Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Núcleo de Computação Eletrônica

Um Estudo sobre Álgebra em Sistemas Computacionais Formativos

Dissertação de mestrado

Aluno: Marcelo André Abrantes Torraca
Orientador: Prof. Dr. Josefino Cabral Melo Lima

Rio de Janeiro

2005

Um Estudo Sobre Álgebra em Sistemas Computacionais Formativos

Marcelo André Abrantes Torraca

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Núcleo de Computação Eletrônica

Orientador:
Prof. Dr. Josefino Cabral Melo Lima

Rio de Janeiro
2005

Marcelo André Abrantes Torraca.
Um Estudo Sobre Álgebra em Sistemas Computacionais Formativos / Marcelo André Abrantes Torraca. Rio de Janeiro, 2004.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática / Núcleo de Computação Eletrônica, 2005.

Orientador: Josefino Cabral Melo Lima

1. Sistemas Computacionais Formativos – Teses. 2. Álgebra – Teses. I. Lima, Josefino Cabral Melo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática / Núcleo de Computação Eletrônica. III. Título.

CDD:

Um Estudo Sobre Álgebra em Sistemas Computacionais Formativos

Marcelo André Abrantes Torraca

Dissertação submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática – IM / Núcleo de Computação Eletrônica – NCE – da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Josefino Cabral Melo Lima – Orientador (UFRJ)
Docteur, Université Pierre et Marie Curie, U. PARIS VI, França, 1992.

Prof. Dr. Adilson GONÇALVES (IM/UFRJ)
Ph.D., University of Chicago, U. C., Chicago, Estados Unidos, 1971.

Prof. Dr. Ageu Cavalcanti Pacheco Júnior (UFRJ)
Ph.D., Queen Mary College London, QMC, Grã-Bretanha, 1989.

Profª Drª Adriana Benevides Soares (UGF/ UERJ/UFRJ)
Docteur, Université de Paris Sud, U. PARIS XI, França, 1995.

Rio de Janeiro

2005

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos professores que acreditam na existência de caminhos melhores para o aprendizado da Matemática.

Agradecimentos

Ao Professor Cabral Lima, pelo trabalho de orientação, desenvolvido com dedicação e amizade.

Ao Professor Ageu Cavalcanti Pacheco Júnior, a quem muito devo, pela confiança, apóio e incentivo durante esse trabalho.

Ao Professor Adilson Gonçalves, pelas contribuições e sugestões que enriqueceram este trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação do Núcleo de Computação Eletrônica (NCE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

Aos Professores doutores e aos Professores do ensino fundamental e do ensino médio que efetivamente participaram dessas pesquisas.

À Elisabete Lima, pelas contribuições e sugestões que enriqueceram este trabalho.

Aos amigos Armando, Leandro, Henrique, Marcos, Anderson e Fábio pelo apóio e incentivo.

Aos amigos Vinicius Israel, Juliana Pontes, Patrícia e Maise Dantas pelo apoio durante estes anos de estudo.

Às professoras Luzimar Tamaki, Dona Neuza e Wanda Menezes, pelo apoio e incentivo e por terem contribuído de forma direta e indireta para este trabalho.

Às secretárias da AEP, Lina e Adriana e as secretárias do DCC-IM Tia Deise, Zezé, Regina e Edileuza pela dedicação e atenção no atendimento às solicitações pertinentes à secretaria.

A amiga Andréia Maciel pelo apoio durante estes anos de estudo.

À CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu total dedicação ao curso de Pós-Graduação.

À minha namorada Bruna Aparecida que ajudou e incentivou em todos os momentos.

À meus pais Maria de Lourdes e Antonio Carlos, a minha avó Zulmira e a minha irmã Andréa pela paciência e compreensão. Sem minha família a realização deste trabalho seria impossível.

E, muito especial ao meu filho, Brunno, que compreendeu os pequenos momentos de ausência.

Muito obrigado a todos.

RESUMO

A álgebra e o raciocínio algébrico são fundamentais na formação das pessoas, sobretudo para os que seguem a vocação matemática e/ou tecnológica. Infelizmente, o uso de sistemas computacionais formativos para a álgebra tem se mostrado ainda limitado e freqüentemente sem metodologias de aplicação. Ademais, não existem parâmetros bem estabelecidos sobre a relação: tema algébrico/sistema formativo.

Neste patamar encontra-se o objetivo central deste trabalho que é o de contribuir para o avanço da álgebra, notadamente na qualidade do seu ensino. Através da elaboração de uma base de informações algébricas, levantamento de dados feito junto a especialistas e a docentes de álgebra, estabelecemos uma análise própria que modela alguns critérios metodológicos de aplicação de sistemas formativos tanto em processos de ensino e aprendizagem quanto na resolução de problemas de álgebra.

Palavras-Chaves: Álgebra, Sistemas Computacionais Formativos e Raciocínio Algébrico.

ABSTRACT

Algebra learning and algebraic reasoning are fundamental matters in people's overall formation, especially for those who intend to follow mathematical and/or technological based professions. Unfortunately, the use of formative computational systems supporting algebra is still limited and more often deprived of application methodologies. Furthermore, there are no well-established parameters concerning with the bilateral relation: algebraic topic/formative system.

In this context, the main objective of the present paper is to contribute to algebra development, particularly in order to improve its teaching quality. Based on the set up of an algebraic database using a scientific data-collecting process that has been applied to teachers and recognized researchers in algebra, we propose here a specific model able to help designers in the development of formative systems. This new model allows some methodological application criteria in formative systems both via a teaching/learning process scope and the algebra conventional problem solving.

Keywords: Algebra, Formative Computational Systems, Algebraic and Reasoning.

LISTA de FIGURAS, GRÁFICOS, QUADROS e TABELAS

Figuras

Gráficos

Quadro

Tabelas

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

1.1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa surgiu do interesse de incentivar os professores e proporcionar aos alunos um uso metodológico de recursos computacionais no ensino da álgebra. Foram analisados diversos sistemas computacionais formativos algébricos[1] e elaboradas e aplicadas algumas entrevistas, tanto com professores doutores, algebristas de renome nacional e internacional, quanto com professores que efetivamente lecionam álgebra no ensino fundamental (EF) e no ensino médio (EM). A idéia da aplicação dessas entrevistas é a de poder estabelecer um paralelo entre o pensamento "ideal" da importância e do ensino da álgebra (expressado por especialistas) e a prática efetiva da álgebra em sala de aula (efetivada por professores e seus alunos). Embora os dados obtidos com estas entrevistas tenham sido analisados detalhadamente, é indispensável que se diga, preliminarmente, que não se objetivou neste trabalho a execução de um experimento completo, formal e estatisticamente validado. Claro que o aumento do espaço amostral e uma validação estatística associada poderão aprimorar ainda mais os resultados e conclusões alcançadas, e colocamos isto como um dos importantes trabalhos futuros a serem feitos.

Busca-se, neste trabalho, de forma mais realista, contribuir para a compreensão da álgebra e de seu ensino, apoiados por uma especificação

[1] Inicialmente catalogamos e analisamos mais de vinte sistemas deste tipo. Ao decorrer da pesquisa, nós escolhemos um subconjunto desses sistemas para fazer uma análise mais detalhada. É este subconjunto que apresentamos de forma aprofundada no capitulo 3.

metodológica que venha a melhorar os processos de ensino/aprendizagem desta matéria através do uso de sistemas computacionais formativos dedicados. Desta forma, e para este fim, foi elaborada, portanto, uma análise explorativa de sistemas computacionais formativos, especialmente os concebidos para o ensino da matemática em geral e da álgebra em particular. A caracterização que buscamos no comportamento algébrico desses sistemas nos levou a resolver através deles alguns problemas algébricos interessantes, tais como a resolução de igualdades do tipo $z = a|x^3| + b|y^3| + c$, de sistemas $\begin{cases} ay = bx - c \\ kx - ly = m \end{cases}$, e problemas da forma de Tartaglia $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$, lançando mão do teorema do resto[2], e representações de interseção da forma $z = kx^2 + ly^2$ com $ax + by + cz + d = 0$.

A importância do raciocínio algébrico no proceder humano, principalmente na modelagem de problemas da vida cotidiana, dispensa apresentações, adjetivação ou comentários adicionais. É interessante observar, por exemplo, o que afirmou um dos algebristas renomados que foi entrevistado em nossa pesquisa:

"*Poderíamos pensar na álgebra como uma forma mais organizada, de modelar e procurar soluções para as variáveis do problema...*".

Com efeito, modelando problemas, um aluno não irá trabalhar apenas o conteúdo algébrico envolvido, mas vai, gradativamente, também englobar vários ramos da matemática: aritmética, geometria, teoria dos números, estatística etc. O

[2] Nós demonstramos esse teorema e o Teorema Fundamental da Álgebra a partir da página 96.

Parâmetro Curricular Nacional[3] (PCN) de Matemática do Ensino Fundamental, destaca:

> É interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia de álgebra como uma linguagem para expressar regularidades. (PCN, Matemática, EF, Brasil, 1997, p. 117).

Sobre o pensamento algébrico, o PCN de Matemática do Ensino Fundamental destaca que:

"Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da álgebra." (PCN, Matemática, EF, Brasil, 1997, p. 116).

O quadro abaixo ilustra as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras:

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimen tos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico. Obtenção de expressões equivalentes

Quadro 1: Interpretação da álgebra as diferentes funções das letras (PCN, Matemática, EF, Brasil, 1997, p. 116).

---

[3] **PCN** - Propiciar aos sistemas de ensino, particularmente aos professores, subsídios à elaboração e/ou reelaboração do currículo, visando a construção do projeto pedagógico, em função da cidadania do aluno. Disponível em http://www.mec.gov.br/sef/sef/pcn.shtm.

A despeito de sua importância, a álgebra é freqüentemente considerada árida, tanto para os professores ensinarem quanto para os alunos aprenderem, principalmente aqueles envolvidos com a segunda serie do segundo segmento do ensino fundamental, na qual “oficialmente” começa o ensino de álgebra. Como tudo que requer um estado cognitivo mais elaborado, a Álgebra, pela sua beleza e complexidade, demanda uma certa habilidade especifica de abstração. Há de se notar que poderíamos considerar que o ensino da álgebra começa efetivamente na terceira série do primeiro segmento do ensino fundamental, quando os alunos utilizam pequenos quadrados como símbolos a serem substituídos por valores para determinar soluções de problemas. Um renomado algebrista nos confirmou essa observação em sua entrevista. Ele reforça essa idéia quando declara:

“A força da álgebra, a partir da 6ª serie (no meu tempo, 1º ano ginasial) é tão devastadora que, em geral esquecemos (ou quase esquecemos) muitos dos belos e criativos argumentos aritméticos que usávamos no ensino fundamental.”

Na realidade, é fato que muitos pesquisadores acreditam que o ensino da álgebra deveria ser introduzida antes da sexta série do ensino fundamental.

Davis (1985, 1989), por exemplo, argumenta que a preparação para álgebra deve começar na segunda ou terceira série do primeiro segmento do Ensino Fundamental. Vergnaud (1988) sugere que essa instrução em álgebra ou pré-álgebra deveria começar no nível elementar da escola, e Schifter (1998) fornece evidências de raciocínio algébrico em crianças em séries elementares.

Na literatura concernente é fácil encontrar estudos que comprovam que os alunos expressam existir maiores dificuldades no aprendizado da matemática à medida que eles passam a abordar mais a álgebra. Essas dificuldades poderiam ser explicadas, entre outras coisas, pela necessidade de ruptura entre o pensamento aritmético e o algébrico (Lessa, 1996, Da Rocha Falcão, 1993). Neste sentido, por exemplo, Cortes, Vergnaud e Kavafian (1990) afirmam que o conceito de equação apresenta a maior dificuldade de aprendizado.

Miorin, Miguel e Fiorentini (1993) afirmam que a álgebra não tem recebido a devida atenção e comentam:

"... a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões."

A diferença central entre a álgebra e a aritmética é que àquela poderia estar atribuída à semântica do símbolo de igualdade ("="). Com efeito, na aritmética, esse símbolo mais comumente significa o resultado de uma operação. Esse sentido é reforçado pelo uso do "=" na calculadora para finalizar a operação (Cortes, Vergnaud e Kavafian, 1990, Lessa, 1996). Na álgebra, por outro lado, o sinal de igualdade (ou desigualdade) "consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas" (Rômulo Lins, 2000).

Neste trabalho oscultamos os sentimentos de algebristas renomados sobre o "como" se deveria ensinar álgebra (quais tópicos da álgebra devem ser ensinados e quando) e verificamos de que maneira essa álgebra está sendo efetivamente ensinada. De posse destas informações, analisamos diversos sistemas computacionais formativos e os aplicamos na resolução de problemas algébricos, a fim de verificar como o ensino da álgebra efetivamente implantado em nossas escolas poderia aproximar-se do ensino "ideal" preconizado pelos especialistas. A idéia é portanto a de por um lado, estabelecer esses parâmetros comparativos, entre o "ideal" e o "real", analisar por outro lado, alguns sistemas computacionais algébricos (selecionados de um grupo de mais de vinte sistemas) através de um estudo sobre suas aplicabilidades no ensino de álgebra a fim de estabelecer parâmetros que possam servir de suporte a decisão de quais, dentre esses sistemas, poderiam servir como suporte aos processos de ensino/aprendizagem da álgebra, notadamente destacando os tópicos importantes neles trabalhados para estabelecer um relacionamento identificativo entre aqueles sistemas e tais tópicos.

1.2 MOTIVAÇÕES PESSOAIS

Quando eu cursava o curso de matemática na Universidade Federal Fluminense a professora doutora Ana Maria Kaleff despertou minha atenção para como se deveria questionar, argumentar, explorar os conceitos junto aos alunos nas aulas, conceito esse concretizado após participações em vários congressos de educação matemática, curso de especialização na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e também como professor multiplicador no Projeto Fundão.

Nesses últimos anos, os estudos sobre geometria vêem despertando um grande interesse nos professores do ensino médio e ensino fundamental e também nos pesquisadores. Talvez esse interesse seja conseqüência da tentativa de suprir as deficiências, devido provavelmente a um longo período em que os docentes freqüentemente “deixavam” de ensinar geometria ou a ensinavam somente no último bimestre do ano. Era comum isso acontecer por falta de conhecimento do professor ou pelo simples fato de seguir cegamente o livro texto e este só apresentar o conteúdo de geometria no final. Talvez por esse motivo, ou pela busca de reparar essa deficiência na formação geométrica dos jovens alunos, é que podemos verificar que proliferaram várias pesquisas sobre geometria na literatura.

Neste sentido, a geometria passou a ser “mais privilegiada” em detrimento da álgebra, sobretudo em termo de sistemas computacionais de suporte aos processos de ensino e aprendizagem. O fato que colabora com essa nossa hipótese consiste na facilidade com que se encontram sistemas computacionais formativos de geometria e a dificuldade de encontrar sistemas similares para a álgebra. Com efeito, uma simplória pesquisa no mercado pode rapidamente denotar esse fato.

Existe uma diferença substancial entre sistemas computacionais de geometria dinâmica (estes muito comumente encontrados no mercado) e os de álgebra. Os sistemas de geometria dinâmica podem ser utilizados em todo o conteúdo de geometria plana (apresentados no ensino fundamental e ensino médio), enquanto os sistemas de álgebra são habitualmente específicos para determinados conteúdos e, portanto, menos genéricos. A experiência em sala de aula e a dificuldade em desenvolver sistemas algébricos que possam ser utilizados em salas de aulas, com habilidades interativas que proporcionam aos professores questionar, argumentar e motivar o interesse dos alunos em estudar mais detalhadamente aplicações algébricas, o que isso nos serviu como um desafio tecnológico e, por conseqüência, nos orientou para o objetivo central deste trabalho.

1.3 MOTIVAÇÕES TECNOLÓGICAS

“Para que a matemática se torne uma ciência de hoje é essencial à incorporação de toda tecnologia disponível” (D’Ambrosio, 1999). Concordando com esse pensamento, nosso trabalho tenta demonstrar que com a utilização dessas ferramentas computacionais o déficit de aprendizado pode ser minimizado, pois elas auxiliarão na construção do conhecimento, de forma que os alunos venham elaborar conceitos algébricos, refletindo e discutindo conjecturas e métodos. Nossa hipótese é que assim procedendo, esses alunos superariam as dificuldades em transpor o pensamento aritmético para o algébrico.

No entanto, não apregoamos aqui apenas o uso simples dessas ferramentas computacionais mas, seu uso embasado em metodologias bem estabelecidas e adequadas aos tópicos abordados. Em termos de uso do computador como instrumento de apoio ao ensino e discernimento sobre quando, onde e como utilizá-los, o PCN ressalta:

> "Embora os computadores ainda não estejam amplamente disponíveis para a maioria das escolas, eles já começam a integrar muitas experiências educacionais, prevendo-se sua utilização em maior escala a curto prazo. (...) Por outro lado, o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo".

Santos (1997) condiz, de forma clara, com alguns fundamentos que postulamos na presente pesquisa:

> "É importante que os alunos construam com significado real seu conhecimento matemático. Para isso é importante que os alunos sintam o desejo de aprender matemática e sejam responsáveis ativos por este processo de construção do conhecimento matemático."

1.4 OBJETIVOS

De maneira concisa, o objetivo central deste trabalho é o de contribuir para o ganho cognitivo em álgebra. Busca-se também obter alguns parâmetros de comparação entre o "ensino ideal" da álgebra e o "ensino efetivo" da sala de aula. Esta busca baseia-se, entre outras coisas, na resolução de problemas algébricos importantes através dos sistemas formativos analisados, em entrevistas elaboradas com professores doutores, algebristas reconhecidos pela comunidade científica internacional e entrevistas elaboradas com professores do ensino fundamental e médio que militam no ensino álgebra em sala de aula. Uma análise parcial desta “dicotomia” levou-nos a estudar detalhadamente vários sistemas computacionais formativos, concebidos e utilizáveis para o ensino da álgebra. Esta análise, associada a um suporte teórico explicito, por conseguinte, nos permitiu estabelecer, alguns parâmetros que contribuíram na identificação de tipos de metodologias de ensino apoiado no uso de computadores. Essas identificações podem ser empregadas para melhorar o ensino real de álgebra, aproximando-o do “ideal” preconizado.

1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação comporta sete capítulos.

O *primeiro capitulo* apresentou, sucintamente, as motivações, os objetivos e a abordagem utilizada.

O *segundo capitulo* aborda a álgebra, o seu ensino e, finalmente, de forma mais genérica, a matemática no Brasil.

O *terceiro capítulo* apresenta um estudo de vários sistemas formativos algébricos (encontrados no Brasil e no exterior).

O *quarto capítulo* aborda a metodologia utilizada e entrevistas com os professores doutores algebristas de renome internacional e as entrevistas com professores de álgebra do ensino fundamental (EF) e Ensino Médio (EM). São mostradas, nesse quarto capitulo, as informações obtidas através dos questionamentos feitas nas entrevistas, bem como uma análise própria destes dados.

O *quinto capítulo* apresenta uma proposta de utilização dos sistemas formativos baseada nas análises de dados e nos sistemas computacionais formativos utilizados. Alguns problemas algébricos são também apresentados com suas respectivas soluções através do uso destes sistemas.

O *sexto capítulo* apresenta a conclusão e sugestões para trabalhos futuros.

Referência bibliográfica.

Anexos:

Anexo A: Questionário elaborado para os renomados professores doutores de álgebra.

Anexo B: Questionário submetido aos professores do ensino fundamental e do ensino médio que trabalham com álgebra em sala de aula.

CAPÍTULO 2

2.1 ÁLGEBRA: ELEGÂNCIA E ABSTRAÇÃO

A palavra “álgebra” não está associada à nenhuma etimologia nítida como, acontece, por exemplo, com a palavra “aritmética”, que deriva do grego *arithmós* significando "quantidade" ou "número". Na literatura está transcrito que Álgebra foi usada pela primeira vez pelo matemático árabe *Mohammed Ibu-Musa al Khowarizmi*[4] que publicou em *Bagdad*, por volta do ano 825, um tratado sobre equações ao qual denominou: *Kitab al-jebr w'al-muqâbalah*, título que pode ser traduzido aproximadamente como “cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação”, expressão híbrida composta pela palavra árabe *al-jebr*, traduzida por alguns como "equação", e pela palavra persa *muqâbalah* de significado complexo. Por isso é que se diz que a palavra álgebra é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr*, sendo ás vezes transliterada *al-jebr*.

Álgebra Egípcia

A matemática egípcia antiga possibilitou a solução de numerosos problemas aritméticos e algébricos baseado no papiro. O mais famoso é o *Papiro Rhind*[5] (também conhecido como papiros de *Ahmes*), escrito em aproximadamente no século XVII AC, pelo escriba *Ahmes*. Este Papiro foi decifrado em 1877 contendo algumas regras sobre operações com frações.

---

[4] Maomé, filho de Moisés, de *Khowarizm.*
[5] O *Papiro Rhind* encontra-se no Museu Britânico de Londres.

Álgebra Babilônica

A matemática do período 1800-1600 A.C na Babilônia era mais avançada que a do Egito. Sua base sexagesimal conduziu a uma álgebra altamente desenvolvida. Os babilônios determinaram um procedimento para resolver equações quadráticas (reconhecendo somente raízes positivas) e também trataram de equivalências de sistemas de duas equações e algumas equivalências para a resolver equações de um grau mais elevado.

Álgebra Grega

Três grandes livros da matemática surgiram no período de 300 a.C. a 185 D.C "Os Elementos" de Euclides, "Secções Cônicas" de Apolônio e "*El Almagest*" de Ptolomeu. A álgebra grega, conforme foi formulada pelos pitagóricos e por Euclides, era geométrica. Nesse período foram reconhecidos os números irracionais.

É enunciado por Euclides em Elementos, livro II, proposição 4:

"Se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contêm". Ou seja $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

A álgebra de *Diofanto* (250 D.C.) dá um tratamento às equações indeterminadas, geralmente com duas ou mais equações em diversas variáveis que têm um número infinito de soluções racionais. Essas equações ficaram conhecidas como "Equações *Diophantine*" e chegaram até a matemática contemporânea aparecendo no décimo problema de Hilbert[6]: existe ou não um algoritmo que decida se toda equação diofantina tem solução? Este problema foi somente respondido nos anos 70, e negativamente, por Mathijasevic[7]. Em seu trabalho, Diophantine aceitou somente raízes racionais positivas, ignorando todas as outras. Na realidade o seu trabalho não possuía uma estrutura dedutiva completa e bem elaborada.

Álgebra na China e Índia

À um dos clássicos mais antigos da matemática, *Chou pei Suang Ching*, não é possível se dar um período definitivo, pois esta obra pode ter sido resultado do trabalho de vários autores e, muito provavelmente, em períodos diferentes.

Na álgebra, o livro freqüentemente considerado o mais influente realmente foi o *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a Arte Matemática*.

A maioria da matemática hindu foi motivada pela astronomia e pela astrologia. *Brahmagupta* escreveu *Brahmasphutasiddhanta* e o *Khandakhadyaka*. No *Brahmasphutasiddhanta* está definido o zero como o resultado de subtrair números iguais. Uma das propriedades interessantes publicadas em *Brahmasphutasiddhanta* é:

---

[6] Em Agosto de 1900, no Congresso Internacional de Matemática, em Paris, o matemático alemão David Hilbert enunciou 23 problemas que haveriam de ditar o rumo da matemática futura e desafiaram os matemáticos por todo o século passado e no corrente. O *décimo problema* de Hilbert versava, justamente, sobre equações *diofantinas*. Consiste no seguinte: "Dada uma equação *diofantina* com um número arbitrário de incógnitas e com coeficientes inteiros, determinar um processo que envolva um número finito de operações que permita decidir se a equação é solúvel nos inteiros.", ou seja, "Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução." Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Problemas_de_Hilbert. Acesso em 15 de janeiro de 2005.

[7] Em 1970, o matemático russo *Yuri Matiyasevich*, do Instituto Matemático de *Steklov*, em *Leninegrado* ou Leningrado (agora *Sampetersburgo*), mostrou que há algumas equações diofantinas insolúveis. Por outras palavras, há algumas equações para as quais nunca se encontrarão soluções e para as quais nunca se provará que não existem soluções. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Matiyasevich. . Acesso em 15 de janeiro de 2005.

"Quando zeros são adicionados a um número ou subtraídos de um número, o número permanece o mesmo; e se um número se multiplicou por zero transforma-se em zero."

Os hindus introduziram os números negativos representando débitos e números positivos representando fortuna, como podemos observar a regra escrita em *Brahmasphutasiddhanta*:

"O produto ou o quociente de dois débitos são uma fortuna."

Na Índia destaca-se soberanamente o matemático *Bhaskara* (1114 – 1185) que solucionou a equação geral de *Pell*[8]. Há de serem notados também os livros de *Bhaskara* o *Lilavati* e o de *Vija-Ganita* que tratam de equações lineares e quadráticas, progressões, radicais, etc.

Álgebra Árabe

O matemático árabe *Mohammed Ibu-Musa al Khowarizmi* publicou um tratado sobre equações ao qual denominou *Kitab al-jebr w'al-muqâbalah*. Ele pode ser considerado "o pai da álgebra", pois suas soluções eram sistemáticas o que resultava no fato de seus leitores não terem grandes dificuldades de aprender álgebra.

A partir desta época a palavra "álgebra" passou a ter um significado muito amplo. Por simplificação, e para efeito de definição, será enfocada aqui em duas fases: a primeira, chamada de **álgebra antiga** (elementar), na qual é definida como sendo o estudo das equações e os métodos para resolvê-las; a segunda, chamada

[8] Equação de *Pell*: Seja d um inteiro positivo que não seja um quadrado. Nesse caso, sabemos que $\sqrt{d}$ é irracional. Chamamos equação de *Pell* à equação $x^2 - dy^2 = m$, onde m é um inteiro qualquer.

de **álgebra moderna** (abstrata), na qual é definida como sendo um sistema formado por um conjunto de elementos e um certo número de operações e relações sobre este conjunto.

Álgebra na Europa e América

A álgebra, que entrou na Europa principalmente via o livro *Liber Abaci* de *Fibonacci* e suas traduções, havia experimentado uma certa regressão tanto em termos de estilo como em termos de conteúdo. O semi-simbolismo (sincopação) de *Diofanto e Brahmagupta* e suas realizações relativamente avançadas não estavam destinados a contribuir para uma eventual erupção da álgebra.

Com efeito, a renascença e o rápido florescimento da álgebra na Europa foram devidos aos seguintes fatores:

1. Facilidade de manipular trabalhos numéricos através do sistema de numeração indo-arábico, muito superior aos sistemas (tais como o romano) que requeriam o uso do ábaco;
2. Invenção da imprensa com tipos móveis, que acelerou a padronização do simbolismo mediante a melhoria das comunicações, baseada em ampla distribuição;
3. Ressurgimento da economia, sustentando a atividade intelectual; e a retomada do comércio e viagens, facilitando o intercâmbio de idéias tanto quanto de bens.

Cidades comercialmente fortes surgiram primeiro na Itália, e foi lá que o renascimento algébrico na Europa efetivamente teve início e se fortaleceu.

Em 1202 o matemático italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), conhecido como *Fibonacci (o coelheiro)*, estabelece as bases da álgebra ocidental, ao fundir os conhecimentos sobre matemáticas muçulmanas e indianas no seu *Liber Abaci* (livro do ábaco), mas que afinal tratou-se de um livro essencialmente sobre métodos algébricos indo-árabes.

Por volta de 1700 AC, os babilônios descobriram a forma de resolver equações quadráticas, se passaram mais de 3000 anos até a descoberta da fórmula que dá as raízes das equações de terceiro grau, elaborada por *Scipione Del Ferro* por volta de 1510. Embora não haja nenhuma prova documentada, prega-se que o seu aluno *Antonio Maria Fior* tentou adquirir a fama à custa de seu mestre (já falecido) e desafiou *Niccolo Fontana* (*Tartaglia*) a resolver as equações de terceiro grau. Em fevereiro de 1535 *Tartaglia* achou a fórmula geral para as equações dos tipo $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$ e *Fior* saiu humilhado por tentar adquirir fama às custas de outrem.

Tartaglia, acreditando nas promessas de *Cardano,* revelou as fórmulas, mas em 1545 *Cardano* quebrou todas as promessas e as publicou na *Ars Magna*. E até hoje é chamada fórmula de *Cardano*, que não foi descoberta por ele e sim por Tartaglia.

Dada a equação $x^3 + px = q$, a fórmula de *Tartaglia* que permite obter uma raiz é: $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$. Além disso, *Tartaglia* escreveu o triângulo numérico de *Tartaglia* (também designado como triângulo de Pascal).

Em 1572 surgiu a obra *L'Algebra* escrita por *Rafaël Bombelli* (1526-1573) que trabalhou nela em torno de 1560 e que foi somente publicada em 1572. Na obra de *Bombelli*, pela primeira vez, aparecem os números complexos na resolução da equação $x^3 + px = q$. A título de curiosidade, ao contrário do que muitas pessoas pensam, o surgimento dos números complexos ocorreu no estudo das equações do 3º grau e não na resolução das equações do 2º grau.

Em 1569 foi publicado o *Livro de Algebra en Arithmetica y Geometria* de Pedro Nunes (1502-1578), a sua obra mais metódica e rigorosa.

Em 1591 o matemático francês *François Viète* (1540-1603), também conhecido como *Vieta*, abandona a prática de escrever matemática por meio de palavras. Até então as equações, os números e as incógnitas eram apresentados por extenso, de maneira trabalhosa e confusa. *Viète* passa a representar suas equações utilizando como símbolos as letras do alfabeto. Ele tem sido considerado o verdadeiro criador da álgebra (*Boyer*, 1996).

Em 1614, *John Napier* (1550-1617), um escocês mais conhecido por *Neper*, inventa os logaritmos naturais ou neperianos.

Em 1637 surgiu a geometria analítica, desenvolvida pelo filósofo, físico e matemático francês *René Descartes* (1596-1650). Foi ele o criador da representação algébrica moderna, onde as incógnitas são simbolizadas pelas últimas letras do alfabeto (*x*, *y* e *z*) e os dados pelas primeiras (*a*, *b*, *c*, ...).

Em 1654 o matemático francês *Pierre de Fermat*[9] (1601-1665), matemático nos tempos livres, e o matemático e físico *Blaise Pascal*[10] (1623-1662), iniciam o estudo do que viria a ser o cálculo de probabilidades. Curiosamente eles desenvolvem esse novo ramo da matemática quase como uma diversão, com base em um problema levado a eles por um jogador de dados chamado *Chevalier* de *Mere.* De Mere pergunta se é possível prever os resultados de um jogo. Os matemáticos dizem que sim pelo menos em certas circunstâncias e até certo ponto.

[9] *Fermat* deixou trabalhos extremamente importantes sobre a teoria dos números.
[10] *Pascal* inventor da primeira máquina de calcular e autor de textos célebres filosófico-religiosos.

Em 1669 o físico inglês *Isaac Newton* (1642-1727) cria as bases para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Com ele surge um método para se calcular a área ou o volume de qualquer figura geométrica, não importando a sua forma (até então, para cada figura era preciso criar uma fórmula diferente), enunciando a fórmula do desenvolvimento do binômio de expoente qualquer e lançando os primeiros fundamentos do seu método dos fluentes e das fluxões. Em 1689, o mundo conhece a sua grande obra *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* onde é anunciada a "Lei da Atração Universal" (e se definem os princípios de mecânica racional que haverão de reger toda a Física dos séculos XVIII e XIX, até o advento da Relatividade de *Albert Einstein*). O que é chamado freqüentemente de "Revolução Matemática" coincide com o cálculo diferencial e integral, que *Newton* desenvolve ao mesmo tempo em que o alemão *Wilheim Leibniz* (1646-1716). Eles revolucionaram a matemática. Por exemplo, para saber a área de um círculo, utilizando a nova ferramenta, basta dividir esse círculo em quadrados iguais, bem pequenos, em seguida, calcula-se a área de um quadrado e multiplica-se pelo número total de quadrados. Com este método, acha-se a área (ou o volume, se for o caso), de qualquer figura. Os quadrados têm que ser infinitamente pequenos para encher toda a borda do círculo, e o número de quadrados precisa ser idealmente infinito. Portanto, a área total será uma soma de infinitos termos, tipo de soma que os gregos já sabiam fazer havia mais de dois mil anos.

Em 1685 o inglês *John Wallis* (1616-1703) resolveu a questão dos números imaginários (números complexos) criando um número, chamado i, que é a raiz quadrada de menos um $\left(\sqrt{-1}\right)$.

Em 1690 foi publicado o *Traité d'Algébre*, obra que inclui o Teorema de *Rolle*, por *Michel Rolle* (1652-1719).

Em 1713 aconteceu a publicação da obra *Ars Conjectandi* (obra extensa sobre a teoria das probabilidades) de *Jacques Bernoulli* (1654-1705)

Em 1730, *Abraham De Moivre* (1667-1754) apresenta a obra *Miscellanea Analytica* dedicado ao estudo da trigonometria associado aos números complexos e às fórmulas de *Moivre*.

O período compreendido entre 1736 e 1813 é o da vida e obra de *Lagrange*, precursor da utilização sistemática da derivada e do seu sinal no estudo de uma função e na construção do respectivo gráfico.

Em 1744 a família de números transcendentais entra para o mundo da matemática encontrada pelo suíço *Leonard Euler* (1707-1783). *Euler* estuda as chamadas equações algébricas, que possuem, por exemplo, a forma $x^2 + x + 1 = 0$. Percebe que elas têm todos os tipos de solução: números inteiros, imaginários, irracionais, frações etc. Mas nenhuma equação dessa categoria jamais dá, por exemplo, uma resposta igual a (3.141592654...). Hoje se sabe que existem infinitos números que nunca podem ser solução de uma equação algébrica. São os chamados transcendentais[11].

Em 1799 uma importante contribuição ao moderno conceito da álgebra foi proposta por *Paolo Ruffini*, com estudos referentes ao estudo das substituições e permutações.

No início do século XIX, o desenvolvimento da álgebra assumiu dois aspectos distintos: aprimoramento das técnicas operacionais, das soluções de equações e das diferentes maneiras de calcular sobre variáveis e funções, e o aspecto

---

[11] Os números transcendentais são números irracionais que não são solução de nenhuma equação algébrica. Dentre todos podemos destacar o número "**e**" e o "**pi**", os seus valores são dados por: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 2.718281828...$ e $\pi \cong 3{,}141592654\ldots$, respectivamente.

primordialmente lógico que lançou os fundamentos da álgebra moderna e da análise matemática.

Em 1803, Paolo Ruffni afirmou não ser possível resolver as equações gerais de grau superior ao quarto por métodos algébricos.

Em 1806 o suiço *Jean-Robert Argand* (1768-1822) formaliza a representação geométrica dos números complexos (embora isso já tivesse sido feito pelo esquecido topógrafo norueguês *Caspar Wessel* (1745-1818)).

Em 1809 é publicada o primeiro livro sobre geometria diferencial, *Application d'analyse à la géometrie*, obra do francês *Gaspar Monge* (1746-1818), pai da geometria descritiva.

Surge também a obra *Teoria do movimento dos corpos celestes* por *Karl Fredrich Gauss* (1777-1855) onde aparece a lei normal, a propósito dos erros nas observações astronômicas, e a sua curva em forma de sino. Gauss foi um matemático de grande criatividade, tendo sido o fundador da Estatística Matemática e deixado uma obra muito diversificada, desde o Teorema Fundamental da Álgebra ao Movimento dos Corpos Celestes; desde a Geometria Hiperbólica à Estatística, passando por Geodésica, Números Complexos e Séries.

Em 1812 *Pierre Simon de Laplace* (1749-1827), matemático membro da Academia de Ciências de Paris (conhecido como o Newton francês), publica a obra *Teoria Analítica das Probabilidades* (já antes publicara o *Tratado de Mecânica Celeste*).

Em 1824 *Niels Henrik Abel* (1802-1829) publica, em um artigo científico, um exemplo de uma equação de grau maior que quatro, onde não existe uma expressão radical, em função de seus coeficientes, para achar suas raízes (*Teorema de Abel-Ruffini*).

Em 1830 o francês *Evariste Galois* (1811-1832) cria a teoria de grupos, a base da matemática moderna, e também, *Giusto Bellavitis* (1803-1880), professor na Universidade de Pádua, formaliza o cálculo vetorial.

O período compreendido entre 1854 a 1912 coincide com a vida e obra de um matemático muito produtivo: Jules Henri Poincaré (mais de 500 obras sobre variadíssimos campos da Matemática e da Física).

Paralelamente aos estudos sobre os grupos, desenvolveu-se outro capítulo da álgebra atual: a teoria das formas (ou dos invariantes em relação a um grupo de transformações). O fundador desses estudos foi *George Boole*, que se celebrizou por ter introduzido em seu livro "As Leis do Pensamento", em 1854, os estudos pioneiros sobre a sistemática da lógica simbólica.

Em 1867 o descendente de uma família judia originária de Portugal, *George Cantor* (1845-1918), defende, na Universidade de Berlim, a tese de doutoramento consagrada às equações indeterminadas do tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$.

Em 1871 a álgebra abstrata aparece fortemente na publicação de um memorial feito por *Hermann Schwartz* sobre a teoria das séries hipergeométricas. O desenvolvimento destas noções nessa obra originou o que hoje denominamos de geometria diferencial. A partir de então a matemática caminhou para uma grande síntese, onde os dois grandes ramos, aritmética e geometria, aparecem reunidos em vários pontos. Os importantes trabalhos de *Stefan Banach* a respeito dos espaços abstratos, e a inclusão de muitas teorias algébricas nesses estudos, possibilitaram a reunião de uma vasta quantidade de estudos anteriores e contribuíram poderosamente para a rápida evolução de novos campos da matemática abstrata, principalmente para a topologia.

Em 1879 houve a primeira definição explícita de corpo numérico como sendo uma coleção de números que formam um grupo abeliano (comutativo) em relação à adição e excluindo o zero, também em relação à multiplicação, no qual a multiplicação é distributiva em relação à adição, por parte de *Julius W. Richar Dedekind* (1831-1916).

Em 1902 aconteceu a apresentação da tese de doutorado de *Henri Lebesgue* (1875-1941), intitulada *Intégrale, longueur, aire*, onde expande extremamente o espaço da análise de Fourier.

Em 1931 o alemão *Kurt Gödel*[12] (1906-1978) demonstra que, dentro de qualquer sistema matemático, como a aritmética, álgebra ou a geometria, sempre existem teoremas que não podem ser provados nem desmentidos.

Em 1939 surge o primeiro volume de uma grande obra chamada *Elementos de Matemática* que ainda está em plena atualidade, tendo sido editado a sua trigésima primeira edição em 1965, e que ainda não está completo na sua parte I, "As Estruturas Fundamentais da Análise", com os subtítulos: Teoria dos Conjuntos, Álgebra, Topologia Geral, Funções de Variável Real, Espaços Vectoriais Topológicos e Integração. Nas suas páginas há o nome do autor - *Nicolas Bourbaki* - um francês fictício com nome de grego. "*Bourbaki*" designa um grupo de matemáticos, quase todos franceses, que formam uma espécie de sociedade fechada, da qual *André Weil* (1906-1998) e *Jean Dieudonné* (1906-1992) são dois dos mais importantes líderes.

Em 1942 foi publicado o livro de Bento de Jesus Caraça (1901-1948), *Conceitos Fundamentais de Matemática*.

[12] Disponível em: http://home.ddc.net/ygg/etext/godel/. Acesso em 6 de janeiro de 2005.

Em 1993 o matemático inglês *Andrew Wiles* (1952 -) anuncia a demonstração do Último Teorema de Fermat[13]. Em 1995, após algumas correções foi publicado.

2.2 A INFORMÁTICA e a EDUCAÇÃO no BRASIL

O resgate histórico dos fatos característicos da cultura de informática educativa existente no Brasil tem como principal referência o livro *Projeto EDUCOM* (ANDRADE, 1993). As primeiras iniciativas na área datam de 1971, ocasião em que o uso de computadores no ensino da Física foi discutido em seminário com a colaboração da Universidade de Dartmouth/USA. As primeiras demonstrações do uso do computador na educação foram na modalidade Instrução Programada - CAI (*Computer Aided Instruction)*, e ocorreram no Rio de Janeiro, em 1973, na I Conferência Nacional de Tecnologia Aplicada ao Ensino Superior (MORAES, 1997).

Na década de 70 surgiram algumas experiências do uso do computador no ensino. As universidades que participaram do EDUCOM foram: a Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Quanto a UFRJ, os registros a apontam como a instituição pioneira na utilização do computador em atividades acadêmicas através do Departamento de Cálculo Científico, criado em 1966 (e que deu origem posteriormente ao Núcleo de Computação Eletrônica, NCE). Nessa época, o computador era utilizado como objeto de estudo e pesquisa, dando ensejo a uma disciplina voltada para o ensino de informática. A partir de 1973, o

[13] Último Teorema de *Fermat* afirma que "Não há números inteiros e diferentes de zero que satisfaçam à equação $\mathbf{x^n + y^n = z^n}$ desde que '**n**' seja inteiro e maior do que **2**." *Fermat* dizia que "Encontrei uma demonstração verdadeiramente admirável, mas a margem é muito pequena para apresentá-la" Até hoje há dúvida sobre a veracidade do exposto pelo francês.

Núcleo de Tecnologia Educacional para a Saúde e o Centro Latino-Americano de Tecnologia Educacional - NUTES/CLATES, dessa mesma universidade, iniciavam, no contexto acadêmico, o uso da informática como tecnologia educacional voltada para a avaliação formativa e somativa de alunos da disciplina de química, utilizando-a para o desenvolvimento de simulações.

Em 1975, um grupo de pesquisadores da UNICAMP, coordenado pelo Prof. Ubiratan D'Ambrósio, do Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, escreveu o documento Introdução de Computadores nas Escolas de 2º Grau, financiado pelo Acordo MEC-BIRD, mediante convênio com o Programa de Reformulação do Ensino (PREMEN/MEC), atualmente extinto. Naquele mesmo ano e no ano seguinte, a UNICAMP receberia as visitas de Seymour Papert e Marvin Minsky para ações de cooperação técnica. Em fevereiro-março de 1976, um grupo de pesquisadores da UNICAMP visitou o MEDIA-Lab do MIT/USA, cujo retorno permitiu a criação de um grupo interdisciplinar envolvendo especialistas das áreas de computação, lingüística e psicologia educacional, dando origem às primeiras investigações sobre o uso de computadores na educação, utilizando a linguagem LOGO (Andrade, 1993).

A cultura nacional de informática na educação proliferou nos anos 80, a partir dos resultados de dois seminários internacionais em 1981 e 1982, realizados em Brasília e Salvador, respectivamente, sobre o uso do computador como ferramenta auxiliar do processo de ensino-aprendizagem. Desses seminários surgiu a idéia de implantar projetos-piloto em universidades, o que originou, em 1984, o Projeto EDUCOM, iniciativa conjunta do MEC, Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e Secretaria Especial de Informática da Presidência da República - SEI/PR. Esta iniciativa estava voltada para a criação de núcleos interdisciplinares de pesquisa e formação de recursos humanos nas Universidades Federais do Rio Grande do Sul (UFRGS), do Rio de Janeiro (UFRJ), Pernambuco (UFPE), Minas Gerais (UFMG) e na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Em particular, a proposta da UFRJ surgiu em 1983 por iniciativa dos professores da Faculdade de Educação (FE), Núcleo de Tecnologia Educacional para a Saúde (NUTES), Núcleo de Computação Eletrônica (NCE).

Foram implementados, a partir de 1986, os Programas de Ação Imediata em Informática na Educação de 1º e 2º graus, destinado a capacitar professores (Projeto FORMAR) e também foram criados os Centros de Informática Aplicada à Educação de 1º e 2º grau - CIED (ligados às secretarias estaduais de educação), os Centros de Informática na Educação Tecnológica - CIET (ligados às escolas técnicas federais, estes estavam vinculados à uma escola técnica federal ou a um centro federal de educação tecnológica - CEFET) e o Centro de Informática na Educação Superior - CIES (ligados às universidades). Competia a cada secretaria de educação e a cada instituição de ensino (técnico e/ou superior) definir pedagogicamente sua proposta.

Em 1989, o Ministério da Educação (MEC) instituiu através da Portaria Ministerial n. 549/89, o Programa Nacional de Informática na Educação (PRONINFE), com o objetivo de “desenvolver a informática educativa no Brasil, através de atividades e projetos articulados e convergentes, apoiados em fundamentação pedagógicos, sólidos e atualizada, de modo a assegurar a unidade política, técnica e científica imprescindível ao êxito dos esforços e investimentos envolvidos”. Em 1997, é criado o PROINFO, Programa Nacional de Informática na Educação. O Programa é desenvolvido pela Secretaria de Educação à Distância (SEED), pelo Departamento de Infra-Estrutura Tecnológica (DITEC), em parceria com as Secretarias Estaduais de Educação, onde o principal trabalho é introduzir as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) nas escolas públicas de ensino médio e fundamental, além de articular os esforços e as ações desenvolvidas no setor sob sua jurisdição, em especial as ações dos NTE[14] – Núcleos de Tecnologia Educacional. e algumas Secretarias Municipais de Educação.

2.3 MATEMÁTICA no BRASIL

O período compreendido entre o descobrimento do Brasil (século XV) e o final do século XVI não contemplou o Brasil com nenhum matemático de renome nacional e/ou internacional, mas no Século XVII, dentre todos os jesuítas que chegaram ao Brasil, podemos destacar o excelente matemático, Padre *Valentin Stancel S.J.*, formado em *Ormuz* e Praga; sua chegada no Brasil foi em 1663 onde morou até a sua morte em 1705. Destacamos que *Stance*l teve os resultados de suas observações de cometas mencionados no *Principia* de Isaac Newton.

No século XVIII, mais precisamente em 1744, foi lançado o primeiro livro de matemática escrito no Brasil, por *José Fernandes Pinto Alpoim* (1700-1765), o Exame de Artilheiro, e do mesmo autor, o Exame de Bombeiro, publicado em 1748 e impressos em Lisboa e Madrid, respectivamente.

No século XIX o cientista brasileiro com maior destaque no período colonial foi José Bonifácio de Andrada e Silva (1763-1838). Em 1810 aconteceu a criação da escola da Academia Real Militar, com os curso de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, com duração de quatro anos e um dos professores era o matemático José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852). Após várias reformas esta escola

[14] Por exemplo, no Rio de Janeiro no primeiro bimestre de 2005, existem 16 NTE's atendendo a 356 escolas em todo o estado.

transformou-se em: Escola Militar, Escola Central, Escola Politécnica (1874), Escola Politécnica do Rio de Janeiro, Escola Nacional de Engenharia e atualmente Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Em 1814 surgiu uma revista nova, *O Patriota*, na qual José Saturnino da Costa Pereira, que havia feito o curso de Matemática na Universidade de Coimbra, publicou um reconhecido artigo sobre matemática avançada. Em 1848 o primeiro título de doutor é dado para Joaquim Gomes de Souza, o “Souzinha”. Em 1870 foi criado a Escola de Minas de Ouro Preto e em 1893 foi criado a Escola Politécnica de São Paulo.

No século XX as invenções de Alberto Santos Dumont (1873-1932) demandaram grandes avanços em cálculos. No período compreendido entre 1910 e 1920 surgiu a reação ao positivismo no ensino científico na Escola Politécnica liderada por Otto de Alencar e seus discípulos Amoroso Costa e Teodoro Ramos. Em 1916 foi inaugurada a Sociedade Brasileira de Ciências, criado por Amoroso Costa no Rio de Janeiro, que em 1921 transformou-se em Academia Brasileira de Ciências. A visita de *Émile Borel* (1922) à Academia Brasileira de Ciências deu origem a visitas posteriores de *Jacques Hadamard* (1924), *Albert Einstein* (1925), *Marie Curie* (1926) e *Paul Langevin* (1928). Em 1920 foi criada a Universidade do Rio de Janeiro. Em 1924 foi fundada, na cidade do Rio de Janeiro, a Associação Brasileira de Educação (ABE). Em 1927 é realizada a 1ª Conferencia Nacional de Educação em Curitiba. No período compreendido entre 1920 e 1930 já circulavam revistas de periodicidade mensal, tal como a revista Brasileira de Matemática, sob a responsabilidade de Salomão Serebrenick e Julio César de Mello e Souza. Na década de 20 surgem alguns matemáticos brasileiros que viriam a ter uma atuação importante, tais como, por exemplo, em Recife, Luis de Barros Freire (1896-1963) e em Belo Horizonte, Christóvam Colombo dos Santos (1890-1980). Em 1930, na transformação política do Brasil liderada por Getúlio Vargas, foi criado o Instituto Nacional de Tecnologia do Rio de Janeiro. Em 1934 o físico alemão *Bernard Gross* é contrato para lecionar neste instituto, dando bastante contribuições para a física e a matemática brasileira.

Em 1934 é criada na cidade de São Paulo a Universidade de São Paulo (USP), onde lecionaram no curso de matemática, em 1934, o matemático *Luigi Fantappié*, em 1936, o matemático *Giacomo Albanese*. Em 1935 foi a criação, no Rio de Janeiro, da Universidade do Distrito Federal (UDF), idealizado por Anísio Teixeira, com o objetivo de encorajar a pesquisa, científica, literária e artística e prover a formação ao magistério em todos os seus graus. No mesmo ano é criado o Seminário Matemático e Físico da Universidade de São Paulo e associado a ele o periódico *Jornal de Matemática Pura e Aplicada*.

Em 1937 a Universidade do Rio de Janeiro passa a ser a Universidade do Brasil. No mesmo ano, Euclides Roxo publicou o livro “A Matemática na Escola Secundária” da Coleção Pedagógica Brasileira. Em 1938 a Universidade do Distrito Federal foi fechada e em 1939 é criada a Faculdade Nacional de Filosofia (FNFi) - Universidade do Brasil (UB), onde 1949 Maria Laura Mouzinho Leite Lopes[15] foi a primeira mulher a se doutorar em matemática, com uma tese sobre espaços projetivos, no mesmo período, na Escola Nacional de Engenharia, destaca-se Marília Chaves Peixoto[16], que se dedicou a equações diferenciais. Os objetivos primordiais nesta universidade eram preparar trabalhadores intelectuais para o exercício das altas atividades culturais, preparar candidatos ao magistério do ensino secundário e realizar pesquisas nos vários domínios da cultura. Foram convidados para nela atuar os analistas *Gabrielle Mammana* e *Alejandro Terracini*, o geômetra *Achille*

[15] Espaços projetivos. Reticulados de seus sub-espaços, Notas de Matemática n° 7, CBPF, Rio de Janeiro, 1947.
[16] Marília Chaves Peixoto (1921-1961): On the inequalities $y''' \geq G(x, y, y', y'')$, An. Acad. Brasil. Ciênc., 21(3), set. 1949; pp.205-218.

Bassi e, o físico matemático *Luigi Sobrero* e posteriormente, Antonio Aniceto Monteiro. Em 1945 é publicada a primeira revista de nível internacional, *Summa Brasiliensis Matematicae*; nesse mesmo ano é fundada a Sociedade Matemática de São Paulo e acontece uma contratação da maior importância da Universidade de São Paulo (USP): *André Weil,* que sob sua influência, permitiu que no ano seguinte, fosse publicado o Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo. *André Weil* foi um dos fundadores do grupo *Bourbaki* e um dos mais destacados matemáticos do século. Nesse mesmo ano, *Jean Dieudonné* lecionava álgebra na USP baseando-se no manuscrito do livro elaborado que seria publicado na série *Éléments de Mathématique,* sob autoria de *Nicholas Bourbaki*[17]. As notas de aula foram redigidas em português por Luiz Henrique Jacy Monteiro, tornando-se um livro básico para os cursos da Universidade São Paulo.

No período compreendido entre 1940 e 1950 surgiu a revista de recreações matemáticas, Al-Karismi, sob responsabilidade de Malba Tahan.

Em 1948 foi fundado, em São José dos Campos, o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), cuja organização foi inspirada no Massachusetts Institute of Technology. Foram contratados para nele trabalhar os matemáticos *Francis D. Murnagham*, responsável por uma modernização dos cursos básicos com tratamento matricial, e o grande matemático chinês *Kuo-Tsai Chen*. Em 1952 é criado o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) na cidade do Rio de Janeiro. Foi a primeira unidade de pesquisa criada pelo Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq), tendo como pesquisadores principais *Leopoldo Nachbin* e Maurício Peixoto. O IMPA possuía, um grupo diminuto, mas muito ilustre.

[17] O nome de autor multicéfalo adotado pelo grupo *Bourbaki* para suas publicações.

Em 1957 ocorreu o 1º Colóquio Brasileiro de Matemática em Poços de Caldas, MG, e em 1962 foi inaugurada a Universidade de Brasília (UnB), idealizada por Darcy Ribeiro. Em 1967, no período triste da ditadura militar, ocorre a Reforma da Universidade, e a Universidade do Brasil torna-se Universidade Federal do Rio de janeiro (UFRJ). A FNFi é esfacelada e fragmentada e desaparece sob os pés da repressão. Em 1968 o departamento da FNFi é incorporado ao Instituto de Matemática/UFRJ. Desvinculando-se administrativamente da Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia (COPPE) nasceu o Núcleo de Computação Eletrônica (NCE). Em 1969 foram criadas a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO). No ano de 1972 foram criadas as Escolas de Álgebra, a primeira foi na Universidade de Brasília presidindo a comissão organizadora o Professor Adilson Gonçalves e coordenado pelo professor *Said Sidki*. E no mesmo ano foram criados Congressos Internacionais, envolvendo alunos de graduação e pós-graduação, fatores importantes na formação dos algebristas no País.

No ano de 1975 foi criado o 1º Seminário Brasileiro de Análise no IMPA. Em 1976 é criado, no Rio de Janeiro, o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática (GEPEM) e dois anos depois a Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC).

