PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

Universidade Federal do Rio de Janeiro

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ALINE RIBEIRO DE ALMEIDA

Emparelhamento em Produto Cartesiano de Grafos e sua Aplicação a Redes de Interconexão

Prof. Fábio Protti (D.Sc., UFF)
Orientador

Profa. Lilian Markenzon (D.Sc., UFRJ)
Orientadora

Rio de Janeiro, Outubro de 2010

Instituto de Matemática

NCE UFRJ NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

Ficha Catalográfica

A447 Almeida, Aline Ribeiro de.

Emparelhamento em Produto Cartesiano de Grafos e sua Aplicação a Redes de Interconexão / Aline Ribeiro de Almeida. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM/NCE, 2010.

89 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Informática, 2010.

Orientador: Fábio Protti (D.Sc., UFF); Orientadora: Lilian Markenzon (D.Sc., UFRJ).

1. Produto Cartesiano de Grafos. 2. Emparelhamento perfeito. 3. Emparelhamento quase perfeito. 4. Redes de interconexão. 5. Topologia de rede. 6. Tolerância a falhas. 7. Número desemparelhante. I. Protti, Fábio. II. Markenzon, Lilian. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Núcleo de Computação Eletrônica. IV. Título.

Emparelhamento em Produto Cartesiano de Grafos e sua Aplicação a Redes de Interconexão

Aline Ribeiro de Almeida

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado por:

Prof. Fábio Protti (D.Sc., UFF) - Orientador

Profa. Lilian Markenzon (D.Sc., UFRJ) - Orientadora

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter (Ph.D., UFRJ)

Prof. Paulo Eustáquio Duarte Pinto (D.Sc., UERJ)

Profa. Clicia Valladares Peixoto Friedmann (D.Sc., UERJ)

Rio de Janeiro, Outubro de 2010

Ao leitor.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, guerreira que sempre educou, amou e apoiou os filhos (até mesmo quando eu tinha 12 anos e decidi me dedicar à carreira de jogadora de basquete, tendo genótipo e fenótipo de baixinha); ao meu pai, que certamente sempre esteve presente, em alma; ao meu irmão, que até hoje me chama de maninha – aprendemos juntos a brincar e a crescer; ao meu amor, pela inspiração, incentivo e cumplicidade.

Ao Alexandre Xavier, professor de Algoritmos do 2º Grau Técnico em Informática do colégio Souza Marques. Ele me apresentou um mundo que achei mágico, o que definitivamente influenciou minha decisão por entrar profissionalmente na área da Informática e de cursar Ciência da Computação na Graduação.

Ao Paulo Eustáquio, professor de Estrutura de Dados e seus Algoritmos, dentre outras disciplinas do curso de Bacharel em Informática da Uerj. Além de cursar suas disciplinas, participei de um grupo por ele coordenado que estudava/treinava para a Maratona de Programação (competição acadêmica de algoritmos): durante a graduação, como membro do time; e depois, como técnica das equipes. Foi uma experiência maravilhosa, que não apenas me influenciou na escolha, como também me preparou para cursar o Mestrado em Algoritmos.

Aos professores das disciplinas que cursei ao longo do Mestrado, que tanto contribuem para o amadurecimento acadêmico do aluno. Em ordem de aparecimento: Luziane, Mauro, Lilian, Celina, Murilo, Jayme, Luerbio, Vinícius e Vanessa.

Aos orientadores Fábio Protti e Lilian Markenzon, que tão genialmente me orientaram nesse trabalho. Nossas reuniões foram sempre leves, sinceras, humanas, divertidas, inspiradoras e produtivas de forma natural; e seguidas, ou precedidas, de um cafezinho na copa do NCE.

Da Petrobras, aos meus gerentes Paulo, Mazin e Martha – por acreditarem que eu conseguiria conciliar as atividades profissionais com as do Mestrado – e ao gerente da área de Pesquisa Operacional Iachan e sua equipe – que docemente me apresentaram possíveis problemas a serem estudados quando eu estava a definir o tema da dissertação.

À Raquel da Biblioteca do NCE/UFRJ, que conseguiu os mais raros artigos que precisei, por vezes fazendo contato diretamente com o autor.

Ao professor Paulo Antônio Outeiro Hernandes, que atende a dúvidas da Língua Portuguesa em sua página na Internet (www.paulohernandes.pro.br). Ele confirmou que o termo *conjunto desemparelhante* – nossa proposta de tradução para o termo *matching-preclusion set*, que seria inevitavelmente um neologismo –, era bem construído.

Ao mestre de Aikido Nelson Sensei, por continuamente ensinar a ter potência na vontade, a fortalecer o centro e a desenvolver postura físico-espiritual de prontidão.

Ao Cláudio Olliveira (Batman), grande companheiro de escalada e atuante natural do campo das Belas Artes, responsável pela materialização de um recurso didático a ser utilizado durante a defesa dessa dissertação.

E a todos que influenciaram e/ou influenciam minha vida, que fazem parte dela.

RESUMO

O produto cartesiano de grafos é uma operação da Teoria dos Grafos. Nesse trabalho, foram desenvolvidas propriedades relacionadas à existência de emparelhamentos perfeito e quase-perfeito no grafo gerado por esta operação, em função de seus fatores. Com esses resultados, foram desenvolvidas propriedades sobre o número desemparelhante do grafo gerado pelo produto em função de seus fatores. O número desemparelhante de um grafo G, denotado por $mp(G)$, é o número mínimo de arestas que precisam ser removidas de G tal que o grafo resultante não admita emparelhamento perfeito nem quase-perfeito; em redes de interconexão, é considerado um critério topológico relacionado à tolerância a falhas de aresta — por exemplo, para um sistema multiprocessador em que seja essencial cada processador possuir a qualquer instante um parceiro especial. Com os resultados teóricos obtidos, foi possível calcular o número desemparelhante de topologias de rede de interconexão que são produto cartesiano de grafos, a saber: hiper-*Petersen*, *Petersen* n-dobrado, cubo-*Petersen* dobrado, hiper-estrela, estrela-cubo e hipercubo (este último, já anteriormente sabido). Foi mostrado também que se duas topologias de tamanho par forem ótimas em relação ao número desemparelhante, a topologia criada pelo produto delas também será.

Palavras-chave: Produto Cartesiano de Grafos, Emparelhamento Perfeito, Emparelhamento Quase-Perfeito, Redes de Interconexão, Topologia de Rede, Tolerância a Falhas, Número Desemparelhante.

Matching in Cartesian Product of Graphs and its Application to Interconnection Networks

ABSTRACT

The cartesian product of graphs is one of the operators in Graph Theory. In this work, we have developed several properties related to the existence of perfect and almost-perfect matchings in the product graph, by analyzing its factors. Properties of the matching preclusion number of the product graph were also studied. The matching preclusion number of a graph G, denoted by $mp(G)$, is the minimum number of edges that must be removed from $E(G)$ such that the resulting graph admits no perfect/almost-perfect matching. It is a topological criterion in interconnection networks, related to edge fault-tolerance; for instance, in some multiprocessor systems, where it is crucial that each processor has a special partner at any given time. The theoretical results obtained in this work lead to the determination of the matching preclusion number of several topologies based on the cartesian product: Hyper Petersen, Folded Petersen, Folded Petersen cube, Hyperstar, Star-cube and Hypercube (for this latter topology, it was already known). We have also shown that if two topologies with even number of vertices each are optimal with respect to the matching preclusion number then their cartesian product also has this property.

Keywords: Cartesian Product of Graphs, Perfect Matching, Almost-Perfect Matching, Interconnection Networks, Network Topology, Fault Tolerance, Matching Preclusion Number.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Desenho dos grafos G e R. Exemplo de representação gráfica. . . 20
Figura 2.2: Desenho de quatro grafos isomorfos entre si e vértice-transitivos. . 21
Figura 2.3: Desenho dos grafos K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5. 23
Figura 2.4: Desenho dos grafos: $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{1,3} \cong S_4$ e $K_{1,6} \cong S_7$. . . . 24
Figura 2.5: Desenho dos grafos: P_5, C_3, C_4, C_5, e C_6. 24
Figura 2.6: Desenho dos grafos borboleta e hipercubo (Q_1, Q_2 e Q_3). 25
Figura 2.7: Desenho dos produtos (a) $K_2 \square K_2 = C_4 \cong Q_2$, (b) $P_4 \square P_5 =$ grade (4 x 5), (c) $Q_2 \square K_2 = K_2 \square K_2 \square K_2 = (K_2)^3 = Q_3$, (d) $C_5 \square K_2 =$ 5-prisma, (e) $C_5 \square C_3 =$ torus 27
Figura 2.8: Desenho do grafo torre (8×8). Possíveis movimentações da torre em um tabuleiro de xadrez com dimensão 8×8 ($K_8 \square K_8$). 28
Figura 2.9: Exemplo de: (a) um emparelhamento máximo (e não perfeito); (b) um emparelhamento perfeito; (c) um emparelhamento quase-perfeito 31
Figura 2.10: Exemplo de conjunto desemparelhante para: (a) C_4; (b) K_3 . . . 32

Figura 3.1: Formas extremas de conectar 5 vértices: grafos P_5 e K_5 36
Figura 3.2: Topologia torus $T(4,2)$ 54
Figura 3.3: Topologia árvore binária completa $T(15)$ 54
Figura 3.4: Topologia borboleta $BF(3)$ 54
Figura 3.5: Topologia *shuffle-exchange* $SE(3)$ e $SE(4)$ 55
Figura 3.6: Topologia ciclos cubo-conectados $CCC(3)$ 55
Figura 3.7: Topologia *deBruijn* $DB(2,2)$ e $DB(2,3)$ 55
Figura 3.8: Topologia estrela S_2, S_3 e S_4 (duas representações) 56
Figura 3.9: Topologia hiper-*Petersen* $HP_5 = Q_2 \square P$ 57
Figura 3.10: Topologia *Petersen* dobrado $FP_2 = P \square P$ 57
Figura 3.11: Topologia hiper-*deBruijn* $HD(2,2) = H_2 \square DB(2)$ 58
Figura 3.12: Topologia árvores malha-conectadas $MCT_2(7) = T(7) \square T(7)$ . . 58
Figura 3.13: Topologia estrela-cubo $SQ_{3,3} = S_3 \square Q_3$ 59

Figura 4.1: Desenho de $K_3 \square C_4$ 62
Figura 4.2: Desenho de $H \square K_2$ (Grafo Casa $\square$ Aresta) 62
Figura 4.3: Emparelhamento perfeito em $G_1 \square G_2$, dados que G_1 ou G_2 são emparelháveis. 69
Figura 4.4: Duas formas de formar um emparelhamento quase-perfeito em $G_1 \square G_2$, dados que G_1 e G_2 são quase-emparelháveis ($G_1 \cong C_3$ e $G_2 \cong P_3$). 70

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Os quatro mais usuais tipos de *Produto de Grafos* 26

Tabela 3.1: Parâmetros de algumas redes de interconexão 46

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14

2 CONCEITOS DA TEORIA DOS GRAFOS 18
2.1 Introdução 18
2.1.1 Definições e Desenhos de Grafos 19
2.1.2 Alguns Grafos e Famílias de Grafos 23
2.2 Produto Cartesiano de Grafos 25
2.2.1 Da Beleza 27
2.2.2 Da Utilidade 29
2.3 Emparelhamento em Grafos 30
2.3.1 Emparelhamentos Perfeito e Quase-Perfeito 30
2.3.2 Conjunto Desemparelhante e Número Desemparelhante 31

3 CONCEITOS DE REDES DE INTERCONEXÃO 34
3.1 Topologia de Rede 35
3.1.1 Critérios Topológicos 37
3.1.2 Exemplos de Topologia 42
3.1.3 A Escolha da Topologia 45
3.2 Redes de Produto (Cartesiano) 47
3.2.1 Topologias Sintetizadas pelo Produto Cartesiano 48
3.2.2 Estudo da Classe Geral 51
3.3 Número Desemparelhante como Critério Topológico 52

4 RESULTADOS 60
4.1 Preliminares 60
4.1.1 Uma Interpretação Visual do Produto Cartesiano de Grafos 61
4.1.2 Algumas Propriedades Conhecidas do Produto Cartesiano de Grafos . 63
4.2 Resultados propriamente ditos 68

4.2.1 Emparelhamento Perfeito ou Quase-Perfeito no Produto Cartesiano de Grafos 68
4.2.2 Número Desemparelhante do Produto Cartesiano de Grafos 71

5 CONCLUSÃO 80

REFERÊNCIAS 83

1 INTRODUÇÃO

Existe interconexão em diferentes níveis em um sistema de computação: entre núcleos em um chip, entre chips em uma placa, entre placas em uma máquina, e entre computadores espalhados em uma sala, ou em um edifício, ou mesmo pelo planeta. Com o advento de novos paradigmas de processadores multinúcleo, avanços em sistemas de multiprocessamento, e a Internet, vieram desafios e oportunidades para inovação na arquitetura de interconexão.

A topologia de uma rede de interconexão, geralmente representada por um grafo, tem papel fundamental no desempenho geral de um sistema. Existem diversos critérios topológicos utilizados na avaliação das diferentes topologias, todos relacionados a um ou mais destes itens: custo, desempenho, restrições físicas, requisitos da rede. O problema de encontrar uma topologia "melhor", tanto para casos gerais como para casos específicos, não é tido como resolvido, face ao número de novas topologias que têm sido propostas recentemente.

A Teoria dos Grafos é um sólido subsídio para estudo dessas topologias e tem sido utilizada também como ferramenta para geração de novas — uma espécie de criação de topologias em laboratório algébrico. Uma das estratégias é a utilização do

produto cartesiano de grafos, considerado um adequado sintetizador de topologias devido a características interessantes desta operação que fazem manter no grafo gerado certas propriedades dos grafos fatores. Exemplos de topologias sintetizadas pelo produto incluem: hiper-*Petersen* (DAS; BANERJEE, 1992), *shuffle*-produto (ROSENBERG, 1992), hiper-*deBruijn* (GANESAN; PRADHAN, 1993), árvores malha-conectadas (EFE; FERNANDEZ, 1994), *Petersen* dobrado (ÖHRING; DAS, 1994), cubo-*Petersen* dobrado (ÖHRING; DAS, 1996), hiper-estrela (AL-AYYOUB; DAY, 1998) e estrela-cubo (DATTA; BISWAS, 2004). Topologias clássicas como torus, malha e hipercubo também são produto cartesiano de grafos.

O estudo de propriedades do produto permite analisar de forma mais geral as topologias originadas por esta operação. Tal fato motivou estudos (YOUSSEF, 1995; DAY; AL-AYYOUB, 1997) sobre algumas das propriedades do produto em função de seus fatores, entre elas: conectividade, grau, diâmetro, escalabilidade, simetria de vértices, otimalidade de esquemas de comunicação, imersão, existência de caminhos paralelos e estrutura recursiva. Propriedades estudadas em outros trabalhos incluem: conectividade (CHIUE; SHIEH, 1999; XU; YANG, 2006; KLAVŽAR; ŠPACAPAN, 2008; ŠPACAPAN, 2008; LU; XU, 2009), difusão (*broadcasting*) (ÖHRING; IBEL; DAS, 1995; BAO; IGARASHI; ÖHRING, 1998), tenacidade (CHOUDUM; PRIYA, 1999), variação do diâmetro (degradação de desempenho) no evento de falha (XU; XU; HOU, 2005; BANIČ; ŽEROVNIK, 2008), alocação de recursos (IMANI; SARBAZI-AZAD; ZOMAYA, 2009) e existência de caminhos/ciclos hamiltonianos (ZARETSKII, 1966; BATAGELJ; PISANSKI, 1982; DIMAKOPOULOS; PALIOS; POULAKIDAS, 2005; ČADA; FLANDRIN; LI, 2009).

O problema de emparelhamento é clássico na Teoria dos Grafos. Várias situações podem ser modeladas como problemas de emparelhamento em grafos. Para redes em que é essencial cada processador possuir a qualquer instante um parceiro especial, é desejável que sua topologia — o grafo que a modela — admita emparelhamento

perfeito ou quase-perfeito. Em 2005 foi introduzido (BRIGHAM et al.) o conceito de *número desemparelhante* de um grafo G, denotado por $mp(G)$, que é o número mínimo de arestas quaisquer que, se removidas de G, o deixam sem emparelhamento perfeito nem quase-perfeito. Na ocasião, seu valor foi determinado para alguns grafos, a saber: K_n, $K_{m,n}$, hipercubos e grafo de *Petersen*. Em redes com necessidades de emparelhamento perfeito, o número desemparelhante é uma medida da robustez da rede no caso de falha de arestas. Tal fato estimulou estudos posteriores acerca do número desemparelhante de outras classes de grafos, em especial as utilizadas como topologia de rede de interconexão: grafos (n,k)-estrela e grafos de Cayley (CHENG; LIPTÁK, 2007); grafos (n,k)-arranjo e grafos de Cayley (CHENG et al., 2008); grafos tipo-hipercubo e grafos recursivo-circulantes (PARK, 2008); hipercubos k-ários (WANG et al., 2010).

O objetivo deste trabalho é dar continuidade ao estudo de propriedades da operação do produto cartesiano de grafos e também ao estudo do número desemparelhante de topologias de rede de interconexão, de forma combinada: estudar a existência de emparelhamento perfeito/quase-perfeito no produto cartesiano de grafos e desenvolver propriedades para o número desemparelhante de grafos gerados pelo produto (em função dos seus fatores), possibilitando estudo do número desemparelhante das topologias sintetizadas por essa operação (as existentes e as que assim forem sintetizadas no futuro).

Os resultados obtidos com este trabalho de continuidade estão concentrados no Capítulo 4, cujo início se dá na página 60. Os capítulos anteriores apresentam conceitos considerados como pré-requisito para acompanhamento dos resultados. O Capítulo 2 apresenta conceitos da Teoria dos Grafos, incluindo definições básicas e introdução de tópicos pertinentes ao trabalho, tais como produto cartesiano de grafos, emparelhamento em grafos e conceitos de conjunto desemparelhante e número desemparelhante. O Capítulo 3 apresenta conceitos de Redes de Interconexão,

abordando a relevância da topologia para o desempenho da rede e os respectivos desdobramentos: os critérios topológicos para avaliar topologias, exemplos de topologia, o desafio de escolher ou criar topologias, o produto cartesiano como sintetizador de topologias, e o número desemparelhante visto como critério topológico. O Capítulo 5 arremata o trabalho apresentando conclusões, considerações finais e indicações de trabalhos futuros.

2 CONCEITOS DA TEORIA DOS GRAFOS

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos da Teoria dos Grafos utilizados ao longo do trabalho. A notação e a terminologia adotadas, quando não explicitamente indicado, são tais como as utilizadas em (BONDY; MURTY, 2008).

2.1 Introdução

A abstração é essencial para se tratar matematica e computacionalmente um problema. *Grafo* é uma estrutura matemática utilizada para modelar situações onde há elementos e possíveis ligações entre pares desses elementos. Os elementos são chamados de *vértices*; e as ligações, de *arestas*. Por exemplo, tais elementos poderiam representar cidades, com as ligações significando as vizinhanças entre as cidades; ou pessoas, onde as ligações poderiam representar conexões de amizade.

Há diversas situações da vida real que podem ser abstraídas com esta modelagem. A partir daí, os resultados científicos obtidos pelo estudo dos grafos e seus algoritmos podem ser aplicados ao problema modelado: um dispositivo que informa a melhor rota quando fornecidos um mapa, uma origem e um destino, utiliza um dos algo-

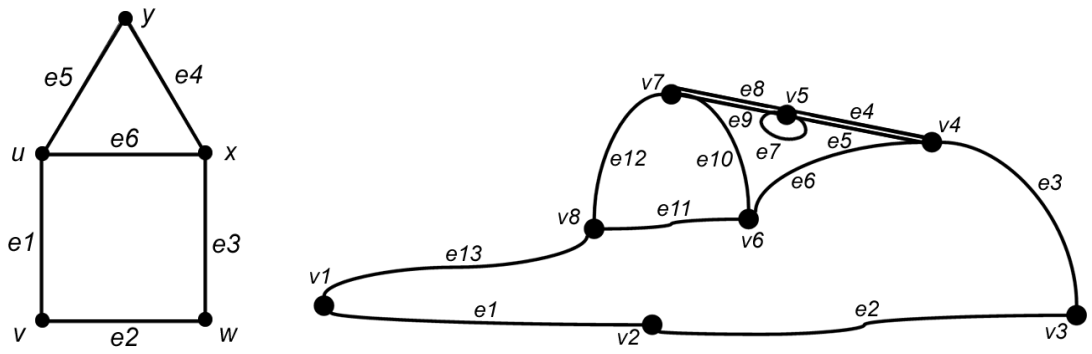
ritmos de *menor caminho* da literatura (o mapa é modelado tal como um grafo, e a origem e o destino são vértices deste grafo); uma empresa que precisa conectar suas dispersas redes de telecomunicação, de forma a minimizar o custo das ligações entre cada rede, poderá utilizar um algoritmo — também da literatura — que encontra a *árvore geradora mínima* de um grafo; o computador utilizado para escrever este trabalho, por ter conexão com a Internet, é um vértice do gigante grafo que representa a rede mundial de computadores conectados, para o qual diversos conceitos e algoritmos de grafos são utilizados a fim de implementar cada interação realizada entre os computadores na Internet, sempre atentando para a eficiência.

