

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

FREDERICO SANTOS TEIXEIRA

**Análise e Simulação Numérica da  
Equação de Korteweg-de Vries**

Prof. Dr. Mauro Antônio Rincon  
Orientador

Prof. Dr. Daniel Gregorio Alfaro Vigo  
Co-orientador

Rio de Janeiro, 02 de Dezembro de 2011

## Ficha Catalográfica

Teixeira, Frederico Santos

Análise e Simulação Numérica da Equação de Korteweg-de Vries / Frederico Santos Teixeira. – Rio de Janeiro: UFRJ IM, 2011.

144 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, BR-RJ, 2011.

Orientador: Mauro Antônio Rincon; Co-orientador: Daniel Gregorio Alfaro Vigo.

I. Rincon, Mauro Antônio. II. Vigo, Daniel Gregorio Alfaro. III. Título.

# Análise e Simulação Numérica da Equação de Korteweg-de Vries

Frederico Santos Teixeira

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado por:

---

Prof. Dr. Mauro Antônio Rincon (Orientador)

---

Prof. Dr. Daniel Gregorio Alfaro Vigo (Co-orientador)

---

Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala

---

Prof. Dr. Carlos Frederico Vasconcellos

---

Prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Juliana Vianna Valério

Rio de Janeiro, 02 de Dezembro de 2011

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha namorada e minha família por suportarem minha ausência nos meus momentos de dedicação.

Agradeço ao meu orientador por suportar minha presença.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu Kindle, fiel companheiro das intermináveis viagens de ônibus.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é o estudo e a análise numérica da equação de Korteweg-de Vries na forma linear, bem como a demonstração de existência e unicidade das equações linear e não-linear.

O efeito do damping localizado é analisado sobre os pontos de vista teórico e numérico em ambas as equações.

**Palavras-chave:** Análise numérica, Equação Korteweg-de Vries, Simulação numérica.

## Numerical Analysis and Simulation of Korteweg-de Vries Equation

### RESUMO

The aim of this work is the numerical analysis of the linear Korteweg-de Vries equation along with the existence and uniqueness proof of linear and non-linear equations.

The effect of the localized damping is also analysed under theoretical and numerical perspective at both equations.

**Palavras-chave:** Numerical Analysis, Korteweg-de Vries Equation, Numerical Simulation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1:	1ª função base de $\varphi$ . . . . .	89
Figura 4.2:	2ª função base de $\varphi$ . . . . .	89
Figura 4.3:	1ª função base de $\psi$ . . . . .	89
Figura 4.4:	2ª função base de $\psi$ . . . . .	89
Figura 4.5:	Gráfico do erro entre $\theta = 0.5$ e $\theta = 0.75$ . . . . .	93
Figura 4.6:	Simulação da equação linear homogênea. . . . .	106
Figura 4.7:	$L = 5.0$ . . . . .	110
Figura 4.8:	$L = 6.283185307179586$ e dado initial (4.80) . . . . .	110
Figura 4.9:	$L = 6.283185307179586$ , dado initial (4.80) e damping $a(x) \equiv 0.1$ sobre $[0, L]$ . . . . .	111
Figura 4.10:	$L = 6.283185307179586$ , dado initial (4.80) e damping $a(x) \equiv 0.5$ sobre $[0, L]$ . . . . .	112
Figura 4.11:	$L = 6.283185307179586$ , dado initial (4.80) e damping $a(x) \equiv 0.1$ sobre $(0, 1) \cup (5.28319, 6.28319)$ . . . . .	112
Figura 4.12:	$L = 6.283185307179586$ , dado initial (4.80) e damping $a(x) \equiv 0.5$ sobre $(0, 1) \cup (5.283185307179586, 6.283185307179586)$ . . . . .	113
Figura 5.1:	Gráfico do erro entre $\theta = 0.5$ e $\theta = 0.75$ . . . . .	121
Figura 5.2:	Gráfico do erro entre $\theta = 0.5$ e $\theta = 0.75$ . . . . .	124
Figura 5.3:	Grafico da energia, sem damping. . . . .	128
Figura 5.4:	Grafico da energia com damping $a(x) = 1.0$ sobre $[0, 5]$ . . . . .	129
Figura 5.5:	Grafico da energia com damping $a(x) = 1.0$ sobre $\omega = (0, 1) \cup (4, 5)$ . . . . .	129
Figura 5.6:	Grafico da energia com damping $a(x) = 5.0$ sobre $\omega = (0, 1) \cup (4, 5)$ . . . . .	130

