UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Aspectos Teóricos e Numéricos Sobre uma Equação de Difusão não Linear

Nilda Helena Lopes da Silva

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientadores: Mauro Antônio Rincon e Haroldo Rodrigues Clark

Rio de Janeiro
Março de 2010

Aspectos Teóricos e Numéricos
Sobre uma Equação de Difusão não Linear

Nilda Helena Lopes da Silva

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração: Métodos Numéricos

Aprovada por:

Mauro Antônio Rincon, D.Sc. - IM/UFRJ
(Orientador)

Haroldo Rodrigues Clark, D.Sc. - IM/UFF
(Co-orientador)

Ricardo Eleodoro Fuentes Apolaya, D.Sc. - IM/UFF

Daniel G. Alfaro Vigo, D.Sc. - IM/UFRJ

Jose Henrique Carneiro de Araujo, D.Sc. - IC/UFF

Rio de Janeiro

Março de 2010

Ficha Catalográfica

Silva, Nilda Helena L.

Aspectos Teóricos e Numéricos Sobre a Equação de difusão não linear

Nilda Helena Lopes da Silva

Rio de Janeiro

UFRJ/ IM, 2010 xi, 60.: il. 31cm;

Orientadores: Mauro Antônio Rincon e Haroldo Rodrigues Clark

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação em Informática, 2010

Referências Bibliográficas: f. 78-79.

1. Introdução
2. Resultados Básicos
3. Aspectos Teóricos
4. Aspectos Numéricos
5. Simulações Numéricas
6. Conclusões
7. Bibliografia

Dedicatória

A minha Mãe por me apoiar, incondicionalmente, em todos os meus projetos de vida e ao meu companheiro de todos os momentos Marco Antonio Larosa.

Agradecimentos

Aos meus orientadores professores Mauro Antônio Rincon e Haroldo R. Clark por terem me concedido esta oportunidade e pelas orientações e conhecimentos transmitidos.

Aos professores Ivo Lopez e I-Shih Liu pelas aulas ministradas durante o curso.

Aos professores Marcello Teixeira e Luziane Mendonça pelas aulas ministradas e por sempre se colocarem a disposição para nos ajudar durante todo o curso.

Ao professor Alessandro Silva - CEFETQ - RJ por sua extrema generosidade em disponibilizar parte do seu tempo para me ajudar nos primeiros passos do desenvolvimento numérico de meu trabalho.

Aos colegas de curso Mauro, Alexandre, Cristiane, Rodolfo e Ronaldo pelo apoio mutuo e amizade.

Aos funcionários do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro que trabalham para dar apoio, direta ou inderetamente, ao desenvolvimento de todos os alunos.

Resumo

Neste trabalho estudar-se-á a existência e unicidade de soluções globais e a análise numérica de um sistema associado à uma equação de difusão não linear, dada por

$$u_t - M\left(\int_0^L u\ dx\right) u_{xx} + f(u) = 0 \ \text{ em } \ Q,$$

onde Q é o retângulo $[0, L] \times [0, T[$ com $L > 0$, $T > 0$ arbitrário.

A existência de soluções globais serão estabelecidas por meio do Métodos Faedo-Galerkin e compacidade. A unicidade de solução será obtida pelo Método da energia. Para a análise numérica serão usados os Métodos de Elementos Finitos e Diferenças Finitas.

A implementação computacional será feita em linguagem C. E finalmente, serão apresentados no corpo da dissertação alguns exemplos com simulação numérica.

Abstract

In this work one studies the existence and uniqueness of global solutions and the numerical analysis of a system associated with the nolinear difusion equation, namely

$$u_t - M\left(\int_0^L u\ dx\right) u_{xx} + f(u) = 0 \ \text{ em } \ Q,$$

where Q is the rectangle $]0, L[\times [0, T[$ with $L > 0$, $T > 0$ arbitrary.

The existence of global solutions will be established by Faedo-Galerkin and compactness methods. The uniqueness solution will be get by energy method. For numeric analysis will be used the finite element method and finite difference method.

The computer implementation will be done by C language. And finaly, will be presented some exemples with numeric simulation.

Conteúdo

1 Introdução **1**

1.1 Proposta de Pesquisa 2

2 Resultados Básicos **3**

2.1 Preliminares 3

2.2 Espaço das Distribuições Escalares 4

2.3 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ 4

2.4 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$ 6

2.5 Espaços de Sobolev 6

2.5.1 Convergência em L^p e no dual de L^p 6

2.6 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais 8

2.7 Outros Resultados Úteis 10

3 Aspectos Teóricos **14**

3.1 Existência de soluções aproximadas 15

3.2 Estimativas sobre as soluções aproximadas 18

3.2.1 Estimativa I 18

3.2.2 Estimativa II 20

3.3 Convergência das Soluções Aproximadas 23

3.3.1 Limite na parcela linear de (3.7) 23

3.3.2 Limite nas parcelas não lineares de (3.7) 24

3.3.3 Passagem ao limite no sistema (3.7) 28

3.4 Verificação dos Dados Iniciais 29

3.5 Unicidade de Solução 30

4 Aspectos Numéricos **33**

4.1 Formulação Variacional 33

4.2 Método de Faedo Galerkin 34
4.3 Problema Aproximado 35
4.4 Método de Elementos Finitos 36
4.4.1 Função de Interpolação 36
4.4.2 Cálculo das Matrizes 39
4.5 Cï¿½lculo do termo não linear $C\big(u_h(t)\big)$: 47
4.6 Método das Diferenças Finitas 50
4.6.1 Notação 51
4.6.2 Família de Métodos 51

5 Simulações Numéricas **54**
5.1 Problema $u_t - u_{xx} + f(u) = g$ 55
5.1.1 Exemplo 1 55
5.1.2 Exemplo 2 61
5.1.3 Exemplo 3 67
5.2 Problema Original $u_t - M\left(\int_0^L u\ dx\right) u_{xx} + f(u) = g$ 68
5.2.1 Exemplo 4 68
5.2.2 Exemplo 5 73

6 Conclusï¿½es **77**

Bibliografia **78**

Capítulo 1

Introdução

Equações de difusão lineares e não lineares são modelos matemáticos que descrevem diversos fenômenos da fisíca, biologia, química, etc. Dentre estes modelos de diferentes áreas da ciência pode-se citar:

1. A equação de Fisher-Kolmogorov - Foi originalmente utilizado para descrever a propagação de populações biólogicas.

2. O sistema FitzHugh-Nagumo - Surge como modelo de transmissão de sinais sobre os axônios do nervo e no tecido cardíaco.

3. O modelo de difusão térmica na teoria de reatores químicos e de combustão - Este modelo descreve a temperatura, as concentrações de espécies químicas, e as reações que ocorrem no material, especificando a quantidade de espécies produzidos ou consumidos na reação.

Neste trabalho considera-se a seguinte equação de *difusão não linear*

$$u_t - M\left(\int_0^L u\ dx\right) u_{xx} + f(u) = 0, \tag{*}$$

sendo M e f funções reais com valores reais. A equação (*) modela, por exemplo, a migração de bactérias em um recipiente ou propagação de calor em um condutor, onde u representa a densidade de bactérias no recipiente ou a temperatura instatânea no condutor.

No caso de uma migração de bactérias, o meio é de suma importância e assim tem-se naturalmente o termo não local

$$M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right),$$

o qual representa a população total de bactérias em $]0, L[$, ou seja, a velocidade da migração depende da população total em $]0, L[$. Além disso, a função $f(u)$ representa, genericamente, situações físicas externas que atuam inversamente proporcional ao operador

$$\mathcal{L}_u = u_t - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_{xx}.$$

Para $n \geq 1$ este tipo de equação foi estudada por Chipot-Lovat [4], considerando $f = f(x)$, e por Menezes [12], considerando $f = f(u)$.

1.1 Proposta de Pesquisa

Propõe-se investigar o seguinte problema misto

$$\left|\begin{array}{l} u_t(x,t) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_{xx}(x,t) + f(u(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \text{ para } \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ com } \ x \in [0,L], \end{array}\right. \tag{1.1}$$

onde Q é o retângulo $]0, L[\times [0, T[$ com $L > 0$, $T > 0$ arbitrário.

Como resultado do estudo do problema (1.1) será mostrado:

- Existência e unicidade de soluções;
- Métodos Numéricos para o problema;
- Simulação numérica das soluções obtidas.

Capítulo 2

Resultados Básicos

Neste capítulo apresenta-se os pré-requisitos necessários para desenvolver os capítulos subseqüentes.

2.1 Preliminares

Definição 2.1 *(**Convergencia Fraca**) Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle\varphi, u_\nu\rangle \to \langle\varphi, u\rangle$, $\forall\varphi \in E'$*

Definição 2.2 *(**Convergencia Fraca Estrela**) Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Diz-se $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ fraco estrela se, e somente se, $\langle\varphi_\nu, u\rangle \to \langle\varphi, u\rangle$, $\forall u \in E$.*

Teorema 2.1 *(**Banach-Steinhaus**) Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $(T_i)_{i\in I}$ uma familia (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F. Suponha que $\sup_{i\in I}\|T_i(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$. Então $\sup\|T_i\|_{(E,F)} < \infty$. Dito de outro modo, existe uma constante C tal que $\|T_i(x)\| \leq C\|x\|$, $\forall x \in E$ e $\forall i \in I$.*

Demonstração: Ver [1] ■

Proposição 2.1 *Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão em E. Se verifica:*

(I) Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$, então $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$,

(II) Se $x_n \to x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$,

(III) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf\|x_n\|$,

(IV) Se $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente para* $\sigma(E, E')$ *e se* $f_n \to f$ *fortemente em* E' *(isto é,* $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$*), então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [1] ■

Observação 2.1 *A parte (III) da proposição é uma consequência do Teorema de Banach-Steinhaus.*

Teorema 2.2 *Seja* E *um espaço de Banach separável e seja* (f_n) *uma sucessão limitada em* E'*. Então existe uma subsucessão* (f_{n_k}) *que converge para a topologia* $\sigma(E', E)$

Demonstração: Ver [1] ■

2.2 Espaço das Distribuições Escalares

Definição 2.3 *Dada uma função contínua,* $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, onde* Ω *é um aberto, denomina-se* suporte *de* φ *ao fecho em* Ω *do conjunto dos pontos* x *tais que* $\varphi(x) \neq 0$*. Simbolicamente*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega} .$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω, com suporte compacto em Ω.

2.3 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima, será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que se uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergir, em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ, então,

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi\rangle$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω.

Dado um aberto Ω do $\mathbb{R}^N$ denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de *Lebesgue* em Ω, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \ dx\right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ denota-se por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega,$$

onde quase sempre significa a menos de um conjunto de medida nula.

Neste espaço considera-se a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ ess } |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, é um espaço de *Banach*. Em particular, quando $p = 2$, tem-se que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* cuja *norma* e *produto interno* serão definidos e denotados, respectivamente por

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \ dx\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x) \ dx.$$

Lema 2.3.1 (Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Ver [1]. ■

2.4 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

A sequência de distribuições escalares $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando

$$\langle T_\nu, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2.5 Espaços de Sobolev

2.5.1 Convergência em L^p e no dual de L^p

Diz-se que uma sequência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será de notado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, é reflexivo. Para demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços $L^p(\Omega)$ consulte Brezis [1].

Teorema 2.3 *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge quase sempre para f em Ω, e existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver [1]. ■

Definição 2.4 *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se* base Hilbertiana *de H uma sequência de elementos (ω_n) de H tais que*

i) $\|\omega_n\|_H = 1 \;\; \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \;\; \forall n, m,\; m \neq n;$

ii) *O espaço gerado pela $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em H.*

Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O *espaço de Sobolev de ordem* m , modelado sobre $L^p(\Omega)$, aqui denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, é por definição o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^p(\Omega)$ para as quais suas derivadas até a ordem α, no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}, \; 1 \leq p < \infty$$

e quando $p = \infty$, define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Proposição 2.2 *Os espaços lineares* $W^{m,p}(\Omega)$ *equipados das respectivas normas acima são espaços de* Banach.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, que é denotado por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \, ; D^\alpha u \in L^2(\Omega) \, , \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\}$$

cuja norma e produto interno são dados respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2} \quad \text{e} \quad ((u,v)) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

O espaço $H^m(\Omega)$ com a estrutura topológica acima, é um espaço de *Hilbert*, continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ então $\varphi\big|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é o espaço denotado por $H^{-m}(\Omega)$. A caracterização de $W^{-m,p}(\Omega)$. é dada por:

Teorema 2.4 *Seja* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Então,* $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ *se, e somente se, existem* $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ *tais que* $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.

Demonstração: Ver [1]. ■

Lema 2.5.1 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\,|\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Demonstração: Ver [1]. ■

Observação 2.2 *Usando a desigualdade de Poincaré conclui-se que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.*

2.6 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E. Uma função vetorial $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, $i = 1, 2, ..., k$, dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, ..., k$. Define-se a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\,\varphi_i.$$

Diz-se que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B}$ *-integrável*) se existir uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s. em $(0,T)$;

ii) $\lim\limits_{k,m\to\infty} \displaystyle\int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X\,dt = 0.$

Uma função vetorial $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t)\rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X. Diz-se que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à *Lebesgue*.

Denota-se por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lesbegue* em $(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H \, ds.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \operatorname{ess} \|u(t)\|_X .$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, mostra-se que para cada $u \in [L^p(0,T;X)]'$, existe $\widetilde{u} \in L^{p'}(0,T;X')$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle \widetilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} \, dt.$$

No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 2.5 *Seja $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A* derivada *de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}'(0,T).$$

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$ representa-se o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ munido da norma da *convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X .$$

Por $C_w^0([0,T];X)$ denota-se o *espaço das funções* $u:[0,T]\longrightarrow X$ *fracamente contínuas*, isto é, a aplicação $t\mapsto\langle v,u(t)\rangle_{X',X}$ é contínua em $[0,T],\forall v\in X'$.

Quando $X=H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t\longmapsto(u(t),v)_H$ para $\forall v\in H$.

Teorema 2.5 (Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1, $1<p_0$, $p_1<\infty$, e, W o espaço*

$$W=\{u\in L^{p_0}(0,T;B_0);\ u'\in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W=\|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)}+\|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [8]. ■

Observação 2.3 *Uma consequência do Teorema de Aubin-Lions 2.5: se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k}\longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.*

Proposição 2.3 *Sejam V e H espaços de Hilbert, V continuamente imerso em H, $u\in L^p(0,T;V)$ e $u'\in L^p(0,T;H)$, com $1\le p<\infty$, então*

$$u\in C^0([0,T];H)\cap C_w^0([0,T];V).$$

2.7 Outros Resultados Úteis

Sejam $D\subset\mathbb{R}^{N+1}$ e $F:D\to\mathbb{R}^N$. Diz-se que F satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando

- $F(t,\Upsilon)$ é mensurável em t, para cada Υ fixo;
- $F(t,\Upsilon)$ é contínua em Υ, para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|F(t,\Upsilon)|\le m_K(t)$, para todo $(t,\Upsilon)\in D$.

Definição 2.6 *Uma solução no sentido* estendido *do problema de Cauchy*

$$\left|\begin{array}{l} X'=F(t,X)\\ X(t_0)=X_0\end{array}\right.$$

é uma função $\Phi=\Phi(t)$ absolutamente contínua tal que, para algum β real, tenha-se

i) $(t, \Phi(t)) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$;

ii) $\Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, *exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.*

Considere-se o retângulo $R = \left\{(t, \Upsilon) \in \mathbb{R}^{N+1};\ |t - t_0| \leq a,\ |\Upsilon - \Upsilon_0| \leq b\right\}$, com $a, b > 0$. Então tem-se os seguintes resultados:

Teorema 2.6 (Carathéodory) *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* R, *então sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, *existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\left| \begin{array}{l} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = \Upsilon_0. \end{array} \right.$$

Corolário 1 (Prolongamento de solução) *Sejam* $D = [0, \omega] \times B$, *com* $0 < \omega < \infty$ *e* $B = \left\{\Upsilon \in \mathbb{R}^N; |\Upsilon| \leq b\right\}$, $b > 0$ *e* F *nas condições de Carathéodory. Seja* $\Phi(t)$ *uma solução de*

$$\left| \begin{array}{r} X' = F(t, X) \\ X(0) = X_0,\ |X_0| \leq b. \end{array} \right.$$

Suponha que em qualquer intervalo I *onde* $\Phi(t)$ *está definida, se tenha,* $|\Phi(t)| \leq M$, *para todo* $t \in I$, M *independente de* t *e* $M < b$. *Então* Φ *tem um prolongamento até* $[0, \omega]$.

Lema 2.7.1 (Lions) *Sejam* Q *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}_t$, g_m *e* g *funções de* $L^q(Q)$, $1 < q < +\infty$, *tal que* $\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C$, $g_m \to g$ *quase sempre em* Q. *Então* $g_m \rightharpoonup g$ *na topologia fraca de* $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [8]. ■

Lema 2.7.2 (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial) *Seja* $\eta(\cdot)$ *uma função não negativa, absolutamente contínua em* $[0, T]$.

i) *Se* η *satisfaz para* t *q.s. a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leq \psi(t) + \varphi(t)\,\eta(t), \tag{2.1}$$

onde $\varphi(t)$ *e* $\psi(t)$ *são funções não negativas e integráveis em* $[0, T]$, *então*

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leq e^{\int_0^t \varphi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, e^{-\int_0^s \varphi(r)dr} ds\right] \\ &\leq e^{\int_0^t \varphi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) *Em particular, se* $\eta' \leq \varphi\eta$ *em* $[0,T]$ *e* $\eta(0) = 0$, *então*

$$\eta \equiv 0 \quad em \quad [0,T]$$

Demonstração: Multiplicando ambos os membros de (2.1) por $e^{-\int_0^s \varphi(r)dr}$ tem-se

$$\frac{d}{ds}\left(\eta(s)\, e^{-\int_0^s \varphi(r)dr}\right) = \left(\eta'(s) - \varphi(s)\,\eta(s)\right) e^{-\int_0^s \varphi(r)dr} \leq \psi(s)\, e^{-\int_0^s \varphi(r)dr}$$

para $0 \leq t \leq T$ quase sempre.
Consequentemente, para cada $0 \leq t \leq T$, conclui-se

$$\eta(t) = e^{\int_0^s \varphi(r)dr}\left[\eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \varphi(r)dr}\psi(s)\,ds\right] \leq e^{\int_0^s \varphi(r)dr}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right]$$

para $0 \leq t \leq T$ quase sempre. ■

Lema 2.7.3 (Desigualdade de Gronwall - Forma Integral) *Sejam* u, φ, ψ *funções reais não negativas em* $[0,T]$ *satisfazendo*

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(\sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma \tag{2.3}$$

para todo $t \in [0,T]$. *Então para todo* $t \in [0,T]$ *tem-se*

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s)\,\varphi(s)\, e^{\int_s^t \psi(\tau)d\tau} ds.$$

Demonstração: Considerando o funcional auxiliar

$$\eta(t) = \int_0^t \psi(s)\, u(s)\, ds.$$

Assim, de (2.3)

$$\eta'(t) = \psi(t)\, u(t) \leq \psi(t)\left(\varphi(t) + \eta(t)\right). \tag{2.4}$$

Definindo

$$F(t) = \eta(t)\, e^{-\int_0^t \psi(\tau)d\tau} \tag{2.5}$$

obtém-se

$$F'(t) = -\psi(t)\,\eta(t)\, e^{-\int_0^t \psi(\tau)d\tau} + \eta'(t)\, e^{-\int_0^t \psi(\tau)d\tau}$$

portanto usando (2.4)

$$F'(t) \leq \psi(t)\,\varphi(t)\, e^{-\int_0^t \psi(\tau)d\tau}.$$

Integrando ambos os membros,

$$F(t) \leq \int_0^t \psi(s)\,\varphi(s)\,e^{-\int_0^s \psi(\tau)d\tau} ds.$$

De (2.5) obtém-se

$$\eta(t) \leq \int_0^t \psi(s)\,\varphi(s)\,e^{\int_s^t \psi(\tau)d\tau} ds,$$

mas de (2.3) $u(t) - \varphi(t) \leq \eta(t)$ e assim

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s)\,\varphi(s)\,e^{\int_s^t \psi(\tau)d\tau} ds$$

e obtém-se o resultado desejado. ■

Capítulo 3

Aspectos Teóricos

O objetivo aqui é estabelecer a existência e unicidade de soluções globais para o problema de valor inicial e de fronteira associado à uma equação de difusão não linear, a saber

$$\left|\begin{array}{l} u_t(x,t) - M\left(\displaystyle\int_0^L u(t)\ dx\right) u_{xx}(x,t) + f(u(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \text{ para } \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad]0,L[, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

onde $u : Q =]0,L[\times]0,T[\to \mathbb{R}$.

O conceito de soluções para o problema (3.1) é dado por:

Definição 3.1 *Uma solução o global e fraca do problema (3.1) é uma função $u = u(x,t)$ definida em Q com valores reais tal que*

$$u \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L)), \quad u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(0,L)), \tag{3.2}$$

a função u satisfaz a identidade integral

$$\begin{array}{c} -\displaystyle\int_0^T\int_0^L [uv]\theta'\ dx\ dt + \int_0^T \left[M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right)\int_0^L [u_x v_x]\theta\ dx\right] dt + \\ \displaystyle\int_0^T\int_0^L [f(u)v]\theta\ dx\ dt = 0, \end{array} \tag{3.3}$$

para todo $v \in H_0^1(0,L)$ e para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, com $T > 0$ arbitrário. Além disso, u satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ para todo } \ x \in (0,L).$$

Para estabelecer a existência de solução do sistema misto (3.1) no sentido da Definição 3.1, é necessário assumir as seguintes hipóteses:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é lipschitziana, ou seja, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(v) - f(w)| \leq K|v - w| \text{ para todo } v, w \in \mathbb{R} \text{ e } f(0) = 0. \tag{3.4}$$

(ii) A função $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é, também, lipschitziana com constante $A > 0$, i.é.,

$$|M(\lambda_1) - M(\lambda_2)| \leq A|\lambda_1 - \lambda_2| \text{ para todo } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ e } M(\lambda) \geq m_0 > 0. \tag{3.5}$$

Teorema 3.1 *Se $u_0 \in H_0^1(0, L)$, f satisfaz a hipótese (i) e M satifaz a condição (ii), então existe uma única solução u de (3.1) no sentido da Definição* (3.1).