2.1.1 Definições e Desenhos de Grafos

Em termos formais, um grafo G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto não vazio de *vértices* e $E(G)$ um conjunto de pares não-ordenados de elementos (não necessariamente distintos) de $V(G)$, chamados *arestas*. Se $e = u, v$ é uma aresta, então se diz que e *liga* u e v, e que os vértices u e v, chamados *adjacentes* ou *vizinhos*, são as *extremidades* de e. Os números de vértices e arestas em G são comumente denotados por n e m que são, respectivamente, a *ordem* e o *tamanho* de G.

Além da representação por meio da definição de seus conjuntos e função de incidência, um grafo pode ser representado *graficamente* — a propósito, é daí que vem a origem do termo *grafo*. Uma maneira comum de desenhá-lo é representar os vértices por pontos e as arestas por linhas; assim, cada linha liga dois vértices se, e somente se, eles forem adjacentes. A forma como esses pontos e linhas são desenhados é irrelevante, bem como suas posições relativas. O que conta é a informação representada pelas ligações entre os vértices. Seguem dois exemplos. Para simplicidade de notação, representamos por uv o par não-ordenado $\{u, v\}$.

Seja o grafo $G(V(G), E(G))$, onde $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ e $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, com $e_1 = uv$, $e_2 = vw$, $e_3 = wx$, $e_4 = xy$, $e_5 = yu$ e $e_6 = ux$. Sua representação poderia ser feita como na Figura 2.1(a). E seja o grafo $R(V(R), E(R))$, onde $V(R) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ e $E(R) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$, com $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_4v_5$, $e_5 = v_4v_5$, $e_6 = v_4v_6$, $e_6 = v_5v_5$, $e_7 = v_5v_7$, $e_8 = v_5v_7$, $e_9 = v_6v_7$, $e_{10} = v_6v_8$, $e_{11} = v_7v_8$ e $e_{12} = v_1v_8$. Sua representação poderia ser feita tão livre e artisticamente quanto como na Figura 2.1(b).



(a) G (b) R

Figura 2.1: Desenho dos grafos G e R. Exemplo de representação gráfica.

Uma aresta com extremidades iguais é um *laço*. Duas ou mais arestas com o mesmo par de extremidades são ditas *arestas paralelas*. Um grafo é *simples* quando não possui laços nem arestas paralelas. Na Figura 2.1, o grafo G é simples e o grafo R não é simples pois possui laço (e_7) e arestas paralelas (e_4 e e_5; e_8 e e_9). Há grafos em que as arestas têm direção, ou seja, a existência de uma aresta ligando o vértice u ao vértice v não implica a existência de ligação de v a u; os chamamos de *grafos direcionados*, ou *digrafos*. Neste trabalho, os grafos referenciados são simples e *não-direcionados*, com exceção do grafo representado na Figura 2.1(b).

Dois grafos G e H são *isomorfos* — o que é representado por $G \cong H$ — se existem bijeções θ: $V(G) \to V(H)$ e ϕ: $E(G) \to E(H)$ tais que existe $e = uv$ em G se, e somente se, existe $\phi(e) = \theta(u)\theta(v)$ em H; tal par de mapeamentos é chamado

de *isomorfismo* entre G e H. Mais intuitivamente: grafos isomorfos são os que podem ser desenhados da mesma forma, ignorando possíveis diferenças dos rótulos de vértices e arestas. O *automorfismo* de um grafo é um isomorfismo entre o grafo e ele mesmo. Se o grafo for simples, então o automorfismo é uma permutação α de seu conjunto de vértices que preserva as adjacências: se uv é uma aresta, então $\alpha(u)\alpha(v)$ também é. O automorfismo reflete a simetria de um grafo: se existe um automorfismo que mapeia u a v, significa que u e v são vértices *similares*. Se todos os vértices do grafo forem similares entre si, trata-se de um grafo *vértice-transitivo* ou *vértice-simétrico*. A Figura 2.2 mostra quatro grafos isomorfos entre si. Nota-se também que os quatro grafos são vértice-transitivos (por serem grafos isomorfos, bastaria notar que um deles é vértice-transitivo).

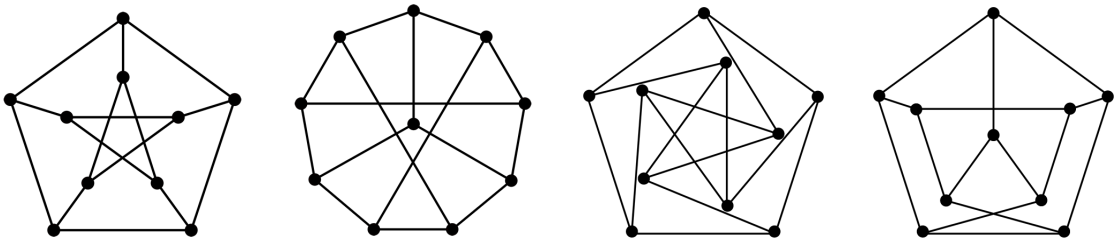


Figura 2.2: Desenho de quatro grafos isomorfos entre si e vértice-transitivos.

Um *passeio* em G é uma seqüência finita não-vazia $W = v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, observando que, para $1 \leq i \leq k$, as extremidades de e_i são v_{i-1} e v_i. Os vértices v_0 e v_k são, respectivamente, a *origem* e o *destino* de W; e os demais são os *vértices internos* de W. Se as arestas de um passeio W forem distintas, então W é uma *trilha*. Se, além disso, W não possuir vértices repetidos, W é dito um *caminho*. Os termos *passeio*, *trilha* e *caminho*, que a princípio tendem a serem confundidos e cuja diferenciação é importante que seja observada, apresentam características que fazem sentido se trazidas para uma analogia com a vida real: (1) em um *passeio* por Londres, é bastante razoável percorrer a *Tower Bridge* mais de uma vez (passeio permite repetição de arestas);

(2) em uma *trilha* na Floresta da Tijuca, com destino ao Pico da Tijuca, repetir um trajeto significa que o guia da excursão provavelmente está perdido — é possível, porém, que o grupo passe por um mesmo ponto mais de uma vez, caso fizesse parte do plano desviar para visitar um mirante e voltar ao mesmo ponto, e continuar seguindo com destino ao pico — (trilha permite repetição de vértices, mas não de arestas); (3) no famoso *caminho* francês que leva a Santiago de Compostela, o peregrino sairá de Saint-Jean-Pied-de-Port com destino à catedral para ver o manto de Sant'Iago sem querer "desviar do caminho", da forma mais direta possível (caminho não permite repetição de vértices — e nem de arestas, conseqüentemente). O *tamanho* de W, também bastante intuitivo, é o número de arestas percorridas, k no exemplo. Diz-se que W é $fechado$ se possuir origem igual ao destino e se possuir tamanho maior que zero. Uma trilha fechada em que a origem e os vértices internos não se repetem é um *ciclo*. Um caminho que percorra todos os vértices de um grafo é dito *caminho hamiltoniano*; analogamente, um ciclo contendo todos os vértices do grafo é um *ciclo hamiltoniano*. Um grafo é *hamiltoniano* se admite ciclo hamiltoniano.

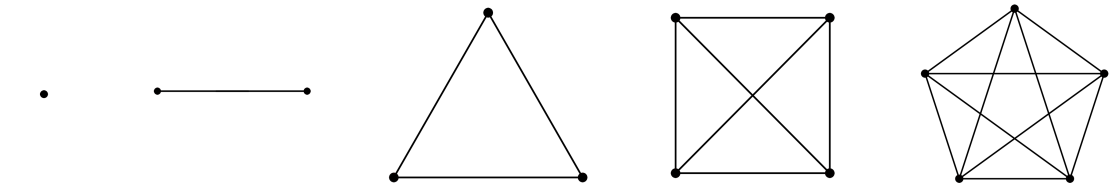
O *grau* de um vértice v em um grafo G, denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas de G incidentes a v. Um vértice de grau zero é chamado *vértice isolado*. Denota-se por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimo e máximo dos vértices de G, e por $d(G)$ o *grau médio* — que é dado pela fórmula $\frac{1}{n}\sum_{v\in V} d_G(v)$. A *distância* entre os vértices x e y, denotada por $d_G(x, y)$, é o tamanho do menor caminho de x a y. O *diâmetro* de um grafo G é a maior distância entre todos os pares de vértices de G, e é denotado por $D(G)$. O grafo da Figura 2.2.a, chamemos de P, é assim caracterizado: $\delta(P) = 3$, $\Delta(P) = 3$, $d(P) = 3$ e $D(P) = 2$.

Um grafo F é dito *subgrafo* de G se $V(F) \subseteq V(G)$ e $E(F) \subseteq E(G)$. Qualquer subgrafo F de G pode ser obtido por repetidas operações de remoção de vértice ou aresta: o grafo $G - v$ é um subgrafo de G onde o vértice v é removido com todas as arestas incidentes a v; o grafo $G \setminus e$ é um subgrafo de G onde a aresta e é removida.

A *conectividade* de um grafo G não completo é o número mínimo de vértices que se removidos de G o tornam desconexo, e é denotada por $\kappa(G)$. Para grafos completos, tem-se por definição que $\kappa(K_n) = n - 1$. A *aresta-conectividade* de um grafo conexo G, denotada por $\kappa'(G)$, é o número mínimo de arestas cuja remoção de G resulta em um grafo desconexo.

2.1.2 Alguns Grafos e Famílias de Grafos

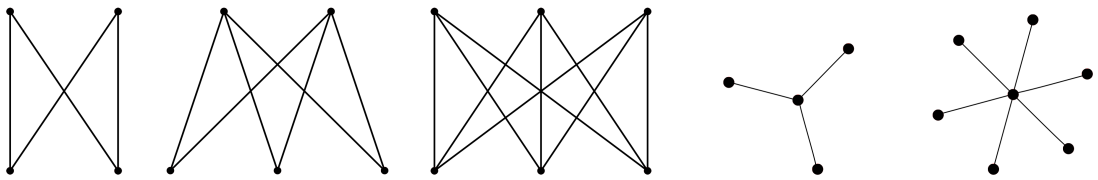
Alguns grafos e famílias de grafos são particularmente caracterizados e recebem um nome próprio. O grafo apresentado na seção anterior, Figura 2.1(a) página 20, é conhecido pelo nome de *grafo casa*. Já o da Figura 2.1(b), chamemos de *grafo pão-de-açúcar*, não é um grafo conhecido. Ficam famosos os que desempenham papel relevante na Teoria dos Grafos. Esta seção apresenta alguns.



(a) K_1 (b) K_2 (c) K_3 (d) K_4 (e) K_5

Figura 2.3: Desenho dos grafos K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5.

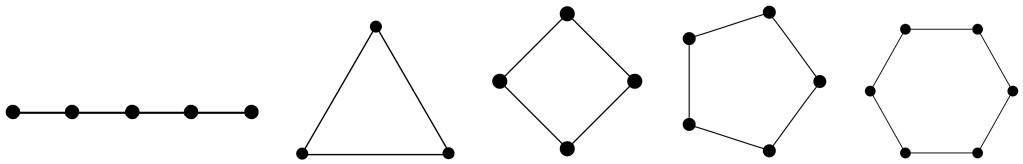
Um *grafo completo* com n vértices, denotado por K_n, é um grafo simples em que cada vértice é adjacente a todos os demais vértices. Sua representação pode ser vista na Figura 2.3. Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ puder ser particionado em dois subconjuntos, X e Y, tal que toda aresta de G tem uma de suas extremidades em X e a outra em Y. Tal partição (X, Y) é chamada de *bipartição* do grafo e é representada por $G[X, Y]$. Um *grafo completo bipartido*, denotado por $K_{m,n}$, é um grafo simples com partição (X, Y), onde $|X| = m$ e $|Y| = n$, em que cada vértice de X é ligado a cada vértice de Y. Sua representação pode ser vista na Figura 2.4.



(a) $K_{2,2}$ (b) $K_{2,3}$ (c) $K_{3,3}$ (d) $K_{1,3} \cong S_4$ (e) $K_{1,6} \cong S_7$

Figura 2.4: Desenho dos grafos: $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{1,3} \cong S_4$ e $K_{1,6} \cong S_7$.

A palavra "caminho" é utilizada para referenciar um grafo ou um subgrafo cujos vértices e arestas são termos de um caminho tal como descrito na Seção 2.1.1. O mesmo é válido para a palavra "ciclo". Ambos designam famílias bastante conhecidas, e que estão desenhadas na Figura 2.5: P_n é um caminho com n vértices e C_n um ciclo com n vértices.



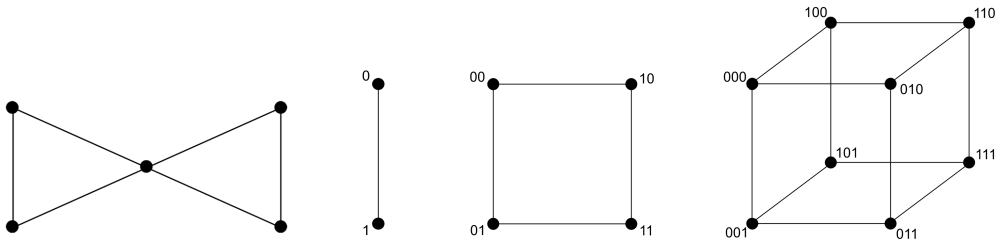
(a) P_5 (b) C_3 (c) C_4 (d) C_5 (e) C_6

Figura 2.5: Desenho dos grafos: P_5, C_3, C_4, C_5, e C_6.

Um grafo G é *conexo* se existe caminho de x a y para todo $x, y \in V(G)$, e *desconexo* caso contrário. Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclo. O grafo *estrela* com n vértices, denotado S_n, é uma árvore em que todos os vértices, exceto um (chamado central), estão ligados a um único vértice central; pode ser visto também como um grafo completo bipartido em que uma das partições tem cardinalidade 1, ou seja: $S_n \cong K_{1,n-1}$, como indicado nas figuras 2.4(d) e 2.4(e).

O grafo da Figura 2.2 – apresentado na Seção 2.1.1 página 21 – é bastante conhecido e tem nome: grafo de *Petersen*. Foi utilizado por Julius Petersen (daí o nome) para refutar uma conjectura que até então era aceitável. "De fato, [o grafo de *Petersen*]

é uma notável configuração que serve como contra-exemplo para muitas previsões otimistas sobre o que pode ser verdadeiro para grafos em geral" (KNUTH, 2008, tradução nossa)[1].



(a) *Borboleta* (b) Q_1 (c) Q_2 (d) Q_3

Figura 2.6: Desenho dos grafos borboleta e hipercubo (Q_1, Q_2 e Q_3).

A Figura 2.6(a) mostra o grafo *borboleta* (ou *gravata*). O grafo *hipercubo* de dimensão n, ou n-cubo, representado por Q_n, tem como conjunto de vértices todas as seqüências binárias de tamanho n, estando dois vértices ligados se diferem em exatamente um dígito. As figuras de 2.6(b) a 2.6(d) são desenhos de hipercubo.

2.2 Produto Cartesiano de Grafos

O produto de dois grafos simples G e H — estes chamados fatores — é um novo grafo T, onde $V(T) = V(G) \times V(H)$ e cujas adjacências entre os vértices de T podem ser definidas por diferentes regras. Cada regra determina e identifica um tipo de produto. As regras estão associadas às relações que os vértices de cada grafo fator possuem entre si.

A Tabela 2.1 mostra a regra para adjacência dos quatro tipos de produto mais usuais, sendo o *produto cartesiano* o de interesse deste trabalho. A tabela apresenta

[1] "[I]t is, in fact, a remarkable configuration that serves as a counterexample to many optimistic predictions about what might be true for graphs in general." (KNUTH, 2008)

mais de um nome — e por vezes mais de uma representação — para um mesmo tipo de produto. Trata-se dos nomes e representações mais comumente utilizados. Não existe consenso na literatura quanto à terminologia e à notação.

Tabela 2.1: Os quatro mais usuais tipos de *Produto de Grafos*

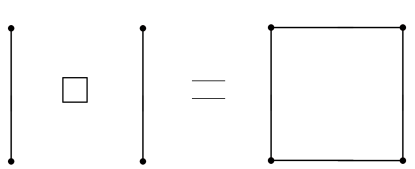
Nome(s)	**Representação(ões)**	**Regra para Adjacência***
Produto Cartesiano Produto Cruzado	$G \square H$ $G \times H$ $G \otimes H$	[$(g_1 = g_2$ e $h_1h_2 \in E(H))$ ou $(h_1 = h_2$ e $g_1g_2 \in E(G))$]
Produto Categórico Produto Direto Produto Fraco Produto Tensorial	$G \times H$	[$g_1g_2 \in E(G)$ e $h_1h_2 \in E(H)$]
Produto Lexicográfico Composição	$G \bullet H$ $G[H]$	[$(g_1g_2 \in E(G))$ ou $(g_1 = g_2$ e $h_1h_2 \in E(H))$]
Produto Forte Produto Normal	$G \boxtimes H$	Produto Cartesiano unido ao Produto Categórico

* Adjacência entre (g_1, h_1) e (g_2, h_2), vértices em $V(G) \times V(H)$

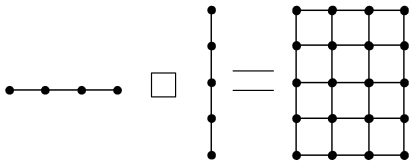
Neste trabalho, tal como adotado em (BONDY; MURTY, 2008), o *produto cartesiano* de G e H é representado por $G \square H$ — o que permite representação sem ambigüidade — e tem como conjunto de arestas o conjunto de todos os pares $(g_1, h_1)(g_2, h_2)$ tais que: ou $g_1g_2 \in E(G)$ e $h_1 = h_2$, ou $h_1h_2 \in E(H)$ e $g_1 = g_2$. Equivalentemente, tem como conjunto de arestas $E(G \square H) = (V(G) \times E(H)) \cup (E(G) \times V(H))$. Cabe ressaltar que este produto, em outras referências, é denominado *Produto Cruzado* ou representado por $G \otimes H$ / $G \times H$. A seção seguinte exibe exemplos de produto cartesiano de grafos e a Seção 4.1.1 (página 61) apresenta uma forma de interpretar visualmente a operação.

2.2.1 Da Beleza

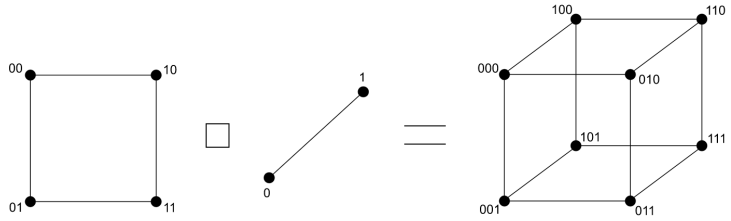
Esta seção apresenta alguns grafos conhecidos que podem ser definidos como o produto cartesiano de grafos.



