nel = 100$, $N = 50$, $T = 1.0$ e β variando, temos que:

- Para $\beta = 0.25$, $\beta = 0.5$ e $\beta = 1.0$, percebemos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ apresenta bons resultados e para $\beta = 0.25$, percebemos que $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ apresenta um melhor resultado do que para $\beta = 0.5$ e $\beta = 1.0$.

Considerando agora, $Nel = 100$, $N = 100$, $T = 1.0$ e β variando, temos que:

- Para $\beta = 0.25$, $\beta = 0.5$ e $\beta = 1.0$ percebemos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ e $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ também apresentam bons resultados.

Consideraremos agora a força externa nula com o intuito de encontrarmos uma solução aproximada para o problema (4.1.2).

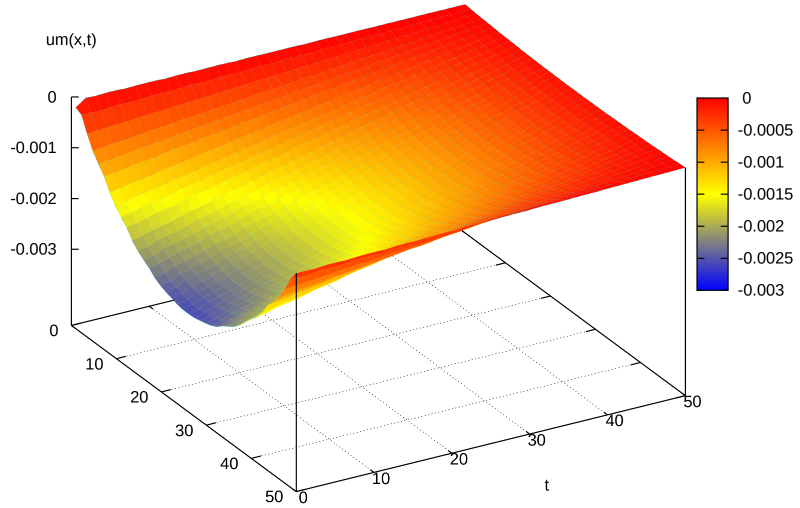

Figura 4.3: $u_m(25,t)$ e $u(25,t)$

A Figura 4.3 representa esta solução.

4.8.2 Exemplo 2

Considere a solução exata para o problema (4.8.1) dada por

$$u(x,t) = \frac{(x^2-x)e^t}{\pi^4}$$

com posição inicial da corda

$$u(x,0) = \frac{(x^2-x)}{\pi^4}$$

e velocidade inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{(x^2-x)}{\pi^4}$$

onde

- $\rho(x,t) = 1 + x^2 - x$
- $\rho'(x,t) = 2x - 1$
- $b(x,t) = \frac{x}{2}$, ou seja, $E = 1$, $\sigma(x,t) = \frac{x(1+x^2-x)}{2}$ e $\gamma_0 = 1$ (pois as extremidades são fixas $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = 1$)

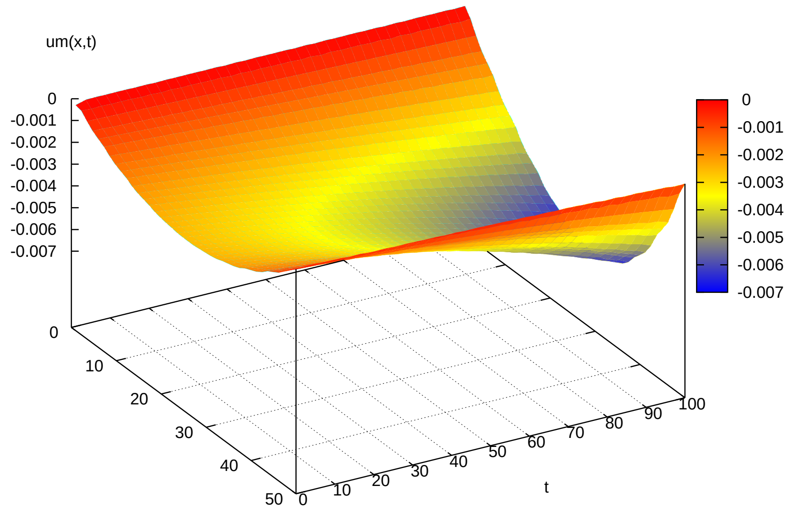

Figura 4.4: Gráfico de $u_m(x,t)$

A Figura 4.5 representa as soluções exata e aproximada no ponto x = 25 com $t \;\epsilon\; [0,1]$. Verificamos que a solução aproximada encontrada para o problema (4.8.1) está próxima da solução exata conhecida, cujo erro podemos ver na Tabela 4.2.