A demonstração do Teorema 3.1 é baseada no *Método de Faedo-Galerkin*, seguindo as seguintes etapas:

i) Existência de soluções aproximadas;

ii) Estimativas sobre as soluções aproximadas;

iii) Limite das soluções aproximadas;

iv) Verificação dos dados iniciais;

v) Unicidade de soluções.

3.1 Existência de soluções aproximadas

A existência de soluções será mostrada pelo método Faedo-Galerkin. Assim, considera-se $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base hilbertiana de $H_0^1(0, L)$ e para cada $m \in \mathbb{N}$ e denota-se por

$$V^m = [\varphi_1, ..., \varphi_m],$$

o sub-espaço de H_0^1 gerado pelos primeiros m vetores de $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

O Problema Aproximado associado a (3.1) consiste em encontrar $u^m \in V^m$ definida por

$$u^m(x, t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\varphi_i(x) \quad \text{com} \quad g_{jm} \in C^1(]0, T[), \tag{3.6}$$

solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} (u_t^m(t), \varphi) + M\left(\displaystyle\int_0^L u^m(t)\ dx\right)(u_x^m(t), \varphi_x) + (f(u^m(t)), \varphi) = 0, \\ u^m(x, 0) = u_{0m}(x), \end{array} \right. \tag{3.7}$$

para todo $\varphi \in V^m$, onde $\big(\cdot\,,\,\cdot\big)$ em (3.7) representa o produto intermo de $L^2(0,L)$. A condição inicial do sistema (3.7) em V^m é determinada por:

$$u^m(x,0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(0)\varphi_i(x),$$

onde pode-se escolher $g_{im}(0) = \alpha_{im}$ com $\alpha_{im} = (u_0, \varphi_i)$. Logo,

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}\varphi_i = \sum_{i=1}^{m} (u_0, \varphi_i)\varphi_i. \tag{3.8}$$

Como V^m é um subespaço denso em $H_0^1(0,L)$ e $u_0 \in H_0^1(0,L)$, tem-se

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(0,L). \tag{3.9}$$

O sistema aproximado (3.7) possui soluções u^m definidas em $[0, t_m[$. Essas soluções são obtidas por meio do Teorema de Carathéodory (2.6). De fato, analisa-se cada parcela do sistema $(3.7)_1$ a seguir:

I) Primeira parcela:

$$\begin{aligned} (u_t^m(t), \varphi_j) &= \left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}^{'}(t)\varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}'(t)(\varphi_i, \varphi_j) \quad \text{com} \quad j = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{3.10}$$

II) Segunda parcela:

$$\begin{aligned} & M\Big(\int_0^L u^m(t)\ dx \Big)\, (u_x^m(t), (\varphi_i)_x) \\ &= M\Big(\int_0^L \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\varphi_i(x)\ dx \Big) \Big(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)(\varphi_i)_x(x), (\varphi_j)_x(x) \Big) \\ &= M(t) \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)((\varphi_i)_x, (\varphi_j)_x) \quad \text{com} \quad j = 1, ..., m, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $M(t) = M\Big(\int_0^L u^m(t)\ dx \Big)$.

III) Terceira parcela:

$$\begin{aligned} (f(u^m(t)), \varphi_i) &= \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\varphi_i(x) \right), \varphi_j(x) \right) \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\varphi_i \right), \varphi_j \right) \quad \text{com} \quad j = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Substituindo (3.10)-(3.12) no sistema (3.7), obtém-se o seguinte Problema Aproximado:

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)(\varphi_i,\varphi_j) + M(t)\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)((\varphi_i)_x,(\varphi_j)_x) + \left(f\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\varphi_i\right),\varphi_j\right) = 0 \\ u^m(x,0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(0,L). \end{array}\right.$$

Denotando por:

$$\begin{array}{ll} A_{ij} = [(\varphi_i,\varphi_j)]_{m\times m}; & B_{ij} = [((\varphi_i)_x,(\varphi_j)_x)]_{m\times m}; \\ C_i(t) = \left[\left(f\big(\sum\limits_{i=1}^{m} g_{im}(t)\varphi_i(x)\big),\varphi_j\right)\right]_{m\times 1}; & Y(t) = [g_{1m}(t), g_{2m}(t),\ldots,g_{mm}(t)]^t_{m\times 1}; \\ Y_{0m} = [g_{1m}(0), g_{2m}(0),\ldots,g_{mm}(0)]^t =: [\alpha_{01},\ldots,\alpha_{0m}]^t_{m\times 1}, & \end{array}$$

e substituindo no sistema Problema Aproximado acima obtém-se:

$$A_{ij}Y'(t) + M(t)B_{ij}Y(t) + C_i(t) = 0, \qquad Y(0) = Y_{0m}. \tag{3.13}$$

A matriz $A_{ij} = [(\varphi_i,\varphi_j)]_{m\times m}$ é invertível. De fato, considere $z^m = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j\varphi_j(x) = 0$ e $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)^t$ tal que $A\alpha = 0$. Então,

$$\sum_{i=1}^{m}(\varphi_i,\varphi_j)\alpha_i = 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i,\varphi_j\right) = 0.$$

Multiplicando a última equação por α_j e somando em j, para todo $j = 1,\ldots,m$. Tem-se,

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i, \sum_{i=1}^{m}\alpha_j\varphi_j\right) = 0 \Longleftrightarrow (z^m,z^m) = 0 \Longleftrightarrow |z^m|^2_{L^2(0,L)} = 0 \Longleftrightarrow z^m = 0 \text{ em } V^m.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \text{para todo} \quad i = 1,\ldots,m,$$

pois os (φ_i), com $i = 1,\ldots,m$, são L.I., e portanto $A\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \Longleftrightarrow Ker(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ $\square$

De (3.13), denotando $A_{ij} = A$, $B_{ij} = B$ e $C_i(t) = C(t)$, tem-se

$$Y'(t) + A^{-1}\big(M(t)B\big)Y(t) + A^{-1}C(t) = 0, \qquad Y(0) = Y_0.$$

O qual é equivalente a

$$Y'(t) = F(t,Y(t)), \qquad Y(0) = Y_0 \tag{3.14}$$

onde

$$F(t,Y) = -A^{-1}\big(M(t)B\big)Y(t) - A^{-1}C(t).$$

O Sistema (3.14) satisfaz as hipóteses do Teorema de Carathéodory 2.6. Portanto, para cada m determina-se $Y(t)$ solução única de (3.14). Assim, de (3.6), para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma única solução u^m do sistema aproximado (3.7) definida em $[0, t_m[$, para algum $t_m \in (0, T]$. Usando a Estimativa I a seguir, será mostrada que u^m é definida em todo intervalo $[0, T]$, para todo $T > 0$ arbitrário.

3.2 Estimativas sobre as soluções aproximadas

Obtém-se agora estimativas que permitirão estender as soluções aproximadas u^m ao intervalo $[0, \infty[$ e passar o limite $m \to \infty$ no problema (3.7).

3.2.1 Estimativa I

Fazendo $\varphi_i = u^m(t)$ em $(3.7)_1$ tem-se:

$$(u_t^m(t), u^m(t)) + M\Big(\int_0^L u^m(t)\ dx\Big)(u_x^m(t), u_x^m(t)) + (f(u^m(t)), u^m(t)) = 0. \tag{3.15}$$

Analisando as integrais dos dois primeiros termos da equação (3.15), tem-se

$$\begin{aligned}(u_t^m(t), u^m(t)) &= \int_0^L u_t^m(x,t)\, u^m(x,t)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}|u^m(x,t)|_{\mathbb{R}}^2\ dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^m(t)|^2,\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde $|\cdot|$ representará a norma em $L^2(0, L)$.
Usando a hipótese $(3.5)_2$ a segunda parcela pode ser limitada inferiormente por

$$\begin{aligned}M\Big(\int_0^L u^m(t)\ dx\Big)(u_x^m(t), u_x^m(t)) &= M\Big(\int_0^L u^m(t)\ dx\Big)\int_0^L |u_x^m(x,t)|_{\mathbb{R}}^2\ dx \\ &= M\Big(\int_0^L u^m(t)\ dx\Big)|u_x^m(t)|^2 \\ &\geq m_0|u_x^m(t)|^2.\end{aligned} \tag{3.17}$$

A terceira parcela é limitado superiomente usando desigualde de Cauchy-Schwartz.

De fato,

$$\begin{aligned}
|(f(u^m(t)), u^m(t))|_{\mathbb{R}} &\leq \int_0^L |f(u^m(x,t))|_{\mathbb{R}} |u^m(x,t)|_{\mathbb{R}}\, dx \\
&\leq \left(\int_0^L |f(u^m(x,t))|_{\mathbb{R}}^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_0^L |u^m(x,t)|_{\mathbb{R}}^2\, dx\right)^{1/2} \\
&= |f(u^m(t))||u^m(t)|.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (3.4), tem-se

$$|f(u^m(t))| = |f(u^m(t)) - f(0)| \leq K|u^m(t) - 0| = K|u^m(t)|. \tag{3.18}$$

Substituindo esta desigualdade na precedente, resulta

$$|(f(u^m(t)), u^m(t))|_{\mathbb{R}} \leq K|u^m(t)||u^m(t)| = K|u^m(t)|^2. \tag{3.19}$$

Substituindo (3.16)-(3.19) em (3.15), tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^m(t)|^2 + m_0|u_x^m(t)|^2 \leq K|u^m(t)|^2.$$

Integrando de 0 a t, resulta:

$$\frac{1}{2}|u^m(t)|^2 + m_0\int_0^t |u_x^m(s)|^2 ds \leq \frac{1}{2}|u_{0m}|^2 + K\int_0^t |u^m(s)|^2 ds$$

De (3.9) tem-se que $\frac{1}{2}|u_{0m}|^2$ é limitada independente de m, pois (u_{0m}) é uma sucessão convergente em $H_0^1(0,L)$. Portanto, existe uma constante real $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}|u^m(t)|^2 + m_0\int_0^t |u_x^m(s)|^2 ds \leq C + K\int_0^t |u^m(s)|^2 ds, \tag{3.20}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0,T[$. Como $m_0\displaystyle\int_0^t |u_x^m(s)|^2 ds \geq 0$, aplicando a Desigualdade de Gronwall 2.7.3, tem-se

$$\frac{1}{2}|u^m(t)|^2 \leq C + K\int_0^t |u^m(s)|^2 ds \leq Ce^{KT} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad t \in [0,T[. \tag{3.21}$$

Ou seja, $|u^m(t)|_{L^2(0,L)}^2 \leq 2Ce^{KT} = C_1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\left|u^m(t)\right|_{L^\infty(0,T,L^2(0,L))} = \sup_{t\in(0,T)} \operatorname{ess} |u^m(t)| < C_1.$$

Assim tem-se

$$(u^m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right). \tag{3.22}$$

Voltando a (3.20) e usando (3.21), obtém-se

$$\frac{1}{2}|u^m(t)|^2 + m_0 \int_0^t |u_x^m(s)|^2 ds \leq C_1 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad t \in]0, T[. \tag{3.23}$$

Daí, observando que $\frac{1}{2}|u^m(t)|^2 \geq 0$ e $m_0 > 0$ resulta

$$\int_0^T |u_x^m(t)|^2 dt \leq C_1 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$(u^m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2\left(0, T; H_0^1(0, L)\right). \tag{3.24}$$

Lema 3.2.1 *A estimativa (3.24) é suficiente para usar do Corolário 1 sobre prolongamento de soluções. De fato,*

$$\begin{aligned} |u^m(t)|^2 &= \int_0^L |u^m(x,t)|_{\mathbb{R}}^2 \; dx = \int_0^L \Big| \sum_{i=1}^m g_{im}(t)\, \varphi_i(x) \Big|_{\mathbb{R}}^2 \; dx \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{im}(t)\, g_{jm}(t) \int_0^L \varphi_i(x)\, \varphi_j(x) \; dx = \sum_{i=1}^m g_{im}^2(t) \leq C. \end{aligned}$$

Como $g_{im} \in C^1([0,T])$, veja (3.6), tem-se

$$|u^m(t)|^2 \leq C \quad \textit{para todo } t \in [0,T], \;\; T > 0.$$

Daí, prolonga-se as soluções $u^m(x,t)$ ao intervalo $[0,T]$ para $T > 0$ arbitrário.

3.2.2 Estimativa II

Nesta estimativa será usado o operador projeção

$$P_m : L^2(0,L) \longrightarrow V^m \quad \text{definido por} \quad v \longmapsto P_m(v) = \sum_{i=1}^m (v, \varphi_i)\varphi_i.$$

De fato, de $(3.1)_1$ e (3.6) obtém-se a equação aproximada

$$\sum_{i=1}^m (u_t^m(t), \varphi_i)\varphi_i - \sum_{i=1}^m \left(M\left(\int_0^L u^m(t)\; dx\right) u_{xx}^m(t), \varphi_i \right) \varphi_i + \sum_{i=1}^m (f(u^m(t)), \varphi_i)\varphi_i = 0.$$

Da definição de P_m pode-se escrever

$$P_m\left(u_t^m\right) - P_m\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\right) u_{xx}^m(t)\right) + P_m\left(f(u^m(t))\right) = 0.$$

Desta identidade e do fato de

$$u_t^m(t) \in V^m \subset H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L) \equiv [L^2(0,L)]' \hookrightarrow \left[H_0^1(0,L)\right]' = H^{-1}(0,L)$$

continuamente, então

$$u_t^m(t) = P_m\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\right)u_{xx}^m(t)\right) - P_m\left(f(u^m(t))\right). \tag{3.25}$$

A identidade (3.25) é verificada no sentido $L^\infty(0,T,H^{-1}(0,L))$. De fato, analisando cada termo do lado direito de (3.25) tem-se

$$\begin{aligned}
&\left|P_m\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)u_{xx}^m(t)\right)\right|_{H^{-1}(0,L)} \\
&= \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} \left|\left\langle P_m\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)u_{xx}^m(t)\right), \varphi\right\rangle_{H^{-1}(0,L)\times H_0^1(0,L)}\right|_{\mathbb{R}} \\
&= \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} \left|\left(P_m\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)u_{xx}^m(t)\right), \varphi\right)_{L^2(0,L)}\right|_{\mathbb{R}} \\
&= \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} \left|\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)u_x^m(t), P_m(\varphi_x)\right)_{L^2(0,L)}\right|_{\mathbb{R}} \\
&= \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} \left|M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)\right|_{\mathbb{R}} \left|\left(u_x^m(t), P_m(\varphi_x)\right)_{L^2(0,L)}\right|_{\mathbb{R}} \\
&\leq \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} \left|M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)\right|_{\mathbb{R}} |u_x^m(t)|_{L^2(0,L)} \left|P_m(\varphi_x)\right|_{L^2(0,L)}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

De (3.24) tem-se que $u^m(t) \in L^2(0,L) \hookrightarrow L^1(0,L)$ e M é contínua, assim existe $C > 0$ tal que

$$\left|M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)\right|_{\mathbb{R}} \leq C \text{ independente de } m \text{ e } t.$$

Além disso,

$$|P_m(\varphi_x)|_{L^2(0,L)} \leq |\varphi_x|_{L^2(0,L)} \leq 1.$$

Portanto, daí e de (3.26) resulta

$$\left|P_m\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)u_{xx}^m(t)\right)\right|_{H^{-1}(0,L)} \leq C\left|u_x^m(t)\right|. \tag{3.27}$$

A segunda parcela do lado direito de (3.25) é limitada superiormente como segue:

$$\begin{aligned}
\Big|P_m\Big(f(u^m(t))\Big)\Big|_{H^{-1}(0,L)} &= \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} \left|\Big\langle P_m\Big(f(u^m(t))\Big),\varphi\Big\rangle_{H^{-1}(0,L)\times H_0^1(0,L)}\right|_{\mathbb{R}}\\
&= \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} \left|\Big(P_m\Big(f(u^m(t))\Big),\varphi\Big)_{L^2(0,L)}\right|_{\mathbb{R}}\\
&= \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} \left|\Big(f(u^m(t)),P_m(\varphi)\Big)_{L^2(0,L)}\right|_{\mathbb{R}}\\
&\leq \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(0,L)\\ ||\varphi||\leq 1}} |f(u^m(t))|_{L^2(0,L)}|P_m(\varphi)|_{L^2(0,L)}. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Tem-se que

$$|P_m(\varphi)|_{L^2(0,L)} = |\varphi|_{L^2(0,L)} \leq 1 \text{ e de (3.18), } |f(u^m(t))|_{L^2(0,L)} \leq K|u^m(t)|_{L^2(0,L)}.$$

Assim,

$$\Big|P_m\Big(f(u^m(t))\Big)\Big|_{H^{-1}(0,L)} \leq K|u^m(t)|_{L^2(0,L)}. \qquad (3.29)$$

Substituindo (3.27) e (3.29) em (3.25), resulta

$$\begin{aligned}
|u_t^m(t)|_{H^{-1}(0,L)} &\leq \left|P_m\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\right)u_{xx}^m(t)\right)\right|_{H^{-1}(0,L)} + \Big|P_m\Big(f(u^m(t))\Big)\Big|_{H^{-1}(0,L)}\\
&\leq C\,|u_x^m(t)| + K|u^m(t)|.
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e utilizando a desigualdade de Young

$$\begin{aligned}
|u_t^m(t)|^2_{H^{-1}(0,L)} &\leq C^2\,|u_x^m(t)|^2 + K^2|u^m(t)|^2 + 2C\,|u_x^m(t)|\,K|u^m(t)|\\
&\leq C^2\,|u_x^m(t)|^2 + K^2|u^m(t)|^2 + C^2\,|u_x^m(t)|^2 + K^2|u^m(t)|^2\\
&\leq 2\left(C^2\,|u_x^m(t)|^2 + K^2|u^m(t)|^2\right).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 até t, resulta

$$\int_0^t |u_s^m(s)^2|_{H^{-1}(0,L)}\,ds \leq C^0\left[\int_0^T |u_x^m(t)|^2\,dt + K\int_0^T |u^m(t)|^2\,dt\right] \quad \text{com } C_0 = 2[C^2+K^2].$$

Daí e de (3.24), tem-se

$$\int_0^T |u_t^m(t)|^2\,dt \leq C_1 \quad \text{independente de} \quad m \quad \text{e} \quad t.$$

Portanto,

$$(u_t^m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(0,L)). \qquad (3.30)$$

3.3 Convergência das Soluções Aproximadas

As limitações em (3.22), (3.24) e (3.30) são suficientes para a passagem ao limite, quando $m \longrightarrow \infty$, no sistema aproximado (3.7).

3.3.1 Limite na parcela linear de (3.7)

Do Teorema 2.2 e estimativa (3.22) existe uma subsequência de $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ a qual será, também, denotada por $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$, convergente na topologia fraco estrela de $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ para u, isto é,

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty. \tag{3.31}$$

Agora, da Teorema 2.2 e estimativa (3.30) existe uma subsequência de $(u_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual será também denotada por $(u_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$, convergente para u_t na topologia fraca de $L^2(0,T;H^{-1}(0,L))$. Ou seja,

$$u_t^m \rightharpoonup u_t \quad \text{em} \quad L^2\left(0,T;H^{-1}(0,L)\right) \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty. \tag{3.32}$$

A convergência em (3.31) significa

$$\langle u^m, \varphi\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))\times L^1(0,T;L^2(0,L))} \longrightarrow \langle u, \varphi\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))\times L^1(0,T;L^2(0,L))},$$

para todo $\varphi \in L^1(0,T;L^2(0,L))$. Em particular, considerando $\varphi(x,t) = v(x)\,\theta(t)$ com $\theta \in \mathcal{D}(0,T) \subset L^2(0,T) \subset L^1(0,T)$ e $v \in L^2(0,L)$, resulta

$$\int_0^T (u^m(t), v)\,\theta(t)\ dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v)\,\theta(t)\ dt. \tag{3.33}$$

Daí, tem-se

$$(u^m(t), v) \longrightarrow (u(t), v) \ \text{ em } \mathcal{D}'(0,T) \text{ para todo } v \in L^2(0,L). \tag{3.34}$$

Sendo o operador diferencial contínuo no espaço das distribuições, tem-se de (3.34) que:

$$\frac{d}{dt}(u^m(t), v) \longrightarrow \frac{d}{dt}(u(t), v) \quad \text{para todo} \quad v \in L^2(0,L).$$

Daí, de (3.33) e integração por partes, tem-se que

$$\int_0^T (u_t^m(t), v)\theta\ dt = -\int_0^T (u^m(t), v)\theta'\ dt \longrightarrow -\int_0^T (u(t), v)\theta'\ dt, \tag{3.35}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in L^2(0,L)$.

3.3.2 Limite nas parcelas não lineares de (3.7)

Para tomar o limite nos termos não lineares necessita-se de resultado de compacidade. De fato, Fazendo $B_0 = H_0^1(0,L)$, $B = L^2(0,L)$ e $B_1 = H^{-1}(0,L)$ com $p_0 = p_1 = 2$ e aplicando o Teorema de Aubin-Lions 2.5, conclui-se que a imersão de

$$W = \left\{ v \ ; \ v \in L^2\left(0,T; H_0^1(0,L)\right) \quad \text{e} \quad v_t \in L^2\left(0,T; H^{-1}(0,L)\right) \right\}$$

em $L^2(0,T; L^2(0,L)) = L^2(Q)$ é, também, compacta.

De (3.24) e (3.30) obtém-se, em particular, que

$$\begin{array}{llllll} u^m \rightharpoonup u & \text{fraco em} & L^2(0,T; H_0^1(0,L)) & \text{quando} & m \longrightarrow \infty, \\ u_t^m \rightharpoonup u_t & \text{fraco em} & L^2(0,T; H^{-1}(0,L)) & \text{quando} & m \longrightarrow \infty, \end{array} \tag{3.36}$$

respectivamente. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachoff tem-se que imersão de $H_0^1(0,L)$ em $L^2(0,L)$ é compacta. Daí, e de (3.36) a convergência na topologia fraca de W é transformada em convergência forte em $L^2(Q)$. Veja, também, a observação 2.3. Assim,

$$u^m \longrightarrow u \quad \text{forte em} \quad L^2(Q) \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty. \tag{3.37}$$

- **Convergência na parcela** $M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)(u_x^m(t), \varphi_x)$ **de (3.7).**

Deve-se mostrar que

$$\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x^m(t), \varphi_x\right) \longrightarrow \left(M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t), \varphi_x\right)\ dt, \tag{3.38}$$

quando $\longrightarrow \infty$, para todo $\varphi \in L^2(0,T; H_0^1(0,L))$.