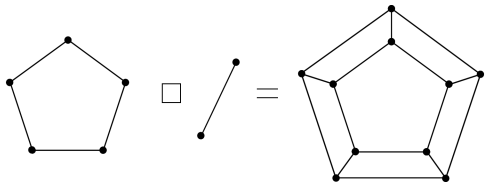
(a) $K_2 \square K_2 = C_4 \cong Q_2$



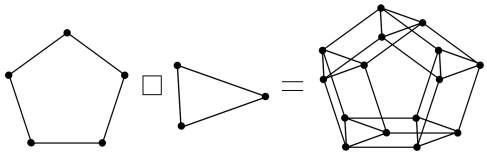
(b) $P_4 \square P_5 = grade(4 \text{ x } 5)$



(c) $Q_2 \square K_2 = K_2 \square K_2 \square K_2 = (K_2)^3 = Q_3$



(d) $C_5 \square K_2 =$ 5-prisma



(e) $C_5 \square C_3 =$ torus

Figura 2.7: Desenho dos produtos (a) $K_2 \square K_2 = C_4 \cong Q_2$, (b) $P_4 \square P_5 =$ grade (4 x 5), (c) $Q_2 \square K_2 = K_2 \square K_2 \square K_2 = (K_2)^3 = Q_3$, (d) $C_5 \square K_2 =$ 5-prisma, (e) $C_5 \square C_3 =$ torus

O produto cartesiano de duas arestas, mostrado na Figura 2.7(a), é um ciclo com quatro vértices (C_4) ou, equivalentemente, um hipercubo de dimensão dois (Q_2). O hipercubo pode ser visto como o sucessivo produto cartesiano de arestas; mais precisamente $Q_n = (K_2)^n$, como ilustrado na Figura 2.7(c). O produto de dois caminhos P_m e P_n é o grafo $grade(m \times n)$; a Figura 2.7(b) mostra o grafo $P_4 \square P_5$.

O produto de um ciclo C_n e uma aresta K_2 é um n-prisma (Figura 2.7(d)); e de um ciclo com outro ciclo é um *torus* (Figura 2.7(e)).

O grafo *torre* $(m \times n)$ representa todas as possíveis movimentações da torre em um tabuleiro de xadrez com dimensão $(m \times n)$. Cada vértice representa uma casa do tabuleiro, e cada aresta representa a possibilidade de um movimento da torre. Os rótulos dos vértices podem ser expressos da forma (r_i, c_j), onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, representando a casa situada na linha **r**eta i e na **c**oluna j do tabuleiro. Visto que a torre pode "andar" na vertical ou na horizontal, sem limitação quanto ao número de casas, o conjunto de arestas deste grafo é formado por todos os pares (r_i, c_j) $(r_{i'}, c_{j'})$, tais que: $(r_i = r_{i'}$ e $c_j \neq c_{j'})$ ou $(r_i \neq r_{i'}$ e $c_j = c_{j'})$.

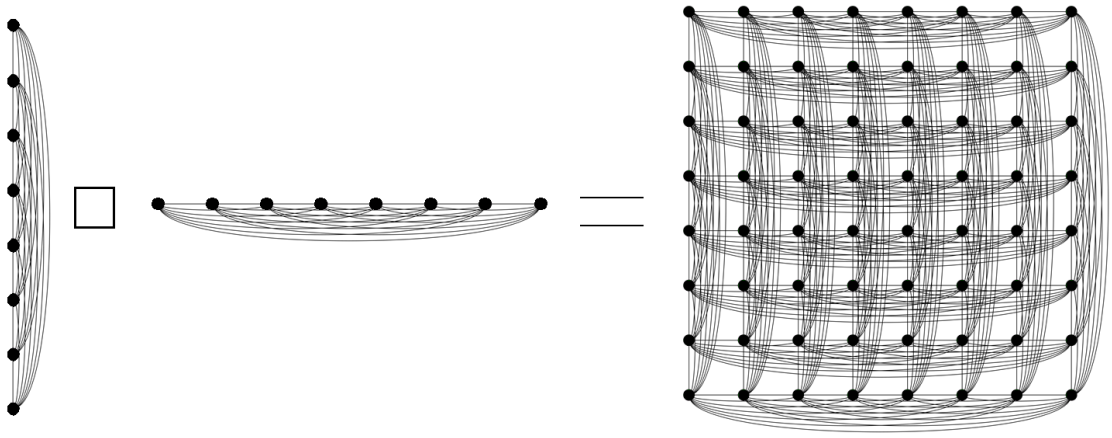


Figura 2.8: Desenho do grafo torre (8×8). Possíveis movimentações da torre em um tabuleiro de xadrez com dimensão 8×8 $(K_8 \,\square\, K_8)$.

Outra forma de definir o grafo torre $(m \times n)$ é considerá-lo como o produto cartesiano de dois grafos completos: $K_m \square K_n$. Ao leitor mais curioso, segue um breve desvelar. É interessante notar que a regra para adjacência do grafo torre seria semelhante à do produto cartesiano de grafos, se na seguinte circunstância: as condições do tipo $r_i \neq r_{i'}$ pudessem ser substituídas por $r_i r_{i'} \in X$, onde X é um conjunto de arestas. Ora, façamos isso. É necessário um grafo — chamemos de R — cujos vértices são os

elementos r_i, onde $i \leq m$, e cujo conjunto de arestas $E(R)$ contenha as relações que representam a condição $r_i r_{i'}$ se $r_i \neq r_{i'}$. Assim, cada vértice r_i deverá estar ligado a todos os demais vértices de R. Esta é justamente a definição de grafo completo, isto é, o grafo recém-criado R é isomorfo a K_m. Façamos o mesmo para a condição $c_j \neq c_{j'}$, e obteremos o grafo C isomorfo a K_n. Seja $T = R \,\square\, C$. Teremos que $V(T) = V(R) \times V(C)$, ou seja, vértices da forma (r_i, c_j) assim como no grafo torre. Também o conjunto de arestas de T será igual ao do grafo torre, pois foi assim criado. Deste modo, o grafo T é um grafo torre, e um grafo torre de dimensão $m \times n$ pode ser definido como o produto cartesiano de grafos completos ($K_m \,\square\, K_n$). A Figura 2.8 mostra um grafo torre de dimensão 8 x 8.

2.2.2 Da Utilidade

O produto, assim como outras operações em grafos, é fonte de geração de novo grafo a partir de seus operandos. Ao estudar de forma geral os efeitos da operação, pode-se chegar, a partir das propriedades dos grafos fatores, a resultados sobre propriedades do grafo gerado pelo produto.

Exemplo: Deseja-se saber se o hipercubo, que é o sucessivo produto cartesiano de grafos K_2, é bipartido. Sabe-se que o produto cartesiano gera um grafo bipartido se, e somente se, os dois grafos fatores forem bipartidos (a demonstração é apresentada no Capítulo 4; por ora, tomemos a afirmação como verdadeira). Então, conclui-se que o hipercubo é bipartido se, e somente se, K_2 for bipartido. É trivial verificar que o grafo K_2 (uma aresta) é de fato bipartido. Logo, tem-se que o grafo hipercubo é bipartido.

O produto cartesiano, em particular, herda as propriedades dos grafos fatores de forma interessante sob o ponto de vista dos critérios topológicos avaliados em redes

de interconexão – questão abordada no Capítulo 3. Portanto, é uma operação propícia para a *criação* de novas topologias, além de oferecer possibilidades de *análise* destas topologias em função das topologias fatores.

2.3 Emparelhamento em Grafos

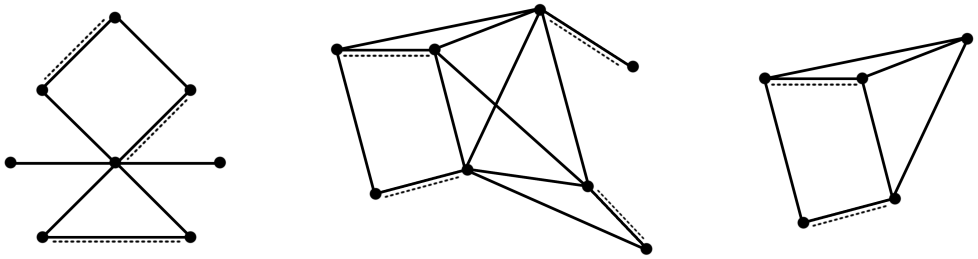
Várias situações podem ser modeladas como problemas de emparelhamento em grafos, como por exemplo: maximizar o número de contratações concretizadas em uma agência de empregos, dadas as ofertas de trabalho, os candidatos, e as respectivas possibilidades de cada candidato preencher cada vaga ofertada; encontrar uma divisão de quartos entre pesquisadores hóspedes de um hotel onde ocorre um seminário, tal que cada quarto possua exatamente dois pesquisadores e que pesquisadores num mesmo quarto sejam amigos. Esta seção apresenta a definição de emparelhamento em grafos e conceitos relacionados.

2.3.1 Emparelhamentos Perfeito e Quase-Perfeito

Um *emparelhamento* (ou um conjunto de *arestas independentes*) em um grafo G é um conjunto $M \subseteq E(G)$, tal que nenhum par de arestas em M possui extremidade em comum. Dizemos que M *satura* um vértice v e que v é M*-saturado* se existir aresta em M que seja incidente a v. Um emparelhamento em G é *máximo* se satura o maior número possível de vértices de G. O *número de independência de aresta* de G, denotado por $\alpha'(G)$, é a cardinalidade de um emparelhamento máximo em G. Geralmente o desafio é encontrar em um grafo G um emparelhamento máximo.

Seja n o número de vértices de G. Se cada vértice de G for incidente a alguma aresta de um emparelhamento M, dizemos que M é um *emparelhamento perfeito*. Nota-se

que um emparelhamento perfeito possui cardinalidade $n/2$ e que sua existência é possível somente quando n é par. Para os casos em que n é ímpar, existe definição similar: se cada vértice de G, exceto um, for incidente a alguma aresta de um emparelhamento M, dizemos que M é um *emparelhamento quase-perfeito*. Nota-se que um emparelhamento quase-perfeito possui cardinalidade $(n-1)/2$ e que sua existência é possível somente quando n é ímpar. A Figura 2.9 mostra alguns exemplos; cada aresta do emparelhamento está indicada por uma linha tracejada próxima e paralela à respectiva aresta.



(a) (b) (c)

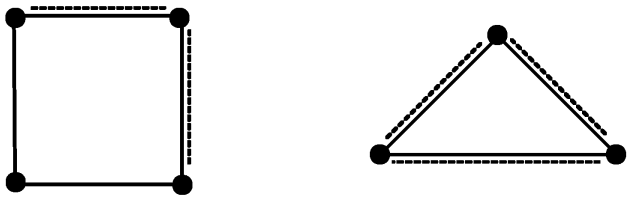
Figura 2.9: Exemplo de: (a) um emparelhamento máximo (e não perfeito); (b) um emparelhamento perfeito; (c) um emparelhamento quase-perfeito

Se G admite emparelhamento perfeito, então dizemos que G é *emparelhável*. Analogamente, se G admite emparelhamento quase-perfeito, então dizemos que G é *quase-emparelhável*.

2.3.2 Conjunto Desemparelhante e Número Desemparelhante

Um *conjunto desemparelhante* F de um grafo G é qualquer subconjunto de arestas de G que satisfaça a seguinte condição: $G \setminus F$ não é um grafo emparelhável nem quase-emparelhável. Ou seja, um conjunto desemparelhante é formado por arestas que, se removidas de um grafo com número par (ímpar) de vértices, o deixa sem possibilidade de formar emparelhamento perfeito (quase-perfeito).

O *número desemparelhante* de um grafo G, denotado por $mp(G)$, é a cardinalidade de um conjunto desemparelhante ótimo de G. Ou seja, dentre todos os possíveis conjuntos desemparelhantes de G, qual a cardinalidade mínima deles? Se G não é emparelhável nem quase-emparelhável, temos que $mp(G) = 0$ (pois, neste caso, remover zero arestas é o suficiente para que G não seja emparelhável nem quase-emparelhável).



(a) (b)

Figura 2.10: Exemplo de conjunto desemparelhante para: (a) C_4; (b) K_3

Um conjunto desemparelhante para o grafo C_4, por exemplo, poderia ser um conjunto de duas arestas consecutivas, como ilustrado na Figura 2.10(a). Este conjunto deixa um vértice isolado e impossibilitado de participar de qualquer emparelhamento. É um conjunto desemparelhante ótimo, pois (é observável que) todos os possíveis subconjuntos de $E(C_4)$ com cardinalidade menor que dois não são desemparelhantes, permitindo concluir que $mp(C_4) = 2$. O grafo K_3 admite emparelhamento quase-perfeito de três formas distintas: corresponde a selecionar uma única aresta das três existentes em $E(K_3)$, pois cada aresta satura dois vértices e deixa somente um não emparelhado. Assim, o único conjunto desemparelhante é o próprio $E(K_3)$, como ilustrado na Figura 2.10(b), permitindo concluir que $mp(k_3) = 3$.

Os conceitos de *número desemparelhante* [2] e de *conjunto desemparelhante* [3] foram introduzidos em 2005 (BRIGHAM et al.), tendo sido exposto como um problema relacionado a duas áreas de estudo em grafos iniciadas por Harary (HARARY, 1983a,b,

[2]termo original: *(perfect-matching) preclusion number*
[3]termo original: *(perfect-matching) preclusion set*

1984; HARARY; PLANTHOLT, 1986). A primeira lida com conectividade geral e condicional, e a segunda com mudança de invariantes. Tais estudos buscam descobrir como se comporta o valor de uma invariante com a remoção de um vértice ou de uma aresta, ou com a inclusão de uma aresta. No problema considerado em (BRIGHAM et al., 2005) deseja-se saber quantas arestas podem ser removidas de G sem reduzir $\alpha'(G)$ – se G for emparelhável, o número de arestas é exatamente $mp(G)$ – ; são desenvolvidas propriedades gerais do número desemparelhante de um grafo; e seu valor é determinado para alguns grafos e classes de grafos, a saber: K_n, $K_{m,n}$, hipercubos e grafo de *Petersen*.

3 CONCEITOS DE REDES DE INTERCONEXÃO

Um sistema (do grego *systēma*) é um conjunto de elementos interconectados, de modo a formar um todo organizado (BERTALANFFY, 1977). Em um sistema de computação, assim como em qualquer outro, os elementos precisam estar interconectados. E assim estão, através da rede de interconexão.

Existe interconexão em diferentes níveis em um sistema de computação: entre núcleos em um *chip*, entre *chips* em uma placa, entre placas em uma máquina, e entre computadores espalhados em uma sala, ou em um edifício, ou mesmo pelo planeta. Com o advento de novos paradigmas de processadores multinúcleo, avanços em sistemas multiprocessadores, e a Internet, vieram desafios e oportunidades para inovação na arquitetura de interconexão (HENNESSY; PATTERSON, 2007).

Independentemente do propósito, uma rede de interconexão precisa trafegar o máximo de informação com o mínimo de tempo — dadas as restrições de custo e viabilidade de implementação física —, visando não se tornar o gargalo do sistema. A arquitetura da rede de interconexão tem papel fundamental (XU, 2001; DUATO; YALAMANCHILI; NI, 2003; HSU; LIN, 2008) em um sistema paralelo ou distribuído, visto que o desempenho geral do sistema é influenciado pelo desempenho da rede,

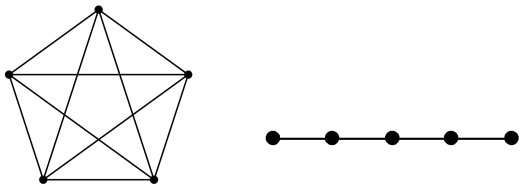
que por sua vez é determinado pela sua topologia. É o que as seções subseqüentes abordam: topologia de rede; critérios topológicos comumente avaliados; exemplos de topologias propostas; o desafio de escolher a topologia mais adequada para um cenário; e o desafio de *criar* uma topologia mais adequada para um cenário. Neste trabalho, os exemplos e definições são voltados para as redes de interconexão que realizam a intercomunicação entre processadores em um sistema multiprocessador.

3.1 Topologia de Rede

A função desempenhada por um sistema é determinada pelas funções de seus elementos e pela maneira como esses elementos estão interconectados. A maneira em que os elementos de uma rede estão interconectados é descrita pela topologia de rede. A estrutura topológica pode ser modelada por um grafo: em sistemas multiprocessadores, os vértices representariam processadores; e as arestas, ligações diretas entre processadores. De fato (HSU; LIN, 2008), esta é uma abordagem universalmente aceita e adotada por engenheiros e cientistas da computação. Devido a essa correspondência, por vezes a topologia é designada como se fosse ela própria um grafo, e vice-versa. Uma diferença é a definição de tamanho: na teoria dos grafos, corresponde ao número de arestas; em redes, ao número de vértices. E, quando no contexto de redes, é mais comum referenciar *vértice* por *nó* e *caminho* por *rota*.

Em um sistema multiprocessador, podemos imaginar a seguinte situação: em algum estoque central existem dados acumulados a serem processados, e estes são divididos entre os processadores do sistema; os processadores trabalham sozinhos no dado recebido e após um tempo precisam prestar contas, sincronizar informações uns com os outros ou pegar mais trabalho; depois retornam para o trabalho individual, parando após um tempo para se comunicarem novamente; e assim sucessivamente, até o programa em execução terminar.

Dados cinco elementos processadores, qualquer grafo conexo com cinco vértices poderia ser uma topologia para a rede de interconexão deste sistema. As arestas indicariam a possibilidade de processadores se comunicarem diretamente entre si. Duas possibilidades extremas estão na Figura 3.1. Nitidamente, a intercomunicação apresentaria melhor desempenho se cada processador pudesse se comunicar diretamente com todos os demais processadores, sem a necessidade de utilizar intermediários, o que seria representado por um grafo completo de cinco vértices e dez arestas (Figura 3.1(a)). Porém, cada aresta significa uma ligação a ser fisicamente construída entre dois processadores: além de existirem as limitações de natureza espacial, um número excessivo de arestas poderia elevar o custo de tal forma a tornar a rede inviável. No outro extremo, um caminho com cinco vértices e quatro arestas (Figura 3.1(b)) minimizaria o custo. Mas com esta topologia, além de o desempenho ficar possivelmente comprometido (a depender da necessidade de comunicação), alguns requisitos essenciais para redes de interconexão – como simetria e alta tolerância a falhas, que estão apresentados na seção seguinte – não são atendidos satisfatoriamente.



(a) K_5 (b) P_5

Figura 3.1: Formas extremas de conectar 5 vértices: grafos P_5 e K_5

Avaliar quão boa é uma topologia consiste em equacionar custo e desempenho levando em consideração os aspectos e requisitos da rede a ser construída. Alguns dos principais critérios relacionados à topologia de rede são apresentados na Seção 3.1.1.

3.1.1 Critérios Topológicos

De uma maneira geral, os critérios topológicos são comumente relacionados a propriedades de simetria, diâmetro e distância média, grau, escalabilidade, tolerância a falhas, possibilidade para algoritmos paralelos, estrutura recursiva, imersão de outras topologias, existência de caminhos paralelos:

- Propriedades de simetria

  A simetria em uma topologia favorece o balanceamento de carga e tende a simplificar o desenvolvimento de algoritmos. Se o grafo da topologia é vértice-simétrico, cada processador da rede pode ser visto como qualquer outro, ou seja, existe uma visão comum da rede a partir de qualquer de seus processadores. Como eles podem desempenhar papel similar, reduz a complexidade do desenvolvimento de algoritmos paralelos e de esquemas de comunicação – por exemplo, um mesmo algoritmo de roteamento pode ser utilizado em cada processador. Além de simplificar a implementação de algoritmos, conduz à distribuição igualitária, o que tende a minimizar congestionamento em processadores. Se é aresta-simétrico, tende a minimizar congestionamento em ligações/canais.

- Diâmetro e Distância Média

  A informação precisa trafegar de um processador para outro. Se dois processadores estiverem a uma distância d, ou seja, se é preciso percorrer d arestas para ir de um processador ao outro, então sempre que esses processadores se comunicarem serão necessários d passos para tal. O valor máximo da distância entre quaisquer processadores de uma rede é o diâmetro — como apresentado na Seção 2.1.1 — e está diretamente associado à *latência*, que é definida como o tempo que uma mensagem leva após sua criação na origem para chegar ao nó destino. O problema de encontrar uma rota para trafegar uma mensa-

gem de um processador origem para um processador destino, conhecido como problema de roteamento, tem como limite inferior o diâmetro da rede. Por representar a distância de pior caso, o diâmetro é um dos parâmetros utilizados na análise de complexidade de muitos algoritmos. A distância média é utilizada no lugar do diâmetro quando se deseja analisar a complexidade de caso médio. Em nome da eficiência, redes com pequenos diâmetro e distância média são preferíveis.