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Convergência da equação linear sem termo de damping . . . . .	93
Tabela 4.2: Convergência da equação linear com damping unitário sobre $[0.0, 1.0]$	105
Tabela 4.3: Convergência da equação linear com damping unitário sobre $(0.0, 0.25) \cup (0.75, 1.0)$ . . . . .	105
Tabela 4.4: Tabela que relaciona o número de casas decimais usado para aproximar $\pi$ com os valores máximo e mínimo da energia. . . . .	114
Tabela 5.1: Linearização de $u$ - convergência da equação não-linear sem damping	120
Tabela 5.2: Linearização de $u$ - convergência da equação não-linear com damping sobre $[0.0, 1.0]$ . . . . .	121
Tabela 5.3: Linearização de $u$ - convergência da equação não-linear com damping sobre $[0.0, 0.25] \cup [0.75, 1.0]$ . . . . .	122
Tabela 5.4: Linearização de $u_x$ - convergência da equação não-linear sem damping . . . . .	123
Tabela 5.5: Linearização de $u_x$ - convergência da equação não-linear com damping unitário sobre $[0.0, 1.0]$ . . . . .	124
Tabela 5.6: Linearização de $u_x$ - convergência da equação não-linear com damping unitário sobre $[0.0, 0.25] \cup [0.75, 1.0]$ . . . . .	125

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
1.1	Contexto	11
1.2	As Equações linear e não-linear	12
1.3	Histórico	13
1.4	O Método de Galerkin e os Elementos Finitos	14
1.5	O Método das Diferenças Finitas	15
1.6	Formulação variacional	17
1.7	Objetivos	20
1.8	Distribuição dos capítulos	22
<b>2</b>	<b>NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS</b>	24
2.1	Preliminares	24
2.2	Espaço das distribuições escalares	25
2.3	Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	26
2.4	Convergência e derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$	28
2.5	Espaços de Sobolev	28
2.5.1	Convergência em $L^p$ e no dual de $L^p$	28
2.6	Espaços $L^p(0, T; X)$ e distribuições vetoriais	31
2.7	Outros resultados úteis	33
2.8	Definições e teoremas utilizados em análise numérica	36
<b>3</b>	<b>ESTUDO DA SOLUÇÃO FRACA</b>	39
3.1	Existência e unicidade da equação linear	39
3.2	Existência e unicidade da equação linear com termo de damping	52
3.3	Existência e unicidade da equação não-linear com termo de damping	61

<b>4</b>	<b>ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO LINEAR</b>	<b>73</b>
4.1	Estimativa de erro da equação KdV linear	74
4.1.1	Tempo contínuo	74
4.1.2	Tempo discreto	79
4.1.3	Simulações e convergência	87
4.2	Estimativa de erro da equação KdV linear com termo de damping	94
4.2.1	Tempo contínuo	94
4.2.2	Tempo discreto	98
4.2.3	Simulações e convergência	104
4.3	Simulação do problema homogêneo	106
4.4	Resultados numéricos sobre a restrição de Rosier	107
4.4.1	Simulações	109
4.4.2	A influência da aproximação de $\pi$	113
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR</b>	<b>115</b>
5.1	Simulações e convergências	115
5.1.1	Linearização do termo $u(t)$ em $u(t)u_x(t)$	117
5.1.2	Linearização do termo $u_x(t)$ em $u(t)u_x(t)$	122
5.2	Simulação do caso homogêneo	125
5.3	Resultados numéricos sobre o damping localizado	126
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>131</b>
	REFERÊNCIAS	134
	APÊNDICE A COMENTÁRIOS SOBRE O SOFTWARE	138
A.1	Motivação	138
A.2	Descritivo das classes e suas funcionalidades	139
A.3	Descrição da interface do usuário	140
A.4	Recursos não utilizados neste programa	143