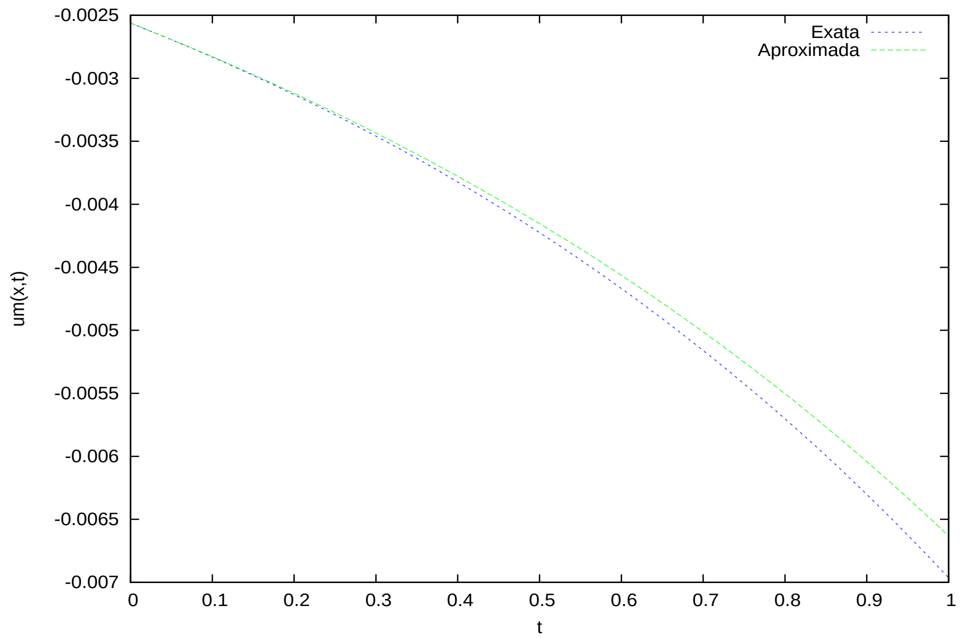

Figura 4.5: $u_m(25,t)$ e $u(25,t)$

Nel	N	T	β	$E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$	$E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$
50	50	1.0	0.25	0.000625	0.003653
50	50	1.0	0.5	0.000625	0.003653
50	50	1.0	1.0	0.000625	0.003654
50	100	1.0	0.25	0.000621	0.003628
50	100	1.0	0.5	0.000621	0.003628
50	100	1.0	1.0	0.000621	0.003628
100	50	1.0	0.25	0.000624	0.003771
100	50	1.0	0.5	0.000624	0.003771
100	50	1.0	1.0	0.000624	0.003772
100	100	1.0	0.25	0.000620	0.003746
100	100	1.0	0.5	0.000620	0.003746
100	100	1.0	1.0	0.000620	0.003746

Tabela 4.2: Exemplo 2

Na Tabela 4.2, considerando $Nel = N = 100$, $T = 1.0$, $\beta = 0.25$, 0.5 e 1.0 percebemos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ obteve melhores resultados. Já para $Nel = 50$, $N = 100$, $T = 1.0$, $\beta = 0.25$, 0.5 e 1.0, percebemos que $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ apresentou melhores resultados.

Consideraremos agora a força externa nula.

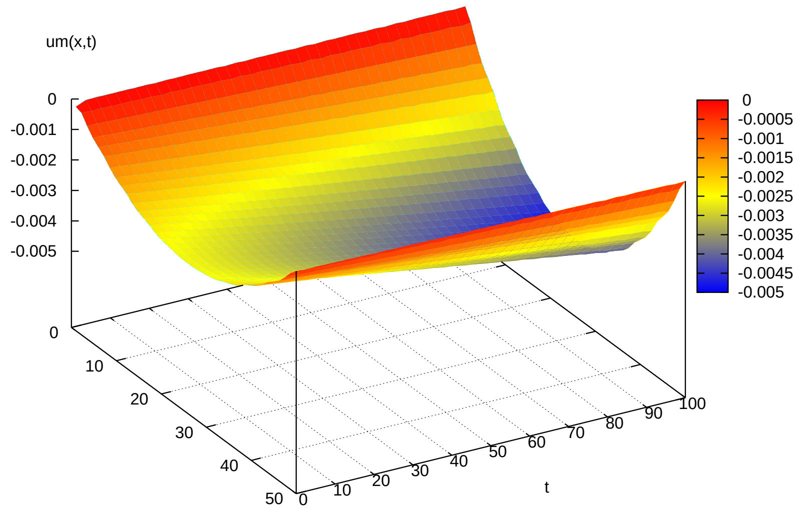

Figura 4.6: Gráfico de $u(x,t)$

A Figura 4.6 representa esta solução.

Capítulo 5

Análise Numérica para o Modelo de Carrier

5.1 Formulação do Problema

Além dos modelos propostos anteriormente, apresentaremos também um modelo numérico para o Problema de Carrier, descrito a seguir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(k + \lambda \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u^2 \; dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5.1.1}$$

$u(x,t)$ é o deslocamento vertical do ponto x da corda no tempo t, k e λ são constantes e $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são funções que dão movimento nos extremos da corda durante a vibração, sendo $\alpha(t) < \beta(t)$ e $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$.

No nosso modelo, consideraremos as extremidades fixas, ou seja, $\alpha(t) = 0$ e $\beta(t) = 1$.