- Grau

  Uma estratégia para obter diâmetro pequeno é aumentar o número de arestas, sendo o extremo tornar a topologia um grafo completo e conseqüentemente com diâmetro igual a um. Sabe-se que todo grafo completo com mais de quatro vértices não é planar. Assim, para conectar cinco ou mais processadores desta forma em um único *chip*, por exemplo, seria necessário utilizar *chips* multicamadas, aumentando consideravelmente a complexidade e o custo de construção da rede. A depender do grau do vértice e do tamanho dos materiais utilizados, a implementação poderia até mesmo ser impossível. Ou seja, apesar de um grau alto dos vértices trazer benefícios relativos a desempenho, em uma rede existe um limite físico e financeiro para esse valor, pois representa o número de ligações a serem fisicamente construídas e anexadas a um processador. Portanto, o grau de uma rede é tão melhor quanto menor.

- Escalabilidade

  Está relacionada com a capacidade de a rede crescer e respectivo esforço necessário, e também com a qualidade desse crescimento. Se, por exemplo, o número de processadores crescer n vezes, o poder de processamento desta rede aumentará n vezes? Até mais elementar: é possível fisica e logicamente crescer n vezes? Escalabilidade implica que os demais elementos da rede, como canais de entrada e saída, cresçam proporcionalmente com o aumento do número de processadores, caso contrário se tornariam o gargalo do sistema, diminuindo a

eficiência geral da rede que teoricamente deveria ser aumentada com o acréscimo de processadores. Outra questão associada à escalabilidade — e que alguns autores como DUATO; YALAMANCHILI; NI (2003) preferem tratar separadamente e chamar de *Expansibilidade Incremental*, mas que neste trabalho será considerado dentro de Escalabilidade para ficar em consonância com a maioria dos artigos aqui referenciados — é a granularidade na escolha do número de processadores que uma topologia oferece. Algumas topologias crescem exponencialmente no número de vértices entre dois tamanhos consecutivos de sua instância. Crescer de 2 para 4 processadores pode parecer razoável. No entanto, crescer de 1024 para 2048 processadores sem a possibilidade de um número intermediário pode ser inconveniente ou inviável, se o desejado é crescimento incremental de acordo com necessidade e disponibilidade financeira gradativas. Outras topologias permitem aumento intermediário entre instâncias consecutivas à custa de não utilizar todos os recursos fisicamente implementados, ou seja, gerando desperdício. Em linhas gerais, é interessante que uma rede possa crescer de forma incremental, com possibilidade de aumento gradativo do número de processadores e com mínimo de desperdício, e que a capacidade geral e real da rede acompanhe/reflita esse crescimento.

- Tolerância a falhas

  Está relacionado à confiabilidade/estabilidade. É desejável que a rede continue a operar de forma confiável mesmo se um processador ou alguma ligação falhar. As redes podem ser construídas para operação contínua em um número limitado de falhas, e a tolerância a falhas mede o tamanho dessa robustez. Geralmente é caracterizada pela conectividade de vértices e conectividade de arestas do grafo. Há também parâmetros que avaliam a qualidade do que sobra após uma falha, como a *tenacidade*, que mede o compromisso de minimização da relação custo:benefício de uma rede quando em eventos de falha.

- Possibilidade para algoritmos paralelos e esquemas de comunicação

  A topologia pode dificultar ou mesmo impossibilitar que algoritmos paralelos, a serem distribuídos nos diferentes nós da rede, possam executar corretamente e de forma eficiente. Além dos algoritmos de fins específicos, há os esquemas de comunicação que uma rede de interconexão precisa realizar para funcionamento básico, como a difusão (*broadcasting*) — um padrão de comunicação em que um nó precisa enviar uma mensagem para todos os demais nós do sistema. É desejável que a topologia permita implementação simples e eficiente desses algoritmos.

- Estrutura Recursiva

  Uma topologia possui estrutura recursiva se cada instância sua puder ser criada conectando-se instâncias menores desta mesma topologia, e conseqüentemente se tiver uma configuração unitária básica que dará origem às maiores. É uma característica que traz relativa simetria à topologia e que favorece a implementação de algoritmos do tipo *Dividir para Conquistar*.

- Imersão de outras topologias

  Geralmente os algoritmos consideram no seu padrão de comunicação a topologia da rede onde serão executados. Para esses casos, é necessário que a rede possua determinada estrutura topológica, mesmo que apenas logicamente, durante toda a execução do algoritmo: para manter sua eficiência, ou mesmo para permitir sua execução. A possibilidade de simular uma topologia com outra é uma característica interessante, pois provê portabilidade aos algoritmos. Um algoritmo que seja muito eficiente, e que seja específico para uma topologia, pode ser aproveitado para uma outra, desde que seja possível simular logicamente a original com essa outra.

  Mapear uma topologia em outra e preservar certas propriedades é modelado como um problema de *imersão* em grafos. Há mais de uma abordagem para o problema; em redes de interconexão, é geralmente definido da seguinte forma.

Sejam os grafos G e H. Uma imersão de G em H é um *homomorfismo* de G em H, que pode ser considerado como um mapeamento ϕ: $V(G) \rightarrow V(H)$ tal que para cada $(x, y) \in E(G)$, a imagem $\phi((x, y))$ é um $(\phi(x), \phi(y))$-caminho em H. Se existe uma imersão de G em H, então dizemos que G pode ser *imerso* em H. O grafo G é chamado grafo visitante; e H, grafo anfitrião. A imersão é dita *ponto-a-ponto* se ϕ é um mapeamento injetivo. Isto ocorre quando G é isomorfo a algum subgrafo de H, o que é chamado de *imersão isomórfica*. Esta é a imersão ideal, pois um algoritmo desenvolvido para a topologia G apresentaria exatamente o mesmo desempenho se executado na topologia H (mais especificamente: no subgrafo de H que é isomorfo a G).

No entanto, há casos em que a imersão não é ponto-a-ponto. Pela definição de imersão aqui utilizada, é permitido que uma aresta de G seja simulada por um caminho (de tamanho não necessariamente 1) em H. Se esse caminho for grande, pode comprometer o desempenho do algoritmo. A imersão será tão melhor quanto menor esses caminhos em H utilizados para simular arestas de G. Com o objetivo de avaliar a qualidade da imersão, há o conceito de *dilatação* de uma imersão ϕ: $dil(\phi) = max_{x,y \in E(G)}\{(\phi(x), (\phi(y))$-caminho em $H\}$. A dilatação $dil(\phi)$ é uma medida de eficiência da comunicação quando H simula G. O objetivo é encontrar, entre todas as possíveis imersões de G em H, a de menor dilatação. O valor obtido por $|V(H)|$ / $|V(G)|$ é a *expansão* da imersão e mede a razão de utilização da rede H quando esta simula G.

- Existência de caminhos paralelos

  É importante que exista mais de um caminho possível entre quaisquer dois vértices em uma rede. Dois caminhos são paralelos se não possuírem vértices em comum, exceto e necessariamente os vértices de origem e de destino. A existência de caminhos paralelos contribui para a tolerância a falhas: se um caminho de X a Y estiver indisponível, devido à falha de vértice ou de aresta, X e Y ainda conseguiriam comunicar entre si (por um outro caminho); e permite que o tráfego de dados ocorra em paralelo, estratégia essencial se a

quantidade de dados a ser transferida for grande: divide-se o dado em pacotes menores, cada qual a trafegar por um caminho diferente.

3.1.2 Exemplos de Topologia

Nesta seção são apresentadas brevemente algumas das topologias mais comuns para redes de interconexão. A Tabela 3.1 exibe o número de vértices, o diâmetro e o grau máximo destas topologias. As figuras das topologias estão mostradas de forma agrupada a partir da página 54.

- Malha (ou *Mesh*)
  A topologia malha-(m, d), denotada $M(m, d)$, é um grafo com conjunto de vértices:

  $$V = [m]^d$$

  e conjunto de arestas:

  $$E = \{\{(a_{d-1}...a_0), (b_{d-1}...b_0)\} \mid a_i, b_i \in [m], \sum_{i=0}^{d-1} \mid a_i - b_i \mid = 1\}$$

  Pode ser vista como o produto cartesiano de d grafos P_m. Se d for igual a 1, é chamada *Barramento* (ou *Array Linear*; ou *Malha 1D*; ou *1D Mesh*) e é equivalente ao grafo caminho apresentado na Seção 2.1.2: não possui caminhos alternativos em caso de falha (conectividade baixa); tende a causar gargalos nos vértices centrais; possui diâmetro grande, baixo custo e baixo desempenho. Se d for igual a 2, é chamada *malha 2D* (ou *2D Mesh*) e é equivalente ao grafo grade$(m \times m)$: bastante adequada para execução de algoritmos paralelos que trabalham com manipulação de matrizes; não é simétrica.

- Torus
  A topologia torus-(m, d), denotada $T(m, d)$, é um grafo que consiste em uma

malha-(m, d) e, adicionalmente, arestas de contorno ligando:

$$(a_{d-1}...a_{i+1}(m-1)a_{i-1}...a_0) \text{ a } (a_{d-1}...a_{i+1}\ 0\ a_{i-1}...a_0)$$

para todo $i \in [d]$ e todo $a_j \in [m]$ com $j \neq i$. Pode ser vista como o produto cartesiano de d grafos C_m. Se d for igual a 1, é chamada *Anel* (ou *Torus 1D*) e é equivalente ao grafo ciclo apresentado na Seção 2.1.2, sendo similar ao array linear exceto por uma aresta que conecta os nós extremos, o que traz: simetria, redução do diâmetro pela metade, criação de um caminho alternativo entre quaisquer dois elementos. A Figura 3.2 ilustra a topologia $T(4, 2)$.

- Árvore Binária Completa

  Nesta topologia, cada nó é ligado a um nó pai e a dois filhos, com exceção do nó raiz (que não possui nó pai) e das folhas (que não possuem nós filhos). Uma árvore binária completa de $n = 2^h - 1$ nós, onde h é a altura, é denotada $T(n)$. Compartilha algumas características com o array linear, como baixo custo (n vértices são conectados com $n - 1$ arestas) e baixa conectividade. Possui vantagem em relação ao diâmetro, que é igual à altura da árvore ($2\lceil log\ n \rceil$). Algoritmos tendem a executar mais rápido em árvore binária do que em array linear. É uma topologia conveniente para operações de banco de dados e dicionário, por exemplo. A Figura 3.3 ilustra a topologia $T(15)$.

- Borboleta

  A topologia borboleta de dimensão d, $BF(d)$, é um grafo com conjunto de vértices:

  $$V = [d + 1] \times [2]^d$$

  e conjunto de arestas $E = E_1 \cup E_2$, com

  $$E_1 = \{\{(i, \alpha), (i + 1, \alpha)\} \mid i \in [d], \alpha \in [2]^d\} \text{ e}$$

  $E_2 = \{\{(i, \alpha), (i+1, \beta)\} \mid i \in [d],\ \alpha, \beta \in [2]^d,\ \alpha \text{ e } \beta \text{ diferem somente na } i\text{-ésima posição}\}$

  A Figura 3.4 ilustra a topologia $BF(3)$.

- *Shuffle-exchange*

  A topologia *shuffle-exchange* (STONE, 1971) de dimensão d, $SE(d)$, é um grafo com conjunto de vértices:

  $$V = [2]^d$$

  e conjunto de arestas $E = E_1 \cup E_2$, com

  $$E_1 = \{\{(a_{d-1}...a_0), (a_{d-1}...\overline{a}_0)\} \mid (a_{d-1}...a_0) \in [2]^d, \overline{a}_0 = 1 - a_0\} \text{ e}$$

  $$E_2 = \{\{(a_{d-1}...a_0), (a_0 a_{d-1}...a_1)\} \mid (a_{d-1}...a_0) \in [2]^d\}$$

  A Figura 3.5 ilustra as topologias $SE(3)$ e $SE(4)$.

- Ciclos cubo-conectados

  A topologia ciclos cubo-conectados (PREPARATA; VUILLEMIN, 1981), $CCC(d)$, é um grafo com conjunto de vértices:

  $$V = \{(a, p) \mid a \in [2]^d, p \in [d]\}$$

  e conjunto de arestas:

  $$E = \{\{(a, p), (a, (p + 1) \bmod d)\} \mid a \in [2]^d, p \in [d]\} \cup$$

  $$\cup \{\{(a, p), (b, p)\} \mid a, b \in [2]^d, p \in [d], a = b \text{ exceto para } a_p\}$$

  A Figura 3.6 ilustra a topologia $CCC(3)$.

- *DeBruijn*

  A topologia *deBruijn* (PRADHAN; REDDY, 1982; BERMOND; PEYRAT, 1989; SAMATHAM; PRADHAN, 1989) b-ária de dimensão d, denotada $DB(b, d)$, é um grafo com conjunto de vértices:

  $$V = \{v \in [b]^d\}$$

  e conjunto de arestas E que contém todas as arestas $\{v, w\}$ com a propriedade que

  $$w \in \{(x, v_{d-1}, .., v_1)\} : x \in [b]\}, \text{ onde } v = (v_{d-1}, ..., v_0)$$

Quando somente um parâmetro é fornecido, este representa d e considera-se que a rede é binária ($b = 2$). A Figura 3.7 ilustra as topologias $DB(2, 2)$ e $DB(2, 3)$.

- Hipercubo (ou n-cubo)
  A topologia hipercubo de dimensão n, denotada H_n, é o grafo hipercubo Q_n, como descrito na Seção 2.1.2. Possui simetria, conectividade igual a n e diâmetro que cresce logaritmicamente com o número de vértices. O tamanho da rede deve necessariamente ser potência de 2, um inconveniente. É uma topologia utilizada em muitas máquinas comerciais com multiprocessamento (SAAD; SCHULTZ, 1988; HARARY; HAYES; WU, 1988); considerada uma das mais populares por atender muitos dos requisitos de rede desta natureza e por apresentar um bom equilíbrio entre custo e desempenho. Devido à grande aceitação e ao sucesso em aplicações reais, o hipercubo é utilizado em muitos estudos como referência para fins de comparação.

3.1.3 A Escolha da Topologia

Inexiste topologia que seja a melhor em todos os critérios. Grau pequeno e tolerância a falhas, por exemplo, são intrinsecamente características inversamente proporcionais. É a seta do custo que vai para uma direção, e a do desempenho que vai para outra oposta. Na prática, escolhe-se a topologia que mais adequadamente atende aos requisitos do sistema a ser implementado.

É um problema interessante equacionar tantos critérios. Tão interessante que se limitado a apenas dois destes critérios (diâmetro e grau, em relação ao número de vértices) chega-se ao famoso problema grau/diâmetro (n, Δ, D), proposto por E. F. Moore, que é assim formulado: qual o maior número possível de vértices n que um grafo pode ter, tal que seus vértices tenham grau no máximo Δ e seu diâmetro seja

Tabela 3.1: Parâmetros de algumas redes de interconexão

Topologia	**Número de Vértices**	**Diâmetro**	**Grau Máximo**
Malha 1D (array linear)	k	$k-1$	2
Torus 1D (anel)	k	$k/2$	2
Malha 2D	k^2	$2k-2$	4
Torus 2D	k^2	k	4
Malha 3D	k^3	$3k-3$	6
Torus 3D	k^3	$3k/2$	6
Árvore Binária Completa	2^k-1	$2k-2$	3
Borboleta	$2^k(k+1)$	$2k$	6
Hipercubo	2^k	k	k
Ciclos cubo-conectados	$2^k k$	$2k$	3
Shuffle-exchange	2^k	$2k-1$	4
DeBruijn binária	2^k	k	4

onde k é o índice da topologia, quando aplicável

no máximo D?

Seja v um vértice do grafo. Haverá no máximo $1+\Delta+\Delta(\Delta-1)^1+...+\Delta(\Delta-1)^{D-1}$ vértices com distância 0, 1, 2, ..., D de v, o que acarreta um limite superior para o problema:

$$n \leq 1 + \frac{[(\Delta-1)^D - 1]\Delta}{\Delta - 2}$$

O lado direito da equação é chamado *Limite de Moore* (*Moore Bound*) e denotado por $M_{\Delta,D}$. Há muitos estudos e questões abertas relacionados a esse problema. Uma visão geral de seu estado-da-arte foi publicado em estudo recente (MILLER; ŠIRÁN, 2005).

Um grafo com número de vértices exatamente igual a $M_{\Delta,D}$ é denominado *grafo*

Moore. Para diâmetro $D = 1$ e grau máximo $\Delta \geq 1$, grafos Moore são os grafos completos K_{n+1}; para $D = 2$, são o C_5 quando $\Delta = 2$, o grafo de *Petersen* quando $\Delta = 3$, e o grafo *Hoffman-Singleton* (HOFFMAN; SINGLETON, 1960) quando $\Delta = 7$. Assim, caso somente o diâmetro e o grau máximo fossem os parâmetros analisados, o grafo de *Petersen* seria uma topologia superior ao hipercubo de dimensão três (Q_3), pois este possui diâmetro maior ($D = 3$) e grau máximo igual ($\Delta = 3$) para um número de vértices menor (8). Porém, apesar de simétrico e apresentar boa conectividade, o grafo de *Petersen* não é hamiltoniano nem planar, além de apresentar baixa escalabilidade e não possuir estrutura trivial para implementação de algoritmos e esquemas de comunicação, o que na prática o torna uma opção inferior ao hipercubo Q_3.

Entre uma árvore e um grafo completo, há um vasto conjunto de topologias possíveis. Muitas foram propostas e estudadas, tendo sido algumas delas implementadas. Porém e complementarmente, muitas ainda não foram propostas, seja porque estudos demonstraram serem inferiores às existentes dadas as necessidades, ou mesmo porque ainda não foram descobertas ou "criadas". Eis um desafio, daqueles de rampa íngreme; e contemporâneo, pois novas topologias continuam sendo estudadas e propostas.

3.2 Redes de Produto (Cartesiano)

A Teoria dos Grafos tem se mostrado não apenas um sólido subsídio para *analisar* topologias de rede de interconexão, mas também uma eficaz ferramenta matemática para *gerar novas* topologias (XU, 2001; BERMOND; DELORME; QUISQUATER, 1986). Esta seção apresenta uma das ferramentas utilizadas para criação de topologias: o *produto cartesiano de grafos*.

3.2.1 Topologias Sintetizadas pelo Produto Cartesiano

O produto cartesiano possui propriedades que o tornam um potencial sintetizador de topologia para redes de interconexão. Algumas destas propriedades estão descritas a seguir. O número de vértices do grafo gerado pelo produto cresce multiplicativamente em função dos fatores, enquanto o grau dos vértices, o diâmetro e a distância média, crescem aditivamente. Isso implica que se ambas as topologias fatores possuírem grau e diâmetro que sejam logarítmicos ou sublogarítmicos em função de seu tamanho (número de vértices) — uma propriedade desejável —, a topologia gerada pelo produto também o será. Outra implicação é a maior escalabilidade e flexibilidade na escolha do tamanho da topologia: a faixa de possíveis valores para o tamanho de uma rede assim gerada – por ser o produto do tamanho das topologias fatores – é geralmente mais densa do que as de cada topologia fator. Raciocínio similar é aplicado para o grau, para o diâmetro e para a distância média, que correspondem à soma dos respectivos parâmetros nas topologias fatores.

Muitas das topologias propostas e estudadas são redes de produto (cartesiano). Das topologias clássicas apresentadas na Seção 3.1.2, são exemplos: a malha, o torus e o hipercubo. E recentemente o produto tem sido investigado como um método para combinar propriedades desejáveis das redes fatores na geração de novas topologias (AL-AYYOUB; DAY, 2002). Algumas das topologias propostas com este intuito são apresentadas a seguir:

- Hiper-*Petersen* (DAS; BANERJEE, 1992)
  A topologia hiper-*Petersen* de dimensão n, denotada HP_n, $n \geq 3$, é o produto cartesiano de um hipercubo de dimensão $(n-3)$ e um grafo de *Petersen*. Possui alto grau de simetria e de conectividade, diâmetro pequeno, e cobre 25% mais nós utilizando o mesmo número de arestas que o hipercubo (DAS; BANERJEE, 1992). A Figura 3.9 mostra a topologia HP_5, como desenhada

no trabalho de DAS; BANERJEE.

- *Shuffle*-Produto (ROSENBERG, 1992)
  A topologia *shuffle*-produto, denotada $PS_{n,m}$, é o produto cartesiano de redes *deBruijn* $DB(n)$ e $DB(m)$. Foram obtidos resultados referentes à imersão, à simulação de rede, e a layouts VLSI para essa topologia (ROSENBERG, 1992).