Em 1980 foi idealizado pela Sociedade Brasileira de Matemática o 1º Encontro Nacional de Estudantes de Matemática (ENEMA)[18], que aconteceu na Universidade Santa Úrsula no Rio de Janeiro. Em 1982 é lançada a Revista do Professor de Matemática (RPM). Em 1984 é criado o Projeto Fundão na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Em 1985 é criado o CAEM, Centro de

[18] Encontro que teve a participação do orientador desta dissertação como representante da Matemática da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática, por “João Afonso Pascarelli", do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo. Em 1987 foi realizado o 1º Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), na Pontifícia Universidade Católica (PUC) e em 1988 foi criada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Em 1989 foi criado o Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática (CEMPEM), um órgão de apoio à docência, pesquisa e extensão na área de Educação Matemática do Departamento de Metodologia de Ensino da Faculdade de Educação da UNICAMP. O ano 2000 foi declarado o ano Internacional da Matemática.

CAPÍTULO 3

"A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar". (Pólya, 1980)

3.1 SISTEMAS FORMATIVOS

São encontradas na literatura várias taxonomias propostas para sistemas formativos que obedecem, em sua concepção e implementação, critérios freqüentemente relacionados à utilização e/ou à concepção pedagógica. Dentre os pioneiros de computação na educação podemos ressaltar Alfred Bork, Thomas Dwyer, Arthur Luehrmann, Seymour Papert[19], Patrick Suppes e Robert P. Taylor. Dentre esses pioneiros podemos colocar em destaque a proposta de Taylor (1980), que classifica o sistema formativo quanto à sua utilização como tutor, ferramenta ou tutelado:

Tutor – O estudante é ensinado pelo computador, ou seja, o computador desempenha o papel do professor na forma tradicional de ensino;

Tutelado – O enfoque é dado na possibilidade do computador ser considerado o aprendiz e, portanto o aluno é que lhe ensina;

Ferramenta – O computador é utilizado para adquirir e manipular informações.

É digna de nota a proposta de *Thomas Dwyer* que estabelece dois grupos de sistemas formativos dependendo da atividade do aprendiz: o algorítmico e o heurístico:

[19] Seymour Papert desenvolveu o software LOGO no Instituto de Tecnologia de Massachussets (MIT).

Algorítmico – A ênfase é dada na transmissão do conhecimento. Este enfoque utiliza os programas da forma tutoriais, exercício e prática e/ou instrução assistida por computador (CAI - *Computer Assisted Instruction*);

Heurístico – A abordagem é a aprendizagem por experimentação ou descoberta, devendo criar um ambiente rico em situações que o aluno deve explorar conjecturas. Este enfoque utiliza os programas da forma simulações tais como jogos, os sistemas especialistas e o Logo.

3.2 CLASSIFICAÇÃO SEGUNDO FUNÇÕES PEDAGÓGICAS

É preciso que se faça uma escolha criteriosa de sistemas formativos a serem utilizados e, principalmente, das atividades que serão aplicadas. Segundo Valente (1993), "a abordagem pedagógica que pode ser feita com o uso da informática é bastante variada, oscilando entre dois pólos: de um lado, o computador, por meio do software, ensinando o aluno, e do outro, o aluno, através do software ensinado o computador", como ilustra a figura 1.

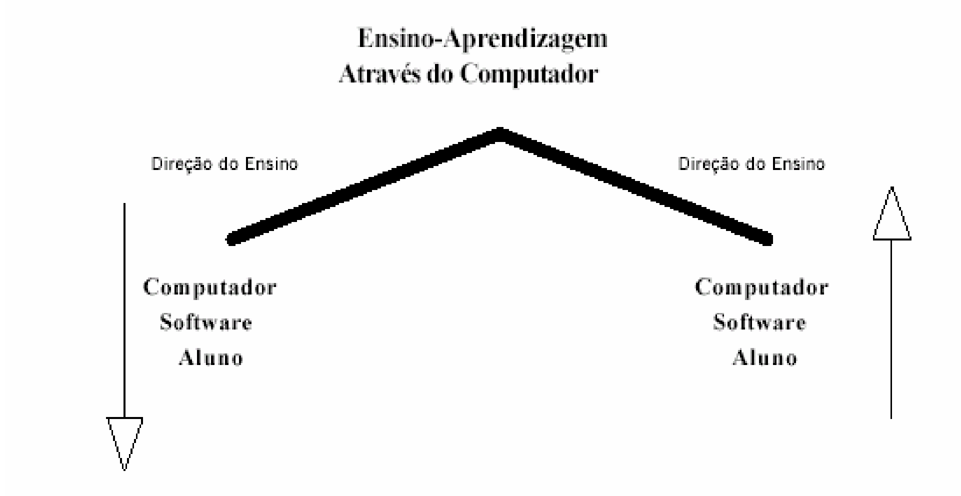


Figura 1: Ensino aprendizagem através do computador (Valente 1993).

Segundo Valente (1993), os sistemas computacionais formativos podem ser classificados de acordo com seus objetivos pedagógicos da seguinte forma: tutoriais, aplicativos, exercício-e-prática, programação, multimídia e Internet, jogos e simulação.

Os **tutoriais** constituem uma versão computacional da instrução programada, ou seja, o aluno recebe informações organizadas de acordo com uma seqüência pedagógica apresentada. Nele, a interação entre o computador e o estudante consiste na leitura de textos ou escuta da informação utilizando a tecla ENTER ou usando o *mouse* para escolher informação, com vantagens de animação, som e *feedbacks*.

Os **sistemas tutores inteligentes** (ITS) utilizam técnicas advindas da Inteligência Artificial (IA) para análise de padrões de erros e diagnostica a capacidade de aprendizagem do aluno. Fowler (1991) define um Sistema de Tutor Inteligente da seguinte forma:

> Os STI são programas de computador com propósitos educacionais e que incorporam técnicas de Inteligência Artificial. Oferecem vantagens

> sobre a Instrução Assistida por Computadores (CAIs)[20], pois podem simular o processo do pensamento humano para auxiliar na resolução de problemas ou em tomadas de decisões.

Os sistemas conhecidos como **exercícios-e-prática** enfatizam a apresentação de lições e/ou exercícios, restringindo o usuário à memorização e à repetição dos exercícios, cujos resultados podem ser avaliados pelo computador. As atividades não têm uma preocupação maior sobre se o aluno está ou não entendendo o que ele próprio está desenvolvendo. Esses programas não conseguem fazer uma analise qualitativa do acerto ou erro do aluno.

Os sistemas de **jogos educacionais** têm por finalidade principal a de desafiar e motivar o aluno, envolvendo-o em uma "competição" com a maquina e/ou com os colegas. Pragmaticamente, o objetivo é vencer o jogo deixando freqüentemente o lado pedagógico em segundo plano.

Os sistemas de **simulação** e **modelagem** têm a finalidade de criar modelos que permitem a exploração de situações fictícias, de situações com risco, de experimentos que são muitos complicados, caros ou que levam muito tempo para se processarem. O estudante cria modelos computacionais e implementá-os, recursos esses raramente disponíveis em nossas escolas.

Os chamados **aplicativos** tais como os programas processadores de textos, planilhas eletrônicas, manipulação de banco de dados e software gráfico, não foram desenvolvidos para fins educacionais, mas têm sido utilizados nas escolas para esse fim.

A **multimídia** e a **Internet** possuem por finalidade única a de transmitir informações como um comunicador, mas nem sempre o estudante a compreende ou

[20] **Instrução Assistida por Computador** (**CAI**) – Na versão brasileira é conhecido como Programas Educacionais por Computador (PEC) – O desenvolvimento foi influenciado pelas teorias Behavoristas do século passado na década de 50. Esses programas caracterizavam-se por mostrar o conhecimento de forma linear, nenhum fator podia mudar a ordem de ensino estabelecida na sua criação pelo programador.

constrói seu conhecimento. Elas podem ser vistas apenas como tecnologias de apoio para a elaboração e uso de softwares computacionais formativos.

Os sistemas de **programação** são softwares em que o estudante programa o computador utilizando uma linguagem de programação para representar solução de um problema.

Partindo da perspectiva de melhorar o ensino-aprendizagem da álgebra no ensino fundamental e no ensino médio foram escolhidos, entre os analisados, neste trabalho, de forma detalhada, alguns de sistemas computacionais formativos: *Algebra On One On, Aplusix, Excel, Derive, Maple* e o *Winplot*. Esses sistemas formativos foram selecionados a partir de uma pesquisa sobre os seus respectivos usos na atualidade. Esses sistemas foram analisados segundo a taxonomia de Valente (1993), obedecendo as suas respectivas aplicabilidades no ensino da álgebra.

Os temas utilizados nestas análises foram elaborados segundo os conteúdos citados pelos professores do ensino fundamental e ensino médio entrevistados (detalhados no capítulo 4). Destacaram-se, em particular, os conteúdos relacionados a: funções, inequações e geometria analítica. Para fins de ilustração dos conteúdos apresentados, como sugestão de aplicação dos conteúdos em forma de exercícios, procurou-se sempre captar as telas utilizando o recurso da tecla *Print Screen SysRq*.

3.3 ANÁLISE de SISTEMAS COMPUTACIONAIS FORMATIVOS

3.3.1 SISTEMAS de EXERCÍCIO e PRÁTICA

3.3.1.1 ALGEBRA – ONE ON ONE

Localização: www.somatematica.com.br

Tipo: Comercial – Licença $14.99.

Versão: 4.0.

Tamanho: 873K.

Ajuda: O sistema conta com ajuda, mas está tudo em inglês[21].

Descrição: Mais de 21 níveis e seis modos de jogar asseguram desafio continuado visando o desenvolvimento cognitivo de seus usuários. ***Algebra – One On One*** possui dois tipos de jogos, o jogo de Prática de Função Individual e o Jogo de Álgebra. O Jogo de Prática de Função Individual leva o usuário a praticar atividades com função individual. O Jogo de Álgebra induz o usuário a atribuir valores a uma variável em função das outras.

Pela taxonomia de Valente (1993) podemos classificá-lo como um sistema formativo da forma **exercício e prática.** O programa reforça conteúdos ensinados no Ensino Fundamental. Os conteúdos exigidos são as propriedades de números inteiros: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, módulo de números inteiros e parte inteira de divisão de dois números inteiros. O sistema é dividido em duas partes, na primeira parte (*algebra game*) os alunos só realizam conta dada por uma lei de formação ($Z = aX + bY + c$, onde a, b, c, X e Y são números inteiros); na segunda parte o usuário terá que determinar a lei de formação

[21] Exemplo do help: BONUSES - The TIME BONUS starts at about 25 and decreases until it reaches zero, or you enter an incorrect solution

conhecendo alguns dados numéricos (*Individual Function Practice Game*). Ao término de cada exercício, o programa informa se o exercício está certo (*correct*) ou errado (in*correct*) e após cada mensagem o programa resolve o problema explicando-o passo a passo. O usuário pode resolver todos os exercícios propostos utilizando cálculo mental.

Ao iniciar o ***Algebra – One On One***, o *software* apresenta as seguintes telas (ilustradas nas figuras 2, 3, 4 e 5).

Figura 2: Versão do sistema computacional formativo *Algebra – One on One.*

A figura 3 ilustra a utilização para quem tem a licença de uso (digitada no quadro branco) ou se for para trabalhar em uma versão *trial* (clicar em continue) e passa-se para a figura 4.

A figura 4 ilustra uma interação com o usuário: ele digita seu nome no primeiro quadro em branco e clica em OK (ou se já estiver o nome do usuário no quadro abaixo o usuário clica sobre o seu nome e depois OK). Após clicar OK o sistema apresenta a tela inicial de uso.

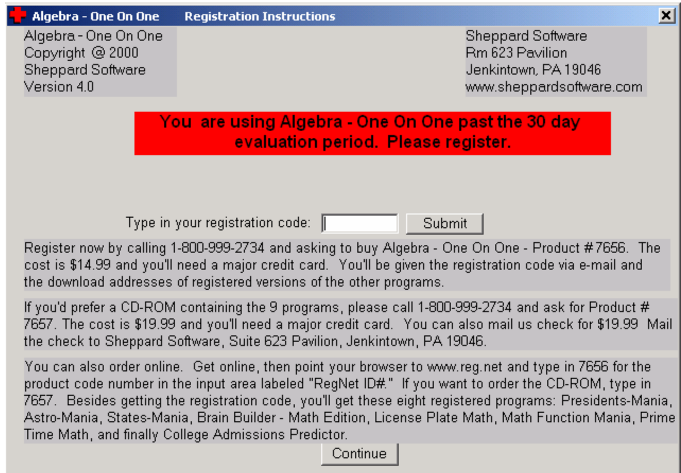


Figura 3: Apresentação do sistema *Algebra – One on One:* tela de registro

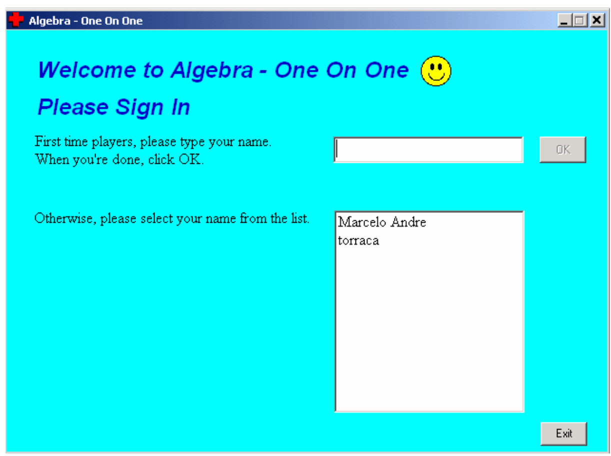


Figura 4: Apresentação do sistema *Algebra – One on One: tela de welcome*

É dada também para o usuário uma opção para escolha no sistema (como ilustra a figura 6). As opções são: *Algebra Game* e Individual *function Practice Game*.

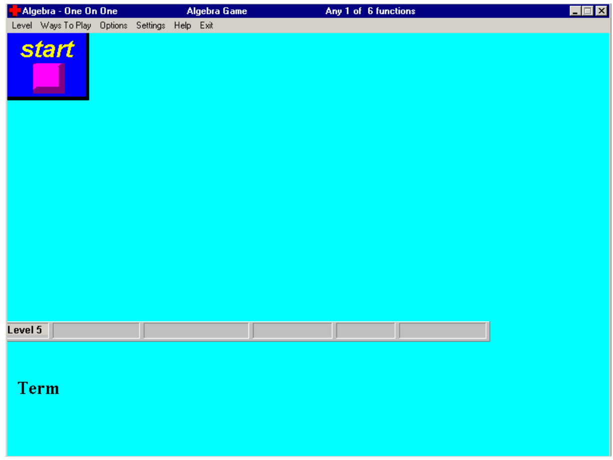


Figura 5: Tela inicial do sistema *Algebra – One on One.*

Figura 6: Barra de ferramentas para iniciar o sistema *Algebra – One on One.*

Na opção ***Algebra Game*** existe uma divisão em três itens: *Calculate Value*, *Choose Formula* e *Figure Formula and Calculate*, conforme ilustra a figura 7.

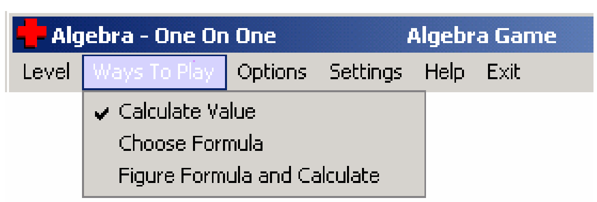


Figura 7: Barra de ferramentas do *Algebra Game.*

E para cada item (*Calculate Value, Choose Formula e Figure Formula and Calculate*) é divido em 21 níveis, como ilustra a figura 8.

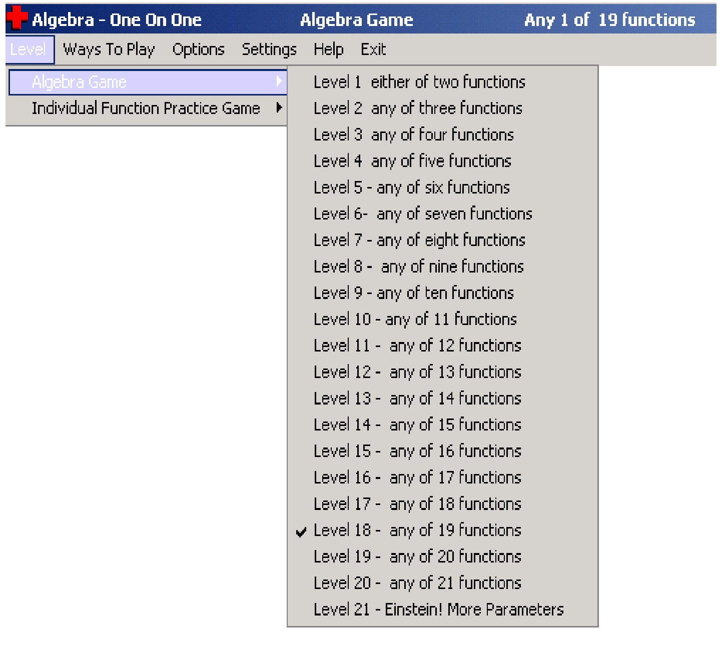


Figura 8: Níveis dos exercícios de *Algebra Game.*

Calculate Value

O usuário através de uma lei previamente estabelecida pelo sistema determinará o valor de **Z** em função de **X** e **Y**.

Level 1 – Either of Two Functions

Nesse exemplo o usuário estará trabalhando com o conteúdo de módulo de números inteiros e o conteúdo de máximo ou mínimo de números inteiros.

Determinar **z**, sabendo que $z = \text{Maximum}(|x|, |y|)$, sabendo que $x = 4$ e $y = -6$, a figura 9 ilustra essa situação.

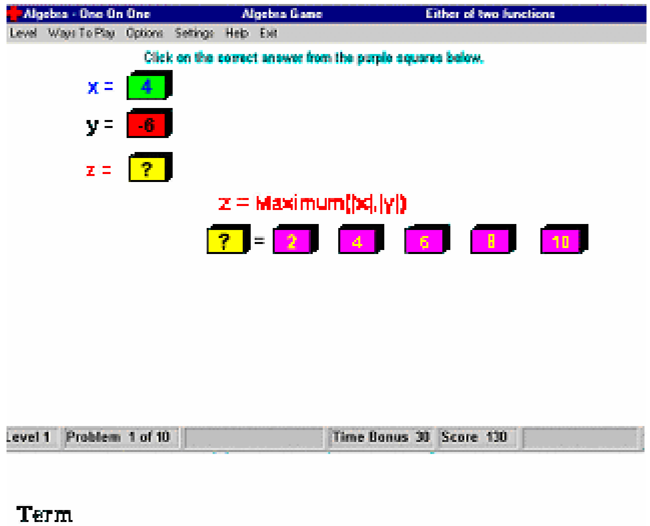


Figura 9: Valor de $z = \text{Maximum}\left(|x|,|y|\right)$ dados x e y. Primeiro nível.

A solução apresentada é $z = 6$. Está é uma solução correta como é demonstrado na figura 10.

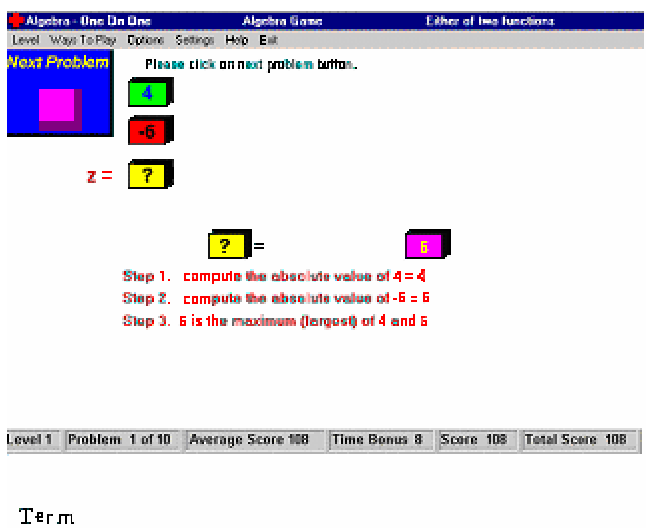


Figura 10: Solução correta e solução do sistema.

Nesse exemplo trabalha-se o conteúdo de máximo de números inteiros.

Queremos determinar **z**, sabendo que $z = \text{Maximum}(x, y)$, onde $x = -7$ e $y = 1$, conforme ilustrado na figura 11.

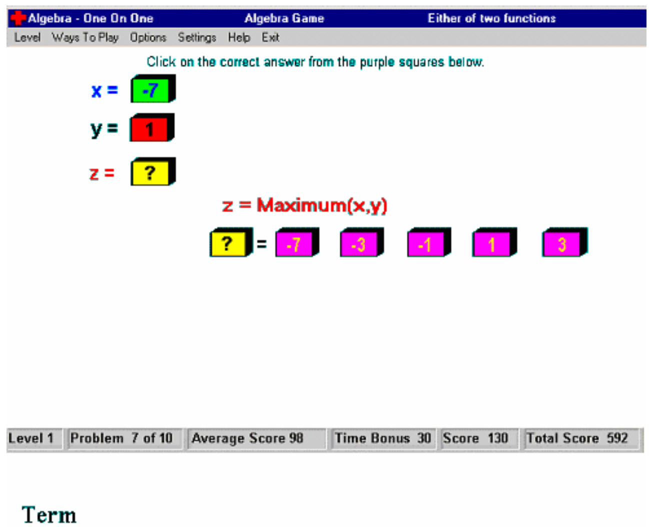


Figura 11: Valor de $z = \text{Maximum}(x, y)$ dados x e y. Primeiro nível.

A solução apresentada é $z = -1$, mas ela não está correta, conforme consta na figura 12.

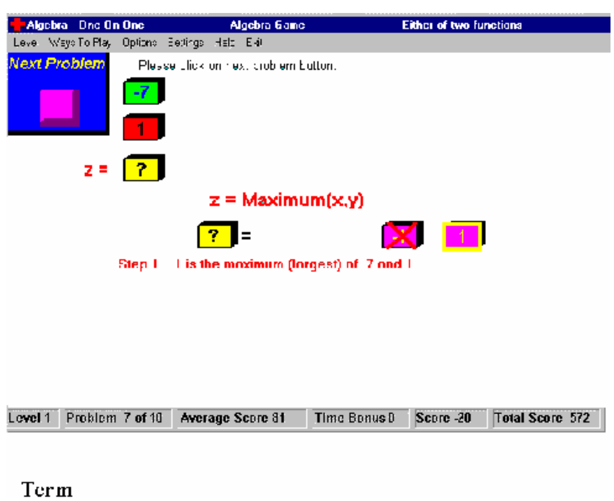


Figura 12: Solução incorreta e solução do sistema.

Level 21 - Einstein More Parameters

Nesse nível utilizam-se os conteúdos de adição e/ou subtração e divisão de números inteiros. Na operação *drop remainder* busca-se determinar a parte inteira da divisão de números inteiros.

Valor de **z** na expressão $z = -1 + \left(\frac{x+y}{2}, \textit{ drop remainder} \right)$[22] onde $x = -6$ e $y = -7$, como ilustra a figura 13.

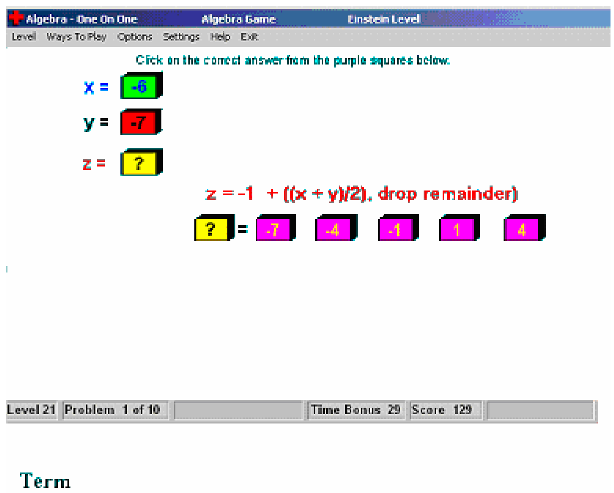


Figura 13: Valor de $z = -1 + \left(\frac{x+y}{2}, \text{ drop remainder} \right)$ dados x e y. 21º nível.

A solução apresentada é $z = -7$, e esta solução está correta, conforme ilustra a figura 14.

[22] ***Drop remainder*** é a parte inteira da divisão de dois números inteiros.

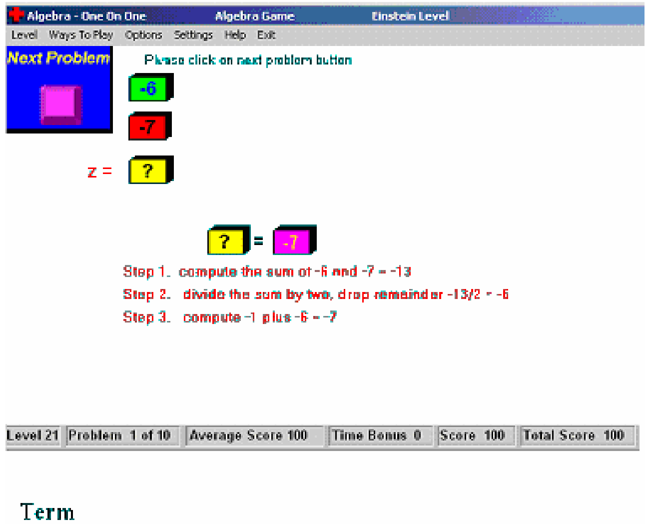


Figura 14: Solução correta e segue a solução do sistema

Choose Formula

Neste caso, objetiva-se identificar, através de vários exemplos numéricos fornecidos pelo sistema, a fórmula válida para resolver cada exercício. Esse tópico só está disponível para o usuário a partir do nível 2.

Level 5 – Any of five functions

Nesse exemplo busca-se determinar a lei de formação, dados vários resultados numéricos.

Nesse exemplo as leis sugeridas pelo sistema são:

- $Z = \text{Maximum}\,(x, y)$[23]
- $Z = \text{Minimum}\,(x, y)$[24]
- $Z = \text{Maximum}\,(|x|, |y|)$[25]
- $Z = \dfrac{x}{y}$ drop remainder

---

[23] Se $\mathbf{Z} = \mathbf{Maximum}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ então **Z** será o valor máximo entre os números **x** e **y**.
[24] Se $\mathbf{Z} = \mathbf{Minimum}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ então **Z** será o valor mínimo entre os números **x** e **y**.
[25] Se $\mathbf{Z} = \mathbf{Maximum}\,(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)$ então **Z** será o valor máximo entre os módulos dos números **x** e **y**.

- $Z = \frac{y}{x}$ drop remainder

Como podemos observar a figura 15.

A solução apresentada é $Z = \text{Maximum}\left(|x|, |y|\right)$, mas está solução é incorreta, como mostra a figura 16.

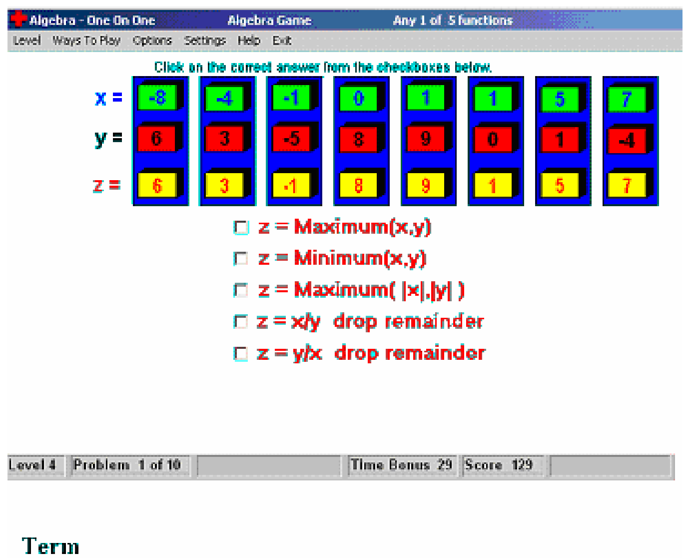


Figura 15: Determinar a lei, conhecendo os valores de x, y e z. Quinto nível.

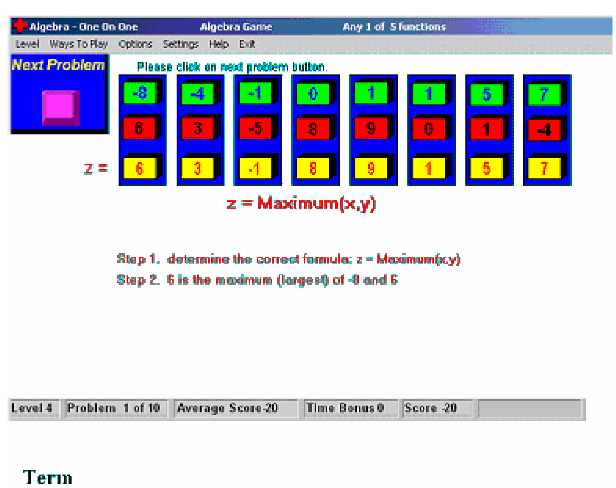


Figura 16: Solução incorreta e solução dada do sistema.

Figure Formula and Calculate

Busca-se aqui identificar, através de vários exemplos numéricos fornecidos pelo sistema, qual a fórmula válida para resolver os exemplos numéricos e ainda determinar o valor numérico de **Z**, corretamente, em 30 segundos. Se nesse tempo não for achada a solução correta ou ainda houver dúvida na solução é possível aguardar trinta segundos e obter a primeira pista fornecida pelo sistema e adicionalmente se ainda não for suficiente para resolver o problema pode ser aguardar mais 30 segundos e obter a segunda é ultima pista dada pelo sistema.

Level 5 – Any of six functions

Nesse exemplo busca-se determinar a lei de formação, dados vários resultados numéricos e a mesma lei deve ser válida para determinar o valor de **Z**, conforme disposta na figura 17. Nesse exemplo, a resolução do exercício em menos de trinta segundos, leva a não utilização de pistas fornecidas pelo sistema.

A solução apresentada é $Z = -1$, após observado alguns resultados, pode-se chegar a seguinte lei de formação $z = \frac{x + y}{2}$, drop remainder [26]. A solução está correta como ilustra a figura 18.

[26] **Z** é a parte inteira da média aritmética de dois números.

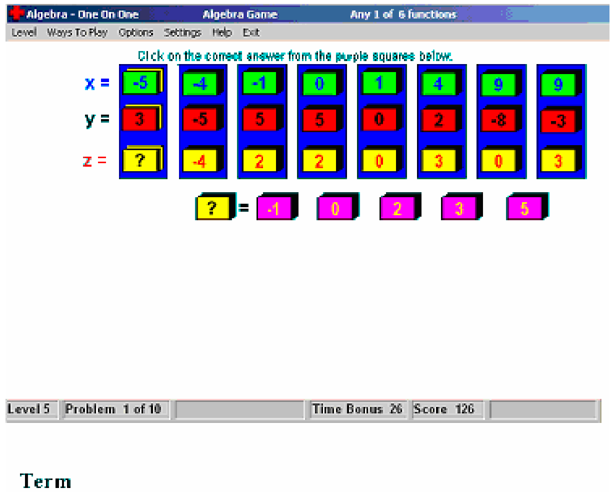


Figura 17: Determinar a lei e descobrir z dados x e y. Exercício do quinto nível.

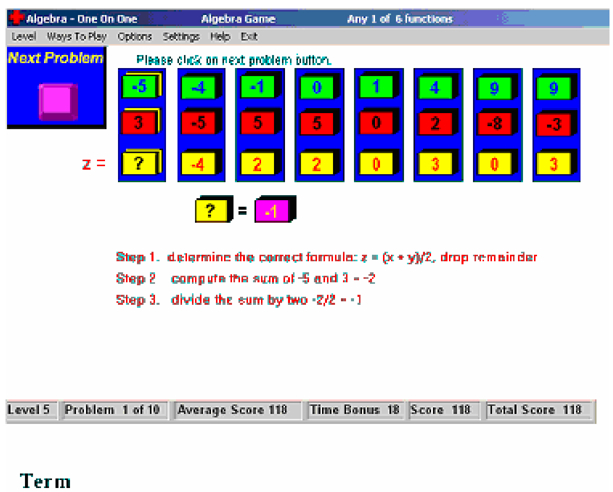


Figura 18: Solução correta e solução do sistema.

Level 16 – Any of 17 functions

Devemos determinar aqui a lei de formação, dados vários resultados numéricos e a mesma lei ser válida para determinar o valor de **Z**, como ilustra a figura 19. Nesse exemplo o tempo de realização não é levado em consideração. Então após terminar o tempo e passados trinta (30) segundos o sistema fornece a primeira pista $Z = \frac{x^2}{y}$, *drop remainder* *or* $Z = \frac{y^2}{x}$, *drop remainder* como mostra a figura 20. Após a primeira pista, caso haja dúvida na resposta pode-se aguardar mais trinta (30) segundos para receber a segunda pista $Z = \frac{y^2}{x}$, *drop remainder,* como mostra a figura 21. Então após a segunda e última pista o exercício, está resolvido corretamente como ilustra a figura 22.

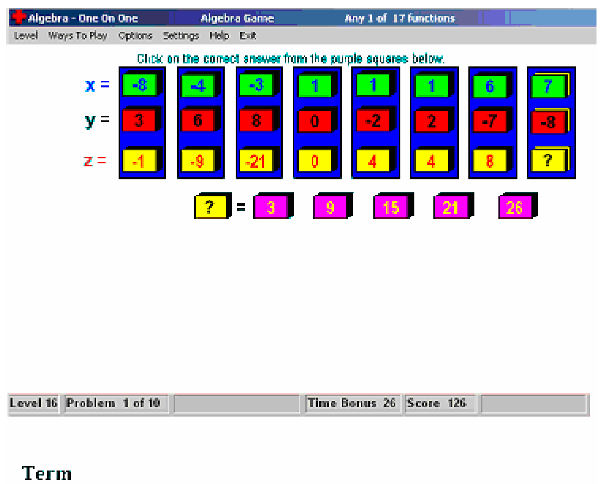


Figura 19: Determinar a lei e descobrir z conhecendo x e y. Exercício do décimo sexto nível.

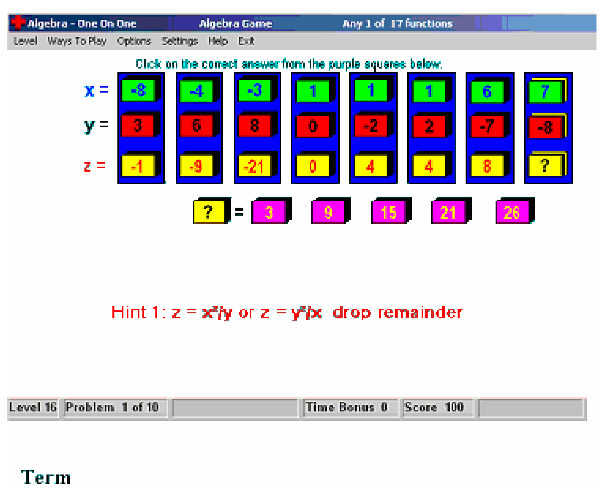


Figura 20: Primeira pista dada pelo sistema.

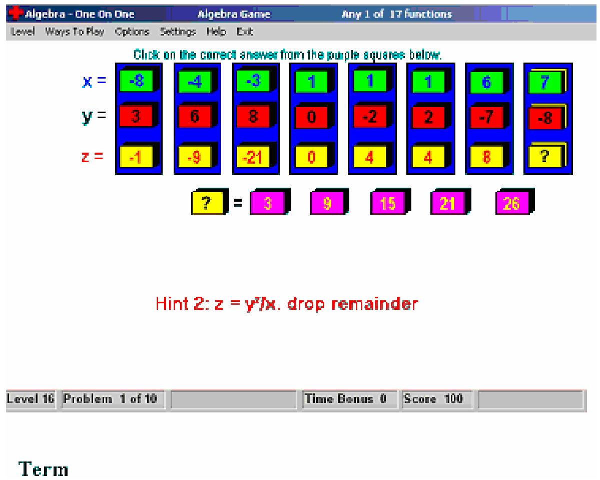


Figura 21: Segunda pista dada pelo sistema.

A solução apresentada é $z = 9$, está correta após as duas pistas dadas pelo sistema, como podemos observar a figura 22.

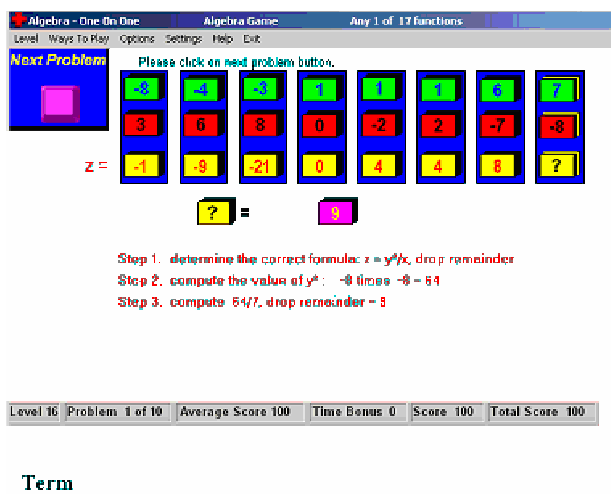


Figura 22: Solução correta e solução do sistema.

Na opção ***Individual Function Practice Game*** existe uma divisão em três itens: *Calculate Value*, *Choose Formula* (não está disponível) e *Figure Formula and Calculate*, conforme ilustra a figura 23.

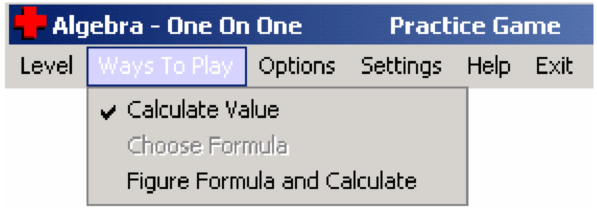


Figura 23: Barra de ferramentas do *Individual Function Practice Game.*

E para cada item (*Calculate Value* e *Figure Formula and Calculate*) é dividido em 21 níveis, como ilustra a figura 24.

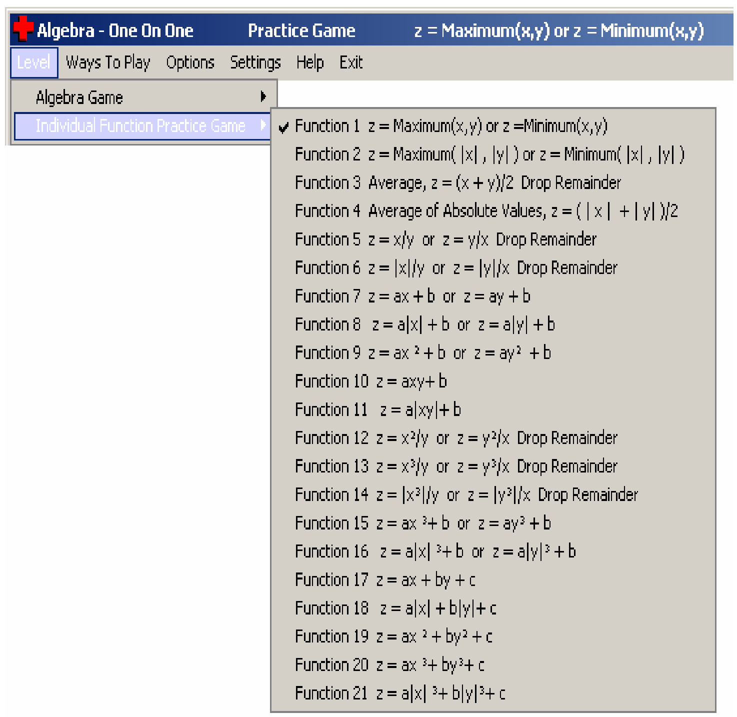


Figura 24: Níveis dos exercícios do *Individual Function Practice Game.*

Calculate Value

Dadas duas leis previamente elaboradas pelo sistema, que indicará qual das leis deverá ser utilizada em cada exercício, logo pode-se determinar o valor de **Z** corretamente.

Function 6

Nesse nível praticamos exercícios envolvendo o conteúdo de módulo e divisão de números inteiros onde a importância desse nível está em determinar a parte inteira (*drop remainder*) na divisão de números inteiros.

As leis fornecidas nesse nível são: $\left(z = \frac{|x|}{y} \text{ or } z = \frac{|y|}{x}, \text{ drop remainder} \right)$

Determinemos o valor de **z**, sabendo que $x = 2$ e $y = 1$, como ilustra a figura 25.

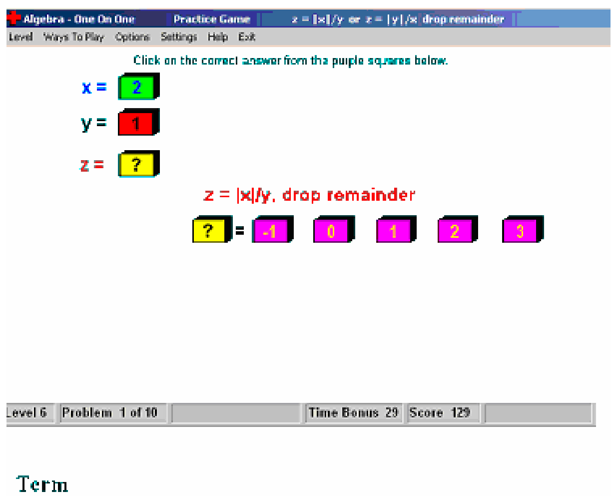


Figura 25: Determinar o valor z conhecendo x e y. Exercício do sexto nível.

A solução apresentada é $z = 2$, como podemos observar a figura 26. A solução está correta como ilustram as figuras 26 e 27.

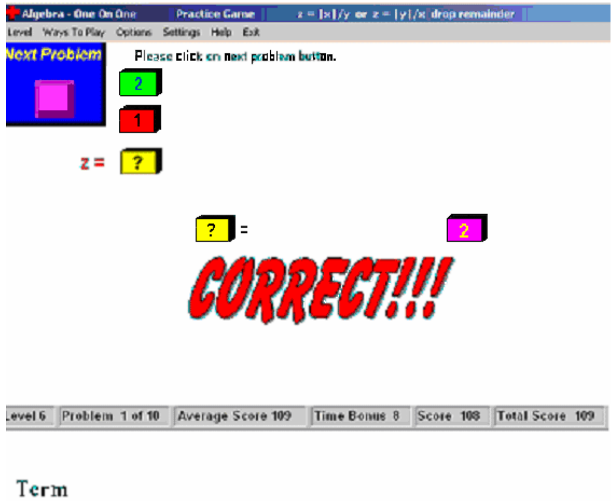


Figura 26: Solução está correta.

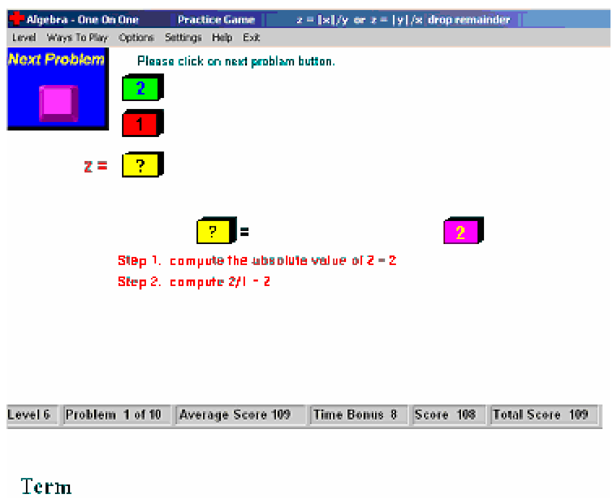


Figura 27: Solução do sistema.

Figure Formula and Calculate

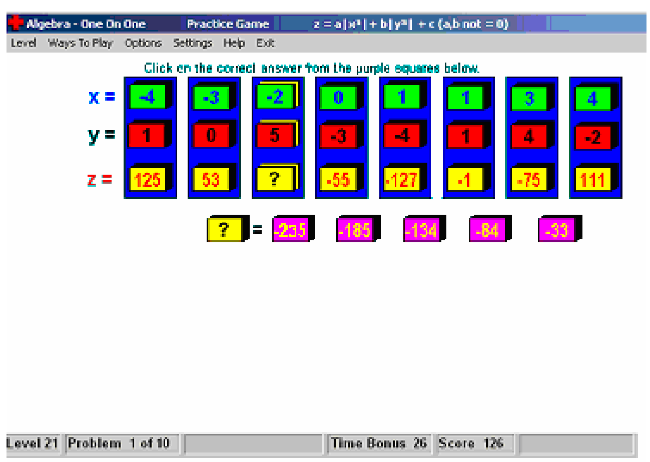
Dadas duas leis previamente elaboradas pelo sistema, temos que determinar a lei que deve ser usada em cada exercício e determinar o valor de **Z** corretamente. Essas leis estão disponíveis na parte superior da tela, como mostra a figura 28.

Figura 28: Modelo do exercício desse nível.

Function 21

Nesse nível praticam-se exercícios envolvendo o conteúdo de potência, módulo, multiplicação, adição e/ou subtração. A importância desse nível está em determinar mentalmente os valores de **a**, **b** e **c** em menos de 27 segundos, pois passado esse tempo o sistema indica o valor de **a**. Após ter informado o valor de **a,** passados mais trinta (30) segundos o programa informa o valor de **b** e após ter informado o valor **b** passados mais trinta (30) segundos o programa informa o valor de **c**.

Determinemos $z = a\left|x^3\right| + b\left|y^3\right| + c$, $(a, b \text{ not} = 0)$, onde $x = -2$ e $y = 5$, como mostra a figura 29. Esse exercício, resolvido nos primeiros vinte e sete (27) segundos, não necessitou de nenhuma pista do sistema.



Term

Figura 29: Valor de $z = a\left|x^3\right| + b\left|y^3\right| + c$ dados x e y. Exercício do vigésimo primeiro nível.

A solução apresentada é $z = -185$. A solução não está correta como ilustram as figuras 30 e 31. Nesse exercício os valores das variáveis **a**, **b** e **c** são: $a = 2$, $b = -2$ e $c = -1$.

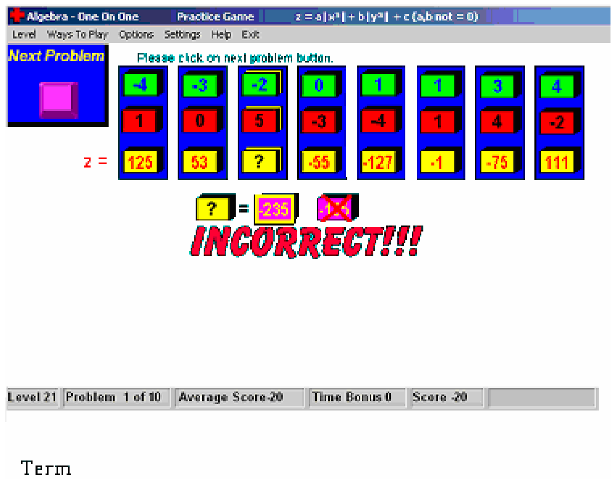


Figura 30: Solução está incorreta.

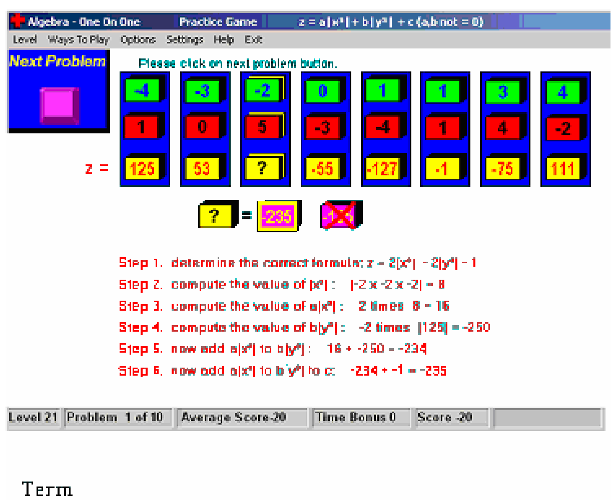


Figura 31: Solução do sistema.

Determinemos $z = a|x^3| + b|y^3| + c$, $(a, b \ \textit{not} = 0)$, onde $x = 5$ e $y = -2$, (figura 32). Nesse exercício as três pistas são dadas pelo sistema para as variáveis

a, **b** e **c**, ou seja, esperar um minuto e vinte e sete segundos para resolver o exercício. As figuras 33, 34 e 35 mostram as pistas e a solução do exercício está na figura 36.

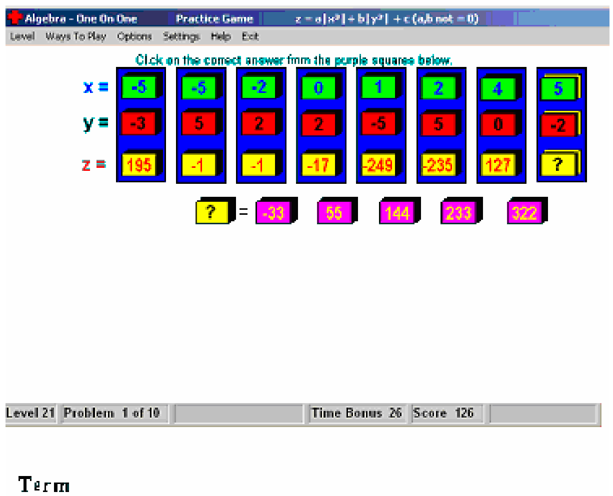


Figura 32: Valor de $z = a\left|x^3\right| + b\left|y^3\right| + c$ dados x e y. Exercício do vigésimo primeiro nível.

Após 27 segundo o sistema determina o valor da primeira variável, $a = 2$, como ilustra a figura 33.

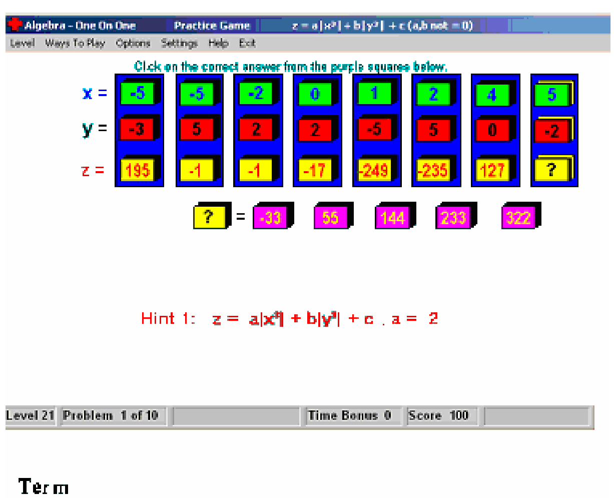


Figura 33: O sistema informa o valor da primeira variável, $a = 2$.

Após 30 segundos da informação da variável **a**, temos a informação da variável **b**, $b = -2$, como ilustra a figura 34.

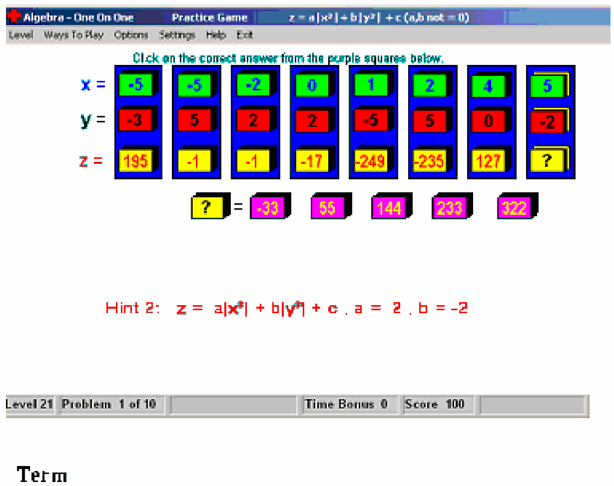


Figura 34: O sistema informa o valor da segunda variável, $b = -2$.

Após 30 segundos da informação da variável **b**, temos a informação da variável **c**, $c = -1$, como ilustra a figura 35.

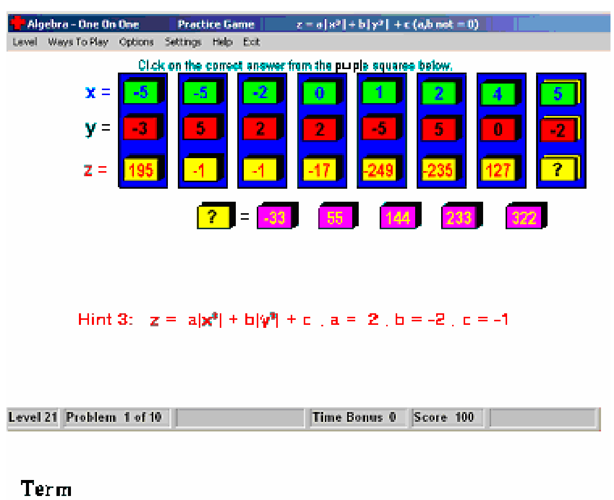


Figura 35: O sistema informa o valor da terceira variável, $c = -1$.

Após dados os valores das variáveis $a = 2$, $b = -2$ e $c = -1$. Solução apresentada é $z = 233$, como podemos observar a figura 36. A solução está correta, ilustrada na figuras 36.