Fazendo, em particular, $\varphi(x,t) = v(x)\,\theta(t)$, para todo $v \in H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ com $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, resulta

$$\int_0^T \left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x^m(t), v_x\right) \theta(t)\ dt \longrightarrow \int_0^T \left(M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t), v_x\right) \theta(t)\ dt, \tag{3.39}$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Portanto, será mostrado a seguir a convergência (3.39). Note que, utilizando propriedade de produto interno, tem-se

$$\begin{aligned} &\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x^m(t), v_x\right) - \left(M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t), v_x\right) = \\ &\qquad \left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x^m(t) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t), v_x\right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Subtrai-se e adiciona-se $M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x(t)$ ao segundo membro de (3.40), para obter

$$\begin{aligned}
&\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x^m(t) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t), v_x\right) = \\
&\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x^m(t) - M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x(t) + \right. \\
&\left. M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x(t) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t), v_x\right) = \\
&\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) [u_x^m(t) - u_x(t)] + \right. \\
&\left.\left[M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right)\right] u_x(t), v_x\right) = \\
&M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) (u_x^m(t) - u_x(t), v_x) + \\
&\left[M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right)\right] (u_x(t), v_x)\,.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Daí, e da desigualdade triângular, tem-se

$$\begin{aligned}
&\left|\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x^m(t) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t), v_x\right)\right|_{\mathbb{R}} \leq \\
&\left|M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)\right|_{\mathbb{R}} \left|(u_x^m(t) - u_x(t), v_x)\right|_{\mathbb{R}} + \\
&\left|\left[M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right)\right]\right|_{\mathbb{R}} \left|(u_x(t), v_x)\right|_{\mathbb{R}}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Agora, analisa-se a segundo membro de (3.42).

(a) Como $L^2(0,L) \hookrightarrow L^1(0,L)$ e $u^m(t) \in L^2(0,L)$, então $u^m(t) \in L^1(0,L)$. Ou seja,

$$\int_0^L u^m(t)\ dx \leq \int_0^L |u^m(t)|\ dx \leq \infty.$$

Sendo $|u^m(t)|_{L^1(0,L)} \leq C$ tem-se pela continuidade de M que $\sup\limits_{t\in[0,C]} |M(t)|_{\mathbb{R}} \leq C_0$. Logo,

$$\left|M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)\right|_{\mathbb{R}} \leq C_0 \text{ independentemente de } m. \tag{3.43}$$

(b) Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, tem-se

$$\begin{aligned}
|(u_x^m(t) - u_x(t), v_x)|_{\mathbb{R}} &\leq |u_x^m(t) - u_x(t)|_{L^2(0,L)}\ |v_x|_{L^2(0,L)} \\
&\leq C\,|u_x^m(t) - u_x(t)|_{L^2(0,L)}\,, \quad \text{pois} \quad v_x \in L^2(0,L).
\end{aligned}$$

Da convergência $(3.36)_1$ tem-se

$$u_x^m \rightharpoonup u_x \quad \text{em} \quad L^2\left(0,T;L^2\left(0,L\right)\right) \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty,$$

ou seja,

$$u_x^m \rightharpoonup u_x \quad \text{em} \quad L^2 \quad \text{para todo} \quad t \in [0,T].$$

Daí,

$$|u_x^m(t) - u_x(t)|_{L^2(0,L)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty.$$

Assim,

$$|(u_x^m(t) - u_x(t), v_x)|_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty. \tag{3.44}$$

(c) De (3.37) tem-se $u^m \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;L^2(0,L))$. Portanto, pelo Lema de Lions 2.7.1

(i) $u^m(t) \longrightarrow u(t)$ quase sempre em $(0,L)$.

Por outro lado, como $u^m(t) \in L^2(0,L) \hookrightarrow L^1(0,L)$ então

(ii) $\left|\displaystyle\int_0^L u^m(t)\ dx\right|_{\mathbb{R}} \leq \displaystyle\int_0^L |u^m(t)|_{\mathbb{R}}\ dx \leq C.$

De (i), (ii) e do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, resulta

(iii) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_0^L u^m(t)\ dx = \int_0^L u(t)\ dx.$

De (iii) e pelo fato de M ser contínua em $\mathbb{R}$, tem-se

$$\left|M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right)\right|_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty. \tag{3.45}$$

(d) Finalmente, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, tem-se

$$|(u_x(t), v_x)|_{\mathbb{R}} \leq |u_x(t)|_{L^2(0,L)}\ |v_x|_{L^2(0,L)}\ \leq C, \tag{3.46}$$

pois u_x e $v_x \in L^2(0,L)$. Substituindo (3.43)-(3.46) em (3.42), obtém-se

$$\left|\left(M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right) u_x^m(t) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t), v_x\right)\right|_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0, \tag{3.47}$$

quando $m \longrightarrow \infty$.

Daí e de (3.40) tem-se (3.39). Portanto, (3.38) é verdade.

• Convergência na parcela $\Big(f(u^m(t)), \varphi\Big)$ de (3.7).

Utilizando propriedade de produto interno, obtém-se

$$\Big(f\big(u^m(t)\big),\varphi\Big)-\Big(f\big(u(t)\big),\varphi\Big)=\Big(f\big(u^m(t)\big)-f\big(u(t)\big),\varphi\Big).$$

Fazendo, em particular, $\varphi\,(x,t)=v\,(x)\,\theta\,(t)$, para todo $v\in H_0^1(0,L)\hookrightarrow L^2\,(0,L)$ com $\theta\in\mathcal{D}\,(0,T)$ e integrando de 0 a T, resulta

$$\int_0^T\Big[\big(f(u^m(t)),v\big)-\big(f(u(t)),v\big)\Big]\theta(t)\;dt=\int_0^T\Big[\big(f(u^m(t))-f(u(t)),v\big)\Big]\theta(t)\;dt. \tag{3.48}$$

Tomando o módulo em (3.48), resulta

$$\Big|\int_0^T\Big[(f(u^m(t)),v)-(f(u(t)),v)\Big]\theta(t)\;dt\Big|_{\mathbb{R}}\leq$$
$$\int_0^T\int_0^L\big|(f(u^m(x,t))-f(u(x,t))\big|_{\mathbb{R}}|v(x)|_{\mathbb{R}}|\theta(t)|_{\mathbb{R}}\;dx\;dt.$$

Como $\theta\in\mathcal{D}\,(0,T)$, então existe $C>0$ tal que $|\theta(t)|_{\mathbb{R}}\leq C$ para todo $t\in[0,T]$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, na variável espacial x, no segundo membro da desigualdade acima, resulta

$$\Big|\int_0^T[(f(u^m(t)),v)-(f(u(t)),v)]\theta(t)\;dt\Big|_{\mathbb{R}}\leq$$
$$CK\int_0^T\Big[\Big(\int_0^L|u^m(x,t)-u(x,t)|^2\;dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^L|v(x)|^2dx\Big)^{1/2}\Big]\;dt.$$

Aplicando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwartz, agora em t, no segundo membro da desigualdade acima, obtém-se

$$\Big|\int_0^T[(f(u^m(t)),v)-(f(u(t)),v)]\theta(t)\;dt\Big|_{\mathbb{R}}\leq$$
$$C_1K\Big(\int_0^T\int_0^L|u^m(x,t)-u(x,t)|^2\;dx\;dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T\int_0^L|v(x)|^2\;dx\;dt\Big)^{1/2}.$$

Note que $\Big(\int_0^T\int_0^L|v(x)|^2\;dx\;dt\Big)^{1/2}$ é limitado. Assim, existe $K_1>0$ tal que

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^T[(f(u^m(t)),v)-(f(u(t)),v)]\theta(t)\;dt\Big|_{\mathbb{R}}\leq\\&K_1\Big(\int_0^T\int_0^L|u^m(x,t)-u(x,t)|^2\;dx\;dt\Big)^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.49}$$

Usando a convergência (3.37) no segundo membro de (3.49), tem-se

$$\Big(\int_0^T\int_0^L\big|u^m(x,t)-u(x,t)\big|^2\;dx\;dt\Big)^{1/2}\longrightarrow 0\;\text{ quando }\;m\to\infty. \tag{3.50}$$

Portanto, usando (3.49) e (3.44) em (3.48), obtém-se

$$\int_0^T (f(u^m(t)), v)\theta(t)\ dt \longrightarrow \int_0^T \big(f(u(t)), v\big)\theta(t)\ dt. \tag{3.51}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}\,(0,T)$ e $v \in H_0^1\,(0,L)$.

3.3.3 Passagem ao limite no sistema (3.7)

Fazendo-se, em particular, $\varphi(x,t) = v(x)\theta(t)$ com $v \in H_0^1(0,L)$ e $\theta \in D(0,T)$ em $(3.7)_1$ e integrando de 0 a T, tem-se

$$\int_0^T \Big[\,(u_t^m\,(t)\,, v) + M\Big(\int_0^L u^m(t)\ dx\Big)\,(u_x^m\,(t)\,, v_x) + (f\,(u^m(t))\,, v)\Big]\theta\,(t)\ \ dt = 0.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ na identidade integral acima e usando (3.35), (3.38) e (3.51), obtém-se

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t), v)\theta'\ dt + \int_0^T M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right)(u_x(t), v_x)\theta\ dt \\ + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta\ dt = 0, \end{aligned} \tag{3.52}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}\,(0,T)$ e para todo $v \in H_0^1\,(0,L)$. Isto prova a identidade integral (3.3).

A afirmação (3.2) é uma consequência de (3.22), (3.24) e (3.30). □

Observação 3.1 *De (3.52) e do Lema 2.3.1(Du Bois Raymond), obtém-se*

$$\left|\begin{array}{l} (u_t\,(t)\,, v) + M\Big(\int_0^L u(t)\ dx\Big)\,(u_x\,(t)\,, v_x) + (f(u), v) = 0 \quad \textit{q.s. em} \quad]0,T[, \\ u\,(0,t) = u\,(L,t) = 0 \ \ \textit{para} \quad t \geq 0, \\ u\,(x,0) = u_0 \quad \textit{em} \quad [0,L[, \end{array}\right. \tag{3.53}$$

em $\mathcal{D}'\,(0,T)$ para $v \in H_0^1\,(0,L)$. Ou ainda, usando a densidade de $\mathcal{D}\,(0,T)$ em $L^\infty\,(0,T)$ pode-se afirmar que a identidade (3.53) é verificada em $L^\infty\,(0,T)$ para todo $v \in H_0^1\,(0,L)$. Conclui-se de $(3.53)_1$ que

$$u_t - M\Big(\int_0^L u\ dx\Big)u_{xx} + f(u) = 0$$

no sentido de $L^\infty\,(0,T; H^{-1}\,(0,L))$ ■

3.4 Verificação dos Dados Iniciais

De (3.24) e (3.30) tem-se $u \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)$ e $u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(0,L))$, respectivamente. Assim,

$$u \in C^0([0,T];H^{-1}(0,L)) \cap C_w^0([0,T];H_0^1(0,L)). \tag{3.54}$$

Portanto faz sentido definir u em $t=0$, isto é, $u(0)$ faz sentido.

Considera-se agora $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Multiplicando $(3.7)_1$ por θ e integrando de 0 a T, resulta

$$\int_0^T (u_t^m(t),\varphi)\theta\ dt + \int_0^T M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)(u_x^m(t),\varphi_x)\theta\ dt + \int_0^T (f(u^m(t)),\varphi)\theta\ dt = 0.$$

Integrando por partes a primeira integral, obtém-se

$$(u^m(t),\varphi)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u^m(t),\varphi)\theta'(t)\ dt + \int_0^T M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)(u_x^m(t),\varphi_x)\theta(t)\ dt + \int_0^T (f(u^m(t)),\varphi)\theta(t)\ dt = 0.$$

Pela definição de θ resulta

$$-(u_{0m},\varphi) - \int_0^T (u^m(t),\varphi)\theta'(t)\ dt + \int_0^T M\left(\int_0^L u^m(t)\ dx\right)(u_x^m(t),\varphi_x)\theta(t)\ dt + \int_0^T (f(u^m(t)),\varphi)\theta(t)\ dt = 0.$$

Tomando o limite $m \to \infty$ e utilizando (3.9) resulta

$$-\int_0^T (u(t),\varphi)\theta'(t)\ dt + \int_0^T M\Big(\int_0^L u(t)\ dx\Big)(u_x(t),\varphi_x)\theta(t)\ dt + \int_0^T (f(u(t)),\varphi)\theta(t)\ dt = (u_0,\varphi).$$

Integrando por partes a primeira integral, tem-se

$$-(u(t),\varphi)\theta(t)\Big|_0^T + \int_0^T (u_t(t),\varphi)\theta(t)\ dt + \int_0^T M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right)(u_x(t),\varphi_x)\theta(t)\ dt + \int_0^T (f(u(t)),\varphi)\theta(t)\ dt = (u_0,\varphi).$$

Daí e da definição de θ, resulta

$$(u(0),\varphi) + \int_0^T \underbrace{\left[(u_t(t),\varphi) + M\Big(\int_0^L u(t)\ dx\Big)(u_x,\varphi_x) + (f(u(t)),\varphi)\right]}_{=0} \theta(t)\ dt = (u_0,\varphi)$$

Logo, $(u(0),\varphi) = (u_0,\varphi)$ para todo $\varphi \in H_0^L(0,L)$, e portanto, pelo Teorema de Du Dois Raymond (2.3.1)

$$u(0) = u_0 \text{ q. s. em }]0,L[.$$

3.5 Unicidade de Solução

Sejam u e $\widehat{u}$ duas soluções do problema $(3.53)_1$ no sentido da definição (3.1). Tomando $w(t) = u(t) - \widehat{u}(t)$, obtém-se

$$\left|\begin{array}{l} (w_t(t), v) + \left(M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) \widehat{u}_x(t), v_x\right) + \\ \qquad\qquad \Big(f(u(t)) - f(\widehat{u}(t)), v\Big) = 0 \\ w\,(0,t) = w\,(L,t) = 0 \ \text{ para } \ t \geq 0, \\ w\,(x,0) = 0 \ \ \text{ em } \ \ [0, L[, \end{array}\right. \tag{3.55}$$

Adicionando-se e subtraindo-se $M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) u_x$ no segundo termo de (3.55), tem-se

$$\begin{array}{l} \left(M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t) - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) \widehat{u}_x(t), v_x\right) = \\ \left(M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t) - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) u_x(t) + \right. \\ M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) u_x(t) - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) \widehat{u}_x(t), v_x\Big) = \\ \left(M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) [u_x(t) - \widehat{u}_x(t)] + \right. \\ \left[M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)\right] u_x(t), v_x\Big) = \\ M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) (u_x(t) - \widehat{u}_x(t), v_x) + \\ \left[M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)\right] (u_x(t), v_x) = \\ M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) (w_x(t), v_x) + \\ \left[M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)\right] (u_x(t), v_x) \end{array} \tag{3.56}$$

Subistituindo (3.56) em $(3.55)_1$, obtém-se

$$\begin{array}{l} (w_t(t), v) + M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right) (w_x(t), v_x) + \\ \left[M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)\right] (u_x(t), v_x(t)) + (f(u(t)) - f(\widehat{u}(t)), v) = 0. \end{array} \tag{3.57}$$

Fazendo $v = w(t)$ em (3.55) observando a modificação em (3.57), obtém-se

$$\left|\begin{array}{l} (w_t(t), w(t)) + M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)(w_x, w_x) + \\ \left[M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)\right](u_x(t), w_x(t)) + \Big(f(u(t)) - f(\widehat{u}(t)), w(t)\Big) = 0 \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 \ \text{ para } \ t \geq 0, \\ w(x,0) = 0 \ \text{ em } \ [0, L[. \end{array}\right. \tag{3.58}$$

Analisando as integrais de (3.58), no primeiro termo, tem-se

$$\begin{aligned} (w_t(t), w(t)) &= \int_0^L w_t(t)\, w(t)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}|w(t)|^2\ dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Usando a hipótese $(3.5)_2$, a segunda parcela pode ser limitada inferiormente por

$$\begin{aligned} M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)(w_x(t), w_x(t)) &= M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)\int_0^L |w_x(t)|^2 \\ &= M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)|w_x(t)|^2 \geq m_0|w_x(t)|^2. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Na terceira parcela, usando a hipótese $(3.5)_1$, tem-se

$$\begin{array}{l} \left|\left(M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) - M\left(\int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right)\right)\right|_{\mathbb{R}} \Big|(u_x(t), w_x)\Big|_{\mathbb{R}} \leq \\ A\left|\int_0^L u(t)\ dx - \int_0^L \widehat{u}(t)\ dx\right|_{\mathbb{R}} \Big|(u_x(t), w_x)\Big|_{\mathbb{R}} \leq A\left|\int_0^L w(t)\ dx\right|_{\mathbb{R}} \big|u_x(t)\big|\ \big|w_x\big| \end{array} \tag{3.61}$$

A quarta parcela é limitado superiormente usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz.

$$\begin{aligned} |(f(u(t)) - f(\widehat{u}(t)), w(t))|_{\mathbb{R}} &\leq |f(u(t)) - f(\widehat{u}(t))|_{\mathbb{R}}|w(t)|_{\mathbb{R}} \\ &\leq K|u(t) - \widehat{u}(t)||w(t)| \\ &= K|w(t)|^2 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Substituindo (3.59)-(3.62) em (3.58) tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + m_0|w_x(t)|^2 \leq K|w(t)|^2 + A\left|\int_0^L w(t)\ dx\right|_{\mathbb{R}} \big|u_x(t)\big|\ \big|w_x(t)\big|. \tag{3.63}$$

Como $u_x(t) \in L^2(0, L)$, para algum $C \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} A\left|\int_0^L w(t)\ dx\right|_{\mathbb{R}} \big|u_x(t)\big|\ \big|w_x(t)\big| &\leq AC\int_0^L |w(t)|_{\mathbb{R}}\ dx\ |w_x(t)| \\ &= AC|w(t)|_{L^1(0,L)}|w_x(t)| \leq C_0|w(t)|\ |w_x(t)|, \end{aligned}$$

pois $L^2(0,L) \hookrightarrow L^1(0,L)$. Daí, considerando $\varepsilon > 0$ e utilizando a desigualdade de Young, obtém-se

$$A\left|\int_0^L w(t)\ dx\right|_{\mathbb{R}} \left|u_x(t)\right| \left|w_x\right| \ \leq\ \frac{C_0}{\sqrt{\varepsilon}}\ |w(t)|\ \sqrt{\varepsilon}\ |w_x(t)| \leq \frac{C_0^2}{2\varepsilon}\ |w(t)|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\ |w_x(t)|^2.$$

Daí, e de (3.63), resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w\left(t\right)\right|^2 + \left(m_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)|w_x(t)|^2 \ \leq\ \left(K + \frac{C_0^2}{2\varepsilon}\right)|w(t)|^2.$$

Escolhe-se $\varepsilon > 0$ tal que $m_0 - \frac{\varepsilon}{2} \geq 0$. Ou seja, $0 < \varepsilon \leq 2m_0$. Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w\left(t\right)\right|^2 \ \leq\ K_0|w(t)|^2, \tag{3.64}$$

onde $K_0 = K + \dfrac{C_0^2}{2\varepsilon}$. Integrando (3.64) de 0 até t, resulta:

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 \leq K_0\int_0^t |w(s)|^2 ds + \frac{1}{2}|w(0)|^2.$$

Aplicando o Lema de Gronwall, tem-se

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 \leq K_0\int_0^t |w(s)|^2 ds + \frac{1}{2}|w(0)|^2 \leq \frac{1}{2}|w(0)|^2 e^{K_0 T} \quad \text{para } t \in [0,T].$$

Ou seja, $|w(t)|^2 \leq |w(0)|^2 e^{K_0 T} = 0$. Daí resulta,

$$|w(t)|^2 \leq 0 \quad \text{para todo } \ t \in]0,T[$$

Mas $|w(t)|^2 \geq 0$, portanto, $w(t) = 0$, quase sempre em $[0,T]$, para $T > 0$ arbitrário. Como,

$$w(t) = u(t) - v(t) \quad \text{em} \quad [0,T] \quad \text{e} \quad w(t) = 0.$$

Conclui-se que $u(t) - v(t) = 0 \Rightarrow u(t) = v(t) \quad \text{em} \quad [0,T]$.

Capítulo 4

Aspectos Numéricos

Neste capítulo será desenvolvido o estudo numérico do problema (3.1) por meio dos Métodos de Elementos Finitos na variável espacial e Diferenças Finitas na variável temporal.

4.1 Formulação Variacional

No problema (3.1) a equação é homogênea, isto é, o segundo membro é uma função $g \equiv 0$. Por conveniência numérica será considerada g uma função suficientemente regular não identicamente nula, a saber

$$\left|\begin{array}{l} u_t(x,t) - M\left(\displaystyle\int_0^L u(x,t)\ dx\right) u_{xx}(x,t) + f(u(x,t)) = g(x,t) \quad \text{em} \quad]0,L[\times]0,T[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \text{ para } \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad]0,L[, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Multiplicando $(4.1)_1$ por v e integrando de 0 a L, obtém-se a formulação variacional dada por

$$\Big(u_t(t), v\Big) + M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right)\Big(u_x(t), v_x\Big) + \Big(f(u(t)), v\Big) = \Big(g(t), v\Big) \tag{4.2}$$

para todo $v \in H_0^1(0,L)$, onde $(\cdot,\cdot)$ representa o produto interno de $L^2(0,L)$.