- Hiper-*deBruijn* (GANESAN; PRADHAN, 1993)
  A topologia hiper-*deBruijn* de ordem (m, n), denotada $HD(m, n)$, é o produto cartesiano do hipercubo de dimensão m e da rede *deBruijn* binária de dimensão n. É mais atrativa do que seus grafos fatores, possui maior flexibilidade em relação ao número de conexões por nós e permite layouts VLSI simples (GANESAN; PRADHAN, 1993). A Figura 3.11 (HSU; LIN, 2008) mostra a topologia $HD(2, 2)$.

- Árvores malha-conectadas (EFE; FERNANDEZ, 1994)
  A topologia árvores malha-conectadas de dimensão r, $MCT_r(2^h - 1)$, é o produto cartesiano de r árvores binárias completas de altura h. É computacionalmente mais eficiente que malhas 2D e que árvores completas binárias (EFE; FERNANDEZ, 1994). A Figura 3.12 (EFE; FERNANDEZ, 1994) mostra a topologia $MCT_2(7)$.

- *Petersen* dobrado (ÖHRING; DAS, 1994)
  A topologia *Petersen* n-dobrado, denotada FP_n, é o produto cartesiano de n grafos de *Petersen*. Apresenta simetria de vértices e arestas, otimalidade na tolerância a falhas, diâmetro de crescimento logarítmico, e permite algoritmos simples de roteamento/difusão e imersão de outras topologias, tais como anel, malha multidimensional, hipercubo e árvore binária completa (ÖHRING; DAS, 1994). A Figura 3.10 (HSU; LIN, 2008) mostra a topologia FP_2.

- Cubo-*Petersen* dobrado (ÖHRING; DAS, 1996)

  A topologia cubo-*Petersen* dobrado de dimensão k, denotada $FPQ_{n,k}$, é o produto cartesiano de um hipercubo de dimensão n e k grafos de *Petersen*. É uma generalização da topologia *Petersen* dobrado, e foi proposta para prover maior escalabilidade, visto que a *Petersen* dobrado cresce em potência de dez. É simétrica, regular, com otimalidade na tolerância a falhas e diâmetro de crescimento logarítmico, e permite execução de algoritmos paralelos e imersão de outras topologias, tais como anel, malha multidimensional, hipercubo e árvore binária completa (ÖHRING; DAS, 1996).

- Hiper-estrela (AL-AYYOUB; DAY, 1998)

  A topologia hiper-estrela, denotada $S_{n_1,n_2,...,n_k}$, é o produto cartesiano de k grafos estrela[1] S_{n_1}, S_{n_2},..., S_{n_k}. É um membro da classe de grafos simétricos Cayley, possui escalabilidade maior do que o grafo estrela e que o hipercubo, possui número de arestas menor do que o hipercubo e o grafo estrela para um tamanho mínimo requerido, tem maior eficiência na difusão (*broadcasting*), e apresenta maior potencial do que o grafo estrela para imersão de topologias populares como malhas e hipercubos (AL-AYYOUB; DAY, 1998).

- Estrela-cubo (DATTA; BISWAS, 2004)

  A topologia estrela-cubo, denotada $SQ_{m,n}$, é o produto cartesiano do grafo estrela (AKERS; HARD; KRISHNAMWTHY, 1994) de dimensão m e do hipercubo de dimensão n. Obtém benefício do diâmetro pequeno e grau sublogarítmico do grafo estrela e favorece a portabilidade de algoritmos das existentes aplicações paralelas baseadas em hipercubo (DATTA; BISWAS, 2004). A Figura 3.13 (HSU; LIN, 2008) mostra a topologia $SQ_{3,3}$.

[1] A topologia estrela referenciada foi proposta em 1994 (AKERS; HARD; KRISHNAMWTHY), um grafo de *Cayley*, e não deve ser confundida com o grafo estrela apresentado na Seção 2.1.2. Desenhos da topologia estrela S_2, S_3 e S_4 podem ser vistos na Figura 3.8 (HSU; LIN, 2008), Página 56.

3.2.2 Estudo da Classe Geral

O estudo da classe geral do produto cartesiano de grafos integra descobertas existentes na literatura em um campo de conhecimento unificado; permite uma metodologia geral (dividir para conquistar, por exemplo) para estudo futuro de redes de produto e o desenvolvimento de algoritmos de rede genéricos tais como roteamento e imersão. Tal fato motivou estudos (YOUSSEF, 1995; DAY; AL-AYYOUB, 1997) sobre algumas propriedades do produto cartesiano em função de seus fatores, entre elas: conectividade, grau, diâmetro, escalabilidade, simetria de vértices, otimalidade de esquemas de comunicação, imersão, existência de caminhos paralelos e estrutura recursiva. Propriedades estudadas em outros trabalhos incluem:

- Conectividade (CHIUE; SHIEH, 1999; XU; YANG, 2006; KLAVŽAR; ŠPACAPAN, 2008; ŠPACAPAN, 2008; LU; XU, 2009);
- Difusão (*broadcasting*) (ÖHRING; IBEL; DAS, 1995; BAO; IGARASHI; ÖHRING, 1998);
- Tenacidade (CHOUDUM; PRIYA, 1999);
- Variação do diâmetro (degradação de desempenho) no evento de falha (XU; XU; HOU, 2005; BANIČ; ŽEROVNIK, 2008);
- Alocação de recursos (IMANI; SARBAZI-AZAD; ZOMAYA, 2009);
- Existência de caminhos/ciclos hamiltonianos (ZARETSKII, 1966; BATAGELJ; PISANSKI, 1982; DIMAKOPOULOS; PALIOS; POULAKIDAS, 2005; ČADA; FLANDRIN; LI, 2009).

3.3 Número Desemparelhante como Critério Topológico

Os conceitos de número desemparelhante e conjunto desemparelhante estão apresentados na Seção 2.3.2. Para redes em que é essencial cada processador possuir a qualquer instante um parceiro especial, se o número desemparelhante do grafo que modela a topologia subjacente for grande, significa que a respectiva topologia será robusta no caso de falha de aresta (BRIGHAM et al., 2005). Isto é, o número desemparelhante é um parâmetro de rede relacionado à tolerância a falhas.

Tal fato motivou estudos acerca do número desemparelhante — e respectivos conjuntos desemparelhantes — de classes de grafos utilizadas como topologia de rede de interconexão:

- em 2007, CHENG; LIPTÁK obtiveram resultados para grafos (n,k)-estrela (CHIANG; CHEN, 1995) e grafos de Cayley (AKERS; KRISHNAMURTHY, 1989);
- em 2008, CHENG et al. obtiveram resultados para os grafos (n,k)-arranjo (DAY; TRIPATHI, 1992) e grafos de Cayley (AKERS; KRISHNAMURTHY, 1989);
- também em 2008, PARK obteve resultados para grafos tipo-hipercubo e grafos recursivo-circulantes (PARK; CHWA, 1994);
- em 2010, WANG et al. obtiveram resultados para hipercubos k-ários.

Motivou também a criação de uma variação do conceito de número/conjunto desemparelhante, chamado *número/conjunto desemparelhante condicional* (CHENG et al., 2009), em que as arestas do conjunto desemparelhante devem ser tais que o grafo resultante da remoção delas, além de não possuir emparelhamento perfeito nem

quase-perfeito, não possua vértice isolado. A idéia desta variação vem da observação de que, em um evento aleatório de falha de arestas, é muito pequena a probabilidade de que todas as arestas a falhar possuam um vértice em comum. Desconsiderando este caso (acreditado pouco provável), qual o próximo conjunto desemparelhante mínimo? Isto é o que a variação deseja identificar. O número desemparelhante condicional foi determinado para:

- grafos completos bipartidos, grafos completos e hipercubos, em 2009 (CHENG et al.);
- grafos tipo-hipercubo m-dimensionais com $m \geq 5$ e grafos bipartidos tipo-hipercubo m-dimensionais com $m \geq 3$, em 2009 (PARK; SON);
- hipercubos k-ários, em 2010 (WANG et al.).

No Capítulo 4 deste trabalho, são desenvolvidas propriedades do número desemparelhante do produto cartesiano de grafos em função de seus fatores, visando possibilitar o estudo desse parâmetro nas redes de produto.

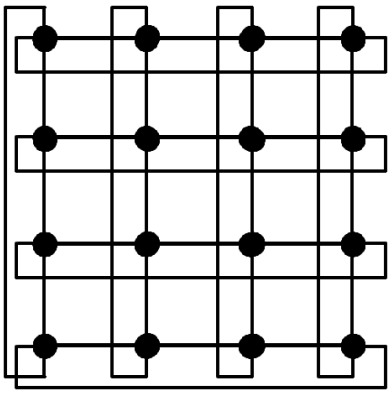


Figura 3.2: Topologia torus $T(4, 2)$

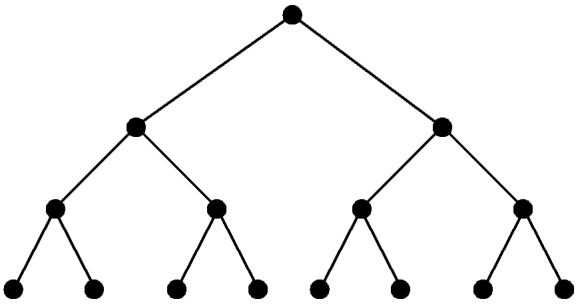


Figura 3.3: Topologia árvore binária completa $T(15)$

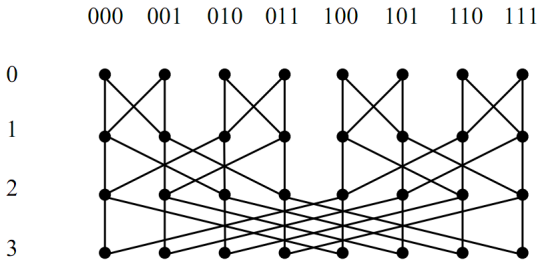


Figura 3.4: Topologia borboleta $BF(3)$

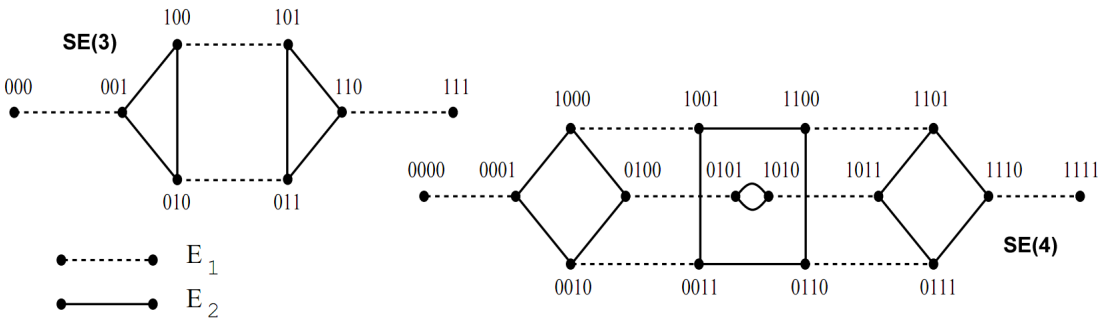


Figura 3.5: Topologia *shuffle-exchange* $SE(3)$ e $SE(4)$

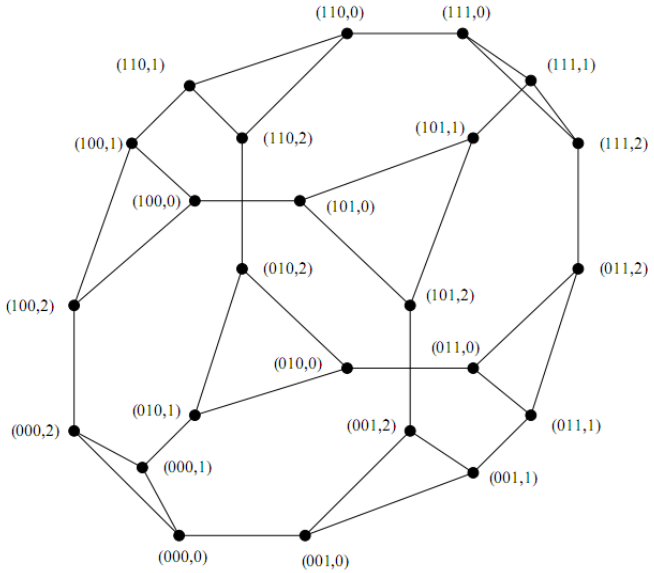


Figura 3.6: Topologia ciclos cubo-conectados $CCC(3)$

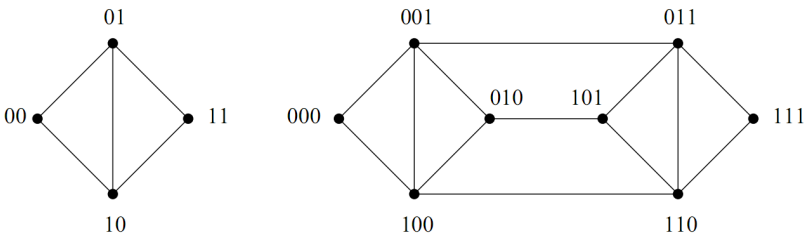


Figura 3.7: Topologia *deBruijn* $DB(2,2)$ e $DB(2,3)$

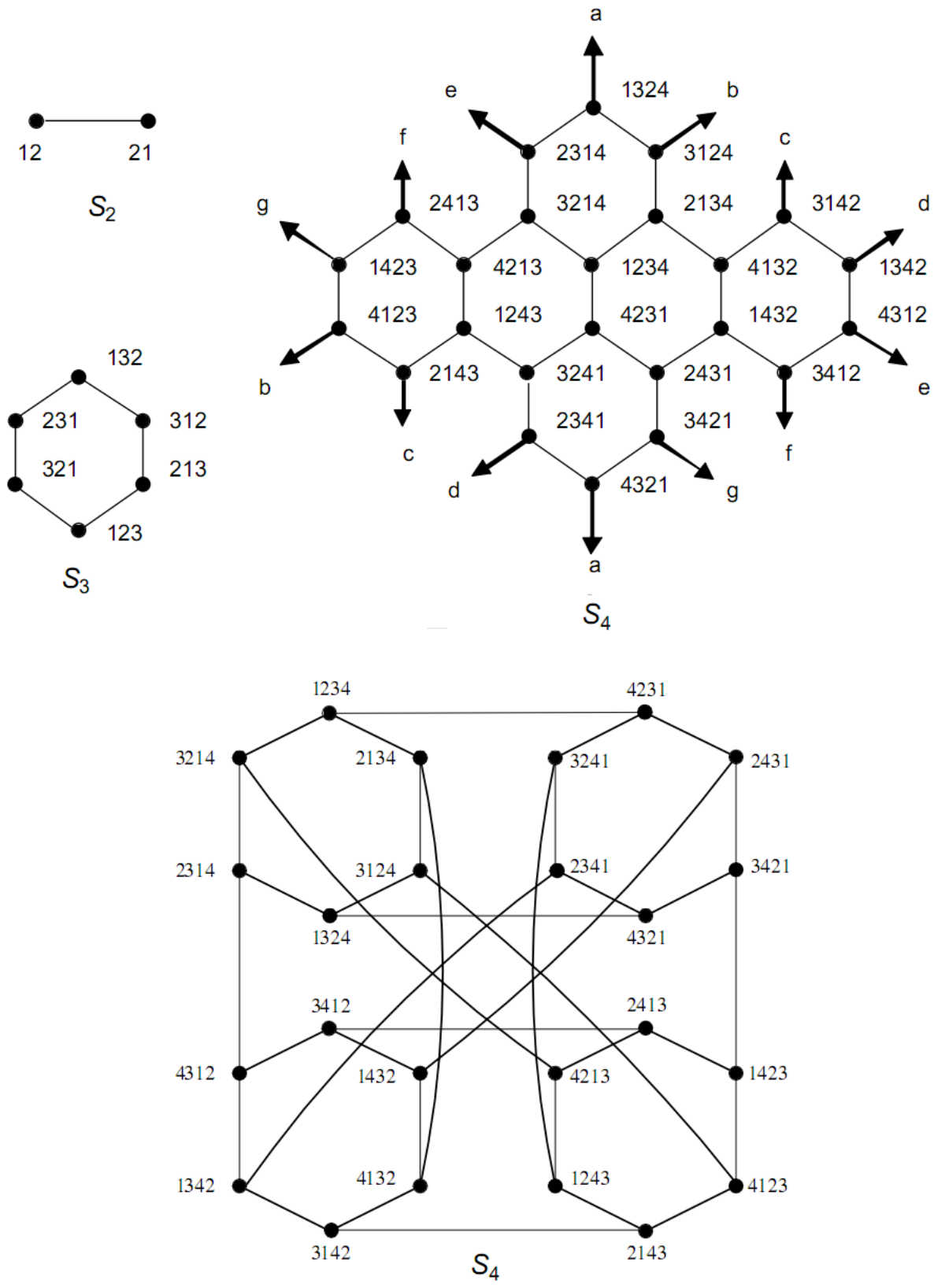
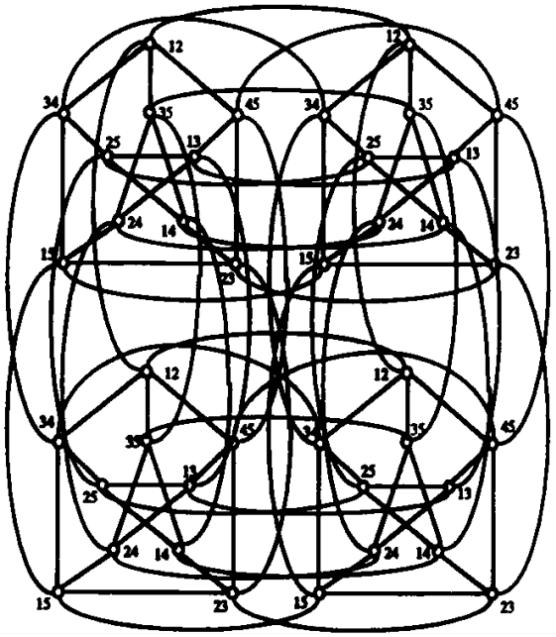
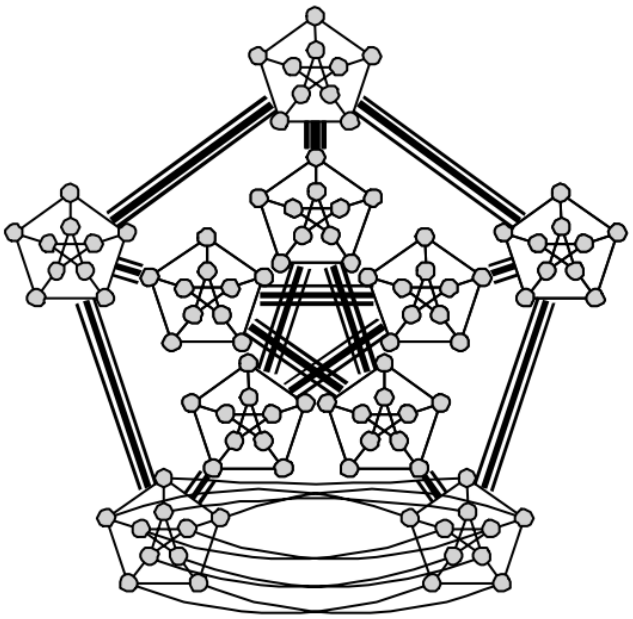


Figura 3.8: Topologia estrela S_2, S_3 e S_4 (duas representações)