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contexto

A simulação computacional representa um dos ramos mais ativos da Engenharia atualmente. Diversas empresas, antes da fabricação efetiva de um produto, prototipam no computador seu problema físico buscando um melhor entendimento e/ou previsão sobre seu comportamento.

Esta demanda faz jus a necessidade de uma matemática avançada e de recursos computacionais muito eficientes. Conseqüentemente, a capacitação de pessoas fluentes em modelagem física, matemática e computação é uma necessidade.

Apesar de não se tratar especificamente de um problema físico oriundo da engenharia, como veremos mais adiante, este trabalho se encaixa no contexto descrito acima pela necessidade de sólidos conhecimentos matemáticos e recursos computacionais apurados. O enfoque será a comprovação analítica dos métodos numéricos de aproximação e computacional de resultados teóricos, enquanto o foco da engenharia hoje em dia é extrair as características de um modelo a partir da simulação computacional.

## 1.2 As Equações linear e não-linear

A equação de Korteweg-De Vries<sup>1</sup> forma uma família de equações designadas genericamente por

$$u' + u_x + u_{xxx} + [P(u)]_x = 0.$$

Neste estudo será tomado  $P(u) = \frac{1}{2}u^2$  sob o domínio  $[0, L] \times [0, T]$  e adicionando o termo  $a(x)u$  juntamente com as condições iniciais e de fronteira especiais, obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = f, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u_x(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Desconsiderando o termo de damping acima e linearizando a equação acima em torno da solução  $u = 0$  pode-se obter a equação na forma linear (novamente com o termo de damping):

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + u_x + u_{xxx} + a(x)u = f, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u_x(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0, L] \end{array} \right. \quad (1.2)$$

onde, em ambas as equações,  $a \in L^\infty(0, L)$  satisfaz  $a(x) \geq a_0 > 0$  quase sempre num aberto  $\omega \subset (0, L)$ . A função  $a$  é denominada "damping"<sup>2</sup> e o nome "localizado" é devido à sua atuação num subconjunto  $\omega$  de  $L$ . A compreensão de sua influência nas equações acima é um dos objetivos deste trabalho. Apesar de o estudo ser direcionado para o problema homogêneo, as equações acima foram escritas na forma não-homogênea para validação dos métodos numéricos.

<sup>1</sup>doravante denominada 'KdV'.

<sup>2</sup>fisicamente, *damping* é qualquer efeito que tende a reduzir a oscilação em um sistema e é modelado como sendo uma força sincronizada com a velocidade, mas em direção oposta.

### 1.3 Histórico

Há mais de 170 anos, enquanto conduzia experimentos para determinar o design mais eficiente para certos tipos de botes, o jovem engenheiro escocês John Scott Russell (1808-1882) fez uma surpreendente descoberta científica. Segue o texto original escrito por Russell em 1845:

"I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of the water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation."

Este evento aconteceu no canal Union em Hermiston, perto do campus Riccarton da Universidade de Heriot-Watt, em Edimburgo.

Durante toda a vida Russell permaneceu convicto que sua onda solitária ('Wave of translation') era de fundamental importância, mas os cientistas do final do século XIX e início do século XX não deram muita importância. A fama de Russell se dava por outros méritos.

Investigações teóricas foram realizadas por Lord Rayleigh e Joseph Boussinesq em 1877 e, finalmente, por Diederik Korteweg e Gustav de Vries (16) em 1895. Após esse período, apenas por volta da década de 1960 as idéias de Russell começaram a ser apreciadas, quando cientistas começaram a usar os computadores digitais modernos para estudar a propagação de ondas não-lineares.