De fato, ao se multiplicar a equação $(4.1)_1$ por uma função regular $\phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(\cdot,t) = 0$ em $x = 0$ e $x = L$ e integrando-se sobre $Q =]0,L[\times]0,T[$, resulta

$$\int_Q [u_t(x,t) - M\left(\int_0^L u(x,t)\ dx\right) u_{xx}(x,t) + f(u(x,t)) - g(x,t)]\phi(x,t)\ dx\ dt = 0.$$

Em particular, assumindo-se $\phi(x,t) = v(x)\theta(t)$ com $v \in H_0^1(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, obtém-se:

$$\int_0^T \left[\int_0^L \left[u_t(t) - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_{xx}(t) + f(u(t)) - g(x,t)\right] v\ dx\right] \theta(t)\ dt = 0.$$

Integrando por partes a segunda parcela e como $v \in H_0^1(0,L)$, resulta

$$-\int_0^L [u_{xx}(t)v]\ dx = \underbrace{-vu_x(t)\Big|_0^L}_{=0} + \int_0^L u_x(t)v_x\ dx = \int_0^L u_x(t)v_x\ dx.$$

Substituindo esta identidade na precedente, tem-se

$$\int_0^T \left[\int_0^L [u_t(t)v + M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_x(t)v_x + f(u(t))v - g(t)v)]\ dx\right] \theta(t)\ dt = 0.$$

Pode-se então escrever

$$\int_0^T \left[(u_t(t),v) + M\left(\int_0^L u(t)dx\right)(u_x(t),v_x) + (f(u(t)),v) - (g(t),v)\right] \theta(t)\ dt = 0, \quad (4.3)$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H_0^1(0,L)$.

Sendo esta equação válida para todo $\theta \in D(0,T)$ e para todo $v \in H_0^1(0,L)$, deduz-se que (4.3), verificada no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$ e portanto

$$(u_t(t),v) + M\left(\int_0^L u(t)dx\right)(u_x(t),v_x) + (f(u(t)),v) = (g(t),v)$$

4.2 Método de Faedo Galerkin

Denota-se por $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma base hilbertiana de $H_0^1(0,L)$ formada pelas funções de interpolação definidas, neste caso, pelas splines cúbicas. Seja $V^m = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$, um subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. O Problema aproximado associado a (4.1) consiste em encontrar soluções

$$u_h(x,t) := u^m(x,t) = \sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i(x) \ \text{ em } \ V^m, \quad (4.4)$$

onde $d_i(t)$ são incógnitas a serem determinadas, isto é, os nós são pontos discretos do intervalo $[0,L]$. Tomando $m-1$ divisões em $[0,L]$ define-se $h = h_i = x_{i+1} - x_i$ para $i = 1,\ldots,m$, com $h = L/(m-1)$.

4.3 Problema Aproximado

O problema aproximado associado a (3.1) é definido pela formulação variacional (4.2) restrito a V^m. Ou seja,

$$\begin{cases} (u_h', v) + M\left(\displaystyle\int_0^L u_h(t)\ dx\right)\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}, v_x\right) + \Big(f\big(u_h\big), v\Big) = \Big(g(t), v\Big) \quad \text{em} \quad Q, \\ u_h(0,\, t) = u_h(L,\, t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \geq 0, \\ u_h(x,\, 0) = u_{h0}(x) \quad \text{em} \quad (0,\, L). \end{cases} \tag{4.5}$$

Tomando em particular $v = \varphi_j$ em (4.5) tem-se:

$$(u_h', \varphi_j) + M\left(\int_0^L u_h(t)\ dx\right)\left(\frac{\partial u_h(t)}{\partial x}, (\varphi_j)_x\right) + \Big(f\big(u_h(t)\big), \varphi_j\Big) = \big(g(t), \varphi_j\big). \tag{4.6}$$

Usando a definição de u_h em (4.4) na equação (4.6) para cada termo, tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet\ (u_h', \varphi_j) &= \int_0^L \sum_{i=1}^m d_i'(t)\varphi_i\varphi_j\ dx = \sum_{i=1}^m d_i'(t) \int_0^L \varphi_i\varphi_j\ dx \\ &= \sum_{i=1}^m d_i'(t)\,(\varphi_i, \varphi_j) \quad \text{, para todo } j = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ M\left(\int_0^L u_h(t)dx\right)\left(\frac{\partial u_h(t)}{\partial x}, (\varphi_j)_x\right) &= M\big(d(t)\big) \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i\Big)(\varphi_j)_x\ dx \\ &= M\big(d(t)\big) \sum_{i=1}^m d_i(t)\Big(\,(\varphi_i)_x\,, (\varphi_j)_x\Big), \end{aligned} \tag{4.8}$$

para todo $j = 1, ..., m$, onde $M\big(d(t)\big) = \left(\displaystyle\int_0^L \sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i\ dx\right)$.

$$\bullet\ (f(u_h(t)), \varphi_j) = \int_0^L f\Big(\sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i\Big)\varphi_j\ dx, \quad \text{para todo } j = 1, ..., m. \tag{4.9}$$

Substituindo (4.7)-(4.9) em (4.6), obtém-se:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m d_i'(t)\,(\varphi_i, \varphi_j) + M\big(d(t)\big) \sum_{i=1}^m d_i(t)\Big(\,(\varphi_i)_x\,, (\varphi_j)_x\Big) + \\ &\left(f\left(\sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i\right), \varphi_j\right) = (g(t), \varphi_j)\,, \text{ para todo } j = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Daí, define-se as matrizes:

$$A = a_{ij} = \int_0^L \varphi_i \varphi_j \, dx = (\varphi_i, \varphi_j); \quad B = b_{ij} = \int_0^L (\varphi_i)_x (\varphi_j)_x \, dx = \Big((\varphi_i)_x \, , (\varphi_j)_x \Big);$$

$$C\big(u_h(t)\big) = c_j = \int_0^L f\left(\sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i\right) \varphi_j \, dx = \left(f\left(\sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i\right), \varphi_j \right).$$

Note que A e B são matrizes quadradas de ordem m e $C\big(u_h(t)\big)$ é uma matriz $m \times 1$. Assim, obtém-se de (4.10) o seguinte sistema não linear de equações diferenciais ordinárias na variável temporal t:

$$\begin{cases} Ad'(t) + M\big(d(t)\big)Bd(t) + C(u_h(t)) = G(t) \\ d(0) = d_0 \end{cases} \tag{4.11}$$

onde $d(t) = [d_1(t), ..., (d_m(t)]^t$ é o vetor incógnita e $G(t) = \Big(g(t), \varphi_j\Big)^t$ é um vetor de ordem $m \times 1$ denominado *vetor força global*.

O sistema de equações diferenciais ordinárias (4.11) será resolvido pelo Método das Diferenças Finitas.

4.4 Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos consiste em introduzir funções bases com suporte pequeno, localizado nos pontos nodais dos elementos. Neste caso, o objetivo é fazer com que as matrizes dos coeficientes do sistema (4.11) sejam matrizes especiais com muitos elementos nulos obedecendo uma certa ordem. Matrizes deste tipo são denominadas matrizes esparsas e o sistema resultante, em geral é bem condicionado. Outra característica importante é que as matrizes A e B são simétricas, o que facilita a determinação e solução do sistema de equações.

4.4.1 Função de Interpolação

No ajustamento e interpolação de funções, a aproximação por polinômios ou funções trigonométricas é muito conveniente, já que possuem a propriedade de função analítica, que torna possível calcular as derivadas de qualquer ordem.

As funções splines são polinômios de grau k com continuidade da derivada de ordem $k-1$ nos nós comuns entre segmentos. Uma spline cúbica, é uma função polinomial contínua por partes, onde cada parte é um polinômio de grau menor ou igual a 3 no

intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ com i variando em $\{1, 2, 3, ..., m-1\}$, com primeira e segunda derivadas contínuas. Assim, as curvas não têm picos e nem trocam abruptamente de curvatura nos nós.

Para o cálculo das matrizes globais, as funções base φ_i do subespaço V^m do espaço $H_0^1(0,\ L)$ serão, nesse problema, polinômios cúbicos por partes, também conhecidos como B-spline, definidos, para $i = 1, 2, ..., m$, por:

$$B_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i-2})^3}{4h^3} \quad \text{se} \quad x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]; \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{3(x - x_{i-1})}{4h} + \dfrac{3(x - x_{i-1})^2}{4h^2} - \dfrac{3(x - x_{i-1})^3}{4h^3} \quad \text{se} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{3(x_{i+1} - x)}{4h} + \dfrac{3(x_{i+1} - x)^2}{4h^2} - \dfrac{3(x_{i+1} - x)^3}{4h^3} \quad \text{se} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ \dfrac{(x_{i+2} - x)^3}{4h^3} \quad \text{se} \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]; \\ 0 \quad \text{se} \quad x \notin [x_{i-2}, x_{i+2}]. \end{cases}$$

Assume-se que os pontos discretos do intervalo [0,L] estão igualmente espaçados, ou seja, tem-se uma malha uniforme de comprimento $h = x_{i+1} - x_i$, com $x_1 = 0$ e $x_m = L$ para todo $i = 1, 2, ...m$. cuja derivada :

$$\frac{\partial B_i}{\partial x}(x) = \begin{cases} \dfrac{3(x - x_{i-2})^2}{4h^3} \quad \text{se} \quad x \in [x_{i-2}, x_{i-1}]; \\ \dfrac{3}{4h} + \dfrac{3(x - x_{i-1})}{2h^2} - \dfrac{9(x - x_{i-1})^2}{4h^3} \quad \text{se} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ -\dfrac{3}{4h} - \dfrac{3(x_{i+1} - x)}{2h^2} + \dfrac{9(x_{i+1} - x)^2}{4h^3} \quad \text{se} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ -\dfrac{3(x_{i+2} - x)^2}{4h^3} \quad \text{se} \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]; \\ 0 \quad \text{se} \quad x \notin [x_{i-2}, x_{i+2}]. \end{cases}$$

Mostrar-se que $B_i(x)$ de fato é uma base para os splines cúbicos, ou seja, toda spline cúbica pode ser escrita como combinação linear das B-splines. Nota-se que para as funções B_1, B_2, B_{m-1} e B_m, precisa-se introduzir os pontos nodais auxiliares: x_{-2}, x_{-1} e x_{m+1}, x_{m+2} que dependem dos valores na fronteira. Considera-se o intervalo $(0,\ L)$ com $x_1 = 0$ e $x_m = L$ com os valores de fronteira nulos. As funções $B_3, \ldots, B_{m-2}$ se anulam nas fronteiras de cada intervalo que as definem, mas as funções B_1, B_2, B_{m-1}

e B_m não satisfazem. Com esse objetivo, considere:

$$\left|\begin{array}{ll} \varphi_i(x) = B_i(x), & i = 3, ..., m-2, \\ \varphi_1(x) = B_1(x) - 4B_0(x), & \varphi_2(x) = B_2(x) - B_0(x), \\ \varphi_{m-1}(x) = B_{m-1}(x) - B_{m+1}(x), & \varphi_m(x) = B_m(x) - 4B_{m+1}(x). \end{array}\right. \tag{4.12}$$

Tem-se que $B_i(x_i) = 1$ e $B_i(x_{i-1}) = B_i(x_{i+1}) = 1/4$, então é fácil de verificar que $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_{m-1}(L) = \varphi_m(L) = 0$ e portanto satisfazem os valores de fronteira. Contudo o conjunto formado por $[\varphi_1, \varphi_2, ... \varphi_m]$ é L.D., com

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=2}^{m-1} d_i(t)\varphi_i(x),$$

e

$$\varphi_m(x) = \sum_{i=2}^{m-1} d_i(t)\varphi_i(x).$$

De fato, pelas condições de fronteira tem-se,

$$\left\{\begin{array}{ll} u_h(x_1, 0) & = d_1^0\varphi_1(x_1) + d_2^0\varphi_2(x_1) = 0 \\ u_h(x_2, 0) & = d_1^0\varphi_1(x_2) + d_2^0\varphi_2(x_2) + d_3^0\varphi_3(x_2) \\ & \vdots \\ u_h(x_i, 0) & = d_{i-1}^0\varphi_{i-1}(x_i) + d_i^0\varphi_i(x_i) + d_{i+1}^0\varphi_{i+1}(x_i) \\ & \vdots \\ u_h(x_{m-1}, 0) & = d_{m-2}^0\varphi_{m-2}(x_{m-1}) + d_{m-1}^0\varphi_{m-1}(x_{m-1}) + d_m^0\varphi_m(x_{m-1}) \\ u_h(x_m, 0) & = d_{m-1}^0\varphi_{m-1}(x_m) + d_m^0\varphi_m(x_m) = 0 \end{array}\right.$$

Daí, de (4.12), obtém-se o sistema

$$\left\{\begin{array}{c} d_1^0 \cdot 0 + d_2^0 \cdot 0 = 0 \\ \frac{1}{4}d_1^0 + d_2^0 + \frac{1}{4}d_3^0 = u_h(x_2, 0) \\ \vdots \\ \frac{1}{4}d_{i-1}^0 + d_i^0 + \frac{1}{4}d_{i+1}^0 = u_h(x_i, 0) \\ \vdots \\ \frac{1}{4}d_{m-2}^0 + d_{m-1}^0 + \frac{1}{4}d_m^0 = u_h(x_{m-1}, 0) \\ d_{m-1}^0 \cdot 0 + d_m^0 \cdot 0 = 0 \end{array}\right.$$

representado na forma matricial

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \dots & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
d_1^0 \\ d_2^0 \\ \vdots \\ d_i^0 \\ \vdots \\ d_{m-1}^0 \\ d_m^0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ u_{h0}(x_2) \\ \vdots \\ u_{h0}(x_i) \\ \vdots \\ u_{h0}(x_{m-1}) \\ 0
\end{bmatrix}
$$

O sistema acima possui infinitas soluções o que implica que conjunto formado por $[\varphi_1,\, \varphi_2, \dots \varphi_m]$ é L.D. , e portanto, V^m é o subespaço gerado por $V^m = [\varphi_2,\, \varphi_3, \dots \varphi_{m-1}]$. Dessa forma a solução aproximada é um polinômio cúbico com $u_h(0) = u_h(L) = 0$, dado por :

$$u_h(x,t) = \sum_{i=2}^{m-1} d_i(t)\varphi_i(x) \;\; \text{com} \;\; \varphi_i \in V^m,$$

As funções B_i podem ser representadas geometricamente como mostrado na figura.

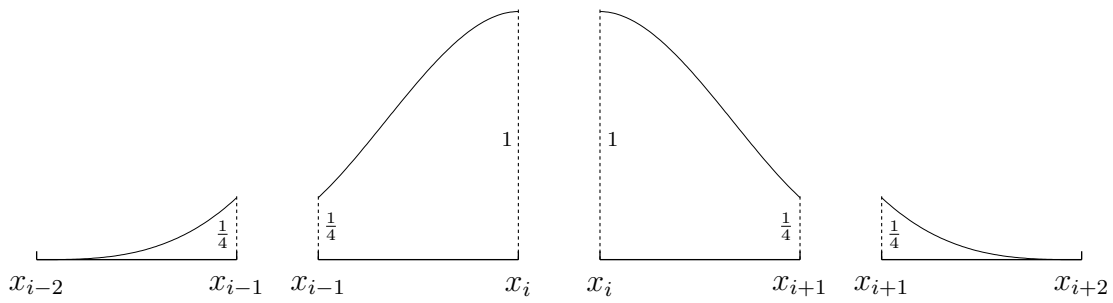

Figura 4.1: Função base local: spline cúbico

4.4.2 Cálculo das Matrizes

Utilizando a base spline cúbica, definida anteriormente, pode-se explicitar numericamente cada elemento a_{ij} das matrizes globais A e B. Estas matrizes são heptagonais, uma vez que um spline cúbico se anula fora do intervalo $[x_{i-2}, x_{i+2}]$. Assim pode-se calcular genericamente todos os elementos a_{ij} com $|i-j| \leq 3$ e $a_{ij} = 0$ para $|i-j| > 3$.

Para os elementos a_{ij} de fronteira, isto é, elementos com $i, j < 3$ ou $i, j > m-2$ faz-se os ajustes na fronteira utilizando as definições em (4.12) .

Calculando os elementos da matriz A:

$$a_{ij} = \int_0^L \varphi_i \varphi_j \; dx = \int_0^L \varphi_j \varphi_i \; dx.$$

A matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica, logo $a_{i,i+1} = a_{i+1,i}$, $a_{i,i+2} = a_{i+2,i}$ e $a_{i,i+3} = a_{i+3,i}$. Assim para todo $i = 3, ..., m-2$, tem-se:

- Para o elemento a_{ii}

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^L \varphi_i \varphi_j \; dx = \int_0^L \varphi_i^2 \; dx = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} \varphi_i^2 \; dx \\ &= \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \varphi_i^2 \; dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^2 \; dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^2 \; dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i^2 \; dx \\ &= \frac{h}{112} + \frac{297h}{560} + \frac{297h}{560} + \frac{h}{112} = \frac{151h}{140}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $a_{i,i+1}$

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} = a_{i+1,i} &= \int_0^L \varphi_i \varphi_{i+1} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} \varphi_i \varphi_{i+1} \; dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i \varphi_{i+1} \; dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_{i+1} \; dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i \varphi_{i+1} \; dx \\ &= \frac{129h}{2240} + \frac{933h}{2240} + \frac{129h}{2240} = \frac{1191h}{2240}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $a_{i,i+2}$

$$\begin{aligned} a_{i,i+2} = a_{i+2,i} &= \int_0^L \varphi_i \varphi_{i+2} \; dx = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi_i \varphi_{i+2} \; dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_{i+2} \; dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i \varphi_{i+2} \; dx \\ &= \frac{3h}{112} + \frac{3h}{112} = \frac{3h}{56}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $a_{i,i+3}$

$$\begin{aligned} a_{i,i+3} = a_{i+3,i} &= \int_0^L \varphi_i \varphi_{i+3}\, dx = \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i \varphi_{i+3}\, dx \\ &= \frac{h}{2240} \end{aligned}$$

Os elementos da matriz A próximos da fronteira, isto é, os elementos próximos de $x_1 = 0$ e $x_m = L$, com auxílio de (4.12), são calculados da seguinte forma:

- Para o elemento a_{11}

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^L \varphi_1 \varphi_1 dx = \int_0^L \varphi_1^2\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1^2\, dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_1^2\, dx \\ &= \frac{17h}{80} + \frac{h}{112} = \frac{31h}{140}. \end{aligned}$$

- Para o elemento a_{12}

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{21} &= \int_0^L \varphi_1 \varphi_2\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 \varphi_2\, dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_1 \varphi_2\, dx \\ &= \frac{23h}{80} + \frac{129h}{2240} = \frac{773h}{2240}. \end{aligned}$$

- Para o elemento a_{13}

$$\begin{aligned} a_{13} = a_{31} &= \int_0^L \varphi_1 \varphi_3\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 \varphi_3\, dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_1 \varphi_3\, dx \\ &= \frac{h}{40} + \frac{3h}{112} = \frac{29h}{560}. \end{aligned}$$

- Para o elemento a_{22}

$$\begin{aligned} a_{22} = \int_0^L \varphi_2 \varphi_2\, dx &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2^2\, dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2^2\, dx + \int_{x_3}^{x_4} \varphi_2^2\, dx \\ &= \frac{17h}{35} + \frac{297h}{560} + \frac{h}{112} = \frac{41h}{40}. \end{aligned}$$

- Para o elemento a_{23}

$$\begin{aligned} a_{23} = a_{32} &= \int_0^L \varphi_2\varphi_3 \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2\varphi_3 \, dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2\varphi_3 \, dx + \int_{x_3}^{x_4} \varphi_2\varphi_3 \, dx \\ &= \frac{2h}{35} + \frac{993h}{2240} + \frac{129h}{2240} = \frac{17h}{32}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $a_{m-1,m-1}$

$$\begin{aligned} a_{m-1,m-1} &= \int_0^L \varphi_{m-1}\varphi_{m-1} \, dx = \int_0^L \varphi_{m-1}^2 \, dx \\ &= \int_{x_{m-3}}^{x_{m-2}} \varphi_{m-1}^2 \, dx + \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_{m-1}^2 \, dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_{m-1}^2 \, dx \\ &= \frac{h}{112} + \frac{297h}{560} + \frac{17h}{35} = \frac{41h}{40}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $a_{m,m}$

$$\begin{aligned} a_{m,m} &= \int_0^L \varphi_m\varphi_m dx = \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_m^2 \, dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_m^2 \, dx \\ &= \frac{h}{112} + \frac{17h}{80} = \frac{31h}{140}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $a_{m,m-1}$

$$\begin{aligned} a_{m,m-1} = a_{m-1,m} &= \int_0^L \varphi_m\varphi_{m-1} \, dx = \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_m\varphi_{m-1} \, dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_m\varphi_{m-1} \, dx \\ &= \frac{129h}{2240} + \frac{23h}{80} = \frac{773h}{2240}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $a_{m,m-2}$

$$\begin{aligned} a_{m,m-2} = a_{m-2,m} &= \int_0^L \varphi_m\varphi_{m-2} \, dx = \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_m\varphi_{m-2} \, dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_m\varphi_{m-2} \, dx \\ &= \frac{3h}{112} + \frac{h}{40} = \frac{29h}{560}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $a_{m-1,m-2}$

$$
\begin{aligned}
a_{m-1,m-2} = a_{m-2,m-1} &= \int_0^L \varphi_{m-1}\varphi_{m-2}\, dx \\
&= \int_{x_{m-3}}^{x_{m-2}} \varphi_{m-1}\varphi_{m-2}\, dx + \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_{m-1}\varphi_{m-2}\, dx + \\
&+ \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_{m-1}\varphi_{m-2}\, dx \\
&= \frac{129h}{2240} + \frac{993h}{2240} + \frac{2h}{35} = \frac{17h}{32}.
\end{aligned}
$$

