

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

CRISTIANE MOTA LOURENÇO

**Otimização do Valor Ordenado
Aplicado à Alocação de Recursos Humanos**

Profa. Dra. Luziane Ferreira de Mendonça
Orientadora

Rio de Janeiro
2009

Lourenço, Cristiane Mota

Otimização do Valor Ordenado Aplicado à Alocação de Recursos Humanos/ Cristiane Mota Lourenço. - 2009. 85 f. il.

Dissertação (Mestrado em Informática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, 2009.

Orientadora: Luziane Ferreira de Mendonça.

1. Otimização do Valor Ordenado Teses. 2. Alocação de Recursos Humanos - Teses. I. Luziane Ferreira de Mendonça(Orient.). II. Título

Cristiane Mota Lourenço

Otimização do Valor Ordenado Aplicado à Alocação de Recursos Humanos

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Informática do Instituto de Matemática e do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Informática.

Aprovada em 25 de novembro de 2009 por:

Profa. Dra. Luziane Ferreira de Mendonça
Orientadora
Depto. de Ciência da Computação - UFRJ

Profa. Dra. Véra Lucia da Rocha Lopes
Depto. de Matemática Aplicada - UNICAMP

Profa. Dra. Lilian Markenzon
Núcleo de Computação Eletrônica - UFRJ

Dedico este trabalho ao meu Deus, Jeová, à minha mãe e ao meu pai, seres que sempre torceram e fizeram o melhor por mim, até mesmo quando eu pensava que eles estavam fazendo o contrário.

Agradecimentos

A Deus pela oportunidade, pela proteção, pelas forças que Ele me deu para chegar até aqui. É preciso grande esforço para uma pessoa de origem humilde, trabalhar e fazer mestrado.

A minha orientadora pela assistência completa e total. Às vezes eu ficava desanimada, mas o ânimo dela sempre me contagiava, logo que entrava na sala dela. Além de excelente profissional, ela é ótima pessoa, atenciosa, paciente, alegre e simpática.

Ao meu professor da graduação Humberto Bortolozzi por ter despertado o meu interesse por esta área do conhecimento que utiliza Matemática e Informática, a Matemática Computacional.

Ao professor Haroldo Clark que me informou e me recomendou a fazer este Mestrado.

Aos colegas de Mestrado que me ajudaram, me alegraram e que compartilhamos as aflições de se fazer um mestrado em uma área que exige conhecimentos além daqueles obtidos na graduação de Matemática.

Aos meus pais, pois foi inspirada na força deles que muitas vezes consegui prosseguir.

A minha irmã pela leitura da dissertação e pelas boas sugestões, atendidas logo que as solicitei.

Ao meu esposo pela paciência nos momentos em que me dediquei mais tempo ao trabalho do que a qualquer outra área da minha vida.

E a todos aqueles que gostam e trabalham com atividades científicas, mesmo sendo um trabalho árduo e sem reconhecimento da sociedade.

Resumo

LOURENÇO, Cristiane Mota. Otimização do valor ordenado aplicado à alocação de recursos humanos. 2009. 85 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2009.

Neste trabalho propomos uma nova formulação para o problema de alocação de professores em turmas. A abordagem proposta permite o controle do percentual de professores satisfeitos (de acordo com os horários e disciplinas que desejam ministrar). A alocação é determinada via otimização do valor ordenado das preferências (problema OVO), o que difere da formulação tradicional (Minimax).

São apresentados alguns testes numéricos para a comparação entre as duas formulações.

Palavras chaves: Otimização do Valor Ordenado, Programação Linear Binária, Problema de Tomada de Decisão.

Abstract

LOURENÇO, Cristiane Mota. Otimização do valor ordenado aplicado à alocação de recursos humanos. 2009. 85 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2009.

In this work, we provide a new approach for the problem of assigning teachers/professors to classes. The proposed formulation allows to control the percentage of teachers/professors satisfied (in accordance with disciplines and schedules who wish to teach). The allocation is obtained through order value optimization of the preferences (OVO problem) which differs from the standard formulation (Minimax).

Some numerical tests are presented in order to compare and analyze both formulations.

Key words: Order Value Optimization, Binary Linear Programming, Decision-making Problems.

List of Tables

3.1	Transformação do tensor em vetor	42
4.1	Preferências de disciplinas de cada professor do teste 1.	49
4.2	Preferências de horários de cada professor do teste 1.	49
4.3	Horários das turmas por disciplinas do teste 1.	50
4.4	Resultado do teste 1 na formulação Minimax.	53
4.5	Resultado do teste 1 com $\gamma = 2$ e $p = 3$	54
4.6	Resultado do teste 1 com $\gamma = 2$ e $p = 1$	54
4.7	Resultado do teste 1 com $\gamma = 3$ e $p = 3$	55
4.8	Resultado do teste 1 com $\gamma = 3$ e $p = 2$	55
4.9	Resultado do teste 1 com $\gamma = 3$ e $p = 1$	56
4.10	Resultado do teste 1 com $\gamma = 4$ e $p = 3$	56
4.11	Resultado do teste 1 com $\gamma = 4$ e $p = 2$	57
4.12	Resultado do teste 1 com $\gamma = 4$ e $p = 1$	57
4.13	Preferências de disciplinas de cada professor do teste 2.	58
4.14	Preferências de horários de cada professor do teste 2.	58
4.15	Horários das turmas por disciplinas do teste 2.	58
4.16	Resultado do teste 2 na formulação Minimax.	61
4.17	Resultado do teste 2 com $\gamma = 3$ e $p = 3$	61
4.18	Resultado do teste 2 com $\gamma = 3$ e $p = 2$	62
4.19	Outro Resultado do teste 2 com $\gamma = 3$ e $p = 2$	63

4.20	Resultado do teste 2 com $\gamma = 3$ e $p = 1$	64
4.21	Preferências de cada professor por disciplinas do teste 3.	65
4.22	Preferências dos professores quanto aos horários do teste 3.	66
4.23	Horários das turmas por disciplina do teste 3.	66
4.24	Resultado do teste 3 na formulação Minimax.	69
4.25	Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 5$	70
4.26	Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 4$	71
4.27	Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 3$	72
4.28	Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 2$	73
4.29	Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 1$	74

List of Figures

2.1	Gráfico do conjunto de funções W	21
2.2	Exemplo de função máxima.	22
2.3	Exemplo de função OVO com $p = 2$	23
3.1	Esquema do método Branch & Bound para o exemplo.	46

Sumário

1	Introdução	13
1.1	O Problema de Alocação de Recursos Humanos	13
1.2	Breve Histórico da Alocação de Recursos Humanos	14
1.3	Objetivo	17
1.4	A formulação OVO	19
2	Problema OVO	20
2.1	Definição do Problema OVO	20
2.2	Algoritmo da Formulação OVO	24
2.2.1	Critério de Parada do Algoritmo do Problema OVO	29
2.3	Aplicações da Formulação OVO	30
2.3.1	Modelagem de Padrões Ocultos	30
2.3.2	Problema de Tomada de Decisão	32
3	Alocação de Professores	34
3.1	Caso particular da Alocação de Recursos Humanos	34
3.2	Descrição da Alocação de Professores Proposta	36
3.2.1	Modelo na Formulação OVO	40
3.2.2	Modelo na Formulação Minimax	44
3.3	Método Branch and Bound	45
4	Testes e Resultados Numéricos	48

4.1	Teste 1:	49
4.2	Resultados numéricos do Teste 1:	53
4.2.1	Resultados obtidos com $\gamma = 2$	54
4.2.2	Resultados obtidos com $\gamma = 3$	55
4.2.3	Resultados obtidos com $\gamma = 4$	56
4.3	Teste 2:	57
4.4	Resultados numéricos do Teste 2:	60
4.5	Teste 3:	64
4.6	Resultados numéricos do Teste 3:	69
4.7	Análise dos Resultados	74
5	Conclusão	77
A	Extensões da formulação OVO	79
A.1	Casos Particulares das Extensões da Formulação OVO	82
A.1.1	Quadrados Mínimos	82
A.1.2	Valor de Risco Condicional - CVAR	83
	Bibliografia	84

Capítulo 1

Introdução

1.1 O Problema de Alocação de Recursos Humanos

A alocação de qualquer tipo de recurso tem por objetivo distribuí-lo da maneira mais apropriada possível, sob determinadas circunstâncias e em determinado ambiente. Atualmente esta questão vem despertando grande interesse de cunho econômico, pois almeja-se aumentar os lucros, diminuir os gastos, mas sem afetar a produtividade.

A análise prévia das variadas formas de se organizar os recursos humanos pode suscitar maneiras menos custosas de manter seus funcionários e maneiras mais produtivas (e conseqüentemente lucrativas) de distribuí-los. Para uma grande quantidade de variáveis e/ou de restrições/exigências, a análise se torna mais complexa, sendo necessário o uso de ferramentas matemáticas e computacionais.

Tendo em vista este contexto, abordaremos um caso particular do Problema de Alocação de Recursos Humanos. A resolução deste consiste na construção de escalas de serviços e de horários, onde a finalidade é satisfazer a demanda de seus bens ou serviços da maneira mais proveitosa possível.

A complexidade desse tipo de problema aumenta de acordo com o nível de exigência que a solução deve satisfazer, tais como minimizar os custos, atender às preferências do trabalhador, distribuir igualmente os empregados entre os turnos, combinar as pessoas de maneira a formar uma melhor equipe, satisfazer as restrições quanto ao local de trabalho e/ou horário, etc.

Pensando nisso, Dantzig foi o primeiro a estudar o Problema de Alocação de Recursos Humanos. Em 1954, ele publicou o artigo [19] que tinha por objetivo otimizar o uso da mão-de-obra. Vários fatores foram considerados, entre eles as habilidades dos funcionários, os custos envolvidos, a eficiência obtida, a capacidade máxima operacional, a quantidade/tempo de intervalos, os dias de folga e os finais de semana livres.

Veremos na próxima seção que este tipo de problema já foi tema de muitas pesquisas.

1.2 Breve Histórico da Alocação de Recursos Humanos

O problema da distribuição de funcionários em postos de serviços em diferentes horários fez surgir estudos sobre os vários tipos de escala e períodos de trabalho. Para explicitar a evolução das pesquisas em torno da Alocação de Recursos Humanos, vamos citar alguns artigos que divulgaram resultados sobre o referido assunto.

- Segal [38] abordou o problema de alocar operadores de telefone de uma central de atendimento em turnos com horários de entrada, saídas e pausas variadas (o intervalo para o almoço e/ou para o lanche e dois intervalos de descanso durante cada turno). A solução foi encontrada utilizando uma modelagem baseada em redes (grafos). Emmons tratou do mesmo problema em [21], sendo que dividiu a semana em duas partes: dias de final de semana e dias úteis. Escalas rotativas foram criadas para estabelecer os dias de folga e os dias de trabalho dos funcionários durante o final de semana.
- No artigo [30], Mason et al. investigaram um caso periódico de alocação. Trata-se de um sistema baseado na simulação e otimização do pessoal aduaneiro do Aeroporto Internacional de Auckland na Nova Zelândia. O sistema alocava o pessoal em tempo parcial com seis dias de trabalho e três dias de folga de maneira a garantir o bom fluxo das bagagens e mercadorias.
- Em [28] Lin, Lai e Hung desenvolveram um sistema de apoio para administrar a distribuição de funcionários de acordo com a demanda prevista de um serviço que funcionava 24 horas por dia. Neste estudo, as taxas de abandono do serviço são relacionadas com a carga horária exigida. Foi utilizada uma abordagem de programação inteira mista para alocar os funcionários.

- Brusco e Jacobs [15] trataram de problemas com restrições relativas ao horário de início do serviço. Eles desenvolveram uma heurística para construir os quadros de horários dos que trabalhavam meio expediente e dos que trabalhavam em tempo integral. Já Burns e Carter [16] foram os primeiros a dar uma solução satisfatória para o problema dos dias de folga obrigatórios.
- Em [8], Bartholdi et al. montaram um quadro de horário de maneira a minimizar a mão-de-obra e conseqüentemente reduzir os custos. Este problema foi tratado via Programação Linear Inteira, usando uma matriz binária com entradas nulas e unitárias para criar uma escala rotativa.
- Beaumont [9] pesquisou se funcionários de uma empresa preferiam jornadas de trabalho longas com longos intervalos de descanso ou jornadas curtas com intervalos de descanso curtos. O problema foi formulado com programação linear inteira mista e os dias de trabalho e as folgas ao longo de um período de um ano foram estabelecidos.

À medida que o problema tem mais características, a quantidade de variáveis aumenta (ver [10]) e isto acarreta a necessidade de procedimentos mais sofisticados para solucionar os problemas modelados por programação inteira e de acelerar as verificações de convergência do método utilizado. Aykin [6], Bartholdi et al. [8], Bechtold e Jacobs [11], Brusco [14], Jarrah et al. [26], Brusco e Jacobs [15] tentaram acelerar a convergência, reduzindo o número de variáveis.

Na última década, inúmeras aplicações foram modeladas como um Problema de Alocação de Recursos Humanos. Podemos citar:

- Bard et al. [7] apresentam um estudo sobre a alocação de recursos humanos nos Correios dos Estados Unidos cujo o problema é formulado como em programação linear inteira binária.
- Blochliger [12] foca nos modelos de alocação de recursos humanos, exemplificando com a alocação de serviços e tarefas praticadas em um hospital.
- Ernst et al. [22] relatam a preocupação de uma empresa em atender às demandas de uma forma rentável e satisfatória em relação a uma série de requisitos, tais como acordos laborais flexíveis, preferências dos funcionários quanto à cargo e função, quais serviços devem funcionar só meio expediente e se os turnos terão a mesma duração.

Há vários artigos recentes na área da saúde cujo tema foi a satisfação e/ou insatisfação do trabalhador com suas tarefas laboriais, as suas causas e como isto afeta o desempenho nas atividades a serem realizadas:

- A autora de [32] abordou a satisfação no trabalho e o clima organizacional. Através do reconhecimento da importância destes aspectos na prática gerencial, buscou proporcionar ao enfermeiro subsídios para favorecer o estabelecimento de uma equipe de enfermagem e de um ambiente de trabalho saudáveis.
- No artigo [1] foi verificada a existência de relação das condições de trabalho com a satisfação e das características do trabalho com a motivação.
- As autoras de [42] investigaram os motivos geradores de satisfação e de insatisfação com trabalho dos funcionários de um Centro de Material e Esterilização de um hospital. Além disso, elas abordaram o respectivo grau de satisfação ou de insatisfação para poder caracterizar o perfil desse tipo de funcionário.
- Em [31], as autoras traçaram o perfil dos profissionais de enfermagem nos aspectos pessoais e profissionais; descreveram a percepção dos mesmos acerca da satisfação e do estresse no trabalho, além dos fatores de estresse no centro cirúrgico.
- Em [23] foi considerada a importância da saúde do trabalhador e a sua influência sobre os serviços por ele prestados. É mostrado que o bom relacionamento interpessoal, o apoio dos colegas e a satisfação em trabalhar com os colegas são elementos motivadores no ambiente de trabalho.
- No artigo [37], as autoras identificam o nível e os motivos de satisfação dos enfermeiros com o trabalho hospitalar.