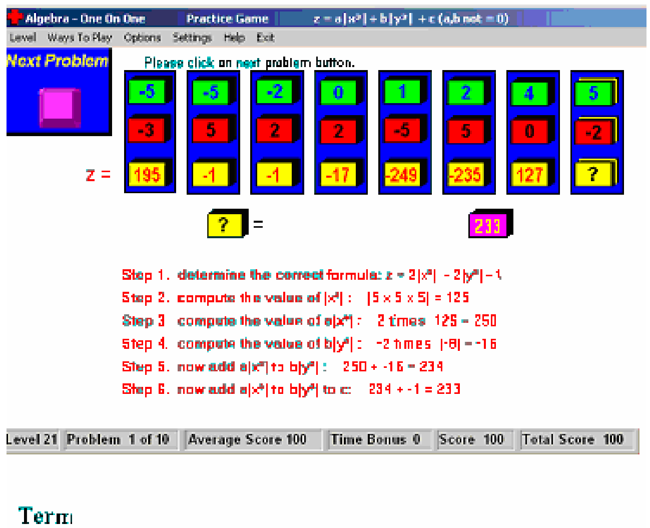


Figura 36: Solução correta e solução do sistema.

Score **(pontuação)**

No final de cada nível o sistema produz a pontuação do usuário e o classifica nos seguintes níveis, como mostra a figura 37.

- ***Novice*** – Qualquer pontuação menor que 799 pontos;
- ***Learner*** – Pontuação entre 800 a 899 pontos;
- ***Veteran*** – Pontuação entre 900 a 999 pontos;
- ***Calculator*** – Pontuação entre 1.000 a 1.090 pontos;
- ***Math Pro*** – Pontuação entre 1.100 a 1.149 pontos;
- ***Math Whiz*** – Pontuação entre 1.150 a 1.199 pontos;
- ***Math Genius*** – Pontuação entre 1.200 a 1229 pontos;

- ***Einsten*** – Qualquer pontuação acima de 1230 pontos

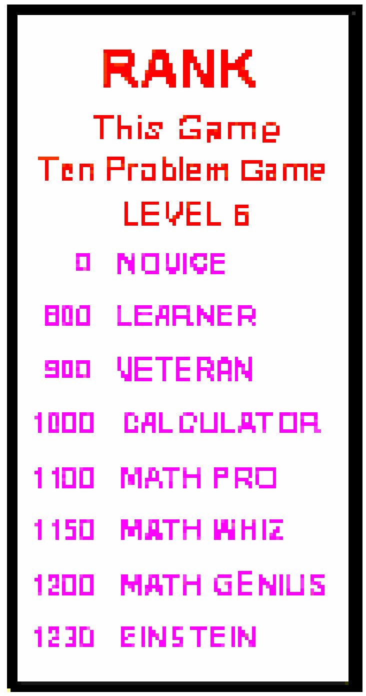


Figura 37: Classificação das pontuações.

Para os itens, ***Ways To Play*** em ***Calculate Value*** para ***Algebra Game*** e ***Individual Function Practice Game*** e ***Choose Formula*** para ***Algebra Game.***

Para cada nível existe um total de 10 exercícios e todas as questões começam valendo 132 pontos e com tempo máximo de 32 segundos.

A cada segundo que deixar de responder o exercício perde-se um ponto. Quando terminar o tempo, ou seja, terminar os 32 segundos, a pontuação máxima que se pode obter será de 100 pontos.

À cada questão respondida incorretamente perde-se 20 pontos independentemente do tempo decorrido.

A pontuação máxima que se pode obter é de 1320 pontos acertando todas as questões no menor tempo possível, se errar todas as questões o programa fornece a pontuação mínima de –20 pontos. Como ilustram as figura 38 e 39.

Figura 38: A pontuação obtida foi 1258 e a classificação correspondente é *Einstein*.

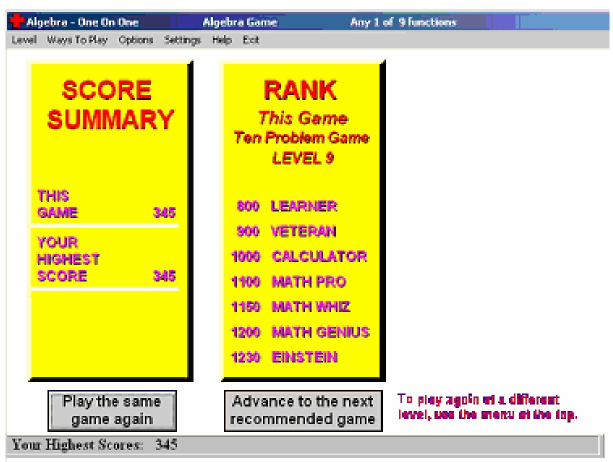


Figura 39: A pontuação obtida foi 345 e a classificação correspondente é *Novice*.

Para o item *Ways To Play* em *Figure Formula and calculate* para *Algebra Game* e *Individual Function Practice Game*

Cada nível tem um total de 10 exercícios e todas as questões começam valendo 127 pontos e com um tempo máximo de 27 segundos.

A cada segundo que se deixar de responder o exercício perde-se um ponto. Quando terminar o tempo, ou seja, terminar os 27 segundos, à pontuação máxima que se obter será de 100 pontos.

À cada questão respondida incorretamente se perde 20 pontos independentemente do tempo decorrido.

A pontuação máxima que se pode obter é de 1270 pontos acertando todas as questões no menor tempo possível, e se errar todas as questões o programa fornece a pontuação mínima de –20 pontos. Conforme ilustra a figura 40.

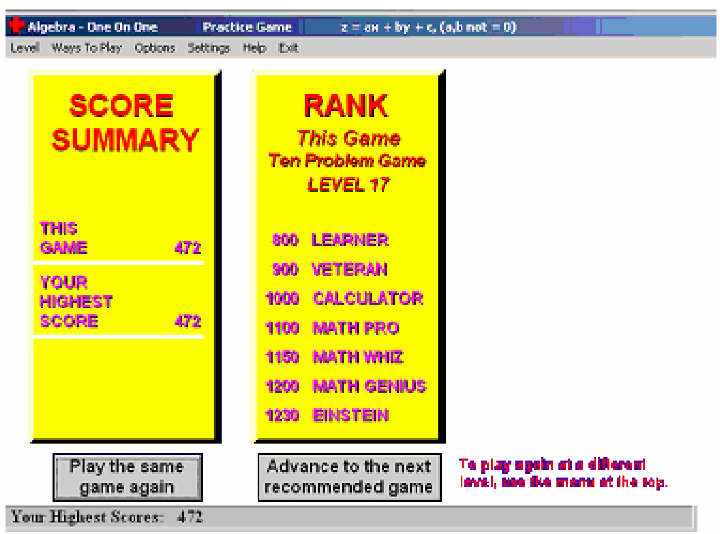


Figura 40: A pontuação foi 472 e a classificação correspondente é *Novice*.

Um ponto positivo na utilização do sistema formativo *Algebra – One on One* repousa na utilização de cálculos mentais, no entanto alguns pontos negativos na utilização desse sistema formativo são: o sistema está todo em inglês[27], o sistema trabalha apenas com os conjuntos dos números naturais e inteiros e noção de conjuntos dos números racionais; o sistema explora conteúdo de cálculo numérico

[27] O que dificulta muito a sua utilização em sala de aula, principalmente para alunos que não tenham conhecimento do idioma.

mas o sistema não explora o desenvolvimento do raciocínio apenas tem interesse na resposta final, dificultando os processos de diagnósticos de gaps cognitivos.

3.3.2 SISTEMA TUTORIAL

3.3.2.1 APLUSIX

Localização: http://aplusix.imag.fr/index-pt.htm

Tipo: Comercial, o demo do programa fica disponível por 30 dias. O APLUSIX Junior Home Edition pode ser comprado por 18 euros versões em francês, inglês ou português.

Versão: 1.42b de 23/03/2004 e a versão 1.5 de 28/06/2004[28], a figura 41 ilustra essa versão.

Tamanho: 1.546 KB.

Ajuda: Não encontra-se disponível nas versões 1.42b e 1.5.

Descrição: APLUSIX JHE foi construído principalmente para ser usado por alunos do Ensino Fundamental, para lhes oferecer numerosos exercícios produzidos automaticamente, seja para treino dos alunos (com verificação de cálculos) seja para realizarem testes (sem verificação dos cálculos e com a pontuação obtida).

Pela taxonomia de Valente (1993) podemos classificá-lo como um sistema formativo da forma **tutorial**. Os conteúdos basicamente trabalhados são: aritmética de forma geral, resolução de equação de primeiro e segundo graus, de inequações de primeiro grau e de sistema linear de duas variáveis.

[28] A versão 1.42b de 23/03/2004 é uma versão mais completa que a versão 1.5 de 28/06/2004 e a mesma expirou e a análise ficou prejudicada, pois a versão 1.5 de 28/06/2004 só está disponível o modo exercício.

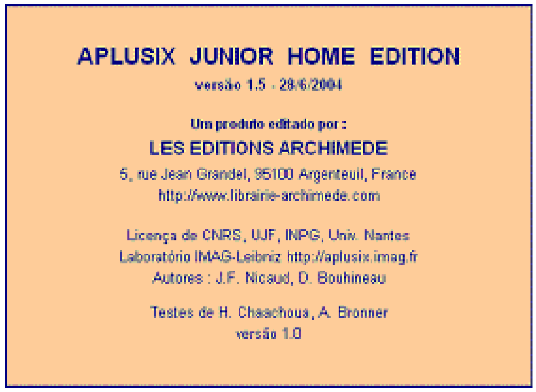


Figura 41: Uma versão do sistema *Aplusix.*

Abaixo ilustramos uma abertura de uma sessão do *Aplusix*:

- Modo Anônimo – Utilização do *Aplusix* de forma anônima, conforme ilustra a figura 42.
- Aluno conhecido – Aluno que já está utilizou o sistema formativo, conforme ilustra a figura 43.
- Novo aluno – Um novo usuário, conforme ilustra a figura 44.

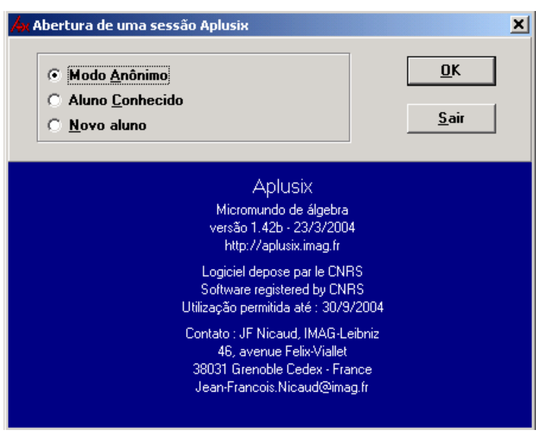


Figura 42: Forma anônima.

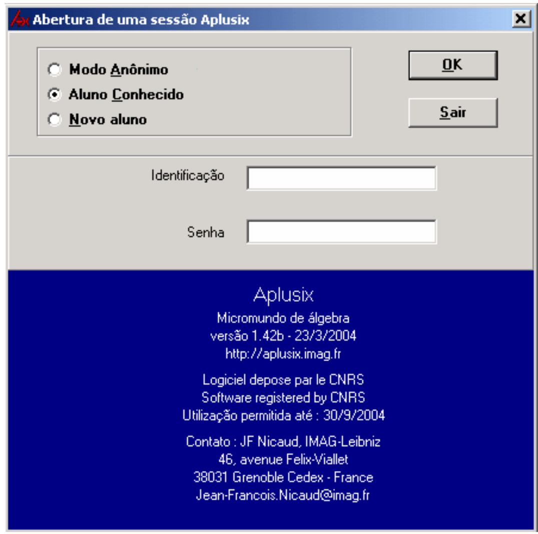


Figura 43: Forma “aluno conhecido”.

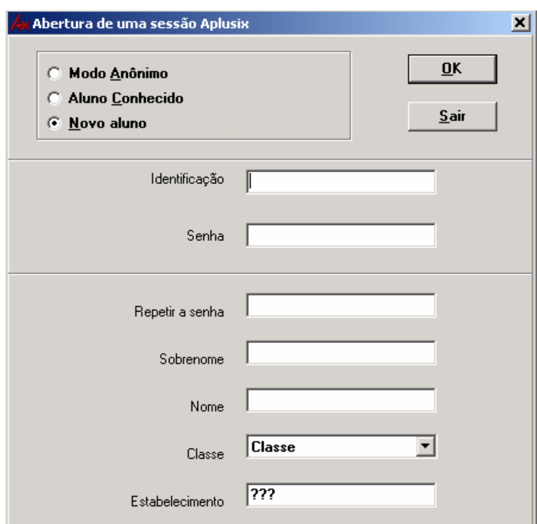


Figura 44: Forma “aluno novo”.

A tela Inicial do *Aplusix* da versão 1.42b de 23/03/2004, está mostrada na figura 45, e a tela inicial da versão 1.5 de 28/06/2004, está mostrada na figura 46.

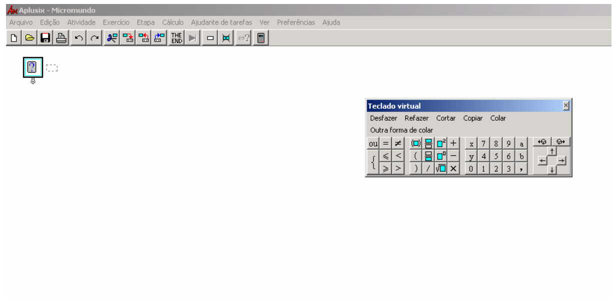


Figura 45: Tela inicial do sistema Aplusix na versão 1.42b de 23/03/2004.

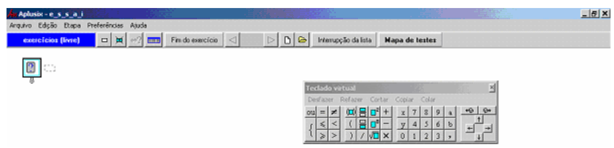


Figura 46: Tela inicial do sistema *Aplusix* na versão 1.5 de 28/06/2004.

O *Aplusix* pode ser trabalhado de duas formas distintas: Micro Mundo ou Exercícios, como mostra a figura 47.

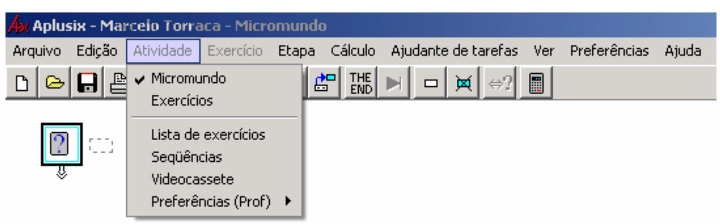


Figura 47: Barra de ferramentas do *Aplusix*.

Micro Mundo

Nesta forma de trabalhar propõe-se exercícios no quadro e o aluno digita o exercício e o resolve. Neste caso é possível o aluno verificar se o exercício que ele está fazendo está correto, pois para cada linha consecutiva aparecem dois tipos de sinais: o símbolo $\Downarrow$ significa que a sentença anterior e a nova são equivalentes e o símbolo significa que a sentença anterior e a nova não são equivalentes. Nesse caso o sistema não informa o erro, o aluno terá que desenvolver novamente o raciocínio utilizado no ultimo passo para descobrir onde encontra-se o seu erro.

Tomemos uma aplicação pragmática, digamos determinar a raiz da equação $(x^2-4)\cdot 4-(x-4)\cdot(4x)=0$. A figura 48 ilustra o desenvolvimento completo deste exercício.

1º Passo – Aplicar a propriedade distributiva.

$$4x^2-16-4x^2+16x=0 \tag{1}$$

2º Passo – Adição e subtração de termos semelhantes.

$$16x=-16 \tag{2}$$

Observemos que o programa informou que as duas últimas linhas não são equivalentes, mas mesmo assim optou-se por resolver o exercício.

3º passo – Resolvida a equação, obtendo como resposta.

$$x=-1 \tag{3}$$

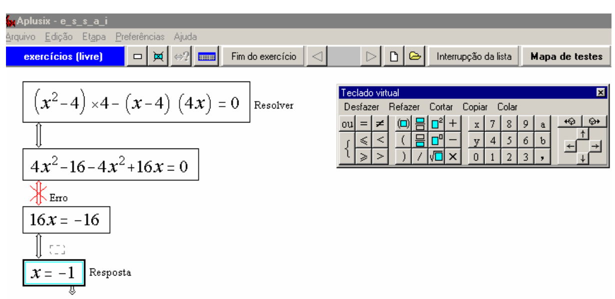


Figura 48: Raiz da equação $(\mathbf{x^2-4})\cdot\mathbf{4}-(\mathbf{x-4})\cdot(\mathbf{4x})=\mathbf{0}$.

Tomemos ainda um outro exemplo do uso do sistema Aplusix: resolva a equação do segundo grau $x^2-5x+6=0$ pelo método de completar quadrado.

Digite a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (4)$$

Somar -6 nos dois lados da equação 4.

$$x^2 - 5x = -6 \quad (5)$$

Para completar o quadrado está faltando o termo independente (**b**) ao quadrado e para determiná-lo é necessário fazer o seguinte raciocínio. O termo de grau 1 do trinômio quadrado perfeito é dado por menos duas vezes a raiz quadrada do termo de grau 2 vezes a raiz quadrada do termo independente, logo $-2\sqrt{b^2x^2} = -5x \Rightarrow -2bx = -5x \Rightarrow b = \frac{5}{2}$, então basta somar nos dois lados da equação 5, $\frac{25}{4}$.

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4}$$

(6)

Simplificando a equação 6.

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (7)$$

Como os dois membros da igualdade são positivos é possível extrair a raiz quadrada de ambos os lados e obtermos como solução duas raízes reais distintas. Se o segundo membro da igualdade for *zero,* temos como solução duas raízes reais e iguais e se o segundo membro for *negativo* não teremos como solução raízes reais, portanto as raízes serão denominadas complexas.

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \ \text{ou}\ x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \quad (8)$$

Simplificando a equação 8, encontramos:

$$x = \frac{6}{2} \quad (9)$$

ou

$$x = \frac{4}{2} \tag{10}$$

Ou seja.

$$x = 3 \tag{11}$$

ou

$$x = 2 \tag{12}$$

O cálculo efetuado acima está ilustrado na figura 49.

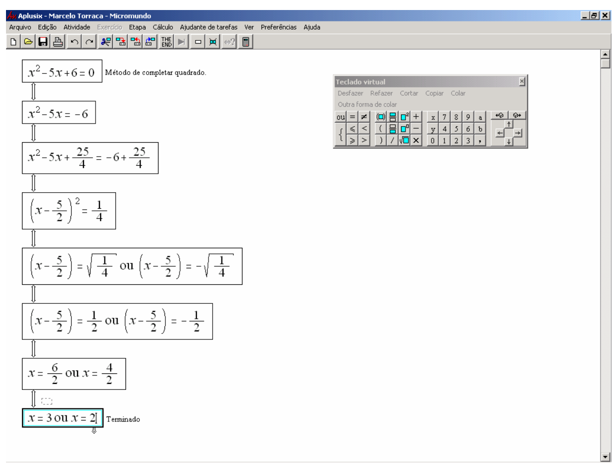


Figura 49: Barras de ferramentas do modo exercício.

Exercícios

Nesta forma de trabalhar tem-se 10 (dez) exercícios propostos. Pode-se selecionar de que forma o programa estará disponível para o aluno, como pode ser observado na figura 50.

No menu Ajudante de tarefa – Mudar de nível, encontramos a seguinte barra de ferramentas.

- **Equivalência.**

- **Equivalência** – Selecionar Permanente, A pedido ou Jamais.
- **Raciocínio correto** – Selecionar ou não.
- **Resolvido** – Selecionar ou não.
- **Indicadores** – Selecionar ou não.

▪ **Cálculos**

- **Cálculo Numérico** – Selecionar – Nada, Inteiro, Decimal, Racional ou Irracional.
- **Desenvolver-reduzi**r – Selecionar ou não.
- **Fatorar** – Selecionar Nada, Grau 1 ou Grau 2.
- **Resolver equação** – Selecionar Nada, Grau 1 ou Grau 2.

▪ **Ajudante de tarefa**

- **Nível** – Selecionar 7ª série, 8ª série e 1ª série do ensino médio.
- **Sugestão** – Selecionar ou não.
- **Explicar uma sugestão** – Selecionar ou não.
- **Realizar um passo** – Selecionar ou não.

▪ **Exercício**

- **Carregar exercício** – Selecionar ou não.
- **Escolher exercício** – Selecionar ou não.
- **Interrompe série** – Selecionar ou não.
- **Ordem aleatória** – Selecionar ou não.

▪ **Comentários**

- **Quando comentar** – Selecionar Jamais, Anterior ou posterior.
- **O que comentar** – Selecionar transição ou Etapa.
- **É obrigatório** – Selecionar ou não.

▪ **Atividade**

  - **Micro mundo** – Selecionar ou não.
  - **Exercícios** – Selecionar ou não.
  - **Gestão dos exercícios** – Selecionar ou não.
  - **Videocassete** – Selecionar ou não.

- **Edição**
  - **Flecha pequena** – Selecionar Nova ou Duplicar.
  - **Etapa independente** – Selecionar ou não.
- **Contexto**
  - **Estabelecimento** – Digitar o nome.
  - **País** – Digitar o nome.
  - **Classe** – Digitar o nome.
  - **Professor** – Digitar o nome.
- **Início**
  - **Anônimo** – Selecionar ou não.
  - **Salvar arquivo** – Selecionar ou não.
  - **Exercícios.**
  - **Seqüência.**
  - **Texto.**
  - **Ajuda.**

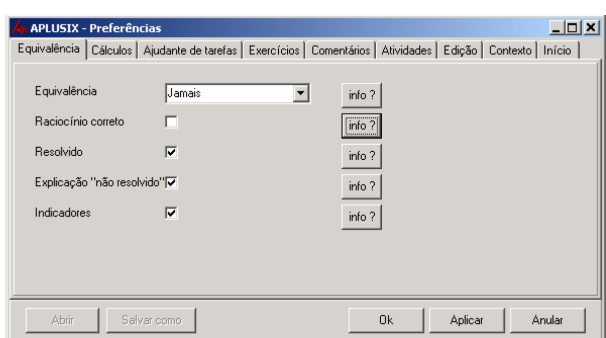


Figura 50: Barras de ferramentas do modo exercício.

O recurso “videocassete” mostra passo a passo o que é feito em cada exercício, então pode-se analisar quais são as dificuldades apresentadas.

Atividade na forma de Exercícios

No término de cada exercício tem-se que informar que o terminou. Menu – Exercício – Fim do exercício – Resolvido ou a ir até a tecla de atalho , conforme ilustra a figura 51.

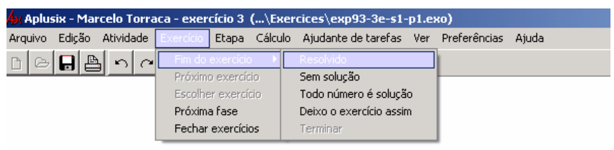


Figura 51: *Menu* de término do exercício.

a) Reduzir $6+5x-20+3x+5$ - Adicionar ou subtrair termos semelhantes, como mostra a figura 52.

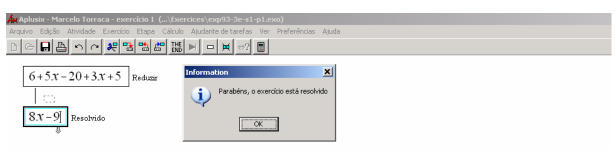


Figura 52: Adicionar ou subtrair termos semelhante da expressão $6+5x-20+3x+5$.

b) Resolver $5x-15=0$, chega-se a resposta $x=5$, resultado que não corresponde a uma resposta correta. Neste caso o sistema formativo informa que existe um erro (figura 53). Portanto tem-se que rever todos os seus passos para determinar o(s) erro(s), conforme ilustra a figura 54.

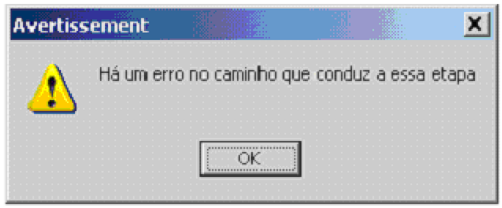


Figura 53: Um erro no exercício.

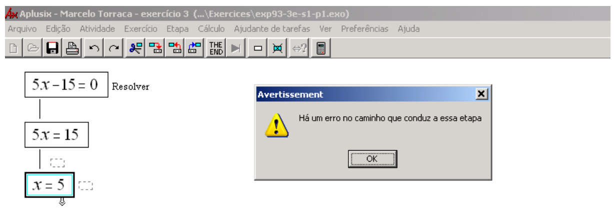


Figura 54: Exercício feito incorretamente.

Posto que o erro encontra-se na última linha, refazendo-o corretamente, temos o explicativo nas figuras 55 e 56.

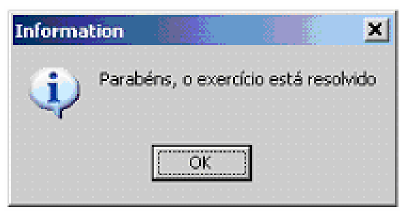


Figura 55: Exercício correto.

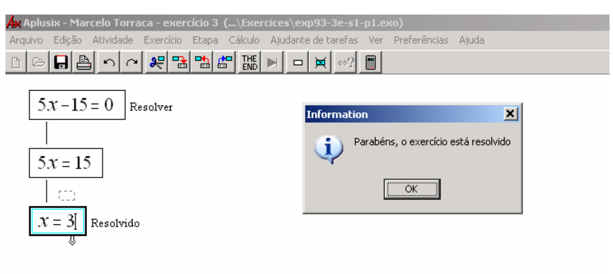


Figura 56: Exercício feito corretamente.

Um outro exercício interessante: determine a solução do sistema $\begin{cases} 2y = 2x - 2 \\ -(-x - y) = -1 \end{cases}$. Encontra-se como solução $x = 0$ e $y = -1$, solução correta, como podemos observar a figura 57.

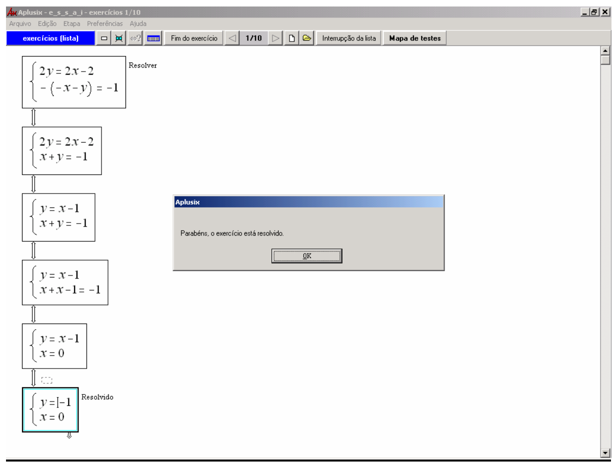


Figura 57: Solução do sistema $\begin{cases} 2y = 2x - 2 \\ -(-x - y) = -1 \end{cases}$.

Um dos pontos mais positivos na utilização do sistema formativo *Aplusix*[29] repousa na utilização do recurso do vídeo cassete, que permite ver detalhadamente todas as ações realizadas nos exercícios propostos. No entanto alguns pontos negativos na utilização desse sistema formativos devem ser: o sistema ainda está sendo aprimorado, dificultando assim sua utilização e sua análise; na resolução de sistemas lineares (2 x 2), limita-se apenas a resolver o exercício pelo método da substituição, sendo necessário “carregar” uma equação até determinar o valor de uma das variáveis.

[29] Após o período de teste de trinta dias não foi possível ter acesso à versão 1.42b, somente à versão 1.5 que é incompleta.

3.3.3 SISTEMA APLICATIVO

3.3.3.1 MICROSOFT OFFICE EXCEL

Localização: www.microsoft.com/brasil.

Versão: Office 2003.

Tipo: Comercial – CD Rom Office 2003 Educacional CD Português R$ 529,90 ou CD Rom Office 2003. Professional Versão Up Grade CD Português R$ 1.149,90.

Tamanho: 6.985 KB.

Ajuda: O programa oferece ajuda em Português.

Descrição: É uma Planilha eletrônica. O Microsoft Office *Excel* é um aplicativo do Microsoft Office, que trabalha tendo como base o Sistema Operacional Windows. Além do Microsoft Office *Excel* o Microsoft Office disponibiliza os aplicativos: Microsoft Office Word, Microsoft Office Outlook, Microsoft Office PowerPoint, Microsoft Office Access e Microsoft Office FrontPage.

No "mercado" existe o software OpenOffice[30] é uma planilha eletrônica com "versão livre" para o Windows, Linux e Unix.

Pela taxonomia de Valente (1993) podemos dizer que trata-se de um sistema da forma **aplicativo**. Nesse sistema os usuários podem modelar, analisar simulações, fazer experimentos e conjecturas. É mister que se diga que o Excel não foi criado com o objetivo de ser um sistema computacional educacional. No entanto há nele bastantes recursos para o ensino de matemática (álgebra, aritmética e geometria) e de estatística (sobretudo ao ensino fundamental e médio). O programa

[30] **OpenOffice** – Está disponível no site: http://www.openoffice.org/.

pode ser aplicado em vários conteúdos matemáticos como, por exemplo, o ensino de funções.

A tela inicial do Microsoft Excel está exibida na figura 58.

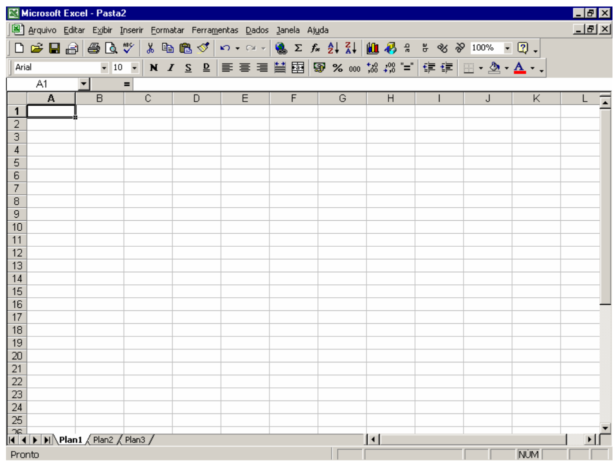


Figura 58: Tela inicial do Microsoft Excel.

Para o uso da planilha eletrônica em sala de aula, concernente ao ensino fundamental e/o Médio pode-se trabalhar com os seguintes procedimentos:

Função Afim e Linear e Função Constante[31]

Nesse caso, solicita-se que seja desenvolvida duas planilhas: a primeira contendo uma tabela e o gráfico de função linear (afim) e a segunda planilha contendo a tabela e o gráfico de função constante. Não é possível gerar apenas uma tabela que solucione ambos os cálculos, pois, o Excel não plota corretamente o gráfico da função constante com o uso da tabela de função linear (afim).

[31] Uma função $f : R \to R$ chama-se **afim** quando existem constantes $a, b \in R$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$. Quando $b = 0$ e $a \neq 0$ a função chama-se **linear** e quando $a = 0$ a função chama-se **constante**.

Gráfico de Função Afim e Linear e Constante

Procedimentos usuais para a execução desta tarefa:

(1) Definir a função.

(2) Informar a raiz da função ou determinar o zero da função $(f(x)=0)$. A função corta o eixo **x** no ponto: $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ se $a \neq 0$. Se $a = 0$ a função não corta o eixo **x**, a função é chamada de constante.

(3) O ponto onde o gráfico corta o eixo **y**, $(0, f(0))$, ou seja, o ponto $(0,b)$.

(4) Dois ou três pontos pertencentes à função[32].

Dada a **Função Afim**, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Por exemplo, $f(x) = -2x - 4$, o gráfico ilustra-se na figura 59.

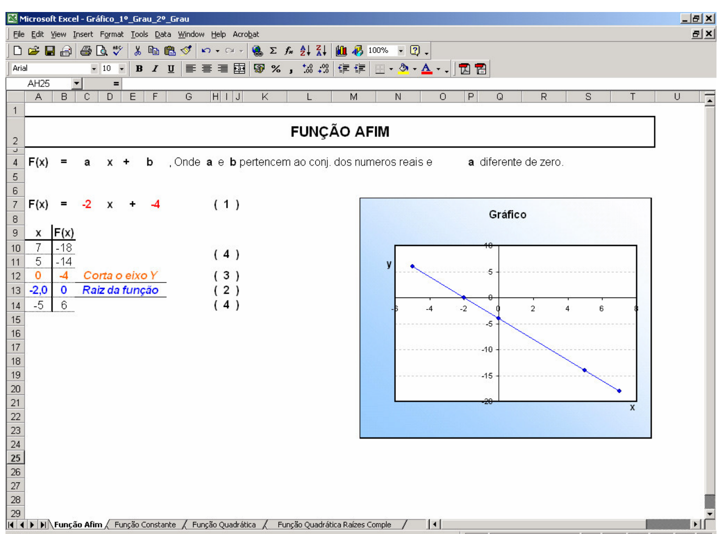


Figura 59: Função $f(x) = -2x - 4$.

[32] Para traçar uma reta é necessário ter dois pontos, mas pelo modelo de gráfico (**Dispersão XY**) foi necessário escolher mais dois ou três pontos.

Dada a **Função Linear**, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $b = 0$. Por exemplo: $f(x) = 3x$, o gráfico ilustra-se na figura 60.

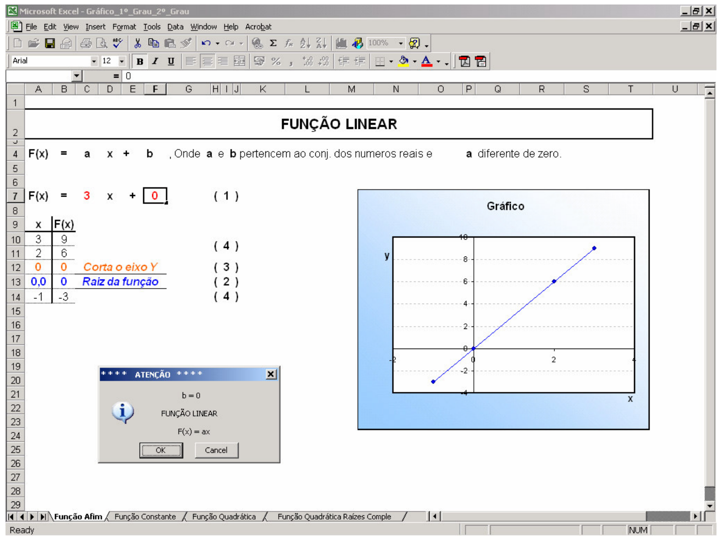


Figura 60: Função $f(x) = 3x$.

Dada a **Função Constante**, $f(x) = ax + b$, com $a = 0$ e $b \in R$ Por exemplo: $f(x) = 5$, o gráfico ilustra-se na figura 61.

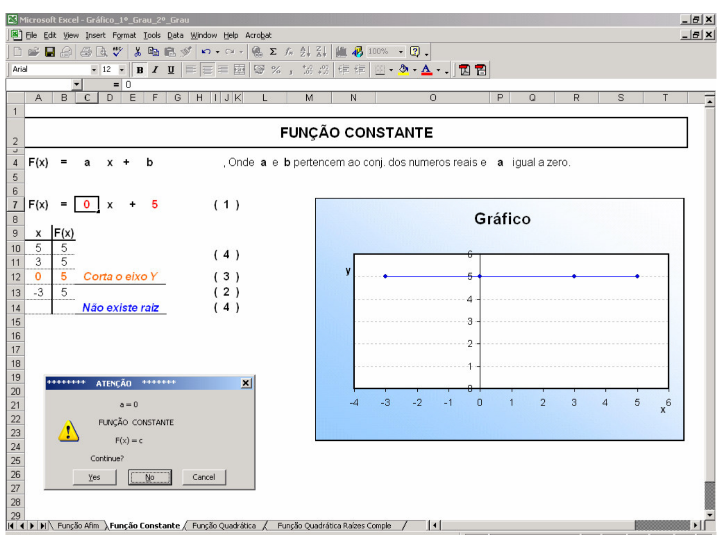


Figura 61: Função $f(x) = 5$.

Função Quadrática

Uma função $f: R \to R$ chama-se quadrática (ou função polinomial do segundo grau) quando existem constantes $a, b, c \in R$, com $a \neq 0$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in R$.

Solicita-se que seja desenvolvida uma planilha contendo uma tabela e o gráfico de função quadrática.

Procedimentos usuais para a execução da tarefa:

(1) Definir a função quadrática.

(2) As raízes da função quadrática ou o zero da função. Determinado(s) pelo(s) ponto(s) $\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$ e/ou $\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$[33],

(3) O vértice da parábola $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \right)$, identificando se esse vértice é ponto de *máximo* ou de *mínimo*.

(4) O ponto onde a função corta o eixo **y** $(0, f(0))$, ou seja, o ponto $(0, c)$.

(5) O ponto $\left(-\frac{b}{a}, f\left(-\frac{b}{a} \right) \right)$, que é simétrico ao ponto $(0, f(0))$.

(6) Pontos pertencentes à função, eqüidistantes em relação ao vértice da parábola.

Observação: para traçar corretamente o gráfico da função quadrática, foi necessário utilizar o modelo de gráfico: **Dispersão XY**.

[33] Quando não existir raízes reais, ou seja, $b^2 - 4ac < 0$, haverá uma mensagem na tela informado: **não existe raízes reais.**

Gráfico de Função Quadrática

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac > 0$, essa função possui duas raízes reais distintas.

Por exemplo: $f(x) = x^2 + 4x + 2$, o gráfico ilustra-se na figura 62.

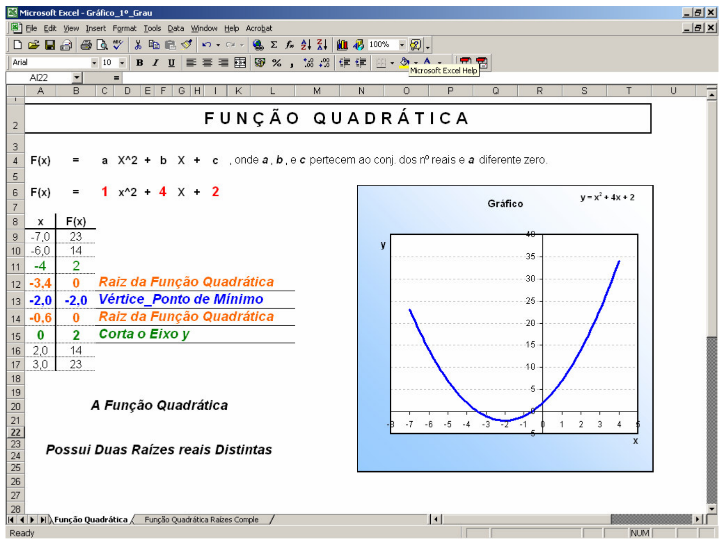


Figura 62: Função $f(x) = x^2 + 4x + 2$.

Por exemplo: $f(x) = -x^2 - 6x$, o gráfico ilustra-se na figura 63.

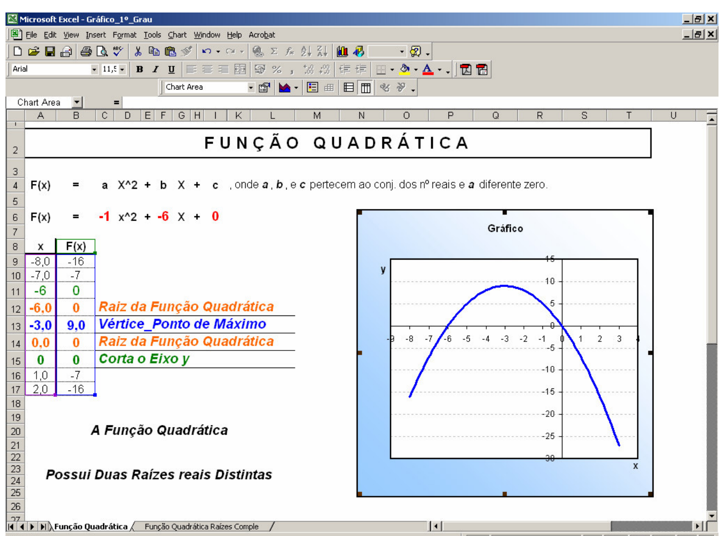


Figura 63: Função $f(x) = -x^2 - 6x$.

Por exemplo: $f(x) = -x^2 + 4$, o gráfico ilustra-se a figura 64.

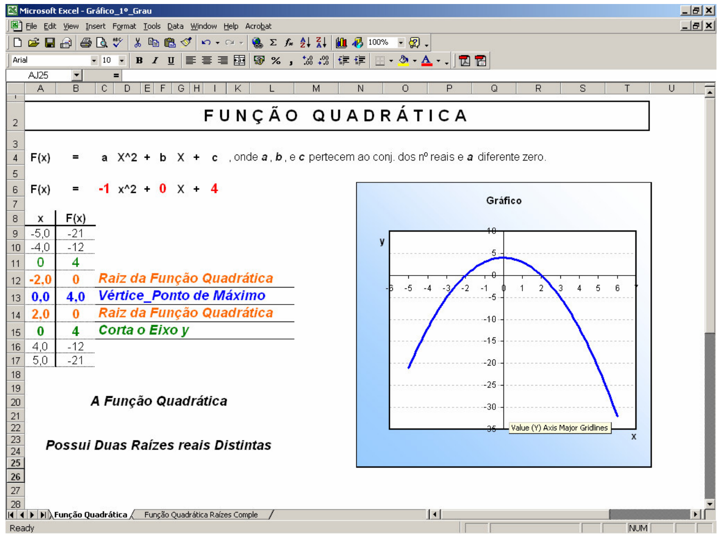


Figura 64: Função $f(x) = -x^2 + 4$.

Tomemos o caso do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac = 0$, essa função quadrática possui duas raízes reais e iguais.

Por exemplo: $f(x) = -x^2 + 8x - 16$, conforme ilustra a figura 65.

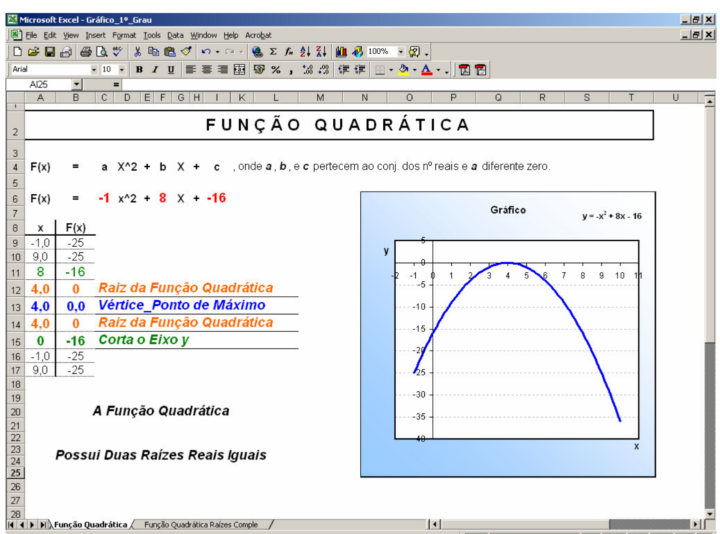


Figura 65: Função $f(x) = -x^2 + 8x - 16$.

Tomemos o caso do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, essa função quadrática não possui raízes reais.

Por exemplo: $f(x) = x^2 + 2x + 10$, conforme ilustra a figura 66.

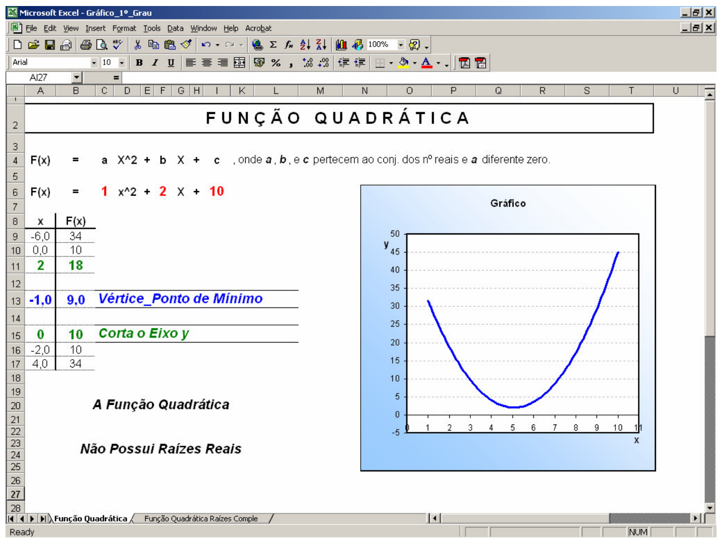


Figura 66: Função $f(x) = x^2 + 2x + 10$.

Foi observado um erro no gráfico da função quadrática que não possui raízes reais, pois o excel não reconhece números complexos.

Para plotar o gráfico corretamente é necessário fazer uma nova tabela desconsiderando as raízes complexas.

Por exemplo: $f(x) = x^2 + 2x + 10$, conforme ilustra a figura 67.

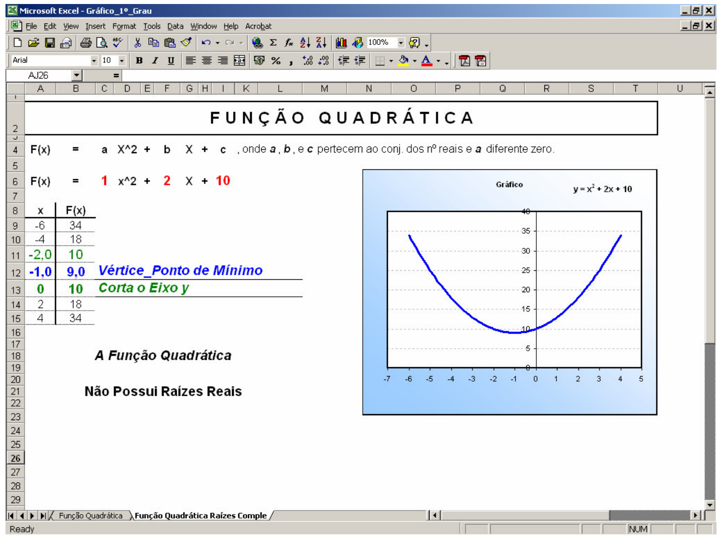


Figura 67: Função $f(x) = x^2 + 2x + 10$.

Tomemos o caso da função: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a = 0$, haverá informação que a função dada não é quadrática. A figura 68 ilustra essa situação.

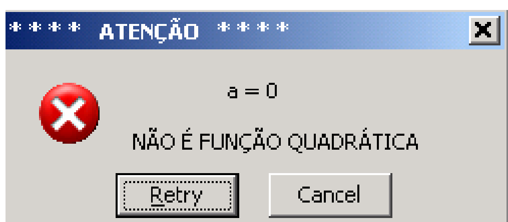


Figura 68: Notificação de que a função não é quadrática.

Por exemplo: $f(x) = 0x^2 + 5x - 4$, conforme ilustra a figura 69.

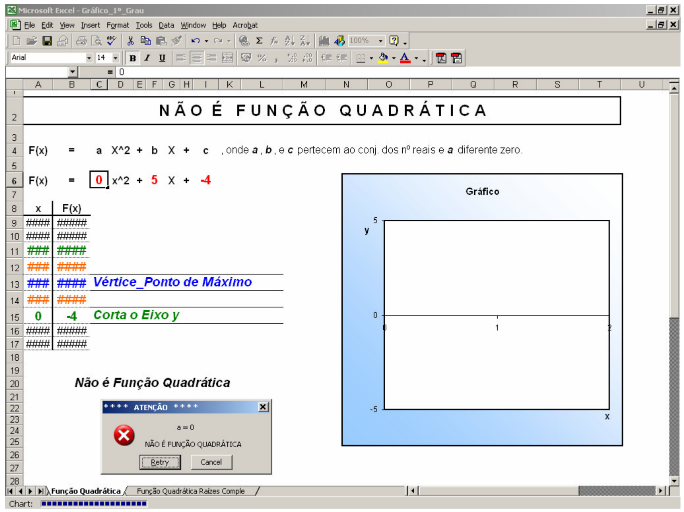


Figura 69: Função $f(x) = 0x^2 + 5x - 4$.

Cálculo Numérico

Será apresentada abaixo uma aplicação de um conteúdo curricular que denominamos cálculo numérico, utilizando a planilha do Excel. Nesse conteúdo curricular serão trabalhados: História da Matemática, Polinômios, Cálculo Numérico, Sentenças Lógicas e Estatística.

Fórmula de Cardano[34]-*Tartaglia*[35]

---

[34] Gerônimo *Cardano* (1501-1576) considerava que o aparecimento de raízes quadradas de números negativos na resolução de um problema indicava que o mesmo não tinha solução. No entanto, foi *Cardano* que, em 1545, mencionou pela primeira vez os números complexos.

[35] Desde que os babilônios descobriram a forma de resolver equações quadráticas, se passaram mais de 3000 anos até a descoberta da fórmula das raízes das equações de terceiro grau por *Scipione Del Ferro* por volta de 1510. Embora não haja nenhuma prova documentada, seu aluno Antonio Maria Fior tentou adquirir a fama a custa de seu mestre já falecido e desafiou *Nicoló Fontana* (*Tartaglia*) a resolver as equações de terceiro grau. Em fevereiro de 1535 Tartaglia achou a fórmula geral para as equações dos tipos $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$ e Fior saiu humilhado por tentar adquirir fama às custas de outrem.

Tartaglia acreditando nas promessas de Cardano revelou as fórmulas, mas em 1545 *Cardano* quebrou todas as promessas e publicou na *Ars Magna*. E até hoje é chamada fórmula de Cardano, que não foi descoberta por ele e sim por Tartaglia.

Dada a equação $x^3 + px = q$, a fórmula de Tartaglia que permite obter uma raiz é: $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$.

A partir da resolução da Fórmula de *Tartaglia* é possível mostrar que os números complexos não surgiram com as equações do segundo grau e sim, a partir das equações de terceiro grau.

Montemos na planilha a resolução da equação de terceiro grau utilizando a Fórmula de *Tartaglia*.

(1) Escrever a equação de terceiro grau, em que o coeficiente do termo de terceiro grau é igual a um e o coeficiente do termo de segundo grau é igual a zero ($x^3 + px = q$).

(2) Definir a equação de terceiro grau, a partir da Fórmula de *Tartaglia*.

(3) Escrever a *Fórmula de Tartaglia*.

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}} \qquad (13)$$

(4) Desenvolvimento de todos os cálculos para determinar a raiz da equação do terceiro grau utilizando a Fórmula de *Tartaglia*.

(5) A raiz da equação $x^3 + px = q$. A raiz pode ser real ou complexa. A figura 70 ilustra todos os cálculos exigidos para a tarefa acima.

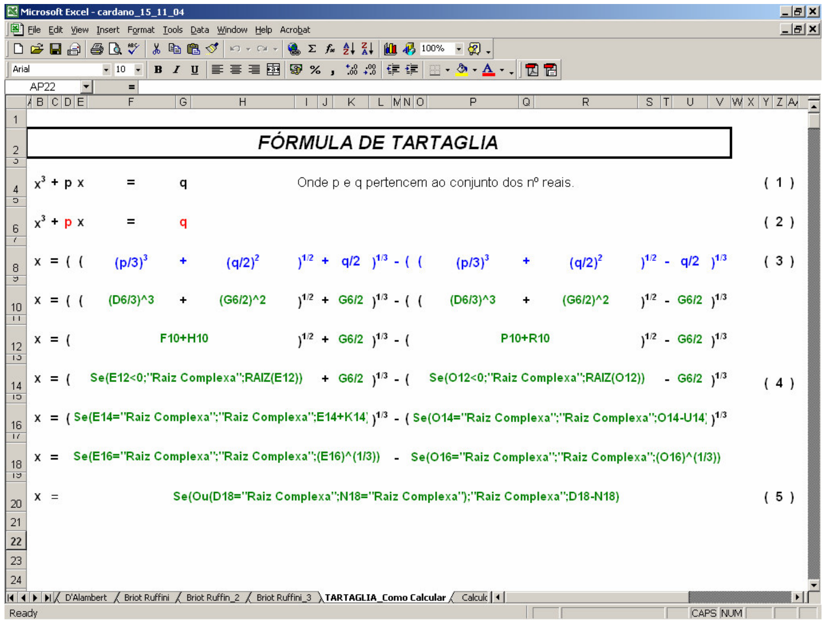


Figura 70: Raiz de uma equação de terceiro grau – Fórmula de *Tartaglia*.

Nessa tarefa será resolvida a equação de terceiro grau determinando a solução real.

(1) Escrever a equação de terceiro grau, em que o coeficiente do termo de terceiro grau é igual a um e o coeficiente do termo de segundo grau é igual a zero ($x^3 + px = q$).

(2) Seja $x^3 + 1x = -7$, ou seja, $p = 1$ e $q = -7$.

(3) Fórmula de *Tartaglia*.

(4) Desenvolvimento de todos os cálculos para determinar a raiz da equação do terceiro grau utilizando a Fórmula de *Tartaglia*.

(5) Raiz real. Nesse caso a raiz real é dada por $x = -1{,}739203861$. A figura 71 ilustra os resultados obtidos em cada linha.

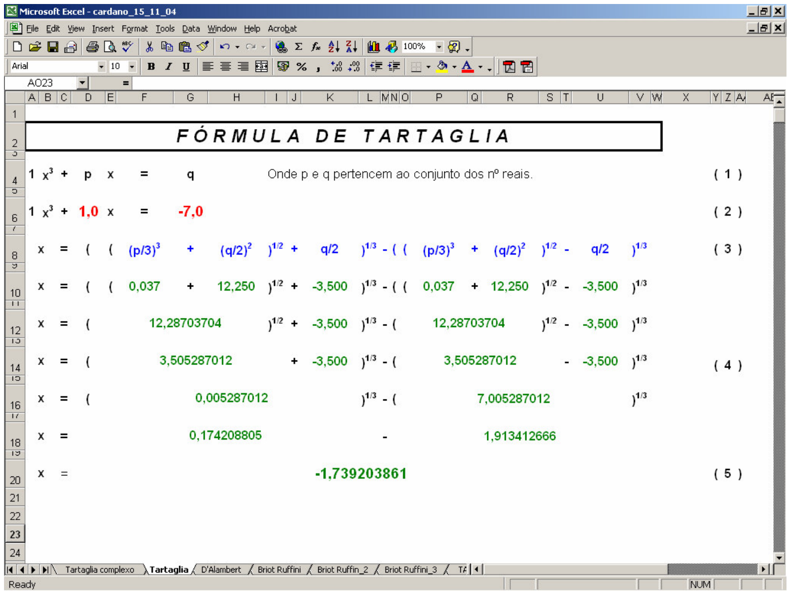


Figura 71: Raiz da equação $x^3 + x = -7$ - Fórmula de *Tartaglia*.