A forma matricial de $A_{m\times m}$ é dada por:

$$
A = \begin{bmatrix}
\frac{31h}{140} & \frac{773h}{2240} & \frac{29h}{560} & \frac{h}{2240} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{773h}{2240} & \frac{41h}{40} & \frac{17h}{32} & \frac{3h}{56} & \frac{h}{2240} & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{29h}{560} & \frac{17h}{32} & \frac{151h}{140} & \frac{1191h}{2240} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\frac{h}{2240} & \frac{3h}{56} & \frac{1191h}{2240} & \ddots & \ddots & \frac{3h}{56} & \frac{h}{2240} & 0 \\
0 & \frac{h}{2240} & \ddots & \ddots & \frac{151h}{140} & \frac{1191h}{2240} & \frac{3h}{56} & \frac{h}{2240} \\
0 & 0 & \frac{h}{2240} & \ddots & \frac{1191h}{2240} & \frac{151h}{140} & \frac{17h}{32} & \frac{29h}{560} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{3h}{56} & \frac{17h}{32} & \frac{41h}{140} & \frac{773h}{2240} \\
0 & \dots & \dots & 0 & \frac{h}{2240} & \frac{29h}{560} & \frac{773h}{2240} & \frac{31h}{140}
\end{bmatrix}
$$

Calculando os elementos da matriz B:

$$
b_{ij} = \int_0^L (\varphi_i)_x (\varphi_j)_x dx = \int_0^L (\varphi_j)_x (\varphi_i)_x\, dx.
$$

Analogamente à matriz A , a matriz $B = (b_{ij})$ é simétrica , ou seja, $b_{ij} = b_{ji}$. Assim para todo $i = 3...m-2$, tem-se:

- Para o elemento b_{ii}

$$
\begin{aligned}
b_{ii} &= \int_0^L (\varphi_i)_x (\varphi_j)_x \, dx = \int_0^L (\varphi_i)_x^2 \, dx = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} (\varphi_i)_x^2 \, dx \\
&= \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} (\varphi_i)_x^2 \, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i)_x^2 \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i)_x^2 \, dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} (\varphi_i)_x^2 \, dx \\
&= \frac{9}{80h} + \frac{51}{80h} + \frac{51}{80h} + \frac{9}{80h} = \frac{3}{2h}.
\end{aligned}
$$

- Para o elemento $b_{i,i+1}$

$$
\begin{aligned}
b_{i,i+1} = b_{i+1,i} &= \int_0^L (\varphi_i)_x (\varphi_{i+1})_x \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} (\varphi_i)_x (\varphi_{i+1})_x \, dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i)_x (\varphi_{i+1})_x \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i)_x (\varphi_{i+1})_x \, dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} (\varphi_i)_x (\varphi_{i+1})_x \, dx \\
&= \frac{21}{160h} - \frac{87}{160h} + \frac{21}{160h} = -\frac{9}{32h}.
\end{aligned}
$$

- Para o elemento $b_{i,i+2}$

$$
\begin{aligned}
b_{i,i+2} = b_{i+2,i} &= \int_0^L (\varphi_i)_x (\varphi_{i+2})_x (x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+2}} (\varphi_i)_x (\varphi_{i+2})_x \, dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i)_x (\varphi_{i+2})_x \, dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} (\varphi_i)_x (\varphi_{i+2})_x \, dx \\
&= -\frac{9}{40h} - \frac{9}{40h} = -\frac{9}{20h}.
\end{aligned}
$$

- Para o elemento $b_{i,i+3}$

$$
\begin{aligned}
b_{i,i+3} = b_{i+3,i} &= \int_0^L (\varphi_i)_x (\varphi_{i+3})_x \, dx = \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} (\varphi_i)_x (\varphi_{i+3})_x \, dx \\
&= -\frac{3}{160h}.
\end{aligned}
$$

Para o cálculo dos elementos b_{ij} próximos da fronteira procede-se de modo análogo ao efetuado com os elementos da matriz A. Deste modo tem-se:

- Para o elemento b_{11}

$$\begin{aligned} b_{11} &= \int_0^L (\varphi_1)_x^2 \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_1)_x^2 \, dx + \int_{x_2}^{x_3} (\varphi_1)_x^2 \, dx \\ &= \frac{111}{80h} + \frac{9}{80h} = \frac{3}{2h}. \end{aligned}$$

- Para o elemento b_{12}

$$\begin{aligned} b_{12} = b_{21} &= \int_0^L (\varphi_1)_x (\varphi_2)_x \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_1)_x (\varphi_2)_x \, dx + \int_{x_2}^{x_3} (\varphi_1)_x (\varphi_2)_x \, dx \\ &= \frac{27}{40h} + \frac{21}{160h} = \frac{129}{160h}. \end{aligned}$$

- Para o elemento b_{13}

$$\begin{aligned} b_{13} = b_{31} &= \int_0^L (\varphi_1)_x (\varphi_3)_x \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_1)_x (\varphi_3)_x \, dx + \int_{x_2}^{x_3} (\varphi_1)_x (\varphi_3)_x \, dx \\ &= -\frac{3}{20h} - \frac{9}{40h} = -\frac{3}{8h}. \end{aligned}$$

- Para o elemento b_{22}

$$\begin{aligned} b_{22} &= \int_0^L (\varphi_2)_x^2 \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_2)_x^2 \, dx + \int_{x_2}^{x_3} (\varphi_2)_x^2 \, dx + \int_{x_3}^{x_4} (\varphi_2)_x^2 \, dx \\ &= \frac{6}{5h} + \frac{51}{80h} + \frac{9}{80h} = \frac{39}{20h}. \end{aligned}$$

- Para o elemento b_{23}

$$\begin{aligned} b_{23} = b_{32} &= \int_0^L (\varphi_2)_x (\varphi_3)_x dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (\varphi_2)_x (\varphi_3)_x dx + \int_{x_2}^{x_3} (\varphi_2)_x (\varphi_3)_x dx + \int_{x_3}^{x_4} (\varphi_2)_x (\varphi_3)_x dx \\ &= \frac{3}{20h} - \frac{87}{160h} + \frac{21}{160h} = -\frac{21}{80h}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $b_{m-1,m-1}$

$$\begin{aligned} b_{m-1,m-1} &= \int_0^L (\varphi_{m-1})_x^2 = \int_{x_{m-3}}^{x_{m-2}} (\varphi_{m-1})_x^2 + \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} (\varphi_{m-1})_x^2 + \int_{x_{m-1}}^{x_m} (\varphi_{m-1})_x^2 \\ &= \frac{9}{80h} + \frac{51}{80h} + \frac{6}{5h} = \frac{39}{20h}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $b_{m,m}$

$$\begin{aligned} b_{m,m} &= \int_0^L (\varphi_m)_x^2 \, dx = \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} (\varphi_m)_x^2 \, dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} (\varphi_m)_x^2 \, dx \\ &= \frac{9}{80h} + \frac{111}{80h} = \frac{3}{2h}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $b_{m,m-1}$

$$\begin{aligned} b_{m,m-1} = b_{m-1,m} &= \int_0^L (\varphi_m)_x \, (\varphi_{m-1})_x dx \\ &= \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} (\varphi_m)_x \, (\varphi_{m-1})_x dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} (\varphi_m)_x \, (\varphi_{m-1})_x dx \\ &= \frac{21}{160h} + \frac{27}{40h} = \frac{129}{160h}. \end{aligned}$$

- Para o elemento $b_{m-1,m-2}$

$$\begin{aligned} b_{m-1,m-2} = b_{m-2,m-1} &= \int_0^L (\varphi_{m-1})_x (\varphi_{m-2})_x dx \\ &= \int_{x_{m-3}}^{x_{m-2}} (\varphi_{m-1})_x (\varphi_{m-2})_x dx + \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} (\varphi_{m-1})_x (\varphi_{m-2})_x dx \\ &\quad + \int_{x_{m-1}}^{x_m} (\varphi_{m-1})_x (\varphi_{m-2})_x dx \\ &= \frac{21}{160h} - \frac{87}{160h} + \frac{3}{20h} = -\frac{21}{80h}. \end{aligned}$$

A forma matricial de $B_{m\times m}$ é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2h} & \frac{129}{160h} & -\frac{3}{20h} & -\frac{3}{160h} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{129}{160h} & \frac{39}{20h} & -\frac{21}{80h} & -\frac{9}{20h} & -\frac{3}{160h} & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{3}{8h} & -\frac{21}{80h} & \frac{3}{2h} & -\frac{9}{32h} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{3}{160h} & -\frac{9}{20h} & -\frac{9}{32h} & \ddots & \ddots & -\frac{9}{20h} & -\frac{3}{160h} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{160h} & \ddots & \ddots & \frac{3}{2h} & -\frac{9}{32h} & -\frac{9}{20h} & -\frac{3}{160h} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{160h} & \ddots & -\frac{9}{32h} & \frac{3}{2h} & -\frac{21}{80h} & -\frac{3}{20h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{9}{20h} & -\frac{21}{80h} & \frac{39}{20h} & \frac{129}{160h} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{3}{160h} & -\frac{3}{8h} & \frac{129}{160h} & \frac{3}{2h} \end{bmatrix}$$

4.5 Cálculo do termo não linear $C\big(u_h(t)\big)$:

Para o cálculo do termo não linear $C\big(u_h(t)\big)$, aproxima-se $f(u_h)$ utilizando o ponto médio de cada elemento no tempo $t = t_n$. Deste modo para cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ a seguinte aproximação está sendo considerada para qualquer varável espacial x:

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(u_h)\varphi_j \, dx &= \frac{1}{2}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \big(f(u(x_j,t)) + f(u(x_{j+1},t))\big)\varphi_j \, dx \\ &= \frac{1}{2}\big(f(u(x_j,t)) + f(u(x_{j+1},t))\big)\int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j \, dx. \end{aligned}$$

Assim, tem-se a matriz $C\big(u(x_j,t)\big) = C_j(t)$, onde cada elemento de $c_j(t)$ é dada por:

$$c_j(t) = c_j = \frac{1}{2}\sum_{i=j-2}^{j+2} (f(u(x_i)) + f(u(x_{i+1})), \varphi_j)$$

Deste modo, para todo $j = 3...m-2$, tem-se:

- Para o elemento c_j

$$
\begin{aligned}
c_j = \int_0^L f(u_h)\varphi_j \, dx \; &= \int_{x_{j-2}}^{x_{j+2}} f(u_h)\varphi_j \, dx \\
&= \frac{1}{2}\Big(f(u(x_{j-2})) + f(u(x_{j-1}))\Big) \int_{x_{j-2}}^{x_{j-1}} \varphi_j \, dx + \\
&\quad \frac{1}{2}\Big(f(u(x_{j-1})) + f(u(x_j))\Big) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j \, dx + \\
&\quad \frac{1}{2}\Big(f(u(x_j)) + f(u(x_{j+1}))\Big) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j \, dx + \\
&\quad \frac{1}{2}\Big(f(u(x_{j+1})) + f(u(x_{j+2}))\Big) \int_{x_{j+1}}^{x_{j+2}} \varphi_j \, dx \\
&= \frac{h}{32}\Big(f(u(x_{j-2})) + f(u(x_{j-1}))\Big) + \frac{11h}{32}\Big(f(u(x_{j-1})) + f(u(x_j))\Big) + \\
&\quad \frac{11h}{32}\Big(f(u(x_j)) + f(u(x_{j+1}))\Big) + \frac{h}{32}\Big(f(u(x_{j+1})) + f(u(x_{j+2}))\Big) \\
&= \Big[\frac{h}{32} f(u(x_{j-2})) + \frac{3h}{8} f(u(x_{j-1})) + \frac{11h}{16} f(u(x_j)) + \\
&\quad \frac{3h}{8} f(u(x_{j+1})) + \frac{h}{32} f(u(x_{j+2}))\Big].
\end{aligned}
$$

Para os elementos próximos da fronteira, tem-se:

- Para o elemento c_1

$$
\begin{aligned}
c_1 = \int_0^L f(u_h)\varphi_1 \, dx \; &= \frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_1)\big) + f\big(u(x_2)\big)\Big) \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 \, dx + \\
&\quad \frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_2)\big) + f\big(u(x_3)\big)\Big) \int_{x_2}^{x_3} \varphi_1 \, dx \\
&= \frac{7h}{32}\Big(f\big(u(x_1)\big) + f\big(u(x_2)\big)\Big) + \frac{h}{32}\Big(f\big(u(x_2)\big) + f\big(u(x_3)\big)\Big) \\
&= \left[\frac{7h}{32} f(u(x_1)) + \frac{h}{4} f(u(x_2)) + \frac{h}{32} f(u(x_3))\right].
\end{aligned}
$$

- Para o elemento c_2

$$
\begin{aligned}
c_2 = \int_0^L f(u_h)\varphi_2 \, dx \quad &= \frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_1)\big) + f\big(u(x_2)\big)\Big) \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 \, dx + \\
&\frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_2)\big) + f\big(u(x_3)\big)\Big) \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2 \, dx + \\
&\frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_3)\big) + f\big(u(x_4)\big)\Big) \int_{x_3}^{x_4} \varphi_2 \, dx \\
&= \frac{5h}{16}\Big(f\big(u(x_1)\big) + f\big(u(x_2)\big)\Big) + \frac{11h}{32}\Big(f\big(u(x_2)\big) + f\big(u(x_3)\big)\Big) + \\
&\frac{h}{32}\Big(f\big(u(x_3)\big) + f\big(u(x_4)\big)\Big) \\
&= \left[\frac{5h}{16} f(u(x_1)) + \frac{21h}{32} f(u(x_2)) + \frac{3h}{8} f(u(x_3)) + \frac{h}{32} f(u(x_4))\right].
\end{aligned}
$$

- Para o elemento c_{m-1}

$$
\begin{aligned}
c_{m-1} = \int_0^L f(u_h)\varphi_{m-1} \, dx \quad &= \frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_{m-3})\big) + f\big(u(x_{m-2})\big)\Big) \int_{x_{m-3}}^{x_{m-2}} \varphi_{m-1} \, dx + \\
&\frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_{m-2})\big) + f\big(u(x_{m-1})\big)\Big) \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_{m-1} \, dx + \\
&\frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_{m-1})\big) + f\big(u(x_m)\big)\Big) \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_{m-1} \, dx \\
&= \frac{h}{32}\Big(f\big(u(x_{m-3})\big) + f\big(u(x_{m-2})\big)\Big) + \\
&\frac{11h}{32}\Big(f\big(u(x_{m-2})\big) + f\big(u(x_{m-1})\big)\Big) + \\
&\frac{5}{16}\Big(f\big(u(x_{m-1})\big) + f\big(u(x_m)\big)\Big) \\
&= \Big[\frac{h}{32} f(u(x_{m-3})) + \frac{3h}{8} f(u(x_{m-2})) + \frac{21h}{32} f(u(x_{m-1})) + \\
&\frac{5h}{16} f(u(x_m))\Big].
\end{aligned}
$$

• Para o elemento c_m

$$
\begin{aligned}
c_m = \int_0^L f(u_h)\varphi_m \, dx \quad &= \frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_{m-2})\big) + f\big(u(x_{m-1})\big)\Big) \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_m \, dx + \\
&\quad \frac{1}{2}\Big(f\big(u(x_{m-1})\big) + f\big(u(x_m)\big)\Big) \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_m \, dx \\
&= \frac{h}{32}\Big(f\big(u(x_{m-2})\big) + f\big(u(x_{m-1})\big)\Big) + \\
&\quad \frac{7h}{32}\Big(f\big(u(x_{m-1})\big) + f\big(u(x_m)\big)\Big) \\
&= \left[\frac{h}{32} f(u(x_{m-2})) + \frac{h}{4} f(u(x_{m-1})) + \frac{7h}{32} f(u(x_m))\right].
\end{aligned}
$$

Pode-se representar $C_j(t)$ como um produto de matrizes dada por:

$$
C_j = \begin{bmatrix}
\frac{7h}{32} & \frac{h}{4} & \frac{h}{32} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{5h}{32} & \frac{21h}{32} & \frac{3h}{8} & \frac{h}{32} & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{h}{32} & \frac{3h}{8} & \frac{11h}{16} & \frac{3h}{8} & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \frac{h}{32} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \frac{h}{32} & \ddots & \frac{11h}{16} & \frac{3h}{8} & \frac{h}{32} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{3h}{8} & \frac{21h}{32} & \frac{5h}{16} \\
0 & \dots & \dots & 0 & \frac{h}{32} & \frac{h}{4} & \frac{7h}{32}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
f(u(x_1)) \\ f(u(x_2)) \\ \vdots \\ f(u(x_i)) \\ \vdots \\ f(u(x_{m-1})) \\ f(u(x_m))
\end{bmatrix}
$$

4.6 Método das Diferenças Finitas

Neste sessão será desenvolvido o estudo numérico do problema misto (4.1) por meio do Metódo de Diferenças Finitas na variável temporal.

Considere $d \in C^{n+1}(0,T)$, onde $d(t)$ é o vetor incógnita definido em (4.4). Do teorema de Taylor pode-se expandir a função $d(t)$ da seguinte forma:

$$
d(t+\Delta t) = d(t) + \Delta t d'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} d''(t) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} d'''(t) + ... \tag{4.13}
$$

Despreza-se os termos de potência maior ou iguais a 2 de Δt em (4.13). Então a aproximação para primeira derivada é dada por

$$d'(t) = \frac{d(t+\Delta t) - d(t)}{\Delta t} \tag{4.14}$$

A aproximação acima é conhecida como sendo uma Diferença Adiantada e possui erro de aproximação de ordem $\mathcal{O}(\Delta t)$.

4.6.1 Notação

Supõe-se $d(t)$ uma função da variável independente $t \in [0, T]$ e com a seguinte discretização uniforme: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$, sendo $h = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ que são denominados passos. Assim, $\Delta t = T/N$ e cada elemento discreto obtém-se da seguinte maneira:

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Denota-se a função $d(t)$ nos pontos discretos (t_n) da seguinte forma:

$$d(t_n) = d\big(n\Delta t\big) = d^n.$$

Daí, a diferença adiantada (4.14) no tempo discreto t_n é reescrita por

$$\left(\frac{\partial d}{\partial t}\right)_{t=t_n} = \left(\frac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t}\right) \quad \text{com erro} \quad \mathcal{O}(\Delta t). \tag{4.15}$$

4.6.2 Família de Métodos

Considere a aproximação (4.15) para $d'(t)$ e para os termos $G(t)$ e $d(t)$ que dependem de t e não envolvem derivadas considere a média ponderada para o tempo discreto $t^{n+\theta}$. Isto é,

$$d(t) = d(t_n) = d^n \ \text{ onde } \ d^{n+\theta} = \theta d^{n+1} + (1-\theta)d^n \quad \text{e}$$

$$G(t) = G(t_n) = G^n \ \text{ onde } \ G^{n+\theta} = \theta G^{n+1} + (1-\theta)G^n.$$

Fazendo as substituições no sistema (4.11) obtém-se

$$\left|\begin{array}{l} A\left(\dfrac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t}\right) + M^n B(\theta d^{n+1} + (1-\theta)d^n) + C^n = \theta G^{n+1} + (1-\theta)G^n \\ d(0) = d^0 \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, ...N \end{array}\right.$$

Multiplicando-se por Δt e arrumando algebricamente de forma conveniente, obtém-se a família de métodos,

$$\left| \begin{array}{l} (A + \theta \Delta t M^n B)\, d^{n+1} = \big(A - (1-\theta)\Delta t M^n B\big) d^n + \Delta t \left(\theta G^{n+1} + (1-\theta) G^n\right) - \Delta t C^n \\ d(0) = d^0 \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, ...N \end{array} \right. \tag{4.16}$$

Em particular tem-se:

(i) Se $\theta = 0$ obtém-se o Método de Euler Progressivo;

(ii) Se $\theta = \dfrac{1}{2}$ obtém-se o Método de Crank-Nicolson;

(iii) Se $\theta = 1$ obtém-se o Método de Euler Regressivo.

Nesse trabalho, será utilizado o Método de Crank-Nicolson porque é o método que possui melhor ordem de convergência, $O(\Delta t^2)$, e apresentou bons resultados nas simulações numéricas. Assim, substituindo o θ por $1/2$ em (4.16) obtém-se:

$$\left| \begin{array}{l} \left(A + \dfrac{\Delta t}{2} M^n B\right) d^{n+1} = \left(A - \dfrac{\Delta t}{2} M^n B\right) d^n + \dfrac{\Delta t}{2} \left(G^{n+1} + G^n\right) - \Delta t \left(C^n\right) \\ d(0) = d^0 \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, ..., N \end{array} \right. \tag{4.17}$$

Para iniciar o método toma-se $n = 0$ em (4.17), isto é

$$\left| \begin{array}{l} \left(A + \dfrac{\Delta t}{2} M^0 B\right) d^1 = \left(A - \dfrac{\Delta t}{2} M^0 B\right) d^0 + \dfrac{\Delta t}{2} \left(G^1 + G^0\right) - \Delta t \left(C^0\right) \\ d(0) = d^0 \quad \text{com} \quad n = 0, 1, 2, ..., N. \end{array} \right. \tag{4.18}$$

As matrizes A, B e C são conhecidas enquanto o passo de tempo Δt é dado. Mas é necessário conhecer o vetor $d^0 = (d_1^0, d_2^0, ...d_{m-1}^0, d_m^0)$. A partir da solução inicial, que também é conhecida, isto é, $u_h(x, 0) = u_{h0}$, para todo $x \in [0, L]$, tem-se que

$$\left| \begin{array}{l} n = 0 \\ d(t_n) = d(nt_n) = d^n \\ d(t_0) = d(0) = d^0. \end{array} \right.$$

De (4.4) pode-se escrever

$$u_h(x, 0) = \sum_{i=2}^{m-1} d_i^0 \varphi_i(x) \tag{4.19}$$

De (4.19), observando a definição de φ_i em (4.12) tem-se:

$$\begin{aligned} u_h(x_i, 0) &= d_{i-1}^0 \varphi_i(x_i) + d_i^0 \varphi_i(x_i) + d_{i+1}^0 \varphi_i(x_i) \\ &= \frac{1}{4} d_{i-1}^0 + d_i^0 + \frac{1}{4} d_{i+1}^0 \quad \text{para} \quad i = 2, ..., m-1. \end{aligned}$$

De onde obtém-se

$$\begin{cases} \frac{1}{4}d_1^0 + d_2^0 + \frac{1}{4}d_3^0 = u_h(x_2, 0) \\ \vdots \\ \frac{1}{4}d_{i-1}^0 + d_i^0 + \frac{1}{4}d_{i+1}^0 = u_h(x_i, 0) \\ \vdots \\ \frac{1}{4}d_{m-2}^0 + d_{m-1}^0 + \frac{1}{4}d_m^0 = u_h(x_{m-1}, 0) \end{cases}$$

Fixando-se a solução para qual $d_1^0 = d_m^0 = 0$, em particular e representando-se o sistema em sua forma matricial, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2^0 \\ \vdots \\ d_i^0 \\ \vdots \\ d_{m-1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{h0}(x_2) \\ \vdots \\ u_{h0}(x_i) \\ \vdots \\ u_{h0}(x_{m-1}) \end{bmatrix}.$$

Este sistema pode ser representado da forma $\bar{A}\bar{d}^0 = b$, com $\bar{d}^0 = (d_2^0, \dots, d_{m-1}^0)^t$ e $b = (u(x_2), \dots, u(x_{m-1}))^t$. $\bar{A}$ é uma matriz não singular, e portanto, para conhecer o vetor $\bar{d}^0 = (d_2^0, ..., d_{m-1}^0)^t$, e consequentemente o vetor $d^0 = (0, d_2^0, ..., d_{m-1}^0, 0)^t$, basta determinar a solução para o sistema acima.