Assim, notamos que a aplicabilidade da Alocação de Recursos Humanos é relevante, pois ela pode contribuir e muito para a melhoria qualitativa dentro de organizações que possuem serviços desenvolvidos por equipes. Os últimos artigos mencionados relatam também a satisfação e/ou insatisfação do trabalhador com suas atividades laborais.

Esse tipo de problema já foi abordado em outras áreas, incluindo a educação. Vejamos alguns trabalhos sobre a designação de professores:

- Em [18] fizeram a distribuição dos professores no Colégio da Polícia Militar - PR usando modelagem matemática e um software próprio para resolver problemas de otimização.
- Os autores de [17] usaram e compararam vários algoritmos na construção do quadro de horários de uma escola padrão da Itália.
- No trabalho [34] é apresentado um ambiente de apoio à construção de horário escolar que foi aplicado na rede estadual de ensino do Ceará.
- Já o autor de [27] desenvolveu uma modelagem matemática para o problema de uma escola da rede municipal de Prudentópolis - PR e resolveu através de um software próprio para problemas de otimização.
- No trabalho [25] foi desenvolvido um protótipo com três algoritmos (exato, heurístico e misto) utilizado para montar o quadro de horário escolar. A distribuição das turmas é feita de maneira a atender as preferências dos professores, além das exigências pedagógicas e operacionais na Escola Municipal Planalto dos Pinheiros, no município de Araucária-PR.
- Em [13] pesquisaram como montar uma grade horária em uma instituição de ensino superior, sendo que foi necessário fazer a otimização também dos recursos físicos.

Entretanto, não foi encontrado na literatura trabalho que investigasse e modelasse a influência do percentual de professores satisfeitos com a alocação e distribuição de trabalho. Isto justifica o tema abordado nesta dissertação. Na próxima seção, descreveremos o nosso objetivo e as suas ligações com as pesquisas citadas.

1.3 Objetivo

Há várias publicações sobre alocação de recursos humanos, mas a maioria delas foca na minimização do custo ou na maximização do lucro, poucos abordam os fatores qualitativos como o bem estar dos funcionários, sua relação entre os colegas e a motivação no trabalho.

O aumento do bem-estar dos funcionários traz uma melhoria na qualidade dos serviços e/ou dos produtos, há uma diminuição do absenteísmo e da quantidade de licenças médicas devido ao desgaste laborial. Alguns trabalhos como [9], [32], [1], [42],

[31], [23], [25] e [37], citados na seção anterior, se concentraram no funcionário e nas diversas influências (boas ou más) que o serviço por ele realizado sofre. As influências variam de acordo com a equipe em que o funcionário está inserido, de acordo com o cargo, com as perspectivas de ser promovido, com a quantidade de horas trabalhadas, com o reconhecimento do seu trabalho, com a motivação e satisfação em realizar determinado serviço.

A resolução e modelagem de problemas de Alocação de Recursos Humanos que tenham por objetivo aumentar a satisfação e/ou bem estar dos funcionários é pouco explorada. Estudos como [23] e [1] comprovam que quanto maior for a satisfação do funcionário, maior e melhor será a sua produtividade. Esta é, portanto, uma das maneiras de obter melhoramento qualitativo dos serviços prestados e/ou dos produtos oferecidos e conseqüentemente, do benefício/lucro para a instituição.

Neste trabalho foi realizada a modelagem e resolução numérica de um caso particular do Problema de Alocação de Recursos Humanos que visa maximizar a satisfação dos funcionários com a alocação para o qual serão designados. Para tanto, será utilizada uma formulação específica de otimização, a formulação OVO (Otimização do Valor Ordenado) que nos permite ter um maior controle do grau de satisfação do grupo de funcionários.

Simulações numéricas já foram realizadas em literatura recente com esta formulação voltada para a Alocação de Recursos Financeiros, mais especificamente no cálculo de Valor de Risco (VaR). A Alocação de Recursos Humanos constitui uma nova aplicação dessa formulação.

Nosso objetivo é alocar um grupo de professores em disciplinas com horários predeterminados, de maneira que tenhamos um percentual controlado de pessoas insatisfeitas com suas alocações. Vamos considerar a preferência de cada professor em relação as disciplinas e aos horários.

Mesmo quando comparada com abordagens similares, a metodologia que usamos oferece uma vantagem singular: controle mais preciso sobre o grau de satisfação. Nas outras metodologias se maximiza a média ou o valor mínimo da satisfação. Já com a formulação OVO, podemos escolher o percentual de pessoas satisfeitas que desejamos.

Na seção seguinte são apresentadas as idéias gerais que envolvem a formulação OVO e os trabalhos já desenvolvidos usando esta formulação como ferramenta para solucionar problemas de minimização.

1.4 A formulação OVO

O Problema de Otimização do Valor Ordenado ou Problema OVO é uma generalização do Problema Minimax. Se tomarmos um conjunto de funções contínuas, o Problema Minimax consiste em minimizar a função de maior imagem (função máxima) deste conjunto, enquanto que o Problema OVO nos permite minimizar outras combinações de funções, para isto, colocamos as funções em ordem crescente e depois podemos minimizar a que ficou na 1^a, 2^a, 3^a, ..., m-ésima posição.

A abordagem OVO foi proposta em 2003 por R. Andreani, C. Dunder e J. M. Martínez no artigo [2]. Eles apresentaram as motivações do problema, um método do tipo Cauchy¹ para solucioná-lo e a prova da convergência deste método, além do algoritmo e de um exemplo numérico.

O Problema de Tomada de Decisões e o Problema de Modelagem de Padrões Ocultos são as motivações do Problema OVO (ver seção 2.3). A obtenção da solução destes problemas através da formulação OVO é mais vantajosa do que a Minimax. Ao escolhermos o nível a que iremos minimizar, temos a possibilidade de tomá-lo de forma mais adequada e assim, poupar trabalho operacional e obter uma resposta mais realista.

No artigo [3] os mesmos autores relacionam os minimizadores locais e os pontos estacionários da formulação do problema OVO e os problemas de otimização com restrições de equilíbrio.

O trabalho [4] acrescenta um método quase-Newton que generaliza o método apresentado em [2]. Neste último, as funções f_i são aproximadas linearmente, já em [4] elas são feitas por funções quadráticas. A vantagem do novo método é a convergência superlinear ou quadrática que é obtida quando são acrescentadas hipóteses mais restritivas.

No próximo capítulo exibiremos mais detalhes da formulação OVO.

¹O método do tipo Cauchy usa a idéia de máxima descida para efetuar a minimização da função OVO.

Capítulo 2

Problema OVO

No capítulo anterior vimos que o Problema de Alocação de Recursos Humanos já foi abordado várias vezes e com diversas restrições, mas nenhum deles tem um controle preciso sobre o grau de satisfação dos funcionários. Com a formulação OVO podemos determinar o percentual de pessoas que queremos que fiquem satisfeitas. Neste capítulo apresentaremos a teoria matemática da abordagem OVO.

2.1 Definição do Problema OVO

O Problema de Otimização do Valor Ordenado ou Problema OVO é uma generalização do Problema Minimax.

Considere um conjunto de funções contínuas $W = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ definidas em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

A função máxima deste conjunto é aquela que possui imagem maior ou igual às das outras funções do conjunto, isto é,

$$f_{\max}(x) = \max_{j=1, \dots, m} \{f_j(x)\}.$$

O Problema Minimax consiste em minimizar a função máxima do conjunto acima:

$$\begin{array}{ll} \min & f_{\max}(x) \\ \text{s.a} & x \in \Omega \end{array} .$$

Exemplo 2.1.1. Vamos obter a função máxima do conjunto $W = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de funções contínuas definidas em $[0, 4]$ tais que

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0.2x^2 + 0.9; \\ f_2(x) &= \sin(x) + 2.4; \\ f_3(x) &= 0.4x + 1.8; \\ f_4(x) &= -\sin(x - 0.8) + 1.5. \end{aligned} \tag{2.1}$$

A Figura (2.1) mostra os gráficos destas funções.

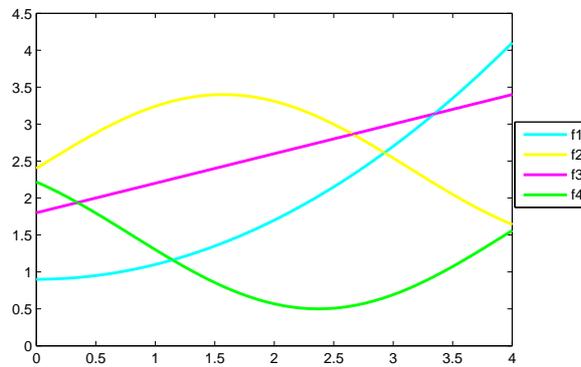


Figure 2.1: Gráfico do conjunto de funções W .

Dado o conjunto de funções para encontrarmos a função máxima, basta olharmos para cada intervalo do domínio que tem como limites as abcissas dos pontos da interseção das funções. Observando a Figura 2.1 que contém os gráficos das funções dadas podemos obter os intervalos e a função máxima em cada um deles:

- em $[0, 2.7]$ a função que tem maior imagem é f_2 ,
- em $[2.7, 3.3]$ a função que tem maior imagem é f_3 ,
- em $[3.3, 4]$ a função que tem maior imagem é f_1 .

Então, a expressão da função máxima é

$$f_{\max}(x) = \begin{cases} f_2(x) = \sin(x) + 2.4, & x \in [0, 2.6593] \\ f_3(x) = 0.4x + 1.8, & x \in [2.6593, 3.3452] \\ f_1(x) = 0.2x^2 + 0.9, & x \in [3.3452, 4] \end{cases} \tag{2.2}$$

A Figura 2.2 mostra as quatro funções e na cor mais escura a função máxima $f_{\max}(x)$.

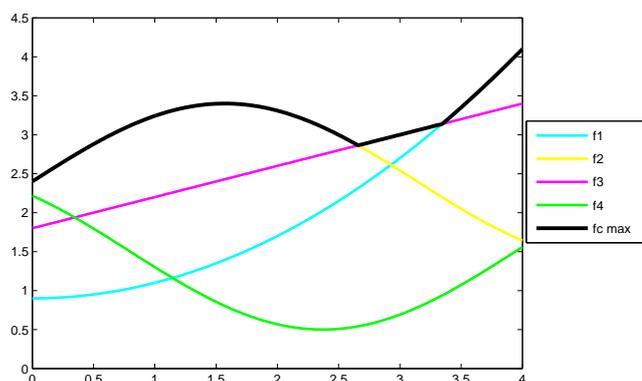


Figure 2.2: Exemplo de função máxima.

Agora, vamos falar do Problema OVO e de sua função objetivo, a função OVO.

Na formulação deste problema podemos escolher qual função minimizar. Para isto, colocamos as funções do conjunto em ordem crescente para cada ponto do domínio e depois podemos minimizar a que ficou na 1^a, 2^a, 3^a, ..., m-ésima posição.

A função que fica na p -ésima posição é chamada de função OVO ou função do Valor Ordenado de ordem p , sendo que $p \in \{1, 2, \dots, m\}$. Então vamos simbolizá-la com um índice i_p . Para cada nível p fixo, a função OVO é uma função definida por partes, dada por

$$f(x) = f_{i_p(x)}(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad i_p \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \quad (2.3)$$

onde as imagens das funções são ordenadas de maneira crescente para cada x ,

$$f_{i_1(x)}(x) \leq f_{i_2(x)}(x) \leq \dots \leq f_{i_m(x)}(x). \quad (2.4)$$

Note que quando $p = 1$, a função $f_{i_1(x)}(x)$ é a de menor valor em x . Quando $p = 2$, a função $f_{i_2(x)}(x)$ tem a segunda menor imagem em x e assim sucessivamente.

Mais ainda, para os casos em que $p = 1$ ou $p = m$ temos problemas conhecidos.

Se $p = 1$, então $f(x) = f_{i_1(x)}(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ que é um Problema Minimin.

Se $p = m$, então $f(x) = f_{i_m(x)}(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ que é um Problema Minimax.

Como já dissemos, a função OVO é contínua e definida por partes, mas não é suave. A suavidade é perdida devido a troca das funções f_i que definem as imagens em cada trecho do domínio.

O Problema OVO minimiza a função OVO de ordem $p \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_{i_p(x)}(x) \\ \text{s.a} \quad & x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Esta função generaliza a idéia de função máxima e é isto que torna o Problema OVO uma generalização do Problema Minimax.

Exemplo 2.1.2. Vamos obter a função OVO de ordem $p = 2$ do mesmo conjunto de funções (2.1) do exemplo anterior.

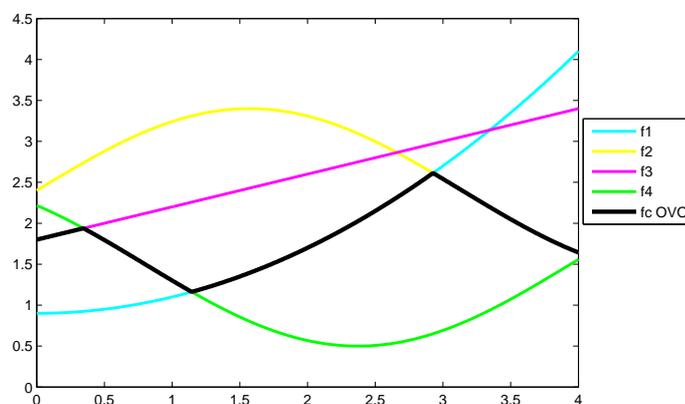


Figure 2.3: Exemplo de função OVO com $p = 2$.

A função OVO de ordem $p = 2$ aparece na cor mais escura na Figura (2.3) e é denotada por f_{i_2} :

$$f_{i_2(x)}(x) = \begin{cases} f_3(x) = 0.4x + 1.8, & x \in [0, 0.3] \\ f_4(x) = -\sin(x - 0.8) + 1.5, & x \in [0.3, 1.1] \\ f_1(x) = 0.2x^2 + 0.9, & x \in [1.1, 2.9] \\ f_2(x) = \sin(x) + 2.4, & x \in [2.9, 4] \end{cases} \quad (2.6)$$

Quando minimizamos a função OVO ou a função máxima, todas as funções que têm imagem menor ou igual também terão suas respectivas imagens reduzidas, mas com a função OVO podemos escolher o percentual que nos interessa e desconsiderando as demais.

Na seção seguinte falaremos da teoria que embasa o algoritmo de convergência local da formulação OVO.

2.2 Algoritmo da Formulação OVO

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e conexo.

Sejam f_1, f_2, \dots, f_m funções tais que $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, m$, com derivadas parciais contínuas em um conjunto que contém Ω .

Denotaremos o gradiente de f_i por g_i , isto é,

$$\nabla f_i(x) = g_i(x), \quad i = 1, \dots, m.$$

Suponha que existam $c, L \in \mathbb{R}$ tais que, para $i = 1, \dots, m$,

$$\|g_i(x)\|_\infty \leq c, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{e} \quad (2.7)$$

$$\|g_i(y) - g_i(x)\|_\infty \leq L\|y - x\|_\infty, \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (2.8)$$

A desigualdade (2.7) assegura que cada f_i terá gradiente limitado para todo ponto do domínio, e a desigualdade (2.8) garante que todas as funções f_i são Lipschitz contínuas.