O problema que estudaremos será o de determinar uma função $u = u(x,t)$, no espaço das soluções $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, tal que,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[k + \lambda \displaystyle\int_0^1 u^2 \, dx \right] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \; , & \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \; , & 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x) \; , \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & 0 < x < 1 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

5.2 Método de Elementos Finitos

5.2.1 Formulação Variacional

Seja $D(\Omega)$ o espaço das funções testes, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e $w \in D(\Omega)$. Multiplicando a primeira equação do Problema (5.1.2) por w e integrando em $\Omega = (0, 1)$, tem-se:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w \, dx + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}(M(x,t)w) \, dx = 0 \tag{5.2.1}$$

onde

$$M(x,t) = k + \lambda \int_0^1 u^2 \, dx, \tag{5.2.2}$$

5.2.2 Método de Galerkin

Considere um subespaço V_m gerado pelos m primeiros elementos da base do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m] \tag{5.2.3}$$

onde $[\varphi_i]_{i \in \mathbb{N}}$ é uma base de $H_0^1(\Omega)$.

Buscamos, então, uma solução aproximada $u_m = u_m(x,t)$ do Problema (5.1.2), no subespaço V_m.

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\varphi_i(x) \in V_m \tag{5.2.4}$$

Solução Aproximada

Aproximamos o Problema (5.1.2), pelo problema de determinar no espaço das soluções V_m, uma função $u_m = u_m(x,t)$, tal que,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, w\right) + \left(\dfrac{\partial u_m}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial x}(M(x,t)w)\right) = 0 & \forall w \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 & \text{em } \; H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial t}(0) = u_{1m} \to u_1 & \text{em } \; H_0^1(0,1) \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Substituindo $u_m = u_m(x,t)$ na equação (5.2.1), temos:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} w \, dx + \int_0^1 \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}(M(x,t)w) \, dx = 0 \tag{5.2.6}$$

Como $u_m(x,t) \in V_m$, podemos escrever

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in V_m \tag{5.2.7}$$

e assim obtemos

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}, \tag{5.2.8}$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{m} d_i''(t)\varphi_i(x), \tag{5.2.9}$$

Substituindo (5.2.8) e (5.2.9) em (5.2.6) e tendo $w \in V_m$, podemos tomar em particular, $w = \varphi_j$, $j = 1, \cdots, m$.

$$\sum_{i=1}^{m} d_i''(t) \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx + \sum_{i=1}^{m} d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M(x,t)\varphi_j(x))\,dx = 0 \tag{5.2.10}$$

5.3 Função de Interpolação

Usando a Seção 3.3 (Função de Interpolação juntamente com o Problema Local) mencionada no Capítulo 3, obtemos a seguinte equação:

$$\sum_{a=1}^{2} d_a''^{e}(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\,dx + \sum_{a=1}^{2} d_a^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(M(x,t)\varphi_b^e(x))\,dx = 0 \tag{5.3.1}$$

para $1 \leq a, b \leq 2$ e $\boldsymbol{e} = 1, 2, \cdots, m$.

Devido a existência da função $M(x,t)$ na integral, consideraremos essa função constante em cada elemento finito $\boldsymbol{e}$. Logo, tomando $M(x,t) = M^e(t)$ e considerando x constante em cada elemento finito $\boldsymbol{e}$, obtemos:

$$\sum_{a=1}^{2} d_a''^{e}(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \varphi_a^e(x)\varphi_b^e(x)\,dx + \sum_{a=1}^{2} d_a^e(t)M^e(t) \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(x)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_b^e(x)}{\partial x}\,dx = 0 \tag{5.3.2}$$

para $1 \leq a, b \leq 2$ e $\boldsymbol{e} = 1, 2, \cdots, m$.

5.4 Cálculo das Matrizes

Denotando por

$$A = \sum_{e=1}^{m} A_{ab}^e, \qquad \text{e} \qquad B = \sum_{e=1}^{m} B_{ab}^e$$

Restringindo as matrizes A e B a cada elemento $\boldsymbol{e}$ temos:

$$A^e_{ab} = \int_{x^e_1}^{x^e_2} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\ dx \tag{5.4.1}$$

$$B^e_{ab} = M^e(t) \int_{x^e_1}^{x^e_2} \frac{\partial\varphi^e_a(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi^e_b(x)}{\partial x}\ dx \tag{5.4.2}$$

para $1 \leq a, b \leq 2$.

Agora, as matrizes A e B são de ordem (2×2). Essas matrizes locais de ordem (2×2) foram introduzidas devido ao fato delas terem muitos zeros, pois $\varphi_a(x)\varphi_b(x) = 0$ se $|a - b| \geq 2$.

5.5 Matrizes Locais A^e_{ab} e B^e_{ab}

5.5.1 Matriz Local A^e_{ab}

A matriz local simétrica A^e_{ab} dada em (5.4.1) por

$$A^e_{ab} = \int_{x^e_1}^{x^e_2} \varphi^e_a(x)\varphi^e_b(x)\ dx$$

com $1 \leq a, b \leq 2$.