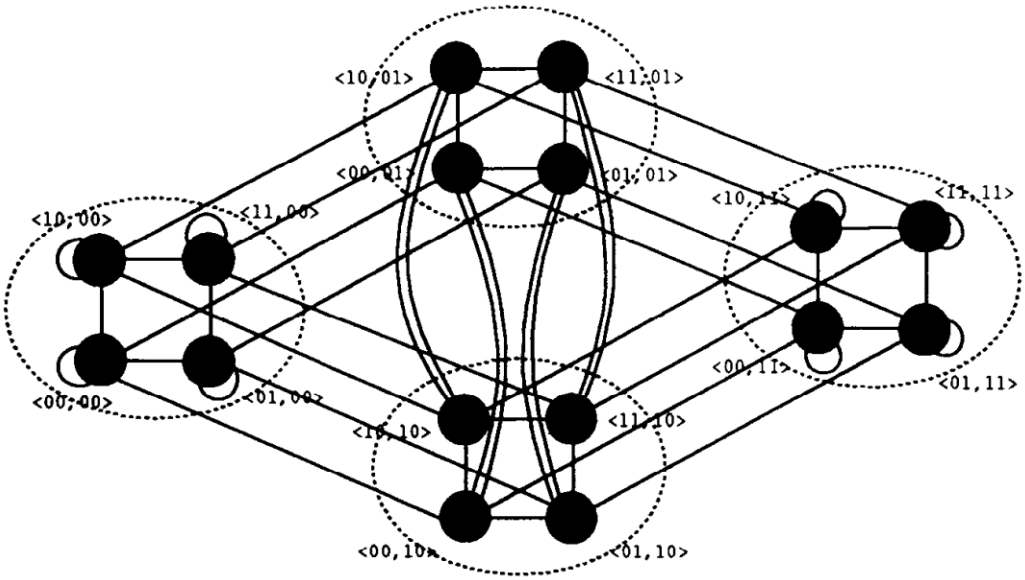
(a)

Figura 3.9: Topologia hiper-*Petersen* $HP_5 = Q_2 \square P$



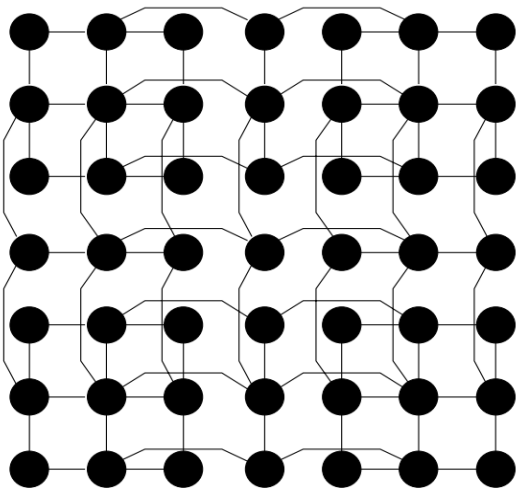
(a)

Figura 3.10: Topologia *Petersen* dobrado $FP_2 = P \square P$



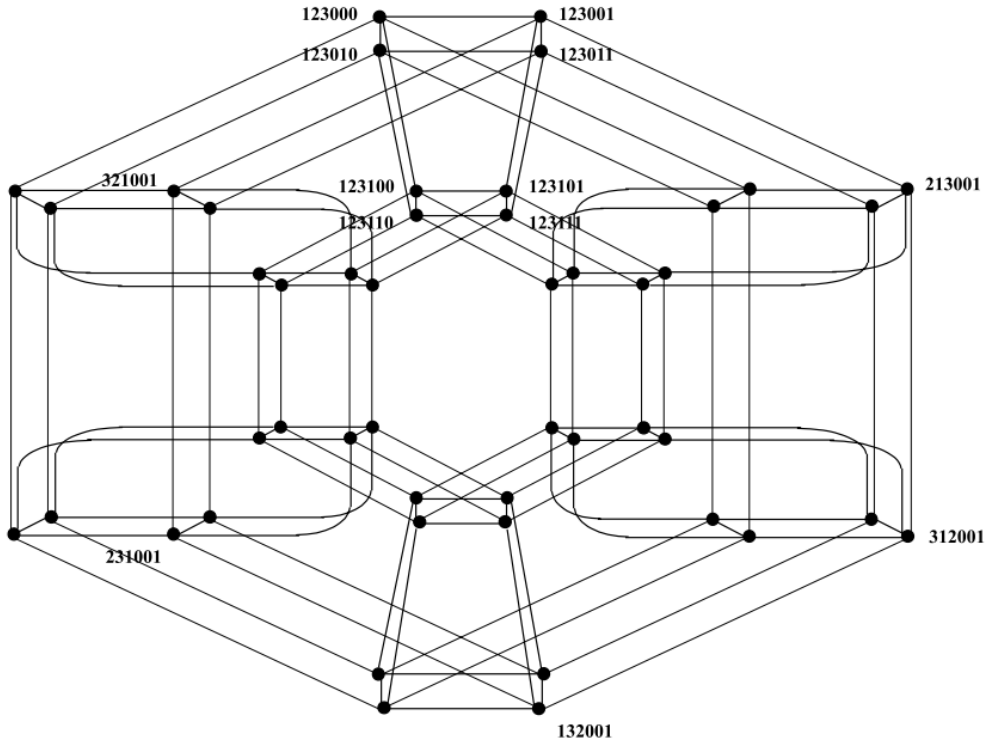
(a)

Figura 3.11: Topologia hiper-*deBruijn* $HD(2,2) = H_2 \square DB(2)$



(a)

Figura 3.12: Topologia árvores malha-conectadas $MCT_2(7) = T(7) \square T(7)$



(a)

Figura 3.13: Topologia estrela-cubo $SQ_{3,3} = S_3 \square Q_3$

4 RESULTADOS

Dados dois grafos cujo número desemparelhante é conhecido, o que pode ser inferido sobre o número desemparelhante do produto cartesiano destes grafos? Neste capítulo é estudada a operação do produto cartesiano de grafos e são desenvolvidas propriedades do número desemparelhante desta operação. A seção primeira reúne a notação utilizada no capítulo e apresenta uma forma de interpretar visualmente o produto cartesiano de grafos com o objetivo de favorecer a assimilação das demonstrações seguintes. A segunda seção apresenta os resultados propriamente ditos.

4.1 Preliminares

Considerações válidas para o capítulo: G, G_1 e G_2 são grafos simples e não-direcionados; as notações são como as introduzidas no Capítulo 2, e relembradas/complementadas a seguir:

$d_G(x)$ é o grau do vértice x de G
$\delta(G)$ é o grau mínimo de G
$\Delta(G)$ é o grau máximo de G

$d_i(G)$ é o i-ésimo elemento da seqüência não-decrescente de graus dos vértices de G
$\ell_G(x, y)$ é a distância[1] entre os vértices x e y de G
$D(G)$ é o diâmetro de G
$mp\,(G)$ é o número desemparelhante de G
$n_1 = |V(G_1)|$ $\quad$ $n_2 = |V(G_2)|$
$n = |V(G)|$, caso exista G no contexto
$n = |V(G_1 \,\square\, G_2)| = n_1 \times n_2$, caso exista $G_1 \,\square\, G_2$ no contexto

4.1.1 Uma Interpretação Visual do Produto Cartesiano de Grafos

Antes da apresentação dos resultados deste capítulo, é descrita uma interpretação visual do produto cartesiano de grafos para melhor compreensão das seções seguintes.

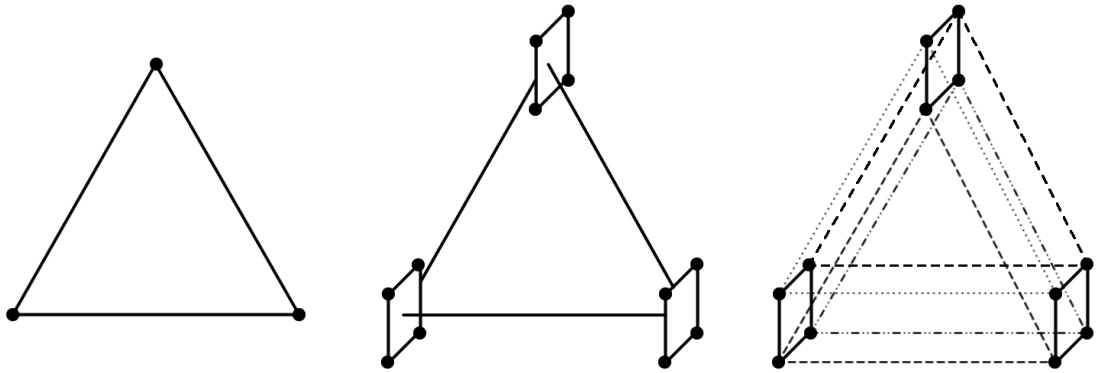
O produto cartesiano de dois grafos G_1 e G_2 — ou simplesmente $G_1 \square G_2$ —, descrito na Seção 2.2, pode ser visualmente interpretado da seguinte forma:

1 - Desenhar G_1;
2 - Substituir cada vértice v de G_1 por uma cópia de G_2 {que chamaremos de vG_2};
3 - Transformar cada aresta $uv \in G_1$ em n_2 arestas, ligando uG_2 a vG_2 {essas n_2 arestas devem ligar os vértices correspondentes das cópias de G_2}.

A grosso modo, o produto cartesiano de dois grafos G_1 e G_2 gera um grafo com n_1 cópias de G_2 ligadas "*à la*" G_1.

A interpretação de $K_3 \,\square\, C_4$, representada na Figura 4.1, seria:

[1] Aqui a *distância* não será denotada por $d_G(x, y)$ devido à existência, neste capítulo, de vértices representados na forma (x, y), o que tornaria mais trabalhosa a diferenciação entre a notação de distância e as notações relacionadas a grau.



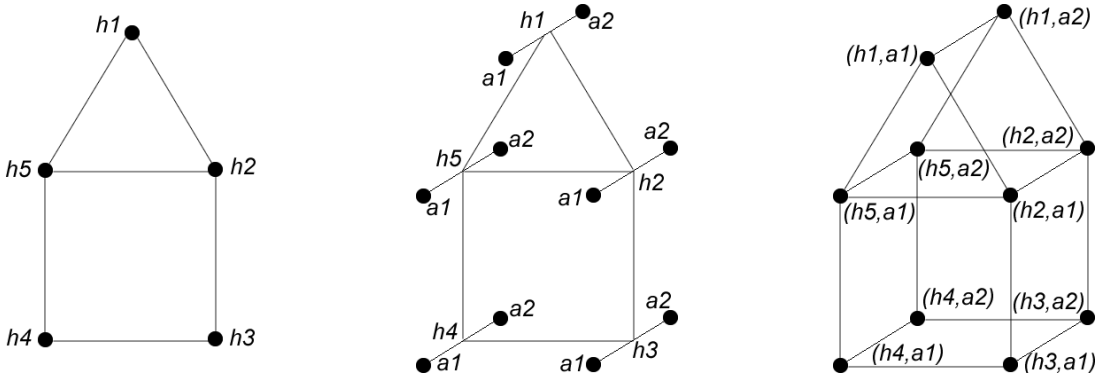
(a) Passo 1 (b) Passo 2 (c) Passo 3 (Final)

Figura 4.1: Desenho de $K_3 \square C_4$

(1) Desenhar um K_3;

(2) Substituir cada vértice de K_3 por um C_4;

(3) Transformar cada aresta uv de K_3 em 4 novas arestas, ligando uC_4 a vC_4 pelos seus vértices correspondentes.



(a) Passo 1 (b) Passo 2 (c) Passo 3 (Final)

Figura 4.2: Desenho de $H \square K_2$ (Grafo Casa $\square$ Aresta)

Há outro exemplo na Figura 4.2: o produto cartesiano do grafo Casa (H) e uma aresta (K_2). Os vértices foram rotulados a fim de evidenciar outras características visuais do produto. Observa-se claramente a regra para adjacência exposta na Seção 2.2: para que, no produto cartesiano de um grafo F por um grafo G, vértices da forma (f_1, g_1) e (f_2, g_2) estejam ligados, ou bem $f_1 f_2 \in E(F)$ e $g_1 = g_2$, ou bem

$g_1g_2 \in E(G)$ e $f_1 = f_2$. Assim, as arestas são exclusivamente de dois tipos: (1) as que ligam vértices diferentes entre si apenas pelo primeiro elemento (exemplo: $(h_{\mathbf{1}},a_1)(h_{\mathbf{2}},a_1)$); e (2) as que ligam vértices diferentes entre si apenas pelo segundo elemento (exemplo: $(h_1,a_{\mathbf{1}})(h_1,a_{\mathbf{2}})$). As referências a estes tipos de aresta, dado um grafo $G_1 \square G_2$, serão feitas da seguinte forma: (1) arestas do *território* de G_1, ou G_1-*arestas*; (2) arestas do *território* de G_2, ou G_2-*arestas*. Percorrer uma aresta do território de G_1 significa transitar de uma cópia de G_2 para outra, e vice-versa. Equivalentemente, em linguagem de conjuntos: $E(G_1 \square G_2) = G_1$-*arestas* $\cup\, G_2$-*arestas*, onde G_1-*arestas* $= (E(G_1) \times V(G_2))$ e G_2-*arestas* $= (E(G_2) \times V(G_1))$.

O leitor é convidado a revisitar os desenhos expostos na Seção 2.2 e reinterpretá-los com a abordagem exposta. A idéia é que escritor e leitor compartilhem uma maneira de interpretar visualmente o produto.

4.1.2 Algumas Propriedades Conhecidas do Produto Cartesiano de Grafos

Esta subseção apresenta a demonstração para algumas propriedades conhecidas do produto cartesiano de grafos e tem dois propósitos: o primeiro é apresentar as propriedades em si, e o outro é familiarizar o leitor com determinada maneira de analisar o produto. Visto que os enunciados são sabidamente corretos, as provas formais desta seção deram lugar a uma abordagem menos rigorosa e mais visual, que servirão como aquecimento para a seção seguinte.

Observação 4.1.1. *O produto cartesiano de grafos é uma operação comutativa.*

Prova. Sejam G_1 e G_2 grafos simples. Temos da definição de produto cartesiano de grafos que:

$$V(G_1 \square G_2) = V(G_1) \times V(G_2).$$

E que:

$$E(G_1 \square G_2) = (E(G_1) \times V(G_2)) \cup (E(G_2) \times V(G_1)).$$

Da comutatividade do produto cartesiano de conjuntos, temos que:

$$V(G_1) \times V(G_2) = V(G_2) \times V(G_1) = V(G_2 \square G_1).$$

E da comutatividade da união de conjuntos, temos que:

$$(E(G_1)\times V(G_2))\cup(E(G_2)\times V(G_1)) = (E(G_2)\times V(G_1))\cup(E(G_1)\times V(G_2)) = E(G_2\square G_1).$$

Logo, $V(G_1 \square G_2) = V(G_2 \square G_1)$ e $E(G_1 \square G_2) = E(G_2 \square G_1)$, o que demonstra a comutatividade da operação.

□

Observação 4.1.2. $G_1 \square G_2 \cong G_2 \square G_1$.

Prova. Da Observação 4.1.1, temos que o produto cartesiano é comutativo, logo $G_1 \square G_2 \cong G_2 \square G_1$.

Visualmente, seria: o produto cartesiano de dois grafos G_1 e G_2 gera um grafo com n_1 cópias de G_2 ligadas "*à la*" G_1. Na Figura 4.1.c há 3 cópias de C_4 ligadas "*à la*" K_3, seguindo a interpretação visual de $K_3 \square C_4$. É possível observar esta mesma figura como sendo 4 cópias de K_3 ligadas "*à la*" C_4, que seria a interpretação da operação $C_4 \square K_3$.

□

Observação 4.1.3. *A identidade do produto cartesiano de grafos é o grafo* K_1.

Prova. Sejam G e I grafos simples. Temos da definição de produto cartesiano de grafos que:

$$V(G \square I) = V(G) \times V(I).$$

E que:

$$E(G \,\square\, I) = (E(G) \times V(I)) \cup (E(I) \times V(G)).$$

Para que I seja a identidade do produto cartesiano de grafos, é necessário que $G \,\square\, I \cong G$ para qualquer grafo simples G. Ou seja, devem ser observadas as duas seguintes condições:

$$V(G) \times V(I) = V(G). \qquad (1)$$

E:

$$(E(G) \times V(I)) \cup (E(I) \times V(G)) = E(G). \qquad (2)$$

Observa-se que a primeira condição é satisfeita para qualquer G somente quando $|V(I)| = 1$; e a segunda, somente quando $|V(I)| = 1$ e $|E(I)| = 0$. Logo, $I \cong K_1$.

Seguindo a interpretação visual de $G \,\square\, K_1$: (1) desenhar o grafo G e substituir cada vértice de G por um K_1 (ou seja, trocar um vértice por um vértice; fazer nada). Ou de $K_1 \,\square\, G$: (1) desenhar o grafo K_1 e substituir cada vértice de K_1 (ou seja, 1 vértice) por uma cópia de G.

□

Observação 4.1.4. $d_{G_1 \,\square\, G_2}((x, y)) = d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)$.

Prova. Da regra de adjacências do produto cartesiano de grafos, tem-se que vértices da forma (x_1, y_1) e (x_2, y_2) — onde $x_1, x_2 \in G_1$ e $y_1, y_2 \in G_2$ — estão ligados se: (1) $x_1x_2 \in E(G_1)$ e $y_1 = y_2$, ou (2) $y_1y_2 \in E(G_2)$ e $x_1 = x_2$. Assim, o número de arestas incidentes ao vértice (x, y) será correspondente ao (1) número de vezes em que x é extremidade de arestas em G_1 somada ao (2) número de vezes em que y é extremidade em arestas de G_2, ou seja $d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)$. Outra forma de abordar: $E(G_1 \,\square\, G_2) = (E(G_1) \times V(G_2)) \cup (E(G_2) \times V(G_1))$, então as arestas incidentes a (x, y) são $(E_x(G_1) \times \{y\}) \cup (E_y(G_2) \times \{x\})$, onde $E_x(G_1)$ é o conjunto de arestas

incidentes a x em G_1 — cuja cardinalidade é $d_{G_1}(x)$ — e $E_y(G_2)$ é o conjunto de arestas incidentes a y em G_2 — cuja cardinalidade é $d_{G_2}(y)$.

□

Observação 4.1.5. $\delta(G_1 \,\square\, G_2) = \delta(G_1) + \delta(G_2)$.

Prova. Da Observação 4.1.4, temos que $d_{G_1 \,\square\, G_2}((x,y)) = d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)$. Assim, o valor de $d_{G_1 \,\square\, G_2}((x,y))$ é mínimo quando $d_{G_1}(x)$ e $d_{G_2}(y)$ assumem valores mínimos, ou seja, quando assumem valores $\delta(G_1)$ e $\delta(G_2)$, respectivamente.

□

Observação 4.1.6. $\Delta(G_1 \,\square\, G_2) = \Delta(G_1) + \Delta(G_2)$.

Prova. Da Observação 4.1.4, temos que $d_{G_1 \,\square\, G_2}((x,y)) = d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)$. Assim, o valor de $d_{G_1 \,\square\, G_2}((x,y))$ é máximo quando $d_{G_1}(x)$ e $d_{G_2}(y)$ assumem valores máximos, ou seja, quando assumem valores $\Delta(G_1)$ e $\Delta(G_2)$, respectivamente.

□

Observação 4.1.7. $\ell_{G_1 \,\square\, G_2}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \ell_{G_1}(x_1,x_2) + \ell_{G_2}(y_1,y_2)$.

Prova. O caminho de (x_1,y_1) a (x_2,y_2) pode conter G_1-*arestas* e G_2-*arestas*. As G_1-*arestas* são as que ligam vértices que diferem pelo primeiro elemento; e as G_2-*arestas*, pelo segundo elemento. É válido ressaltar que cada aresta pode alterar somente 1 dos elementos. As G_1-*arestas* são da forma $E(G_1) \times V(G_2)$. Um possível caminho de (x_1,y_1) a (x_2,y_1) é obtido selecionando G_1-arestas da forma $E(G_1) \times \{y_1\}$, e é possível encontrar um com tamanho $\ell_{G_1}(x_1,x_2)$ se selecionadas as arestas de um menor caminho de x_1 a x_2 em G_1. O mesmo vale para um caminho de (x_2,y_1)

a (x_2, y_2), cujo tamanho seria $\ell_{G_2}(y_1, y_2)$. Assim, existe um caminho de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) de tamanho $\ell_{G_1}(x_1, x_2)+\ell_{G_2}(y_1, y_2)$, que corresponde ao caminho de (x_1, y_1) a (x_2, y_1) adicionado ao caminho de (x_2, y_1) a (x_2, y_2). Para verificar que esse caminho é mínimo, é necessário observar que todo caminho de (x_1, y_1) a (x_2, y_2), considerando somente as G_1-*arestas* e os primeiros elementos dos vértices, é uma trilha em G_1 de x_1 a x_2, cuja cardinalidade é no mínimo $\ell_{G_1}(x_1, x_2)$. O mesmo ocorre considerando as G_2-*arestas*, sendo uma trilha em G_2 de y_1 a y_2, cuja cardinalidade é no mínimo $\ell_{G_2}(y_1, y_2)$. Logo, um caminho de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) não será menor que $\ell_{G_1}(x_1, x_2) + \ell_{G_2}(y_1, y_2)$.