Proposição 2.2.1. De (2.8) e usando a Teorema do Valor Médio obtemos que

$$|f_i(y) - f_i(x)| \leq c\|y - x\|_\infty. \quad (2.9)$$

Demonstração. Como $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o Teorema do Valor Médio toma a forma:

$$|f(y) - f(x)| \leq \|y - x\|_\infty \sup \|\nabla f(x + t(y - x))\|_\infty, \quad t \in (0, 1).$$

Definindo $x + t(y - x) = w \in \Omega$, de (2.7) temos que

$$\|\nabla f(w)\|_\infty \leq c, \quad \forall w \in \Omega,$$

então

$$\sup \|\nabla f(w)\|_\infty \leq c.$$

Logo, $|f(y) - f(x)| \leq \|y - x\|_\infty \sup \|\nabla f(w)\|_\infty \leq c\|y - x\|_\infty$. □

Proposição 2.2.2. De (2.8), temos que a seguinte desigualdade é válida:

$$f_j(y) \leq f_j(x) + g_j(x)^T(y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|_\infty^2. \quad (2.10)$$

Demonstração. A seguinte igualdade é válida para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ (ver [20]):

$$f_j(y) - f_j(x) - g_j(x)^T(y - x) = \int_0^1 g_j(x + t(y - x))^T(y - x) - g_j(x)^T(y - x) dt.$$

Como

$$\int_0^1 g_j(x + t(y - x))^T(y - x) - g_j(x)^T(y - x) dt = \int_0^1 [g_j(x + t(y - x)) - g_j(x)]^T(y - x) dt,$$

calculando a norma da igualdade temos que

$$\begin{aligned}
& |f_j(y) - f_j(x) - g_j(x)^T(y - x)| \\
&= \left| \int_0^1 [g_j(x + t(y - x)) - g_j(x)]^T(y - x) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \|g_j(x + t(y - x)) - g_j(x)\|_\infty \|y - x\|_\infty dt \text{ por (2.8) temos} \\
&\leq \int_0^1 L \|t(y - x)\|_\infty \|y - x\|_\infty dt \\
&= L \int_0^1 |t| \|y - x\|_\infty^2 dt \\
&= L \|y - x\|_\infty^2 \int_0^1 t dt \\
&= \frac{L}{2} \|y - x\|_\infty^2
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|f_i(y) - f_j(x) - g_j(x)^T(y - x)| &\leq \frac{L}{2} \|y - x\|_\infty^2 \\
f_i(y) - f_j(x) - g_j(x)^T(y - x) &\leq \frac{L}{2} \|y - x\|_\infty^2 \\
f_i(y) &\leq f_j(x) + g_j(x)^T(y - x) + \frac{L}{2} \|y - x\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

□

Pelas desigualdades (2.9) e (2.10) vemos que os valores das imagens de f_i e das distâncias entre elas são limitados superiormente. Este fato garante que $f_i(y)$ é uniformemente contínua (a medida que tomarmos os pontos do domínio mais próximos, mais próximas estarão suas imagens) e que ∇f_i é limitado. Isto é notório através de

$$\|\nabla f_i\|_\infty \leq \frac{|f_i(y) - f_i(x)|}{\|y - x\|_\infty} \leq c. \tag{2.11}$$

Daí, podemos concluir que o $\max_j \{g_j(x)\}$ é limitado e conseqüentemente que $\max_j \{g_j(x_k)^T d\}$ também é limitado.

Como estes dados estão presentes no Algoritmo 2.2.1 a seguir, podemos afirmar, após estas verificações, que ele está bem definido.

Durante o algoritmo, precisamos de um conjunto que guarde os índices das funções f_i que estão a uma distância ϵ suficientemente pequena da função OVO. Veja a definição a seguir:

Definição 2.2.1. O conjunto de índices das funções f_i em uma vizinhança da função OVO $f(x)$ no ponto x é dado por

$$I_\epsilon(x) = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ tal que } |f(x) - f_j(x)| \leq \epsilon\},$$

com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Exemplo 2.2.1. Observando a figura 2.3 podemos visualizar como são obtidos os elementos deste conjunto:

Considere os pontos 1.1, 2 e 2.9 do domínio. Observe as funções que definem as imagens mais próximas da imagem da função OVO com ϵ suficientemente pequeno. Na vizinhança da função OVO no ponto

- 0.2 temos apenas a função f_3 , então $I_\epsilon(0.2) = \{3\}$
- 1.1 temos as funções f_1 e f_4 , então $I_\epsilon(1.1) = \{1, 4\}$
- 2.9 estão definidas as funções f_1 e f_2 , então $I_\epsilon(2.9) = \{1, 2\}$

Vamos agora, ao algoritmo do Problema OVO.

Algoritmo 2.2.1. - Algoritmo do Problema OVO

Sejam $\eta \in (0, 1]$, $\theta \in (0, 1)$, $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1$ e $\Delta > 0, \epsilon > 0$ números reais. Segue os passos da k -ésima iteração, sendo $x_0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário:

Passo 1 - Resolver o subproblema:

$$\begin{aligned} \min \quad & M_k(d) \\ \text{s.a} \quad & x_k + d \in \Omega \\ & \|d\|_\infty \leq \Delta. \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $M_k(d) = \max_{j \in I_\epsilon(x_k)} g_j(x_k)^T d$, com $d \in \mathbb{R}^n$.

Seja \bar{d}_k uma solução de (2.12). Obtenha d_k tal que

$$x_k + d_k \in \Omega,$$

$$\|d_k\| \leq \Delta \text{ e}$$

$$M_k(d_k) \leq \eta M_k(\bar{d}_k). \quad (2.13)$$

Se $M_k(d_k) = 0$ pare.

Passo 2 - Fazer a busca linear:

Faça $\alpha \leftarrow 1$. Se

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \theta \alpha M_k(d_k), \quad (2.14)$$

tome $\alpha_k = \alpha$, $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ e encerre a iteração.

Caso contrário, escolha $\alpha_1 \in [\sigma_{min} \alpha, \sigma_{max} \alpha]$, faça $\alpha \leftarrow \alpha_1$ e verifique a condição (2.14) novamente.

□

No problema (2.12), fazendo $w = \max_{j \in I_\epsilon(x_k)} g_j(x_k)^T d$, é possível obter um problema de otimização convexo equivalente:

$$\begin{aligned} \min \quad & w \\ \text{s.a} \quad & g_j(x_k)^T d \leq w, \quad \forall j \in I_\epsilon(x_k) \\ & x_k + d \in \Omega \\ & \|d\|_\infty \leq \Delta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Resolveremos este problema em vez de (2.12) no Passo 1.

Em linhas gerais, o Algoritmo do Problema OVO busca uma direção de deslocamento no passo 1 e decide quanto andar nesta direção no passo 2.

Nesse algoritmo, o conjunto $I_\epsilon(x)$ armazena os índices das funções ordenadas que possuem imagem em uma ϵ -vizinhança da imagem da função OVO.

Portanto, no Passo 1, o vetor d será determinado de modo que $g_j(x_k)^T d$ seja o menor possível, mantendo a viabilidade.

Quando $M_k(d) < 0$, podemos garantir que d é uma direção de descida para todas as funções f_i cujos índices estão em $I_\epsilon(x)$.

A desigualdade (2.13) assegura que o vetor d_k terá a mesma direção da solução \overline{d}_k , mas com comprimento η vezes menor do que o de \overline{d}_k .

O Passo 2 executa uma busca linear semelhante à busca de Armijo [33, 24], mas é menos exigente, uma vez que $M_k(d)$ pode ser não-negativo.

Vejam agora, em que condições o Algoritmo do Problema OVO pode executar.

2.2.1 Critério de Parada do Algoritmo do Problema OVO

O algoritmo tem convergência linear, local e para quando

$$M_k(d) \geq 0,$$

ou seja, quando x_k é um ponto ϵ -ótimo (ver Definição 2.2.2 a seguir).

Quando $M_k(d) \geq 0$, temos

$$M_k(d) = \max_{j \in I_\epsilon(x)} \nabla f_j(x_k)^T d \geq 0,$$

então, existe alguma função f_i para o qual

$$\nabla f_i(x_k)^T d \geq 0$$

e isto significa que a direção d não é de descida para todas as funções f_j que estão a uma distância menor ou igual a ϵ da função OVO.

Definição 2.2.2. Dizemos que x é ϵ -ótimo se

$$D(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid (x + d) \in \Omega \text{ e } M_k(d) < 0, \forall j \in I_\epsilon(x)\} = \emptyset.$$

O conjunto D é formado pelas direções de descida viáveis tomadas a partir do ponto x , para todas as funções que tem imagem a uma distância inferior a ϵ da imagem da função OVO.

Se D é um conjunto vazio, não há nenhuma direção de descida viável a partir do ponto x , então não há como encontrar outro ponto viável com imagem menor do que a imagem de x .

O teorema seguinte garante que o Algoritmo 2.2.1 está bem definido, a demonstração dele pode ser encontrada em [2].

Teorema 2.2.1. Suponha que x_k é o resultado da k -ésima iteração do Algoritmo 2.2.1 do Problema OVO.

- (a) O algoritmo para em x_k se e somente se x_k é ϵ -ótimo.
- (b) Mesmo que o algoritmo não pare em x_k , a iteração está bem definida e

$$\alpha_k \geq \min \left\{ \frac{2\sigma_{min}\gamma_k(1-\theta)}{L\Delta^2}, \frac{\epsilon\sigma_{min}}{3c\Delta} \right\},$$

onde

$$\gamma_k = - \max_{j \in I_\epsilon(x_k)} \{g_j(x_k)^T d_k\} > 0.$$

Em outras palavras, existe uma cota inferior para o tamanho do passo α_k .

Encerramos aqui, a exibição dos resultados teóricos relevantes para nossa aplicação. Na próxima seção discursaremos sobre as aplicações motivadoras da criação da formulação OVO: a Modelagem de Padrões Ocultos e o Problema de Tomada de Decisões.

2.3 Aplicações da Formulação OVO

Na Tese de Doutorado [36] foram exibidas duas aplicações da Formulação OVO. A primeira delas foi a localização de padrões ocultos em um nuvem de pontos (Modelagem de Padrões Ocultos). A vantagem de se abordar este problema com a formulação OVO é que a influência dos pontos espúrios presentes na nuvem são eliminados. A segunda aplicação refere-se ao cálculo do Valor de Risco que é um caso particular do Problema de Tomada de Decisões. Com a formulação OVO deste problema pode-se escolher o nível de risco ao qual o investimento será submetido. Além disso, pode-se estimar a perda futura diante deste nível de risco p escolhido.

2.3.1 Modelagem de Padrões Ocultos

O problema dos Padrões Ocultos busca revelar uma curva (um padrão) que se ajuste ao conjunto de pontos (diagrama de dispersão) que carregam informações

corrompidas. Na maioria das vezes não podemos traçar uma curva que passe por todos os pontos, mas podemos determinar uma curva que passe próximo dos mais significativos. Os padrões assim construídos são chamados de padrões ocultos.

Considere a função $f_i(z)$ que mede o erro da observação i quando utilizado o vetor de parâmetros $z \in \mathbb{R}^n$. O objetivo é encontrar o vetor de parâmetros que gera o menor erro para todas as observações.

Se minimizarmos o erro máximo de todas as observações teremos um Problema Minimax, mas na prática minimiza-se um percentual dos erros correspondentes aos dados mais corretos e descarta-se os erros relativos aos pontos discrepantes (espúrios). Então, minimiza-se a função OVO de ordem p correspondente ao percentual escolhido.

O cálculo da estimativa é muito sensível à presença de pontos espúrios (com informações corrompidas); quanto maior o número destes, mais distante do modelo correto estará o padrão encontrado. A eliminação da influência de erros sistemáticos é uma característica notável da formulação OVO para este problema.

Vejamos um exemplo:

Seja Ω um conjunto que apresenta uma nuvem de pontos (x_i, y_i) e g a suposta curva oculta com coeficientes z_1, z_2, \dots, z_n .

Para estimar os coeficientes de g vamos calcular o erro entre as imagens dos pontos de Ω . A função $f_i(z)$ mede o erro entre a imagem exata y_i de x_i e aquela obtida por g :

$$f_i(z) = [y_i - g(z, x_i)]^2,$$

onde $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ representa a imagem fornecida pela nuvem de pontos.

Para cada vetor de parâmetros z , podemos ordenar os valores dos erros, e determinar qual é a função $f_{i_p}(z)$ que se situada na p -ésima posição

$$f_{i_1}(z) \leq f_{i_2}(z) \leq \dots \leq f_{i_m}(z)$$

que será minimizada.

Vários exemplos de nuvens de pontos foram mostrados em [36] Entre as curvas ocultas havia elipses, parábolas, “bananas”, polinômios e até polinômios trigonométricos.

2.3.2 Problema de Tomada de Decisão

Os problemas de Tomada de Decisão visam analisar as possibilidades apresentadas e as consequências de cada escolha realizada. Desta forma, podemos imaginar o comportamento futuro da tal escolha, através das funções que a modelam e assim, nos prevenir contra possíveis resultados tidos como ruins ao processo analisado.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o espaço das decisões representadas por x e $f_i(x)$ o custo da decisão x , sob as condições do cenário i .

Se minimizarmos o maior custo teremos uma solução por meio da formulação Minimax. Na prática, costumamos minimizar a função que ficou no nível p que corresponde a um valor abaixo do máximo. O Problema OVO nos permite escolher e minimizar um nível p diferente do máximo (mais próximo da realidade) e conseqüentemente encontrar uma resposta mais realista e com menor custo operacional.

Vejamos um exemplo:

Sejam x uma das possibilidades de investimento em uma carteira e $f_i(x)$ a função que descreve a perda prevista sob as condições do cenário i . Após descrever e ordenar todas as funções (cenários) possíveis para cada x , temos que a p -ésima colocada descreve o nível de risco p para o investimento realizado.

Esta função é a OVO que está funcionando da mesma maneira que a função Valor de Risco - VaR discreta ¹. Este conceito representa a perda máxima esperada para a carteira, a um nível de significância $\gamma \in [0, 1]$ (ou nível de confiança $1 - \gamma$), em um intervalo de tempo determinado.

A grande vantagem da utilização do VaR é o fato de representar uma medida de risco de mercado em apenas um número.

Com a formulação OVO deste problema pode-se escolher o nível de risco ao qual o investimento será submetido (quanto maior for a possibilidade de retorno, maior também será o risco) e estimar a perda futura diante de nível p escolhido.

Na tese de Salvatierra [36], há um capítulo todo dedicado à utilização da função OVO no cálculo do VaR. Já existem outras formulações baseadas na formulação OVO, as quais citamos brevemente no Apêndice A.