Aplicando a transformação isoparamétrica vista anteriormente no Capítulo 3 (3.5.1) em (5.4.1) e utilizando a função definida em (3.6.2), temos os elementos da matriz local A^e_{ab} dados por

$$A^e_{ab} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.5.1}$$

5.5.2 Matriz Local B^e_{ab}

A matriz local simétrica B^e_{ab} dada em (5.4.2) por

$$B^e_{ab} = M^e(t) \int_{x^e_1}^{x^e_2} \frac{\partial\varphi^e_a(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi^e_b(x)}{\partial x}\ dx$$

com $1 \leq a, b \leq 2$.

Aplicando a transformação isoparamétrica em (3.5.1) em (5.4.2) e utilizando a função definida em (3.6.10), temos os elementos da matriz local B_{ab}^e dados por

$$B_{ab}^e = \frac{M^e(t)}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.5.2}$$

5.6 Matrizes Globais A e B

5.6.1 Matriz Global A

Sendo A_{ab}^e , a matriz local dada em (5.5.1) por

$$A_{ab}^e = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo visto em (3.7.8) na matriz A_{ab}^e e sendo ela simétrica e tridiagonal, achamos mais conveniente colocá-la em forma de coluna, onde teremos:

$$A = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.6.1}$$

5.6.2 Matriz Global B

Sendo B_{ab}^e , a matriz local dada em (5.5.2) por

$$B_{ab}^e = \frac{M^e(t)}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo visto em (3.7.8) na matriz B_{ab}^e e sendo ela simétrica e tridiagonal, achamos mais conveniente colocá-la em forma de coluna, onde teremos:

$$B = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & M^1(t)+M^2(t) & -M^1(t) \\ -M^1(t) & M^2(t)+M^3(t) & -M^2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -M^{m-2}(t) & M^{m-1}(t)+M^m(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{5.6.2}$$

Substituindo de (5.6.1) a (5.6.2) em (5.3.2) podemos escrever (5.3.2) no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$Ad''(t) + Bd(t) = 0$$

onde denotamos

$$d(t) = d^m(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_m(t) \end{bmatrix} \tag{5.6.3}$$

5.7 Método de β-Newmark

A equação $Ad''(t) + Bd(t) = 0$ representa um sistema de equações diferencias ordinárias de segunda ordem e o método escolhido para resolver esse sistema foi o método de β-Newmark, visto anteriormente no Capítulo 3, em (3.8).

Usando as aproximações já vistas no Capítulo 3, a discretização no tempo é dada por

$$A\left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + B\left(\beta d^{n+1} + (1-2\beta)d^n + \beta d^{n-1}\right) = 0 \tag{5.7.1}$$

onde obtemos

$$\left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta B\right)d^{n+1} = \left(\frac{2A}{\Delta t^2} - (1-2\beta)B\right)d^n - \left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta B\right)d^{n-1} \tag{5.7.2}$$

Reescreveremos o sistema acima como

$$G(t_n)d^{n+1} = D1(t_n)d^n - D2(t_n)d^{n-1} \tag{5.7.3}$$

onde

- $G = A + \Delta t^2 \beta B$
- $D1 = 2A - \Delta t^2(1-2\beta)B$
- $D2 = A + \Delta t^2 \beta B$

O sistema acima é resolvido de forma recursiva para n. Logo, para $n = 0$, temos o sistema

$$G(t_0)d^1 = D1(t_0)d^0 - D2(t_0)d^{-1}$$

Logo, podemos então, obter d^1 resolvendo o sistema acima, já que conhecemos d^0 através das condições iniciais e d^{-1}, por aproximações de Taylor, dadas por

$$d^{-1} = d^1 - 2\Delta t d'(0)$$

Como já conhecemos os valores de d^0, d^1, podemos então calcular o valor de d^2 para $n = 1$ e assim sucessivamente.

Na resolução do sistema linear utilizamos o Método de Eliminação de Gauss.

5.8 Simulações Numéricas

Serão mostrados nesta seção, alguns exemplos numéricos com o intuito de ilustrar algumas características do modelo de Kirchhoff para pequenas vibrações de cordas elásticas com densidade e seção transversal variáveis.

Resolver o problema (5.2.5), ou seja, encontrar $u_m(x,t)$ implica em encontrar uma solução aproximada do problema (5.1.2).

A força externa aplicada é, em nosso caso, nula. Mas, para constatarmos que a solução aproximada está sendo obtida corretamente, faremos exemplos numéricos cuja força será não nula. Donde teremos o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[k + \lambda \displaystyle\int_0^1 u^2\, dx\right] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\ , & \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ , & 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x)\ , \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & 0 < x < 1 \end{cases} \tag{5.8.1}$$

No cálculo dessa força externa $f(x,t)$, substituimos a solução exata $u(x,t)$ definida a priori e respeitando as condições de fronteira, na equação definida em (5.8.1). Posteriormente, aplicamos o Método de β-Newmark no seguinte sistema de equações ordinárias

$$Ad''(t) + Bd(t) = F$$

Aplicando o Método de β-Newmark no sistema acima, temos:

$$A\left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + B\left(\beta d^{n+1} + (1-2\beta)d^n + \beta d^{n-1}\right) = \left(\beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1}\right)$$