□

Observação 4.1.8. $D(G_1 \square G_2) = D(G_1) + D(G_2)$.

Prova. Da Observação 4.1.8, tem-se que $\ell_{G_1 \square G_2}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \ell_{G_1}(x_1, x_2) + \ell_{G_2}(y_1, y_2)$. Assim, o valor de $\ell_{G_1 \square G_2}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ é máximo quando $\ell_{G_1}(x_1, x_2)$ e $\ell_{G_2}(y_1, y_2)$ assumem valores máximos, ou seja, quando assumem valores $D(G_1)$ e $D(G_2)$, respectivamente.

□

Proposição 4.1.9. *O grafo $G_1 \square G_2$ é bipartido se, e somente se, ambos G_1 e G_2 forem bipartidos.*

Prova. Da condição necessária: suponha que um dos grafos, seja G_2, não seja bipartido. Sabe-se que um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo ímpar. Logo, pela hipótese, G_2 necessariamente possui ciclo ímpar. Visto que haverá n_1 cópias de G_2 em $G_1 \square G_2$, conclui-se que a existência de ciclo ímpar em G_2 implica na existência de ciclo ímpar em $G_1 \square G_2$. O mesmo vale para G_1, dada a comutatividade da operação. Portanto, para que $G_1 \square G_2$ seja bipartido, é necessário que

ambos G_1 e G_2 sejam bipartidos (não possuam ciclo ímpar).
Da condição suficiente: Sejam C um ciclo em $G_1 \square G_2$ e (x_1, y_1) um vértice em C. O ciclo C é formado por G_1-arestas que compõem uma trilha válida W_1 de x_1 a x_1 em G_1, e por G_2-arestas que compõem uma trilha válida W_2 de y_1 a y_1 em G_2. Como $|C| = |W_1| + |W_2|$, para que $G_1 \square G_2$ possua ciclo ímpar é necessário que pelo menos um dos grafos fatores admita trilha fechada de tamanho ímpar. É fácil observar que um grafo sem ciclo ímpar não admite tal trilha. Dado que G_1 e G_2 não possuem ciclo ímpar (são bipartidos), conclui-se que $G_1 \square G_2$ também não possui ciclo ímpar (é bipartido).

□

4.2 Resultados propriamente ditos

4.2.1 Emparelhamento Perfeito ou Quase-Perfeito no Produto Cartesiano de Grafos

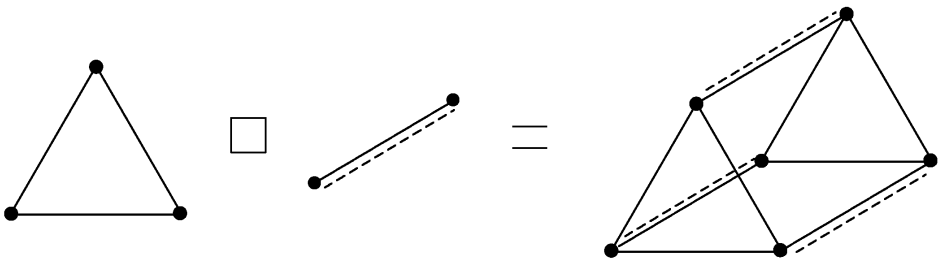
Nesta seção são desenvolvidas propriedades do produto cartesiano de grafos relacionadas a emparelhamentos perfeito e quase-perfeito, necessárias para posterior desenvolvimento de propriedades do número desemparelhante do produto.

Proposição 4.2.1. *Se G_1 ou G_2 é emparelhável, então $G_1 \square G_2$ é emparelhável.*

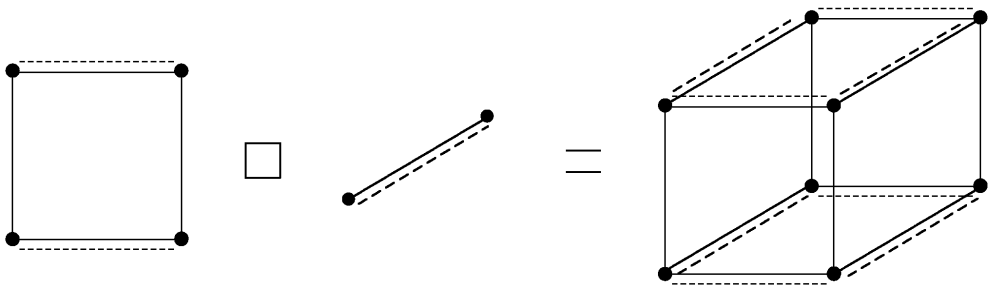
Prova. Seja G_1 o grafo emparelhável, e seja $E_M(G_1)$ um emparelhamento perfeito em G_1. É possível obter um emparelhamento perfeito em $G_1 \square G_2$ a partir de G_1-*arestas* desta forma: $E_M(G_1) \times V(G_2)$. Como $E_M(G_1)$ satura todos os vértices em $V(G_1)$, por ser um emparelhamento perfeito em G_1, o produto $E_M(G_1) \times V(G_2)$ irá saturar todos os vértices de $V(G_1) \times V(G_2)$, ou seja, todos os vértices em $V(G_1 \square G_2)$.

A Figura 4.3(a) ilustra um caso em que apenas um dos grafos (G_2) é emparelhável, e a partir de G_2-*arestas* é formado um emparelhamento perfeito em $G_1 \square G_2$. Na Figura 4.3(b), ambos os grafos são emparelháveis, o que permite obter pelo menos 2 emparelhamentos perfeitos em $G_1 \square G_2$: um a partir de G_1-*arestas*, e outro a partir de G_2-*arestas*.

□



(a) Emparelhamento perfeito em $G_1 \square G_2$ a partir de um emparelhamento perfeito em G_2 ($G_1 \cong C_3$ e $G_2 \cong P_2$).



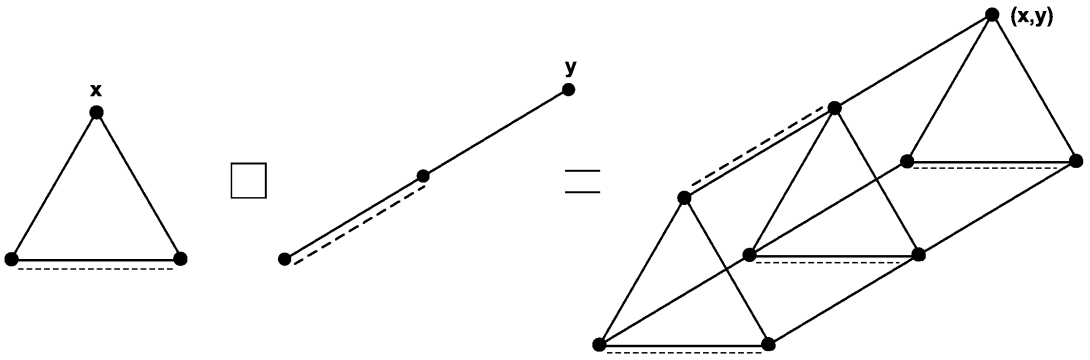
(b) Dois emparelhamentos perfeitos em $G_1 \square G_2$ a partir de emparelhamento perfeito em grafos fatores: um a partir de G_1, e outro a partir de G_2 ($G_1 \cong C_4$ e $G_2 \cong P_2$).

Figura 4.3: Emparelhamento perfeito em $G_1 \square G_2$, dados que G_1 ou G_2 são emparelháveis.

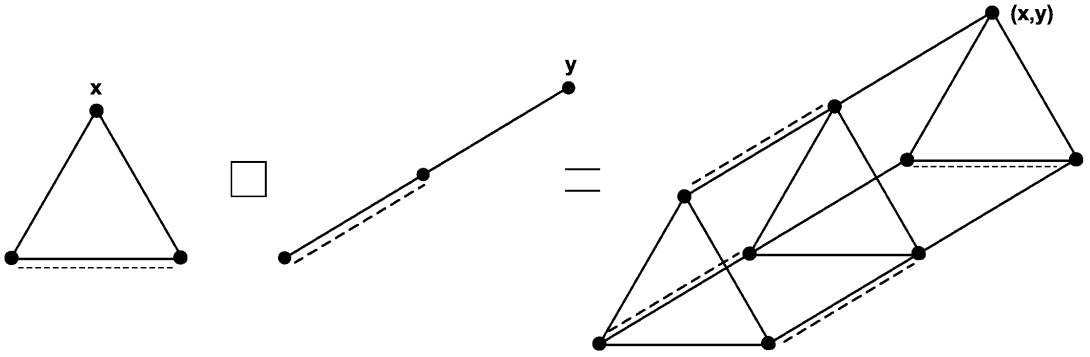
Proposição 4.2.2. *Se G_1 e G_2 são ambos quase-emparelháveis, então $G_1 \square G_2$ é quase-emparelhável.*

Prova. Sejam $E_M(G_1)$ e $E_M(G_2)$ emparelhamentos quase-perfeitos em G_1 e G_2, respectivamente, e sejam $x \in G_1$ e $y \in G_2$ os vértices não saturados por estes emparelhamentos. É possível obter um emparelhamento quase-perfeito em $G_1 \square G_2$ de duas formas: (1) $(E_M(G_1) \times V(G_2)) \cup (E_M(G_2) \times \{x\})$ ou (2) $(E_M(G_2) \times V(G_1)) \cup (E_M(G_1) \times \{y\})$. Em ambos os casos, (x, y) será o vértice não saturado. A Figura 4.4 ilustra a idéia.

□



(a) $(E_M(G_1) \times V(G_2)) \cup (E_M(G_2) \times \{x\})$



(b) $(E_M(G_2) \times V(G_1)) \cup (E_M(G_1) \times \{y\})$

Figura 4.4: Duas formas de formar um emparelhamento quase-perfeito em $G_1 \square G_2$, dados que G_1 e G_2 são quase-emparelháveis ($G_1 \cong C_3$ e $G_2 \cong P_3$).

4.2.2 Número Desemparelhante do Produto Cartesiano de Grafos

O conceito de número desemparelhante varia de acordo com a paridade do número de vértices de um grafo, portanto há dois casos: (1) quando o grafo possui número par de vértices, desejamos saber o número mínimo de arestas a serem removidas do grafo para que o mesmo não seja emparelhável (não admita emparelhamento perfeito); (2) quando possui número ímpar de vértices, desejamos saber o número mínimo de arestas a serem removidas do grafo para que o mesmo não seja quase-emparelhável (não admita emparelhamento quase-perfeito). Por conta disto, freqüentemente as propriedades relacionadas a este conceito precisam ser tratadas por cada tipo de caso.

Existe um limite superior natural para o número desemparelhante, que foi observado no trabalho que introduziu o conceito:

Observação 4.2.3. *$mp(G) \leq \delta(G)$ se n é par. (BRIGHAM et al., 2005)*

Prova. Corresponde a remover todas as arestas incidentes a um vértice v de grau mínimo, deixando v isolado e impossibilitado de participar de algum emparelhamento. □

Observação 4.2.4. *$mp(G) \leq d_1(G) + d_2(G)$ se n é ímpar. (BRIGHAM et al., 2005)*

Prova. Similar à idéia da prova na Observação 4.2.3, porém corresponde a isolar dois vértices de menor grau. □

Observemos, então, um limite superior natural para o número desemparelhante do produto cartesiano:

Observação 4.2.5. *$mp(G_1 \square G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2)$ se $n_1 \times n_2$ é par.*

Prova. Da Observação 4.2.3, temos que $mp(G) \leq \delta(G)$ se n é par. Da Observação 4.1.5, temos que $\delta(G_1 \square G_2) = \delta(G_1) + \delta(G_2)$. Assim, temos que: $mp(G_1 \square G_2) \leq \delta(G_1 \square G_2) = \delta(G_1) + \delta(G_2)$.

□

Observação 4.2.6. *$mp(G_1 \square G_2) \leq d_1(G_1) + d_1(G_2) + min(d_1(G_1) + d_2(G_2); d_2(G_1) + d_1(G_2))$ se $n_1 \times n_2$ é ímpar.*

Prova. Diretamente da Observação 4.2.4 vem que $mp(G) \leq d_1(G) + d_2(G)$ se n é ímpar, e da Observação 4.1.4 que $d_{G_1 \square G_2}((x, y)) = d_{G_1}(x) + d_{G_2}(y)$.

□

O próximo passo é propor limites inferiores para o número desemparelhante do produto cartesiano. São considerados três casos: (1) ambos os grafos fatores possuem número par de vértices; (2) exatamente um grafo fator possui número par de vértices; (3) nenhum grafo fator possui número par de vértices.

Proposição 4.2.7. *$mp(G_1 \square G_2) \geq mp(G_1) + mp(G_2)$ se ambos n_1 e n_2 forem pares.*

Prova. Se existe um emparelhamento perfeito M em G_1, é possível construir um emparelhamento perfeito em $G_1 \square G_2$ utilizando as arestas equivalentes a M em cada uma das n_2 cópias de G_1 (Proposição 4.2.1). Então, para que o grafo $G_1 \square G_2$ não possua emparelhamento perfeito construído desta forma, é necessário que pelo menos uma das cópias de G_1 em $G_1 \square G_2$ não possua emparelhamento perfeito. O

número mínimo de arestas a serem removidas de uma cópia de G_1 para garantir esta condição é exatamente $mp(G_1)$, por definição. Analogamente, precisamos considerar o emparelhamento perfeito construído com G_2-*arestas*. Assim, é necessário remover pelo menos $mp(G_1) + mp(G_2)$ arestas para que não haja emparelhamento perfeito deste tipo em $G_1 \square G_2$. A coerência da proposição é mantida se G_1 (G_2) não admitir emparelhamento perfeito, pois neste caso $mp(G_1) = 0$ ($mp(G_2 = 0)$). □

Proposição 4.2.8. *$mp(G_1 \square G_2) \geq mp(G_1)$ se n_1 for par e n_2 ímpar.*

Prova. Retirando menos do que $mp(G_1)$ arestas, todo subgrafo correspondente a uma cópia de G_1 continuará tendo um emparelhamento perfeito, e portanto $G_1 \square G_2$ também.

□

Proposição 4.2.9. *$mp(G_1 \square G_2) \geq min(mp(G_1); mp(G_2))$ se ambos n_1 e n_2 forem ímpares.*

Prova. Retirando menos do que $min(mp(G_1); mp(G_2))$ arestas, todo subgrafo correspondente a uma cópia de G_1 (ou de G_2) continuará tendo um emparelhamento quase-perfeito. Tomemos então emparelhamentos quase-perfeitos para as cópias de G_1, de modo que os vértices não-saturados sejam correspondentes. (Isto sempre é possível, uma vez que foram retiradas menos do que $mp(G_1)$ arestas.) Consideremos a cópia de G_2 que contém estes vértices não-saturados. Como foram retiradas menos do que $mp(G_2)$ arestas, pode-se definir um emparelhamento quase-perfeito para esta cópia de G_2. Concluímos que $G_1 \square G_2$ continuará tendo um emparelhamento quase-perfeito. □

Com os limites superior e inferior apresentados, o número desemparelhante de algumas topologias de rede baseadas em produto cartesiano pode ser calculado em

função de suas topologias fatores. Alguns exemplos são apresentados a seguir, com as seguintes considerações: o grafo de *Petersen* está denotado por P; o hipercubo de dimensão n por Q_n; e o grafo estrela (Cayley) de dimensão n, por S_n.

A topologia hiper-*Petersen* (DAS; BANERJEE, 1992), denotada HP_n, $n \geq 3$, é o produto cartesiano de um hipercubo de dimensão $(n-3)$ e um grafo de *Petersen*.

Corolário 4.2.10. $mp\,(HP_n) = n$.

Prova. É sabido que:

$$mp\,(Q_{n-3}) = n-3 \text{ e que } mp\,(P) = 3 \text{ (BRIGHAM et al., 2005).}$$

Como $HP_n = Q_{n-3} \,\square\, P$, temos (da Observação 4.2.5) que:

$$mp\,(HP_n) \leq \delta(Q_{n-3}) + \delta(P) = (n-3) + 3 = n.$$

E temos (da Proposição 4.2.7) que:

$$mp\,(HP_n) \geq mp\,(Q_{n-3}) + mp\,(P) = (n-3) + 3 = n.$$

□

A topologia *Petersen* n-dobrado (ÖHRING; DAS, 1994), denotada FP_n, é o produto cartesiano de n grafos de *Petersen*.

Corolário 4.2.11. $mp\,(FP_n) = 3n$.

Prova. É sabido que:

$$mp\,(P) = 3 \text{ (BRIGHAM et al., 2005).}$$

Como $FP_n = P^n$, temos (da Observação 4.2.5) que:

$$mp\,(FP_n) \leq \delta(P) \times n = 3n.$$

E temos (da Proposição 4.2.7) que:

$$mp\,(FP_n) \geq mp\,(P) \times n = 3n.$$

□

A topologia cubo-*Petersen* dobrado de dimensão k (ÖHRING; DAS, 1996), denotada $FPQ_{n,k}$, é o produto cartesiano de um hipercubo de dimensão n e k grafos de *Petersen*.

Corolário 4.2.12. $mp\,(FPQ_{n,k}) = 4n.$

Prova. É sabido que:

$$mp\,(Q_n) = n \text{ e que } mp\,(P) = 3 \text{ (BRIGHAM et al., 2005).}$$

Como $FPQ_{n,k} = Q_n \,\square\, P^k$, temos (da Observação 4.2.5) que:

$$mp\,(FPQ_{n,k}) \leq \delta(Q_n) + (\delta(P) \times n) = n + 3n = 4n.$$

E temos (da Proposição 4.2.7) que:

$$mp\,(FPQ_{n,k}) \geq mp\,(Q_n) + (mp\,(P) \times n) = n + 3n = 4n.$$

□

A topologia hiper-estrela (AL-AYYOUB; DAY, 1998), denotada $S_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, é o produto cartesiano de k grafos estrela.

Corolário 4.2.13. $mp\,(S_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)$.

Prova. É sabido que:

$$mp\,(S_n) = n - 1 \text{ (CHENG; LIPTÁK, 2007).}$$

Como $S_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = S_{n_1} \,\square\, S_{n_2} \,\square\, \ldots \,\square\, S_{n_k}$, temos (da Observação 4.2.5) que:

$$mp\,(S_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) \leq \delta(S_{n_1}) + \delta(S_{n_2}) + \ldots + \delta(S_{n_k}) = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1).$$

E temos (da Proposição 4.2.7) que:

$$mp\,(S_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) \geq mp\,(S_{n_1}) + mp\,(S_{n_2}) + \ldots + mp\,(S_{n_k}) = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1).$$

□

A topologia estrela-cubo (DATTA; BISWAS, 2004), denotada $SQ_{m,n}$, é o produto cartesiano do grafo estrela de dimensão m e do hipercubo de dimensão n.

Corolário 4.2.14. $mp\,(SQ_{m,n}) = m + n - 1$.

Prova. É sabido que:

$$mp\,(S_m) = m - 1 \text{ (CHENG; LIPTÁK, 2007), e que}$$

$$mp\,(Q_n) = n \text{ (BRIGHAM et al., 2005).}$$

Como $SQ_{m,n} = S_m \,\square\, Q_n$, temos (da Observação 4.2.5) que:

$$mp\,(SQ_{m,n}) \leq \delta(S_m) + \delta(Q_n) = (m - 1) + n = m + n - 1.$$

E temos (da Proposição 4.2.7) que:

$$mp\,(SQ_{m,n}) \geq mp\,(S_m) + mp\,(Q_n) = (m-1) + n = m + n - 1.$$

□

A topologia hipercubo de dimensão n, denotada Q_n, é o produto cartesiano de n arestas (grafos K_2). O número desemparelhante do hipercubo é conhecido e foi calculado com prova específica que considerou características particulares do grafo estudado. O objetivo do Corolário 4.2.15 é apresentar uma prova alternativa:

Corolário 4.2.15. *$mp\,(Q_n) = n$ (BRIGHAM et al., 2005, Teor. 12)*

Prova. É fácil verificar que:

$$mp\,(K_2) = 1.$$

Como $Q_n = (K_2)^n$, temos (da Observação 4.2.5) que:

$$mp\,(Q_n) \leq \delta(K_2) \times n = n.$$

E temos (da Proposição 4.2.7) que:

$$mp\,(Q_n) \geq mp\,(K_2) \times n = n.$$

□

Os corolários de 4.2.10 a 4.2.15 apresentaram o número desemparelhante de seis topologias. Os casos apresentados são do tipo em que os limites superior e inferior para o número desemparelhante do produto cartesiano se igualaram, esmagando

suas desigualdades e possibilitando chegar ao número desemparelhante exato. Resultados para outras topologias poderiam ser demonstrados utilizando a mesma idéia. Uma indagação natural é se os limites inferior e superior sempre se igualam. A resposta é não. E o que há em comum entre os grafos destas demonstrações que levou à igualdade dos limites? É válido recordar um dos significados aplicados do número desemparelhante.