Encerramos aqui a parte teórica da formulação OVO. No próximo capítulo descreveremos e modelaremos um caso particular do Problema de Alocação de Recursos Humanos, a alocação de professores. Alocaremos um grupo de professores tentando

¹Para maiores informações a respeito do *Value at Risk* consulte [40]

minimizar a insatisfação deles com suas respectivas alocações Após modelar este problema, de Programação Linear Inteira binária 0 - 1, utilizaremos a formulação do problema OVO para encontrar sua solução ótima, se existir.

Capítulo 3

Alocação de Professores

Neste capítulo, descrevemos o Problema de Alocação de Recursos Humanos estudado, mais especificamente o Problema de Alocação de Professores. Relataremos como será o tratamento dos dados para obtermos as informações necessárias para formular o seu modelo por meio da abordagem OVO.

3.1 Caso particular da Alocação de Recursos Humanos

Os problemas de alocação vem da necessidade de otimizar os recursos disponíveis. As soluções destes problemas resultam da análise das possíveis combinações que podem ser feitas com os elementos envolvidos. À medida que a quantidade destes elementos aumenta, o problema se torna cada vez mais complexo e é preciso auxílio de alguma ferramenta computacional para conseguir decidir o que, como, onde e quando os envolvidos serão alocados.

Os problemas de alocação de recursos humanos visam partilhar um período de tempo e/ou uma porção de trabalho de várias maneiras, a diversas pessoas. Como existem muitas possibilidades de fazer tais combinações, solucionar tais problemas não é trivial.

Sabemos que um funcionário satisfeito produz mais e melhor. Por isto interessa à instituição empregadora, saber qual a preferência dos candidatos quanto à cargo, disponibilidade, carga horária, capacidade e experiência de cada um, para organizá-los da melhor forma possível. Então modelamos o problema de maneira a maximizar

a satisfação de um percentual dos funcionários.

No nosso problema os funcionários são professores, isto é, a alocação de professores é um caso particular da Alocação de Recursos Humanos. Em geral, os problemas de Alocação de Professores visam distribuí-los nas turmas a serem atendidas, mas está não é uma tarefa fácil de ser realizada, visto que sempre há exigências a serem cumpridas e estas exigências variam de acordo com o grau de ensino e de instituição para instituição.

No ensino fundamental e médio, todos os professores são alocados com a mesma carga horária, a disciplina é fixa, a disponibilidade do professor é considerada e não pode ter tempos vagos (o que torna a alocação difícil). Já no ensino superior, os professores podem ser alocados com carga horárias diferentes, a disciplina não é fixa, a disponibilidade do professor é considerada, os horários das turmas de cada disciplina são previamente fixados e pode haver tempos vagos no quadro de horários (o que torna a alocação mais flexível).

Então encontrar uma solução viável no ensino fundamental e médio já é satisfatório. Como no ensino superior a alocação é mais flexível, podemos buscar por aquela que maximiza a satisfação do corpo docente.

Ainda hoje, a maioria dos quadros de horários nas instituições de ensino são feitos manualmente, o que depende muitas pessoas e muito tempo, mas já existe vários trabalhos que investigam e buscam pela alocação informatizada dos professores.

As modelagens para este tipo de problema, normalmente utilizam números binários para representar a associação entre cada professor, cada disciplina e cada horário de aula, gerando assim um número alto de variáveis. O programa testa todas as possibilidades, ou seja, cada professor será testado com todas as disciplinas e em todos os horários, então pelo princípio multiplicativo o número de variáveis é o produto do número de professores, com o número de disciplinas e com o número de horários de aula.

Além disso, há um grande número de restrições: os horários das turmas, as sobreposições de horários, a quantidade mínima e máxima de turma por professor, a quantidade de turmas a serem atendidas, as áreas de especialização e a disponibilidade de cada docente, etc.

Na grande maioria dos trabalhos de alocação são utilizadas heurísticas para a obtenção da solução, tais como algoritmos genéticos, *simulated annealing*, busca tabu, mas aqui vamos abordar o problema de forma diferente, via formulação OVO.

No problema de alocação que estudamos queremos alocar professores em turmas com horários pré-fixados, mas considerando as preferências de horário e disciplinas dos professores. Temos que decidir que professor alocar em qual disciplina, em qual horário, em quais turmas e com que carga horária. Para fazer isto, vamos primeiramente mensurar a preferência de cada um, quanto a disciplinas e aos horários.

Na seção seguinte vamos falar especificamente da alocação de professores estudada.

3.2 Descrição da Alocação de Professores Proposta

As variáveis np , nt , nd , nh representam respectivamente, o número de professores, o número de turmas, o número de disciplinas e a quantidade de intervalos de aula. Para simbolizar professor, disciplina e intervalo de aula usamos i , j e k respectivamente.

Queremos alocar um grupo de np professores em nt turmas, sendo nd disciplinas e nh intervalos de aula possíveis, mas de maneira a minimizar a insatisfação com as respectivas alocações.

Examinamos um departamento universitário contendo professores de várias áreas de conhecimento. Cada turma r está associada a uma disciplina j com horário h previamente fixado. As preferências dos professores quanto às disciplinas e aos horários são consideradas e o salário de cada professor i é fixo independentemente da quantidade de turmas que ele leciona.

A variável d_{ij} representa o grau de satisfação do professor i em lecionar a disciplina j . Para mensurarmos este grau de satisfação, vamos atribuir valores de 0 a 3, sendo que quanto maior for o grau de satisfação maior será o valor atribuído:

- 3 : o professor i gostaria muito e pode lecionar a disciplina j ;
- 2 : o professor i gostaria pouco, mas pode lecionar a disciplina j ;
- 1 : o professor i não gostaria, mas pode lecionar a disciplina j ;
- 0 : o professor i não pode lecionar a disciplina j .

As preferências citadas acima, em geral, são de conhecimento da equipe que elabora o quadro de horários, uma vez que pode-se verificar se cada uma das dis-

ciplinas pertence ou não a área de formação acadêmica do professor; o refinamento desses dados provém da consulta direta a cada professor.

A disponibilidade do professor i no horário k será simbolizada pela variável h_{ki} e receberá um dos valores abaixo:

- 3 : o professor i quer e pode lecionar no horário k ;
- 2 : o professor i quer pouco, mas pode lecionar no horário k ;
- 1 : o professor i não quer, mas pode lecionar no horário k ;
- 0 : o professor i não pode lecionar no horário k .

O horário de cada turma r na disciplina j será expresso por t_{jr} em uma tabela. Os valores presentes na tabela serão os intervalos k previamente estabelecidos. Quando não houver turma de uma determinada disciplina, a variável t_{jr} receberá o valor nulo.

A variável de decisão é $X = (x_{ijk})$, que representa a alocação do professor i , na disciplina j e horário k . Todos os resultados desta variável podem ser expressos através de um tensor de terceira ordem $X_{i \times j \times k}$, sendo que as entradas só podem ser nulas ou unitárias. Se a alocação for efetivada será sinalizada com a unidade, caso contrário com o zero.

As variáveis i, j, k, r variam respectivamente, nos conjuntos D, P, T, H :

- P - conjunto dos professores;
- D - conjunto das disciplinas;
- H - conjunto dos intervalos das aulas;
- T - conjunto das turmas que cada disciplina deve ter.

Em um caso geral, o tensor de terceira ordem é da forma

$$X_{\#P \times \#D \times \#H},$$

onde $\#P, \#D, \#H$ denota a cardinalidade do conjunto P, D e H , respectivamente.

A função $f_i : \mathbb{R}^{\#P \times \#D \times \#H} \rightarrow \mathbb{R}$ mede o grau de satisfação do professor i com as possíveis alocações. O domínio desta função é composto pelos pontos x_{ijk} . Esta

função leva em consideração que a satisfação do professor varia de acordo com o atendimento ou não das suas preferências por disciplina e por horário, além da quantidade de turmas a lecionar.

Os coeficientes ¹ $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}_+$ tais que $\alpha + \beta + \lambda = 1$ possibilitam a atribuição de peso às preferências dos professor.

A variável γ indica a quantidade máxima de turmas que um professor pode lecionar. A expressão abaixo é a função que representa a preferência do professor i :

$$f_i(X) = \underbrace{\alpha \sum_{j \in D} \left(d_{ij} \sum_{k \in H} x_{ij k} \right)}_1 + \underbrace{\beta \sum_{k \in H} \left(h_{ki} \sum_{j \in D} x_{ij k} \right)}_2 + \underbrace{\lambda \left(\gamma - \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ij k} \right)}_3 \quad (3.1)$$

Note que $f_i(X)$ é uma combinação convexa das três preferências em questão. Veja a indicação com as chaves na expressão 3.1 acima. Cada número indica o seguinte:

1. preferência pela disciplina;
2. preferência pelo horário;
3. quantidade de turmas.

Na terceira parte tomamos o complementar da quantidade de turmas associada a cada professor, pois queremos medir o grau de satisfação de cada um deles quanto à quantidade de trabalho, sabendo que nesta aplicação, o salário de cada professor é fixo, independentemente da quantidade de turmas que ele lecionar. Portanto, uma quantidade grande de turmas gera sobrecarga de trabalho e diminui o grau de satisfação.

A função de preferência $f_i(X)$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f_i(X) = f_i(x_{ij k}) = \gamma \lambda + \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} (x_{ij k} (\alpha d_{ij} + \beta h_{ki} - \lambda)), \quad \forall i \in P. \quad (3.2)$$

Agora, vamos modelar as restrições. Seja \mathbb{N}^* o conjunto dos números naturais sem o zero.

¹A notação \mathbb{R}_+ representa o conjunto dos números reais não-negativos.

- Todas as variáveis são binárias:

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H.$$

- Cada professor i só pode estar alocado a uma disciplina j , no horário k :

$$\sum_{j \in D} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H.$$

- A quantidade de turmas por professor não deve ultrapassar $\gamma \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} \leq \gamma, \quad \forall i \in P.$$

- O total de turmas a serem atendidas deve ser $\mu \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} = \mu.$$

- A quantidade de turmas, por disciplina deve ser igual àquela expressa pelo vetor $nt(j)$:

$$\sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ijk} = nt(j), \quad \forall j \in D.$$

- Deve haver um professor alocado em todas as turmas:

$$\sum_{i \in P} x_{ijt_{rj}} = 1, \quad \forall r \in T, \forall j \in D.$$

- Nenhum professor pode ser alocado a uma disciplina que ele tenha atribuído nível de satisfação zero:

$$x_{ijk} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H.$$

- Nenhum professor pode ser alocado a um horário que ele tenha atribuído nível de satisfação zero:

$$x_{ijk} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H.$$

- Nenhum professor pode lecionar em turmas que tenham horários k_1 e k_2 coincidentes:

$$x_{ij k_1} + x_{ij k_2} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, k_1 \text{ e } k_2 \in H.$$

Apresentaremos o modelo na formulação OVO e na formulação Minimax em subseções distintas para podermos relatar as especificidades de cada uma.

3.2.1 Modelo na Formulação OVO

Na formulação OVO, a função objetivo é uma função OVO e na alocação estudada cada uma das suas partes (lembre que a função OVO é definida por partes) é uma das funções de preferência f_i .

Após obtermos a função f_i de cada professor i , vamos ordená-las em ordem crescente, depois vamos escolher o nível $p \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ que representa o grau de satisfação desejado, em seguida escreveremos a função OVO respectiva a este nível e por fim vamos minimizá-la.

A função objetivo é do tipo OVO

$$f(X) = f_{i_p(X)}(X), \quad i, p \in \{1, 2, \dots, m\}$$

onde as imagens de cada função estão em ordem crescente, $\forall X = x_{ij k}$, isto é,

$$f_{i_1(X)}(X) \leq f_{i_2(X)}(X) \leq \dots \leq f_{i_m(X)}(X).$$

Como a maximização de uma função é o mesmo que a minimização do oposto desta função, iremos trabalhar com a minimização do oposto da função OVO.

O problema descrito é linear, exceto pela função objetivo que é linear por partes:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -f_{i_p(X)}(X) \\
\text{s.a} \quad & x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} \leq \gamma, \quad \forall i \in P \\
& \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} = \mu \\
& \sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ijk} = nt(j), \quad \forall j \in D \\
& \sum_{i \in P} x_{i j t_{rj}} \geq 1, \quad \forall r \in T, \forall j \in D \\
& x_{ijk} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ijk} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{i j k_1} + x_{i j k_2} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Para facilitar a implementação numérica, a variável de decisão x_{ijk} é transformada em um único vetor coluna w de $np \times nd \times nh$ linhas. Assim, o número total de variáveis é $np \times nd \times nh$.

Para fazer tal transformação montamos a Tabela 3.1 da seguinte forma:

- Cada coluna apresenta um k fixo, conforme se avança nestas colunas para direita, o k varia até nh (quantidade de aulas), isto é, $1 \leq k \leq nh$.
- As linhas foram separadas em conjuntos/blocos de np (número de professores), cada bloco apresenta um j fixo e i variando até np .
- O j varia a cada bloco de np linhas e seu maior valor é nd (número de disciplinas).

As coordenadas do vetor w são os valores dispostos na Tabela 3.1. Cada coluna contém $np \times nd$ componentes do tensor. A disposição delas nas colunas será utilizada para ordená-las.

	k=1	k=2	...	k=nh
j=1	$x_{1,1,1}$	$x_{1,1,2}$...	$x_{1,1,nh}$
	$x_{2,1,1}$	$x_{2,1,2}$...	$x_{2,1,nh}$
	$x_{3,1,1}$	$x_{3,1,2}$...	$x_{3,1,nh}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	$x_{np,1,1}$	$x_{np,1,2}$...	$x_{np,1,nh}$
j=2	$x_{1,2,1}$	$x_{1,2,2}$...	$x_{1,2,nh}$
	$x_{2,2,1}$	$x_{2,2,2}$...	$x_{2,2,nh}$
	$x_{3,2,1}$	$x_{3,2,2}$...	$x_{3,2,nh}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	$x_{np,2,1}$	$x_{np,2,2}$...	$x_{np,2,nh}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
j=nd	$x_{1,nd,1}$	$x_{1,nd,2}$...	$x_{1,nd,nh}$
	$x_{2,nd,1}$	$x_{2,nd,2}$...	$x_{2,nd,nh}$
	$x_{3,nd,1}$	$x_{3,nd,2}$...	$x_{3,nd,nh}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	$x_{np,nd,1}$	$x_{np,nd,2}$...	$x_{np,nd,nh}$

Table 3.1: Transformação do tensor em vetor

Para fazer tal ordenação realizamos os seguintes passos:

- Começaremos a ordenação a partir da 1° coluna. Após terminá-la passaremos para a 2° coluna, depois passaremos para a 3° coluna e assim sucessivamente, até chegar a última coluna que está na nh -ésima posição.
- Ordenaremos as componentes de cada coluna de cima para baixo. Ao terminar de preencher a 1° coluna passamos para o topo da 2°, ao terminarmos de preencher a 2° coluna passamos para o todo da 3° e assim sucessivamente até chegar a última coluna.