Donde obtemos

$$\left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta B)d^{n+1} = (\beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1}) + \right.$$
$$\left(\frac{2A}{\Delta t^2} - (1-2\beta)B\right)d^n - \left(\frac{A}{\Delta t^2} + \beta B\right)d^{n-1}$$

Reescreveremos então, o sistema acima como

$$G(t_n)d^{n+1} = F^{*n} + D1(t_n)d^n - D2(t_n)d^{n-1}$$

onde

- $G = A + \Delta t^2 \beta B$
- $F^{*n} = \beta F^{n+1} + (1-2\beta)F^n + \beta F^{n-1}$
- $D1 = 2A - \Delta t^2(1-2\beta)B$
- $D2 = A + \Delta t^2 \beta B$

5.8.1 Exemplo 1

Considere a solução exata para o problema (5.8.1) dada por

$$u(x,t) = \frac{(x^2-x)e^{-t}}{\pi^2}$$

com posição inicial da corda

$$u(x,0) = \frac{(x^2-x)}{\pi^2}$$

e velocidade inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\frac{(x^2-x)}{\pi^2}$$

onde

- $k = 1$
- $\lambda = 1$

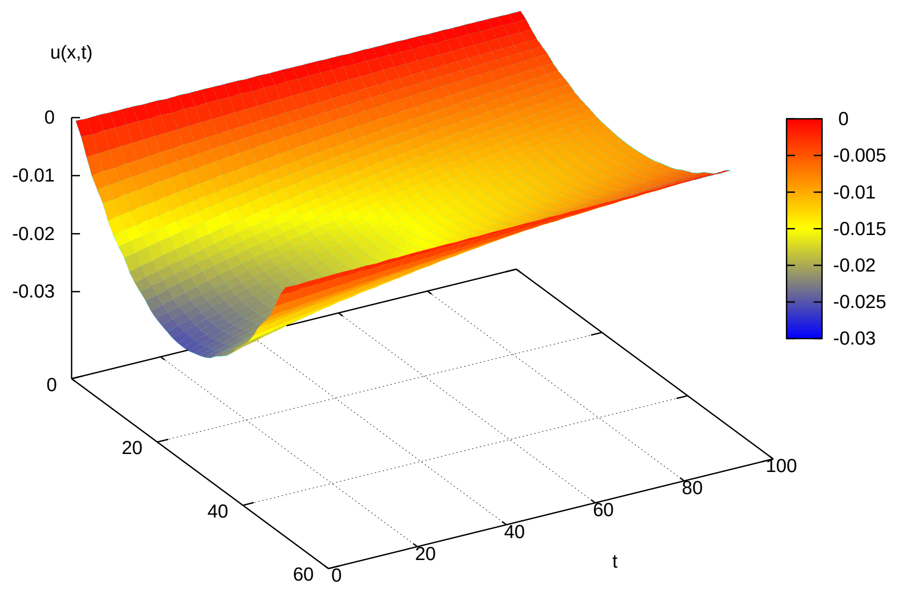

Figura 5.1: Gráfico de $u_m(x,t)$

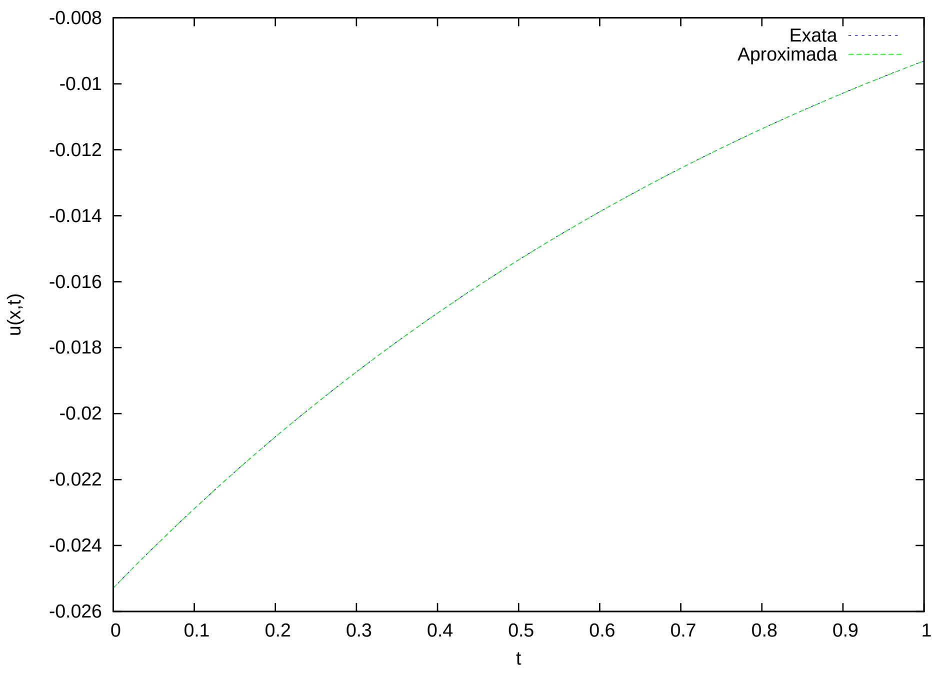

Figura 5.2: $u_m(25,t)$ e $u(25,t)$

Nel	N	T	β	$E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$	$E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$
50	50	1.0	0.25	0.000051	0.000245
50	50	1.0	0.5	0.000051	0.000185
50	50	1.0	1.0	0.000050	0.000161
50	100	1.0	0.25	0.000050	0.000166
50	100	1.0	0.5	0.000050	0.000161
50	100	1.0	1.0	0.000050	0.000158
100	50	1.0	0.25	0.000051	0.000580
100	50	1.0	0.5	0.000051	0.000245
100	50	1.0	1.0	0.000050	0.000164
100	100	1.0	0.25	0.000050	0.000209
100	100	1.0	0.5	0.000050	0.000174
100	100	1.0	1.0	0.000049	0.000161