O número desemparelhante $mp(G)$ é um critério topológico relacionado à tolerância a falhas. Para redes em que é essencial cada processador possuir a qualquer instante um parceiro especial, se o número desemparelhante do grafo G (que modela a topologia subjacente) for grande, significa que a respectiva topologia será robusta no caso de falha de aresta. Ou seja, $mp(G)$ será tão melhor quanto maior. Dado que, quando G possui número par de vértices, o limite superior natural de $mp(G)$ é o grau mínimo de G (Observação 4.2.3), uma topologia de tamanho par pode ser considerada ótima em relação ao número desemparelhante se $mp(G)$ for igual a $\delta(G)$ (simplesmente porque não tem como ser maior).

O que há de comum entre as topologias citadas nos corolários, além de possuírem tamanho (número de vértices) par, é a otimalidade de suas topologias fatores quanto ao número desemparelhante ($mp(G)$ é exatamente igual a $\delta(G)$). E é interessante notar que o produto cartesiano manteve na topologia gerada a otimalidade das topologias fatores — pois gerou topologias também ótimas quanto ao número desemparelhante —, o que se faz enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.2.16. *Sejam G_1 e G_2 grafos com número par de vértices. Se G_1 e G_2 forem ótimos quanto ao número desemparelhante, então $G_1 \square G_2$ também o será.*

Prova. O número desemparelhante de um grafo G é limitado superiormente pelo grau mínimo deste grafo, sendo considerado ótimo quando a igualdade

em $mp\,(G) \leq \delta(G)$ é satisfeita. Assim, se G_1 e G_2 são ótimos quanto ao número desemparelhante, temos que $mp\,(G_1) = \delta(G_1)$ e $mp\,(G_2) = \delta(G_2)$.

Temos (da Observação 4.2.5) que:

$$mp\,(G_1 \square G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2).$$

E temos (da Proposição 4.2.7) que:

$$mp\,(G_1 \square G_2) \geq mp\,(G_1) + mp\,(G_2).$$

Mas:

$$mp\,(G_1) = \delta(G_1) \text{ e } mp\,(G_2) = \delta(G_2).$$

Logo:

$$mp\,(G_1 \square G_2) = \delta(G_1) + \delta(G_2) = \delta(G_1 \square G_2).$$

□

O fato de o produto cartesiano gerar topologias ótimas quanto ao número desemparelhante, dado que as topologias fatores o são e possuem tamanho par, é uma propriedade que fortalece a idéia de que o produto cartesiano é um adequado sintetizador de topologias de rede de interconexão.

5 CONCLUSÃO

Várias situações da vida real podem ser modeladas como problemas em grafos. A partir daí, os conhecimentos disponíveis na Teoria dos Grafos podem ser utilizados para tratar o problema específico. O desenvolvimento de propriedades teóricas de uma estrutura matemática enriquece a biblioteca disponível do respectivo campo de conhecimento.

Neste trabalho, foi estudada a operação produto cartesiano de grafos. Foram desenvolvidas propriedades sobre a existência de emparelhamentos perfeito e quase-perfeito no grafo gerado pelo produto em função de seus fatores. Com estes resultados, foram desenvolvidas propriedades sobre o número desemparelhante do grafo gerado pelo produto. É um trabalho de continuidade do estudo da classe geral do produto cartesiano de grafos. Propriedades estudadas em outros trabalhos incluem: conectividade (CHIUE; SHIEH, 1999; XU; YANG, 2006; KLAVŽAR; ŠPACAPAN, 2008; ŠPACAPAN, 2008; LU; XU, 2009), difusão (*broadcasting*) (ÖHRING; IBEL; DAS, 1995; BAO; IGARASHI; ÖHRING, 1998), tenacidade (CHOUDUM; PRIYA, 1999), variação do diâmetro (degradação de desempenho) no evento de falha (XU; XU; HOU, 2005; BANIČ; ŽEROVNIK, 2008), alocação de recursos (IMANI; SARBAZI-AZAD; ZOMAYA, 2009) e existência de caminhos/ciclos hamil-

tonianos (ZARETSKII, 1966; BATAGELJ; PISANSKI, 1982; DIMAKOPOULOS; PALIOS; POULAKIDAS, 2005; ČADA; FLANDRIN; LI, 2009).

Dentro do contexto de redes de interconexão, o número desemparelhante de um grafo (que modela uma topologia) é um parâmetro associado à tolerância a falhas. Os resultados obtidos neste trabalho possibilitaram o cálculo do número desemparelhante de algumas topologias de rede de interconexão que são produto cartesiano de grafos, a saber: hiper-*Petersen* (Corolário 4.2.10); *Petersen* n-dobrado (Corolário 4.2.11); cubo-*Petersen* dobrado (Corolário 4.2.12); hiper-estrela (Corolário 4.2.13); estrela-cubo (Corolário 4.2.14); hipercubo (Corolário 4.2.15 - prova alternativa à apresentada em (BRIGHAM et al., 2005, Teor. 12)). É um trabalho de continuidade do estudo do número desemparelhante de topologias de rede de interconexão. Topologias estudadas em outros trabalhos incluem: grafos (n,k)-estrela e grafos de Cayley em 2007 (CHENG; LIPTÁK); grafos (n,k)-arranjo e grafos de Cayley em 2008 (CHENG et al.); grafos tipo-hipercubo e grafos recursivo-circulantes em 2008 (PARK); hipercubos k-ários em 2010 (WANG et al.).

O produto cartesiano de grafos é considerado um adequado sintetizador de topologias por herdar as propriedades dos grafos fatores de forma interessante do ponto de vista dos critérios topológicos comumente analisados. Nesse trabalho, foi observada uma nova propriedade desejável da operação: a otimalidade do número desemparelhante é herdada dos grafos fatores, quando eles possuem número par de vértices. Ou seja, se duas topologias de tamanho par forem ótimas em relação ao número desemparelhante, a topologia criada pelo produto delas também será. Essa observação reforça o produto como boa estratégia para criação de topologias.

O fato de o produto cartesiano ser um adequado sintetizador de topologias contribuiu para intensificar o estudo da operação, o que pode ser observado pelo volume de trabalhos citados no segundo parágrafo deste capítulo. Além de enriquecerem a Teo-

ria dos Grafos, esses trabalhos auxiliam a análise de topologias de redes de produto. Assim, a comunidade tem um bom motivo para desenvolver novas propriedades do produto cartesiano de grafos. Nesse trabalho, foram estudadas propriedades relacionadas a emparelhamento. Há inúmeras a serem (re)estudadas. Só para citar algumas: existência de caminho ou ciclo hamiltoniano, número dominante, número desemparelhante condicional, e a possibilidade de desenvolvimento de algoritmos em grafos mais eficientes (que levem em consideração o fato de o grafo ser produto cartesiano). E, dentro de cada propriedade, há muitas questões a serem abordadas. Sobre o número dominante, por exemplo, Vizing conjecturou (VIZING, 1963) que, para quaisquer grafos finitos G e H, é válido que $\gamma(G)\gamma(H) \leq \gamma(G \Box H)$, onde $\gamma(G)$ é o número dominante de um grafo G. Com quase meio século de vida, a conjectura ainda é pesquisada nos dias de hoje (CLARK; SUEN, 2000; BREŠAR, 2001; CLARK; ISMAIL; SUEN, 2003; HARTNELL; RALL, 2003; SUN, 2004; BREŠAR, 2005; HENNING; RALL, 2005; BREŠAR; RALL, 2009; HOU; LU, 2009; AHARONI; SZABÓ, 2009). Em 2008 foi publicado um livro IMRICH; KLAVŽAR; RALL dedicado ao produto cartesiano de grafos, com o objetivo de oferecer um ambiente unificado das propriedades conhecidas da operação (algumas delas recentemente provadas) e alguns problemas interessantes em aberto na área. Ou seja, o produto cartesiano de grafos é um tópico onde há muito o que ser desenvolvido; um tema fértil para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

AHARONI, R.; SZABÓ, T. Vizing's conjecture for chordal graphs. **Discrete Mathematics**, [S.l.], v.309, n.6, p.1766–1768, 2009.

AKERS, S.; HARD, D.; KRISHNAMWTHY, B. The Star Graph: an attractive alternative to the n-cube. **Interconnection networks for high-performance parallel computers**, [S.l.], p.145, 1994.

AKERS, S.; KRISHNAMURTHY, B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks. **IEEE Transactions on Computers**, [S.l.], v.38, n.4, p.555–566, 1989.

AL-AYYOUB, A.; DAY, K. The hyperstar interconnection network. **Journal of Parallel and Distributed Computing**, [S.l.], v.48, n.2, p.175–199, 1998.

AL-AYYOUB, A.; DAY, K. Comparative Study of Product Networks. **Journal of Parallel and Distributed Computing**, [S.l.], v.62, n.1, p.1–18, 2002.

BANIČ, I.; ŽEROVNIK, J. The fault-diameter of Cartesian products. **Advances in Applied Mathematics**, [S.l.], v.40, n.1, p.98–106, 2008.

BAO, F.; IGARASHI, Y.; ÖHRING, S. Reliable broadcasting in product networks. **Discrete applied mathematics**, [S.l.], v.83, n.1-3, p.3–20, 1998.

BATAGELJ, V.; PISANSKI, T. Hamiltonian Cycles in the Cartesian Product of a Tree and a Cycle. **Discrete Math.**, [S.l.], v.38, n.2, p.311–312, 1982.

BERMOND, J.; DELORME, C.; QUISQUATER, J. Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory. **Journal of Parallel and Distributed Computing**, [S.l.], v.3, n.4, p.433–449, 1986.

BERMOND, J.; PEYRAT, C. De Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube. **Hypercube and Distributed Computers**, [S.l.], v.3, p.279–293, 1989.

BERTALANFFY, L. **Teoria geral dos sistemas**. 3. ed..ed. [S.l.]: Petropolis: Vozes, 1977.

BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)**. [S.l.]: Springer, New York, 2008.

BREŠAR, B. On Vizing's conjecture. **Discuss. Math. Graph Theory**, [S.l.], v.21, n.1, p.5–11, 2001.

BREŠAR, B. Vizing-like conjecture for the upper domination of Cartesian products of graphs–the proof. **the electronic journal of combinatorics**, [S.l.], v.12, n.12, p.1, 2005.

BREŠAR, B.; RALL, D. Fair reception and Vizing's conjecture. **Journal of Graph Theory**, [S.l.], v.61, n.1, p.45–54, 2009.

BRIGHAM, R.; HARARY, F.; VIOLIN, E.; YELLEN, J. Perfect-matching preclusion. **Congressus Numerantium**, [S.l.], v.174, p.185–192, 2005.

ČADA, R.; FLANDRIN, E.; LI, H. Hamiltonicity and pancyclicity of cartesian products of graphs. **Discrete Mathematics**, [S.l.], 2009.

CHENG, E.; LESNIAK, L.; LIPMAN, M.; LIPTAK, L. Matching preclusion for alternating group graphs and their generalizations. **International Journal of Foundations of Computer Science**, [S.l.], v.19, n.6, p.1413–1437, 2008.

CHENG, E.; LESNIAK, L.; LIPMAN, M.; LIPTÁK, L. Conditional matching preclusion sets. **Information Sciences**, [S.l.], v.179, n.8, p.1092–1101, 2009.

CHENG, E.; LIPTÁK, L. Matching preclusion for some interconnection networks. **Networks**, [S.l.], v.50, n.2, p.173, 2007.

CHIANG, W.; CHEN, R. The (n, k)-star graph: a generalized star graph. **Information Processing Letters**, [S.l.], v.56, n.5, p.264, 1995.

CHIUE, W.; SHIEH, B. On connectivity of the Cartesian product of two graphs. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v.102, n.2-3, p.129–137, 1999.

CHOUDUM, S.; PRIYA, N. Tenacity of complete graph products and grids. **Networks**, [S.l.], v.34, n.3, p.192–196, 1999.

CLARK, W.; ISMAIL, M.; SUEN, S. Application of Upper and Lower Bounds for the Domination Number to Vizing's Conjecture. **Ars Combinatoria**, [S.l.], v.69, p.97–108, 2003.

CLARK, W.; SUEN, S. An inequality related to Vizing's conjecture. **Electron. J. Combin**, [S.l.], v.7, n.1, p.3, 2000.

DAS, S.; BANERJEE, A. **Hyper Petersen network: yet another hypercube-like topology**. 1992. 270–277p.

DATTA, R.; BISWAS, P. STAR-CUBE: a special purpose interconnection network for signal processing. **IETE journal of research**, [S.l.], v.50, n.1, p.9–24, 2004.

DAY, K.; AL-AYYOUB, A. The cross product of interconnection networks. **IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems**, [S.l.], v.8, n.2, p.109–118, 1997.

DAY, K.; TRIPATHI, A. Arrangement graphs: a class of generalized star graphs. **Information Processing Letters**, [S.l.], v.42, n.5, p.235–241, 1992.

DIMAKOPOULOS, V.; PALIOS, L.; POULAKIDAS, A. On the hamiltonicity of the cartesian product. **Information Processing Letters**, [S.l.], v.96, n.2, p.49–53, 2005.

DUATO, J.; YALAMANCHILI, S.; NI, L. **Interconnection networks: an engineering approach**. [S.l.]: Morgan Kaufmann Pub, 2003.

EFE, K.; FERNANDEZ, A. **Computational Properties of Mesh Connected Trees: versatile architectures for parallel computation**. 1994.

GANESAN, E.; PRADHAN, D. The hyper-deBruijn networks: scalable versatile architecture. **IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems**, [S.l.], v.4, n.9, p.962–978, 1993.

HARARY, F. Conditional connectivity. **Networks**, [S.l.], v.13, n.3, p.347–357, 1983.

HARARY, F. Maximum versus minimum invariants for graphs. **J. Graph Theory**, [S.l.], v.7, n.3, 1983.

HARARY, F. **General connectivity**. 1984. 83–92p. v.1073.

HARARY, F.; HAYES, J.; WU, H. A survey of the theory of hypercube graphs. **Computers &amp**, [S.l.], p.277–289, 1988.

HARARY, F.; PLANTHOLT, M. **Minimum and maximum, minimal and maximal: connectivity**. 1986. 1-5p.

HARTNELL, B.; RALL, D. Improving some bounds for dominating cartesian products. **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, [S.l.], v.23, n.2, p.261–272, 2003.

HENNESSY, J.; PATTERSON, D. **Computer architecture: a quantitative approach**. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2007.

HENNING, M.; RALL, D. On the total domination number of Cartesian products of graphs. **Graphs and Combinatorics**, [S.l.], v.21, n.1, p.63–69, 2005.

HOFFMAN, A.; SINGLETON, R. On Moore graphs with diameters 2 and 3. **IBM J. Res. Develop**, [S.l.], v.4, p.497–504, 1960.

HOU, X.; LU, Y. On the {k}-domination number of Cartesian products of graphs. **Discrete Mathematics**, [S.l.], v.309, n.10, p.3413–3419, 2009.

HSU, L.; LIN, C. **Graph theory and interconnection networks**. [S.l.]: CRC, 2008.

IMANI, N.; SARBAZI-AZAD, H.; ZOMAYA, A. Resource placement in Cartesian product of networks. **Journal of Parallel and Distributed Computing**, [S.l.], 2009.

IMRICH, W.; KLAVŽAR, S.; RALL, D. **Topics in graph theory. Graphs and their Cartesian product**. [S.l.]: Wellesley, MA: AK Peters, 2008.

KLAVŽAR, S.; ŠPACAPAN, S. On the edge-connectivity of Cartesian product graphs. **Asian-European J. Math.**, [S.l.], v.1, n.01, p.93–98, 2008.

KNUTH, D. **The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0: introduction to combinatorial algorithms and boolean functions**. [S.l.]: Addison-Wesley Professional, 2008. 14p.

LU, Y.; XU, J. Panconnectivity of Cartesian product graphs. **The Journal of Supercomputing**, [S.l.], p.1–8, 2009.

MILLER, M.; ŠIRÁN, J. Moore graphs and beyond: a survey of the degree/diameter problem. **Electronic Journal of Combinatorics**, [S.l.], v.61, p.1–63, 2005.

ÖHRING, S.; DAS, S. The folded Petersen network: a new versatile multiprocessor interconnection topology. **Lecture Notes in Computer Science**, [S.l.], p.301–314, 1994.

ÖHRING, S.; DAS, S. Folded Petersen cube networks: new competitors for the hypercubes. **IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems**, [S.l.], p.151–168, 1996.

ÖHRING, S.; IBEL, M.; DAS, S. **Reliable broadcasting in product networks in the presence of faultynodes**. 1995. 711–718p.

PARK, J.; CHWA, K. **Recursive Circulant: a new topology for multicomputer networks**. 1994. 73p.

PARK, J.-H. Matching preclusion problem in restricted HL-graphs and recursive circulant $G(2^m, 4)$. **Journal of KIISE**, [S.l.], v.35, n.2, p.60–65, 2008.

PARK, J.; SON, S. Conditional matching preclusion for hypercube-like interconnection networks. **Theoretical Computer Science**, [S.l.], 2009.

PRADHAN, D.; REDDY, S. A Fault-Tolerant Communication Architecture for Distributed Systems. **IEEE Transactions on Computers**, [S.l.], v.31, n.9, p.863–870, 1982.

PREPARATA, F.; VUILLEMIN, J. The cube-connected cycles: a versatile network for parallel computation. **Communications of the ACM**, [S.l.], v.24, n.5, p.309, 1981.

ROSENBERG, A. Product-shuffle networks: toward reconciling shuffles and butterflies. **Discrete Applied Mathematics**, [S.l.], v.37, p.465–488, 1992.

SAAD, Y.; SCHULTZ, M. Topological properties of hypercubes. **IEEE Transactions on Computers**, [S.l.], v.37, n.7, p.867–872, 1988.

SAMATHAM, M.; PRADHAN, D. The de Bruijn multiprocessor network: a versatile parallel processing and sorting network for vlsi. **IEEE Transactions on Computers**, [S.l.], p.567–581, 1989.

ŠPACAPAN, S. Connectivity of Cartesian products of graphs. **Applied Mathematics Letters**, [S.l.], v.21, n.7, p.682–685, 2008.

STONE, H. Parallel processing with the perfect shuffle. **IEEE Transactions on Computers**, [S.l.], v.100, n.20, p.153–161, 1971.

SUN, L. A result on Vizing's conjecture. **Discrete mathematics**, [S.l.], v.275, n.1-3, p.363–366, 2004.

VIZING, V. The Cartesian product of graphs, Vy cisl. **Sistemy**, [S.l.], v.9, p.30–43, 1963.

WANG, S.; WANG, R.; LIN, S.; LI, J. Matching preclusion for k-ary n-cubes. **Discrete Applied Mathematics**, [S.l.], 2010.

XU, J. **Topological structure and analysis of interconnection networks**. [S.l.]: Kluwer Academic Pub, 2001.

XU, J.; YANG, C. Connectivity of Cartesian product graphs. **Discrete Mathematics**, [S.l.], v.306, n.1, p.159–165, 2006.

XU, M.; XU, J.; HOU, X. Fault diameter of Cartesian product graphs. **Information Processing Letters**, [S.l.], v.93, n.5, p.245–248, 2005.

YOUSSEF, A. **Design and analysis of product networks**. 1995. 521–528p.

ZARETSKII, K. On the Hamiltonian cycle and the Hamiltonian chain [path] in the Cartesian product of two graphs. **Cybernetics and Systems Analysis**, [S.l.], v.2, n.5, p.3–8, 1966.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA
CCMN - Bloco C - Cidade Universitária - Ilha do Fundão
Rio de Janeiro - RJ CEP: 21941-916
www.ppgi.ufrj.br