Em outras palavras, a primeira coluna contém da 1° até a $(np \times nd)$ -ésima coordenada, a segunda coluna contém da $(np \times nd + 1)$ -ésima até a $(np \times nd \times 2)$ -ésima coordenada, e assim sucessivamente, até chegar a última coluna que contém da $(np \times nd \times (nh - 1))$ -ésima até a $(np \times nd \times nh)$ -ésima coordenada.

Usaremos uma fórmula para relacionar as componentes do tensor com as coordenadas do vetor. Para obter a fórmula fizemos as seguintes observações dos dados da Tabela 3.1:

- Cada coluna tem $(np \times nd)$ componentes do tensor, aquela que está na k -ésima posição tem $(k - 1)$ colunas anteriores, o que corresponde a $(k - 1) \times np \times nd$ coordenadas anteriores no vetor.
- Cada bloco tem np componentes. Aquela que está no j -ésimo bloco tem $(j - 1)$ blocos anteriores, o que corresponde a $(j - 1) \times np$ coordenadas anteriores no vetor.
- Cada linha dentro de um bloco corresponde a uma entrada do vetor. Depois de localizar a coluna e o bloco da componente desejada, devemos localizar a linha i desta componente. As $(np \times nd)$ linhas da 1ª coluna do tensor são mantidas na mesma posição no vetor; já as outras são acrescidas de múltiplos de $(np \times nd)$ à medida que k aumenta.

Então a componente x_{ijk} (que está na linha i , do bloco j , da coluna k), se localiza na posição $i + (j - 1) \times np + (k - 1) \times np \times nd$ do vetor w . Nesse caso, temos a fórmula:

$$x_{ijk} = w(i + (j - 1) \times np + (k - 1) \times np \times nd). \quad (3.4)$$

Cabe observar que os gradientes das funções (3.2) são dados por

$$\nabla f_i(x_{ijk}) = \frac{\partial f_i(x_{ijk})}{\partial x_{ijk}} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq i_p \\ \alpha d_{ij} + \beta h_{ki} - \lambda, & \text{se } i = i_p. \end{cases} \quad (3.5)$$

Como cada f_i é linear, então a função OVO formada por estas, também é linear por partes. Sendo assim, as hessianas são nulas, ou seja,

$$\nabla^2 f_i(x_{ijk}) = 0, \quad \forall x_{ijk} \in \{0, 1\}.$$

Agora que já temos o modelo resta implementar alguns testes e depois comparar os resultados obtidos com os de outro método padrão.

Para compararmos os resultados obtidos pela formulação OVO vamos primeiramente reescrever o Problema 3.3 na formulação Minimax. Vamos fazer isto na próxima seção para no capítulo seguinte poderemos comparar os resultados.

3.2.2 Modelo na Formulação Minimax

Como as restrições e as funções de preferência 3.2 já são lineares, para reformularmos, basta acrescentarmos uma nova variável $w \in \mathbb{R}$ tal que

$$-f_i(x_{ijk}) \leq w, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H.$$

Estas desigualdades representam restrições que deverão ser adicionadas ao modelo.

Depois disto, alteramos a função objetivo para w .

Sendo assim, o problema 3.3 na formulação Minimax pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \min \quad w \\
& \text{s.a.} \quad -f_i(x_{ijk}) \leq w, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \quad \quad x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \quad \quad \sum_{j \in D} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H \\
& \quad \quad \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} \leq \gamma, \quad \forall i \in P \\
& \quad \quad \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} = \mu, \\
& \quad \quad \sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ijk} = nt(j), \quad \forall j \in D \\
& \quad \quad \sum_{i \in P} x_{i j t_{rj}} = 1, \quad \forall i \in P \forall j \in D \\
& \quad \quad x_{ijk} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \quad \quad x_{ijk} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \quad \quad x_{ij k_1} + x_{ij k_2} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& \quad \quad \text{onde } k_1 \text{ e } k_2 \text{ são horários coincidentes.}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Os testes propostos no formato Minimax foram resolvidos numericamente usando o *software* MPL (Mathematical Programming Language)². Utilizamos a rotina

²Consulte o endereço eletrônico www.maximal-usa.com para maiores informações.

LPSolve que implementa o método Branch and Bound [39, 41] que descreveremos brevemente na próxima seção.

3.3 Método Branch and Bound

O problema estudado é de programação linear inteira com variáveis binárias, isto é, tanto a função objetivo quanto as restrições são lineares e cada uma das $n = i \times j \times k$ variáveis só podem assumir o valor nulo ou a unidade. Uma maneira de encontrarmos as soluções ótimas dele é averiguar todas as 2^n possíveis soluções.

O método Branch-and-Bound faz isto, realizando ramificação e eliminação. A ramificação consiste em dividir o problema em dois subproblemas com conjuntos solução menores (com uma das variáveis da solução fixada), já a eliminação descarta subproblemas que não contenham a solução ótima.

Essa eliminação é feita se houver algum subproblema com conjunto solução vazio ou com solução maior do que o limite superior da solução ótima.

Cada subproblema trabalha com uma diferente parte do conjunto solução. A busca pela solução dos subproblemas também inclui operações de ramificação e eliminação. Assim, o algoritmo induz a uma árvore de enumeração, onde cada nó representa um (sub)problema e a raiz corresponde ao problema original que se quer resolver.

Com a ramificação o conjunto solução do problema original S é particionado em conjuntos menores, isto é, com um número menor de soluções a serem verificadas. Para problemas com variáveis inteiras binárias como o nosso, basta fixar uma das variáveis em 0 ou em 1. Para isto, são criados novos nós na árvore, cada um é associado a um novo (sub)problema S_{k_1, \dots, k_n} onde $k_1, \dots, k_n \in \{0, 1\}$. Cada nó possui determinadas variáveis fixas em 0 ou em 1 e outras livres.

Vejamos um exemplo:

Um problema S com n variáveis pode ser particionado nos dois subproblemas $S_0 = \{S \mid x_j = 0\}$ e $S_1 = \{S \mid x_j = 1\}$, onde x_j é uma variável qualquer do problema S . Cada um dos dois subproblemas gerados tem $(n - 1)$ variáveis e portanto, $2^{(n-1)}$ soluções para serem testadas.

Daí, há três opções para se atacar os subproblemas: resolver (se for possível), particionar novamente ou descartar.

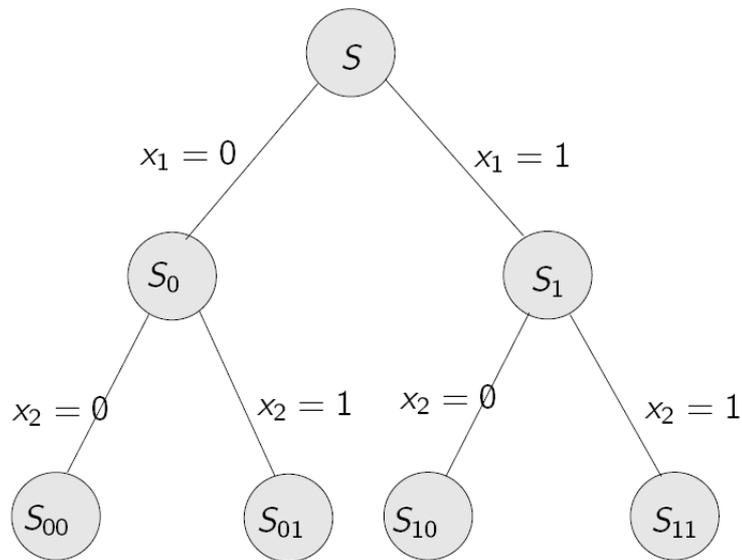


Figure 3.1: Esquema do método Branch & Bound para o exemplo.

Antes de particionar qualquer subproblema é feito o cálculo do limite superior do valor ótimo do respectivo subproblema. Este valor limitante é fundamental, pois são usados para limitar o crescimento da árvore. Se a solução encontrada em um subproblema é maior do que o seu respectivo limite superior, então este subproblema é descartado. Ter conjunto solução é vazio é outro fator que causa o descarte de um subproblema.

Sendo assim há três possibilidades para os subproblemas de S :

1) os dois subproblemas foram descartados, então o problema inicial S tem conjunto solução vazio,

2) os dois foram expandidos, então há quatro novos subproblemas para avaliarmos (ramificar, resolver ou descartar),

3) um foi descartado e o outro expandido, então há dois novos subproblemas para avaliarmos (ramificar, resolver ou descartar).

Estes algoritmos possuem um grande potencial de paralelização porque as computações das sub-árvores (subproblemas) podem ser realizadas de modo quase independente. Utilizando este método, é possível eliminar um grande número de combinações possíveis para a solução.

Ao gerar uma árvore com a topologia que tira partido da propriedade descrita, é garantido que o melhor subconjunto solução seja encontrado. Na pior situação este algoritmo reduz-se à uma pesquisa exaustiva.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos implementando o Algoritmo 2.2.1 no MATLAB (MATrix LABoratory). Para efeito de comparação, mostraremos também os resultados provenientes da formulação tradicional Minimax linear obtida através de um software próprio para problemas de otimização lineares chamado MPL (Mathematical Programming Language).

Agora que temos os modelos genéricos do problema de alocação estudado na formulação Minimax e na formulação OVO, podemos implementar alguns testes.

Vamos apresentar no próximo capítulo, os três testes implementados e os respectivos resultados numéricos.

Capítulo 4

Testes e Resultados Numéricos

Neste capítulo descreveremos os testes implementados e em seguida mostraremos seus respectivos resultados numéricos obtidos pela formulação OVO e pela formulação Minimax, para efeito de comparação.

Os resultados podem apresentar solução única ou mais de uma. Cada solução é composta de variáveis de decisão, sendo que cada uma delas indica uma maneira diferente de alocar os professores. Todas as possibilidades de alocar cada professor são testadas (por isso temos $np \times nd \times nh$ variáveis para cada teste). Como só as variáveis que assumem o valor unitário indicam alocação efetivada, as tabelas com os resultados apresentam apenas os índices destas variáveis.

Para obter a solução na formulação OVO utilizamos o Algoritmo 2.2.1 com 1000 pontos iniciais gerados aleatoriamente (técnica *multi-start*). Este algoritmo gera uma sequência não crescente usando direção de busca e converge a mínimos locais.

A formulação OVO foi implementada e resolvida numericamente no MATLAB (MATrix LABoratory)¹. Veremos a partir da próxima seção a descrição dos testes e seus respectivos resultados.

Para testar as rotinas que desenvolvemos, implementamos primeiramente, dois testes menores com 72 variáveis e depois que tudo estava funcionando bem, passamos a um terceiro teste com 300 variáveis.

¹Para mais informações visite o site o www.mathworks.com

4.1 Teste 1:

Alocar 3 professores em 6 turmas, sendo 4 disciplinas distintas e 6 horários possíveis.

Este teste tem $np \times nd \times nh = 3 \times 4 \times 6 = 72$ variáveis.

As informações referentes às preferências dos professores quanto às disciplinas estão na Tabela 4.1.

	Disciplinas			
Professores	1	2	3	4
1	0	1	3	3
2	2	2	1	0
3	1	3	0	2

Table 4.1: Preferências de disciplinas de cada professor do teste 1.

O expediente foi particionado nos seguintes intervalos de aulas:

- Horário 1: 8h - 10h, segunda-feira e quarta-feira;
- Horário 2: 10h - 12h, segunda-feira e quarta-feira;
- Horário 3: 8h - 12h, segunda-feira;
- Horário 4: 8h - 10h, terça-feira e quinta-feira;
- Horário 5: 10h - 12h, terça-feira e quinta-feira;
- Horário 6: 8h - 12h, terça-feira.

As preferências dos professores quanto aos horários estão na Tabela 4.2.

	Professores		
Horários	1	2	3
1	0	1	2
2	2	0	1
3	2	3	0
4	1	2	3
5	3	1	2
6	1	3	1

Table 4.2: Preferências de horários de cada professor do teste 1.

Os horários das turmas são pré-fixados e estão na Tabela 4.3.

	Disciplinas			
Turmas	1	2	3	4
1	3	4	2	5
2	0	6	0	1

Table 4.3: Horários das turmas por disciplinas do teste 1.

Neste teste, os conjuntos D , P , H e T possuem os seguintes elementos:

- $D = \{1, 2, 3, 4\}$ é o conjunto de disciplinas oferecidas;
- $P = \{1, 2, 3\}$ é o conjunto de professores;
- $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o conjunto de horários.
- $T = \{1, 2\}$ é o conjunto de turmas de cada disciplina;

Escolhemos pesos iguais para cada parcela de f_i : $\alpha = \beta = \lambda = \frac{1}{3}$.

O número máximo de disciplinas por professor γ foi modificado várias vezes. Fizemos testes numéricos com $\gamma = 2$, $\gamma = 3$ e $\gamma = 4$.

Já a quantidade de turmas é fixada em $\mu = 6$.

Modelo do Teste 1 na formulação OVO:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -f_{i_p(X)}(X) \\
\text{s.a} \quad & x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} \leq \gamma, \quad \forall i \in P \\
& \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} = 6 \\
& \sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ijk} = nt(j), \quad \forall j \in D \\
& \sum_{i \in P} x_{ij t_{rj}} = 1, \quad \forall r \in T, \forall j \in D \\
& x_{ijk} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ijk} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij1} + x_{ij3} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij2} + x_{ij3} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij4} + x_{ij6} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij5} + x_{ij6} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Este teste tem solução única para todos os três níveis p possíveis da formulação OVO, mas varia quando modificamos a quantidade máxima de turmas por professor, pois o nível de satisfação do grupo poder ser alterado.

Modelo do Teste 1 na formulação Minimax:

$$\begin{aligned}
\min \quad & w \\
\text{s.a} \quad & -f_i(x_{ij k}) \leq w, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij k} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} x_{ij k} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ij k} \leq \gamma, \quad \forall i \in P \\
& \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ij k} = 6 \\
& \sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ij k} = nt(j), \quad \forall j \in D \\
& \sum_{i \in P} x_{i j t_{r_j}} = 1, \quad \forall i \in P \forall j \in D \\
& x_{ij k} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij k} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij 1} + x_{ij 3} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 2} + x_{ij 3} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 4} + x_{ij 6} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 5} + x_{ij 6} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2 Resultados numéricos do Teste 1:

A solução na formulação Minimax está na Tabela 4.4 e sua imagem é -3,333:

prof	disc	hor
1	3	2
1	4	5
2	1	3
2	2	6
3	2	4
3	4	1

Table 4.4: Resultado do teste 1 na formulação Minimax.

Como podemos ver na tabela,

- o professor 1 ficou com as disciplinas 3 e 4, nos horários 2 e 5, respectivamente,
- o professor 2 ficou com as disciplinas 1 e 2, nos horários 3 e 6, respectivamente,
- o professor 3 ficou com as disciplinas 2 e 4, nos horários 4 e 1, respectivamente.

Observando este resultado concluímos que as restrições foram satisfeitas, pois

- cada professor só foi alocado a uma disciplina em cada horário,
- todos os professores ficaram em disciplinas e em horários com níveis de preferência diferente de zero,
- as turmas estão nos horários fixada na Tabela 4.3,
- as turmas estão na quantidade determinada pelo vetor $nt(j)$,
- as turmas de mesma disciplina não estão no mesmo horário,
- as professores não forma alocados em turmas de horários coincidentes,
- a quantidade máxima de turmas por professor γ não foi ultrapassada,
- a quantidade total de turmas fixada foi atendida.