Tabela 5.1: Exemplo 1

A Figura 5.1 mostra o movimento de uma corda que possui seus extremos fixos.

A Figura 5.2 representa as soluções exata e aproximada no ponto x = 0.5 com $t \epsilon [0, 1]$. Verificamos que a solução aproximada encontrada para o problema (5.8.1) está bem próxima da solução exata conhecida, cujo erro podemos ver na Tabela 5.1.

Na Tabela 5.1, temos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ apresenta um melhor resultado quando $\beta =$ 1.0, considerando $Nel = 100$, $N = 100$ e $T = 1.0$. Já $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ apresenta um melhor resultado quando $\beta = 1.0$, considerando $Nel = 50$, $N = 100$ e $T = 1.0$.

Consideraremos agora a força externa nula com o intuito de encontrarmos uma solução aproximada para o problema (5.1.2).

A Figura 5.3 representa esta solução, cujos extremos são fixos.

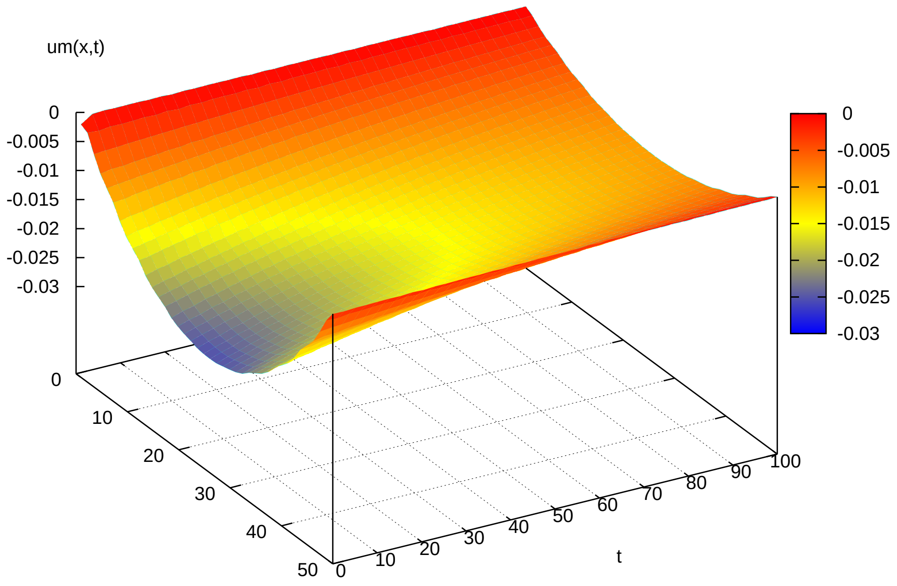

Figura 5.3: Gráfico de $u_m(x,t)$

5.8.2 Exemplo 2

Considere a solução exata para o problema (5.8.1) dada por

$$u(x,t) = \frac{sen\pi x \cos \pi t}{\pi^2}$$

com posição inicial da corda

$$u(x,0) = \frac{sen\pi x}{\pi^2}$$

e velocidade inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

onde

- $k = 1$
- $\lambda = 1$

A Figura 5.5 representa as soluções exata e aproximada no ponto x = 0.5 com $t \; \epsilon \; [0,1]$. Verificamos que a solução aproximada encontrada para o problema (5.8.1) está próxima da solução exata conhecida, cujo erro podemos ver na Tabela 5.2.