Nessa tarefa será resolvida a equação de terceiro grau determinando a solução complexa.

(1) Escrever a equação de terceiro grau, em que o coeficiente do termo de terceiro grau é igual a (um) 1 e o termo de segundo grau é igual a zero.

(2) Seja $x^3 - 6x = 2$, ou seja, $p = -6$ e $q = 2$.

(3) Fórmula de *Tartaglia*.

(4) Após Substituir e **p** e **q** na Fórmula de *Tartaglia*, no desenvolvimento da formula encontramos $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$, logo a raiz da equação é complexa.

(5) $\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{6}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \sqrt{(-2)^3 + (1)^2} = \sqrt{-7}$. Como $\sqrt{-7}$ não pertence ao conjunto dos números reais, ou seja, é um numero complexo. O Excel não reconhece números complexos, logo nos cálculos do passo 4, quando a raiz quadrada for de um número negativo haverá a seguinte informação: **Raiz Complexa**. A figura 72 ilustra todos os resultados obtidos em cada linha.

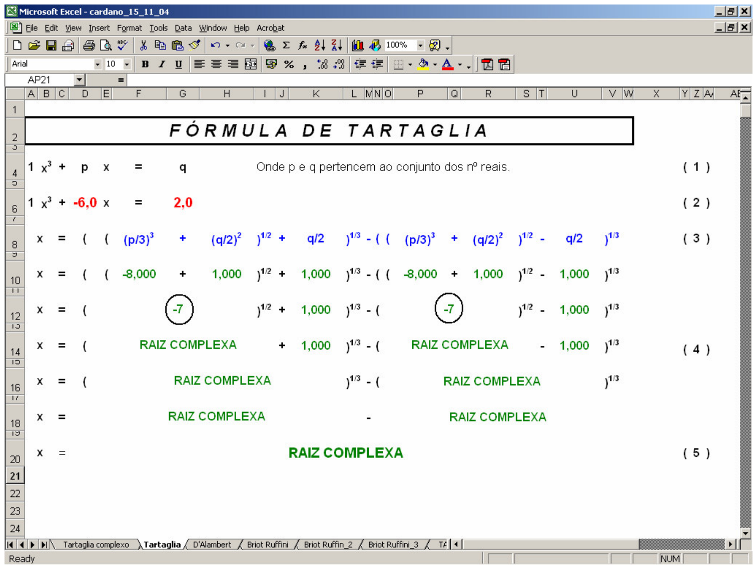


Figura 72: Raiz da equação $x^3 - 6x = 2$ - Fórmula de *Tartaglia*.

Dispositivo de *Briot-Ruffini*

Na planilha será utilizada o dispositivo de *Briot-Ruffini* para determinar os coeficientes do quociente $(q(x))$ e o resto $(r(x))$ da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$. Sejam $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau e $Q(x)$ um polinômio de no mínimo primeiro grau e no máximo de quinto grau, onde são conhecidas todas as raízes de $Q(x)$.

Se $P(x)$ for de grau z e $Q(x)$ de grau $(z-2)$ com $2 \leq z \leq 5$ e $r(x)=0$, então, será utilizado o algoritmo de Bhaskara para determinar as outras duas raízes, sejam elas reais ou complexas. As figuras 73 e 73a ilustram todas as fórmulas e todos os cálculos para se determinar a(s) raiz (es) de $P(x)$.

(1) Seja $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau.

(2) Seja $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau.

(3) Seja $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

(4) Seja $Q(x) = ax + b$, determinando a raiz, encontramos $x = -\frac{b}{a}$.

(5) Aplicação do algoritmo do dispositivo de *Briot Ruffini*.

(6) Quando $a = 1$ o quociente é dado por um polinômio de no máximo quarto grau: $q(x) = q_4x^4 + q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$. Se $a \neq 1$ o quociente é dado por um polinômio de no máximo quarto grau: $q(x) = \frac{q_4}{a}x^4 + \frac{q_3}{a}x^3 + \frac{q_2}{a}x^2 + \frac{q_1}{a}x + \frac{q_0}{a}$.

(7) O resto é dado pó um polinômio de grau zero: $r(x) = r_0$.

(8) O item 8 só será possível quando $P(x)$ for de grau z e $Q(x)$ de grau $(z-2)$ com $2 \leq z \leq 5$ e $r(x) = 0$, então, será utilizado o algoritmo de Bhaskara para determinar as outras duas raízes, seja elas reais ou complexas.

E escrever $P(x)$ da forma: $P(x) = Q(x) \cdot q(x) + r(x)$.

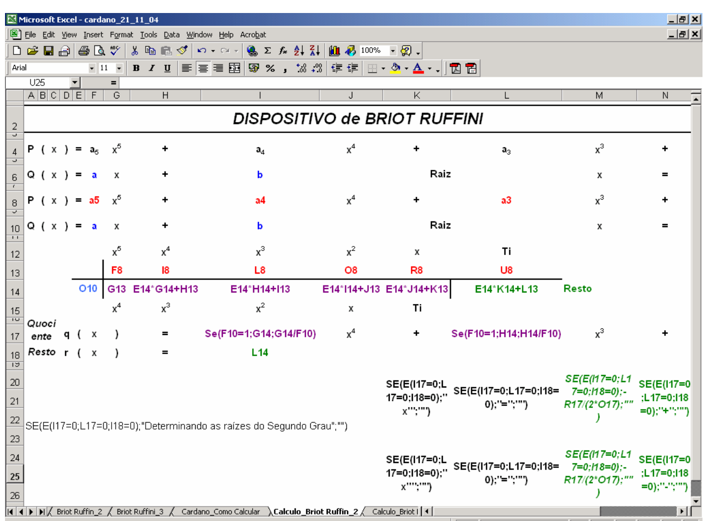


Figura 73: O quociente e o resto da divisão de $P(x)/Q(x)$ - Dispositivo de *Briot Ruffini.*

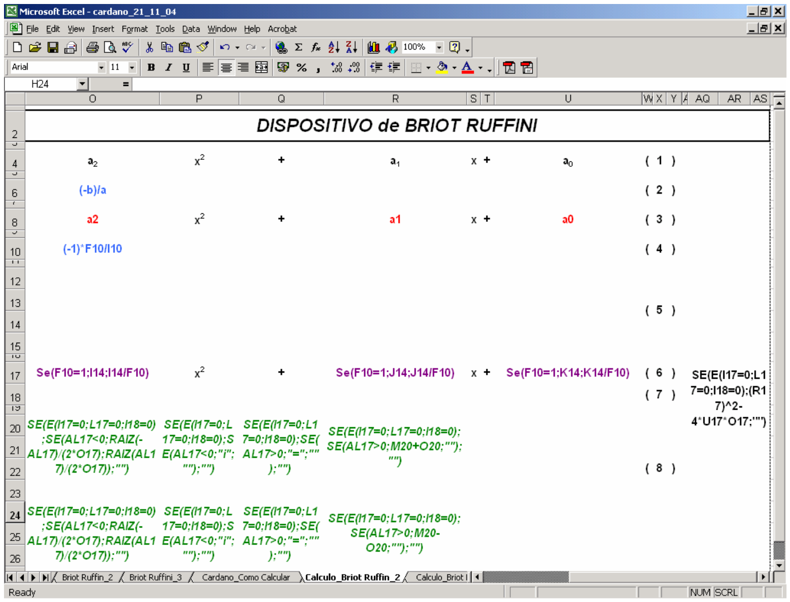


Figura 73 a: O quociente e o resto da divisão de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - Dispositivo de *Briot Ruffini.*

Sejam $Q(x)$ um polinômio do primeiro grau e $P(x)$ um polinômio de terceiro grau. Determinados está o quociente $(q(x))$ de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, o resto $(r(x))$.

(1) Seja $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau.

(2) Seja $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau.

(3) Seja $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

(4) Seja $Q(x) = x - 1$, determinando a raiz, encontramos $x = 1$.

(5) Aplicação do algoritmo do dispositivo de Briot Ruffini.

(6) O quociente é dado por: $q(x) = x^2 + x - 6$.

(7) O resto é dado por: $r(x) = 0$.

(8) O item 8 será possível calcular, pois a diferença ente o grau de $P(x)$ e $Q(x)$ é igual a 2 e $r(x) = 0$. A partir dessa informação, busca-se o desenvolvimento do algoritmo de Bhaskara para determinar as raízes do quociente $q(x) = x^2 + x - 6$, determinando assim as outras duas raízes (reais ou complexas) de $P(x)$. Após aplicar o algoritmo de Bhaskara utilizando a equação acima mencionada encontramos as raízes: 2 e –3.

Portanto $P(x)$ será escrito da forma: $P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$. A figura 74 ilustra estes dados.

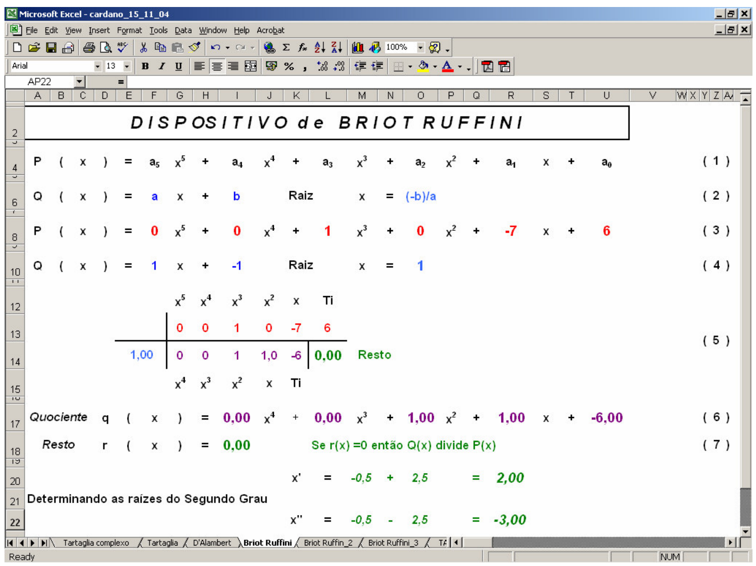


Figura 74: Quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^3 - 7x + 6$ por $Q(x) = x - 1$ - Dispositivo de *Briot Ruffini*.

Na figura 74 ilustrada acima verificamos que o polinômio $P(x)$ de grau três é divisível por $Q(x)$ de grau um, então pode-se utilizar o item (8) para determinar as outras duas raízes.

Sejam $Q(x)$ um polinômio do primeiro grau e $P(x)$ um polinômio de terceiro grau. Determinados está o quociente $(q(x))$ de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, o resto $(r(x))$.

(1) Seja $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau.

(2) Seja $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau.

(3) Seja $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 8$.

(4) Seja $Q(x) = x - 2$, determinando a raiz, encontramos $x = 2$.

(5) Aplicação do algoritmo do dispositivo de Briot Ruffini.

(6) O quociente é dado por: $q(x) = x^2 - x + 4$.

(7) O resto é dado por: $r(x) = 0$.

(8) O item 8 será possível calcular, pois a diferença entre o grau de $P(x)$ e $Q(x)$ é igual a 2 e $r(x) = 0$. A partir dessa informação, busca-se o desenvolvimento do algoritmo de Bhaskara para determinar as raízes do quociente $q(x) = x^2 - x + 4$, determinando assim as outras duas raízes (reais ou complexas) de $P(x)$. Após aplicar o algoritmo de Bhaskara encontramos as raízes: $x' = 0{,}5 - 1{,}94i$ e $x'' = 0{,}5 + 1{,}94i$.

Portanto $P(x)$ será escrito da forma: $P(x) = (x - 2)(x - 0{,}5 - 1{,}94i)(x - 0{,}5 + 1{,}94i)$, com erro de 10^{-3}. A figura 75 ilustra estes dados.

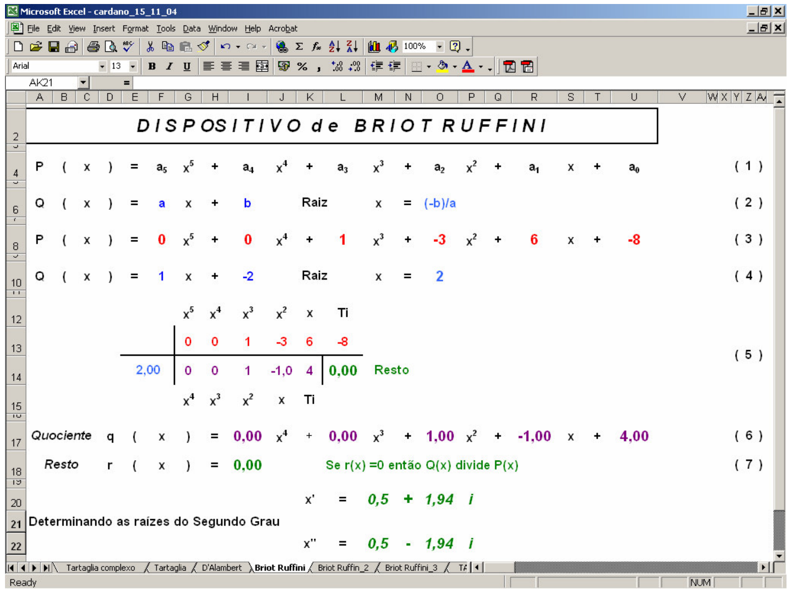


Figura 75: Quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 8$ por $Q(x) = x - 2$ - Dispositivo de *Briot Ruffini*.

Na figura 75 ilustrada acima verificamos que o polinômio $P(x)$ de grau três é divisível por $Q(x)$ de grau um, então pode-se utilizar o item (8) para determinar as outras duas raízes.

Sejam $Q(x)$ um polinômio do primeiro grau, onde o coeficiente de primeiro grau é diferente de um e $P(x)$ um polinômio de quinto grau. Determinados está o quociente $(q(x))$ de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, o resto $(r(x))$.

(1) Seja $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau.

(2) Seja $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau.

(3) Seja $P(x) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x - 12$.

(4) Seja $Q(x) = 6x - 3$, determinando a raiz, encontramos: $x = 0{,}5$.

(5) Aplicação do algoritmo do dispositivo de Briot Ruffini. Como $a \neq 1$, o quociente será dado pela divisão de $\dfrac{q(x)}{a}$, ou seja $q(x) = \dfrac{2}{6}x^4 - \dfrac{3}{6}x^3 + \dfrac{4{,}5}{6}x^2 - \dfrac{5{,}8}{6}x + \dfrac{7{,}1}{6}$.

(6) O quociente é dado por: $q(x) = 0{,}33\,x^4 - 0{,}50\,x^3 + 0{,}75\,x^2 - 0{,}96\,x + 1{,}19$.

(7) O resto é dado por: $r(x) = -8{,}44$.

(8) O item 8 não será possível calcular, pois a diferença ente o grau de $P(x)$ e $Q(x)$ é diferente de 2 e $r(x) \neq 0$.

Portanto $P(x)$ será escrito da forma: $P(x) = (6x-3)(0{,}33\,x^4 - 0{,}50\,x^3 + 0{,}75\,x^2 - 0{,}96\,x + 1{,}19) - 8{,}44$, erro de 10^{-2}. A figura 76 ilustra estes dados.

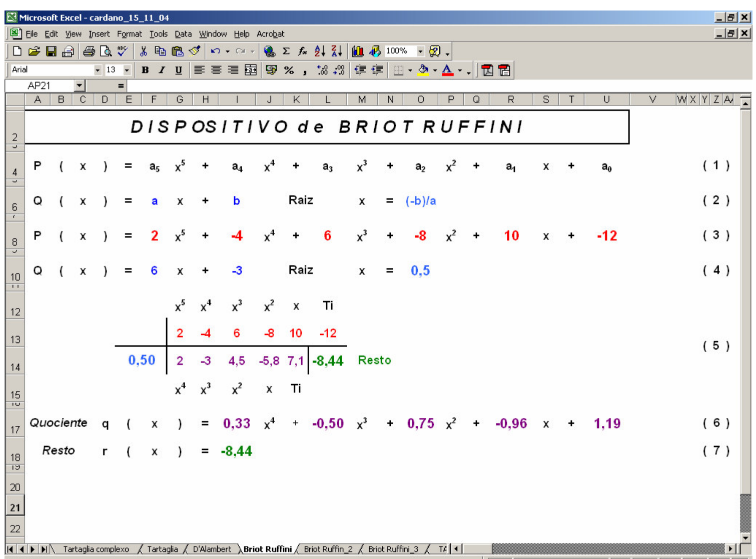


Figura 76: Quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x - 12$ por $Q(x) = 6x - 3$ - Dispositivo de *Briot Ruffini*.

Seja $Q(x)$ um polinômio de grau menor ou igual a $P(x)$ e ter breve conhecimento de todas as raízes de $Q(x)$ e seja $P(x)$ um polinômio de no máximo do quinto grau. Determinados está o quociente $(q(x))$ de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, o resto $(r(x))$.

(1) Seja $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau.

(2) Seja $Q(x)$ um polinômio de segundo grau.

(3) Seja $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

(4) Seja $Q(x) = (ax + b)(cx + d)$, determinando as raízes, encontramos: $x' = -\frac{b}{a}$ e $x' = -\frac{d}{c}$, onde **a** e **c** são iguais a 1 (um).

(5) Aplicação do algoritmo do dispositivo de Briot Ruffini.

(6) Após duas utilizações do algoritmo do dispositivo Briot-Ruffini, o quociente é dado por: $q(x) = q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$, onde $q(x)$ será no máximo de terceiro grau.

(7) Após duas utilizações do algoritmo do dispositivo Briot-Ruffini, o resto é dado por: $r(x) = r_2(ax + b) + r_1$, onde $r(x)$ será no máximo de segundo grau.

(9) O item 8 só será possível quando $P(x)$ for de grau z e $Q(x)$ de grau $(z-2)$ com $2 \le z \le 5$ e $r(x) = 0$, então, será utilizado o algoritmo de Bhaskara para determinar as outras duas raízes, seja elas reais ou complexas.

E escrever $P(x)$ da forma: $P(x) = Q(x) \cdot q(x) + r(x)$. As figuras 77 e 77a ilustram todos os cálculos da situação acima.

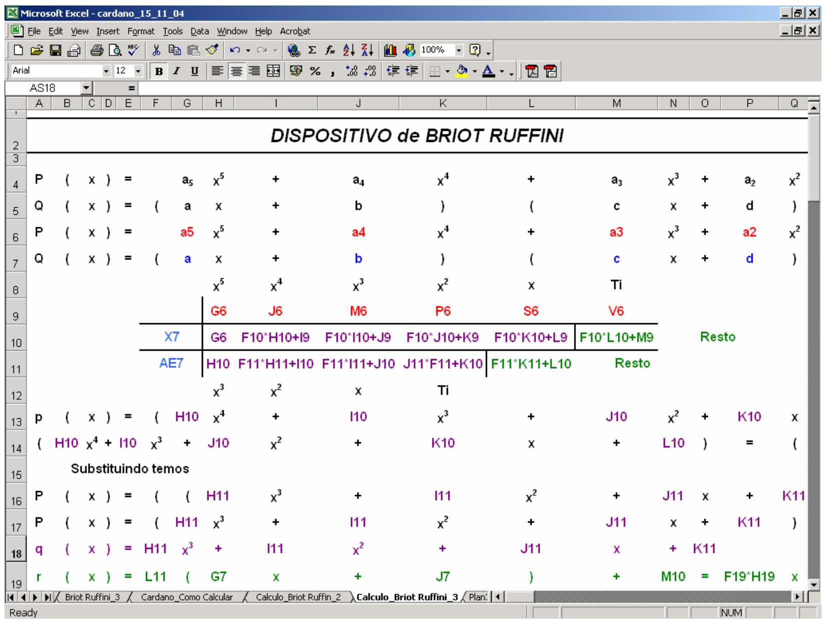


Figura 77: Quociente e o resto da divisão de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - Dispositivo de *Briot Ruffini.*

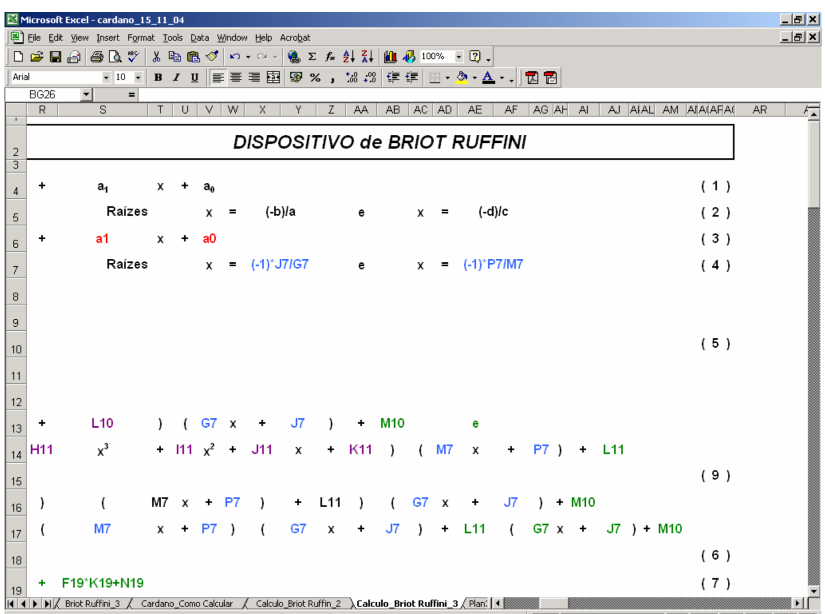


Figura 77 a: Quociente e o resto da divisão de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - Dispositivo de *Briot Ruffini.*

Seja $Q(x)$ um polinômio de grau dois e seja $P(x)$ um polinômio de quinto grau. Determinados está o quociente $(q(x))$ de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, o resto $(r(x))$

(1) Seja $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau.

(2) Seja $Q(x)$ um polinômio de segundo grau.

(3) Seja $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 6$.

(4) Seja $Q(x) = (x-1)(x+2)$, determinando as raízes, encontramos: $x = 1$ e $x = -2$.

(5) Aplicação do algoritmo do dispositivo de Briot Ruffini.

(6) Após duas utilizações do algoritmo do dispositivo Briot-Ruffini, o quociente é dado por: $q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$.

(7) Após duas utilizações do algoritmo do dispositivo Briot-Ruffini, o resto é dado por: $r(x) = 13(x-1) - 1 = 13x - 14$.

(8) O item 8 não será possível calcular, pois a diferença ente o grau de $P(x)$ e $Q(x)$ é diferente de 2 e $r(x) \neq 0$.

Escrever $P(x) = Q(x) \cdot q(x) + r(x)$, $P(x) = (x^4 - 1x^3 - 4x^2 + 0x + 5)(x-1) - 1$, substituindo $(x^4 - 1x^3 - 4x^2 + 0x + 5) = (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)(x+2) + 13$, temos: $P(x) = ((x^3 - 3x^2 + 2x - 4)(x+2) + 13)(x-1) - 1$, aplicando a propriedade distributiva, encontramos: $P(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)(x+2)(x-1) + 13(x-1) - 1$. A figura 78 ilustra estes dados.

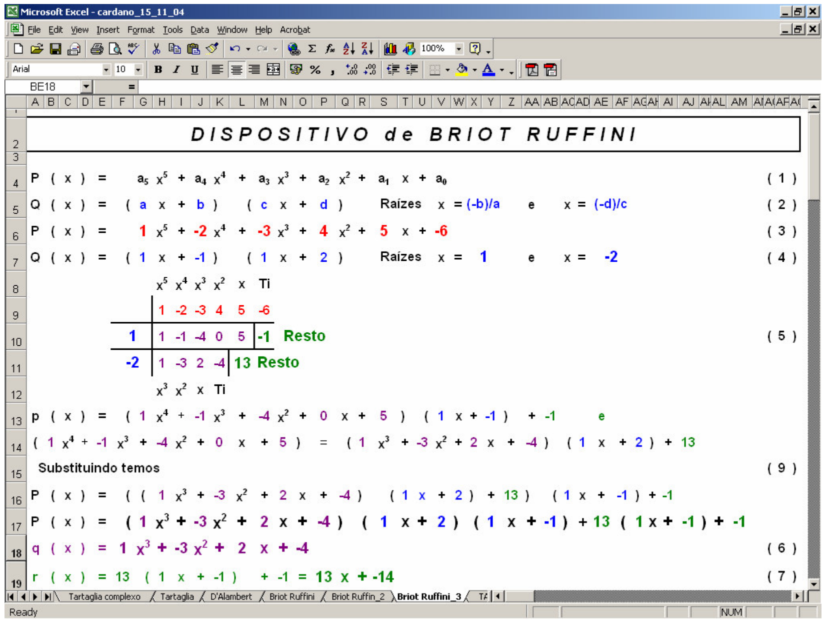


Figura 78: Quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 6$ por $Q(x) = (x-1)(x+2)$ - Dispositivo de *Briot Ruffini.*

Teorema do Resto ou Teorema de Bézout[36]

Teorema do resto: O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$ é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$, com $k \neq 0$.

Demonstração:

O quociente da divisão de $P(x)$ por $kx - a$ é um polinômio de grau inferior a uma unidade.

Podemos escrever $P(x) = (kx - a) \cdot Q(x) + R$.

[36] Étienne Bézout, francês, viveu de 1730 a 1783. O teorema sobre o número de intersecções de duas curvas algébricas é fundamental. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/BezoutsTheorem.html. Acesso em 14 de outubro de 2004.

Seja $kx - a = 0$, com $k \neq 0$, logo $x = \frac{a}{k}$.

Fazendo $x = \frac{a}{k}$ em $P(x)$,

obtemos $P\left(\frac{a}{k}\right) = \left(k \cdot \frac{a}{k} - a\right) \cdot Q\left(\frac{a}{k}\right) + R$,

ou seja $P\left(\frac{a}{k}\right) = (0) \cdot Q\left(\frac{a}{k}\right) + R$

portanto $P\left(\frac{a}{k}\right) = R$, de onde se conclui que o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$ é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$, com $k \neq 0$. cqd

Teorema de D'Alembert[37]**:** Um polinômio $P(x)$ é divisível por $kx - a$, se, e somente se, $P\left(\frac{a}{k}\right) = 0$.

Demostração

$\Rightarrow$ Seja $P(x) = (kx - a) \cdot Q(x) + R$

Como $P(x)$ é divisível por $kx - a$, temos $R = 0$.

Logo pelo Teorema de Bézout, temos $P\left(\frac{a}{k}\right) = 0$.

$\Leftarrow$ Seja $P\left(\frac{a}{k}\right) = 0$, pelo Teorema de Bézout, temos $R = 0$.

Logo $P(x) = (kx - a) \cdot Q(x)$, portanto $P(x)$ é divisível por $kx - a$. cqd

[37] Jean Le Rond **D'Alembert** (1717 - 1783). Em 1739 publica **"*Mémoire sur le calcul intégral*"** (Memorial sobre o cálculo integral), obra que proporcionou seu ingresso na *Académie de Sciences* de Paris. Em 1740, enunciou e demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra, também conhecido como teorema de d'Alembert, e apresentou-o à Academia de Ciências de Berlim com o seguinte enunciado: "Toda e qualquer equação algébrica que representa uma função racional inteira, admite sempre uma raiz".

Sejam $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau e $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau. Aplicado o Teorema de Bézout (resto) e o Teorema de D'Alembert, determina-se $\mathbf{Q(x)}$ divide $\mathbf{P(x)}$.

(1) Seja $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau.

(2) Seja $P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

(3) Seja $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau.

(4) Seja $Q(x) = ax + b$, determinando a raiz, encontramos: $x = -\dfrac{b}{a}$, onde $a \neq 0$.

(5) Aplicando o Teorema de Bézout (resto), ou seja determinando $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

(6) Seja $Q(x) = cx + d$, determinando a raiz encontramos $x = -\dfrac{d}{c}$, onde $c \neq 0$.

(7) Aplicando o Teorema de Bézout (resto), ou seja determinando $P\left(-\dfrac{d}{c}\right)$.

A figura 79 ilustra todos os cálculos da situação acima.

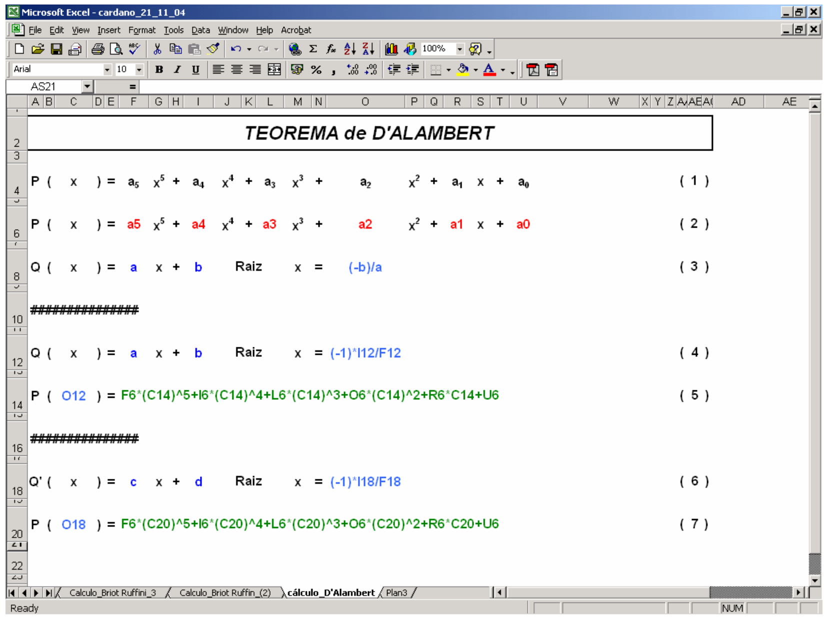


Figura 79: Resto da divisão de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - Teorema de *D'Alambert*.

Sejam $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau e $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau. Aplicado o Teorema de Bézout (resto) e o Teorema de D'Alembert, determina-se se $Q(x)$ divide $P(x)$.

Seja o polinômio $P(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - x - 6$ determine o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$, onde $Q(x)$ é dado por:

a) $Q(x) = -x + 1$;

b) $Q(x) = 3x + 5$.

(1) Seja $P(x)$ um polinômio de no máximo quinto grau.

(2) Seja $P(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - x + 4$.

(3) Seja $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau.

(4) Seja $Q(x) = -x + 1$, determinando a raiz, encontramos: $x = 1$.

(5) Aplicando o Teorema de Bézout (resto), temos: $P(1) = 0$, logo pelo **Teorema de D'Alembert** temos, $Q(x)$ divide $P(x)$.

(2') Seja $P(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - x + 4$.

(3') Seja $Q(x)$ um polinômio de primeiro grau.

(4') Seja $Q(x) = 3x + 5$, determinando a raiz encontramos $x = -1{,}67$.

(5') Aplicando o Teorema de Bézout (resto), temos: $P(-1{,}67) = 21{,}20164609$, logo pelo **Teorema de D'Alembert** temos: $Q(x)$ não divide $P(x)$. A figura 80 ilustra estes dados.

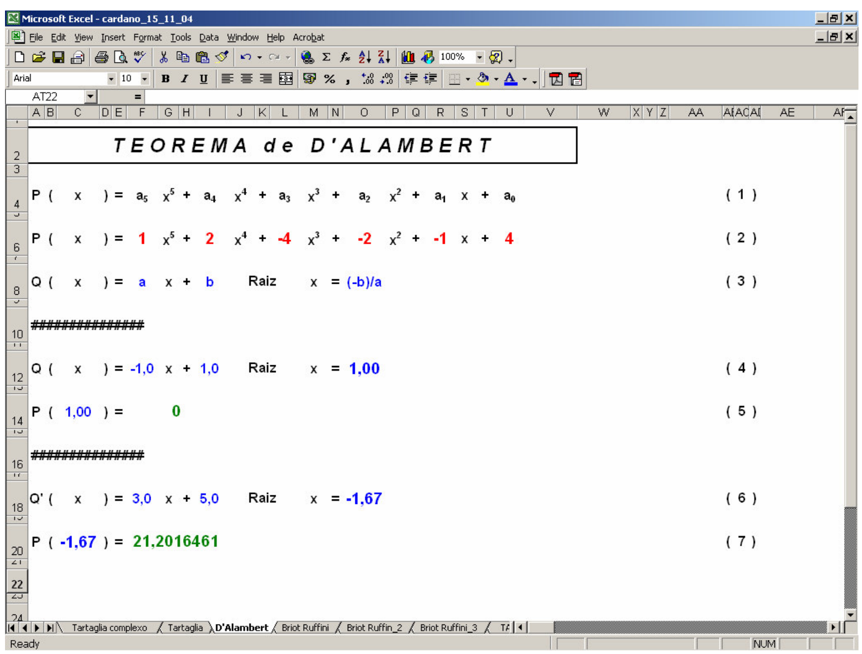


Figura 80: Resto da divisão de $P(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - x + 4$ por $Q(x) = -x + 1$ e $P(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - x + 4$ por $Q(x) = 3x + 5$ - Teorema de *D'Alambert.*

Os Pontos positivos em utilizar o sistema formativo Excel encontram-se na facilidade de utilização e na disponibilidade de encontrar esse sistema ou similar em quase totalidade nos computadores (residenciais/escolares). No entanto, alguns pontos negativos na utilização desse sistema operacional são: limitação do sistema no estudo de funções quadráticas, posto que a planilha não reconhece o conjunto dos números complexos, como foi mostrado em exemplos anteriores; o preço do Office R$ 1.149,90. Mas todos os trabalhos apresentados aqui são possíveis utilizando o OpenOffice. É uma “versão livre” para o Windows, Linux e Unix.

3.3.4 SISTEMA FORMATIVO de PROGRAMAÇÃO e SIMULAÇÃO

3.3.4.1 *DERIVE*

Localização http://www.derive-europe.com/downloads.asp

Versão: Derive 5.04.

Tipo: Comercial. O demo está completamente disponível durante 30 dias (única licença acadêmica $99, única licença não acadêmica $199 e licença educacional local $2,750).

Tamanho: 4.517 Kb

Ajuda: O sistema conta com ajuda em inglês, mas soluciona bem as dúvidas.

Descrição: Programa comercial produzido por *SoftWarehouse, Inc*. combina as facilidades da manipulação simbólica com as potencialidades de cálculos numérico em ambiente gráfico. O programa é tão simples de utilizar como uma máquina da calcular; basta escrever uma expressão matemática incluindo operadores e funções correntes. O programa ***Derive*** permite simplificar expressões, efetuar aproximações numéricas, manipulações algébricas e criar gráficos de forma simples. Existem versões disponíveis para plataformas Windows e Dos em *English*, Italiano, *Español*, *Deutsch*, *Français*, Português*, Nederlands*, *Magyar* e *Latviski*.

Pela taxonomia de Valente (1993) podemos dizer que trata-se de um sistema da forma aplicativo. Nesse sistema os usuários podem modelar, analisar simulações, fazer experimentos e conjecturas. O programa é muito fácil de trabalhar e o *site* disponibiliza uma “apostila”, em versão PDF, em português. Por ser um programa demo, a “apostila” só está disponível no 1º e no 2º capítulos. Para plotar gráficos em 2D (duas dimensão) e 3D (três dimensão) basta digitar a função algébrica da forma que se escreve e pedir para plotar. É possível fazer um excelente trabalho com o estudo de gráficos. No caso de 2D é possível traçar uma “família” de função, ou seja, criar vários gráficos em um mesmo plano cartesiano variando um determinado parâmetro da função. No caso de 3D é possível fazer rotação em torno do eixo **Z** e em torno do plano **XY**, fazer zoom (out, in). No conteúdo de resolução de equação do segundo grau pelo método de completar quadrado**,** o programa deixa de ser um tutorial para ser uma ferramenta, pois o aluno tem que “ensinar" o computador a resolver as equações.

Tela inicial do sistema Derive, figura 81.

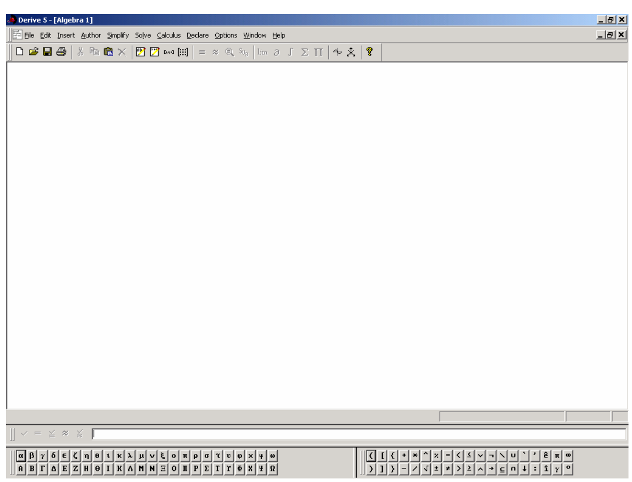


Figura 81: Tela inicial do sistema *Derive*.

Equação do Segundo Grau

Nessa tarefa deve-se deduzir a Fórmula de Bhaskara[38] utilizando o método de completar quadrado.

Dada qualquer equação do segundo grau $a^2x^2 \pm 2abx + b^2 = 0$ completa (com todos os graus) ou incompleta faltando apenas o termo independente, sempre é possível escrever da forma $(ax \pm b)^2 = 0$, onde $a, b \in R$.

Ao digitar a equação de segundo grau, vamos supor que **b** seja positivo.

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{14}$$

E acrescentar à fórmula $-\mathbf{c}$ nos dois lados da equação, (no programa, basta apertar a tecla F4), aparecem parênteses envolvendo toda a equação (o programa entende que está realizando a mesma operação nos dois lados da igualdade).

$$(ax^2 + bx + c = 0) - c \tag{15}$$

Simplificando a expressão acima, utilizando o comando Menu – *Simplify* – *Basic* (ou a tecla de atalho **=**), temos:

$$ax^2 + bx = -c \tag{16}$$

Dividindo toda a linha anterior por **a**, onde $a \neq 0$ obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \tag{17}$$

Para completar o quadrado, falta achar o termo independente (TI) ao quadrado, para determiná-lo é necessário fazer o seguinte raciocínio. O coeficiente de primeiro grau do trinômio quadrado perfeito é dado por mais ou menos (+ ou -) duas vezes a raiz quadrada do coeficiente do termo de segundo grau vezes a raiz

[38] **Bhaskara**, também conhecido como Bhaskara II ou como Bhaskaracharya, nasceu e viveu na Índia de 1114 a 1185. O seu manuscrito está dividido em quarto partes – *Lilavati* (A Bela) sobre aritmética; *Bijaganita* sobre a álgebra, *Goladhyaya* sobre a esfera, ou seja sobre o globo celeste e *Grahaganita* sobre a matemática dos planetas. O seu livro foi usado em toda a Índia, tendo substituído maior parte dos textos que eram utilizados até então, como o do astrônomo indiano Lalla (720 - 790), mas só saiu às fronteiras da Índia no século XVI. Nessa altura foi traduzido para persa por Faizi (1587). Foi este tradutor que introduziu a história de que Lilavati era o nome da filha de Bhaskara. O hábito de dar nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação de 2º grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. ***(**http://www.malhatlantica.pt/mathis/India/BhaskaraII.htm***)***

quadrada do termo independente, logo $\frac{b}{a} = 2\sqrt{1}\sqrt{TI} \;\Rightarrow\; 4 \cdot TI = \frac{b^2}{a^2} \;\Rightarrow\; TI = \frac{b^2}{4a^2}$, então, basta somar aos dois lados da equação acima $\frac{b^2}{4a^2}$. No programa basta apertar a tecla F4 e somar $\frac{b^2}{4a^2}$.

$$(x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}) + \frac{b^2}{4a^2} \tag{18}$$

Simplificando a expressão acima, utilizando o comando *Simplify – Basic* (ou a tecla de atalho **=**), temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \tag{19}$$

Multiplicando a expressão anterior toda por $\mathbf{4a^2}$, obtemos:

$$4a^2\, x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2 \tag{20}$$

Selecionar na expressão acima apenas o termo $4a^2\, x^2 + 4abx + b^2$ e simplificar utilizando o comando *Simplify – Factor (Factor Variables* **x** - *Amount SquareFree) – Factor*, como mostra a figura 82, obtemos:

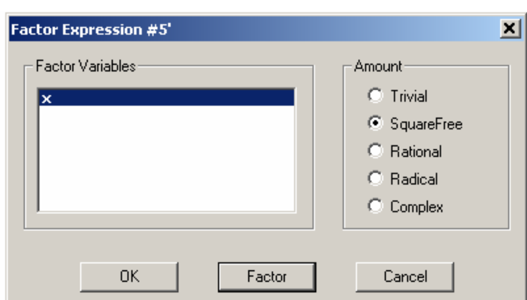


Figura 82: Barra de ferramentas do Derive – *Factor expression.*

$$(2a\,x + b)^2 = -4ac + b^2 \tag{21}$$

A próxima passagem é muito importante, pois só será possível no conjunto dos números reais se $-4ac+b^2 \geq 0$ (se $-4ac+b^2 > 0$ *(positivo)*, então a equação terá como solução duas raízes reais distintas. Se $-4ac+b^2 = 0$ (zero), então a equação possui duas raízes reais iguais).

Se $-4ac+b^2 < 0$ (*negativo*) então a equação não possui raízes reais, dizemos que as raízes pertencem ao conjunto dos números complexos.

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, supondo que $-4ac+b^2 \geq 0$, temos:

$$(2ax+b) = \pm\sqrt{-4ac+b^2} \tag{22}$$

Ou seja,

$$2ax+b = \sqrt{-4ac+b^2} \tag{23}$$

ou

$$2ax+b = -\sqrt{-4ac+b^2} \tag{24}$$

Resolvendo cada equação acima separadamente utilizando o comando *solve – expression* (ou a tecla de atalho ), temos as soluções.

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{25}$$

ou

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{26}$$

Que é a fórmula de Bhaskara, como queríamos demonstrar. As figuras 83 e 84 ilustram estes dados.

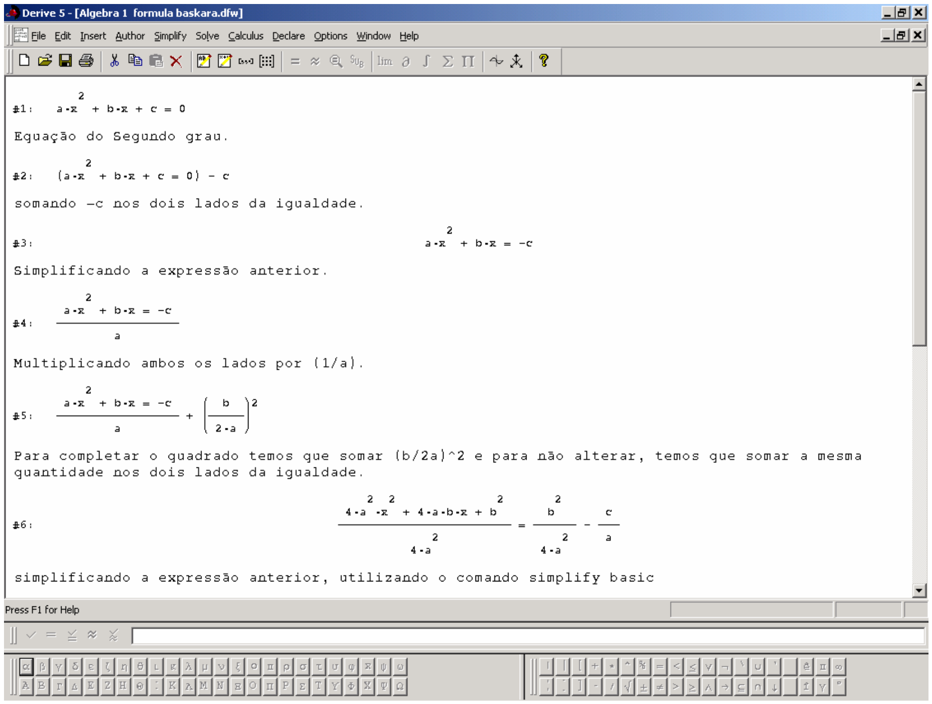


Figura 83: Dedução da fórmula de Bhaskara.

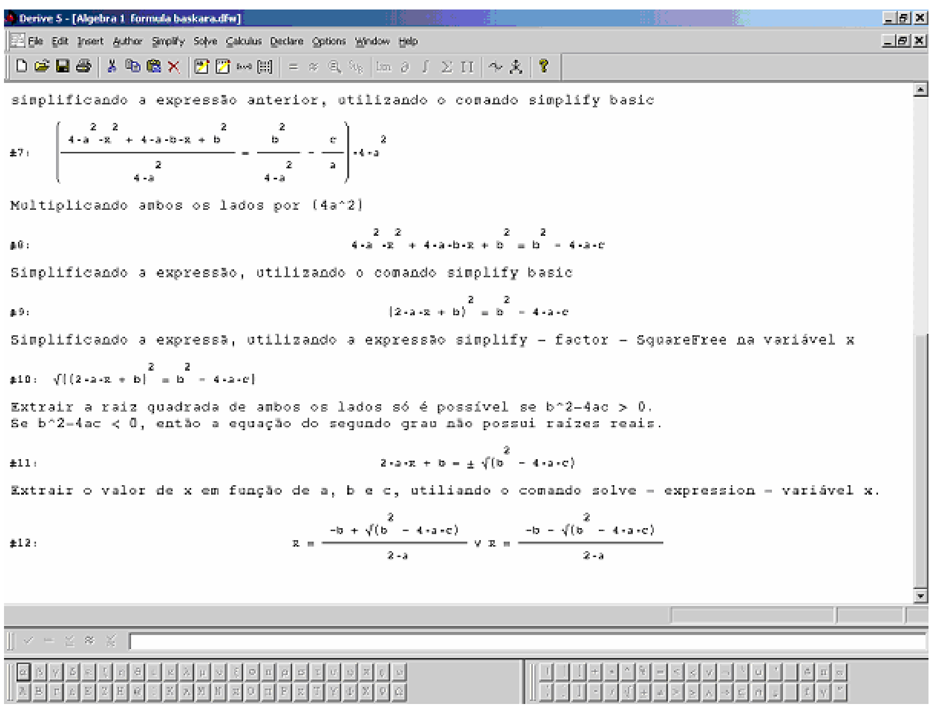


Figura 84: Dedução da fórmula de *Bhaskara* (continuação).

Nessa tarefa deve-se achar as raízes (reais ou complexas) utilizando o método de completar quadrado. A figura 86 ilustra todos esses cálculos.

Seja $x^2 - 5x + 6 = 0$

Somar -6 nos dois lados da equação. No programa, ao acionar a tecla F4, aparecem parênteses que envolvem toda a equação, o programa entende que está realizando a mesma operação nos dois lados da igualdade.

$$(x^2 - 5x + 6 = 0) - 6 \tag{27}$$

Ao simplificar a expressão acima, utilizando o comando Menu – *Simplify* – *Basic* (ou a tecla de atalho **=**), temos:

$$x^2 - 5x = -6 \tag{28}$$

Para completar o quadrado falta achar o termo independente (TI) ao quadrado, para determiná-lo é necessário fazer o seguinte raciocínio. O coeficiente de primeiro grau do trinômio quadrado perfeito é dado por menos duas vezes a raiz quadrada do coeficiente do termo de segundo grau vezes a raiz quadrada do termo independente, logo $-2\sqrt{1}\sqrt{TI} = -5 \;\Rightarrow\; 4TI = 25 \;\Rightarrow\; TI = \frac{25}{4}$, então basta somar aos dois lados da equação $\frac{25}{4}$. No programa basta apertar a tecla F4.

$$(\, x^2 - 5x = -6 \,) + \frac{25}{4} \tag{29}$$

Simplificando a expressão acima, utilizando o comando *Simplify* – *Basic* (ou a tecla de atalho **=**), temos:

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{1}{4} \tag{30}$$

Selecionar na expressão acima apenas o termo $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$ e simplificar utilizando o comando *Simplify – Factor (Factor Variables* **x** - *Amount (SquareFree)) – Factor*, como mostra a figura 85, obtemos:

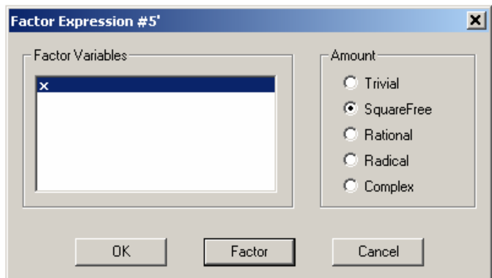


Figura 85: Barra de ferramentas do Derive para fatorar.

$$\frac{(2x-5)^2}{4} = \frac{1}{4} \tag{31}$$

No programa, para a eliminar o denominador de toda a expressão algébrica, basta acionar a tecla de função F4, no teclado do computador e multiplicar por 4.

$$\left(\frac{(2x-5)^2}{4} = \frac{1}{4} \right) \cdot 4 \tag{32}$$

Simplificando a expressão acima, utilizando o comando *Simplify – Basic* (ou a tecla de atalho **=**), temos:

$$(2x-5)^2 = 1 \tag{33}$$

Como os dois lados da igualdade são *positivos*, então é possível extrair a raiz quadrada de ambos os lados e obtermos como solução duas raízes reais distintas.

$$(2x-5) = \pm 1 \tag{34}$$

ou seja,

$$2x - 5 = 1 \tag{35}$$

ou

$$2x - 5 = -1 \tag{36}$$

Para resolver cada equação acima separadamente utilizando o comando *solve – expression* (ou a tecla de atalho), temos as soluções.

$$x = 3 \tag{37}$$

ou

$$x = 2 \tag{38}$$

Na utilização do sistema desta maneira, o aluno deixa a posição passiva (daquele que recebe informação produzidas a própria revelia), e passa a “instruir” e/ou instruir-se com a máquina, propiciando desta forma um ganho real no aprendizado cognitivo, segundo Taylor (1990) o computador é utilizado como ferramenta.

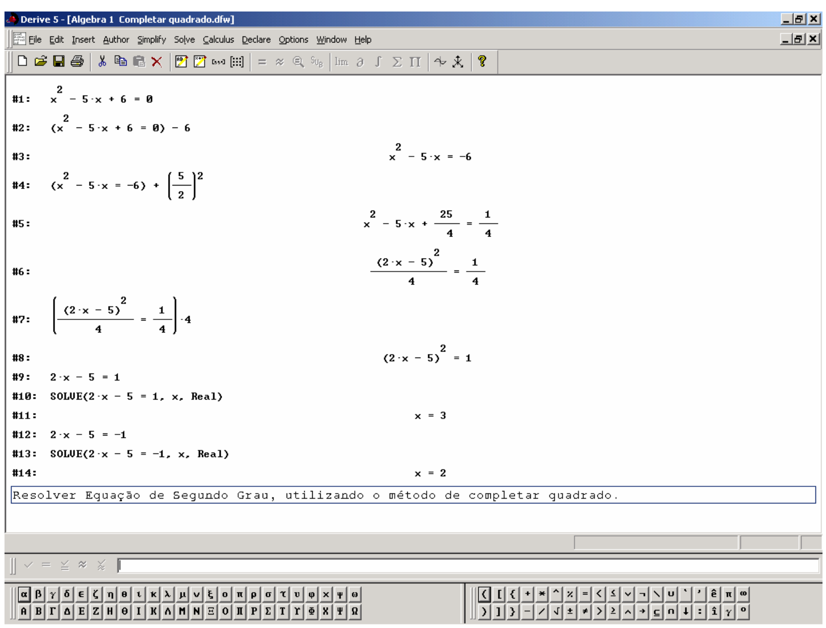


Figura 86: Raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ - Método de completar quadrados.

Fatoração

Nessa tarefa deverão ser determinadas as raízes (reais ou complexas) das equações de segundo grau utilizando o método da fatoração. A figura 89 ilustra estes dados.

Seja $x^2 - 5x + 6 = 0$

Fatorando a expressão anterior em função de x, utilizando o comando *Simplify – factor – Factor Variables (x) – Amount (Rational) – Factor*. A figura 87.

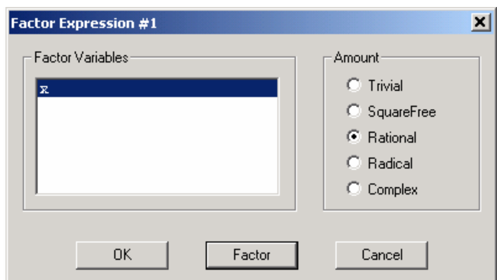


Figura 87: Barra de ferramentas do Derive para fatorar.

Obtemos:

$$(x-2)(x-3)=0 \tag{39}$$

Utilizando o comando Solve – *Expression – solution Variables* (x) – *Solution Method (Algebraically) – Solution Domain* (*complex*), como mostra na figura 88, são obtidas as seguintes raízes observadas na figura 89.

$$x = 3 \tag{40}$$

ou

$$x = 2 \tag{41}$$

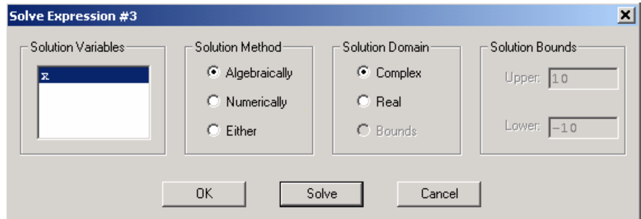


Figura 88: Barra de ferramentas do Derive – *Solve expression*.