Na formulação Minimax ao variarmos a quantidade máxima de turmas $\gamma = 2$ para $\gamma = 3$ ou para $\gamma = 4$ a solução permaneceu a mesma da Tabela 4.4.

Já ao tratarmos este teste pela formulação OVO encontramos soluções distintas ao variarmos os valores de γ . Para cada variação desta alteramos os valores de p também. Como são 3 professores, a função OVO foi implementada com $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$, obtendo as alocações expostas nas subseções a seguir.

4.2.1 Resultados obtidos com $\gamma = 2$

- Se $p = 3$, a imagem é -3,3333 e o resultado é o da Tabela 4.5.

prof	disc	hor	prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	3	2	1	3	2	1	3	2
1	4	5	1	2	4	1	4	5
2	1	3	2	1	3	2	1	3
2	2	6	2	2	6	2	2	4
3	2	4	3	4	1	3	2	6
3	4	1	3	4	5	3	4	1

Table 4.5: Resultado do teste 1 com $\gamma = 2$ e $p = 3$.

Uma das soluções coincide com a solução na formulação Minimax, isto sempre acontece quando estamos trabalhando com o p máximo.

- Para $p = 2$, a imagem também é -3,3333 e o resultado é o mesmo daquele apresentado na Tabela 4.5.
- Quando $p = 1$, encontramos duas soluções com imagem -3,6666. As soluções estão na Tabela 4.6.

prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	3	2	1	3	2
1	2	6	1	2	4
2	1	3	2	1	3
2	2	4	2	2	6
3	4	1	3	4	1
3	4	5	3	4	5

Table 4.6: Resultado do teste 1 com $\gamma = 2$ e $p = 1$.

Quando mudamos a quantidade máxima de turmas por professor a solução também se modifica.

Se a quantidade máxima de turmas por professor for $\gamma = 3$, temos mais de uma solução distinta para cada p . Veja na próxima subseção.

4.2.2 Resultados obtidos com $\gamma = 3$

- Se $p = 3$, temos três professores satisfeitos. As soluções encontrados estão na Tabela 4.7 e a imagem é -3,6667. Além destas, ainda temos o resultado da formulação Minimax como solução para este caso.

prof	disc	hor									
1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
1	4	5	1	2	4	1	2	4	1	4	5
2	1	3	1	4	5	2	1	3	1	2	6
2	2	4	2	1	3	3	2	6	2	1	3
3	4	1	2	2	6	3	4	1	2	2	4
3	2	6	3	4	1	3	4	5	3	4	1

Table 4.7: Resultado do teste 1 com $\gamma = 3$ e $p = 3$.

- Para $p = 2$, temos dois professores satisfeitos. O resultado está na Tabela 4.8 e a imagem é -3,6667.

prof	disc	hor	prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	3	2	1	3	2	1	3	2
1	2	4	1	2	4	1	2	4
1	4	5	2	1	3	2	1	3
2	1	3	3	2	6	2	2	6
2	2	6	3	4	1	3	4	1
3	4	1	3	4	5	3	4	5

Table 4.8: Resultado do teste 1 com $\gamma = 3$ e $p = 2$.

- Se $p = 1$, temos apenas um professor satisfeito. O resultado está na Tabela 4.9 e a imagem é -4,6667.

prof	disc	hor	prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	1	2	4	1	4	5
2	2	4	1	4	5	2	1	3
3	4	1	2	1	3	2	2	4
3	4	5	2	2	6	3	4	1
3	2	6	3	4	1	3	2	6

Table 4.9: Resultado do teste 1 com $\gamma = 3$ e $p = 1$.

4.2.3 Resultados obtidos com $\gamma = 4$

Se a quantidade máxima de turmas por professor for $\gamma = 4$, temos as soluções das Tabelas 4.10, 4.11 e 4.12:

- Se $p = 3$ que corresponde a considerar $3/3 = 100\%$ dos professores na hora de fazer a alocação, a imagem é -4 e o resultado está na Tabela 4.10.

prof	disc	hor									
1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
1	4	5	2	1	3	1	4	5	1	2	4
2	1	3	2	2	6	2	1	3	1	4	5
2	2	4	3	4	1	2	2	6	2	1	3
3	2	6	3	2	4	3	2	4	2	2	6
3	4	1	3	4	5	3	4	1	3	4	1

Table 4.10: Resultado do teste 1 com $\gamma = 4$ e $p = 3$.

Vemos então que há quatro formas distintas de fazer a alocação e ainda ter todos os professores satisfeitos, sendo que a terceira delas é a mesma da solução na formulação Minimax.

- Se $p = 2$ que corresponde a levar $2/3 = 66,67\%$ dos professores em consideração para fazer a alocação, a imagem é -4 e o resultado está na Tabela 4.11.
- Se $p = 1$ que corresponde a considerar $1/3 = 33,33\%$ dos professores na hora de fazer a alocação, a imagem é -5 e o resultado está na Tabela 4.12.

prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	3	2	1	3	2
1	4	5	1	4	5
2	1	3	2	1	3
2	2	4	2	2	6
3	4	1	3	4	1
3	2	6	3	2	4

Table 4.11: Resultado do teste 1 com $\gamma = 4$ e $p = 2$.

prof	disc	hor	prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	1	2	4	1	2	4
2	2	6	1	4	5	2	1	3
3	4	1	2	1	3	2	2	6
3	2	4	2	2	6	3	4	1
3	4	5	3	4	1	3	4	5

Table 4.12: Resultado do teste 1 com $\gamma = 4$ e $p = 1$.

Observe que quanto menor o valor de p , menor é a imagem encontrada. Isto ocorre porque quanto menor a quantidade de professores satisfeitos, menor é o grau de satisfação do grupo como um todo.

4.3 Teste 2:

Alocar 3 professores em 8 turmas, sendo 4 disciplinas distintas e 6 horários possíveis. Neste teste temos duas turmas a mais a serem contempladas.

Este teste também tem $np \times nd \times nh = 3 \times 4 \times 6 = 72$ variáveis. Este teste é uma modificação do anterior. Fizemos isto para ver se ao aumentar a quantidade de algum dos dados do problema, ainda encontraríamos alguma solução.

Aumentamos a quantidade de turmas a serem atendidas, mas se continuarmos com as tabelas de preferências iguais às do Teste 1, o problema fica infactível. Por isso, mudamos também as tabelas de preferências. Já os conjuntos D , P , H e T continuam iguais aos do Teste 1.

As informações referentes às preferências dos professores quanto às disciplinas são exibidas na Tabela 4.13.

	Disciplinas			
Professores	1	2	3	4
1	2	1	3	3
2	2	2	1	3
3	1	3	3	2

Table 4.13: Preferências de disciplinas de cada professor do teste 2.

As preferências de cada professor quanto aos horários estão na Tabela 4.14.

	Professores		
Horários	1	2	3
1	3	1	2
2	2	3	1
3	2	3	3
4	1	2	3
5	3	1	2
6	1	3	1

Table 4.14: Preferências de horários de cada professor do teste 2.

Os horários das turmas são pré-fixados e estão na Tabela 4.15:

	Disciplinas			
Turmas	1	2	3	4
1	3	4	2	5
2	5	6	4	1

Table 4.15: Horários das turmas por disciplinas do teste 2.

Assim como no teste anterior, escolhemos os pesos iguais para cada parcela de f_i , isto é, $\alpha = \beta = \lambda = \frac{1}{3}$. Aqui, o número máximo de disciplinas por professor está fixado em $\gamma = 3$ e a quantidade de turmas em $\mu = 8$.

Modelo do Teste 2 na formulação OVO:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -f_{i_p(X)}(X) \\
\text{s.a} \quad & x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} \leq 3, \quad \forall i \in P \\
& \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} = 8 \\
& \sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ijk} = nt(j), \quad \forall j \in D \\
& \sum_{i \in P} x_{ij t_{rj}} = 1, \quad \forall r \in T, \forall j \in D \\
& x_{ijk} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ijk} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij1} + x_{ij3} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij2} + x_{ij3} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij4} + x_{ij6} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij5} + x_{ij6} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Este teste tem várias soluções para um mesmo nível p . Veja que as preferências dos professores são todas diferentes de zero, isto possibilita diversas maneiras de fazer a alocação, aumentando assim, a possibilidade de encontrarmos mais de uma solução para cada percentual p .

Modelo do Teste 2 na formulação Minimax:

$$\begin{aligned}
\min \quad & w \\
\text{s.a} \quad & -f_i(x_{ij k}) \leq w, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij k} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} x_{ij k} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ij k} \leq 3, \quad \forall i \in P \\
& \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ij k} = 8 \\
& \sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ij k} = nt(j), \quad \forall j \in D \\
& \sum_{i \in P} x_{i j t_{rj}} = 1, \quad \forall r \in T, \forall j \in D \\
& x_{ij k} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij k} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij 1} + x_{ij 3} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 2} + x_{ij 3} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 4} + x_{ij 6} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 5} + x_{ij 6} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A formulação Minimax tem solução única e pode ser vista na seção a seguir.

4.4 Resultados numéricos do Teste 2:

A solução na formulação Minimax está na Tabela 4.16 e teve imagem -4,333:

prof	disc	hor
1	4	1
1	4	5
2	1	3
2	2	4
2	3	2
3	1	5
3	2	6
3	3	4

Table 4.16: Resultado do teste 2 na formulação Minimax.

Agora, vamos exibir as soluções obtidas através da formulação OVO.

Como são 3 professores, a função OVO foi implementada com $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$, obtendo as respectivas alocações:

- Para $p = 3$ que corresponde a considerar $3/3 = 100\%$ dos professores na hora de fazer a alocação. Encontramos imagem $-4,333$ e o resultado da Tabela 4.17.

prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	4	1	1	4	1
1	4	5	1	4	5
2	1	3	2	1	3
2	3	4	2	2	4
2	2	6	2	3	2
3	3	2	3	1	5
3	2	4	3	2	6
3	1	5	3	3	4

Table 4.17: Resultado do teste 2 com $\gamma = 3$ e $p = 3$.

Veja que uma das soluções coincide com aquela encontrada pela formulação Minimax.

- Para $p = 2$ que corresponde a considerar $2/3 = 66,67\%$ dos professores na hora de fazer a alocação. Encontramos imagem $-4,333$ e os resultados estão nas Tabelas 4.18 e 4.19:

prof	disc	hor									
1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	4	1	3	4	1	3	4	1	1	3
1	4	5	1	1	5	1	1	5	1	1	5
2	1	5	2	1	3	2	4	1	2	4	1
2	2	6	2	4	5	2	1	3	2	2	4
3	4	1	2	2	6	2	2	6	3	3	4
3	1	3	3	2	4	3	2	4	3	4	5
3	2	4	3	4	1	3	4	5	3	2	6
prof	disc	hor									
1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	4
1	3	4	1	3	4	1	3	4	1	1	5
1	4	5	1	1	5	1	1	5	2	4	1
2	4	1	2	2	6	2	4	5	2	1	3
2	1	3	2	4	1	2	2	6	2	2	6
2	2	6	3	1	3	3	2	4	3	3	2
3	1	5	3	2	4	3	1	3	3	2	4
3	2	4	3	4	5	3	4	1	3	4	5
prof	disc	hor									
1	4	1	1	4	1	1	4	1			
1	2	4	1	3	2	1	3	2			
1	4	5	1	1	5	1	3	4			
2	1	3	2	3	4	2	1	3			
2	1	5	2	2	6	2	4	5			
3	3	2	3	1	3	2	2	6			
3	3	4	3	4	5	3	2	4			
3	2	6	3	2	4	3	1	5			

Table 4.18: Resultado do teste 2 com $\gamma = 3$ e $p = 2$.

prof	disc	hor									
1	4	1	1	4	1	1	4	1	1	4	1
1	3	4	1	3	4	1	3	4	1	1	3
1	4	5	1	1	5	1	1	5	1	1	5
2	3	2	2	1	3	2	3	2	2	4	5
2	1	3	2	4	5	2	1	3	2	2	6
2	2	6	2	2	6	2	2	6	3	3	2
3	1	5	3	3	2	3	2	4	3	1	3
3	2	4	3	2	4	3	4	5	3	2	4
prof	disc	hor									
1	4	1	1	4	1	1	4	1	1	4	1
1	3	4	1	1	3	1	1	3	1	1	3
1	4	5	1	1	5	1	4	5	1	1	5
2	2	6	2	2	4	2	2	4	2	3	4
2	1	5	2	4	5	2	1	5	2	2	6
3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	2
3	1	3	3	3	4	3	3	4	3	2	4
3	2	4	3	2	6	3	2	6	3	4	5
prof	disc	hor									
1	4	1	1	4	1						
1	1	3	1	2	4						
1	1	5	1	4	5						
2	3	2	2	3	2						
2	2	4	2	1	3						
3	3	4	2	2	6						
3	4	5	3	3	4						
3	2	6	3	1	5						

Table 4.19: Outro Resultado do teste 2 com $\gamma = 3$ e $p = 2$.

Veja que foram encontradas 21 soluções distintas para $p = 2$, isto significa que temos 21 maneiras de fazer a alocação e ainda ter 66,67% dos professores satisfeitos.

- Quando $p = 1$, temos $1/3 = 33,33\%$ dos professores considerados na hora de fazer a alocação. Para este nível encontramos imagem -5.6667 e foram encontradas as 6 soluções que estão nas Tabelas 4.20:

prof	disc	hor	prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	4	1	1	4	1	1	4	1
1	3	2	1	3	2	1	3	2
1	4	5	1	4	5	1	4	5
2	3	4	2	1	3	2	1	3
2	1	5	2	3	4	2	2	4
2	2	6	2	2	6	3	3	4
3	1	3	3	2	4	3	1	5
3	2	4	3	1	5	3	2	6
prof	disc	hor	prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	4	1	1	4	1	1	4	1
1	3	2	1	3	2	1	3	2
1	4	5	1	4	5	1	4	5
2	3	4	2	2	4	2	1	3
2	2	6	2	1	5	2	2	4
3	1	3	3	1	3	2	1	5
3	1	5	3	3	4	3	3	4
3	2	4	3	2	6	3	2	6

Table 4.20: Resultado do teste 2 com $\gamma = 3$ e $p = 1$.

Obtemos mais de uma solução em todos os níveis p , pois neste teste a quantidade de turmas não pode ser distribuída igualmente entre os três professores, e isto por si só já gera várias maneiras de realizar a alocação.

4.5 Teste 3:

Alocar um grupo de 5 professores em 13 turmas de 5 disciplinas distintas com 12 horários possíveis.

Este teste tem $np \times nd \times nh = 5 \times 5 \times 12 = 300$ variáveis.

Note que este teste possui um número maior de variáveis do que os testes anteriores.

As informações referentes às preferências dos professores quanto às disciplinas são exibidas na Tabela 4.21.