Uma vez conhecido o vetor inicial $d^0 = (0, d_2^0, ..., d_{m-1}^0, 0)^t$ e a solução inicial $u_{h0}(x, 0)$, determina-se $d^n = (d_1^n, d_2^n, ..., d_m^n)$ resolvendo o sistema (4.17) para cada n , obtendo-se então a solução aproximada de (4.5) dada por $u_h(x_i, t_n)$ resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} u_h(x_i, t_n) &= d_{i-1}^n \varphi_i(x_i) + d_i^n \varphi_i(x_i) + d_{i+1}^n \varphi_i(x_i) \\ &= \frac{1}{4}d_{i-1}^n + d_i^n + \frac{1}{4}d_{i+1}^n \quad \text{para} \quad i = 1, ..., m. \end{aligned}$$

para todo $n = 0, 1, 2, ..., N$.

Capítulo 5

Simulações Numéricas

Neste capítulo será mostrado algumas simulações numéricas com objetivo de analisar o comportamento da solução aproximada do sistema 4.5 associado ao sistema homogêneo 4.1.

Para analisar a viabilidade do método quanto a precisão da solução aproximada serão construídos diversos problemas cuja solução é conhecida para o modelo não homogêneo com força g conhecida. Após os cálculos dessas soluções e a constatação que a solução aproximada está sendo obtida corretamente, através de análise de tabelas, retorna-se ao problema original com a força g nula.

Por hipótese do teorema de existência 3.1 as funções $f(u)$ e $M\left(\int_0^L u\ dx\right)$ devem ser lipschitziana no intervalo $(0, L)$. Nas simulações numéricas, dividas em duas etapas, serão utilizados $L = 1$ e $T = 1$, o que significa dizer que x e t serão tomados no intervalo $(0, 1)$.

Primeiro, depois de mostrar-se que a função $f(u) = u^3$ é lipschitziana para $|u| \leq 1$ e a função $f(u) = sen(u)$ é lipschitziana para todo $u \in \mathbb{R}$, serão feitas simulações para a equação $u_t - u_{xx} + f(u) = g$, fazendo-se $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = 1$, $f(u) = u^3$ e $f(u) = sen(u)$. Após análise de comportamento da solução aproximada obtida em relação a solução conhecida, será exibido o caso homogêneo, isto é, caso onde $g \equiv 0$. Como contra-exemplo para o caso homogêneo desta etapa será utilizada a função $f(u) = \dfrac{1}{(u - 1/4)}$ que não é lipschitziana no intervalo $(0, 1)$.

Na segunda etapa, utilizando as mesmas funções $f(u)$ e condições iniciais da etapa anterior, a equação a ser considerada para as simulações numéricas será dada por $u_t - M\left(\int_0^1 u\ dx\right) u_{xx} + f(u) = g$, onde em particular, toma-se $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$. Posteriormente, como na etapa anterior, será exibido o caso homogêneo.

A solução exata será denotada por u e as soluções aproximadas serão denotadas por

u_h e $\widetilde{u}_h$, na primeira e segunda etapa respectivamente.

Na construção das tabelas de erro, primeiro, fixa-se os passos de tempo $\Delta t = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$ respectivamente, e faz-se variar o espaçamento $h = 1/(m-1)$, para $m = 11, 21, 51, 101, 501$ e 1001, onde m é o número de nós no intervalo $[0,1]$. Os valores correspondentes de h para os m números de nós dados, são respectivamente $h = 0,1; 0,05; 0,02; 0,01; 0,002;$ e $0,001$. Em seguida, de modo análogo, constrói-se tabelas fixando-se o espaçamento h e fazendo-se variar os Δt passos de tempo.

O erro na norma discretizada de $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ é denotado e definido por

$$\begin{aligned} E_\infty &=: \|u_{i,n} - u^m_{i,n}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} = \sup_{t_n\in[0,T]} \text{ess } |u_i(t_n) - u^m_i(t_n)|_{L^2(0,L)} \\ &= \sup_{t_n\in[0,T]} \text{ess } \left(\int_0^L |u(x_i,t_n) - u^m(x_i,t_n)|^2_{\mathbb{R}} dx\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

para todo $i = 1,\ldots,m$ e $n = 1,\ldots,N$, onde $u^m(x_i,t_n)$ é a solução aproximada do problema (4.1).

5.1 Problema $u_t - u_{xx} + f(u) = g$

Neste primeiro problema considera-se em particular $M\left(\int_0^1 u\, dx\right) = 1$, e assim será investigado a solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + f(u(x,t)) = g(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \text{ para } \ t \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad]0,1[, \end{array}\right. \tag{5.1}$$

onde $u : Q =]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$.

5.1.1 Exemplo 1

Para esse problema particular (5.1) considera-se, neste exemplo, $f(u) = u^3$ para $x \in [0,1]$ e $t \in [0,1]$ e então substituindo no sistema (5.1), o sistema a ser resolvido será

$$\left|\begin{array}{l} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + u^3(x,t) = g(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \text{ para } \ t \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad]0,1[, \end{array}\right. \tag{5.2}$$

onde $u : Q =]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$.

Problema não homogêneo

Seja a solução exata $u(x,t)$ construída para (5.2), dada por

$$u(x,t) = sen(\pi x)e^{(-\pi^2 t)}$$

com condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e valores de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Substituindo convenientemente a solução exata na equação $(5.2)_1$ obtém-se a força externa

$$g(x,t) = \left(sen(\pi x)\ e^{(-\pi^2 t)}\right)^3.$$

Note que , para a $u(x,t)$ escolhida, $|u(x,t)| \leq 1$ e $f(u) = u^3$ é lipschitziana para $x \in [0,1]$ e para todo $t \in [0,1]$.

De fato, tem-se que

$$|sen(\pi x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

e como $e^{-\pi^2 t}$ é decrescente tem-se que

$$|e^{(-\pi^2 t)}| \leq e^0 = 1.$$

Daí tem-se

$$|u(x,t)| = |sen(\pi x)|\ |e^{(-\pi^2 t)}| \leq 1.$$

Considere agora $u(x,t) = u_1$ e $u(x,t) = u_2$ onde $x \in (0,1)$ e $t \in (0,1)$. Deste modo tem-se

$$\begin{aligned} |u_1^3 - u_2^3| &= |(u_1 - u_2)(u_1^2 + u_1 \cdot u_2 + u_2^2)| = |(u_1 - u_2)| \cdot |(u_1^2 + u_1 \cdot u_2 + u_2^2)| \\ &\leq |(u_1 - u_2)| \cdot (2u_1^2 + 2u_2^2) \leq C|(u_1 - u_2)|, \end{aligned}$$

onde $C = 2u_1^2 + 2u_2^2$. Conclui-se então que

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq C|(u_1 - u_2)|.$$

e portanto $f(u) = u^3$ é lipschitziana para $x \in [0,1]$ e para todo $t \in [0,1]$.

As soluções exata u e aproximada u_h estão representadas em escala logarítmica, para melhor visualizar o erro, nas figuras: Fig 1 e Fig. 2. Sendo $x = 0.5$ fixo e $h = 0.1$. Na Fig. 1 foram realizados 20 iterações no sistema com $\Delta t = 0.05$ e na Fig. 2, foram realizados 50 iterações com $\Delta t = 0.02$, para $t \in [0,1]$.

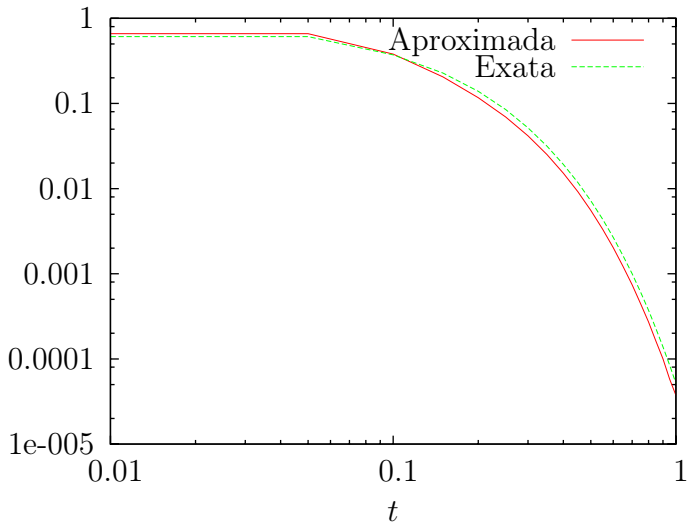

Fig. 1 - Solução Exata $u(0.5, t)$ e Solução Aproximada $u_h(0.5, t)$, com $\Delta t = 0.05$.

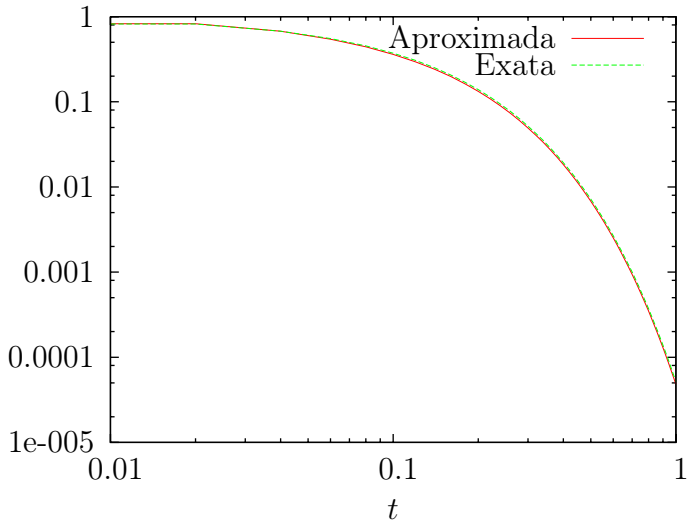

Fig. 2 - Solução Exata $u(0.5, t)$, Solução Aproximada $u_h(0.5, t)$ com $\Delta t = 0.02$.

Nota-se que as soluções exata u e aproximada u_h estão bem próximas, e portanto, graficamente fica evidente a eficiência do método numérico utilizado. Então a solução do problema (5.2) está sendo calculada de maneira satisfatória.

Convergência Numérica.

Analisa-se agora o comportamento do erro da solução aproximada u_h para problema (5.2) com a condição inicial $u(x, 0) = sen(\pi x)$ e a força externa $g(x, t) = \left(sen(\pi x)e^{(-\pi^2 t)}\right)^3$,

sendo $\Delta t = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$, respectivamente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.01	0.1	4.2122×10^{-3}
0.01	0.05	4.2561×10^{-3}
0.01	0.02	4.2701×10^{-3}
0.01	0.01	4.2721×10^{-3}
0.01	0.002	4.2728×10^{-3}
0.01	0.001	4.2728×10^{-3}

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.001	0.1	4.3910×10^{-4}
0.001	0.05	4.3922×10^{-4}
0.001	0.02	4.4053×10^{-4}
0.001	0.01	4.4074×10^{-4}
0.001	0.002	4.4081×10^{-4}
0.001	0.001	4.4081×10^{-4}

Observa-se que ao se fixar Δt passos no tempo e diminuir h não implica necessariamente na diminuição do erro. Existe um ponto h^* ótimo o erro é menor. Neste exemplo, o h^* ótimo é tal que $0.05 \leq h^* \leq 0.1$.

Analogamente a tabela anterior, analisa-se o comportamento do erro da solução aproximada u_h para o problema (5.2), variando agora o Δt, sendo $h = 0.01$ e $h = 0.001$, respectivamente.

h	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.01	0.1	3.0286×10^{-1}
0.01	0.05	3.1971×10^{-2}
0.01	0.02	8.2613×10^{-3}
0.01	0.01	4.2721×10^{-3}
0.01	0.002	8.7854×10^{-4}
0.01	0.001	4.4074×10^{-4}

h	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.001	0.1	3.0291×10^{-1}
0.001	0.05	3.1978×10^{-2}
0.001	0.02	8.2625×10^{-3}
0.001	0.01	4.2728×10^{-3}
0.001	0.002	8.7868×10^{-4}
0.001	0.001	4.4081×10^{-4}

Ao se fixar h e aumentar número de iterações no mesmo intervalo de tempo, o erro tornou-se cada vez menor.

As tabelas mostram que o Método Numérico empregado é eficiente e seguro para se encontrar a solução aproximada do problema (5.2), uma vez que os valores de erro encontrados são sufcientemente pequeno.

Sabe-se que [7] que a ordem de convergência do método de Crank-Nicolson para o problema parabólico linear é $O(\Delta t^2)$ na norma $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ e o raio de convergência próximo de 2.

Seja E_i o erro na norma $L^2(0,L)$ e considere $h = (5 \times 2^{i+1})^{-1}$. Então o raio de convergência r é dado por $r = \dfrac{ln(\frac{E_i}{E_{i+1}})}{ln(2)}$.

A tabela a seguir apresenta o raio de convergência da solução aproximada do problema (5.2) tomando $\Delta t = h^2$.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	raio de Convergência
$(1/10)^2$	$1/10$	4.2122×10^{-3}	
$(1/20)^2$	$1/20$	1.0922×10^{-3}	1.94727
$(1/40)^2$	$1/40$	2.7559×10^{-4}	1.98671
$(1/80)^2$	$1/80$	6.9061×10^{-5}	1.99658
$(1/160)^2$	$1/160$	1.7275×10^{-5}	1.99913
$(1/320)^2$	$1/320$	4.3196×10^{-6}	1.99976
$(1/640)^2$	$1/640$	1.0800×10^{-6}	1.99986

Observa-se que, semelhante ao caso linear, o raio de convergência aproxima-se de 2, o que comprova serem bons os resultados obtidos nesta simulação.

Problema homogêneo

Os resultados apresentados no problema não homogêneo comprovam a eficácia do método e asseguram que a solução do sistema (5.2) está sendo calculada satisfatoriamente. Desta forma pode-se esperar que a solução obtida pelo método aplicado ao mesmo problema com $g \equiv 0$ seja também satisfatória. Assim, determinar-se numericamente a solução u_h desconhecida do caso homogêneo e exibi-se o seu gráfico.

A figura a seguir apresenta a solução aproximada u_h do problema homogêneo do sistema (5.2) para o qual foram realizadas 100 iterações no sistema, sendo a condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$, os valores de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$, com $h = 0.1$ e $\Delta t = 0.01$.

Solução Aproximada

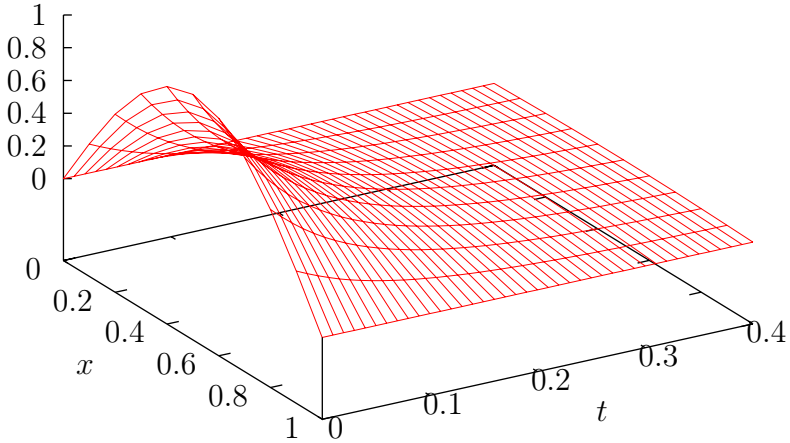

Fig. 3 - Solução Aproximada $u_h(x,t)$ para equação $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$.

O gráfico a seguir apresenta o comportamento da solução aproximada u_h do problema homogêneo para o sistema (5.2) nos tempos $t = 0.0,\ 0.05,\ 0.1$ e 0.2, sendo utilizandos $\Delta t = 0.01$ passos no tempo e $h = 0.01$.

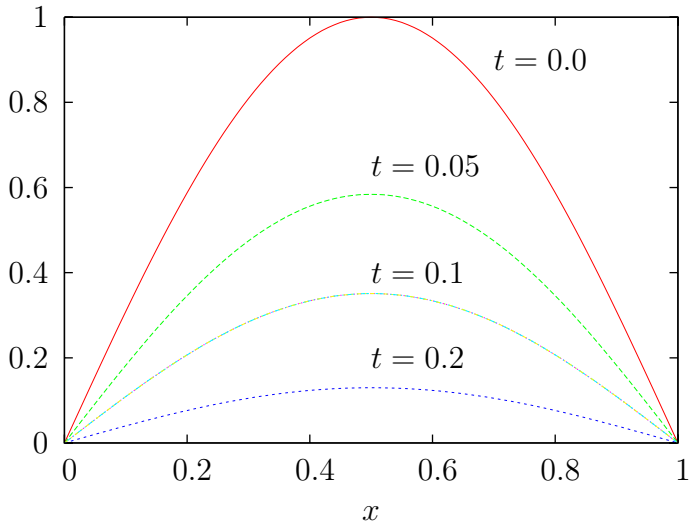

Fig. 4 - Solução Aproximada $u_h(x,t)$ para $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$ ao longo do tempo.

Influência do Termo não Linear $f(u) = u^3$

Com objetivo de analisar a influência do termo não linear u^3, foram feitas simulações para as equações linear $u_t - u_{xx} = 0$ e não linear $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$, ambas com a mesma

condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$. Em cada caso, foram realizadas 100 iterações no sistema, sendo $\Delta = 0.01$ passos no tempo e $h = 0.01$.

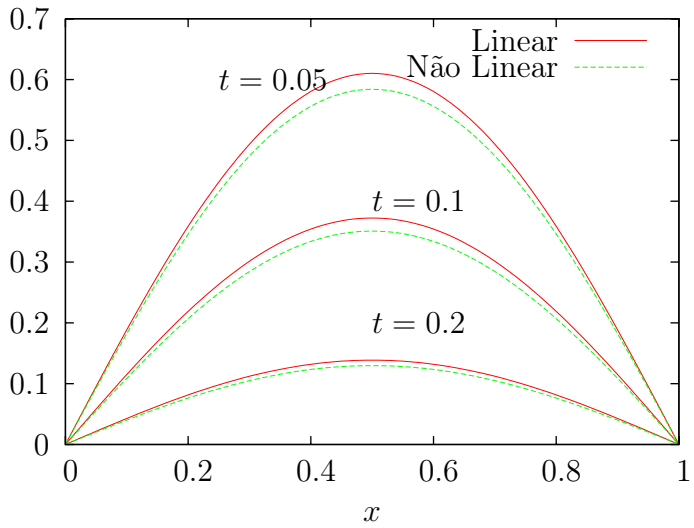

Fig. 5 - Equação linear $u_t - u_{xx} = 0$ e não linear $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$.

Constata-se graficamente que, ao se incluir o termo $f(u) = u^3$, a solução aproximada u é menor, ou seja, a solução não linear apresenta uma amplitude menor que a solução linear. O que é de se esperar, pois u^3 funciona como amortecedor da onda.

5.1.2 Exemplo 2

Neste exemplo considera-se $f(u) = sen(u)$ com $x \in [0,1]$ e $t \in [0,1]$ para o problema particular (5.1). Assim, substitituindo $f(u) = sen(u)$ em (5.1) o sistema a ser resolvido será

$$\left| \begin{array}{l} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + sen(u(x,t)) = g(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \text{ para } \quad t \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad]0,1[, \end{array} \right. \tag{5.3}$$

onde $u : Q =]0,1[\times]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$.

Problema não homogêneo

Seja a solução exata $u(x,t)$ construída para (5.3) dada por

$$u(x,t) = sen(\pi x)e^{(-\frac{\pi^2}{2}t)}$$

com condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e valores de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Substituindo-se a solução exata na equação $(5.3)_1$, obtém-se a força externa

$$g(x,t) = \frac{1}{2}\pi^2 sen(\pi x)e^{(-\frac{1}{2}\pi^2 t)} + sen\left(sen(\pi x)e^{(-\frac{1}{2}\pi^2 t)}\right).$$

Tem-se que $f(u) = sen(u)$ é lipschitziana para $x \in [0,1]$ para todo $t \in [0,1]$. De fato,

$$-1 \leq sen(u) \leq 1 \text{ para todo } u(x,t) \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $u(x,t)$ escolhida, tem-se $0 \leq u(x,t) \leq 1$ em Q e neste caso $sen(u) \leq Cu$, para algum $C \in (0,1)$. Tomando o módulo tem-se $|sen(u)| \leq C|u|$.

Como no exemplo anterior, as soluções exatas e aproximadas estão respresentadas em escala logarítmica nas figuras Fig. 6 e Fig. 7 para $x = 0.5$ fixo, sendo $h = 0.1$. Na Fig.6 utilizou-se 20 iterações no tempo, com $\Delta t = 0.05$, e Fig.7, 50 iterações com $\Delta t = 0.02$, para $t \in [0,1]$.