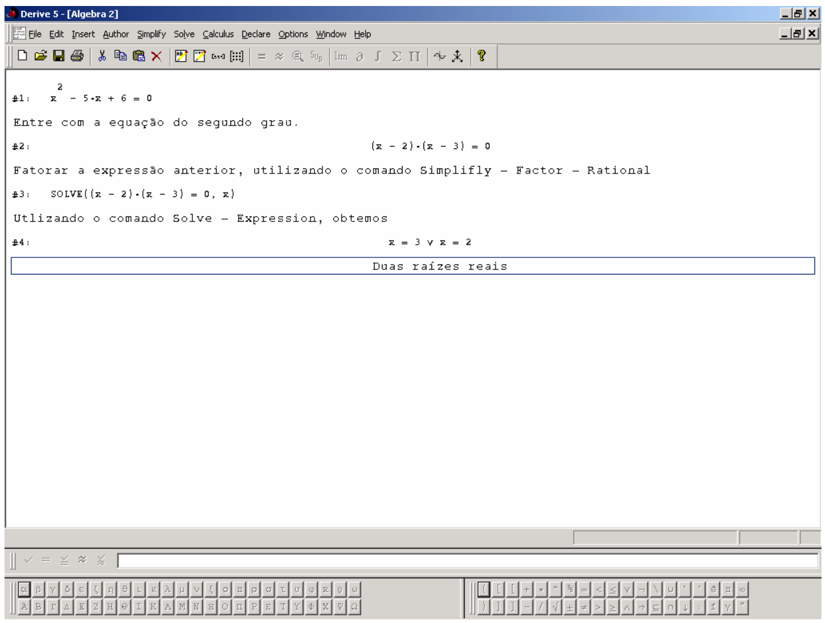


Figura 89: Raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ utilizando fatoração.

Nesse caso não desenvolve-se o raciocínio algébrico. O sistema é utilizado apenas, como conferência de resultados, ou seja, pela taxonomia de Valente (1993) e *Taylor* (1990) o computador é utilizado na forma tutorial.

Gráficos em 2D e 3D

Para traçar gráfico em 2D e/ou 3D, podemos utilizar o menu ou as teclas de atalho  ou , respectivamente.

Gráfico em 2D

Tela Inicial. Figura 90.

Barra de ferramentas de 2D. Figura 91.

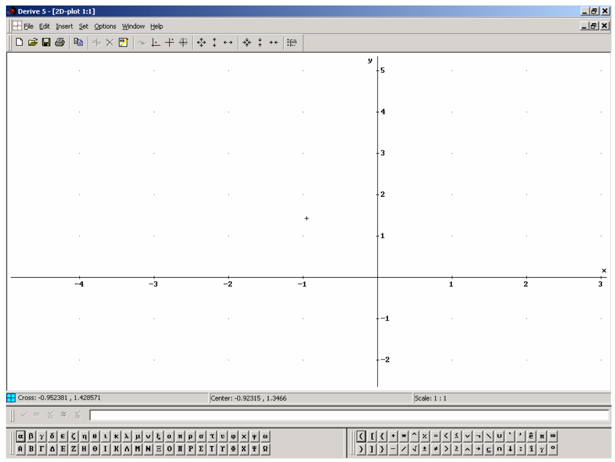


Figura 90: Tela inicial para traçar gráficos (2dim).

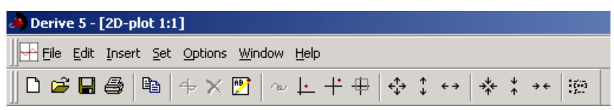


Figura 91: Barra de ferramentas de 2D.

São os seguintes os comandos existentes na barra de ferramenta da tela:

 **Novo** – Abre um novo plano cartesiano.

 **Abrir** – Abre um plano cartesiano já salvo.

 **Gravar** – Grava um plano cartesiano.

 **Imprimir** – Imprime um arquivo

 **Copiar o gráfico para o Windows**.

 **Excluir o gráfico selecionado**.

 **Plotar Gráfico** – Traça o gráfico

 **Insere Comentários** – Insere comentários mo plano cartesiano.

 **Inserir ponto sobre o gráfico**.

 **Desloca os eixos cartesianos para a esquerda ou para a direita da tela**, modificando os intervalos dos eixos cartesianos sem modificar a escala.

 **Retorna o gráfico no centro da tela** e retorna os intervalos iniciais dos eixos cartesianos.

 **Zoom** – Ao ser selecionado o programa faz zoom.

 Aumenta a escala dos dois eixos cartesianos (**zoom out**).

 Amplia apenas a escala do eixo y.

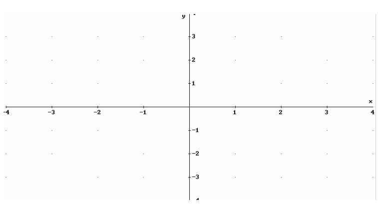
 Amplia apenas a escala do eixo x.

 Reduz a escala nos dois eixos cartesianos (**zoom in**).

 Reduz apenas a escala do eixo y.

 Reduz apenas a escala do eixo x.

 Retorna a janela inicial do derive.

 Região onde será plotada o gráfico.

 Área onde será digitada a função.

Construção de Gráficos em 2D

Sendo $f(x) = kx^2$ trace a "família" da função com $-10 < k < 10$. A figura 92 ilustra estes dados.

Um estudo preliminar da função quadrática, quando $K > 0$, temos a concavidade da parábola voltada para cima, logo a parábola possui um ponto de mínimo; quando $K < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo, logo a parábola possui um ponto de máximo e se $K = 0$ a função não é quadrática, logo sua representação gráfica não é uma parábola, nesse exemplo temos uma reta sobre o eixo **x**.

Quando $-1 \leq K \leq 1$ a parábola tem uma maior amplitude (uma maior abertura).

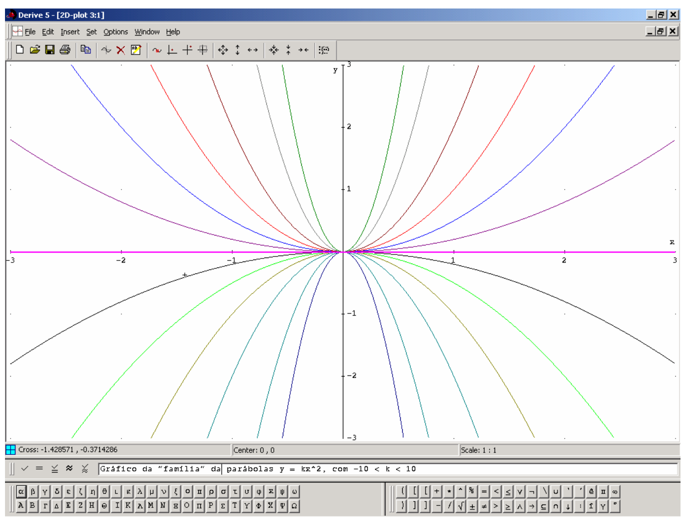


Figura 92: Família da função $f(x) = kx^2$, com $-10 < k < 10$.

Gráfico em 3D

Tela inicial. Conforme mostra a figura 93.

Barra de ferramentas de 3D. Conforme mostra a figura 94.

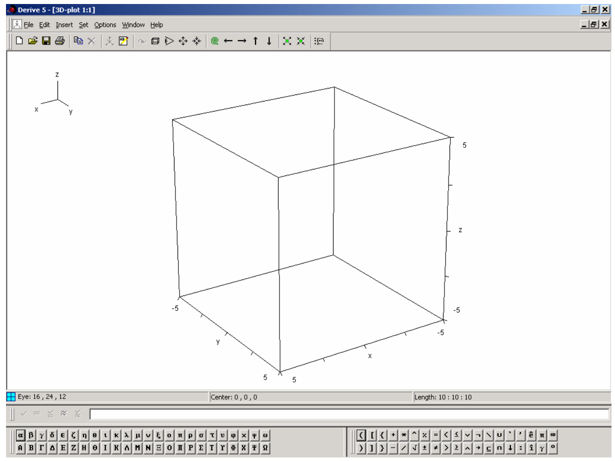


Figura 93: Tela inicial para traçar superfície (3dim).

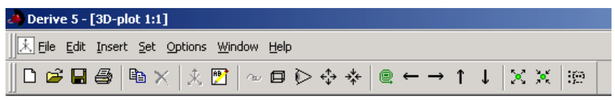


Figura 94: Barra de ferramentas de 3D.

São os seguintes os comandos existentes na barra de ferramenta da tela:

 **Novo** – Abre um novo plano cartesiano.

 **Abrir** – Abre um plano cartesiano já salvo.

 **Gravar** – Grava um plano cartesiano.

 **Imprimir** – Imprime um arquivo

 **Copiar o gráfico para o Windows**.

 **Excluir o gráfico selecionado**.

 **Plota a Superfície**.

 **Insere Comentários** – Insere comentários no plano cartesiano.

 Traçar linhas sobre a superfície.

 **Seleciona as coordenadas da superfície**.

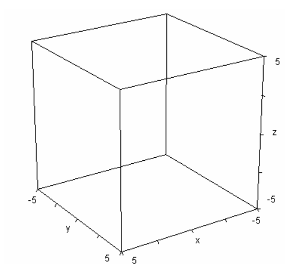
 **Visualizar a superfície**.

 **Tecla de atalho para ampliar ou reduzir as escalas dos eixos**.

 **Gira o gráfico horizontalmente** (em torno do eixo z), **gira para a direita ou para a esquerda horizontalmente** (em torno do eixo x), **gira para cima ou para baixo verticalmente** (em torno do eixo y), respectivamente.

 **Amplia ou reduz o gráfico**, sem alterar a escala.

 **Retorna à janela inicial do derive**.



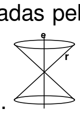
Região onde será plotada a superfície.

 Área onde será digitada a superfície.

Seções cônicas

Nessa tarefa serão mostradas todas as interseções do cone[39] $z^2 = x^2 + y^2$ com o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, na janela $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$ e $-2 \le z \le 2$, utilizando coordenadas retangulares.

---

[39] Sejam duas retas **e** e **r** concorrentes em **O** e não perpendiculares. Conservamos fixa a reta **e** e façamos **r** girar 360º em torno de **e** mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta r gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O. A reta **r** é chamada ***geratriz*** da superfície cônica e a reta **e**, **eixo** da superfície, figura ao lado. 

Plotar a superfície $z^2 = x^2 + y^2$. É necessário plotar a superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e depois a superfície $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, no mesmo espaço cartesiano. A figura 95 ilustra essa situação.

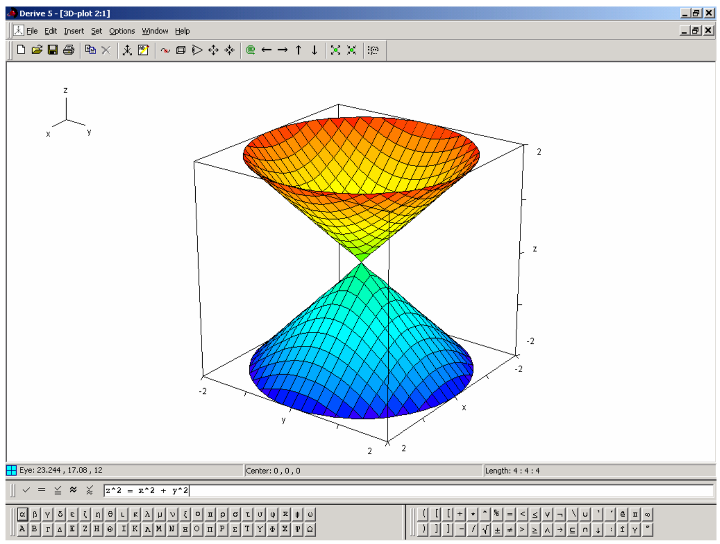


Figura 95: Gráfico da superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$

Quando o plano π for oblíquo ao eixo da superfície cortando apenas uma das folhas da superfície, a seção cônica será uma **Elipse**[40].

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = \frac{1}{2}x - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\left(x + \frac{4}{9}\right)^2}{\frac{64}{81}} + \frac{y^2}{\frac{16}{27}} = 1$, a figura 96 ilustra essa situação.

---

[40] **Elipse** é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distancias a dois pontos fixos desse plano é constante.

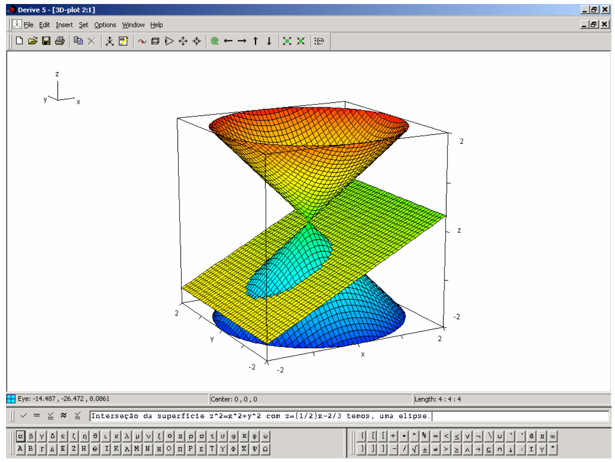


Figura 96: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $\frac{1}{2}x - z - \frac{2}{3} = 0$.

Conforme ilustrou a figura 96 a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica, elipse.

Quando o plano π for perpendicular ao eixo da superfície, isto é, paralelo ao plano **XY**, não passando pela origem, a seção cônica será uma **Circunferência**[41].

Por exemplo: $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases}$, com $k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = k^2$, a figura 97 ilustra essa situação.

Conforme ilustra a figura 97, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica, circunferência.

[41] A **circunferência** é uma elipse de excentricidade nula.

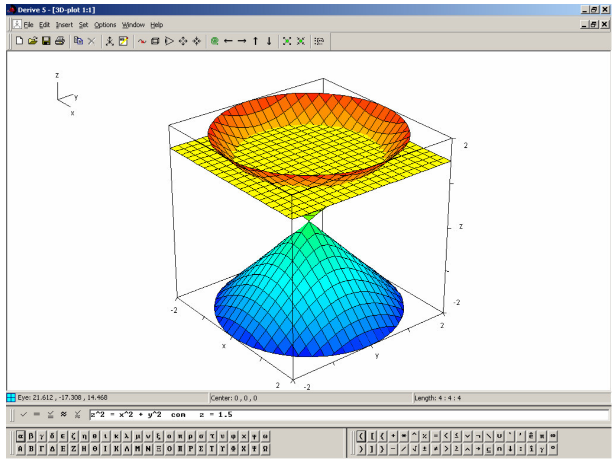


Figura 97: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $z - k = 0$, com $k \neq 0$.

Quando o plano π for paralelo ao eixo da superfície, a seção cônica será uma **Hipérbole**[42].

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow z^2 - y^2 = 1$, a figura 98 ilustra essa situação.

Conforme ilustra a figura 98, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica, hipérbole.

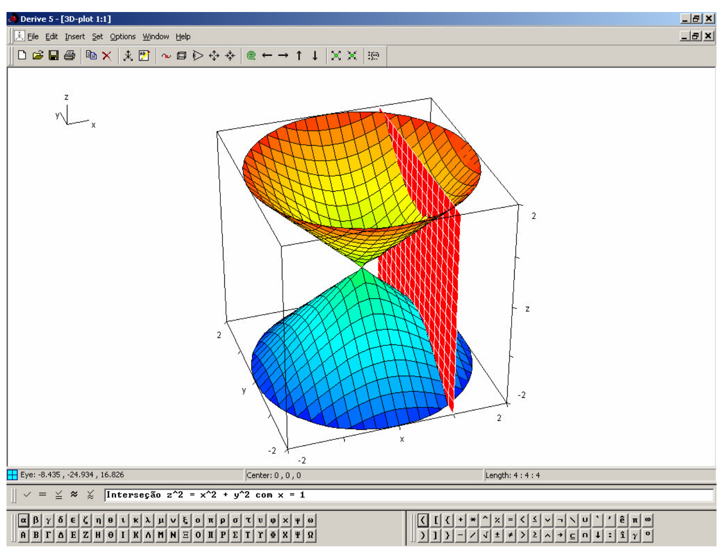


Figura 98: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $x - 1 = 0$

[42] **Hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distancias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

Quando o plano π for paralelo a uma geratriz da superfície, a seção cônica será uma **Parábola**[43].

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$, a figura 99 ilustra essa situação.

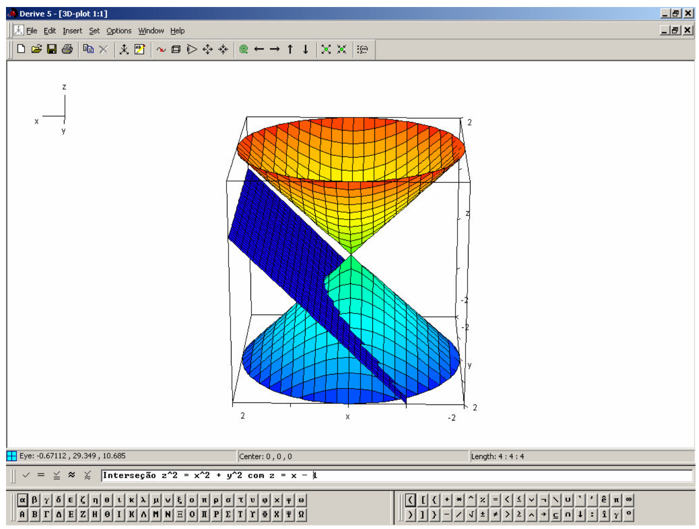


Figura 99: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $x - z + 1 = 0$

Conforme ilustra a figura 99, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica, parábola.

Quando o plano π tangencia a superfície cônica, a cônica degenerada será uma **uma reta**.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \quad x = 0$, a figura 100 ilustra essa situação.

[43] **Parábola** é o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes de F (um ponto não pertencente a reta d) e d (uma reta).

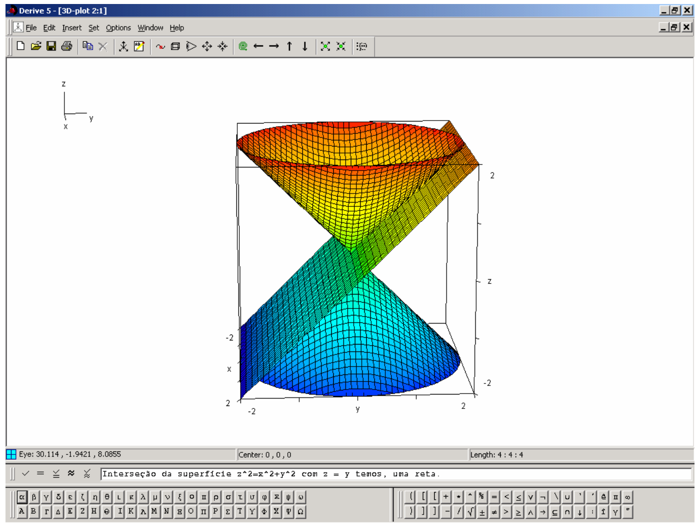


Figura 100: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $y - z = 0$.

Conforme ilustra a figura 100, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica degenerada, uma reta.

Quando o plano π formar com o eixo um ângulo menor do que este faz com a geratriz, a cônica degenerada será **duas retas concorrentes**.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}x$. A figura 101 ilustra essa situação.

Conforme ilustra a figura 101, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica degenerada, duas retas concorrentes.

Quando o plano π for perpendicular ao eixo da superfície,paralelo ao plano **XY**, passando pela origem, a seção cônica será **um ponto**.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 0$. A figura 102 ilustra essa situação.

Conforme ilustra a figura 102, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica degenerada, um ponto.

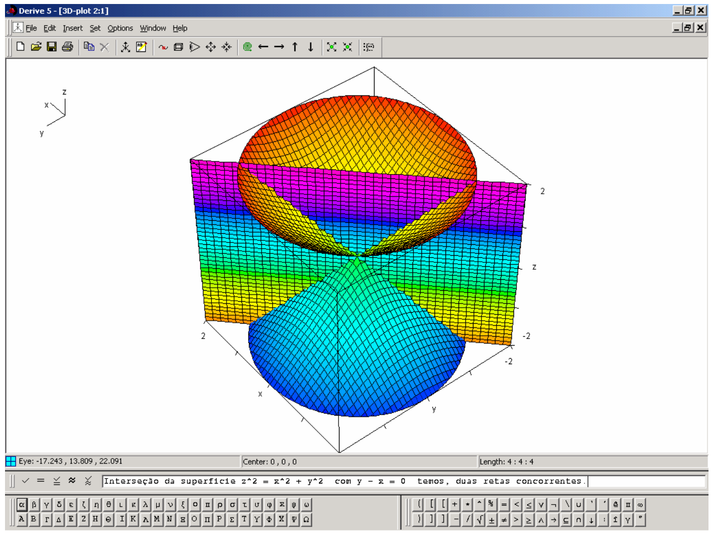


Figura 101: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $x - y = 0$

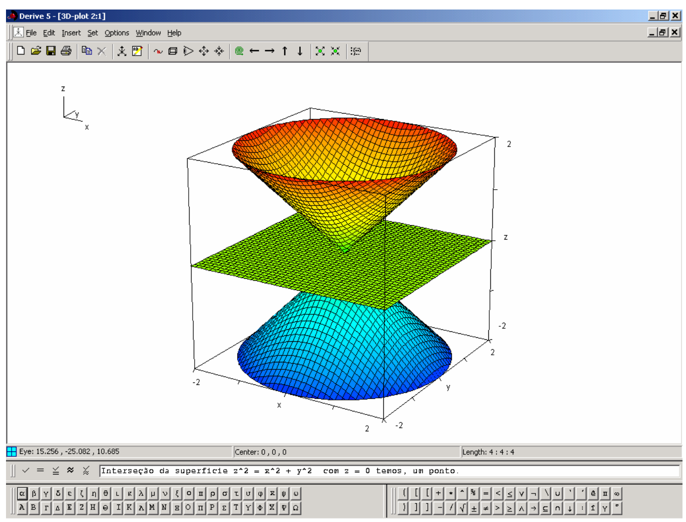


Figura 102: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $z = 0$

Função[44] Afim[45] x Equação do Primeiro Grau[46]

[44] Sejam D e I dois conjuntos quaisquer. Uma função f definida em D é uma regra ou lei de correspondência que associa a cada elemento do conjunto D um único elemento do conjunto I.

[45] Chama-se função Afim a função $f : R \to R$ quando existem dois números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in R$, sendo que $a \in R^*$ e $b \in R$.

[46] Equação do primeiro grau é dada por $ax + b = 0$, onde $a \neq 0$.

Essa tarefa será uma comparação da representação gráfica da raiz da função afim e da equação do primeiro grau.

Represente graficamente a solução da equação de primeiro grau e da função afim em um mesmo plano cartesiano e conclua sua resposta?

A representação gráfica de uma equação de primeiro grau será uma reta paralela ao eixo y (solução determinada), quando a solução for indeterminada ou impossível não será uma equação do primeiro grau.

A representação gráfica de função afim é uma reta com taxa de variação[47] (θ), $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ com $\theta \neq 90^\circ$.

Seja a equação do primeiro grau: $x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$ a representação gráfica estará plotada em vermelho. Seja a função afim: $f(x) = x - 2$ a representação gráfica estará plotada em azul, a figura 103 ilustra essa situação.

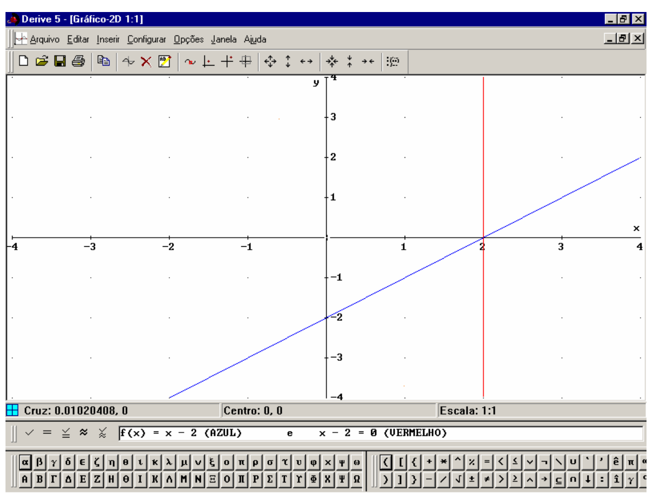


Figura 103: Interpretação gráfica de equação do primeiro grau e da função afim.

Observando a figura 103, notamos que as representações gráficas da equação do primeiro grau e da função de primeiro grau não são a mesma. Podemos

[47] Taxa de variação ou coeficiente angular – é o ângulo que a reta faz com o eixo x no sentido anti-horário.

concluir que as representações gráficas das equações do primeiro grau não são funções, pois para todo x existe uma infinidade de valores em y que satisfaçam a solução.

Função Quadrática x Equação do Segundo Grau

Essa tarefa será uma comparação da representação gráfica da raiz da função quadrática e da equação do segundo grau.

Represente graficamente da solução da equação do segundo grau e da função quadrática em um mesmo plano cartesiano e conclua sua resposta?

A representação gráfica de uma função quadrática é uma curva denominada por parábola.

As representações gráficas de uma equação de segundo grau podem ser:

- Duas retas paralelas ao eixo y (duas raízes reais e distintas).
- Uma reta paralela ao eixo y (duas raízes reais e iguais).
- Conjunto vazio (não existem raízes reais).

Seja a equação do segundo grau: $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$, que possui raízes $\mathbf{x = 3}$ ou $\mathbf{x = 2}$ cuja representação gráfica está plotada em vermelho. Seja a função quadrática $\mathbf{f(x) = x^2 - 5x + 6}$, têm como raízes $\mathbf{x = 3}$ e $\mathbf{x = 2}$ a representação gráfica esta pautado em azul, observe a figura 104.

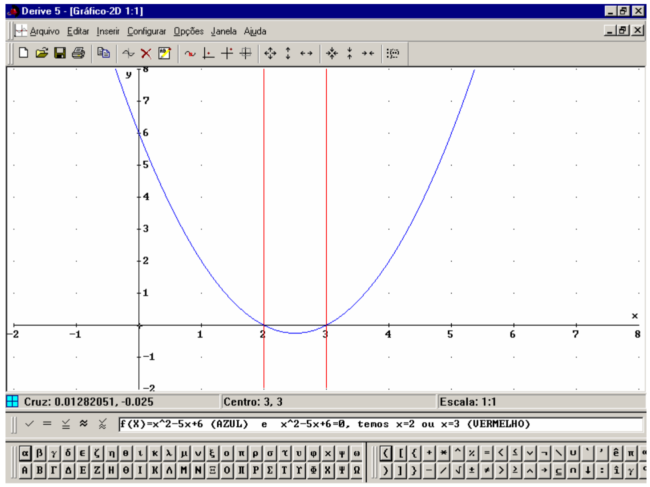


Figura 104: Interpretação gráfica de equação do segundo grau e de função quadrática.

Observando a figura 104, notamos que as representações gráficas da equação de segundo são duas retas enquanto a curva que representa todas funções quadráticas é uma parábola, logo concluímos que as representações gráficas não são as mesmas.

Progressão Aritmética[48] x Funções

Nessa tarefa deseja-se elaborar um estudo de funções e Progressão Aritmética.

Questões comumente encontradas são: uma progressão matemática (PA) é sempre uma função? Uma função é sempre uma progressão matemática (PA)?

Para responder a primeira pergunta tem-se que observar o domínio (D(f)) da função. Se a função estiver definida em $f: N \to R$ podemos afirmar que toda progressão aritmética é uma função, seja afim, linear ou constante.

---

[48] **Progressão Aritmética** (PA) é uma seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de números a_n, na qual é constante a diferença ente cada termo a_{n+1} e o seu antecedente a_n. Essa diferença constante é chamada de razão e será representada por r.

Mas nem toda função é uma progressão aritmética (PA), um contra exemplo. Seria $f: N \rightarrow R$ com $f(x) = x^2$, os elementos de $f(x) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49)$ não é uma PA.

Seja o teorema: (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p $(p \geq 2)$, se e somente se a_n é um polinômio de grau p em n.

Logo pelo teorema acima é possível afirmar que a função $f(x)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Por exemplo, seja $f(x) = x^2$.

Os elementos de $f(x)$ não é uma progressão aritmética $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots)$, mas os elementos de $f(x) - f(x-1)$, para $x > 2$ é dada por $(3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots)$ é uma progressão aritmética. Pelo teorema acima podemos afirmar que $f(x)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem. Logo, a lei de formação é dada por uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, conforme mostra a tabela 1.

Progressão Aritmética								
$f(x) = x^2$								
x	1	2	3	4	5	6	7	
f(x)	1	4	9	16	25	36	49	1ª Ordem
f(x) - f(x-1)		3	5	7	9	11	13	2ª Ordem

Tabela 1: A função $\mathbf{f(x) = x^2}$ aplicadas aos pontos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=4 \\ 9a+3b+c=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=3 \\ 8a+2b=8 \end{cases} \Rightarrow 8a+6-6a=8 \;\Rightarrow\; a=1\text{, temos } b=0 \text{ e } c=0.$$

Ao efetuar o calculo dos valores de a, b e c em $f(x)=ax^2+bx+c$ obtemos $f(x)=1x^2+0x+0 \;\Rightarrow\; f(x)=x^2$, conforme queríamos demonstrar.

Por exemplo, seja $f(x)=3x^3-x^2$.

Os elementos de $f(x)$ não é progressão aritmética $(2, 20, 72, 176, 350, 612, 980, \ldots)$, os elementos de $(f(x)-f(x-1))$ para $x>2$, dado por $(18, 52, 104, 174, 262, 368, \ldots)$ não são uma progressão aritmética, mas os elementos de $(f'(x)-f'(x-1))$ para $x>3$, dado por $(34, 52, 70, 88, 106, \ldots)$, os elementos dessa seqüência forma uma progressão aritmética de razão 18. Podemos afirmar que $f(x)$ é uma progressão aritmética de terceira ordem, logo a lei de formação é determinada por uma função de terceiro grau $\left(f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\right)$, conforme mostra a tabela 2.

$f(x) = 3x^3 - x^2$								
x	1	2	3	4	5	6	7	
f(x)	2	20	72	176	350	612	980	1ª Ordem
f(x) - f(x-1)		18	52	104	174	262	368	2ª Ordem
f'(x) - f'(x-1)			34	52	70	88	106	3ª Ordem

Tabela 2: A função $f(x)=3x^3-x^2$ aplicadas aos pontos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 8a+4b+2c+d=20 \\ 27a+9b+3c+d=72 \\ 64a+16b+4c+d=176 \end{cases}$$ resolvendo o sistema encontramos $a=3$, $b=-1$, $c=0$ e $d=0$, logo a função é determinada por $f(x)=3x^3-1x^2+0x+0$, ou seja, $f(x)=3x^3-x^2$, conforme queríamos demonstrar.

Os pontos positivos na utilização do sistema computacional formativo *Derive* repousam basicamente em: o sistema proporciona uma grande facilidade em escrever os dados de entrada (equações, funções, etc), é possível em um mesmo plano cartesiano (espaço cartesiano) traçar vários gráficos (superfícies) simplificando o estudo de família de funções, no estudo de superfícies é sempre possível verificar o comportamento da função fazendo rotações em torno de seus eixos. O ponto negativo em utilizar esse sistema computacional é o preço, a aquisição desse sistema custa em torno de R$ 600, 00 para um usuário simples.

3.3.4.2 MAPLE

Localização: http://www.maplesoft.com/cybermath/sh_finding.html

Tipo: Comercial,

Versão: Maple V release 5 Versão 5.00 (figura 105).

Tamanho: 300Kb

Ajuda: O sistema conta com ajuda em inglês, mas soluciona as dúvidas possuindo no mínimo um exemplo de cada tópico, facilitando ao usuário inferir os passos a serem seguidos.

Descrição: Programa comercial, produzido por Waterloo Maple, Inc., fornece um ambiente matemático adequado à manipulação simbólica, cálculo numérico com precisão arbitrária, gráficos a duas ou três dimensões. Fornece ainda uma linguagem de programação bastante flexível. O Maple pode ser utilizado em várias áreas da matemática: álgebra, análise, combinatória e teoria dos grafos, equações diferenciais, geometria, teoria dos grupos, álgebra linear, teoria dos números, análise numérica, probabilidades e estatística ou cálculo vetorial. Comercializa-se, para além da versão normal, uma Maple V Student Edition que, para além de oferecer um preço mais acessível, inclui algumas limitações relativamente à versão completa. Última versão completa: Maple 9.5. O valor do sistema formativo adquirido no Estados Unidos para estudante é \$129.00, de uso acadêmico é \$995.00 e de uso comercial é \$1995.00[49].

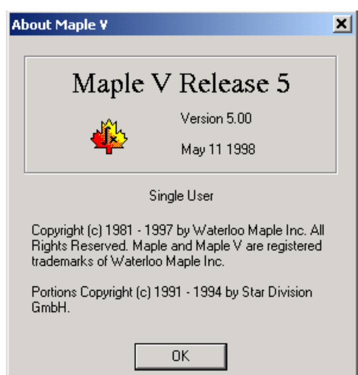


Figura 105: Versão do sistema formativo *Maple V.*

Pela taxonomia de Valente (1993) podemos dizer que trata-se de um sistema da forma de **programação**. Nesse sistema é possível modelar, analisar simulações, fazer experimentos e conjecturas. É um excelente programa para o nível superior, mesmo assim é necessário ter conhecimentos sólidos de programação. Para o ensino fundamental e o ensino médio o melhor recurso do *Maple* é para o estudo de

[49] Disponível em: http://webstore.maplesoft.com/Default.aspx. Acesso em 8 de dezembro de 2004.

função por ser possível fazer animação de gráficos 2D e 3D. Os outros recursos do *Maple* ficam apenas para verificação de resultados. Exemplo: Resolução de sistema linear, determinar raízes de polinômios, equações, etc.

Tela ao iniciar o sistema formativo *Maple_V*, conforme mostra a figura 106.

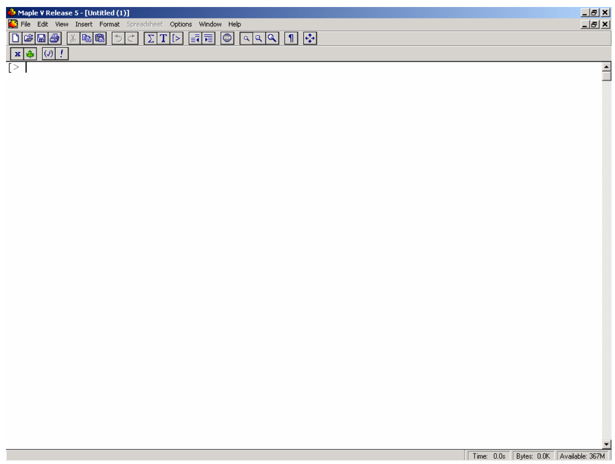


Figura 106: Tela inicial do *Maple V.*

Nessa tarefa, serão resolvidas as equações abaixo pelo método de completar quadrado, determinando assim suas raízes.

Para realizar esses exemplos é necessário ter que digitar na primeira linha do sistema o seguinte comando ***with(student)*** esse comando serve para várias especificações [*D, Diff*, *Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changevar, combine,* ***completesquare****, distance, equate, extrema, integrand, intercept, intparts, isolate, leftbox, leftsum, makeproc, maximize, middlebox, middlesum, midpoint, minimize, powsubs, rightbox, rightsum, showtangent, simpson, slope, summand, trapezoid, value*] dentre todas terá como destaque ***completesquare*** o comando para completar quadrados e para solucionar a equação o comando ***solve***, conforme ilustra a figura 107. Para inserir comentário nesse sistema deve-se utilizar o símbolo **#**, antes de qualquer comentário.

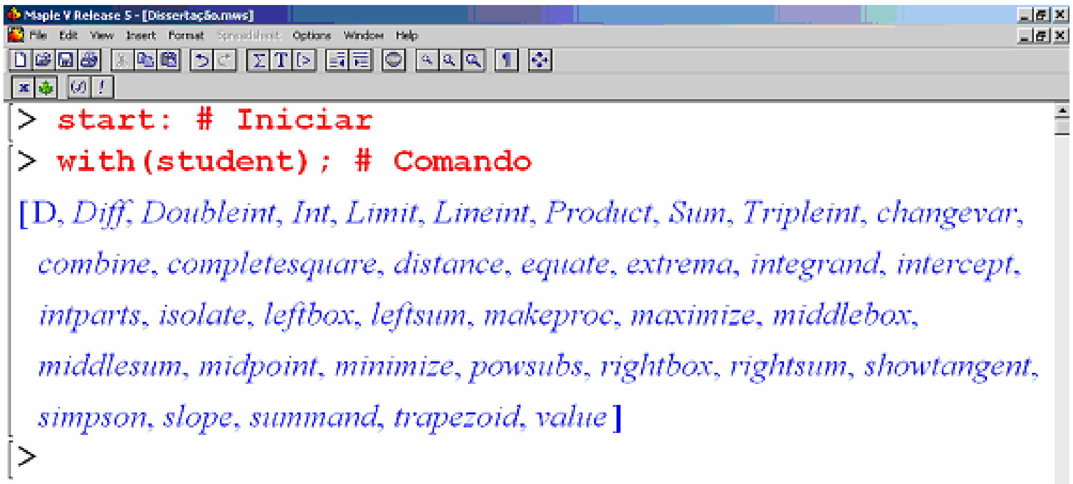


Figura 107: Comandos do *Maple V*, para completar quadrado.

Os exemplo enumerados abaixo são aplicações da resolução de equação de segundo grau utilizando o método de completar quadrados:

1- Seja $11x^2 + 13x - 17 = 21$ determine suas raízes.

$$11x^2 + 13x - 17 = 21 \tag{42}$$

Completando quadrado encontramos:

$$11\left(x + \frac{13}{22}\right)^2 - \frac{913}{44} = 21 \tag{43}$$

Simplificando a equação 43 encontramos:

$$\left(x + \frac{13}{22}\right)^2 = \frac{1841}{484} \tag{44}$$

Como os dois lados da igualdade da equação 44 tem o mesmo sinal, então a equação 41 possuirá duas raízes reais distintas, dadas por

$$x' = \frac{-13 + \sqrt{1841}}{22} \tag{45}$$

ou

$$x'' = \frac{-13 - \sqrt{1841}}{22} \tag{46}$$

No programa utilizando o comando *completesquare* na equação 42, encontramos como resultado a equação 43, e aplicando o comando *solve*, obtemos como solução as equações 45 e 46.

2- Seja $x^2 + 4x + 8 = 4$, determine suas raízes:

$$x^2 + 4x + 8 = 4 \tag{47}$$

Completando quadrado encontramos:

$$(x+2)^2 + 4 = 4 \tag{48}$$

Simplificando, temos:

$$(x+2)^2 = 0 \tag{49}$$

O resultado obtido na equação 49 é igual a zero, então a equação 47 possuirá duas raízes reais e iguais, dada por:

$$x' = x'' = -2 \tag{50}$$

No programa utilizando o comando *completesquare* na equação 47, encontramos como resultado a equação 48, e aplicando o comando *solve*, obtemos como solução à equação 50.

3- Seja $x^2 - x + 1 = 0$, determine suas raízes:

$$x^2 - x + 1 = 0 \tag{51}$$

Completando o quadrado encontramos:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \tag{52}$$

Simplificando a equação 52, temos:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \tag{53}$$

Como o resultado obtido na equação 53 tem sinais opostos, então a equação 51 não possuirá raízes reais.

As raízes complexas são:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{54}$$

e

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{55}$$

No programa utilizando o comando *completesquare* na equação 51, encontramos como resultado a equação 52, e aplicando o comando *solve*, obtemos como solução as equações 54 e 55.

4- Seja $\mathbf{-x^2 + 16x = 0}$, determine suas raízes:

$$-x^2 + 16x = 0 \tag{56}$$

Completando o quadrado encontramos

$$(x-8)^2 = 64 \tag{57}$$

Como os dois lados da igualdade da equação 57 têm o mesmo sinal, então a equação 56 possuirá duas raízes reais distintas, dadas por:

$$x' = 0 \tag{58}$$

ou

$$x'' = 16 \tag{59}$$

No programa utilizando o comando *completesquare* na equação 56, encontramos como resultado a equação 57, e aplicando o comando *solve*, obtemos como solução as equações 58 e 59.

As figuras 108 e 108a mostram todos esses dados.

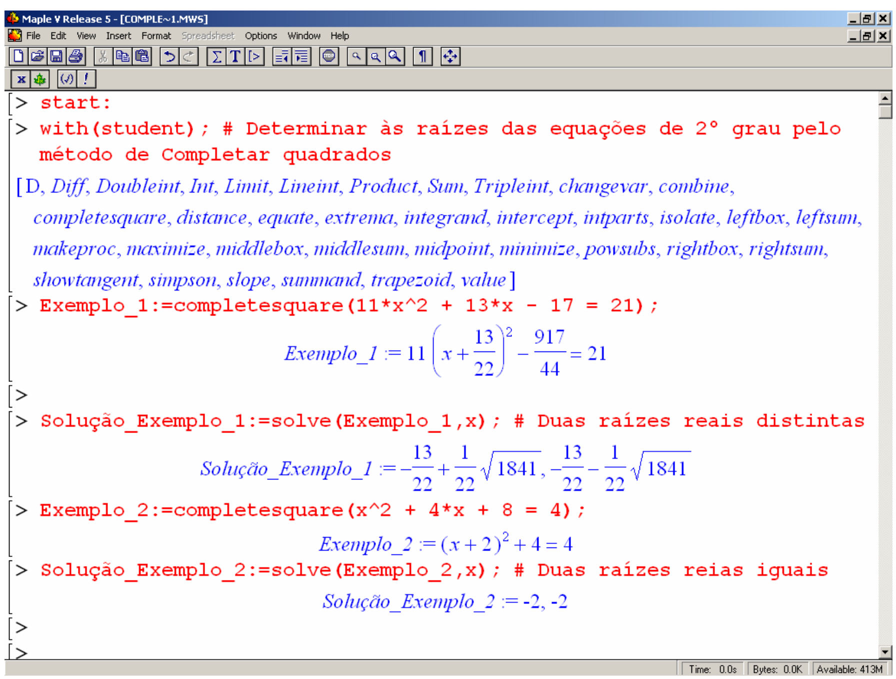


Figura 108: Exemplos de aplicação do método de completar quadrados.

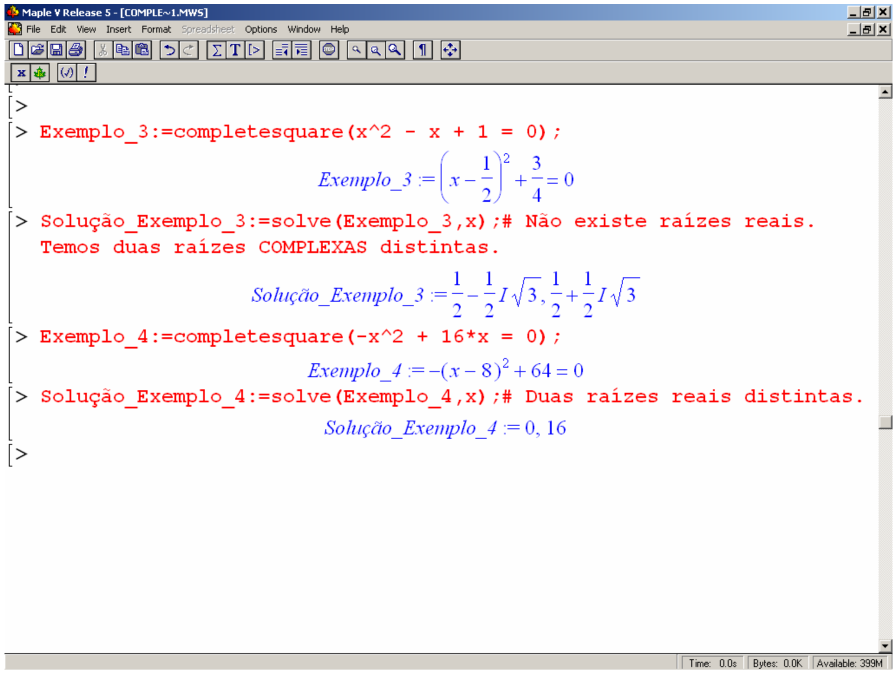


Figura 108 a: Exemplos de aplicação do método de completar quadrados (continuação).

Cônicas

Um exercício interessante é mostrar as cônicas e as cônicas degeneradas na interseção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ com o plano $ax + by + cz + d = 0$, na janela $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$ e $-5 \le z \le 5$.

Para traçar um gráfico em 3 dimensões em coordenadas polares (*cylinderplot*) é necessário utilizar o comando *with(plots)*; esse comando serve para utilizar os seguintes comandos: [*animate, animate3d, animatecurve, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, cylinderplot, densityplot, display, display3d, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, odeplot, pareto, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported,* *polyhedraplot, replot, rootlocus, semilogplot, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, sphereplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*], conforme ilustra a figura 109.

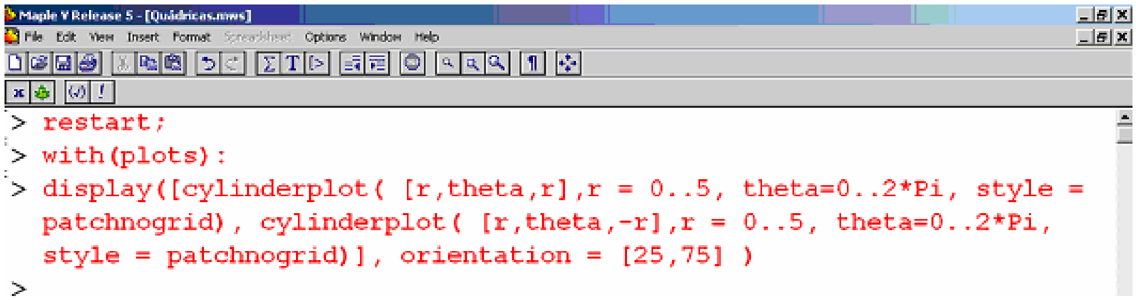


Figura 109: Comando do *Maple V*. Superfície em coordenadas cilíndricas.

Para traçar a superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$, tem-se que digitar o seguinte comando em coordenadas polares. *display([cylinderplot([r,theta,r],r = 0..5, theta=0..2*Pi, style = patchnogrid), cylinderplot([r,theta,-r],r = 0..5, theta=0..2*Pi, style = patchnogrid)], orientation = [25,75]);* conforme ilustra a figura 110.

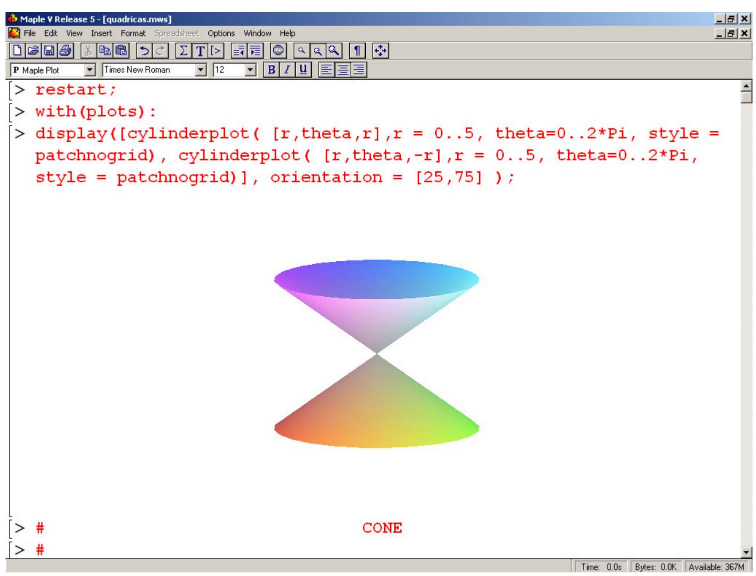


Figura 110: Superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$.

Conforme ilustra a figura 110, superfície cônica em coordenadas cilíndricas.

Quando o plano π for perpendicular ao eixo da superfície, isto é, paralelo ao plano **XY**, não passando pela origem, a seção cônica será uma <u>circunferência</u>.

Por exemplo: $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 3 \end{cases}$, com $k \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$, conforme ilustra a figura 111.

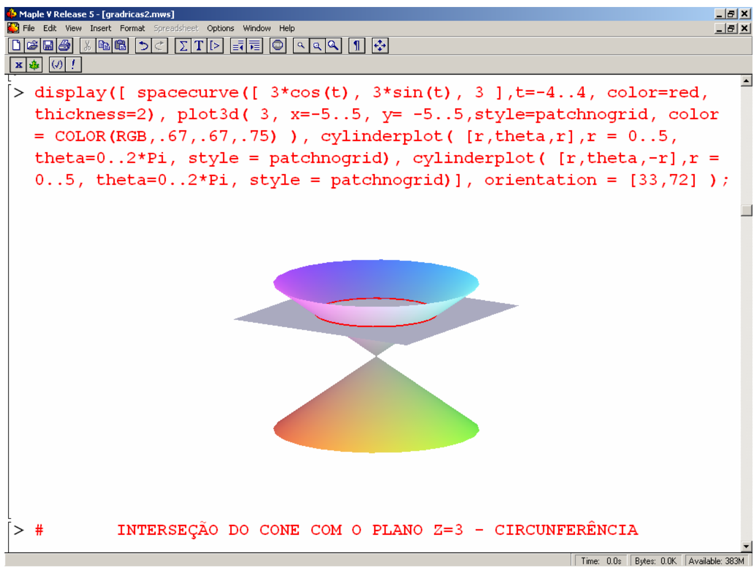


Figura 111: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $z = 3$.

Conforme ilustra a figura 111, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica, círculo.

Quando o plano π for oblíquo ao eixo da superfície cortando apenas uma das folhas da superfície, a seção cônica será uma <u>elipse</u>.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 2 - \dfrac{1}{2}y \end{cases}$, então $\dfrac{x^2}{\frac{16}{3}} + \dfrac{\left(y + \frac{4}{3}\right)^2}{\frac{64}{9}} = 1$, como podemos observar a figura 112.

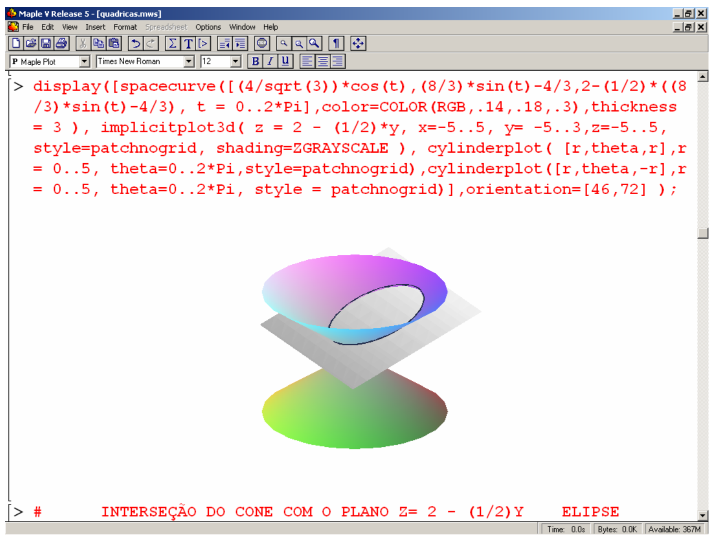


Figura 112: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $-\dfrac{1}{2}y - z + 2 = 0$.

Conforme ilustra a figura 112, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica, elipse.

Quando o plano π for paralelo a uma geratriz da superfície, a seção cônica será uma <u>parábola</u>.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \dfrac{1}{4}x^2 + 1$, como podemos observar a figura 113.

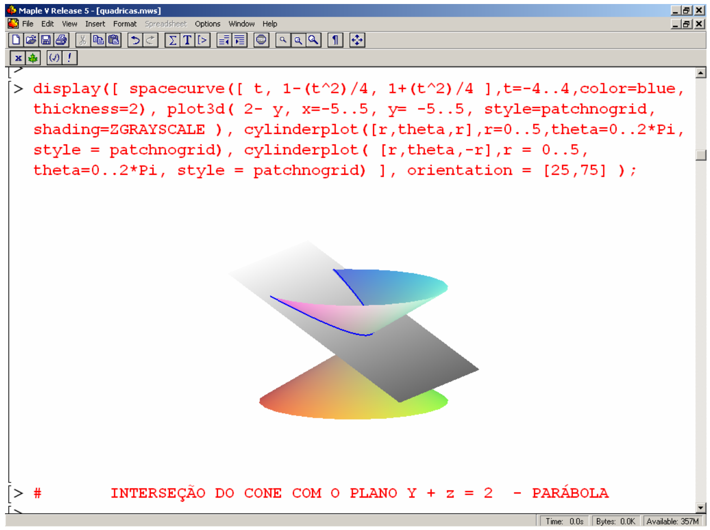


Figura 113: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $y + z - 2 = 0$.

Conforme ilustra a figura 113, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica, parábola.

Quando o plano π for paralelo ao eixo da superfície, a seção cônica será uma <u>hipérbole</u>.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow z^2 - x^2 = 4$, como ilustra figura 114.

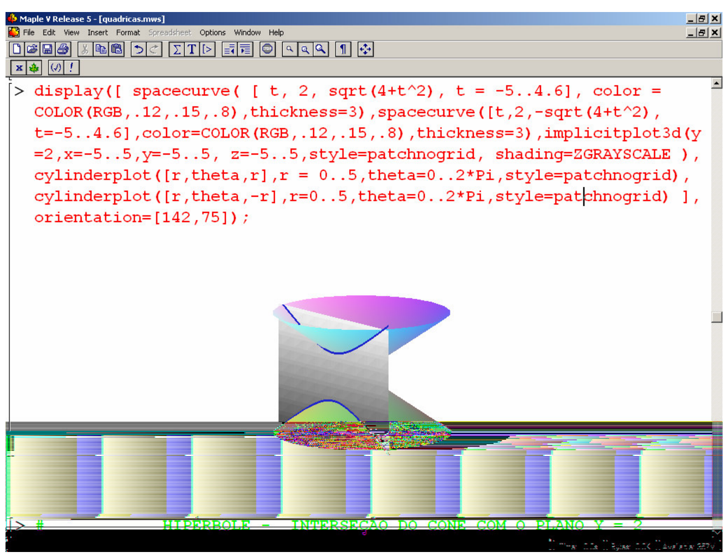


Figura 114: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $y - 2 = 0$.