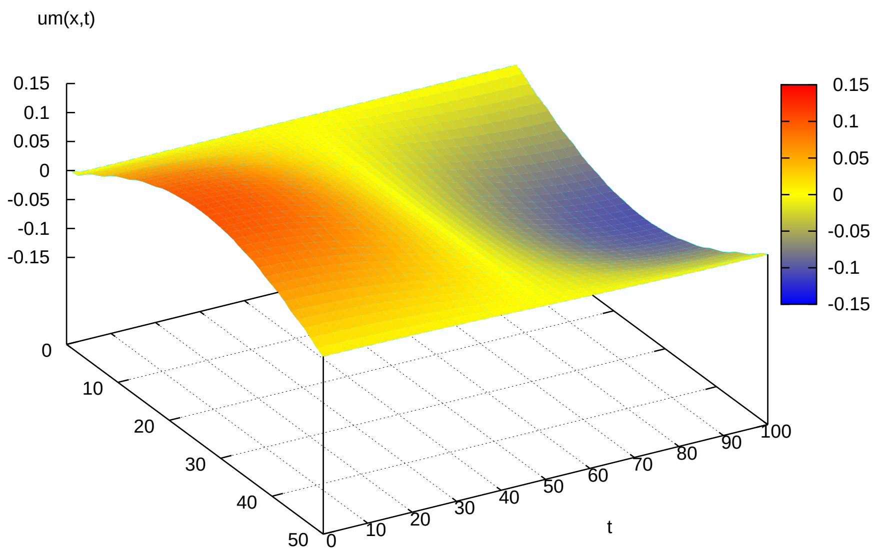

Figura 5.4: Grafico de $u_m(x,t)$

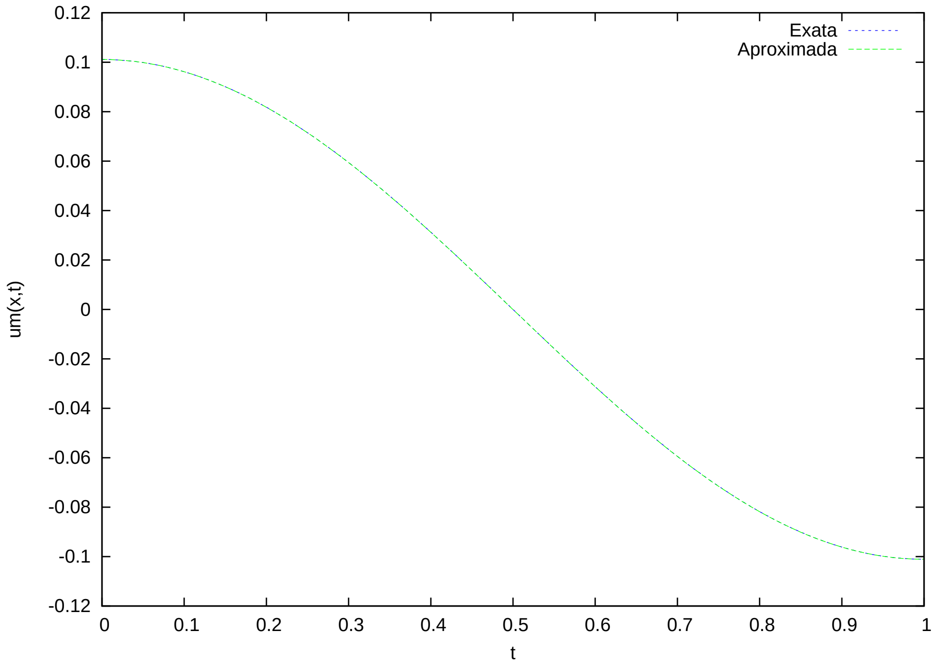

Figura 5.5: Grafico de $u_m(0.5,t)$ e $u(0.5,t)$

Nel	N	T	β	$E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$	$E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$
50	50	1.0	0.25	0.000247	0.000786
50	50	1.0	0.5	0.000313	0.000996
50	50	1.0	1.0	0.000445	0.001415
50	100	1.0	0.25	0.000219	0.000697
50	100	1.0	0.5	0.000235	0.000748
50	100	1.0	1.0	0.000268	0.000852
100	50	1.0	0.25	0.000264	0.000855
100	50	1.0	0.5	0.000330	0.001069
100	50	1.0	1.0	0.000462	0.001496
100	100	1.0	0.25	0.000236	0.000763
100	100	1.0	0.5	0.000252	0.000816
100	100	1.0	1.0	0.000284	0.000921

Tabela 5.2: Exemplo 2

Na Tabela 5.2, temos que $E_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ e $E_{L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))}$ apresentam melhores resultados quando $\beta = 0.25$, considerando $Nel = 50$, $N = 100$ e $T = 1.0$.

Consideraremos agora, a força externa nula com o intuito de encontrarmos uma solução aproximada para o problema (5.1.2).