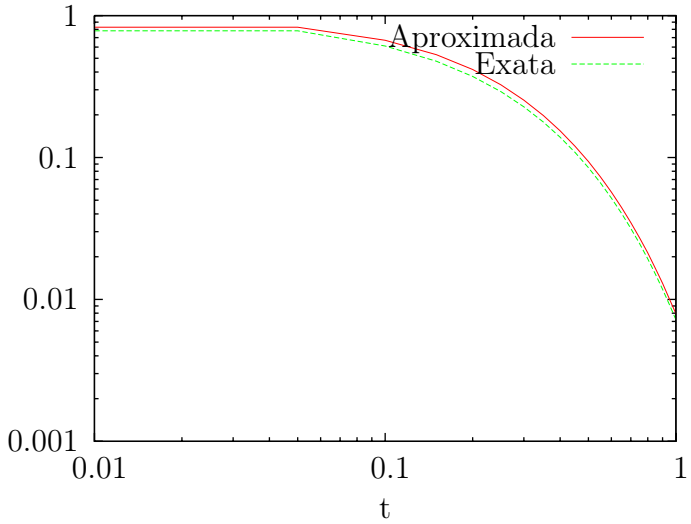

Fig. 6 - Solução Exata $u(0.5,t)$ e Solução Aproximada $u_h(0.5,t)$, com $\Delta t = 0.05$.

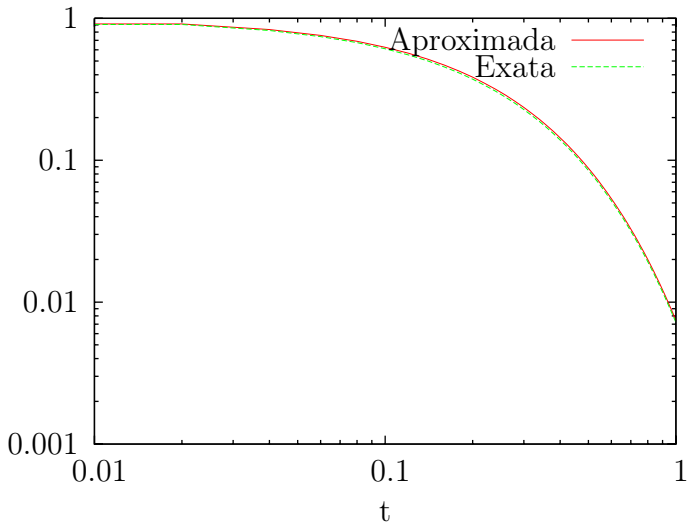

Fig. 7 - Solução Exata $u(0.5, t)$ e Solução Aproximada $u_h(0.5, t)$, com $\Delta t = 0.02$.

Também neste exemplo, as soluções aproximada u_h e exata u estão bem próximas, mostrando que a solução do problema (5.3) está sendo calculada de maneira satisfatória.

Convergência Numérica.

Analisa-se o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (5.3) com força externa $g(x,t) = \frac{1}{2}\pi^2 sen(\pi x)e^{(-\frac{1}{2}\pi^2 t)} + sen\left(sen(\pi x)e^{(-\frac{1}{2}\pi^2 t)}\right)$ e condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$, sendo $\Delta t = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$ respectivamente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.01	0.1	2.9522×10^{-3}
0.01	0.05	5.7814×10^{-3}
0.01	0.02	6.4889×10^{-3}
0.01	0.01	6.5817×10^{-3}
0.01	0.002	6.6103×10^{-3}
0.01	0.001	6.6112×10^{-3}

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.001	0.1	2.9859×10^{-3}
0.001	0.05	1.8057×10^{-4}
0.001	0.02	5.1004×10^{-4}
0.001	0.01	5.9893×10^{-4}
0.001	0.002	6.2636×10^{-4}
0.001	0.001	6.2720×10^{-4}

Observa-se, nas tabelas, que o ponto h^* ótimo é tal que $0.02 \leq h^* \leq 0.05$ para Δt fixo.

Nas simulações feitas para este exemplo, o menor erro obtido foi $6,9119 \times 10^{-5}$ para $\Delta t = 0.001$ e $h = 0.4545$. De modo analogo, analisa-se o comportamento do erro da

solução aproximada u_h para o problema (5.3) com $h = 0.01$ e $h = 0.001$, respectivamente.

h	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.01	0.1	1.2256×10^{-1}
0.01	0.05	4.6523×10^{-2}
0.01	0.02	1.4145×10^{-2}
0.01	0.01	6.5817×10^{-3}
0.01	0.002	1.2329×10^{-3}
0.01	0.001	6.6112×10^{-3}

h	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.001	0.1	1.2262×10^{-1}
0.001	0.05	4.6560×10^{-2}
0.001	0.02	1.4175×10^{-2}
0.001	0.01	6.6112×10^{-3}
0.001	0.002	1.2612×10^{-3}
0.001	0.001	6.2720×10^{-4}

Observando as tabelas de erro conclui-se que o Método Numérico empregado é eficiente para se encontrar a solução aproximada do problema (5.3), uma vez que o valor do erro encontrado mais uma vez é suficientemente pequeno.

Analisa-se agora o raio de convergência da solução aproximada para o problema (5.3) tomando $\Delta t = h^2$.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	raio de Convergência
$(1/10)^2$	$1/10$	2.9522×10^{-3}	
$(1/20)^2$	$1/20$	7.8421×10^{-4}	1.91250
$(1/40)^2$	$1/40$	2.0594×10^{-4}	1.92895
$(1/80)^2$	$1/80$	5.2915×10^{-5}	1.96053
$(1/160)^2$	$1/160$	1.3418×10^{-5}	1.97945
$(1/320)^2$	$1/320$	3.3789×10^{-6}	1.98956
$(1/640)^2$	$1/640$	8.4775×10^{-7}	1.99487

Observa-se, também para este exemplo, que o raio de convergência é próximo de 2, mostrando são bons os resultados obtidos na simulação.

Problema homogêneo

Como feito no exemplo anterior, após a análise dos resultados apresentados no caso não homogêneo comprovando a eficácia do método e assegurando que a solução do sistema (5.3) está sendo calculada de modo satisfatório, determina-se numericamente a solução u_h desconhecida do caso homogêneo.

A figura a seguir apresenta o gáfico da solução aproximada u_h para o caso homogêneo do sistema (5.3) deste exemplo, sendo a condição inicial $u(x, 0) = sen(\pi x)$ e os valores

de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Foram feitas 100 iterações no sistema, sendo $\Delta t = 0.01$ passos no tempo e $h = 0.1$.

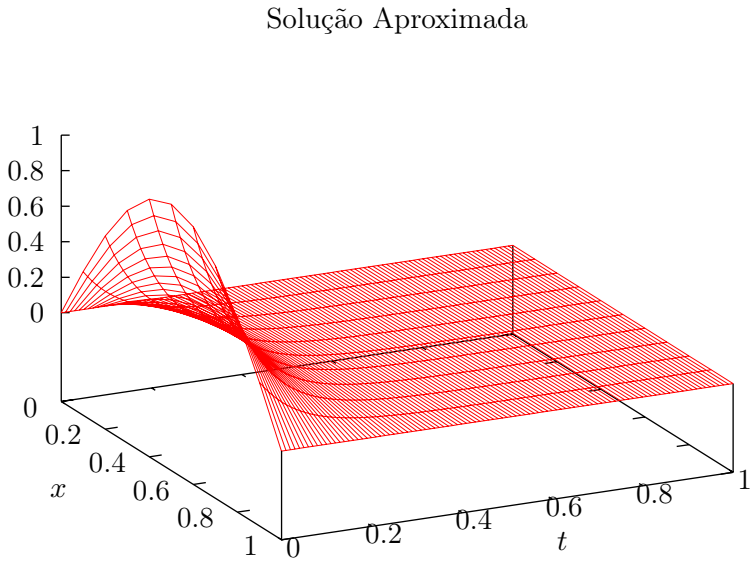

Fig. 8 - Solução Aproximada $u_h(x,t)$ para equação $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$.

Nas figuras Fig. 3 e Fig. 8 observa-se que os gráficos das soluções aproximadas para as equações $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$ e $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$ são bem próximos. Isto se deve ao fato de que para $|u| \leq 1$ as funções u^3 e $sen(u)$ tem valores relativamente próximos.

A figura Fig. 9, a seguir, apresenta o gráfico do comportamento da solução aproximada u_h do sistema (5.3), para o caso homogêneo, nos tempos $t = 0.0$, $t = 0.05$, $t = 0.1$ e $t = 0.2$, sendo utilizados $\Delta t = 0.01$ passo no tempo e $h = 0.01$. Nesta simulação foram realizadas 100 iterações no sistema.

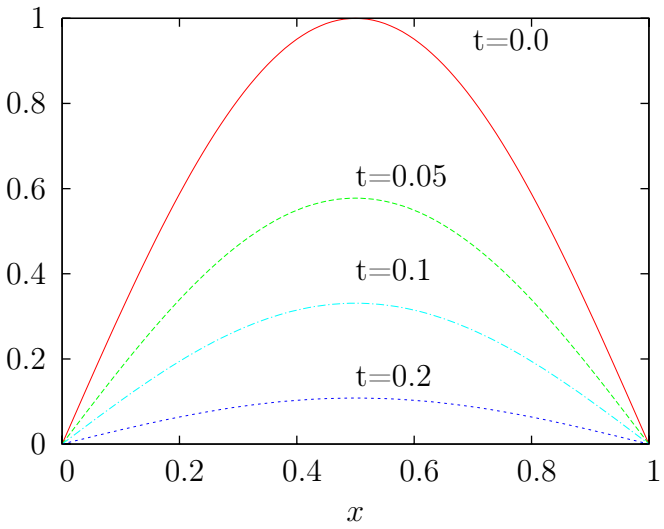

Fig. 9 - Solução Aproximada $u_h(x,t)$ para $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$ ao longo do tempo.

Influência dos Termos não Lineares $f(u) = sen(u)$ e $f(u) = u^3$

O gráfico a seguir apresenta o resultado de simulações feitas com o objetivo de estabelecer uma comparação entre a influência do termo não linear $f(u) = u^3$ do exemplo 1 e o termo não linear $f(u) = sen(u)$ do exemplo 2 em relação a equação linear $u_t - u_{xx} = 0$. Nas três simulações foram realizadas 100 iterações no sistema, sendo utilizados a condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$, $\Delta t = 0.01$ passos no tempo e $h = 0.01$.

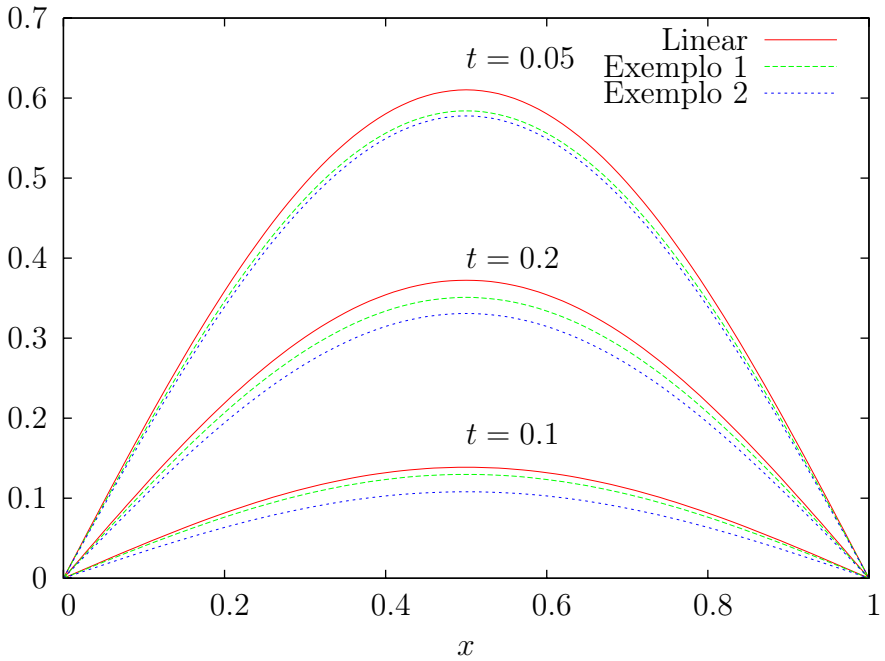

Fig. 10 - Eq. linear:$u_t - u_{xx} = 0$, Exemplo 1:$u_t - u_{xx} + u^3 = 0$ e Exemplo 2: $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$.

Observa-se que a solução do problema com o termo não linear $f(u) = sen(u)$ possui uma amplitude menor que a solução do problema com o termo $f(u) = u^3$, amortecendo mais rapidamente a onda.

5.1.3 Exemplo 3

Agora, como contra-exemplo desta primeira etapa, considera-se $f(u) = \dfrac{1}{(u-1/4)}$ para o caso homogêneo do sistema (5.1), isto é, considera-se $g \equiv 0$. Sendo a condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e os valores de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$, ou seja, o mesmo modelo estudado anteriormente com exceção do termo $f(u) = \dfrac{1}{(u-1/4)}$. E então substituindo-se $f(u)$ e $g \equiv 0$ no sistema (5.1), o sistema a ser resolvido será

$$\left|\begin{array}{l} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \dfrac{1}{(u-1/4)} = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \text{ para } \ t \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad]0,1[, \end{array}\right. \tag{5.4}$$

onde $u : Q =]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$.

Note que $f(u) = \frac{1}{(u-1/4)}$ não satifaz a condição $(3.4)_1$ para todo $x \in (0,1)$ e $t \in (0,1)$, pois, escolhendo-se $u_1 \to \frac{1}{4}^-$ e $u_2 \to \frac{1}{4}^+$, tem-se $f(u_1) \to -\infty$ e $f(u_2) \to +\infty$ e portanto não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f(u_1) - f(u_2)| \leq k|u_1 - u_2|$. Ou seja, $f(u) = \frac{1}{u-1/4}$ não é lipschitziana.

Simulações feitas utilizando diferentes discretizações no espaço, e no tempo apresentaram soluções bem diferentes para um mesmo ponto, mostrando assim que a solução aproximada u_h diverge.

As tabelas abaixo mostram alguns resultados obtidos para a solução aproximada do sistema (5.4) no ponto $(0.5; 0.5)$ que comprovam a afirmação acima. Na primeira tabela fixa-se $\Delta t = 0.01$ e faz-se variar o valor de h, na segunda fixa-se $h = 0.01$ e faz-se variar Δt .

Δt	h	$u_h(0.5;0.5)$
0.01	0.1	-0.23493
0.01	0.05	1.01076
0.01	0.02	-0.55089
0.01	0.01	24.36102
0.01	0.005	2.01969
0.01	0.002	3.87443

h	Δt	$u_h(0.5;0.5)$
0.01	0.1	-0.45922
0.01	0.05	0.44957
0.01	0.02	-0.07300
0.01	0.01	24.36102
0.01	0.005	0.36686
0.01	0.002	2.64633

5.2 Problema Original $u_t - M\left(\int_0^L u\ dx\right) u_{xx} + f(u) = g$

Agora serão feitas simulações numéricas para o problema original (4.1) depois de ter verificado a viabilidade e a convergência dos métodos para os modelos simplificados, ou seja, para os modelos em que $M\left(\int_0^L u\ dx\right) = 1$. Define-se então uma $M\left(\int_0^L u\ dx\right)$ satisfazendo as condições do Teorema de Existência, isto é, define-se uma $M\left(\int_0^1 u\ dx\right)$ que seja lipschitziana em $(0,1)$ e $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) > 0$.
Neste caso será tomado $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = e^{\left(\int_0^1\ u\ dx\right)}$, que é uma função contínua e derivável em todo seu domínio. Fazendo $\int_0^1\ u\ dx = c(t)$, tem-se $e^{c(t)} > 0$ para qualquer $C(t)$ com valores reais. Escolhe-se então $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ com $x \in (0,1)$ e $t \in (0,1)$ tal que $\int_0^1 u_1\ dx = a(t)$ e $\int_0^1 u_2\ dx = b(t)$. Toma-se $a = \text{máx}\{a(t)\}$ e $b = \text{máx}\{b(t)\}$, com $b > a$. Como $e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$ e derivável em para todo $\int_0^1 u\ dx \in \mathbb{R}$, em especial, é derivável para $\int_0^1 u\ dx \in [a,b]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um $c \in (a,b)$, tal que $(e^c)' = \dfrac{e^b - e^a}{b-a}$. Mas $\dfrac{e^b - e^a}{b-a} \in \mathbb{R}$, portanto existe um $k > 0 \in \mathbb{R}$ tal que $|(e^c)'| \leq k$ e então

$$e^b - e^a = (e^c)'(b-a).$$

Tomando o módulo tem-se

$$|e^b - e^a| = |(e^c)'|\ |(b-a)| \leq k|(b-a)|$$

e portanto

$$\left|M\left(\int_0^1 u_2\ dx\right) - M\left(\int_0^1 u_1\ dx\right)\right| \leq k\left|\left(\int_0^1 u_2\ dx - \int_0^1 u_1\ dx\right)\right|$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Então o problema utilizado para esta etapa de simulações numéricas será dado por

$$\left|\begin{array}{l} u_t\,(x,t) - e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)} u_{xx}\,(x,t) + f(u(x,t)) = g(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \\ u\,(0,t) = u\,(1,t) = 0 \ \text{ para } \ t \in (0,1) \\ u\,(x,0) = u_0\,(x) \quad \text{em} \quad]0,1[, \end{array}\right. \tag{5.5}$$

onde $u : Q =]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$.

5.2.1 Exemplo 4

Para o problema original (5.5) considera-se, neste exemplo, $f(u) = u^3$ que, como visto no exemplo 1, é lipschitziana para $x \in [0,1]$ para todo $t \in [0,1]$. Substituindo-se

$f(u) = u^3$ no sistema (5.5), o sistema a ser considerado para as simulações será dado por

$$\left| \begin{array}{l} u_t(x,t) - e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)} u_{xx}(x,t) + u^3(x,t) = g(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \text{ para } \ t \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad]0,1[, \end{array} \right. \tag{5.6}$$

onde $u : Q =]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$.

Problema não homogêneo

Seja a solução exata $u(x,t)$ construída para (5.6) dada por

$$u(x,t) = sen(\pi x) e^{(-\pi^2 t)},$$

com condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e valores de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Substituindo-se a $u(x,t)$ escolhida na equação $(5.6)_1$ obtém-se a força externa

$$g(x,t) = -\pi^2 sen(\pi x) e^{(-\pi^2 t)} \left(1 - e^{\left(\frac{2}{\pi} e^{\left(-\pi^2 t\right)}\right)} \right) + \left(sen(\pi x)\ e^{(-\pi^2 t)} \right)^3.$$

As soluções exata e aproximada estão representadas, em escala logarítmica, na figura Fig. 11 para $x = 0.5$ fixo, sendo $h = 0.1$. Foram realizadas 50 iterações no sistema, com $\Delta t = 0.02$ passos no tempo.

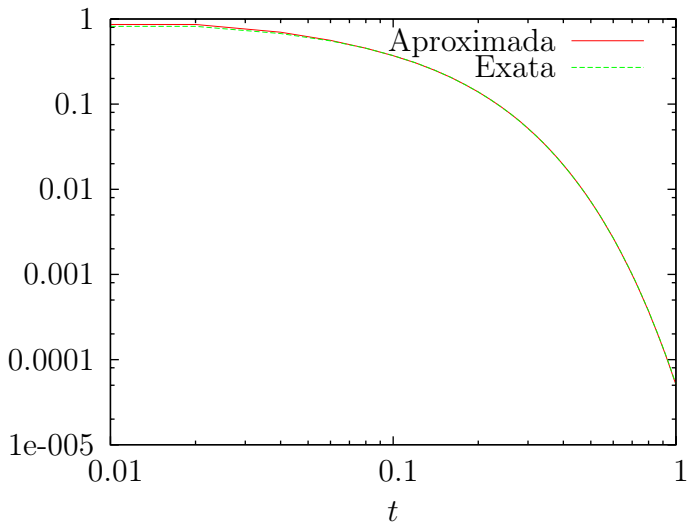

Fig. 11 - Solução Exata $u(0.5,t)$ e Solução Aproximada $\widetilde{u}_h(0.5,t)$, com $\Delta t = 0.02$.

O gráfico mostra que o erro é muito pequeno entre as soluções aproximada $\widetilde{u}_h$ e exata u. Pode-se então concluir que a solução $\widetilde{u}_h$ do problema (5.6) está sendo calculada de maneira satisfatória.

Convergência Numérica.

Analisa-se agora o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (5.6) com força externa $g(x,t) = -\pi^2 sen(\pi x)e^{(-\pi^2 t)}(1 - e^{(\frac{2}{\pi}e^{(-\pi^2 t)})}) + \left(sen(\pi x)\ e^{(-\pi^2 t)}\right)^3$ e condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$, sendo $\Delta t = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$ respectivamente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.01	0.1	7.3146×10^{-3}
0.01	0.05	6.8979×10^{-3}
0.01	0.02	7.0280×10^{-3}
0.01	0.01	7.0445×10^{-3}
0.01	0.002	7.0494×10^{-3}
0.01	0.001	7.0495×10^{-3}

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.001	0.1	8.5413×10^{-3}
0.001	0.05	4.8518×10^{-3}
0.001	0.02	4.8032×10^{-3}
0.001	0.01	4.7977×10^{-3}
0.001	0.002	4.7964×10^{-3}
0.001	0.001	4.7964×10^{-3}

Nas tabelas acima, observa-se que para $\Delta t = 0.01$ o h^* ótimo é tal que $0.02 \leq h^* \leq 0.05$.

De modo análogo, analisa-se o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (5.6) com $h = 0.01$ e $h = 0.001$, respectivamente.

h	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.01	0.05	2.7718×10^{-1}
0.01	0.02	3.4489×10^{-2}
0.01	0.01	7.0445×10^{-3}
0.01	0.002	4.8656×10^{-3}
0.01	0.001	4.7977×10^{-3}

h	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.001	0.05	2.7724×10^{-1}
0.001	0.02	3.4500×10^{-2}
0.001	0.01	7.0495×10^{-3}
0.001	0.002	4.8641×10^{-3}
0.001	0.001	4.7964×10^{-3}

A medida que diminuimos o passo Δt no tempo para $t \in (0,1)$, o erro torna-se cada vez menor. As tabelas apresentaram valores suficientemente pequeno para o erro cometido nas simulações. Daí, pode-se concluir que o Método Numérico empregado é eficiente para se encontrar a solução aproximada $\widetilde{u}_h$ do problema associado ao sistema (5.6).