	Disciplinas				
Professores	1	2	3	4	5
1	0	3	1	3	3
2	2	1	0	3	3
3	3	0	2	3	1
4	1	3	3	0	2
5	3	2	3	1	0

Table 4.21: Preferências de cada professor por disciplinas do teste 3.

O expediente foi particionado nos seguintes horários:

- Horário 1: 8h - 10h, segunda-feira e quarta-feira;
- Horário 2: 10h - 12h, segunda-feira e quarta-feira;
- Horário 3: 13h - 15h, segunda-feira e quarta-feira;
- Horário 4: 15h - 17h, segunda-feira e quarta-feira;
- Horário 5: 8h - 10h, terça-feira e quinta-feira;
- Horário 6: 10h - 12h, terça-feira e quinta-feira;
- Horário 7: 13h - 15h, terça-feira e quinta-feira;
- Horário 8: 15h - 17h, terça-feira e quinta-feira;
- Horário 9: 8h - 10h, quarta-feira e sexta-feira;
- Horário 10: 10h - 12h, quarta-feira e sexta-feira;
- Horário 11: 13h - 15h, quarta-feira e sexta-feira;
- Horário 12: 15h - 17h, quarta-feira e sexta-feira;

As preferências de cada professor quanto aos horários estão na Tabela 4.22:

	Professores				
Horários	1	2	3	4	5
1	0	3	1	0	2
2	1	3	1	0	2
3	2	3	0	1	2
4	3	2	0	1	1
5	2	0	1	3	0
6	2	0	1	3	0
7	0	1	0	2	3
8	0	1	0	2	3
9	3	0	3	1	2
10	3	0	2	1	0
11	1	2	2	0	3
12	1	2	3	0	2

Table 4.22: Preferências dos professores quanto aos horários do teste 3.

Neste teste, o grupo de professores deve ministrar para 13 turmas que tem os horários estabelecidos e apresentados na Tabela 4.23:

	Disciplinas				
Turmas	1	2	3	4	5
1	9	5	11	1	2
2	3	10	6	12	9
3	7	8	0	4	0

Table 4.23: Horários das turmas por disciplina do teste 3.

Neste caso, os conjuntos D, P, T, H possuem os seguintes elementos:

- $D = \{1, \dots, 5\}$ - disciplinas oferecidas;
- $P = \{1, \dots, 5\}$ - professores;
- $T = \{1, \dots, 3\}$ - turmas que devem ser atendidas por cada disciplina;
- $H = \{1, \dots, 12\}$ - horários das aulas.

Neste teste, tomamos $\alpha = \beta = \lambda = \frac{1}{3}$, $\gamma = 3$ e $\mu = 13$.

Modelo do Teste 3 na formulação OVO:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -f_{i_p(X)}(X) \\
\text{s.a} \quad & x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} \leq 3, \quad \forall i \in P \\
& \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ijk} = 13 \\
& \sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ijk} = nt(j), \quad \forall j \in D \\
& \sum_{i \in P} x_{ij t_{rj}} = 1, \quad \forall r \in T, \forall j \in D \\
& x_{ijk} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ijk} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij1} + x_{ij9} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij2} + x_{ij10} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij3} + x_{ij11} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij4} + x_{ij12} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Este modelo apresentou soluções distintas quando variamos os níveis de p . Como as tabelas de preferência possuem vários valores diferentes de zero; isto permite maior quantidade de soluções viáveis, então ao mudarmos o percentual p a solução tende a mudar também.

Modelo do Teste 3 na formulação Minimax:

$$\begin{aligned}
\min \quad & w \\
\text{s.a} \quad & -f_i(x_{ij k}) \leq w, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij k} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} x_{ij k} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall k \in H \\
& \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ij k} \leq 3, \quad \forall i \in P \\
& \sum_{i \in P} \sum_{j \in D} \sum_{k \in H} x_{ij k} = 13 \\
& \sum_{i \in P} \sum_{k \in H} x_{ij k} = nt(j), \quad \forall j \in D \\
& \sum_{i \in P} x_{i j t_{rj}} = 1, \quad \forall r \in T, \forall j \in D \\
& x_{ij k} \leq d_{ij}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij k} \leq h_{ki}, \quad \forall i \in P, \forall j \in D, \forall k \in H \\
& x_{ij 1} + x_{ij 9} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 2} + x_{ij 10} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 3} + x_{ij 11} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D \\
& x_{ij 4} + x_{ij 12} \leq 1, \quad \forall i \in P, \forall j \in D.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Note que neste teste temos mais restrições para serem atendidas e este é um fator que dificulta a obtenção das soluções.

Na próxima seção estão os resultados do Teste 3.

4.6 Resultados numéricos do Teste 3:

A solução na formulação Minimax é única e está na Tabela 4.24 e obtemos imagem -4.333:

prof	disc	hor
1	2	10
1	5	9
2	1	3
2	4	4
2	5	2
3	1	9
3	4	1
3	4	12
4	2	5
4	2	8
4	3	6
5	1	7
5	3	11

Table 4.24: Resultado do teste 3 na formulação Minimax.

Agora, vamos ver algumas soluções obtidas através da formulação OVO, sendo que em todas elas mantemos fixo $\gamma = 3$. Como são 5 professores, a função OVO foi implementada com $p = 1, 2, 3, 4, 5$, sendo que corresponde a $\frac{p}{5} \times 100\%$ de professores a serem considerados.

- Para $p = 5$, obtemos 100% de professores satisfeitos e a solução da Tabela 4.25 com imagem -4.3333.

prof	disc	hor	prof	disc	hor
1	5	9	1	2	10
1	2	10	1	5	9
1	3	11	2	1	3
2	5	2	2	4	4
2	4	4	2	5	2
2	1	7	3	1	9
3	3	6	3	4	1
3	1	9	3	4	12
3	4	12	4	2	5
4	2	5	4	2	8
4	2	8	4	3	6
5	4	1	5	1	7
5	1	3	5	3	11

Table 4.25: Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 5$.

Toda vez que $p = \max$ a solução da formulação Minimax coincide com a da formulação OVO e por isto uma das soluções é a mesma da Tabela 4.25.

- Quando $p = 4$, obtemos 80% de professores satisfeitos e a solução está exposta na Tabela 4.26. Sua respectiva imagem é -5.3333:

prof	disc	hor
1	4	4
1	2	5
1	3	11
2	4	1
2	1	7
2	4	12
3	5	2
3	5	9
4	3	6
4	2	8
4	2	10
5	1	3
5	1	9

Table 4.26: Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 4$.

- O nível $p = 3$ corresponde a 60% de professores satisfeitos. A solução está na Tabela 4.27 e sua imagem é -5.6667:

prof	disc	hor
1	5	9
1	2	10
2	5	2
2	1	3
2	4	4
3	1	9
3	3	11
3	4	12
4	2	5
4	3	6
4	2	8
5	4	1
5	1	7

Table 4.27: Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 3$.

- Quando $p = 2$, temos 40% dos professores satisfeitos e as soluções estão na Tabela 4.28, cuja a imagem é -5.6667:

prof	disc	hor
1	5	2
1	4	4
1	3	6
2	4	1
2	2	8
2	4	12
3	5	9
3	3	11
4	2	5
4	1	7
4	2	10
5	1	3
5	1	9

Table 4.28: Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 2$.

Como aqui $p = 2$ temos 2 professores que foram privilegiados e estes são os professores 3 e 5 que estão com menos turmas que os outros.

- Quando $p = 1$, temos 20% dos professores satisfeitos e as soluções estão na Tabela 4.29 e a respectiva imagem é -6:

prof	disc	hor
1	4	4
1	5	9
1	2	10
2	5	2
2	1	3
2	2	8
3	4	1
3	1	9
3	3	11
4	2	5
4	3	6
4	1	7
5	4	12

Table 4.29: Resultado do teste 3 com $\gamma = 3$ e $p = 1$.

Note que a quantidade de turmas por professor não é a mesma. O professor 5 ficou com apenas uma turma, enquanto todos os outros ficaram com 3 turmas, o que reflete bem o que quer dizer 20% dos professores levados em consideração para a satisfação. Devemos lembrar que 20% do total de professores corresponde a apenas um professor.

Aqui encerramos a exibição dos resultados e na próxima seção faremos um análise deles.

4.7 Análise dos Resultados

Observe que a imagem e a solução do $p = \max$ encontradas pela formulação OVO coincide com aquelas encontradas pela formulação Minimax. Isto acontece (como já dissemos no Capítulo 2), porque a formulação OVO é uma generalização da formulação Minimax, sendo que esta última corresponde à primeira quando $p = \max$.

Vimos que alguns problemas podem ter solução única, mesmo quando variamos o p e outros podem ter várias soluções para um mesmo p . Isto acontece devido

à quantidade de soluções que é possível obter com a mesma imagem. Há muitos minimizadores locais e os globais nem sempre são únicos, mas a quantidade deles é sempre finita.

Como o domínio da função OVO utilizada é \mathbb{R}^n e o contradomínio é o conjunto discreto $\{0, 1\}$, podemos dizer que a quantidade máxima de soluções é 2^n . Isto decorre do fato de só haver duas possibilidades para cada variável de decisão testada: representar uma alocação efetivada ($x_{ijk} = 1$) ou representar uma alocação não efetivada ($x_{ijk} = 0$). De todas as possibilidades testadas várias não satisfazem as restrições do problema e por isto são descartadas. Entre aquelas que são viáveis, procuramos pelas que maximizam a satisfação. Então o número de soluções é finito e no máximo igual a 2^n .

No Teste 1, podemos observar que para o total máximo de turmas fixo, as variações dos valores de p não alteraram a solução obtida. Isso ocorre, porque nas tabelas de preferências deste teste, os professores tinham preferências distintas para disciplina e para horário, ou seja, não havia mais de um professor querendo a mesma disciplina ou o mesmo horário com o mesmo nível de preferência. Isso impede que ocorra empates no valor da função de preferência e conseqüentemente suprime as variações na solução. Em outras palavras, isto faz com que as alterações nos valores de p (que controlam o total de professores levados em consideração durante a minimização) não provoquem alterações na solução.

Entretanto, quando permitimos valores maiores que 2 para γ , observa-se uma variação nas soluções (associadas às alterações de p). Embora as preferências estejam distribuídas da mesma forma, consegue-se fazer uso da quantidade maior de turmas para "onerar" mais um professor e assim privilegiar outro, aumentando sua satisfação.

No Teste 2, temos que alocar 8 turmas para 3 professores. Nesse caso, mesmo levando em consideração a satisfação dos 3 professores, sabemos que 2 deles ficarão com 3 turmas e apenas um ficará com 2 turmas. Este fato por si só, já indica várias maneiras disto ser feito, o que sugere a presença de vários minimizadores globais para p máximo ($p = 3$). Quando o valor de p é menor e passamos a privilegiar uma quantidade menor de professores, este comportamento fica cada vez mais acentuado e a presença de vários minimizadores globais ocorre.

No Teste 3, o número de variáveis é significativamente maior, em decorrência de um número maior de horários disponíveis. As tabelas de preferência possuem a maioria dos níveis de satisfação diferentes de zero e esta característica indica que

variações de p suscitam variações na solução.

Pode-se observar que em alguns casos também obtemos mais de um minimizador global, embora estes já não sejam tantos quanto aqueles obtidos no Teste 2. Uma justificativa para isso pode ser a presença de mais restrições de horários coincidentes.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma nova abordagem para o problema de alocação de recursos humanos, mais especificamente, para o problema de alocação de professores em turmas de determinadas disciplinas, em horário previamente fixados em uma instituição de ensino. Além de alocá-los queremos também ter a maior satisfação possível para um percentual controlado de professores. A satisfação de cada um com a sua respectiva alocação reside no atendimento de algumas preferências.

Foi apresentada uma modelagem original para o problema abordado, conhecida como formulação OVO (Otimização do Valor Ordenado). Com o intuito de sua resolução, foi estudada a formulação OVO, teórica e computacionalmente e sua implementação foi executada no software Matlab. Esta formulação nos permite controlar o percentual de satisfação do grupo investigado. Quanto maior o percentual, mais difícil fica satisfazer todas as restrições do problema. Esse controle do percentual de professores satisfeitos com a possível alocação é o que a distingue da abordagem tradicional Minimax (minimização do valor máximo da insatisfação).

A alocação de um grupo de professores para uma quantidade arbitrária de turmas de disciplinas distintas em horários pré-fixados tem uma série de exigências que devem ser cumpridas: não pode haver turmas da mesma disciplina no mesmo horário, nenhum professor pode ser alocado em turmas com horários coincidentes e nem em disciplinas ou horários com nível de satisfação zero.

Foram realizados testes numéricos que permitiram a comparação entre a abordagem proposta e a abordagem Minimax, onde foi validada a abordagem nova e constatada a influência do percentual de satisfação na alocação dos professores.

O problema estudado tem restrições lineares e a função objetivo é uma função

OVO que é linear por partes, pois as funções que a compõe são lineares. Sendo assim, acreditamos que se o algoritmo OVO usado for adaptado para estruturas lineares será possível obter melhores resultados mais rapidamente, sendo este um dos pontos de continuidade deste trabalho.

Apêndice A

Extensões da formulação OVO

O conceito da formulação OVO é ampliado para LOVO (Low Order-Value Optimization) e HOVO (High Order-Value Optimization) em [5]. A formulação LOVO trabalha com a soma das p menores funções, enquanto que a formulação HOVO trabalha com a soma das p maiores. As funções podem ser tomadas após a ordenação e depois fazer a soma ou equivalentemente, fazer todas as combinações possíveis de somas tomadas p a p e depois tomar a menor delas para a formulação LOVO e a maior delas para o caso da formulação HOVO. Esta equivalência é vantajosa porque transforma qualquer problema escrito na formulação LOVO ou na formulação HOVO em um problema escrito na formulação OVO que já tem teoria fundamentada para encontrar a solução.

No artigo [5] são apresentadas ampliações do conceito da formulação OVO: o LOVO (Low Order Value Optimization) e o HOVO (High Order Value Optimization).

O LOVO consiste na minimização da soma das p menores funções, já o HOVO consiste na soma das p maiores funções com $p \in \{1, 2, \dots, r\}$;

Dadas r funções F_1, F_2, \dots, F_r definidas em um subconjunto Ω de \mathbb{R}^n e um inteiro $p \in \{1, 2, \dots, r\}$, define-se as funções LOVO e HOVO, respectivamente por

- $L_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$L_p(x) = \sum_{j=1}^p F_{i_{j(x)}}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

- $H_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$H_p(x) = \sum_{j=r-p+1}^r F_{i_j(x)}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

onde $\{i_1(x), \dots, i_r(x)\} = \{1, \dots, r\}$ e

$$F_{i_1(x)}(x) \leq F_{i_2(x)}(x) \leq \dots \leq F_{i_p(x)}(x) \leq \dots \leq F_{i_r(x)}(x).$$

Se as funções F_i são contínuas, a função $S_p(x)$ é contínua também, já que é a soma de funções contínuas. Entretanto, mesmo que todas as funções F_i sejam diferenciáveis, $S_p(x)$ geralmente não é diferenciável. As formulações são definidas da seguinte forma:

- LOVO

$$\begin{aligned} & \min L_p(x) \\ & \text{sujeito a } x \in \Omega \end{aligned} \tag{A.1}$$

- HOVO

$$\begin{aligned} & \min H_p(x) \\ & \text{sujeito a } x \in \Omega \end{aligned} \tag{A.2}$$

Existem duas formas de abordagem para as formulações LOVO (e HOVO), a saber:

1. Pode-se realizar a ordenação das r funções envolvidas, e posteriormente fazer a soma das p menores, no caso do LOVO (e das p maiores, no caso do HOVO);
2. Pode-se fazer todas as possíveis somas com p funções e depois tomar a menor delas, no caso do LOVO (e a maior delas, no caso do HOVO).