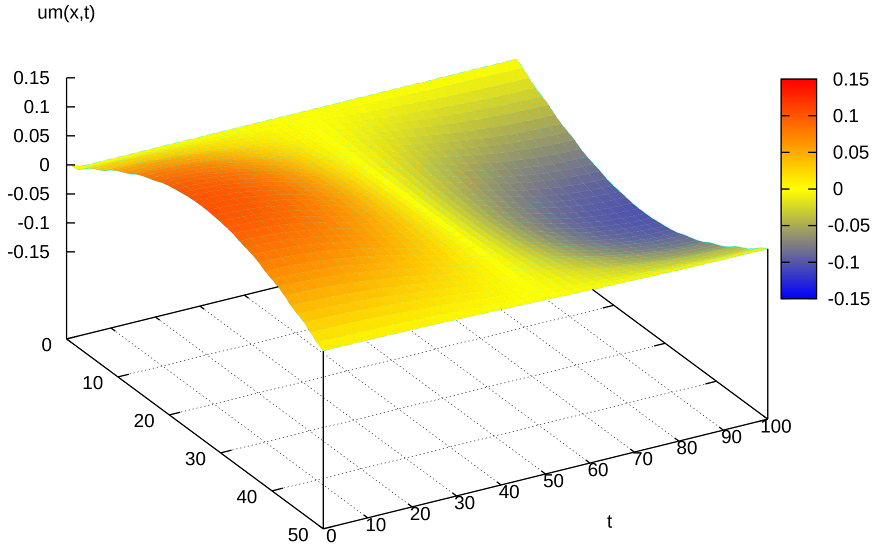

Figura 5.6: Gráfico de $u_m(x,t)$

A Figura 5.6 representa esta solução, cujos extremos são fixos.

5.9 Conclusão

Neste trabalho, analisamos numericamente um modelo matemático relacionado a equação da onda, em evidência, as vibrações de uma corda elástica com densidade e seção transversal variáveis.

As simulações numéricas baseadas no Método de Elementos Finitos juntamente com o Método de Diferenças Finitas, em especial, o Método de β-Newmark mostram a eficácia do método quando construído um modelo cuja solução exata é conhecida. Ao problema, supomos primeiramente a função sendo não-nula com o objetivo de constatarmos que a solução aproximada estava sendo obtida corretamente, posteriormente, tomamos a função sendo nula como propõe o problema original, cujo intuito era encontrarmos uma solução aproximada para o nosso problema.

Vimos três modelos que possuem em suas equações termos não-lineares, cujas funções presentes nas equações algumas vezes dependem tanto do tempo quanto do espaço ou simplesmente são constantes.

Para cada modelo foi tomado dois exemplos numéricos, cujo erro foi calculado nas normas $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, tomando β igual a 0.25, 0.5 e 1.0.

Sugestões para trabalhos futuros:

- Considerar outros métodos numéricos para a solução dos problemas vistos.
- Acréscimo de novos coeficientes à equação principal dos problemas.
- Considerar os extremos sendo variáveis.

Referências Bibliográficas

[1] BRÉZIS, Haïm. *Analise Fonctionnelle. Théorie et applications.* DUNOD, Paris (1999).

[2] BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J.; *Numerical Analysis.* PWS Publishing Company (1993)

[3] CIARLET, P.; *The Finite Element Method for Elliptic Problems, Studies in Mathematics and its Applications.* North-Holland (1978)

[4] DOUGLAS, J. D.; DUPONT, T.; *Galerkin methods for parabolic equations*, SIAM J. Numer. Anal. 7, 575-626 (1970)

[5] FICHERA, G.; *Existence Theorems in Elasticity, in Handbuch der Physik, Band Via/2*, Edited by C. Truesdell, Springer-Verlag (1972)

[6] FIGUEIREDO, D. G. , *Análise de Fourier e Equacões Diferenciais Parciais.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides (1981)

[7] HUGHES, T. J. R.; *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analynis.* Prentice Hall (2000)

[8] LIU, I-SHIH; RINCON, M. A.; *Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Análise e Aplicações*, Editora IM/UFRJ (2001)

[9] MEDEIROS, L. A.; *Equações Diferenciais Parciais.* IM/UFRJ (1981)

[10] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M.; *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneo).* IM/UFRJ (2000)

[11] MEDEIROS, L. A.; RABELLO T. N.; VIEIRA, M. C. C.; *On a Perturbation of the Kirchhoff Operator*

[12] ODEN, J. T.; REDDY J.N.; *Variotional Methods in Theoretical Mechanics.* Spring-Verlag (1981)

[13] ODEN, J. T.; REDDY J.N.; *The mathematical Theory of Finite Elements.* New York, Wiley-Interscience (1976)

[14] RODRIGUES, R. D.; *Análise Numérica do Modelo de Kirchhoff-Carrier com Fro2.2.41nteira Móvel*; UFRJ/IM-NCE, Rio de Janeiro (2001)

[15] SANTOS, B. S.; *Análise Numérica do Sistema Termoelástico Linear em Domínios com Fronteira Móvel*; UFRJ/IM-NCE, Rio de Janeiro (2002)

[16] SMITH, G. D.; *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.* Clarendon Press, Oxford (1978)

[17] STRANG, G.; FIX, G. J.; *An Analysis of the Finite Element Method.* Prentice Hall (1981)

[18] ZAUDERER, Erich, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics - 2nd ed.* Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons (1988)

[19] ZIENKIEWICZ, O. C.; *The Finite Element Method.* McGraw-Hill (1977)

[20] WHEELER, M. F.; *A Priori L^2 Error, Estimates for Galerkin Approximations to Parabolic Partial Differential Equations.* SIAM J. Numer. Anal. 10, nº4 723-759 (1973)