Conforme ilustra a figura 114, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica, hipérbole.

Quando o plano π for perpendicular ao eixo da superfície,paralelo ao plano **XY**, passando pela origem, a seção cônica será: <u>um ponto</u>.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 0$, conforme ilustra a figura 115.

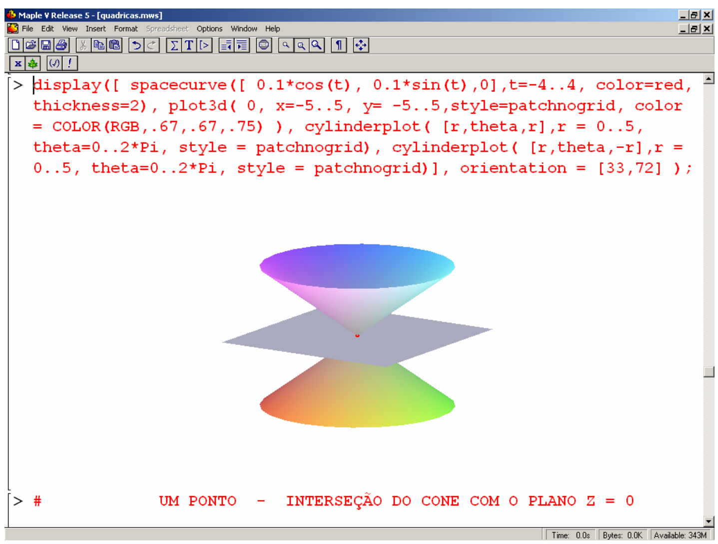


Figura 115: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $z = 0$.

Conforme ilustra a figura 115, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica degenerada, um ponto.

Quando o plano π tangencia a superfície cônica, a cônica degenerada será uma <u>uma reta</u>.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \quad x = 0$, conforme mostra a figura 116.

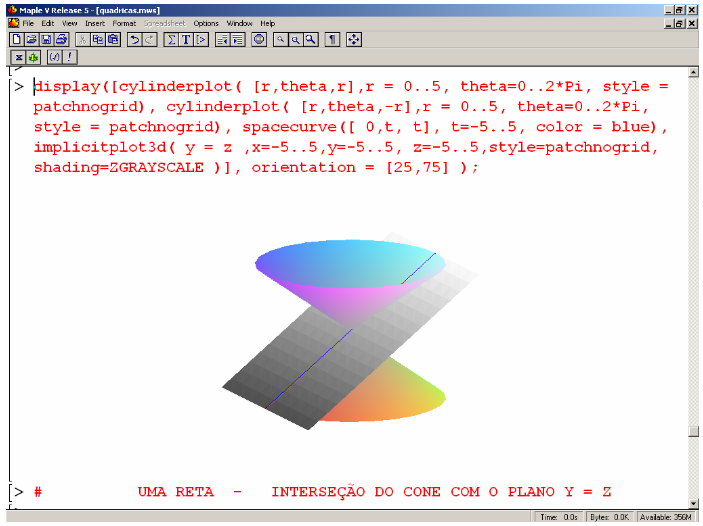


Figura 116: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $y - z = 0$.

Conforme ilustra a figura 116, a interseção da superfície cônica com um plano gera uma cônica degenerada, uma reta.

Quando o plano π formar com o eixo um ângulo menor do que este faz com a geratriz, a cônica degenerada será <u>duas retas concorrentes</u>.

Por exemplo, $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{x}$, conforme ilustra a figura 117.

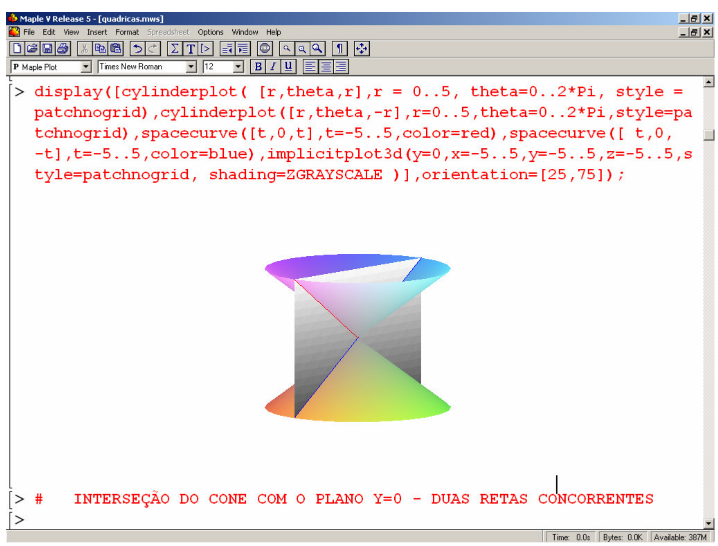


Figura 117: Interseção da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ como plano $y = 0$.

Conforme ilustra a figura 117, a interseção da superfície com cônica um plano encontra-se uma cônica degenerada, duas retas concorrentes.

Alguns pontos positivos na utilização do sistema computacional formativo *Maple* encontram-se na utilização de: animações de gráficos e superfícies, em traçar vários gráficos (superfícies) em um mesmo plano cartesiano (espaço cartesiano) e quanto ao estudo de superfícies é sempre possível fazer rotações em torno dos seus eixos. No entanto seus pontos negativos na utilização desse sistema são: o preço, o custo aproximando R$ 3.100,00 para uso acadêmico; será necessário ter bastante conhecimento prévio sobre os comandos e também possuir conhecimentos sólidos de programação.

3.3.4.3 WINPLOT

Localização: http://math.exeter.edu/rparris/

Tipo: *Freeware*.

Versão: 10 de agosto de 2004 (figura 118).

Tamanho: 600 Kb

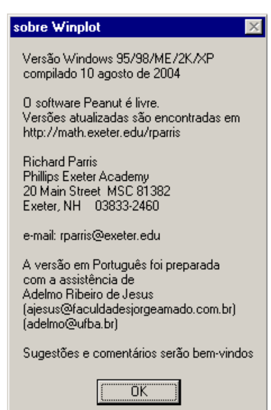


Figura 118: Versão do sistema formativo *Winplot*.

Ajuda: O sistema oferece ajuda em português, e para cada janela existe um tópico de ajuda. Conforme mostra a figura 119 e 119a.

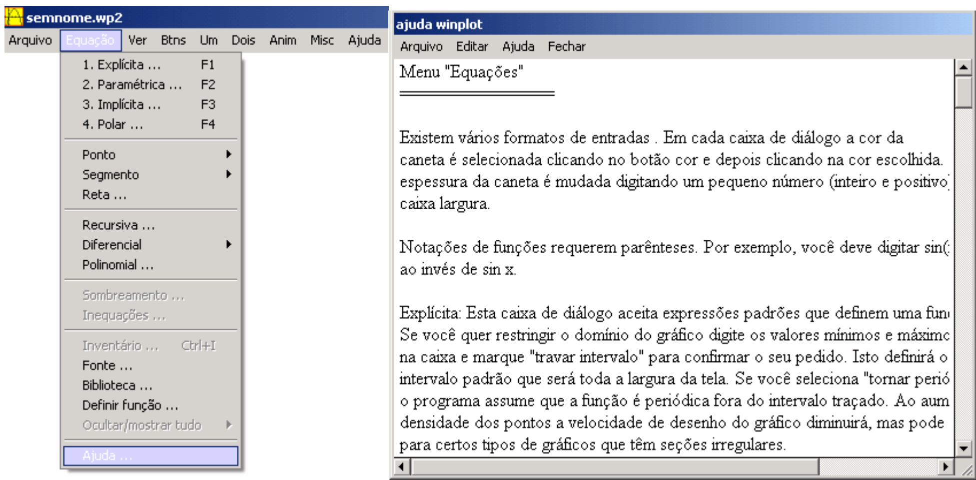


Figura 119: Barra de ferramentas – *Menu* ajuda.

Descrição: Foi desenvolvido pelo Professor Richard Parris "Rick", da Philips Exeter Academy, em 1985. Escrito na linguagem de programação C. Esse software chamava-se PLOT e rodava na base operacional DOS. Com o lançamento do Windows 3.1, o sistema foi atualizado para ser utilizado nessa nova base operacional e denominado de "Winplot". A versão para o Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem de programação C++. É utilizável nos sistemas Windows 95/98/ME/2K/XP. O programa está sempre sendo atualizado. A última versão é de 15 de agosto de 2004 (figura 118). Existem versões em Holandês, Francês, Alemão, Húngaro, Português, Eslovaco e Espanhol. O sistema desenha gráfico de funções no $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$. Ele possui o recurso de plotar várias funções em um mesmo plano ou espaço cartesiano, plotar famílias de funções, fazer animações gráficas. As funções podem ser escritas nas formas Explicitas, Paramétricas, Implícitas e Polares.

Pela taxonomia de Valente (1993) podemos dizer que trata-se de um sistema da forma de **aplicativo**. Nesse sistema pode-se analisar simulações, fazer experimentos e conjecturas. É de fácil utilização no estudo de funções no $\mathbf{R}^2$ e no $\mathbf{R}^3$, pois é possível desenhar vários gráficos no mesmo plano ou espaço cartesiano, mostrar interseções de gráficos, plotar segmentos, planos, etc.., o pode-se determinar a equação de uma função analisando-a mentalmente.

Ao iniciar o sistema *winplot*, tem-se quatro opções de escolha:

- **2D** – Gráfico em duas dimensões;
- **3D** – Gráfico em três dimensões;
- **Adivinhar** – Dado o gráfico da função o usuário tem que determinar sua equação;
- **Mapeador** – Dada à função o programa traça separadamente o gráfico do domínio e do contradomínio.
- **Abri última** – Se esta opção estiver marcada, assim que o *Winplot* for aberto irá abrir o último arquivo utilizado.
- **Usar Padrão** – Usar as configurações padronizadas do *Winplot*.

A figura 120 ilustra a situação acima.

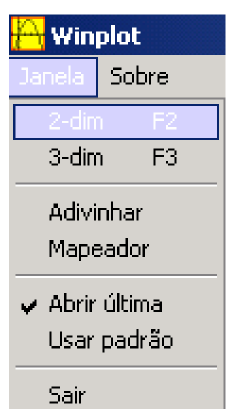


Figura 120: Barra de ferramentas.

Nesse sistema formativo a pesquisa se baseará o estudo apenas nas possibilidades de uso com gráfico de funções em duas dimensões, ou seja, 2-dim. Deixando a priori o estudo de funções de 3 dimensões.

Gráfico em 2 dimensão

No sistema é necessário escolher no menu, **2-dim** para trabalhar com funções de até duas variáveis.

Para plotar grafico no plano cartesiano, primeiro deve escolher o tipo de equação, conforme mostra a figura 121.

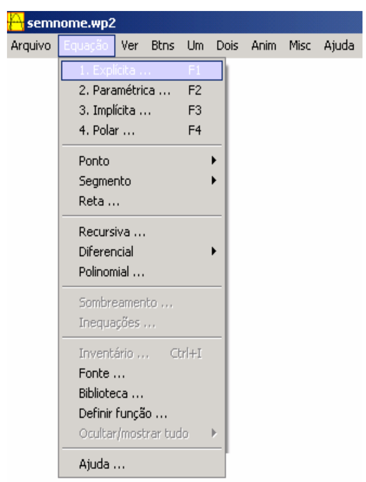


Figura 121: Barra de ferramentas 2 dim.

São os seguintes comandos existentes na barra de ferramenta acima.

Função **explicita**. Por exemplo, $f(x)=x$, as ilustrações das figuras 122 e 123 representam respectivamente a barra de ferramentas da função da forma explicita e a representação grafica do exemplo $f(x)=x$.

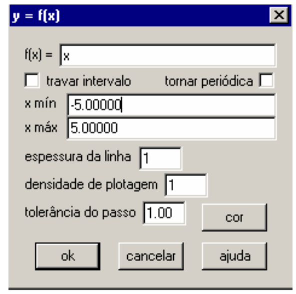


Figura 122: Barra de ferramentas da função escrita da forma explicita.

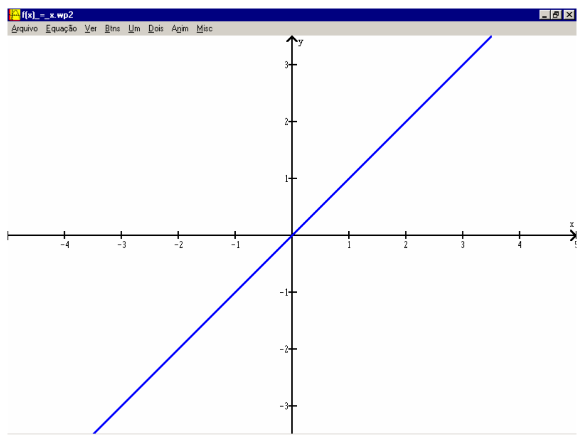


Figura 123: Função $f(x) = x$ - Forma explicita.

Função **paramétrica**. Por exemplo, $(f(t), g(t)) = (\cos(t), \sin(2t))$ com $0 \leq t \leq 2\pi$, as ilustrações das figuras 124 e 125 representam respectivamente a barra de ferramentas da função da forma paramétrica e a representação grafica do exemplo $(f(t), g(t)) = (\cos(t), \sin(2t))$.

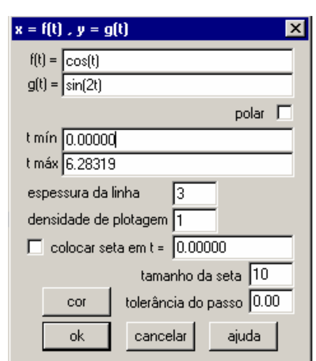


Figura 124: Barra de ferramentas da função escrita da forma paramétrica.

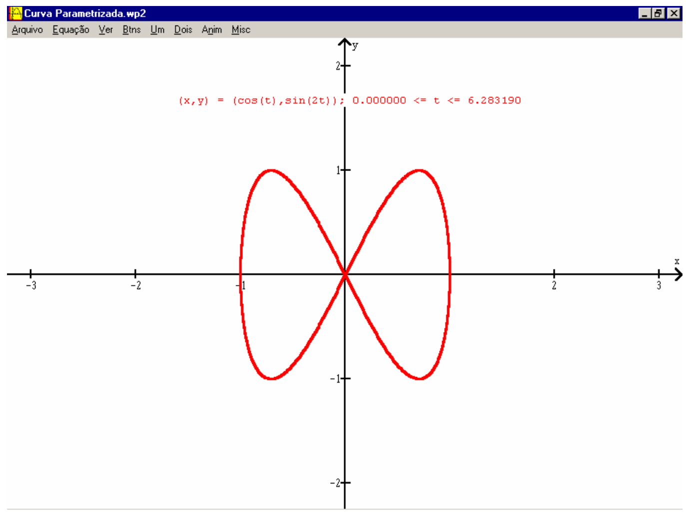


Figura 125: Função $(f(t), g(t)) = (\cos(t), \sin(2t))$, com $0 \le t \le 2\pi$ - Forma parametrica.

Função **implícita**. Por exemplo, $xx + yy = 4$, reescrevendo temos $x^2 + y^2 = 4$, as ilustrações das figuras 126 e 127 representam respectivamente a barra de ferramentas da função da forma implicita e a representação grafica do exemplo $xx + yy = 4$.

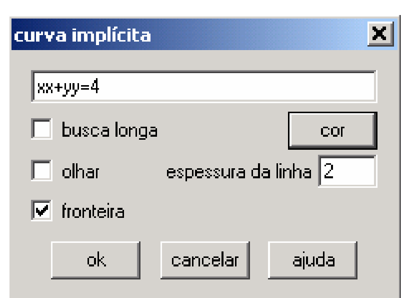


Figura 126: Barra de ferramentas da função escrita da forma implícita.

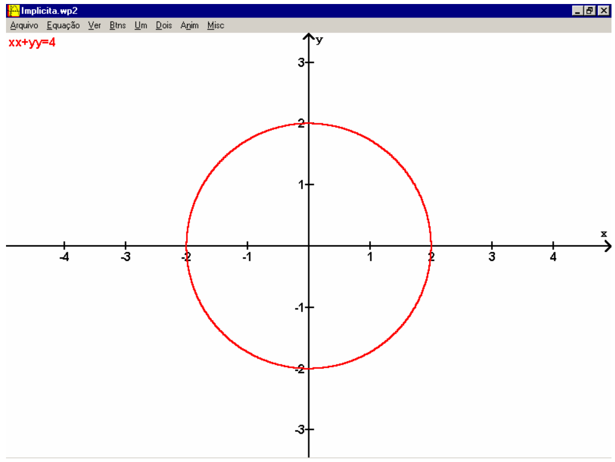


Figura 127: Função $xx + yy = 4$ - Forma implicita.

Função **polar**. Por exemplo, $f(t) = 1 - \cos(t)$, as ilustrações das figuras 128 e 129 representam respectivamente a barra de ferramentas da função da forma implicita e a representação grafica do exemplo $f(t) = 1 - \cos(t)$.

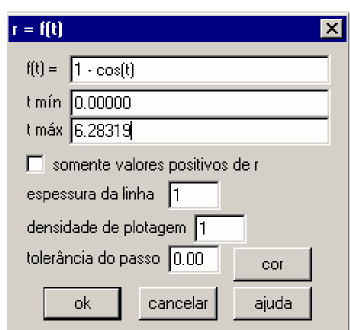


Figura 128: Barra de ferramentas da função escrita da forma polar.

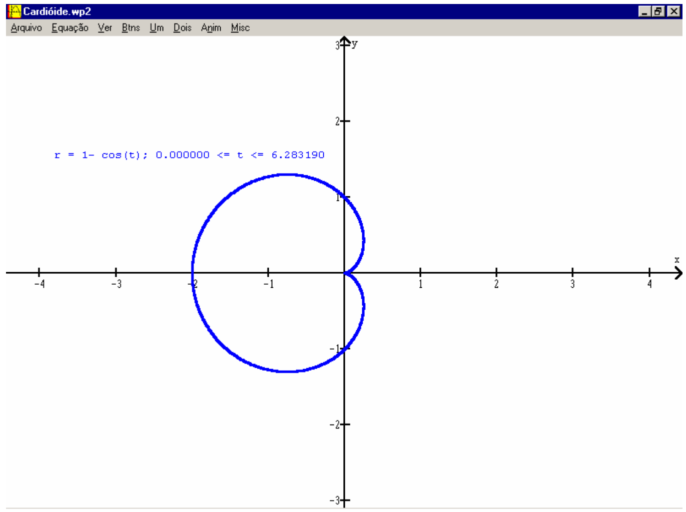


Figura 129: Função $f(t) = 1 - \cos(t)$ - Forma polar.

Representação de um **ponto** no plano cartesiano. Por exemplo, $P = (2,3)$, como ilustra a figura 130.

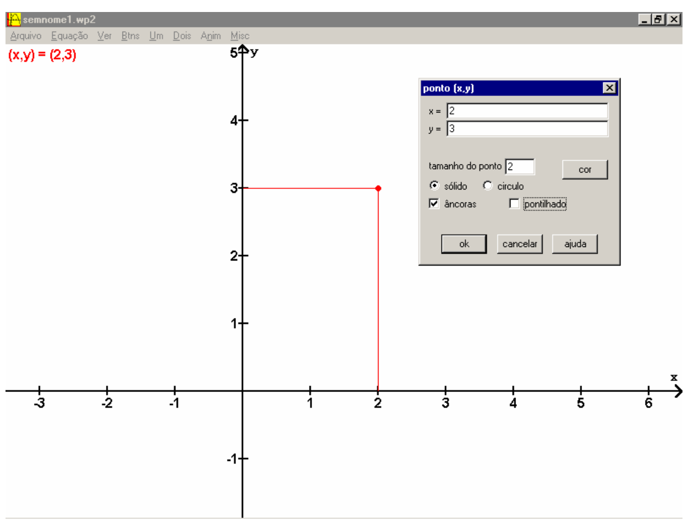


Figura 130: Ponto $P = (2,3)$ no plano cartesiano.

Para representar graficamente um **segmento** no plano cartesiano é necessário que o usuário informe suas extremidades, ou seja, dois pontos. Por exemplo, $P_1 = (1,-1)$ e $P_2 = (-2,3)$, como ilustra a figura 131.

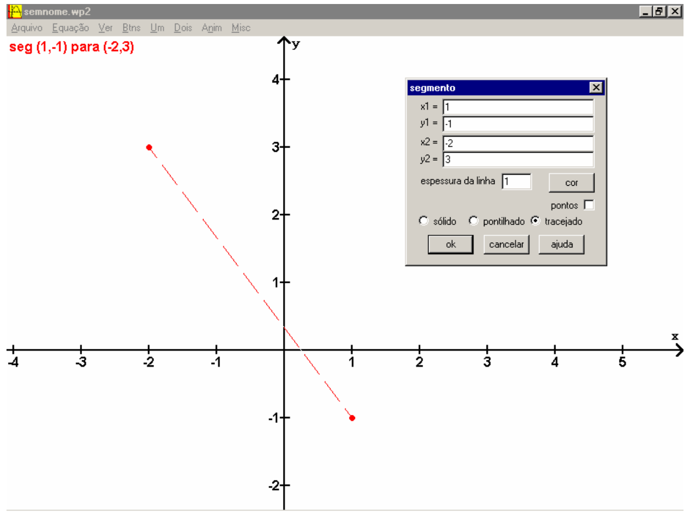


Figura 131: Representação do segmento com extremidades nos ponto $P_1 = (1,-1)$ e $P_2 = (-2,3)$.

A representação de uma **reta** no plano cartesiano é descrito segundo a equação $ax + by = c$. Como ilustra a figura 132, para que o sistema trace o gráfico da reta desejada devemos colocar valores para os coeficientes a, b e c, estes serão números reais e **a** e **b** não podem ser simultaneamente **0** (zero).

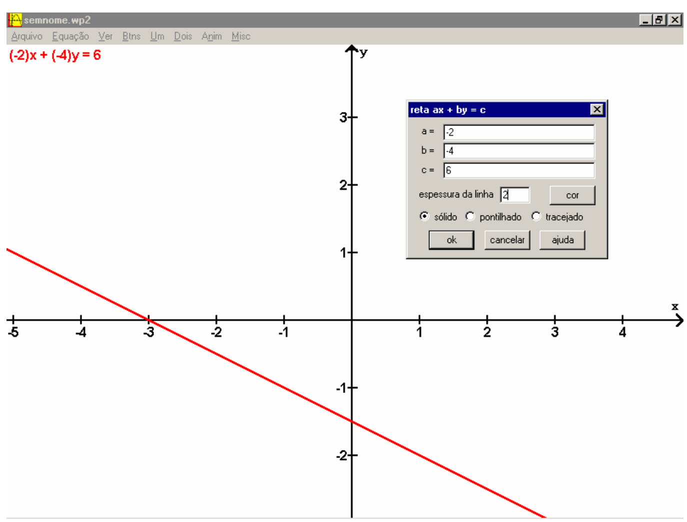


Figura 132: Representação gráfica da reta $ax + by = c$, com $a = -2$, $b = -4$ e $c = 6$.

Quando os valores de **a** e **b** são simultaneamente zero, temos duas possibilidades ou a equação é indeterminada quando $c = 0$ ou impossível quando $c \neq 0$, nesses dois casos o software não plota gráfico no plano cartesiano, como ilustra a figura 133.

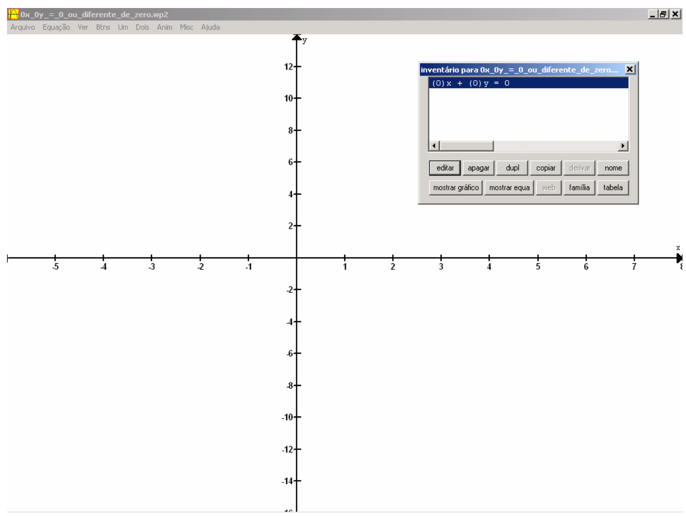


Figura 133: Reta $ax + by = c$, com $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$ ou $a = 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$.

O foco aqui aplicado é o de trabalhar com funções que podem ser escritas de forma explícita. No *Winplot* essa possibilidade está disponível de maneira clara. Ao clicar na barra de ferramentas, no menu Explita**,** ou F1, abre uma nova janela onde deve ser digitada a função desejada, como ilustra a figura 134.

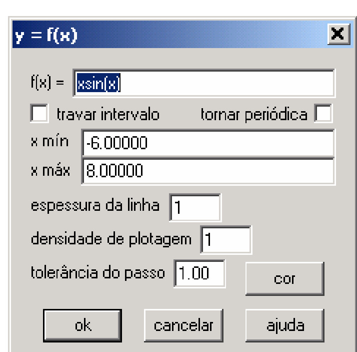


Figura 134: Barra de ferramentas função explicita.

Ao abrir o menu explicita (figura 134), aparecerá sempre a mesma janela com mesma função e com o mesmo intervalo, nessa janela o usuário poderá determinar como será gerado o gráfico, como ilustra a figura 135.

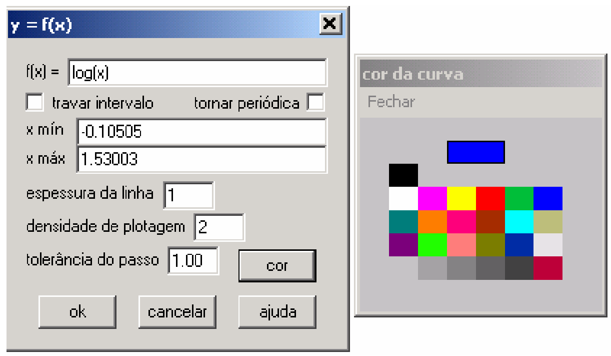


Figura 135: Barra de ferramentas função explicita.

Barra de ferramentas da função explicita.

$f(x) =$ Espaço onde será digitada a função. Por exemplo, $f(x) = \log(x)$;

T*ravar intervalo* – Restringir o domínio, ou seja, plotar o gráfico no intervalo desejado. Por exemplo $-0{,}10505 \leq x \leq 1{,}53003$;

Tornar periódica – O programa assume que a função é periódica fora do intervalo traçado;

x mim e **x max** – O intervalo onde o domínio será restringido;

Espessura da linha – "Engrossar" a curva, a espessura da linha está variando entre **1** e **30**, mas são aceitos somente números naturais;

Densidade – É útil para gráficos que têm seções irregulares, ao aumentar a densidade dos pontos, a velocidade de desenho do gráfico diminuirá.

Tolerância – O valor de algumas funções (*int, floor, ceil*, por exemplo) mudam bruscamente de um nível para outro. Para impedir que o programa ligue os pontos que deveriam estar separados, as operações gráficas são suspensas quando o passo definido está bem próximo a um ponto de descontinuidade.

Cor – Seleciona uma cor, observe figura 135.

Apertando OK o programa abrirá uma nova janela, observe a figura 136.

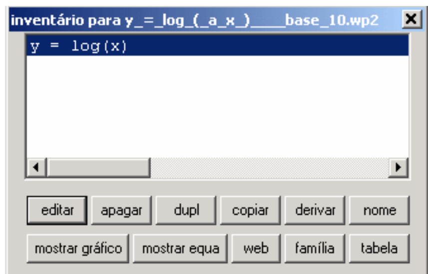


Figura 136: Barra de ferramentas função explicita – Inventário.

Comando relacionado à barra de ferramentas do inventário.

Editar – Permite fazer mudanças;

Apagar – Apaga a função selecionada;

Dupl – Este comando duplica um exemplo e abre uma caixa de diálogo;

Copiar – Descrição do exemplo é colocado na prancheta;

Derivar – Calcula a derivada;

Nome – Nomeia o gráfico;

Mostrar Gráfico – Mostrar Gráfico;

Mostrar Equação – Mostrar a equação no plano cartesiano;

Web – Traça um diagrama em rede (web diagram);

Família – Traçar família de funções.

Essa ferramenta é um grande facilitador no ensino/estudo de funções, pois é prática e rápida em plotar as famílias da função e pelo estudo a ser realizado após plotar essa família. Em aulas convencionais que sejam usados apenas o quadro e o giz, o professor perderá muito tempo no desenho dos respectivos gráficos. A figura 137 mostra uma aplicação da seguinte família da função $f(x) = \log(a.x)$, com $1 \leq a \leq 10$, observe o gráfico na figura 138.

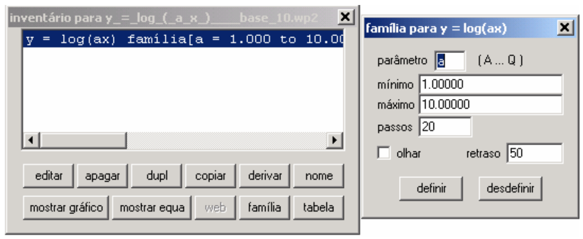


Figura 137: Barra de ferramentas função explicita – Inventário – Família de Função.

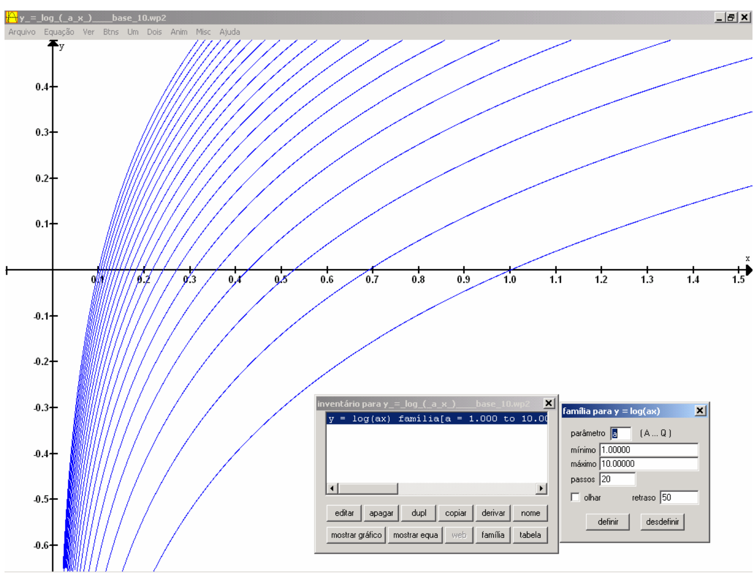


Figura 138: Família de função dada por: $f(x) = \log(a.x)$, com $1 \leq a \leq 10$.

Tabela – Abre uma janela de texto que mostra valores da função selecionada, os valores da tabela abaixo é dado pela função $f(x) = \log(x)$, com $-5 \leq x \leq 5$, observe a figura 139.

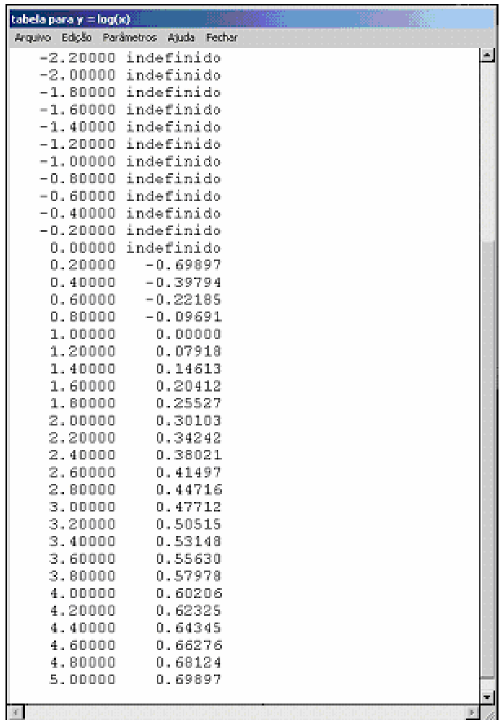


tabela para y = log(x)

Arquivo Edição Parâmetros Ajuda Fechar

-2.20000	indefinido
-2.00000	indefinido
-1.80000	indefinido
-1.60000	indefinido
-1.40000	indefinido
-1.20000	indefinido
-1.00000	indefinido
-0.80000	indefinido
-0.60000	indefinido
-0.40000	indefinido
-0.20000	indefinido
0.00000	indefinido
0.20000	-0.69897
0.40000	-0.39794
0.60000	-0.22185
0.80000	-0.09691
1.00000	0.00000
1.20000	0.07918
1.40000	0.14613
1.60000	0.20412
1.80000	0.25527
2.00000	0.30103
2.20000	0.34242
2.40000	0.38021
2.60000	0.41497
2.80000	0.44716
3.00000	0.47712
3.20000	0.50515
3.40000	0.53148
3.60000	0.55630
3.80000	0.57978
4.00000	0.60206
4.20000	0.62325
4.40000	0.64345
4.60000	0.66276
4.80000	0.68124
5.00000	0.69897

Figura 139: Resultados da função $f(x) = \log(x)$, com $-5 \le x \le 5$.

Por exemplo:

Traçar o gráfico de $f(x) = -x$, a figura 140 ilustra este gráfico.

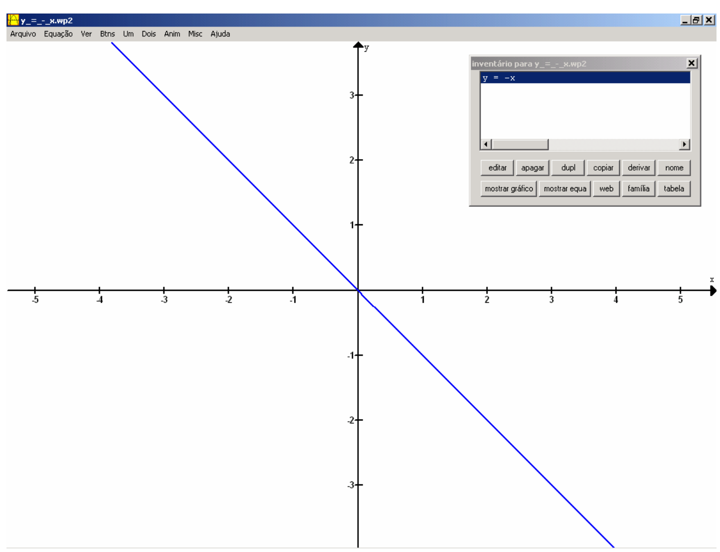


Figura 140: Representação gráfica da função $f(x) = -x$.

Estudo das Desigualdades

Nessa tarefa determinará a região que satisfaça as desigualdades abaixo. Será necessário utilizar o *Menu – Equação – Sombrear*, como ilustra a figura 141:

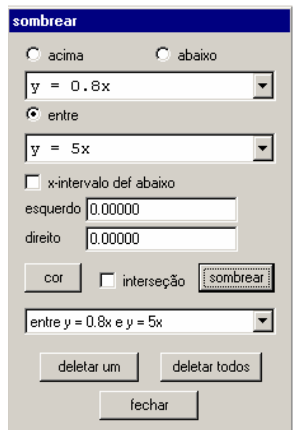


Figura 141: Barra de ferramentas para sombrear regiões.

No gráfico 142 temos um exemplo, onde desejamos representar graficamente a região compreendida entre as funções $f(x)=0,8x$ plotado em azul e $f(x)=5x$ plotado em vermelho. A região compreendida entre as funções está plotado em verde, como ilustra a figura 142.

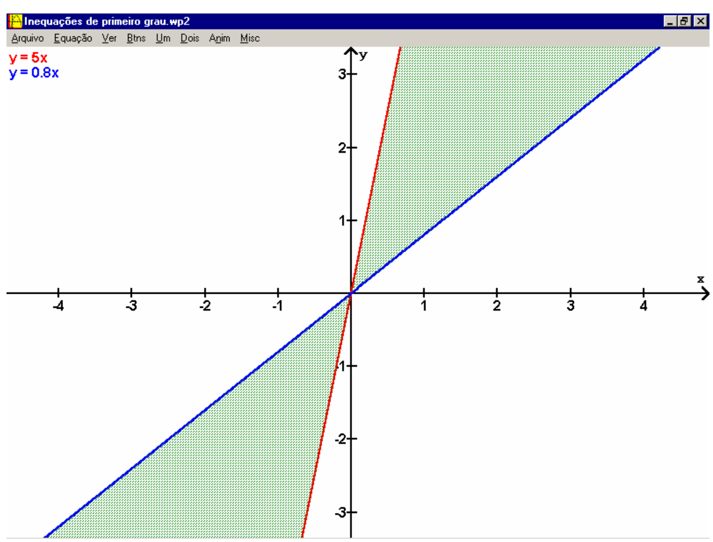


Figura 142: Região delimitada pelas funções $f(x)=0,8x$ e $f(x)=5x$.

Outra possibilidade de exploração de problemas usando esse recurso, é representar graficamente a região que satisfaça a seguinte desigualdade: $\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -3x + 4 < 0 \end{cases}$. A região que satisfaz as duas desigualdades é o verde mais escuro, como mostra a figura 143.

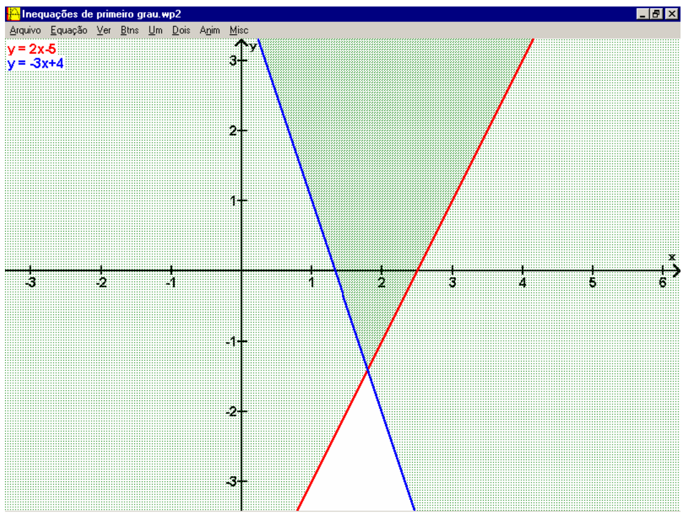


Figura 143: A desigualdade $\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -3x + 4 < 0 \end{cases}$.

Uma outra possibilidade de exploração de problemas usando esse recurso é representar graficamente a região que satisfaça a seguinte desigualdade: $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ -2x + 4 > 0 \\ -\frac{x}{2} - \frac{6}{5} < 0 \end{cases}$. A região que satisfaz as três desigualdades é o verde mais escuro, nesse caso a região que satisfaz é um triângulo de vértices $(3{,}4667; -2{,}933)$; $(-2{,}8; 0{,}2)$ e $(0{,}33; 3{,}33)$ como ilustra a figura 144.

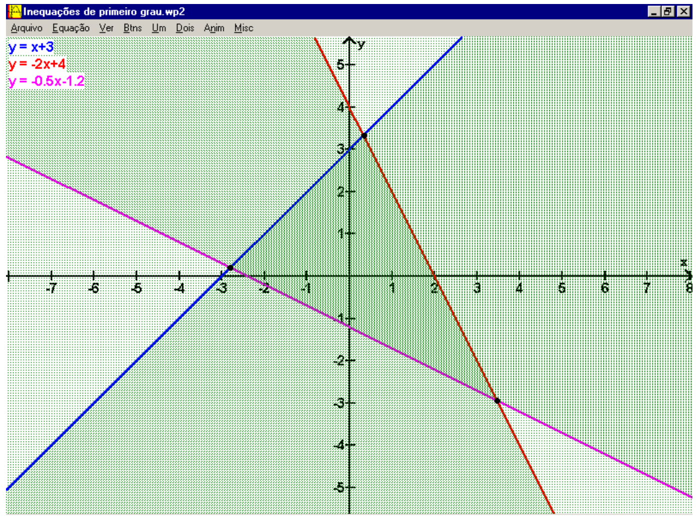


Figura 144: A desigualdade $\begin{cases} x+3>0 \\ -2x+4>0 \\ -\dfrac{x}{2}-\dfrac{6}{5}<0 \end{cases}$.

Outra possibilidade de exploração de problemas usando esse recurso, é representar graficamente a região que satisfaça a seguinte desigualdade: $\dfrac{x^2-1}{-x^2-3x}>0$. A região que satisfaz a desigualdade é o verde mais escuro que está compreendido no intervalo: $]-3,-1[\cup]0,1[$, como mostra a figura 145. Para traçar as regiões é necessário um artifício, plotar o gráfico da função $f(x)=0$. Como a desigualdade é maior que zero traçaremos a região delimitada entre as funções x^2-1, $f(x)=0$ e $-x^2-3x$, $f(x)=0$. A resolução desse exercício só foi possível porque a desigualdade é maior que zero.

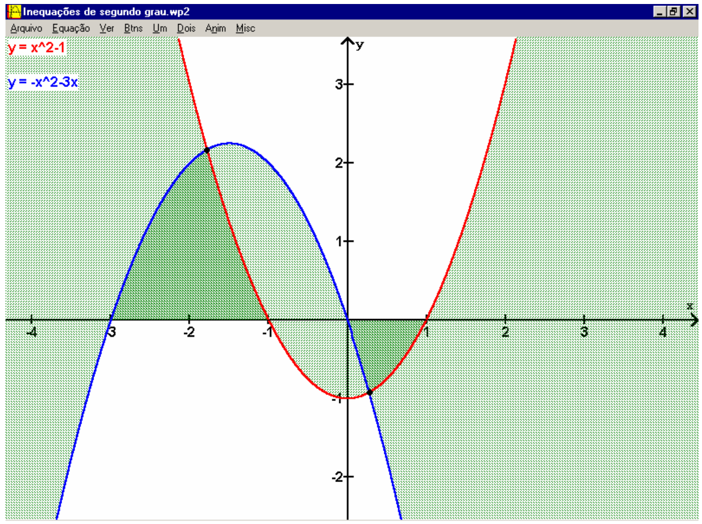


Figura 145: A desigualdade $\dfrac{x^2-1}{-x^2-3x} > 0$.

Outra possibilidade de exploração de problemas usando esse recurso, é representar graficamente a região que satisfaça a seguinte desigualdade: $\left(x^2 - 2{,}25\right)\left(-x+1\right) > 0$. A região que satisfaz a desigualdade é o verde mais escuro que está compreendido no intervalo: $\left]-\infty; -1{,}5\right[$, como mostra a gráfico 146. Mas a solução dada pelo software não esta correta, como podemos observar o gráfico 146, faltou pintar a região que está compreendida no intervalo $\left]1; 1{,}5\right[$, como mostra a tabela 3 abaixo.

Na exploração desse recurso no estudo de funções quadráticas é necessário que se construa a tabela (a tabela 3 ilustra esses dados) de sinais para averiguação da região pintada pelo sistema. Se a região pintada não estiver de acordo com a tabela, então será necessário plotar manualmente cada região, como ilustra a tabela 3 e a figura 146.

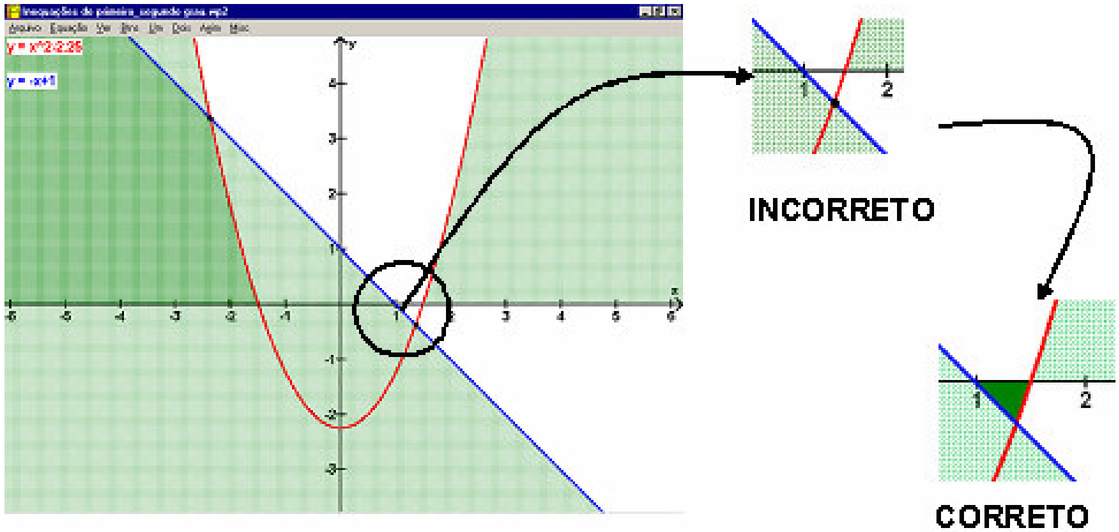


Figura 146: A desigualdade $(x^2-2{,}25)(-x+1)>0$.

	$x<-1{,}5$	$-1{,}5<x<1$	$1<x<1{,}5$	$x>1{,}5$
$x^2-2{,}25$	+	−	−	+
$-x+1$	+	+	−	−
$(-x+1)(x^2-2{,}25)$	+	−	+	−

Tabela 3: Quadro de sinais da desigualdade $(x^2-2{,}25)(-x+1)>0$.

Representação gráfica de funções

Nessa tarefa busca-se a plotar e analisar o gráfico das funções definidas por várias sentenças. Será necessário utilizar o Menu – Equação – Desigualdade explícitas, observe a figura 147.

Para o software entender que será traçado várias sentenças é necessário utilizar o comando joinx(lei1|a, lei2|b,..., lein), como mostra a figura 148.

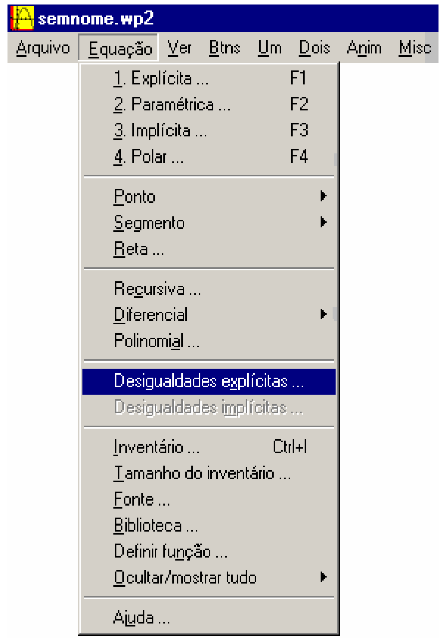


Figura 147: Barra de ferramentas.

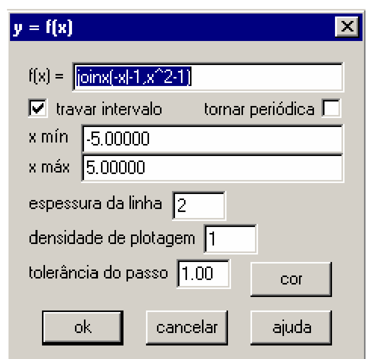


Figura 148: Barra de ferramentas.

Utilizando o recurso “*desigualdades explícitas”* nesse sistema formativo, serão sugeridas a tarefas de aplicação do mesmo, ou seja, plotar vários exemplos de gráficos definidos por varias sentenças.

Obtenha graficamente a função definida em R por: $f(x) = \begin{cases} -x, \text{se } x < -1 \\ x^2 - 1, \text{se } x \geq 1 \end{cases}$, a figura 149 ilustra essa situação.

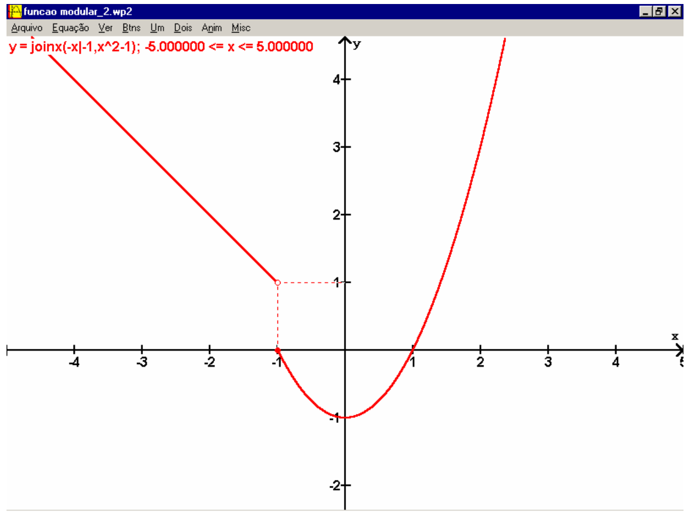


Figura 149: Função $f(x)=\begin{cases} -x, \text{se } x<-1 \\ x^2-1, \text{se } x\geq 1 \end{cases}$.

Obtenha graficamente a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ se } x<0 \\ x^2-1, \text{ se } 0\leq x<2 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ se } x\geq 2 \end{cases}$, a figura 150 ilustra esse exemplo.

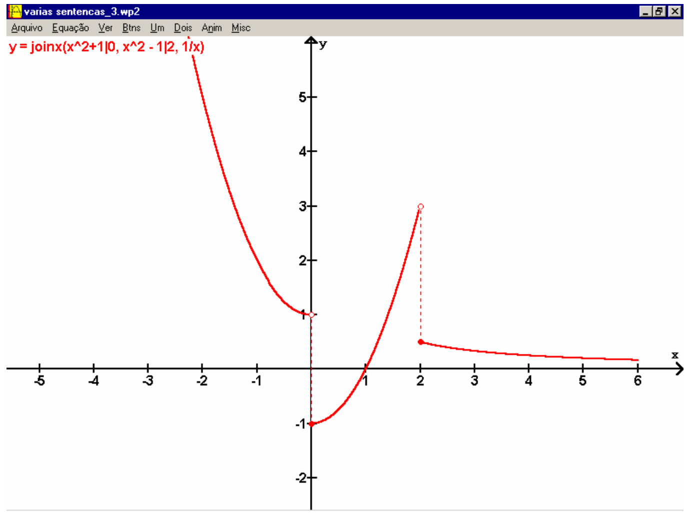


Figura 150: Função $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{se } x<0 \\ x^2-1, & \text{se } 0\le x<2 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{se } x\ge 2 \end{cases}.$

Família de Funções

Nessa tarefa determinar-se-á o gráfico da família de funções. Tarefa essa difícil de ser executada no papel e/ou no quadro pelos seguintes motivos: tempo gasto na realização da tarefa e precisão no gráfico. No sistema será necessário utilizar o *Menu – Equação – Inventário – Família* para plotar suas devidas "famílias", como ilustra a figura 151**.**

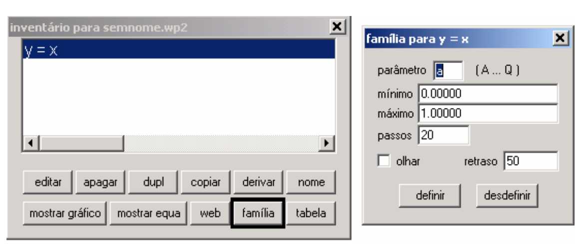


Figura 151: Barra de ferramentas função explicita – Inventário – Família de Função.

Nesses exemplos, será necessário que trace as famílias das funções de forma correta.

1- "Família" da função $f(x) = ax^2$, com $-10 \le a \le 10$, como ilustra a figura 152.

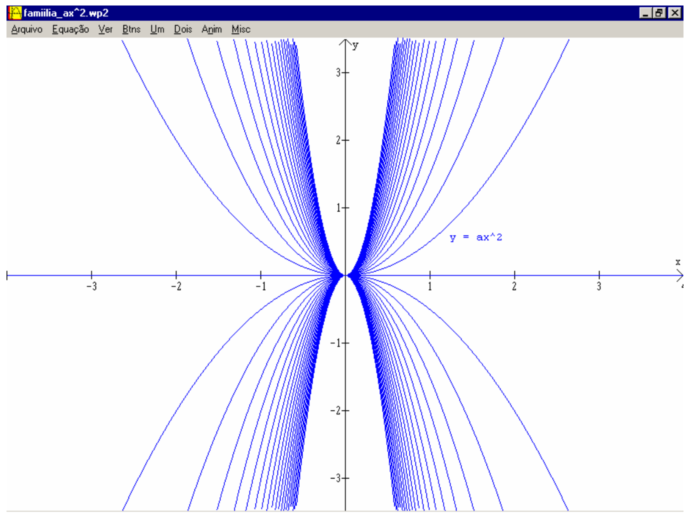


Figura 152: Família da função $f(x) = ax^2$, com $-10 \le a \le 10$.

Nesse exemplo é possível mostrar a concavidade e a amplitude da parábola, que são determinadas pela variação da constante a.

Quando $a > 0$ a concavidade da parábola está voltada para cima, logo a parábola possui um ponto de mínimo e quando $a < 0$ a concavidade da parábola está voltada para baixo, logo a parábola possui um ponto de máximo e se $a = 0$ a função não é quadrática, sua representação gráfica é uma reta, nesse exemplo temos uma reta sobre o eixo x.