Vejamos está equivalência de maneira mais teórica:

Seja $m = C(r, p) = \frac{r!}{p!(r-p)!}$ o total de possibilidades de se tomar p funções em um conjunto onde há r funções. O conjunto $\{1, \dots, r\}$ contém exatamente m diferentes subconjuntos C_1, \dots, C_m de cardinalidade p .

Seja $f_i(x)$ a função que representa a soma das funções de cada subconjunto C_i , $i \in \{1, \dots, m\}$

$$f_i(x) = \sum_{j \in C_i} F_j(x), \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega.$$

Temos que $f_{min}(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$, isto é, a função f_{min} é a menor das somas. Então, podemos afirmar que $f_{min} = L_p(x), x \in \Omega$. Com esta informação reescrevemos a formulação LOVO como

$$\begin{aligned} & \min f_{min} \\ & \text{sujeito a } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{A.3}$$

O problema (A.3) é um caso particular de (A.1), basta tomar $p = 1$ e $F_i(x) = f_i(x)$, com $i = 1, \dots, m$.

A função HOVO é $H_p(x) = f_{max}$, onde $f_{max} = \max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$, isto é, a função f_{max} é a maior das somas. Podemos reescrever a formulação HOVO como

$$\begin{aligned} & \min f_{max} \\ & \text{sujeito a } x \in \Omega \end{aligned} \tag{A.4}$$

O problema (A.4) é um caso particular de (A.2), basta tomar $p = m$ e $F_i(x) = f_i(x)$, com $i = 1, \dots, m$.

As formulações LOVO e HOVO não são diferenciáveis, mesmo que as f_i o sejam. No artigo [5] é mostrado que apesar desta característica, métodos diferenciáveis são aplicados na sua resolução e preservam a convergência. A grande quantidade de minimizadores locais dificulta a resolução do problema LOVO. Por este motivo, em muitas aplicações é necessário a utilização de ferramentas de otimização global para obter um valor inicial adequado.

Na próxima seção exibiremos um caso particular conhecido da formulação LOVO e um da formulação HOVO.

A.1 Casos Particulares das Extensões da Formulação OVO

O método dos Mínimos Quadrados é um caso particular do LOVO e o Valor de Risco Condicional (CVaR), do HOVO. Vamos justificar isto, nas subseções seguintes.

A.1.1 Quadrados Mínimos

O Método dos Quadrados Mínimos [33, 35] é um processo que busca minimizar a soma dos quadrados dos resíduos. Nos problemas em que este método obtém soluções com sucesso, a função objetivo f tem a forma:

$$f(x) = \sum_{j=1}^m r_j^2(x) \quad (\text{A.5})$$

onde cada função $r_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $j = 1, \dots, m$ com $m \geq n$ é diferenciável e é chamada de resíduo.

Os quadrados das funções $r_j(x)$ são utilizadas para medir a discrepância entre o modelo e as informações fornecidas pelo comportamento do fenômeno observado. Ao minimizar a função (A.5), os valores encontrados são aqueles que mais se aproximam do modelo sugerido pelos dados.

Considere, por teste, que a função $\phi(x, t_i)$, $i \in \mathbb{N}$ é um bom modelo para um determinado fenômeno que acontece no instante t_i e no vetor x . Uma maneira de medir a diferença entre o modelo e a imagem $y_i = (x, t_i)$ observada durante os experimentos é calcular

$$\sum_{j=1}^m [\phi(x, t_j) - y_j]^2$$

que coincide com (A.5) se tomarmos $r_j(x) = \phi(x, t_j) - y_j$.

Ao obtermos a menor soma $\sum_{j=1}^m [\phi(x, t_j) - y_j]^2$, teremos que cada parcela

$[\phi(x, t_j) - y_j]^2$ é a menor e conseqüentemente teremos que $[\phi(x, t_j) - y_j]$ é a menor possível, como desejado inicialmente.

Esse método é frequentemente utilizado para ajustar curvas e encontrar padrões ocultos. Entretanto, esta técnica sofre muita influência dos dados espúrios; quanto maior for a quantidade destes, pior será o resultado fornecido pelo método, visto que este calcula o resíduo de todos os pontos dados.

Quando $p < r$, a formulação LOVO é mais robusta do que a formulação OVO, pois considera a soma dos quadrados das p menores distâncias, enquanto na formulação OVO apenas a p -ésima menor distância.

A.1.2 Valor de Risco Condicional - CVAR

Uma importante aplicação da formulação HOVO é a minimização do Valor de Risco Condicional (CVaR - Conditional Value-at-Risk) durante o processo de otimização de carteiras de investimento (portfolio optimization).

Apesar de amplamente utilizado, o VaR não tem características desejáveis como a conexidade e a diferenciabilidade. O CVaR é a esperança de que a perda estimada dos ativos que pertencem à carteira de investimento, seja maior ou igual do que o VaR ($\text{VaR} \leq \text{CVaR}$). Conseqüentemente, ele é extremamente sensível à presença de cenários catastróficos.

Como já dissemos antes, o VaR (Valor de Risco) representa a perda máxima esperada para a carteira, a um nível de significância $\gamma \in [0, 1]$ (ou nível de confiança $1 - \gamma$), em um intervalo de tempo determinado. Quanto maior for o valor do VaR, maior a probabilidade de perda. O CVaR é uma extensão do VaR e pode ser visto como um média ponderada entre o VaR e a esperança das perdas que o excedem. Na dissertação [29] encontramos um estudo comparativo entre o VaR e o CVaR.

O CVaR corresponde à função HOVO, quando adotamos as funções de perdas ordenadas. Cada f_i representa a perda no cenário i e queremos minimizar as maiores perdas para obter a menor perda total possível. Podemos fazer isto escolhendo a maior perda de cada cenário, somando e depois minimizando-as. Como vimos na seção anterior, é justamente isto que propõe a formulação HOVO.

Além disso, se as funções f_i são convexas, o problema de minimizar o CVaR (problema HOVO) é um problema convexo. Se as funções f_i são afins, este problema pode ser estudado com as técnicas de Programação Linear.

Referências Bibliográficas

- [1] ANTUNES, A V. ; SANTA ANNA, L. R. Satisfação e motivação no trabalho do enfermeiro, **Revista Brasileira de Enfermagem**, Brasília, v. 49, n.3, p.425-34, 1996.
- [2] ANDREANI, R. ; DUNDER, C. ; MARTÍNEZ, J. M. Order-value optimization: formulation and solution by means of a primal Cauchy method. **Mathematical Methods of Operations Research**, New York, v. 58, n. 3,p. 387-399, Dec. 2003.
- [3] ANDREANI, R. ; DUNDER, C. ; MARTÍNEZ, J. M. Nonlinear-programming reformulation of the order-value optimization problem. **Mathematical Methods of Operations Research**, New York, v. 61, n. 3, p. 365-384, Jul. 2005
- [4] ANDREANI, R. et al. Quasi-newton methods for order-value optimization and value-at-risk calculations. **Pacific Journal of Optimization**, v.2, n. 1, p. 11-33, Jan. 2006.
- [5] ANDREANI, R. et al. Low order-value optimization and applications. **Journal of Global Optimization**, Amsterdam, v. 43, n. 1, p. 1-22, Jan. 2009.
- [6] AYKIN, T. Optimal shift scheduling with multiple break windows. **Management Science**, Hanover, v. 42, n. 4, p. 591-602, Apr. 1996.
- [7] BARD, J. F. ; BICINI, C. ; SILVA, A. H. Staff scheduling at the United States Postal Service. **Computers & Operations Research**, New York, v.30, n. 5,p. 745-771, Apr. 2003.
- [8] BARTHOLDI, J. J. ; ORLIN, J. B. ; RATLIFF, H. D.. Cyclic scheduling via integer programs with circular ones. **Operations Research**, Baltimore, v. 28, n. 5, p. 1074-1085, Sept./Oct. 1980.

- [9] BEAUMONT, N. Using mixed integer programming to design employee rosters. **Journal of the Operational Research Society**, Basingstoke, v. 48, n. 6, p. 585-590, Jun. 1997.
- [10] BEAUMONT, N. Scheduling staff using mixed integer programming. **European Journal of Operational Research**, Amsterdam, v. 98, n. 3, p. 473-484, May 1997.
- [11] BECHTOLD, S. E. ; JACOBS, L. W. Implicit modeling of flexible break assignments in optimal shift scheduling. **Management Science**, Hanover, v. 36, n. 11, p. 1339-1351, Nov. 1990.
- [12] BLOCHLIGER, I.. Modeling staff scheduling problem: a tutorial. **European Journal of Operational Research**, Amsterdam, v. 158, n. 3, p. 533-542, Nov. 2003.
- [13] BRAZ JUNIOR, O. O. **Otimização de horários em instituições de ensino superior através de algoritmos genéricos**. 2009. 144 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Produção) - Programa de Pós-graduação em Engenharia da Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.
- [14] BRUSCO, M. J. Solving personnel tour scheduling problems using the dual all-integer cutting plane. **IIE Transactions on Operations Engineering**, London, v. 30, n. 9, p. 835-844, 1998.
- [15] BRUSCO, M. J. ; JACOBS, L.W. Personnel tour scheduling when starting time restrictions are present. **Management Science**, Hanover, v. 44, n. 4, p. 534-547, Apr. 1998.
- [16] BURNS, R. N. ; CARTER, M. W. Work force size and single shift schedules with variable demands. **Management Science**, Hanover, v. 31, n. 5, p. 599-607, May 1985.
- [17] COLORNI, A. ; DORIGO, M. ; MANIEZZO, V. Metaheuristics for high school timetabling. **Computational Optimization and Applications**, Norwell, v.9, n. 3, p. 275-298, Mar. 1998.
- [18] COSTA, D. M. B. **Distribuição das cargas horárias de professores numa instituição de ensino**. 1994, 55 f. (Especialização em Matemática Aplicada) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1994.

- [19] DANTZIG, G. B. A comment on Edie's traffic delays at toll booths. **Operation Research**, Baltimore, v. 2, n. 3, p. 339-441, Aug. 1954.
- [20] DENNIS, J. E. ; SCHNABEL, R. B. **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**. Englewood Cliffs: SIAM, 1996. (Classics in Applied Mathematics).
- [21] EMMONS, H. Work-force scheduling with cyclic requirements and constraints on days off, weekends off, and work stretch. **IIE Transactions on Operations Engineering**, London, v. 17, n. 1, p. 8-15, 1985.
- [22] ERNST, A. T. et al. Staff scheduling and rostering: a review of applications, methods and models. **European Journal of Operational Research**, Amsterdam, v.153, n. 1, p. 3-27, Feb. 2004.
- [23] GOMES, F. S. ; M. A. DE P. MIGUEZ, M. A. P. Avaliação da satisfação e estresse no trabalho entre funcionários de uma unidade de alimentação e nutrição no Rio de Janeiro. **CERES**; Brasília, v. 1, n. 1, p. 29-42, 2006.
- [24] FRIEDLANDER, A. **Elementos de programação não-linear**. Campinas: UNICAMP, 1994.
- [25] GOÉS, A. R. T. **Otimização na distribuição da carga horária de professores, método exato, método heurístico, método misto e interface**. 2005. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.
- [26] JARRAH, A. I. Z ; BARD, J. F. ; SILVA, A. H. Solving large-scale tour scheduling problems. **Management Science**, Hanover, v.40, n.9, p. 1124-1145, Sept. 1994.
- [27] KOTSKO, E. G. S. **Otimização na construção da grade horária escola: uma aplicação**. 2003. 66 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Setor de Ciências Exatas e Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2003.
- [28] LIN, C. K. Y. ; LAI, K. F. ; HUNG, S. L. Development of a workforce management system for a customer hotline service. **Computers & Operations Research**, Norwell, v. 27, n. 10, p. 987-1004, Sept. 2000.

- [29] MAGRO, R. C. **Medidas de risco e seleção de portfólios**, 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.
- [30] MASON, A. J. ; RYAN, D. M. ; PANTON, D. M.. Integrated simulation, heuristic and optimisation approaches to staff scheduling. **Operations Research**, Baltimore, v. 46, n. 2, p.161-175, Feb. 1998.
- [31] N. de F. MEIRELLES, N. F. ; ZEITOUNE, R. C. G. Satisfação no trabalho e fatores de estresse da equipe de enfermagem de um centro oncológico. **Escola Anna Nery Revista de Enfermagem**; Rio de Janeiro, v. 7, n. 1, p.78-88, abr. 2003.
- [32] MOURA, G. M. S. S. O estudo da satisfação no trabalho e do clima organizacional como fatores contributivos para o ser saudável no trabalho da enfermagem. **Texto & Contexto Enfermagem**; Florianópolis, v. 1, n. 2, p. 167-179, jul./dez. 1992.
- [33] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**, 2. ed., New York: Springer, 2006.
- [34] PINHEIRO, P. R. ; OLIVEIRA, J. A. Um ambiente de apoio a construção de horário escolar na WEB: modelagem implementação e aplicação nas escolas de ensino médio. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 33., 2001, Campos do Jordão. **Proceedings ...** , Campos do Jordão: SBPO, 2001.
- [35] RUGGIERO, M. A. G. ; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education , 1996.
- [36] SALVATIERRA JR, M. **Otimização global usando trajetórias densas e aplicações**. 2005. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- [37] SANTOS, M. C. L. ; LAVINAS, V. A. B. ; FERNANDES, A. F. C. Nível de satisfação dos enfermeiros com seu trabalho. **Revista Enfermagem**, Rio Janeiro, vol.15, n..1, p.82-86, jan./mar. 2007.
- [38] SEGAL, M.. The operator scheduling problem: a network flow approach. **Operations Research**, Baltimore, v. 22, n. 4, p. 803-823, Jul./Aug. 1974.

- [39] SCHRIJVER, A. **Theory of linear and integer programming**, Chichester: John Wiley & Sons, 2000.
- [40] STIGLITZ, J. E. ; GREENWALD, B. **Towards a new paradigm in monetary economics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [41] REIS, D. C. S. **Um algoritmo branch and bound para o problema da alocação ótima de monitores de qualidade de energia elétrica em redes de transmissão**. 2007. 110 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia e Arquitetura, UFJF, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2007.
- [42] WEST, A. A. A. ; LISBOA, M. A. P. L. P. Satisfação no trabalho e perfil dos funcionários do Centro de Material e Esterilização. **Revista SOBECC**, São Paulo, v. 6, n.4, p.7-21, out./dez. 2001.