Neste exemplo, a simulação feita com $\Delta t = 0.1$ apresentou resultado não satisfatório.

Problema homogêneo

Agora, fazendo $g \equiv 0$, pode-se determinar numericamente a solução $\widetilde{u}_h$ do sistema (5.6) para o caso homogêneo e exibir o seu gráfico. A figura Fig. 12 apresenta as soluções aproximadas u_h e $\widetilde{u}_h$ para o caso homogêneo dos sistemas (5.2) e (5.6), respectivamente. Em ambos os casos foram utilizados a mesma condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e valores

de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$ do caso não homogêneo. Nestas simulações foram feitas 100 iterações no sistema com $\Delta t = 0.01$ passos no tempo e $h = 0.1$.

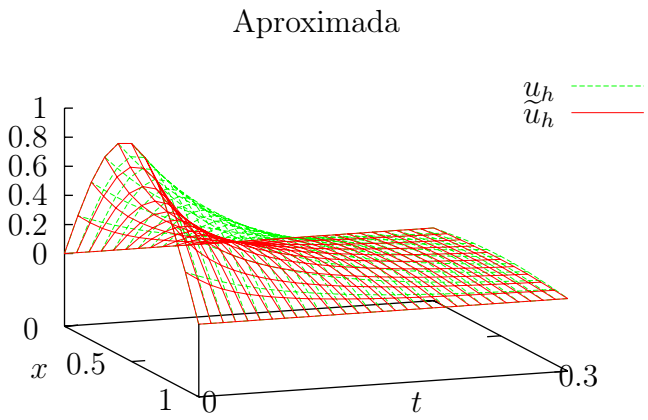

Fig. 12 - Solução Aproximada $\widetilde{u}_h(x,t)$ para equação $u_t - e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)} u_{xx} + u^3 = 0$ e Solução Aproximada $u_h(x,t)$ para equação $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$.

Constata-se graficamente que, com a mesma fonte externa $f(u) = u^3$, ao se considerar $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$, a solução aproximada $\widetilde{u}_h$ diminui, isto é, a amplitude da solução $\widetilde{u}_h$ é menor que a da solução u_h.

Influência do Termo não Linear $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$

Simulações feitas com $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$, mostraram que a solução aproximada $\widetilde{u}_h$ decai mais rapidamente, pois sendo $e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$ crescente, o termo $-e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)} u_{xx}$ fará com o valor da solução aproximada $\widetilde{u}_h$ diminua conforme pode ser observado na Fig. 12.

A Fig. 13 apresenta a solução aproximada $\widetilde{u}_h(x;0.1)$ para $u_t - e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)} u_{xx} + u^3 = 0$ e a solução aproximada $u_h(x;0.1)$ para $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$. A Fig. 14 apresenta a solução aproximada $\widetilde{u}_h(x;0.2)$ para $u_t - e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)} u_{xx} + u^3 = 0$ e a solução aproximada $u_h(x;0.2)$ para $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$. Foram realizadas 100 iterações para cada simulação com $\Delta t = h = 0.01$ e a condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$.

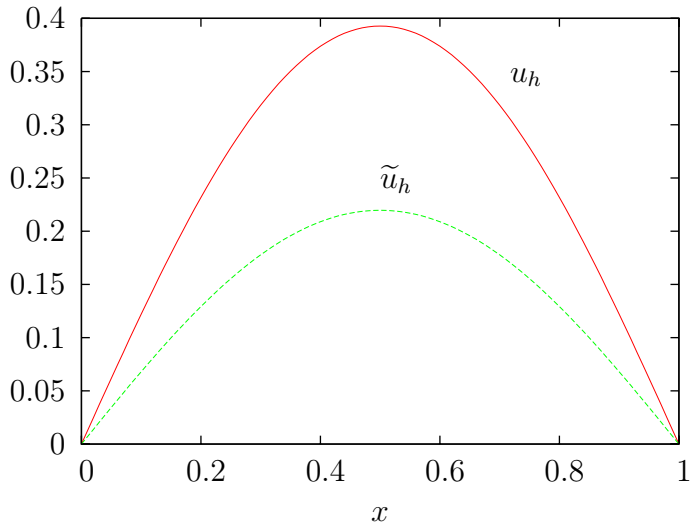

Fig. 13 - Solução Aproximada $\widetilde{u}_h(x;0.1)$ para equação $u_t - e^{(\int_0^1 u\ dx)}u_{xx} + u^3 = 0$ e Solução Aproximada $u_h(x;0.1)$ para equação $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$.

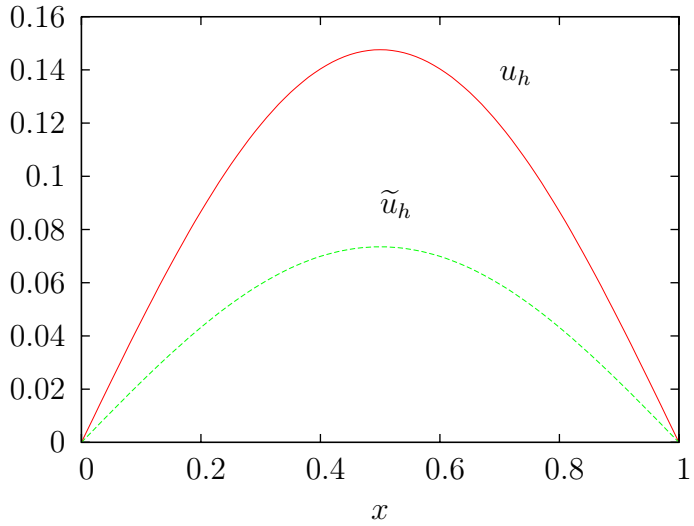

Fig. 14 - Solução Aproximada $\widetilde{u}_h(x;0.2)$ para equação $u_t - e^{(\int_0^1 u\ dx)}u_{xx} + u^3 = 0$ e Solução Aproximada $u_h(x;0.2)$ para equação $u_t - u_{xx} + u^3 = 0$.

Nota-se nas figuras Fig. 13 e Fig. 14 que, para os tempos $t = 0.01$ e $t = 0.02$, a amplitude da solução aproximada $\widetilde{u}_h$ é menor que a solução u_h, confirmando as afirmações anteriores.

Observa-se também, de comparações anteriores, veja Fig. 5, que sob as mesmas condições, a amplitude de da solução $\widetilde{u}_h$ é menor que solução aproximada da equação linear $u_t - u_{xx} = 0$.

5.2.2 Exemplo 5

Agora considere, para o problema (5.5), $f(u) = sen(u)$ lipschitziana para $x \in [0,1]$ e para todo $t \in [0,1]$, como visto no exemplo 2. Assim, substituindo $f(u) = sen(u)$ no sistema (5.5), o sistema a ser investigado será dado por

$$\left| \begin{array}{l} u_t(x,t) - e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)} u_{xx}(x,t) + sen(u(x,t)) = g(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \text{ para } \quad t \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad]0,1[, \end{array} \right. \tag{5.7}$$

onde $u : Q =]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$.

Problema não homogêneo

Seja a solução exata $u(x,t)$ construída para (5.7) dada por

$$u(x,t) = sen(\pi x) e^{\left(-\frac{\pi^2}{2} t\right)},$$

com condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e valores de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Susbstituindo $u(x,t)$ na equação $(5.7)_1$, obtém-se a força externa

$$g(x,t) = sen(\pi x)\pi^2 e^{\left(-\frac{1}{2}\pi^2 t\right)} \left(-\frac{1}{2} + e^{\left(2\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\pi^2 t\right)}}{\pi}\right)} \right) + sen\left(sen(\pi x) e^{\left(-\frac{1}{2}\pi^2 t\right)} \right).$$

As soluções exata u e aproximada $\widetilde{u}_h$ estão respresentadas, em escala logarítmica, na figura Fig. 15 para $x = 0.5$ fixo, sendo $h = 0.1$ e $\Delta t = 0.02$ passos no tempo. Foram realizadas 50 iterações no sistema para $t \in [0,1]$.

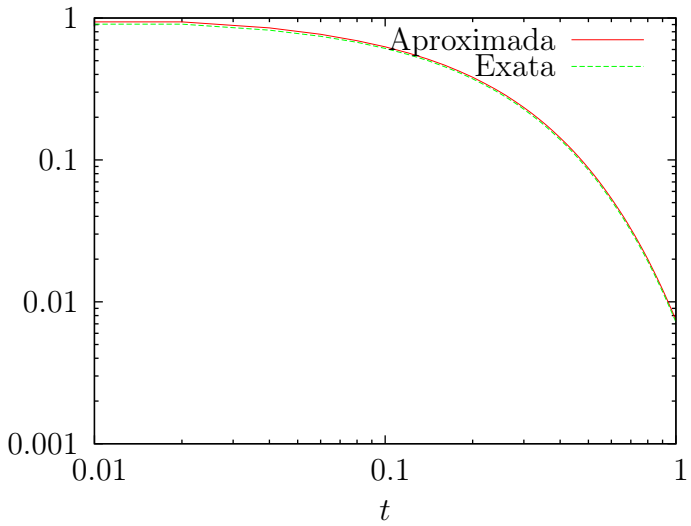

Fig. 15 - Solução Exata $u(0.5,t)$ e Solução Aproximada $\widetilde{u}_h(0.5,t)$, com $\Delta t = 0.02$.

O gráfico mostra que o erro entre as soluções aproximada $\widetilde{u}_h$ e exata u é muito pequeno. Pode-se então concluir que a solução $\widetilde{u}_h$do problema (5.6) está sendo calculada satisfatoriamente.

Convergência Numérica.

Analisa-se agora, para este exemplo, o comportamento do erro da solução aproximada $\tilde{u}_h$ para o problema (5.7) com condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e a força externa $g(x,t) = sen(\pi x)\pi^2 e^{(-\frac{1}{2}\pi^2 t)}(-\frac{1}{2} + e^{(2\frac{e^{(-\frac{1}{2}\pi^2 t)}}{\pi})}) + sen(sen(\pi x)e^{(-\frac{1}{2}\pi^2 t)})$, sendo $\Delta t = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$ respectivamente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.01	0.1	5.5716×10^{-3}
0.01	0.05	7.2840×10^{-3}
0.01	0.02	7.7376×10^{-3}
0.01	0.01	7.7802×10^{-3}
0.01	0.002	7.8174×10^{-3}
0.01	0.001	7.8222×10^{-3}

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.001	0.1	2.7080×10^{-3}
0.001	0.05	1.3233×10^{-4}
0.001	0.02	4.9032×10^{-4}
0.001	0.01	5.6605×10^{-4}
0.001	0.002	5.8920×10^{-4}
0.001	0.001	5.8991×10^{-4}

.

Observa-se que o ponto h^* ótimo, para este exemplo, é tal que $0.05 < h^* < 0.1$ para $\Delta t = 0.01$ passos no tempo e $0.02 \leq h^* \leq 0.05$ para $\Delta t = 0.001$.

Analisa-se agora o comportamento do erro da solução aproximada $\widetilde{u}_h$ para o problema (5.6) com $h = 0.01$ e $h = 0.001$, respectivamente.

h	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.01	0.1	5.3982×10^{-1}
0.01	0.05	1.3986×10^{-1}
0.01	0.02	2.5400×10^{-2}
0.01	0.01	7.8020×10^{-3}
0.01	0.002	1.1766×10^{-3}
0.01	0.001	5.6605×10^{-4}

h	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
0.001	0.1	5.3994×10^{-1}
0.001	0.05	1.3991×10^{-1}
0.001	0.02	2.2542×10^{-2}
0.001	0.01	7.8222×10^{-3}
0.001	0.002	1.2005×10^{-3}
0.001	0.001	5.8991×10^{-4}

A medida que diminuiu-se o valor Δt passos no tempo e aumentou-se o número de iterações no sistema, o erro tornou-se cada vez menor. Conclui-se então que a solução aproximada $\widetilde{u}_h$ do problema (5.7) está sendo calculada satisfatoriamente.

Problema homogêneo

Após a análise dos resultados apresentados no caso não homogêneo comprovando a eficácia do método determina-se numericamente a solução $\widetilde{u}_h$ desconhecida do sistema (5.7) para o caso homogêneo.

A figura Fig. 16 apresenta a solução aproximada u_h e $\widetilde{u}_h$ para o caso homogêneo dos sistemas (5.3) e (5.7), respectivamente. Sendo a condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$ e valores de fronteira $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Foram realizadas 100 iterações no sistema, sendo $\Delta t = 0.01$ passos no tempo e $h = 0.1$.

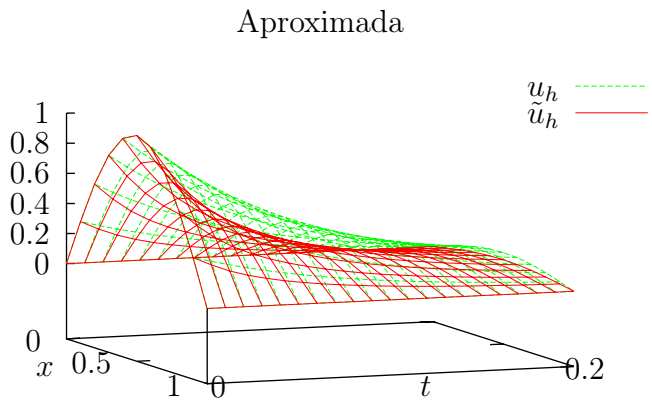

Fig. 16 - Solução Aproximada $\widetilde{u}_h(x,t)$ para equação $u_t - e^{(\int_0^1 u\ dx)}u_{xx} + sen(u) = 0$ e Solução Aproximada $u_h(x,t)$ para equação $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$.

A Fig. 17 apresenta a solução aproximada $\widetilde{u}_h(x;0.1)$ para $u_t - e^{(\int_0^1 u\ dx)}u_{xx} + sen(u) = 0$ e $u_h(x;0.1)$ para $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$. A Fig. 18 apresenta a solução aproximada $\widetilde{u}_h(x;0.2)$ para $u_t - e^{(\int_0^1 u\ dx)}u_{xx} + sen(u) = 0$ e $u_h(x;0.2)$ para $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$. Foram realizadas 100 iterações para cada simulação com $\Delta t = 0.01$ passos no tempo, $h = 0.01$ e a condição inicial $u(x,0) = sen(\pi x)$.

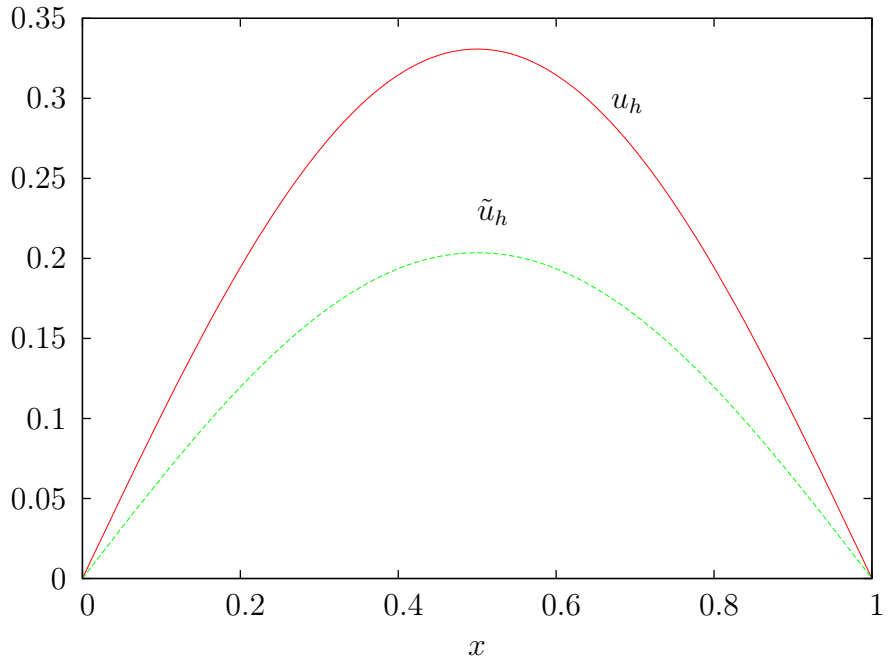

Fig. 17 - Solução Aproximada $\widetilde{u}_h(x;0.1)$ para equação $u_t - e^{(\int_0^1 u\ dx)}u_{xx} + sen(u) = 0$ e Solução Aproximada $u_h(x;0.1)$ para equação $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$.

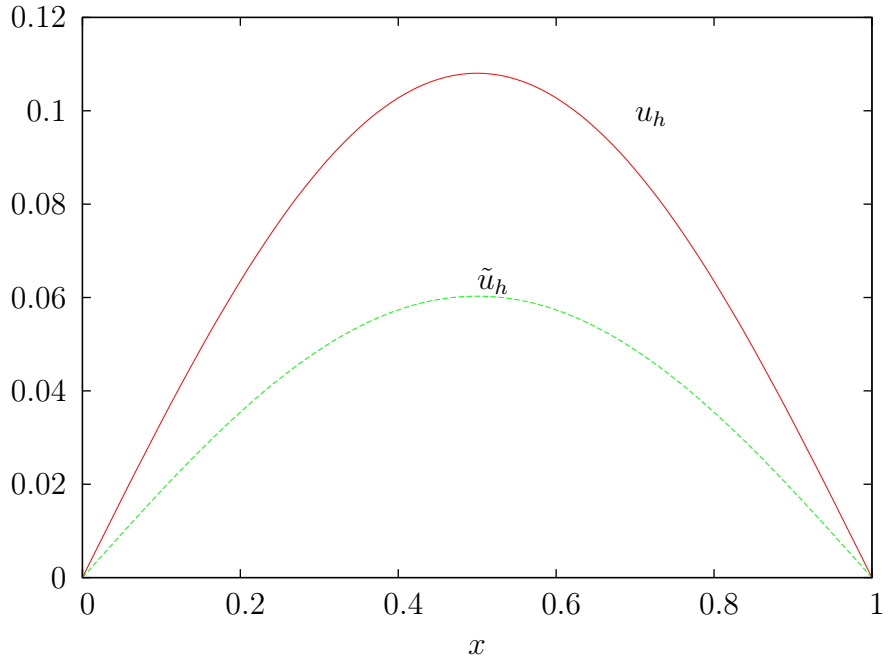

Fig. 18 - Solução Aproximada $\widetilde{u}_h(x;0.2)$ para equação $u_t - e^{(\int_0^1 u\ dx)}u_{xx} + sen(u) = 0$ e Solução Aproximada $u_h(x;0.2)$ para equação $u_t - u_{xx} + sen(u) = 0$.

As figuras Fig. 16, Fig. 17 e Fig. 18 mostram que as simulações feitas com a inclusão de $M(\int_0^L u\ dx) = e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$, apresentam solução aproximada $\widetilde{u}_h$ com amplitude menor em relação a solução u_h, semelhante ao ocorrido com o exemplo 4.

Capítulo 6

Conclusões

Estabeleceu-se nesta dissertação:

(a) A existência e unicidade de solução global fraca para um problema misto associado à uma equação de difusão não linear,

$$u_t - M\left(\int_0^L u(t)\ dx\right) u_{xx} + f(u) = 0;$$

(b) Análise numérica relacionadas com o modelo de difusão do item (a) utilizando o método de elementos finitos e diferenças finitas para a resolução do problema;

(c) Simulações numéricas para o problema $u_t - u_{xx} + f(u) = g$, onde $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = 1$, tomando-se em particular $f(u) = u^3$ e $f(u) = sen(u)$, analisando-se:

- O comportamento do erro da solução numérica aproximada;
- O comportamento da solução aproximada do problema homogêneo ao longo do tempo;
- A influência do termo não linear $f(u)$ no modelo homegêneo.

(d) Simulações numéricas para o problema original $u_t - M\left(\int_0^1 u\ dx\right) u_{xx} + f(u) = g$, tomando-se em particular $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$, $f(u) = u^3$ e $f(u) = sen(u)$, analisando-se:

- O comportamento do erro da solução numérica aproximada;
- O comportamento da solução aproximada do problema homogêneo ao longo do tempo;
- A influência do termo $M\left(\int_0^1 u\ dx\right) = e^{\left(\int_0^1 u\ dx\right)}$ no modelo homogêneo.

Bibliografia

[1] BRÉZIS, H. *Analise Fonctionnelle. Théorie et applications.* DUNOD, Paris (1999).

[2] BURDEN, R. L. & FAIRES, D. J., *Numerical Analysis, PWS Publishing Company (1993).*

[3] CHIPOT, M. & RODRIGUES, J. F., *On a Class of nonlocal nonlinaer Problem, Mathematical Modelling and Numerical Analysys*, 26(3) (1992) 447-448.

[4] CHIPOT, M & Lovat, B., *Existence and Uniquenes Results for a Class of Nonlocal Ellipt and Parabolic Problems*, (2001) 35-51.

[5] FRIEDMAN, A., *Partial differential equation of parabolic type,* Prentice-Hall, New Jersey, (1964).

[6] GOMES, A. C., *Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial para um Sistema de E.D.P. não Linear com Acoplamento na Fonte*, Dissertação de Mestrado, UFPA, Belém (2007).

[7] HUGLES, T. J. R., *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analynis* Prentice Hall (1987).

[8] LIONS, J. L. , *Quelques Méthodes de Résolutions Aux Limites Non Linéaris*, Dunod, Paris, (1969).

[9] LIU, I-SHIH & RINCON, M. A., *Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Análise e Aplicações*, Editora IM/UFRJ (2001)

[10] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos, N° 25 IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1993).

[11] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro (2000).

[12] MENEZES, S.B. *Remarks on Weak Solutions For a Nonlocal Parabolic Problem*, Internacional Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (2005).

[13] PEREIRA, R. V. , *Análise numérica da equação Benjamin - Bona - Mahony*, UFRJ/IM , Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro (2006).

[14] PESIN, Y. B. & Yurchenko, A., *Some Physical Models of The Reaction-Diffusion Equation and Coupled Map Lattices*, Russian Math. Surveys, 59, n.3, 2004.

[15] SILVA, A., *Análise numérica da equação Burges Dissipativa com Fonteira Móvel*, UFRJ/IM , Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro (2006).