Quando $-1 \le a \le 1$ a parábola tem uma maior amplitude

2- "Família" da função $f(x) = x^2 - ax + 4$, com $-6 \le a \le 6$, como ilustra a figura 153.

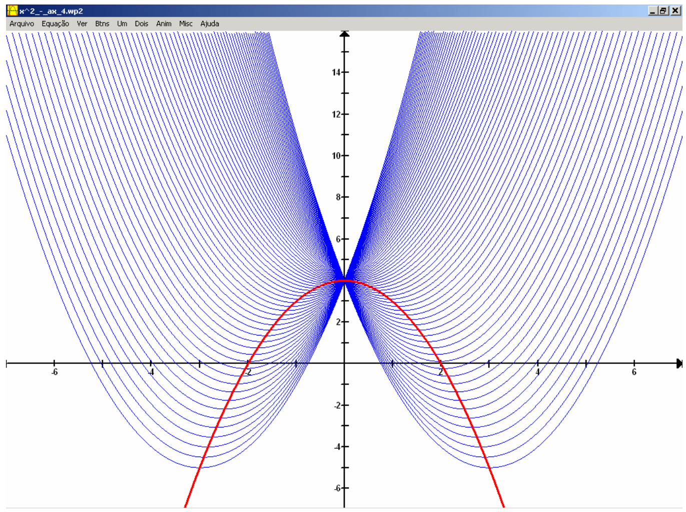


Figura 153: Família da função $f(x) = x^2 - ax + 4$, com $-6 \le a \le 6$.

Quando variamos o termo de primeiro grau na função quadrática encontramos várias parábolas passando todas pelo ponto $(0, 4)$.

A função que passa por todos os vértices da família da função $f(x) = x^2 - ax + 4$ é uma função quadrática dada por $f(x) = -x^2 + 4$, plotado em vermelho, observe a figura 153.

3- “Família” da função $f(x) = -x^2 + 3x - a$, com $-10 \le a \le 10$, como mostra a figura 154.

Quando variamos o termo independente na função quadrática, encontramos várias parábolas “paralelas” e todas as parábolas possuem o mesmo **x** do vértice. A reta que passa por todos os vértices da família da função $f(x) = -x^2 + 3x - a$ é dada pela reta $x = \frac{3}{2}$, plotado em vermelho, a figura 154 ilustra esses dados, nesse caso a reta não é uma função.

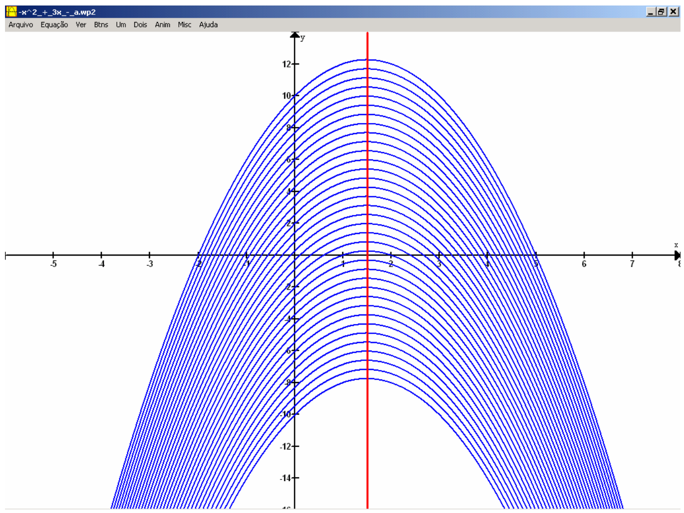


Figura 154: Família da função $f(x) = -x^2 + 3x - a$, com $-10 \le a \le 10$.

4- "Família" da função $f(x) = -x + a$, com $-7 \le a \le 7$, como mostra a figura 155.

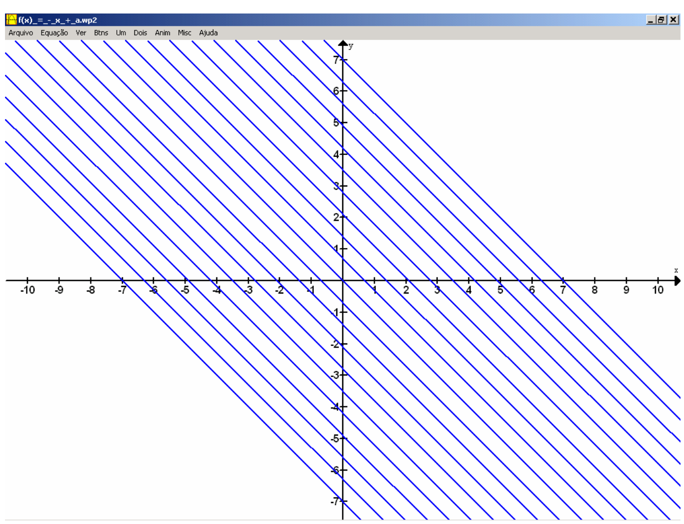


Figura 155: Família da função $f(x) = -x + a$, com $-7 \le a \le 7$.

Quando está variando o termo independente da função linear, a representação gráfica da família da função, serão retas paralelas, ou seja, toda as retas da família da função possuem a mesma taxa de variação (ou coeficiente angular), essa taxa de variação é dada por $\theta = 135^0$, onde $\theta = \text{arctg}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$, onde $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ pertençam a mesma reta e $x_1 \neq x_2$.

Algebricamente a representação gráfica representa um sistema linear da forma $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 3 \end{cases}$, onde o sistema é classificado como impossível.

5- "Família" da função $f(x) = ax + 5$, com $-5 \leq a \leq 5$, como ilustra a figura 156.

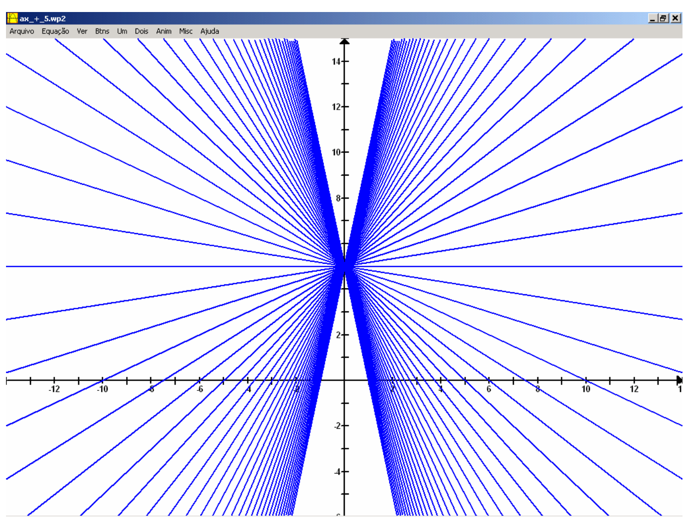


Figura 156: Família da função $f(x) = ax + 5$, com $-5 \leq a \leq 5$.

Quando está variando o termo de primeiro grau da função linear, a representação gráfica da família da função serão retas que passam todas pelo ponto $(0, 5)$ e a taxa de variação (ou coeficiente angular) não serão os mesmos.

Se $-5 \leq a < 0$ então a taxa de variação está entre $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Se $a = 0$ então a função é constante e sua representação gráfica será uma reta paralela ao eixo **x**. Se $0 < a \leq 5$ a taxa de variação está entre $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

Algebricamente a representação gráfica representa um sistema linear da forma $\begin{cases} y = a'x + 5 \\ y = a''x + 5 \end{cases}$, onde $\forall a', a'' \in R$ e $a' \neq a''$, o sistema é classificado como possível. A solução é dada por: $(x, y) = (0, 5)$.

6- "Família" da função representada na janela gráfica, ilustrada na figura 157, onde $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$?

Nessa janela gráfica a representação não deixa claro qual é a função, apenas nos dá a entender que pode ser qualquer função par.

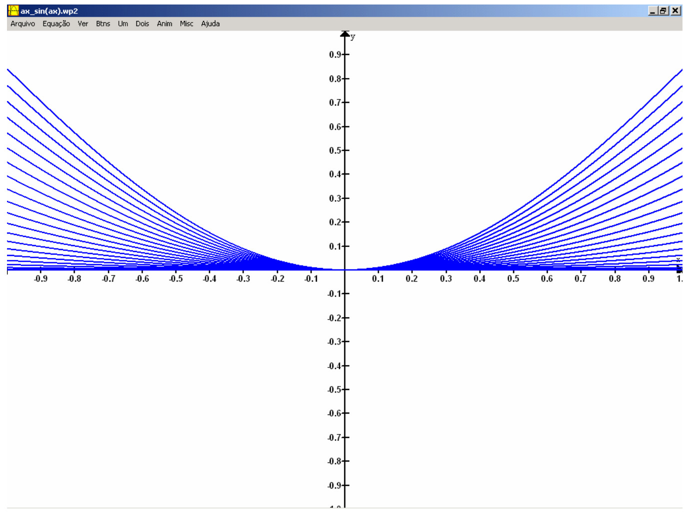


Figura 157: Família da função.

A mesma representação gráfica da figura 157, será representada na janela gráfica $-15 \le x \le 15$ e $-12 \le y \le 12$, como ilustra a figura 158.

Nessa janela a representação gráfica da função fica bem mais definida. Essa família de função é dada por $f(x) = ax.\sin(ax)$, com $0 \le a \le 1$.

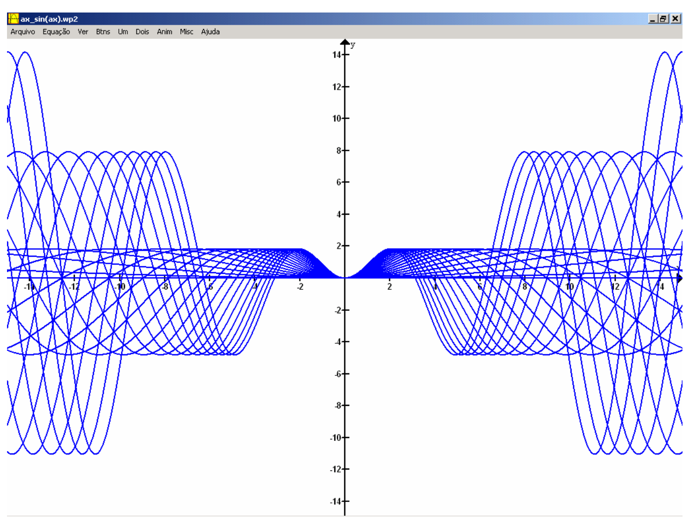


Figura 158: Família da função $f(x) = ax.\sin(ax)$, com $0 \le a \le 1$.

Dentre os pontos positivos em utilizar-se o sistema computacional formativo *Winplot* podemos destacar: a facilidade de utilização, a animação dos gráficos e das superfícies, a possibilidade de traçar famílias de função e de plotar vários gráficos em um mesmo plano cartesiano. Porém um ponto negativo observado nesse sistema computacional foi na utilização do estudo das desigualdades das equações do segundo grau, onde foram verificados erros no sombreamento da região pedida, l então foi necessário gerar uma tabela de sinais para determinar as regiões que deveriam ser sombreadas corretamente.

3.4 CONCLUSÃO

A escolha de um sistema formativo para o ensino de álgebra deve estar balizada tanto pela sua concepção pedagógica quanto pela sua aplicabilidade e flexibilidade de uso. É importante notar a plausibilidade dos diversos fatores que compõem os desenvolvimentos de tarefas no processo de resolução de problemas, bem como no processo de ensino e de aprendizagem. A potencialidade cognitiva (ou ganhos cognitivos) é freqüentemente aumentada quando esta pode ser medida através da potencialidade de aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Cabe ao professor a tarefa da escolha adequada do sistema formativo para o ensino da álgebra e, é claro que ele deverá conhecê-lo bem. Neste sentido, a contribuição angular deste capitulo estende-se à minuciosa análise de alguns desses sistemas que poderão ser utilizados na formação algébrica dos alunos do ensino fundamental e médio.

A falta de tempo para elaboração da presente dissertação não nos permitiu elaborar uma aplicabilidade sistemática desses sistemas formativos em salas de aula com experimentações, a fim de obter dados pragmáticos que pudessem ser analisados de forma estatisticamente mais coesa. No entanto, isto não é o objetivo central de nosso trabalho que se satisfaz, nesse sentido, com este estudo detalhado de alguns sistemas formativos aqui abordados e dos temas algébricos neles tratados.

CAPÍTULO 4

4.1 PROLEGÔMENOS

O presente capítulo apresenta alguns resultados obtidos com entrevistas efetuadas com três doutores algebristas de renome internacional, pesquisadores de ponta e experimentados professores, e também com 31 professores do ensino fundamental e ensino médio. Estas entrevistas se deram através de dois questionários distintos (apresentados nos anexos A e B, respectivamente) cujo teor foi especialmente concebido para produzir elementos fidedignos que retratasse o estágio atual da álgebra no Brasil. É necessário que se diga que não se trata de um experimento, posto que não existe um tratamento formal estatístico dos dados. Não é esse um objetivo deste trabalho. Nos contentamos apenas em direcionar um olhar crítico aos resultados das aplicações destas entrevistas, visando colher parâmetros que possam nos nortear o uso de sistemas computacionais formativos nos processos de ensino e de aprendizagem da álgebra.

4.2 ESPECIALISTAS E A ÁLGEBRA

Como acontece com a maioria das pessoas que efetuam trabalho de campo em suas pesquisas, houve um gasto muito grande de tempo e energia na busca dos dados. E, como também é habitual, os dados coletados ficaram aquém do que inicialmente se esperava. Após um delicado rastreamento dos mais fortes especialistas em álgebra no Brasil, relacionamos um grupo de treze algebristas, professores, doutores, com nomes nacionalmente e internacionalmente reconhecidos pela Comunidade Cientifica.

Após diversos contatos, foram enviados questionários para os treze especialistas, mas apenas três[50], entre eles, efetivamente nos responderam. Para sorte da presente pesquisa, e sem nenhum demérito para os outros doutores, esses três que nos responderam podem ser considerados efetivamente a nata da álgebra no Brasil. Ademais, em favor de nossa sorte, além das respostas dos questionários, eles nos permitiram entrevistas pessoais, o que muito nos valeu no momento de colher os dados expressos livremente, bem como a análise desses dados. Chamaremos estes últimos professores de X, Y, e Z no que se segue e também na análise de dados que mostramos no final do presente capítulo.

Analogamente, e com o mesmo desperdício de energia e de tempo, foram contactados trinta e um professores do Ensino Fundamental e Médio[51] que atuam no Estado do Rio de Janeiro ensinando álgebra em escolas publicas e privadas. Buscou-se, mais uma vez, as qualidades relativas à escolaridade e competência desses professores tanto no conhecimento sobre a matéria bem como na habilidade de efetuar processos de aprendizagem de alta qualidade. Chamaremos no que se segue, e também nas análises dos dados, esses professores de $P_1 \ldots P_{31}$.

No questionário apresentado aos especialistas X, Y e Z, encontra-se, individualmente, a pesquisa sobre os tópicos de álgebra que podem ser considerados como tópicos algébricos principais. Neste sentido é bastante interessante observar as respostas dos especialistas:

---

[50] Por questões éticas não os nomeio na presente dissertação, mas eles sabem o quanto lhes sou grato por terem respondido ao meu apelo.
[51] Por questões éticas não os nomeio na presente dissertação, mas eles sabem o quanto também lhes sou grato por terem respondido ao meu apelo.

O professor X destaca em sua entrevista que “Os tópicos principais de álgebra no ensino médio estão no programa do vestibular. Eu diria que a forma de apresentar esses tópicos aos alunos é que podem fazer a diferença”.

O professor Y destaca em sua entrevista que o maior obstáculo para o ensino da álgebra está no “não comprimento do programa na maioria das escolas” e afirma também que a “aritmética fornece modelos concretos para as estruturas algébricas, que, sem estes modelos, tornam-se estéreis”. Enquanto o professor X entende a aritmética como sendo uma pré-álgebra.

Notemos também que o professor Z afirma em sua entrevista que “não é possível ensinar matemática com softwares ao nível do ensino médio, não existe nenhum programa e tudo pode ser feito no lápis”.

Apesar de os três professores doutores trabalharem afincamente com recursos tecnológicos em suas pesquisas, os professores Y e Z não concordam com a utilização maciça desses recursos computacionais no ensino da álgebra pelo menos para no ensino fundamental e médio. No entanto, o professor X acredita fortemente na utilização dos recursos computacionais declarando: “... os recursos computacionais estão aí para ficar e avançar. Acredito que seria importante disponibilizar para os alunos computadores e alguns softwares algébricos que os auxiliassem a calcular soluções de dimensões além daquelas que eles pudessem resolver manualmente. Por exemplo, problemas de otimização linear e resolução de um sistema linear utilizando sistemas formativos”.

Os professores doutores foram muito solícitos na entrevista, e mostraram interesses e preocupações com o ensino da álgebra, seja no ensino fundamental e/ou médio, preocupações estas relatadas nessa dissertação. Com isso, aguardemos e torcemos que os professores pesquisadores doutores publiquem artigos e livros a nível do ensino fundamental e médio, ajudando desta forma o professor aprimorar-se, para um melhor ensino da álgebra.

4.3 ENSINAR ÁLGEBRA: A PRAGMATICIDADE DE SALA DE AULA

Posta a dicotomia existente entre o que “idealmente” deve-se ensinar e o que realmente é ensinado, imprimimos uma certa casualidade no questionário destinado aos professores do ensino médio e fundamental. A idéia é a de colher o mais fidedignamente possível o que esses professores efetivamente fazem no ministrar da disciplina álgebra. Objetiva-se, desta forma, ficarmos amparados pelas opiniões e pareceres emitidos pelos professores especialistas e para que pudéssemos colher parâmetros que viessem a nos guiar na análise qualitativa dos sistemas computacionais formativos, a fim de consolidar a nossa hipótese de trabalho. Este é, entre outros, o motivo pelo qual fizemos este questionamento apresentando praticamente as reformulações obtidas e as analisamos juntos com a sua descrição, no que se segue.

O questionário apresentado consta de 21 questões, previamente selecionadas de uma bateria de aproximadamente 90 questões. Estas 21 questões foram respondidas pelos professores de forma individual e independente. Algumas dessas questões são optativas, mas, a despeito da dificuldade de análise e de possíveis hiatos semânticos que podem porventura ocorrer optamos por inserir também as questões dissertativas. A idéia, para este último caso, repousa na fidedignidade de expressões de realidade com respostas livres. Isto freqüentemente permite a extração de parâmetros melhores elaborados e mais fiéis ao contexto real.

O questionário proposto aos professores do ensino fundamental e médio foi dividido em três (3) blocos de perguntas; *perguntas introdutórias*, *perguntas motivacionais* e *perguntas técnicas*.

As perguntas introdutórias (1 a 4) referem-se às características principais dos professores, estabelecimento em que lecionam, titulações e tempo de magistério no ensino fundamental e/ou ensino médio.

As perguntas motivacionais (5 a 13) referem-se ao interesse dos professores pelo ensino da álgebra.

As perguntas técnicas (14 a 20) referem-se a verificação da eventual utilização dos recursos computacionais no ensino da álgebra.

4.3.1 PERGUNTAS INTRODUTÓRIAS

Após a aplicação das entrevistas aos 31 professores que estão atualmente lecionando no Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio e da respectiva apuração, verificou-se que 77,4% dos professores têm a graduação, 12,9% dos professores têm especialização (pós-graduação Lato Sensu) e 9,7% dos professores têm Mestrado (pós-graduação Stricto Sensu). O gráfico 1 ilustra estes dados.

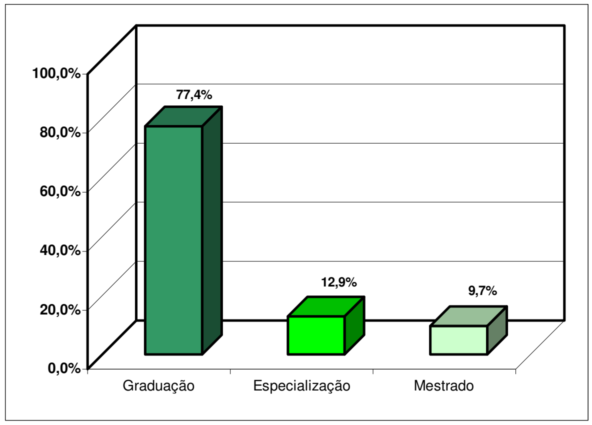


Gráfico 1: Titulação dos professores do EF e EM.

Os dados advindos dos professores entrevistados sobre quais os estabelecimentos em que eles ensinam mostram: 75,9% dos professores com graduação lecionam em escolas públicas enquanto 24,1% lecionam em escolas privadas; 75% dos professores com especialização lecionam em escolas públicas enquanto 25% lecionam em escolas privadas; 66,7% dos professores com mestrado lecionam em escolas públicas enquanto 33,3% lecionam para as escolas privadas. O gráfico 2 ilustra estes dados.

O gráfico 3 mostra o tempo de docência dos professores do ensino fundamental e do ensino médio. Concluímos que os professores que possuem graduação 54,2% lecionam há menos de 5 anos, 75% dos professores que possuem especialização lecionam há mais de 15 anos e os professores que possuem mestrado, estão espalhados igualmente em três categorias: os que lecionam entre 8 e 10 anos, os que lecionam entre 11 e 15 anos e os que lecionam a mais de 15 anos.

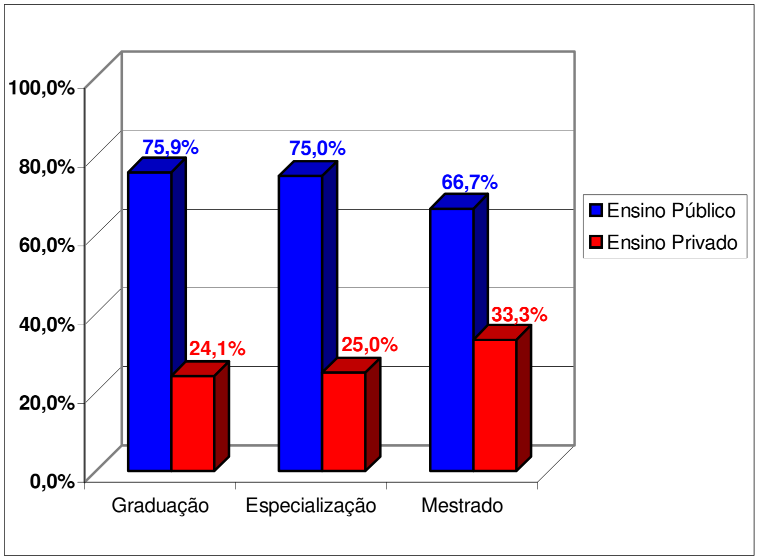


Gráfico 2: Instituição de ensino.

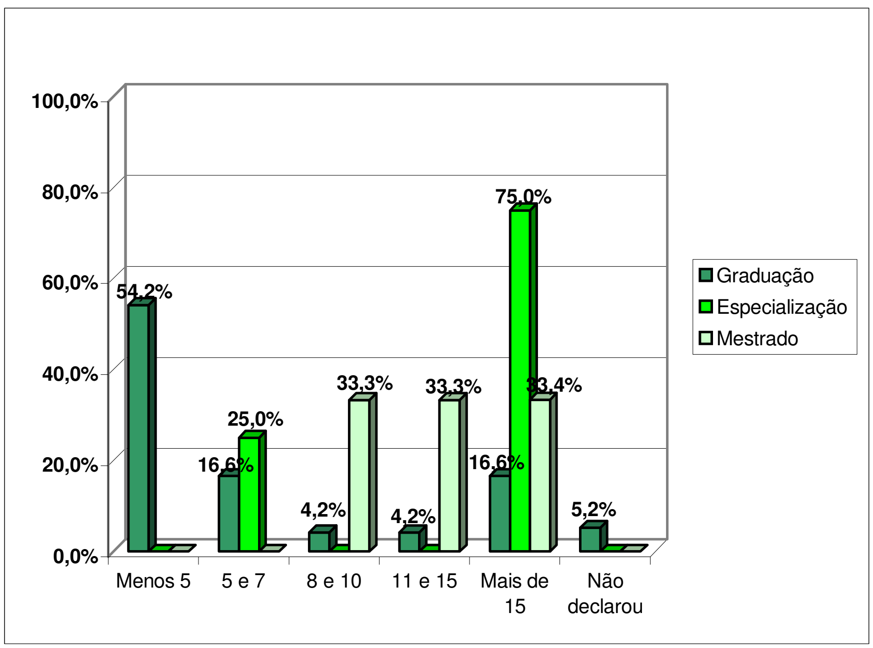


Gráfico 3: Senioridade letiva.

4.3.2 PERGUNTAS MOTIVACIONAIS

As questões deste tipo mostram os sentimentos do entrevistado relativo ao ensino da álgebra em sua vida acadêmica.

Apenas 12,5% dos docentes entrevistados que possuem a graduação fizeram projeto de final de curso tendo como objeto de estudo a álgebra. A maioria dos docentes entrevistados que possuem especialização não tiveram o projeto final de curso ou a monografia tendo como objetivo o estudo da álgebra. Exatamente um terço dos docentes entrevistados que possuem mestrado[52]. Fizeram projeto final de curso, monografia ou dissertação tendo como objeto de estudo a álgebra (o gráfico 4 ilustra esses dados).

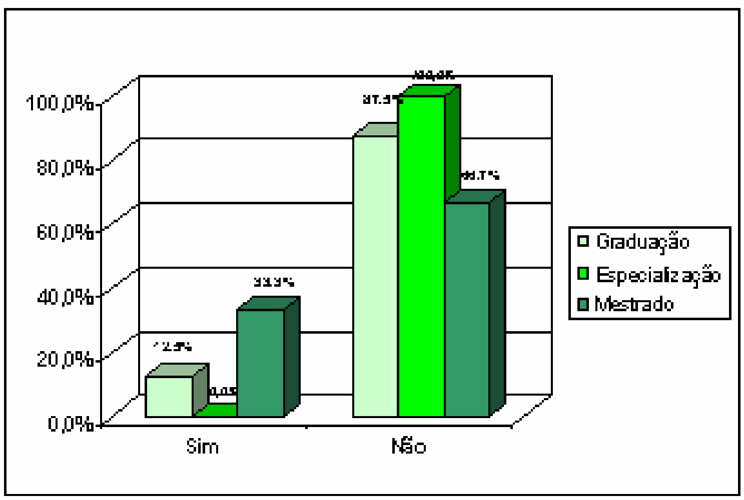


Gráfico 4: Projeto de final de curso, monografia, dissertação sobre álgebra.

Há de se notar também que apenas 15,3%, de todos os professores entrevistados do ensino fundamental e ensino médio, produziram projeto final de curso, monografia e/ou dissertação tendo por objeto de pesquisa a álgebra, o que poderia ser considerado um percentual aquém do desejado. Há também de ser

[52] No exemplo a ser dado é o caso da professora p1, cuja dissertação de mestrado aborda o tema: "Investigando e justificando problemas geométricos com o *Cabri Geometre II*", "A álgebra estava inserida nas justificativas dos alunos. Eles usavam o software para fazer conjecturas e depois mostrá-la, onde era necessário o uso da Álgebra".

posto em relevo, e que também disprendeu-se da analise das informações colhidas, que os professores procuraram recompensar esse déficit participando de oficinas e/ou de cursos cujo objeto de estudo era a álgebra.

Dos professores entrevistados que possuem mestrado, a totalidade já participou de oficinas e/ou de cursos sobre a álgebra, enquanto metade dos professores, que possuem graduação, já participou de cursos, e 29,2% dos professores que possuem graduação[53] e especialização[54] participaram de cursos e/ou oficinas tendo como objeto de estudo a álgebra. O gráfico 5 ilustra esses dados.

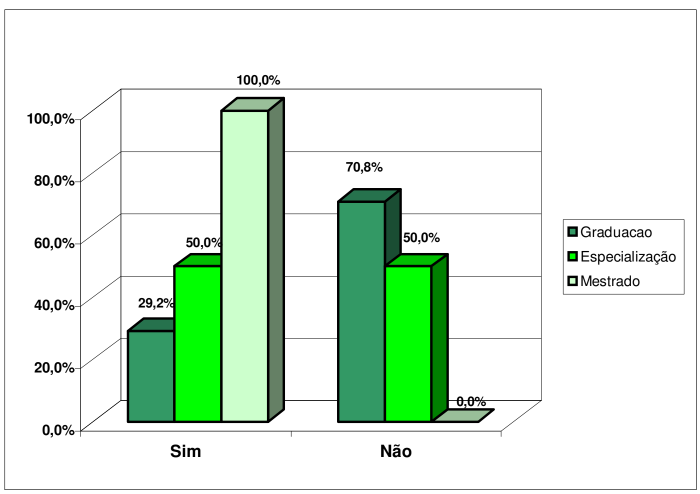


Gráfico 5: Oficinas e/ou cursos em álgebra.

O percentual dos entrevistados no ensino fundamental e no ensino médio que participaram de oficinas e/ou cursos ou produziram trabalho final de curso, monografia ou dissertação sobre o ensino da álgebra pode ser considerado bem aquém do desejado. Com efeito, esperávamos obter um melhor valor nas respostas

---

[53] A professora $\mathbf{P_2}$, por exemplo, participou do curso "**O uso de informática no ensino da álgebra**".

[54] A professora $\mathbf{P_4}$, por exemplo, participou do curso "**Interpretação geométrica da solução de sistemas de equações e inequações**".

dada a questão VIII do questionário para os professores do ensino fundamental e médio (anexo B), mas, infelizmente não foi o que pudemos obter, conforme ilustra o gráfico 6.

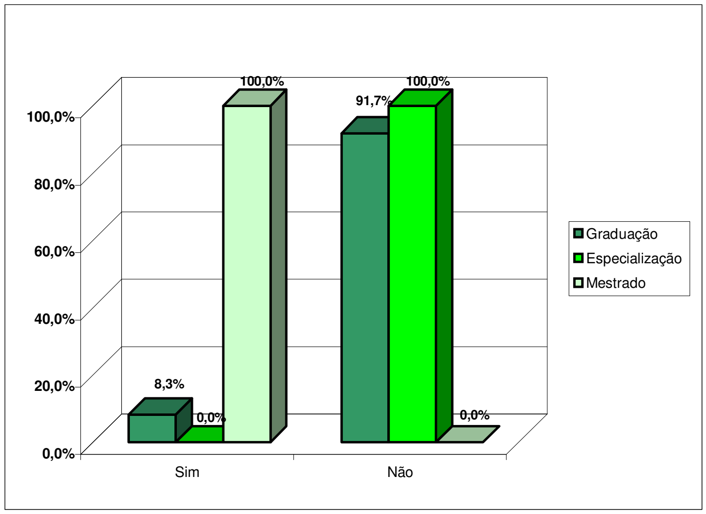


Gráfico 6: Oficinas e/ou cursos ministrados pelo entrevistado com ênfase em álgebra.

A melhoria nos processos de ensino/aprendizagem da álgebra é um objetivo perseguido por 100% dos professores que possuem mestrado[55], por 8,3% dos professores que possuem uma graduação e, infelizmente, não apareceu no caso dos professores que possuem uma especialização. Com efeito, nenhum dos professores que possuem especialização apresentou oficinas e/ou cursos tendo como objetivo de estudo a álgebra. Há de ser também notado que 4,2% dos professores que possuem graduação já tiveram como objetivo escrever livros[56] e/ou

[55] As professoras P_1 e P_2 apresentaram três oficinas no Projeto Fundão, para professores do ensino fundamental e ensino médios onde foi dada ênfase no curso com o título: "**Função Afim e Quadrática em Geometria Dinâmica**".

[56] A professora P_3 escreveu livro para primeiro e o segundo ciclo do ensino fundamental, com o titulo: "**Matemática na Vida e na Escola**", publicado pela Editora do Brasil, que trata de forma clara e progressiva o ensino da álgebra.

publicar artigos que tratassem de álgebra, isto foi também objeto de 33,3% dos professores que possuem mestrado[57]. O gráfico 7 ilustra essa situação.

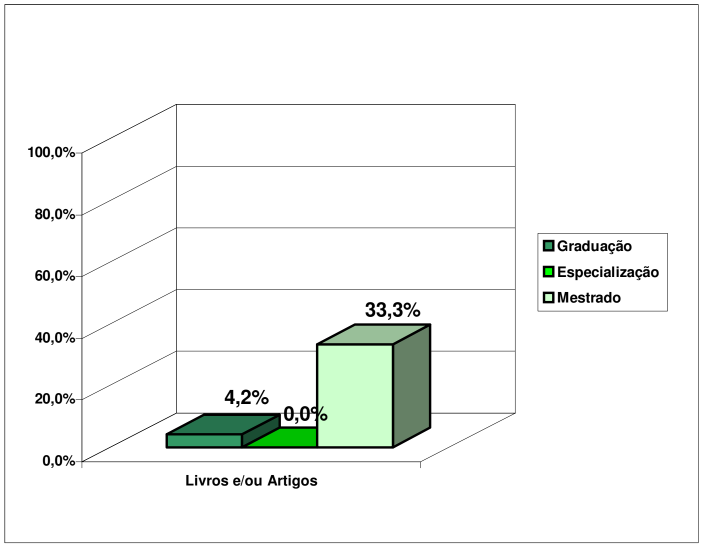


Gráfico 7: Artigos e/ou livros publicados pelos entrevistados com ênfase em álgebra.

Os professores entrevistados responderam de forma dissertativa sobre o que entendem por **álgebra**. Foram obtidas 31 respostas distintas, ou seja, cada professor tem a sua própria concepção sobre o que é a álgebra. Por esta razão, e visando facilitar a análise dos dados relativos à esta questão, agrupamos as resposta na tabela 4 que ilustra as respostas obtidas dos professores entrevistados. Esse agrupamento foi feito através de casamento de padrões interseccionais nas respostas colhidas.

---

[57] A professora P_1 escreveu dois artigos. Destacamos o artigo: "**Relato de Experiência – Uma introdução ao estudo de funções utilizando softwares educativos**" publicado no quadragésimo segundo Boletim do Gepem.

	Graduação	Especialização	Mestrado
Envolve letras	25,0%	75,0%	0,0%
Generalização da Aritmética	25,0%	0,0%	66,7%
Modela Problemas	25,0%	0,0%	0,0%
Estudo Conjuntos Numéricos	12,5%	25,0%	33,3%
Em branco	12,5%	0,0%	0,0%
Total	100,0%	100,0%	100,0%

Tabela 4: O que entende-se por álgebra.

Baseando-se portanto no agrupamento efetuado, pode-se destacar que dos professores que têm especialização, 75% vêem álgebra como sendo um conteúdo que envolve letras. Dos professores que possuem especialização e mestrado, 25% e 33,3%, respectivamente, vêem álgebra como o conteúdo que faz o estudo dos conjuntos numéricos. Dos professores que possuem mestrado, 66,7% definiram álgebra como uma generalização da aritmética (conforme ilustra a tabela 4).

Docentes com graduação: informações interessantes

Vinte e cinco por cento dos entrevistados entendem álgebra como a parte da matemática que de alguma forma, trabalha com letras, conforme explicitam os relatos abaixo:

"É a parte da Matemática onde se trabalha com letras."[58];

"Ensino que trata de equações."[59];

"É a parte da matemática que envolve números e letras (variáveis)."[60];

"Quando usamos letras variáveis, substituindo valores."[61]

---

[58] Resposta de P_6

[59] Resposta de P_7

[60] Resposta de P_8

Vinte e cinco por cento dos docentes entrevistados entendem álgebra como uma generalização da aritmética, conforme demonstram os relatos abaixo:

"É a generalização da aritmética. Tratamos dos números de uma maneira geral, ou seja, do todo para um."[62];

"Maneira pela qual a matemática pode generalizar um calculo aritmético. Forma de raciocínio abstrato da Matemática"[63].

Vinte e cinco por cento dos docentes entrevistados entendem álgebra como uma modelagem de problemas, conforme demonstram os relatos abaixo:

"Uma linguagem matemática que modela matematicamente problemas."[64];

"Qualquer tópico da matemática que possa ser modelado através de equações literais."[65];

"Uma linguagem matemática utilizada para expressar fatos genéricos com objetivo de resolver problemas."[66];

"Uma linguagem matemática que modela matematicamente problema."[67]

Doze e meio por cento dos docentes entrevistados entendem que a álgebra trabalha com conjuntos e suas propriedades, como se destaca nos relatos abaixo:

"Álgebra é a parte da matemática que aborda funções, polinômios, conjunto numérico, equações."[68];

---

[61] Resposta de P_9
[62] Resposta de P_{10}
[63] Resposta de P_{11}
[64] Resposta de P_{12}
[65] Resposta de P_{13}
[66] Resposta de P_{14}
[67] Resposta de P_{15}
[68] Resposta de P_{16}

“A construção dos conjuntos numéricos suas propriedades e a expansão desses conjuntos”[69];

“Entendo como uma grande base para o ensino uma vez que é na álgebra que estudamos os conjuntos numéricos e suas propriedades”[70].

Docentes com especialização: informações interessantes

Setenta e cinco por cento dos entrevistados entendem álgebra como a parte da matemática que trabalha com letras, como se destaca nos relatos abaixo:

“Álgebra é a linguagem da matemática que têm por objetivo representar quantidades desconhecidas, normalmente denominadas incógnitas (quando têm valores fixos) ou variáveis (quando seus valores podem variar dentro de um dado conjunto)”[71].

“É o instrumento pelo qual desenvolvemos conteúdos onde as variáveis estão presentes”[72].

Vinte e cinco cento dos entrevistados entendem que a álgebra trabalha com conjuntos e suas propriedades, como destaca no relato abaixo:

“Parte da matemática que estuda generalizações de propriedades numéricas, relações em grandezas ...”[73].

Docentes com mestrado: informações interessantes

Sessenta e seis vírgula sete por cento dos entrevistados entendem álgebra como uma generalização da aritmética, como destaca o relato abaixo:

---

[69] Resposta de P_{17}

[70] Resposta de P_{18}

[71] Resposta de P_{24}

[72] Resposta de P_{25}

[73] Resposta de P_{26}

“Entendo álgebra como generalização da aritmética, como estudo de equações e funções e como estudo de estruturas algébricas.”[74];

Trinta e três virgula três por cento dos entrevistados entendem que álgebra trabalha com conjuntos e suas propriedades, como se destaca no relato abaixo:

“A Álgebra estuda as relações existentes nos conjuntos numéricos, as generalizações, as equações, inequações, as propriedades. Falando mais genericamente, estuda os conjuntos (numéricos, polinômios, matrizes, funções) e sua estrutura”.[75]

Observamos que, segundo Rômulo Lins (2000) álgebra é definida da seguinte forma:

“A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade”.

Obtidos os sentimentos dos docentes sobre o que eles entendem por **álgebra**, procurou-se obter as informações sobre os conteúdos ensinados em **álgebra** tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. As respostas às questões XI do questionário (posto no anexo B) foram catalogadas e colocadas na tabela 5, abaixo mostrada:

---

[74] Resposta de P_2

[75] Resposta de P_1

Conteúdos Algébricos			
	Graduação	**Especialização**	**Mestrado**
Cálculos de Áreas e Perímetro	1,2%	0,0%	0,0%
Determinantes	2,1%	0,0%	0,0%
EQUAÇÕES	**18,3%**	**10,4%**	**18,9%**
Exp. Algébricas e Fracionárias	6,5%	15,8%	0,0%
Fatoração	3,2%	5,3%	6,3%
FUNÇÕES	**14,0%**	**15,8%**	**12,4%**
Geometria Analítica	1,2%	0,0%	0,0%
Inequações	3,2%	5,3%	12,4%
Matrizes	4,3%	0,0%	6,3%
Não opinou	2,1%	0,0%	0,0%
PA e PG	2,1%	5,3%	0,0%
POLINÔMIOS	**14,0%**	**10,4%**	**6,3%**
Produtos notáveis	8,6%	0,0%	6,3%
Prop. Conj. Numéricos	2,1%	5,3%	12,4%
Proporção e Regra de três	2,1%	10,4%	0,0%
Resolução de Problema	5,3%	5,3%	0,0%
SISTEMA LINEAR	**6,5%**	**5,3%**	**12,4%**
Todos conteúdos 6ª Série	3,2%	0,0%	0,0%
Transformações no Plano	0,0%	0,0%	6,3%
Trigonometria	0,0%	5,4%	0,0%
Total	100%	100%	100%

Tabela 5: Conteúdos que se destacam algébricos.

E imprescindível ressaltar aqui que observamos uma ausência de conteúdos que muitos algebristas consideram de grande importância: números complexos e lembraram de conteúdos como: transformação no plano, cálculo de áreas e perímetros e etc.. Com isso, serão analisados os conteúdos que tiveram uma maior ênfase no ensino da álgebra para os professores do ensino fundamental e médio.

Notemos que os docentes entrevistados que possuem graduação colocaram em relevo os conteúdos algébricos expostos na tabela 6

Conteúdos que destacam-se algébricos			
	Equações	Funções	Polinômios
Graduação	**18,3%**	**14,0%**	**14,0%**

Tabela 6: Conteúdos algébricos destacados pelos professores com graduação.

Equações e polinômios foram os conteúdos mais apontados pelos professores entrevistados. Isso confirma as respostas apresentadas sobre o que eles entendem ser álgebra, pois 25% dos entrevistados consideram álgebra como o conteúdo que envolve letras e como sendo generalização da aritmética, como pode ser observado na tabela 4.

Os professores com especialização destacaram os seguintes conteúdos algébricos apresentados na tabela 7:

Conteúdos que destacam-se algébricos					
	Funções	Exp. Algébricas e Fracionárias	Polinômios	Equações	Proporção e Regra de três
Especialização	**15,8%**	**15,8%**	**10,4%**	**10,4%**	**10,4%**

Tabela 7: Conteúdos algébricos destacados pelos professores com especialização.

Os professores entrevistados destacaram *equações* e *funções* entre os mais mencionados, o que é confirmado pela forma como os professores entendem ser álgebra, pois 75% consideram álgebra como o conteúdo que envolve letras e 25% sendo o conteúdo que estuda conjuntos numéricos, como pode ser observado na tabela 4.

Os Professores com mestrado destacaram os seguintes conteúdos algébricos apresentados na tabela 8:

Conteúdos que destacam-se algébricos					
	Equações	Funções	Inequações	Prop. Conj. Numéricos	Sistema Linear
Mestrado	**18,9%**	**12,4%**	**12,4%**	**12,4%**	**12,4%**

Tabela 8: Conteúdos algébricos destacados pelos professores com mestrado.

Os professores entrevistados destacaram Equações, Funções, Inequações, Sistema Linear e as Propriedades dos Conjuntos Numéricos entre os mais mencionados, o que é confirmado pela forma como os professores entendem ser álgebra, pois 33,3% consideram álgebra o conteúdo que estuda os conjuntos numéricos e 66,7% sendo generalização da aritmética, como pode ser observado na tabela 4.

Em média, os conteúdos algébricos que mais tiveram destaque por todos os professores entrevistados estão destacados na tabela 9.

Conteúdos que destacam-se algébricos				
	Equações	Funções	Polinômios	Sistema Linear
Média	**15,9%**	**14,1%**	**10,3%**	**8,1%**

Tabela 9: Conteúdos algébricos destacados pelos docentes do ensino fundamental e médio.

Não foi surpreendente a escolha do conteúdo de **polinômios** entre os mais apontados por todos os professores. Nesse conteúdo destaca-se o **Teorema Fundamental da Álgebra**[76]. Como sabemos, este teorema afirma que: Toda equação algébrica polinomial de coeficientes reais ou complexos, admite no conjunto dos números complexos, pelo menos uma raiz. É bom que ressaltemos que aqui observamos uma escolha do conteúdo de <u>Polinômios</u> foi bastante expressiva com média de 10,4%. Note-se também que esse conteúdo é ensinado freqüentemente a partir do ensino médio.

---

[76] Escrita por *Peter Roth*, matemático de *Nutêmberg*, em sua *Arithmetica Philosophica* de 1600. A primeira demonstração correta deve-se a *Carl Friedrich* ***Gauss*** que apresentou em sua tese de doutorado em 1799 (aos 21 anos). A título de curiosidade, a tese de *Gauss* é considerada por muitos matemáticos como a melhor tese de doutorado já produzida.

Essa demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, utilizará o Teorema de *Liouville*[77].

Seja $P(z)$ um polinômio em Z de grau maior do que um.

$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m$, com $m \in N$ e $a_m \neq 0.$, então $P(z) = 0$ tem pelo menos uma raiz.

Supor que z não anule nenhum valor em $P(z)$.

Então a função $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ seria analítica[78] em todos os pontos complexos e também $|f(z)|$ tende para zero quando $|z|$ tende para o infinito, de modo que $|f(z)|$ seria limitada para todos os z.

Conseqüentemente $f(z)$ seria uma constante. Mas isso é um absurdo, pois $P(z)$ não pode ser constante quando $m \in N$ e $a_m \neq 0$.

Logo $P(z)$ é zero pelo menos um valor de z.

Observamos também aqui a ausência de conteúdos que muitos algebristas consideram de grande importância: números complexos. Com efeito, percebemos que isto acontece até entre os 23,6% dos docentes entrevistados, que entende a álgebra como sendo o estudo dos conjuntos numéricos (como mostra a tabela 4). Extraímos desta informação que muito provavelmente existe uma certa dicotomia de classificação ou de posicionamento do tema “números complexos” dentro da matemática. Alguns algebristas consideram esse tema como totalmente incluído na “álgebra” e outros como parcialmente incluído e outros ainda que o consideram totalmente desvinculado da álgebra. Uma simplória análise dos dados obtidos nas

[77] Se f é inteira e se $|f(z)|$ é limitado para todos os valores de z no plano complexo, então f é uma constante.

[78] Uma função f da variável complexa z se diz analítica num ponto z_0, se sua derivada $f'(z)$ existe não só em z_0 como também em todo o ponto z de uma vizinhança z_0.

entrevistas nos levam a acreditar que os docentes entrevistados pertencem ao terceiro grupo.

Um exemplo típico de um Algebrista do primeiro grupo classificatório é o professor José Paulo Carneiro (2004), que discorda dos entrevistados e destaca a importância dos números complexos no ensino de álgebra.

> Aqui reencontramos o caminho da História, pois os números complexos, inicialmente procurados para resolver equações, de fato estendem os reais de uma maneira ”algebricamente perfeita”, no sentido de que toda equação algébrica (mesmo que só tenha coeficientes reais) passa a ter solução sendo esse o conteúdo do famoso Teorema Fundamental da Álgebra. Essa propriedade “conserta” uma serie de imperfeições do sistema dos números reais, permitindo explicar muitas coisas aparentemente estranhas que ocorrem nos reais. Como dizia Hadamard (1865-1963): “O caminho mais curto entre duas verdades no campo real [muitas vezes] passa pelo campo complexo”. Por exemplo, é mais fácil perceber através dos complexos por que um polinômio de grau ímpar, com coeficientes reais, têm sempre uma raiz real.

Obtidos os sentimentos dos docentes entrevistados sobre o que eles efetivamente destaca-se como mais importante no ensino da **álgebra**, procurou-se obter as informações sobre quais conteúdos ensinados em **álgebra**, tanto no ensino fundamental, quanto no ensino médio, são irrelevantes para o aprendizado. A resposta às questões XII do questionário (posto no anexo B), foram catalogadas e colocadas na tabela 10 e 15, respectivamente.

Conteúdos considerados mais importante na álgebra			
	Graduação	**Especialização**	**Mestrado**
Cálculos de Áreas e Perímetro	2,0%	0,0%	0,0%
EQUAÇÕES	**16,3%**	**12,5%**	**42,8%**
Exp. Algébricas e Fracionárias	8,2%	12,5%	0,0%
Fatoração	4,1%	12,5%	0,0%
FUNÇÕES	**18,4%**	**18,6%**	**14,3%**
Geometria Analítica	2,0%	0,0%	0,0%
Matrizes	2,0%	0,0%	0,0%
Não opinou	4,1%	0,0%	0,0%
PA e PG	0,0%	6,3%	0,0%
POLINÔMIOS	**14,3%**	**6,3%**	**0,0%**
Produtos Notáveis	4,1%	0,0%	0,0%
Prop. Conj. Numéricos	6,1%	0,0%	14,3%
Proporção e Regra de três	4,1%	12,5%	0,0%
RESOLUÇÃO de PROBLEMAS	**4,1%**	**6,3%**	**14,3%**
SISTEMA LINEAR	**4,1%**	**12,5%**	**14,3%**
Todos conteúdos 6ª Série	6,1%	0,0%	0,0%
Total	100%	100%	100%

Tabela 10: Conteúdos considerados mais importantes na álgebra.

É imprescindível ressaltar aqui que observamos o destaque dos conteúdos de “equações” e “funções” que muitos algebristas consideram de grande importância e alguns docentes entrevistados lembraram de conteúdos como: progressão aritmética e geométrica, produtos notáveis e transformação no plano, cálculo de áreas e perímetros e etc. Com isso, serão analisados os conteúdos que tiveram uma maior ênfase no ensino da álgebra para os docentes entrevistados do ensino fundamental e médio.

Os docentes entrevistados que possuem Graduação apontaram os conteúdos considerados mais importantes na álgebra (como mostra a tabela 10), a tabela 11 destaca os conteúdos mais expressivos.

Conteúdos considerdos mais importante na álgebra			
	Funções	Equações	Polinômios
Graduação	**18,4%**	**16,3%**	**14,3%**

Tabela 11: Conteúdos que os professores com graduação destacam algébricos.

Foi notado que todos os docentes entrevistados que possuem graduação, ressaltaram o conteúdo de “funções”, como sendo o conteúdo mais importante no ensino da álgebra, como podemos verificar na tabela 11.

Na tabela 12, são destacados os conteúdos que os docentes entrevistados que possuem especialização consideram mais importantes na álgebra:

Conteúdos considerados importante na álgebra						
	Funções	Exp. Algébricas e Fracionárias	Polinômios	Equações	Proporção e Regra de três	Sistema Linear
Especialização	**18,6%**	**12,5%**	**12,5%**	**12,5%**	**12,5%**	**12,5%**

Tabela 12: Conteúdos que os professores com graduação destacam algébricos.

Comparando os conteúdos que se encontram nas tabelas 5 e 12 (são conteúdos que os docentes entrevistados declaram ser algébricos), percebemos que o conteúdo de “sistema linear” foi mencionado de forma diminuta entre os entrevistados, como podemos observar a tabela 5, e, no entanto destacou-se como um dos conteúdos mais importante no ensino da álgebra.

Os docentes entrevistados que possuem mestrado ressaltaram os seguintes conteúdos considerados mais importante na álgebra, como ilustra a tabela 13:

Conteúdos considerado mais importante na álgebra					
	Equações	Funções	Propriedade de conjuntos númericos	Resolucao de problema	Sistema Linear
Mestrado	**42,8%**	**14,3%**	**14,3%**	**14,3%**	**14,3%**

Tabela 13: Conteúdos que os professores com mestrado destacam algébricos.

Podemos notar uma mudança entre os conteúdos mencionados na tabela 8 e na tabela 13. Na tabela 8 o conteúdo de “resolução de problema” não teve representação ente os entrevistados e nesse momento destacou-se como um dos conteúdos mais importante no ensino da álgebra, no entanto, o conteúdo de “Polinômios”, que aparece na tabela 8 como uns dos itens de destaque, nesta relação não foi mencionado (tabela 10).

Em média os conteúdos que os docentes entrevistados destacam-se como conteúdos considerados importância a álgebra podem ser observados na tabela 14.

Conteúdos considerados mais importância na álgebra				
	Equações	Funções	Sistema linear	Resolução de Problema
Média	**24,0%**	**17,0%**	**10,1%**	**8,2%**

Tabela 14: Conteúdos que tiveram mais destaques como algébricos pelos docentes.

Os conteúdos que os docentes entrevistados consideram irrelevante estão destacados na tabela 15.

Todos os docentes entrevistados que possuem especialização e mestrado, afirmaram que não existe nenhum conteúdo irrelevante. O mesmo aconteceu para 21,4% dos professores que tem graduação.

As palavras da Professora P_5 deixam bem claro o motivo pelo qual os professores concordam que não existe conteúdo irrelevante.

“Eu não acho o conteúdo irrelevante, o que precisa melhorar é a forma de enfocá-lo e as dificuldades excessivas exploradas em sua aplicação. A forma de enfocar deveria, dentro do possível, ser contextualizada, menos árida e desvinculada de sentido. Os assuntos deveriam ser explorados dentro do que é fundamental. Não há necessidade de se complicar tanto os exercícios como acontece".

Conteúdos irrelevantes no ensino da álgebra			
	Graduação	**Especialização**	**Mestrado**
Binômio de Newton	3,6%	0,0%	0,0%
Cálculos de Áreas e Perímetro	3,6%	0,0%	0,0%
Equações	3,6%	0,0%	0,0%
FATORAÇÃO	**10,7%**	**0,0%**	**0,0%**
Não opinou	25,0%	0,0%	0,0%
NENHUM CONTEÚDO	**21,4%**	**100,0%**	**100,0%**
Op. e Simplificação de Exp.	7,1%	0,0%	0,0%
Polinômios	7,1%	0,0%	0,0%
PRODUTOS NOTÁVEIS	**17,9%**	**0,0%**	**0,0%**
Total	100,0%	100,0%	100,0%

Tabela 15: Conteúdos irrelevantes no ensino da álgebra.

Dos professores que possuem graduação 3,6% acham irrelevante o ensino de Binômio de Newton, 17,9% o ensino de Produtos Notáveis e 10,7% o ensino de Fatoração, o que contraria o que foi dito por vários colegas na questão anterior, na qual 4,1% dos professores do ensino fundamental e ensino médio destacaram produtos notáveis e fatoração como conteúdos importantes no ensino da álgebra e ainda 2,0% destacaram o ensino de geometria analítica.

Os conteúdos de Binômio de Newton, Cálculo de áreas e perímetro, Fatoração, Equações, Polinômios, Operação e Simplificação de Expressão e Produtos notáveis foram mencionados pelos professores entrevistados que possuem graduação como menos importante no ensino da álgebra.

Para nós, matemáticos, existe beleza profunda esparramada em diversos temas e diversos teoremas. O binômio de Newton, por exemplo, é de uma beleza ímpar, cantada até mesmo no poema de Álvaro Campos (1928), chamado "O vento lá fora":

"O Binômio de Newton é tão belo como a Vênus de Milo.

O que há é pouca gente para dar por isso.

óóóó---óóóóóó óóó---óóóóóóó óóóóóóóó"

Demonstraremos, no que se segue, a aplicabilidade e relevância de alguns conteúdos de álgebra que, surpreendentemente, docentes pesquisados indicaram como irrelevantes. Se os professores do ensino fundamental e do ensino médio ensinassem a seus alunos a escrever qualquer função quadrática na forma $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ ou a resolver qualquer equação do 2º grau pelo método de completar quadrados[79], todos os conteúdos que os docentes graduados destacaram como irrelevantes na álgebra poderiam ser efetivamente trabalhados.

Tomemos a função quadrática da forma $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ definida de R em R. Escrevendo-a nestes termos pode-se simplificar o estudo das funções, posto que o vértice da curva denominada parábola é dada pelo ponto (α, β). Com efeito, ao fazer o estudo da função quadrática definida de **R** em **R** e dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, é comum a utilização via "rappel" da fórmula que determina o vértice da parábola, dado pelo ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Assim, para a função quadrática definida por $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, temos:

$$f(0)=0 \tag{1}$$

$$a(x-\alpha)^2+\beta=0 \tag{2}$$

$$a(x-\alpha)^2=-\beta \tag{3}$$

[79] Atualmente a maioria dos livros didáticos apresenta somente a resolução de equações do segundo grau através da fórmula de Bhaskara.

$$(x-\alpha)^2 = -\frac{\beta}{a} \tag{4}$$

Portanto, para se fazer um estudo das raízes é necessário verificar os sinais de **a** e β . Com efeito, se **a** e β tiverem o mesmo sinal então a função quadrática não possui raízes reais, se eles tiverem sinais diferentes então, teremos:

$$x-\alpha = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{a}} \tag{5}$$

$$x = \alpha \pm \sqrt{-\frac{\beta}{a}} \tag{6}$$

E neste caso as raízes são dadas pelos pontos:

$$\left(\alpha + \sqrt{-\frac{\beta}{a}}, 0\right) \tag{7}$$

e

$$\left(\alpha - \sqrt{-\frac{\beta}{a}}, 0\right) \tag{8}$$

Admissivelmente, se $\beta = 0$ então a função terá duas raízes reais e iguais e se $\beta \neq 0$ então a função terá duas raízes reais distintas.

O objetivo central dessas entrevistas é o de se obter dos docentes entrevistados quais seriam os maiores problemas percebidos no ensino da álgebra. Após a identificação destes problemas, uma análise parcial já nos foi suficiente para obter os parâmetros desejados para a nossa contribuição central nesta dissertação a sugestão de metodológicas para o uso de recursos computacionais (explícita no capítulo 4) nos processos de ensino/aprendizagem de álgebra. Os relatos mais significativos estão expostos na tabela 16.

É preciso ressaltar também que, em media, 24,4% dos docentes entrevistados apregoam que o ensino da álgebra é muito abstrato, enquanto 13,3%

deles reclamaram sentir um "gap" de formação acentuada pela falta de conhecimento nobre.

A problemática no ensino/aprendizagem da álgebra			
	Graduação	**Especialização**	**Mestrado**
Demonstração Utilidade	3,7%	0,0%	0,0%
Falta de Concentração	7,4%	0,0%	0,0%
Falta de Conteúdo aritmético	11,2%	0,0%	0,0%
Falta de Conteúdos anteriores	14,8%	25,0%	0,0%
Falta de interesse	3,7%	25,0%	0,0%
Falta de maturidade dos alunos	7,4%	0,0%	0,0%
Falta de tempo	7,4%	0,0%	0,0%
Interpretação	3,7%	0,0%	0,0%
Má preparação dos alunos nas series anteriores	3,7%	0,0%	0,0%
MUITO ABSTRATO	**14,8%**	**25,0%**	**33,4%**
Não opinou	14,8%	0,0%	0,0%
O por que da generalização	3,7%	0,0%	0,0%
Os alunos não são ensinados algebricamente	3,7%	0,0%	0,0%
Muito conteúdo de uma única vez	0,0%	25,0%	0,0%
Trabalha com generalizações	0,0%	0,0%	33,3%
Falta de significado dos procedimentos	0,0%	0,0%	33,3%
Total	**100%**	**100%**	**100%**

Tabela 16: A problemática no ensino da álgebra.

4.3.3 PERGUNTAS TÉCNICAS

O objetivo aqui é o de obter informações sobre o uso de recursos computacionais por parte dos docentes entrevistados em sua pragmática de sala de aula, particularmente no ensino da álgebra.

A fim de colhermos informações sobre o uso real de novas tecnologias em sala, como os docentes se eles utilizam recursos didáticos diferentes do quadro e giz em suas aulas de álgebra e, se fosse o caso que especificasse quais seriam. O gráfico 8 e 9 ilustram as posições obtidas. esses outros recursos.

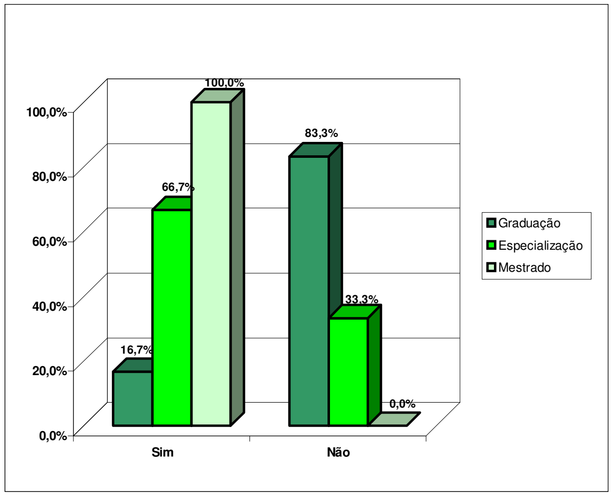


Gráfico 8: Utiliza recursos em sala de aula além do quadro e giz.

É de relevância que todas as possibilidades de recursos em sala de aula, que são efetivamente sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), são utilizadas pelos docentes entrevistados no ensino da álgebra. A resolução do problema está evidenciada pelos professores com mestrado, dos quais 20% utilizam esse recurso em suas aulas. A história da matemática está evidenciada pelos professores com especialização, dos quais 20% utilizam desse recurso. As tecnologias da informação está evidenciada pelos docentes do ensino fundamental, e do ensino médio, dos quais 52,2% utilizam o recurso da tecnologia, mas somente 32,2% dos entrevistados utilizam o recurso computacional no ensino da álgebra. E Jogos, dos docentes que utilizam essa ferramenta esse evidencia os professores com graduação, dos quais 50% dos entrevistados utilizam esse recurso. Como ilustra o gráfico 9. 61,1% dos docentes utilizam recursos além do quadro e giz em suas aulas e quase a totalidade dos docentes que possuem mestrado, os mesmo utilizam de vários recursos além do quadro e giz, como: recursos tecnológicos, resolução de problemas e jogos no ensino da matemática.

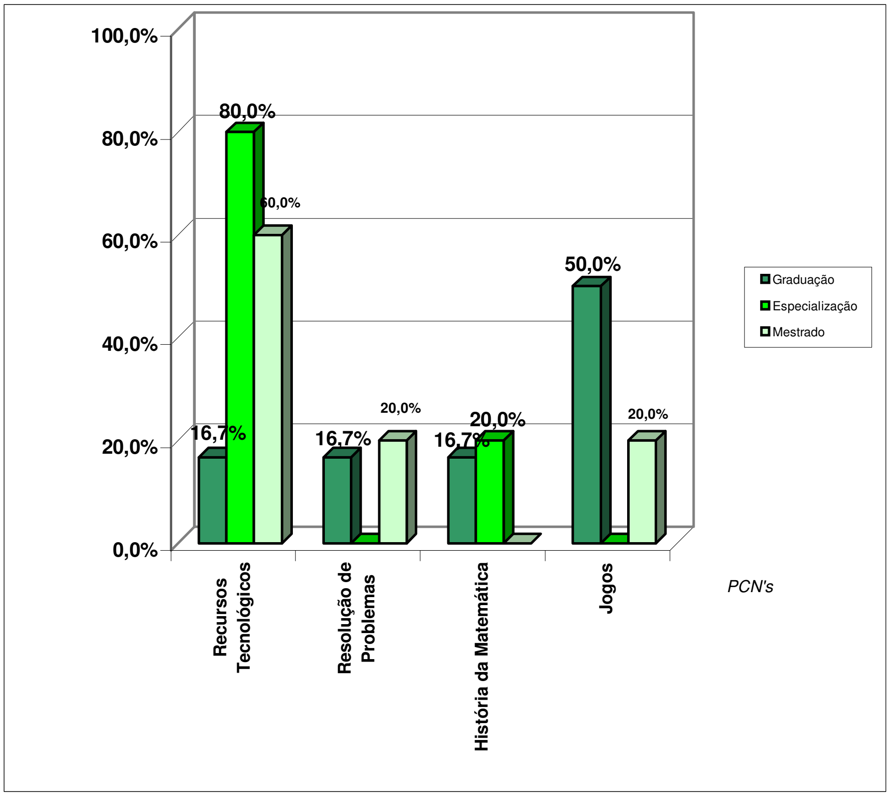


Gráfico 9: Utiliza recursos em sala de aula além do quadro e giz.

O recurso mais utilizado entre aqueles sugeridos pelos PCN's está o recurso tecnológico. Esses recursos abrangem a utilização de calculadoras, do computador etc. Na utilização do ensino de álgebra temos 32,2% dos docentes com ênfase no ensino da álgebra.

Obtidos os sentimentos dos docentes entrevistados sobre o uso do computador como recurso no ensino da **álgebra**. A resposta às questões XV a XX do questionário (posto no anexo B), foram catalogadas e colocadas na tabela 10 e 15, respectivamente. Catalogamos que 8,3% dos docentes entrevistados que possuem graduação discordam da utilização destes recursos no ensino da álgebra. Como ilustra o gráfico 10.

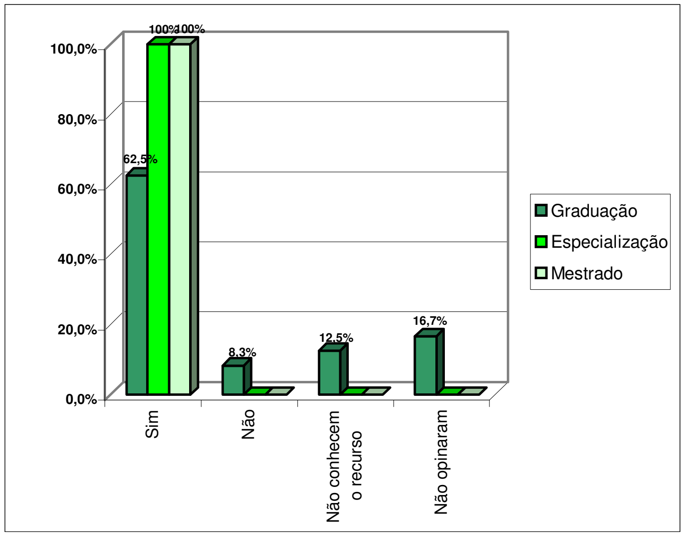


Gráfico 10: Recursos computacionais no ensino da álgebra.

Algumas informações relacionadas aos relatos dos docentes representam um fator importante em nosso trabalho e influenciam a nossa proposta de métodos de uso de sistemas formativos computacionais como instrumento de apoio aos processos de ensino/aprendizagem da álgebra. Dentre estes destacamos no que se segue, alguns emitidos por docentes com mestrado que opinaram livremente sobre o uso da informática no ensino de álgebra:

"É um recurso que me identifico. Importante quando inserido em uma metodologia de exploração da Matemática mais manipulativa. Por exemplo, trabalhar padrões numéricos no Excel para Ensino de Expressões Algébricas, trabalhar o comportamento de funções no GraphMath para explorar o comportamento de famílias de funções, trabalhar complexos no Tabulae aliando a visão algébrica e geométrica do conteúdo".[80]

[80] Depoimento dado pela docente P_1 que possui mestrado.

"Acho válido, desde que bem utilizado. O computador ajuda, pois agiliza e dá dinâmica às transformações ou as interpretações geométricas das manipulações algébricas, mas é preciso registrar, investigar e formalizar principalmente no ensino médio, senão acredito que as deduções visuais se perdem".[81]

Há também de se notar que todos os professores que têm especialização estão de acordo quanto a utilização do computador como instrumento de importante apoio no ensino da álgebra. Nesta direção o depoimento da professora P_5 é bastante sucinto mas englobado:

"Excelente, se souber utilizá-lo"[82]

Não obstante, para os docentes que possuem apenas graduação 8,3% são contra o uso de recursos tecnológicos no ensino da álgebra, como o relato dos professores P_{20} e P_{21} respectivamente.

"Não há tempo suficiente para aplicar diferentes métodos para o ensino da álgebra."

"Bem limitado, talvez trabalhando com áreas e perímetro para formalizar soma, quadrado da soma".

Há de ressaltar, no entanto, que 62,5% dos docentes entrevistados concordam com a utilização de recursos advindos das novas tecnologias no ensino da álgebra. Neste sentido, o depoimento da professora $\mathbf{P_8}$ estes fatos.

"Acho muito bom, pois desperta a curiosidade e o interesse dos alunos por algo novo. Além de facilitar a apresentação do conteúdo de várias maneiras."

Concordado pelo depoimento do professor P_{30}.

---

[81] Depoimento dado pela docente $\mathbf{P_2}$ que possui mestrado.

[82] Depoimento dado pela docente $\mathbf{P_5}$ que possui mestrado.

“Acho interessante deste que o profissional esteja preparado e o software seja ‘amigável’**.”**

Em acordo com o que nossa contribuição central sinaliza, a totalidade dos depoimentos favoráveis à utilização do computador como instrumento de apoio aos processos de ensino/aprendizagem da álgebra fortaleceu a nossa premissa de que não basta ter apenas o computador fisicamente em sala de aula, mas faz-se necessário uma política séria voltada para a capacitação de profissionais visando habilitá-los a trabalhar com novas tecnologias de informação e comunicação. Obviamente, esta capacitação deve acompanhar a disponibilidade no mercado de sistemas computacionais formativos no que tange suas aplicabilidades e eficiência. Aprovando este nosso sentimento encontra-se o depoimento da professora $\mathbf{P_1}$.

“O valor do uso de software não esta na potencialidade do recurso apenas, mas na maneira em que o professor conduz as atividades. O uso de softwares pode não provocar mudanças no aprendizado do aluno se for usado com o enfoque de tutorial apenas.”

Há de se admitir, e com uma certa preocupação que a pragmática da sala de aula encontra-se muito aquém do sugeridos pelos professores doutores quanto ao uso de novas tecnologias de informação e comunicação em sala de aula. Com efeito, embora possamos parecer redundantes, nunca é demais alertar para a enorme dicotomia existente entre o “ideal” dos processos de ensino/aprendizagem de álgebra e o “real” desses processos encontrados nas diversas salas de aulas as quais tivemos acesso no decorrer da preocupação deste trabalho de pesquisa. Com efeito, um dado preocupante que colhemos é o fato de 12,5% dos docentes entrevistados não conhecerem nenhum software algébrico e 16,7% dos docentes conseguiram responder seguramente sobre este tópico.

A fim de se esquadrinhar o conhecimento sobre quais os sistemas computacionais formativos são eficientes utilizados em sala de aula e se esses sistemas são livres ou comerciais e, obter informações sobre o conhecimento se o uso desses sistemas favorecem os processos de ensino/aprendizagem de álgebra, formulamos questões especialmente concebidas para este fim conforme mostra o questionário no anexo B.

O gráfico 11 mostra o percentual obtido nesse tema.

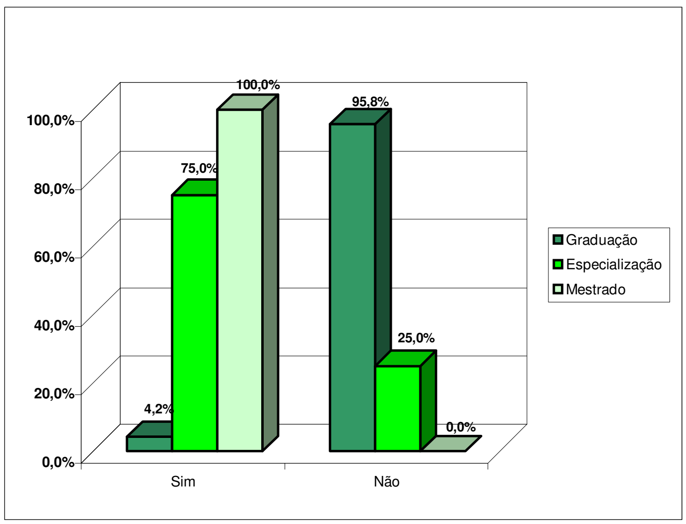


Gráfico 11: Utiliza recursos computacionais no ensino da álgebra.

O gráfico 11 ilustra que os docentes entrevistados que possuem graduação 4,2% utilizam sistemas computacionais formativos no ensino de álgebra. A professora P_6 utilizou o seguinte sistema computacional formativos “Operação Netuno”[83] no ensino/aprendizagem de álgebra, utilizou esse sistema no conteúdo de “Cálculos algébricos”.

[83] O programa é comercial disponível em: http://www.educasoft.com.br/Telas/netuno.htm. Acesso em 08 de dezembro de 2004.

Uma informação interessante é que setenta e cinco por cento dos docentes entrevistados que possuem especialização trabalham com sistemas computacionais formativos. A professora P_{10} trabalha com o sistema ***GraphMath***[84] desenvolvendo o conteúdo de "**funções**". Esse sistema é **livre** e a professora comenta que favorece fortemente o aprendizado de "análises de gráficos".

A totalidade dos professores que possuem mestrado utiliza sistemas computacionais formativos em sala de aula. Um exemplo é dado pela professora P_1 que já utilizou os seguintes sistemas computacionais formativos: "**Excel*, GraphMath*, *Tabulae***[85]". Os sistemas considerados comerciais são: **Excel** e o ***Tabulae*** enquanto o ***GraphMath*** é livre. Conteúdos que podem ser aplicados com bastante performance com esses sistemas são*: "...padrões numéricos no Excel para Ensino de Expressões Algébricas, trabalhar o comportamento de funções no GraphMath* para explorar o comportamento de famílias de funções, trabalhar complexos no *Tabulae* aliando a visão algébrica e geométrica do conteúdo". Segundo a professora P_1 esses sistemas favoreceram o aprendizado, pois "Na ação de escrever formulas no Excel o aluno está escrevendo expressões algébricas; na construção de gráficos no *GraphMath* há a facilidade do tempo de construção e a exploração das famílias; Aliar a Álgebra à Geometria amplia a visão quando usamos os softwares de Geometria Dinâmica".

O software algébrico mais utilizado pelos professores entrevistados foi o *GraphMath*[86] (27,2%), seguidos do *Maple*[87] (18,2%) e do *Tabulae* (18,2%). É de se notar que embora o *Tabulae* seja um sistema voltado para a geometria dinâmica,

---

[84] Disponível em: http://www.graphmath.com/. Acesso em 08 de dezembro de 2004.
[85] Software de geometria dinâmica desenvolvido por professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). O pedido do software pode ser feito pelos e-mail do professor Luiz Carlos Guimarães (lcc@labma.ufrj.br) ou da professora Elizabeth Belfort (beth@dmm.im.ufrj.br).
[86] O sistema computacional *GraphMath* é muito semelhante ao software analisado no capitulo 5, o *WinPlot*.
[87] O sistema computacional *Maple* está analisado no capitulo 5.

muitos docentes o utilizam no ensino da álgebra, conforme demonstra o gráfico 12. De todos os sistemas computacionais formativos que os docentes afirmam lançar mão para o ensino da álgebra a maioria tem aplicabilidade no estudo de funções (50%), conforme o gráfico 13.

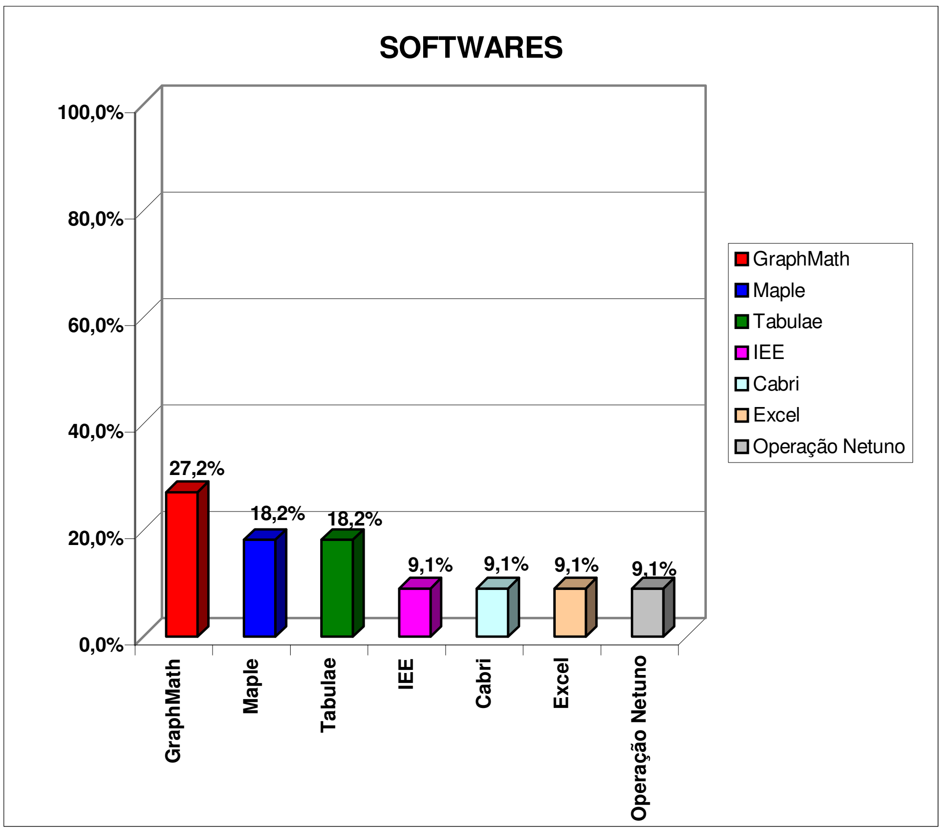


Gráfico 12: Sistemas mais utilizados no ensino de álgebra.

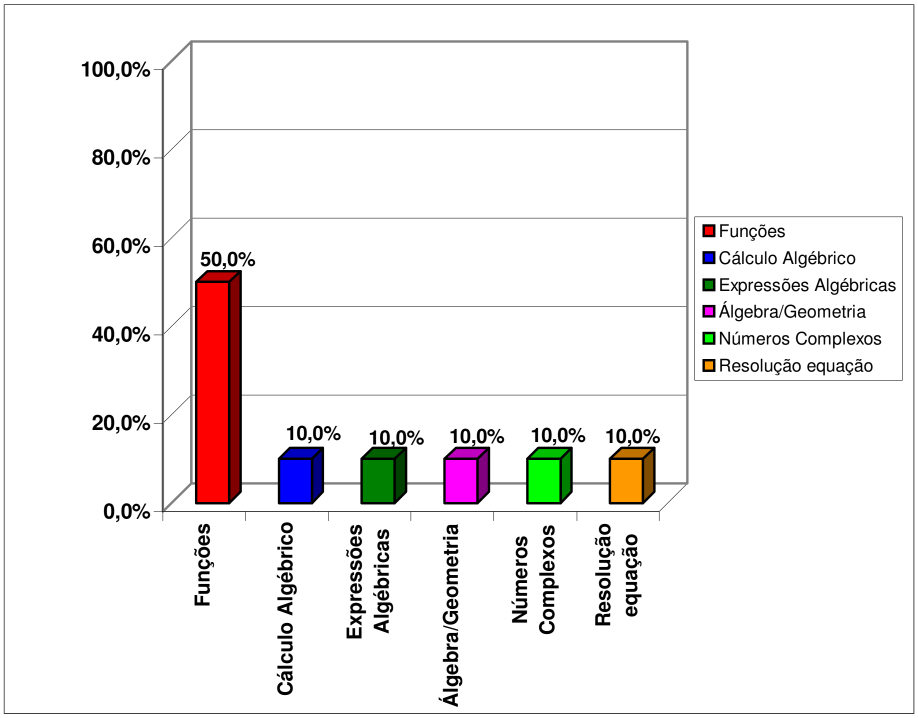


Gráfico 13: Conteúdos mais utilizados nos sistemas computacionais algébricos.

Como havíamos notado anteriormente neste trabalho, um dado importante também deve ser ressaltado aqui: 75% dos docentes entrevistados relacionaram o uso de recursos computacionais como uma ferramenta facilitadora que pode proporcionar aulas diferenciadas.

No entanto, como é de praxe em toda pesquisa cientifica, fomos averiguar os duais dos fatos obtidos. Assim sendo, conforme demonstra o questionário do anexo B, achamos interessante buscar informações sobre os motivos pelos quais os professores laçam mão de recursos computacionais nos processos de ensino/aprendizagem da álgebra.

Neste aspecto, a justificativa de 95,8% dos professores que tem graduação por não utilizarem sistemas computacionais formativos no ensino da álgebra, foram:

- Por não ter conhecimento de sistemas computacionais. – 36,5%;

- O colégio em que lecionam não têm laboratório de informática. – 36,5%;
- O colégio em que lecionam têm laboratório de informática, mas o professor não pode utilizar. – 9,0%;
- O colégio em que lecionam têm laboratório de informática, mas não têm condições financeiras para adquirir sistemas computacionais. – 9,0%;
- Não responderam a questão – 9,0%.

A justificativa de 25,0% dos professores que têm especialização para não utilizar sistema computacional no ensino da álgebra, foi:

- O colégio em que lecionam não têm laboratório de informática. – 100,0%

Podemos destacar que 35,3% dos docentes que possuem graduação e dos que possuem pós-graduação justificaram a não utilização do recurso computacional nas aulas de álgebra por não terem conhecimento de sistemas computacionais formativos algébricos. Por outro lado 38,3% justificaram a não utilização de sistemas algébricos por não existir laboratório de informática no colégio em que trabalham.[88]

A estimativa da população brasileira segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)[89], no dia 9/3/2005 às 21 horas e 2 minutos, é de 183.211.807 habitantes. Segundo a fonte do Instituto Brasileiro de Opinião Pública e Estatística (IBOPE)[90] o "... número total de usuários que utilizaram computadores com acesso Web atingiu 8,52 milhões..."[91]. Se supormos um crescimento de 2% ao ano, no primeiro trimestre de 2005 deveremos ter 8,77 milhões de usuários acessando a Web. Um cálculo simples criando esses dados nos leva a concluir que apenas 4,79% da população brasileira terá acesso a Internet no primeiro trimestre de

[88] Esses dados acima comprovam que a aquisição de computadores seja pelos professores ou pelas instituições de ensino é um recurso caro e que ter acesso a Web se torna ainda complicado.
[89] Disponível em: http://www.ibge.gov.br/. Acesso em 09 de março de 2005.
[90] Disponível em: http://www.ibope.com.br. Acesso em 09 de março de 2005.
[91] Disponível em: http://www.ibope.com.br/calandraWeb/servlet/Calandra_Redirect?temp=5&proj=_PortalIBOPE&pub=T&db=caldb&comp=Internet&docid=637360B720BC66A783256ECA00657AD2 . Acesso em 09 de março de 2005.

2005. Em outras palavras, 95.21% da população brasileira ainda não tem acesso a Internet, donde se conclui, por conseqüência imediata, que a falta de acesso a web é um forte motivo pelo qual os docentes entrevistados não conhecerem nenhum sistema computacional formativo algébrico .

A titulo de curiosidade, uma consulta ao google[92], em português, com o subject "*software*" "matematica" efetuada no dia 11/02/2005 proporcionou 165.000 resultados (como podemos observar a figura 160). E uma consulta similar com o subject "*software*" "*algebra*" em páginas da *Web,* foram encontrados 8.810 resultados (como podemos observar a figura 161). Assim, está claro se, um docente tiver acesso a Web (e se estiver capacitado para a utilização de sistemas computacionais formativos) ele poderá navegar e descobrir uma gama imensa variedades de sistemas para o ensino da matemática em geral e da álgebra em particular. É fácil deduzir que um pequeno passo suplementar pode levá-lo ao uso destes sistemas em suas aulas.

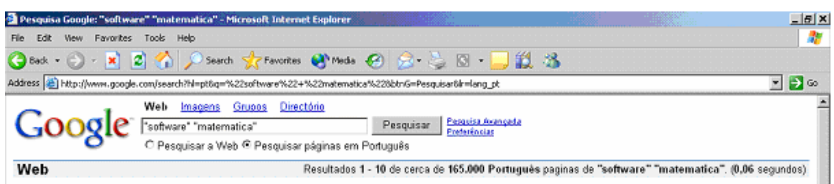


Figura 159: Resultados obtidos no google para "software" e "matemática".

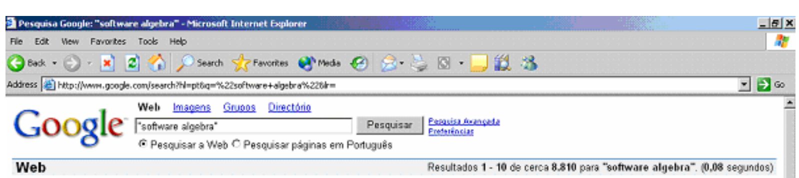


Figura 160: Resultados obtidos no google para "software" e "álgebra"

[92] Disponível em: http://www.google.com. Acesso em 11 de fevereiro de 2005.

4.4 Conclusão

O espaço amostral de nossos dados ainda não é grande, e o levantamento de dados é feito de forma simplória e não pode ser ainda considerado como uma experimentação formal. Não se pretendendo tratar estatisticamente a massa de dados aqui obtida. A nossa meta se satisfaz com a colheita dos “sentimentos” dos professores que efetivamente adotam em sala de aula o ensino da álgebra. A nossa contribuição volta-se mais para o estabelecimento de parâmetros que venham a existir na dicotomia existente entre o “ideal” dos processos de ensino/aprendizagem de álgebra e o ensino real e pragmático desta disciplina. Este capítulo é, no entanto, importante para contribuição central do nosso trabalho por reunir um anteparo real de caráter algébrico e, por conseqüência nos permitir de validar a nossa hipótese de que o uso de sistemas computacionais formativos podem ajudar significamente nos processos de ensino/aprendizagem da álgebra.

Extrai-se dos dados obtidos que dos docentes entrevistados que lecionam no ensino fundamental e no ensino médio, 22,6% utilizam recursos computacionais para ensinar álgebra. Esse percentual pode ser considerado ainda muito “aquém” do esperado atualmente.

As tecnologias de informação e de comunicação estão cada vez mais se desenvolvendo, estão se tornando uma realidade cada vez mais presente, e infelizmente, a dura realidade do professor de álgebra na sala de aula mostrada pelo percentual acima válida a nossa afirmação de que seja urgente a implantação de sistemas computacionais formativos no ensino da álgebra desde que, e é o que vai ao encontro de nossa contribuição central, existam metodologias bem estabelecidas, sobretudo concernentes à escolha do sistema apropriado para o tema.

A entrevista do professor doutor Y, quando exprime que o maior obstáculo existente nos processos de ensino/aprendizagem de álgebra está no “não cumprimento dos programas na maioria das escolas”, também vai ao encontro das análises que fizemos neste capítulo. Com efeito, uma grande parte dos docentes de álgebra desconhece o conteúdo ensinado e tem por único apoio o livro texto indicado.

Polya (1980) explicativa brilhantemente esse tema, ao qual admitimos estar completamente de acordo:

> “**Dez Mandamentos para os Professores**”
> **1.** Tenha interesse pela sua matéria.
> **2.** Conheça sua matéria.
> **3.** Procure ler as expressões faciais dos seus alunos; procure descobrir as suas expectativas e as suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.
> **4.** Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.
> **5.** Dê aos seus alunos não apenas informação, mas *know-how*, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
> **6.** Faça-os aprender e dar palpites.
> **7.** Faça-os aprender a demonstrar.
> **8.** Procure encontrar, no problema que está abordando, aspectos que poderão ser úteis nos problemas que virão – procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.
> **9.** Não desvende o segredo de uma vez – deixe os alunos darem palpites antes – deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.
> **10.** Sugira, não os faça engolir à força.

Desta forma, podemos parcialmente concluir que o não cumprimento dos conteúdos poderia não estar relacionado diretamente a utilização ou não de recursos computacionais nas aulas de álgebra, mas, como já descrevemos, existiria uma enorme possibilidade de por um lado, um melhor “matriz” de conteúdos necessários e, por outro lado, um acréscimo na gama desses conteúdos. O aporte cognitivo, em ambos os lados, estaria regulamente acrescido.

CAPÍTULO 5

Não seria aconselhável a indicação de um único sistema computacional formativo para ser utilizado nos processos de ensino/aprendizagem de todos os conteúdos algébricos. Com efeito, de um desses sistemas pelo professor associado à forma com a qual trabalhará os conceitos com seus alunos, são fatores importantes que podem determinar se o computador será uma ferramenta importante no ensino da álgebra ou apenas uma máquina de exercícios automáticos.

> Depende de como é utilizado. O micro ajuda a desenvolver o raciocínio da criança se as atividades propostas derem a ela chance de criar levantar hipóteses e argumentar. Para isso, o professor pode usar estratégias que tornem o micro uma ferramenta de trabalho desafiadora para o aluno. Alem disso, é preciso escolher bem os softwares. Se a atividade ou o programa derem tudo pronto à criança, ela se tornará apenas um elemento passivo e não irá construir nenhum conhecimento ou desenvolver a criatividade. (Estela Kaufman, 2004).

5.1 SISTEMAS FORMATIVOS e suas APLICABILIDADES no EF e no EM

Como professor de Álgebra, temos percebido que a utilização de planilha Excel é particularmente interessante no ensino dessa disciplina porque permite que entre outras coisas que, o aluno se envolva num processo interativo de resolução ou de modelação de um determinado problema. Ou seja, a sua utilização pode ser associada às abordagens metodológicas de resolução de problemas ou modelagem matemática.

Os processos de ensino/aprendizagem que podem ser abordados pelo Excel envolvem freqüentemente a construção de gráficos de funções afins e funções quadráticas. Na construção de gráficos de funções quadráticas, pode-se enriquecer essa atividade através de argumentações. Um exemplo seria verificar se é possível plotar todos os gráficos de funções quadráticas, quando as raízes fazem parte da tabela, na qual o gráfico se correlaciona. Se isto é possível então, de que forma ficaria a tabela para a construção do gráfico quando as raízes da função forem números complexos? Esta dificuldade se avoluma na medida em que uma planilha não reconhece o conjunto dos números complexos. O levantamento de hipóteses se fez então necessário.

A aplicação do Dispositivo de Briot-Ruffini, Teorema de D'Alambert podem levar às conjecturas lógicas e os valores numéricos para a resolução de problema

É sabido, que os conceitos algébricos freqüentemente demandam o levantamento dos pontes que dão origem aos gráficos de funções associadas. Desta forma, e por conseqüência imediata, os conteúdos de funções afins e funções quadráticas são freqüentemente os mais utilizados, como circunstâncias dessa classe de problemas.

Os conteúdos de funções (afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas) podem ser manipulados pelo sistema Excel, mas, no entanto, análise de famílias de funções poderá exibir uma eficácia maior no Winplot. Com efeito, neste caso, possibilita-se os conteúdos relacionados com relativos critérios de facilidade e simplicidade.

No conteúdo de geometria analítica plana[93] e espacial[94] (freqüentemente explorada somente no ensino médio), deve ser destacado o estudo das cônicas. O

[93] Equação da reta, circunferência, elipse, hipérbole e parábola.

sistema Derive, por exemplo, mostrou uma grande eficácia e facilidade na construção de superfícies e suas interseções[95].

O Derive pode ser também facilmente utilizado no ensino de conteúdos de resolução equações do segundo grau, determinação do zero da uma função quadrática e/ou no estudo de parábolas[96], todos eles resolvidos freqüentemente via o método de completar quadrados. O Derive permite a expressão de um raciocínio lógico e advoga o procedimento a ser tomado a cada passo. É possível assim o seu uso nos conceitos primordiais da álgebra.

A álgebra do ensino fundamental pode ser abordada pelo sistema Aplusix[97]. Este sistema tem uma especial habilidade no tratamento do raciocínio algébrico.

Nenhum dos softwares estudados tem uma aplicação no estudo de números complexos diretamente, mas se o professor trabalhar os números complexos de forma vetorial é possível utilizar o software Winplot ou Derive e saindo um pouco do estudo realizado com softwares algébricos, esse mesmo conteúdo poderá ser trabalhado com softwares de geometria dinâmica, como por exemplo, Tabulae.

Analisando a importância da educação e sua atuação no desenvolvimento mental, Vygotsky (1984, p 99) chega à seguinte conclusão:

"O aprendizado humano pressupõe uma natureza social especifica e um processo através do qual as crianças ingressam na vida intelectual".

Então se conclui que o ensino não deve ser apenas concreto deve ter momentos de abstração. É por isso que Vygotsky diz:

---

[94] Equação da reta no R^3, equação do plano e equação da esfera.
[95] Como pode ser observado no capítulo 4 a partir da página 117.
[96] Parábola é o conjunto de pontos do plano eqüidistantes a um ponto fixo e a uma reta, que não contém o ponto. O ponto fixo chama-se **foco** e à reta chama-se **diretriz** da parábola. De um modo geral, toda equação da forma $y = a(x-h)^2 + k$ ou $x = a(y-h)^2 + k$ descreve uma parábola.
[97] Disponível em: http://aplusix.imag.fr/index-pt.htm. Acesso em 14 de outubro de 2004.

> Um ensino baseado somente no concreto - um sistema que elimina do ensino tudo aquilo que está associado ao pensamento abstrato - falha em ajudar as crianças retardadas a superarem suas deficiências inatas, além de reforçar essas deficiências, acostumando as crianças exclusivamente ao pensamento concreto e suprimindo, assim, os rudimentos de qualquer pensamento abstrato que essas crianças ainda possam ter” (1984:100).

Contudo,

> O aprendizado não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer (Vygotsky, 1984, p.101).

Refletindo o pensamento de Vygotsky sobre desenvolvimento mental, os *softwares Algebra One on One* e o *Winplot* participam com grande cumplicidade nesse processo.

CAPÍTULO 6

6.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo central deste trabalho foi contribuir para o avanço da álgebra, notadamente em termos de qualidade em seu ensino. A fim de atingir esse objetivo, nós esfetuamos um trabalho de campo que constituem em entrevistar professores algebristas, de renome nacional e internacional, e oscultar, paralelamente, professores de álgebra do ensino fundamental e médio. Um resultado obtido com este trabalho de campo foi uma base de informações (tanto quantitativas quanto qualitativas) sobre a qual pudemos fazer uma análise própria e esquadrinhar algumas dicotomias interessantes entre o que é preconizado como “ideal” pelos professores doutores e o “real” explicitado pelos professores que labutam a álgebra na sala de aula.

A nossa contribuição central repousa exatamente sobre a tentativa de estabelecer alguns parâmetros tecnológicos que possam ajudar a diminuir essa distância ente o “ideal” e o “real”. Para este fim, estudamos cerca de vinte sistemas computacionais formativos algébricos e escolhemos seis deles para fazer um detalhamento mais aprofundado sob a égide de nossa idéia principal: como o uso desses sistemas podem ajudar na formação de alunos de álgebra. O estudo aprofundado destes sistemas formativos também obedece a uma certa sistemática de aplicação. Com efeito, buscou-se não apenas detalhar os atributos desses sistemas relativos à processos de ensino e aprendizagem como também detalhamos as suas potencialidades algébricas através de seus usos em problemas algébricos interessantes.

Em outras palavras, buscou-se não apenas conhecer o mérito de cada sistema em termos de suporte educacional, mas também o mérito dele enquanto sistema capaz de proporcionar resoluções de problemas algébricos.

Assim sendo, tendo esquadrinhado as dicotomias e problemas no ensino de álgebra e estudado detalhadamente alguns sistemas formativos, pudemos estabelecer certos critérios de utilização e uma relação biunívoca ente quais sistemas formativos e quais temas algébricos são interessantes de serem utilizados em processos de ensino e aprendizagem.

6.2 TRABALHOS FUTUROS

A álgebra é o mesmo tempo bela e complexa. Trabalhar com álgebra é um desafio constante mas enriquecedor. O raciocínio algébrico, por ser encantador e abstrato, requer uma certa maturidade. Mas temos plena certeza, trabalhar com Álgebra é extremamente gratificante. Por esta razão, temos plena convicção que os trabalhos que aqui propomos como "futuros" não serão tão "futuros" assim. Eles estão aqui apontados exatamente nas deficiências fundamentais desta dissertação.

Assim, podemos destacar como trabalhos futuros importantes:

1. Aumentar o espaço amostral das pesquisas efetuadas com os professores doutores e com os professore do ensino fundamental e médio;
2. Tratar estatisticamente os dados obtidos em (1);
3. Explorar mais temas algébricos e sistemas formativos a fim de verificar quais sistemas estariam indicados para melhor tratar essa novos temas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, P. F. **Projeto EDUCOM: Realizações e Produtos**. Brasília: MEC/OEA, 1993.

ANTUNES, Celso. **As Inteligências Múltiplas e seus Estímulos**. 10ª edição, Campinas, SP, Papirus. 1998.

APOSTOL, Tom M. **Cálculo**. Barcelona, Editora reverte, ltda., 1994, Volume 1.

APOSTOL, Tom M. **Cálculo**. Barcelona, Editora reverte, ltda., 1981, Volume 2.

BICUDO, Maria Aparecida. V. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas.** São Paulo, UNESP, 1999.

BOYER, Carlos B. **História da matemática**. 2ª edição, São Paulo, SP, Edgard Blücher Ltda, 1998.

BIEMBEGUT, Maria Salett. **A Modelagem Matemática & Implicações no Ensino – Aprendizagem de Matemática**. Blumenau SC: Editora da FURB, 1999.

BORK, Alfred. Interactive Learning. **The Computer in School: Tutor, Tool, Tutee**. New York, p. 53 - 66, 1980. Disponível em: http://www.citejournal.org/vol2/iss4/seminal/article1.cfm. Acesso em 02 de fevereiro de 2005.

CARAÇA, Bento de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9ª edição, Lisboa, Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CORTES, A., KAVAFIAN, N. and VERGNAUD, G. **From Arithmetic to Algebra: Negotiating a Jump in the Learning Process.** Proceeding of the fourteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education. Mexico, p 27 – 34, 1990.

CHURCHILL, RUEL VANCE, **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. São Paulo, McGraw-Hill, 1975.

D'AMBROSIO, U. **Educação para uma Sociedade em Transição**. 1ª Edição, Campinas, SP, Papirus, 1999.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. **A Álgebra como Ferramenta de Representação e Resolução de Problemas**. Em Schlieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs). Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

DAVIS, R. ICME-5, Report: **Algebraic Thinking in the Early Grades**. Journal of Mathematical Behavior, n. 4, p. 195 - 208, 1985.

DAVIS, R. (1989). Theoretical considerations: **Research Studies in How Humans Think About Algebra**. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.) Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, vol. 4, p. 266 – 274, 1989.

Demo, Pedro. **Metodologia do Conhecimento Cientifico**. Editora Atlas, São Paulo, 2000.

DOMINGUES, Higino H. e CARBO. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Olga. São Paulo. Atual 1997.

Everybody Counts*:* **A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education**. The National Academy of Sciences Press, Washington, D.C, p.61, 1989. Disponível em: http://www.nap.edu/books/0309039770/html/. Acesso em 08 de março de 2005.

FEY, J. Tecnologia e educação matemática: Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. Em J. P. Ponte (Org.), **O computador na Educação Matemática**. Série Cadernos de Educação Matemática, Lisboa: APM, nº 2, p. 45 - 79, 1991.

FOWLER, D. G. **A Model for Designing Intelligent Tutoring Systems**, Jornaul of Medical Systems, vol. 15, n.1, 1991.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**, Makron Books, São Paulo, 1997.

GOMES, Alex S. **Avaliação de Software Educativo para o Ensino da Matemática**. Florianópolis: WIE’2002, 2002.

HEBENSTREINT, J: Simulation e e Péagogie, une recontre du troisième type. Gif sur Yvette:; École superieure d’Eletreicite.

KAUFMAN, Estela. **Revista Nova Escola**, p. 20, março de 2004.

LESSA, M.M. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra: um estudo comparativo**. Dissertação de Mestrado. UFPE. Recife, 1996.

LIMA, Elon, CARVALHO, Paulo C., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio**. 2ª ed., Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. Volume. 1.

LIMA, Elon, CARVALHO, Paulo C., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio**. 2ª ed., Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. Volume. 2.

LIMA, Elon, CARVALHO, Paulo C., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C. **A Matemática do Ensino Médio**. 2ª ed., Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. Volume. 3.

LINS, Rômulo C. **A Framework for Undertanding What Algebraic Thinking**. 1992. 361f. Tese (Doutorado em Filosofia) – University of Nottingham, Reino Unido, 1992.

Lüdke, Menga e André, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagem Qualitativa**, EPU, são Paulo, 1986.

LUEHRMANN, Arthur, Should the Computer Teach the Student, or Vice-Versa?. **The Computer in School: Tutor, Tool, Tutee**, New York, p.129 – 135, 1980. Disponível em: http://www.citejournal.org/vol2/iss3/seminal/article1.cfm. Acesso em 02 de fevereiro de 2005.

MACHADO, Nilson José. **Epistmologia e Didática: As Concepções de Conhecimento e Inteligênica e a Prática Docente**. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 1996.

MIORIN, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio e FIORENTINI, Dario. **Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar**. Pro-posições, 1 (4), Campinas, SP, p.78-91, 1993.

MORAES, Maria Cândida. **INFORMÁTICA EDUCATIVA NO BRASIL: UMA HISTÓRIA VIVIDA, ALGUMAS LIÇÕES APRENDIDAS**, 1997. Disponível em http://www.inf.ufsc.br/sbc-ie/revista/nr1/mariacandida.html. Acessado em 15 de janeiro de 2005.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicação de Vygostsky à Educação Matemática**. Campinas, SP, Papirus, 1997.

Parâmetro Curricular Nacional (PCN) do Ensino Fundamental, Brasil, 1997.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1980.

Revista do Professor de Matemática, número 55, 1º quadrimestre, 2004.

SCHIFTER, D. **Developing Operation Senses as a Foundation for Algebra I**. Unpublished manuscript, 1989.

TAYLOR, Robert. P. **The Computer in School: Tutor, Tool, Tutee**. New York: Teachers College Press, página 1–10, 1980. The Cite Journal. Disponível em: http://www.citejournal.org/vol3/iss2/seminal/article1.cfm. Acesso em 02 de fevereiro de 2005.

VALENTE, José Armando. **Diferentes Usos do Computador na Educação**. Disponível em: http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/separatas/Sep1.pdf. Acesso em 25 de novembro de 2004.

VALENTE, José Armando. **Por Quê o Computador na Educação**. Disponível em http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/separatas/Sep2.pdf. Acesso em 25 de novembro de 2004.

VERA, Armando A. **Metodologia da pesquisa cientifica**, editora globo, porto alegre, 1998. 6ª edição

VYGOTSKY, L.S. **A Formação Social da Mente**. São Paulo, Livraria Martins Fontes Editora, 1984.

ANEXO A – FORMULÁRIO de PROFESSORES DOUTORES

Sou aluno do Mestrado em Informática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), orientado pelo Professor **Cabral Lima**. Minha dissertação tem por objetivo principal analisar: **O uso de sistemas computacionais no ensino da álgebra para o nível fundamental (EF) e médio (EM).**

A idéia é fazer uma análise “crítica” do atual ensino da álgebra e verificar a possibilidade de melhoria com o uso de sistemas computacionais destinados a esse fim.

Para isto a pesquisa se propõe a conversar com os principais algebristas brasileiros, com os professores do EF e EM e analisar os principais conteúdos de álgebra e os possíveis softwares atualmente usados para o ensino de álgebra.

Agradeço ao **Professor Adilson Gonçalves – UFRJ**, pela grande participação no desenvolvimento dessa dissertação.

Nome:

Instituição e ano do término do Doutorado:

Instituição em que trabalha no momento:

Linha(s) de Pesquisa em Álgebra:

1- O que você entende por álgebra?

2- Poderia destacar quais são os principais tópicos de álgebra abordados no ensino médio?

3- Você concordaria que os obstáculos maiores para um melhor ensino de álgebra está na forma em esses temas são apresentados mais do que, propriamente, no programa de álgebra do ensino médio?

4- Você acha que há um abuso do mecanicismo algébrico no ensino médio? Qual a importância do ensino da aritmética para o desenvolvimento do pensamento algébrico?

5- Quais seriam as principais características diferenciadoras entre a Aritmética e a Álgebra? Seria a Aritmética uma base especial para o desenvolvimento do raciocínio algébrico, sendo considerada um pré-álgebra?

6- Como tem têm chegado os alunos calouros de licenciatura nas universidades, em relação a sua formação algébrica?

7- Com que freqüência você utiliza recursos computacionais em suas pesquisas? Que tipos de softwares você se utiliza?

8- O que você acha sobre a utilização de recursos computacionais na álgebra do ensino médio? Em que tópicos? Que tipo de softwares?

9- Você já escreveu livro ou artigo de divulgação de interesse de alunos de Licenciatura ou para professores do ensino médio?

10- Por favor, fique livre para comentários gerais.

Muito obrigado pela sua atenção.

Marcelo André Abrantes Torraca

ANEXO B – FORMULÁRIO de PROFESSORES do EF e EM

Estou participando do Programa do Mestrado na Universidade Federal do Rio de Janeiro no Instituto de Matemática - Núcleo de Computação Eletrônica (IM-NCE/UFRJ) na área de Informática na Educação e minha área de pesquisa é: O uso de sistemas computacionais no ensino da álgebra para o Ensino Fundamental (EF) e Ensino Médio (EM). Essa entrevista é fundamental e de grande importância na preparação da minha dissertação.

Desde já agradeço. Atenciosamente.

Marcelo Torraca

I. Nome: ____

II. Qual é a sua maior titulação? ______________________________

III. Leciona em quais colégios? ______________________________

IV. Há quanto tempo você leciona no EF? E no EM? ________________

V. Caso tenha feito um **projeto final de curso**, **monografia**, **dissertação** ou **tese**, esta abordou questões sobre álgebra?

☐ Sim ☐ Não

✓ Qual o título? ______________________________________

✓ Que questões de álgebra sua monografia abordou? ________________

____

VI. Você já participou de **oficinas** ou **cursos** sobre o ensino da álgebra? O que foi abordado?

____

VII. Você já ministrou **oficinas** ou **cursos** que tratassem do ensino da álgebra?

1. Título: ____________________
2. Autor(es): ____________________
3. Qual assunto abordado nessa oficina?

____

4. Onde foi ministrada essa oficina? ____________________

____

5. Qual era o público alvo? ____________________

VIII. Você já escreveu algum **livro** ou **artigo** no ensino da álgebra?

☐ Sim ☐ Não

✓ Se **SIM**

i. Livro:

1. Título: ____________________
2. Autor(es): ____________________
3. Editora: ____________________

ii. Artigo:

1. Título: ____________________
2. Autor(es): ____________________
3. Quais os assuntos abordados nesse artigo?

____

4. Onde foi publicado seu artigo? ____________________

IX. O que você entende por álgebra? ____________________

____

____

____

X. Baseado no que você escreveu acima, quais os conteúdos, do EF e/ou EM, você **destaca** como algébricos? Por quê? ______________________________

____

____

____

XI. Dos conteúdos que foram citados no item (**X**), quais você destaca **como mais importante no ensino da álgebra**? Por quê? ___________________________

____

____

____

XII. Que conteúdos você **acha irrelevantes no ensino da álgebra**? Por quê?

____

____

____

XIII. Quais são os maiores problemas do Ensino da álgebra no EF? E no EM?

____

____

____

XIV. Você utiliza algum recurso além do quadro e giz para lecionar os conteúdos algébricos?

☐ Sim ☐ Não , qual?____

XV. Dê sua opinião sobre o uso do computador como um recurso no ensino da álgebra.

____

____

XVI. Você já utilizou algum software no ensino da álgebra?

☐ Sim - Ouestão **XVII** ☐ Não - Ouestão**XX**

XVII. Se **SIM**

iii. Qual é o nome do software? ______________________________

iv. Esse programa é de forma livre ou comercial? ______________________

v. Descreva os conteúdos aplicados? ____________________________

vi. Em que você acha que o uso desse programa favorece o ensino da álgebra? ____

____

XVIII. Que motivos o levaram a utilizar esse recurso computacional?

____

____

XIX. Quando você teve o primeiro contato com recursos computacionais?

____

____

XX. Se **NÃO**, por quê?

☐ Por não ter conhecimento de softwares.

☐ Seu colégio não tem laboratório de informática.

☐ Seu colégio tem laboratório de informática, mas você não pode utilizar.

☐ *Seu colégio tem laboratório de informática, mas o mesmo não tem condições financeiras para adquirir softwares.*

☐ Você não concorda com o uso do computador no ensino de matemática.

Por quê? ____

☐ Outras, quais?____

____

XXI. Por favor, fique livre para comentários gerais. ______________________

Muito obrigado pela sua atenção.

Marcelo André Abrantes Torraca