Do ponto de vista moderno, as ondas solitárias são usadas como elemento cons-

trutivo para formular o complexo comportamento dinâmico de sistemas de ondas em diversos campos da ciência: de hidrodinâmica até ótica não-linear, de plasmas até ondas de choque, de tornados até o Great Red Spot de Jupiter, de partículas elementares de matéria até partículas elementares de pensamento.

## 1.4 O Método de Galerkin e os Elementos Finitos

Dado o seguinte problema variacional abstrato

$$\text{Procura-se por } u \in V \text{ tal que } b(u, w) = f(w), \quad \forall w \in W$$

onde  $b \in L(V \times W, \mathbb{K})$  e  $f \in W'$ .

O Método de Galerkin consiste em substituir os espaços  $V$  e  $W$  por subespaços de dimensão finita  $V_m \subset V$  e  $W_m \subset W$ , encontrar solução do problema aproximado nesses subespaços

$$\text{Procura-se por } u_m \in V_m \text{ tal que } b(u_m, w_m) = f(w_m), \quad \forall w_m \in W_m,$$

e estabelecer estimativas que mostrem a existência de  $u$  satisfazendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m = u.$$

Isto é, a sequência de soluções encontradas é convergente.

Quando  $V = W$  e  $V_m = W_m$  denomina-se o Método de Riez-Galerkin e quando  $V = W$  mas  $V_m \neq W_m$  denomina-se o Método de Petrov-Galerkin.

Os subespaços  $V_m$  e  $W_m$  são de dimensão finita e por isso possuem uma base  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  e  $\phi_1, \dots, \phi_m$ , respectivamente. Ou seja, dado  $u_m \in V_m$  existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  tais que

$$u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i. \tag{1.3}$$

O Método dos Elementos Finitos consiste em escolher bases otimizadas que transformem o problema aproximado num sistema não-linear (quando a equação em

questão for não-linear) ou sistema linear (quando a equação for linear). A técnica para escolha das bases é baseada no particionamento do domínio (espacial) da equação.

Para detalhes dos Métodos, ver (30), (12), (11), (29) e (9), para uma abordagem mais computacional.

## 1.5 O Método das Diferenças Finitas

Quando a equação possui uma variável temporal (como exemplo, a KdV), a discretização das variáveis espaciais através do Método dos Elementos Finitos recai num sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser escrito genericamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), & t \in (0, T) \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

onde  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  denota o vetor das incógnitas e  $F : (0, T) \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  um campo vetorial contínuo (podendo ser inclusive não-linear, como será visto adiante).

O Método das Diferenças Finitas é usado para encontrar uma solução aproximada para o sistema acima e ele se baseia na aproximação por polinômios de Taylor.

Para o caso escalar, sejam  $f : I \rightarrow \mathcal{R}$  derivável em  $t \in I$  e  $\Delta t > 0$  tal que  $t + \Delta t \in I$ .

Então,

$$f(t + \Delta t) = f(t) + hf'(t) + r(\Delta t),$$

onde  $r(\Delta t)$  é o erro de aproximação que satisfaz  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ .

Da equação acima, pode-se dizer que a derivada de  $f$  em  $t$  pode ser aproximada pelo quociente

$$f'(t) \approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Dado  $N \in \mathcal{N}$ , seja  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . Define-se por  $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$  uma discretização uniforme do conjunto  $[0, T]$ , onde  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, \dots, N$ . Aplicando a aproximação da derivada acima sobre os pontos da discretização, tem-se

$$f'(t_n) = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\Delta t}, \forall n = 0, \dots, N - 1.$$

O caso vetorial é análogo e será omitido. Ver (30) e (1) para maiores detalhes.

Basta notar agora que tomando o sistema de E.D.O. em cada ponto da discretização e aplicando a aproximação da derivada descrita acima, obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{\Delta t} = F(t_n, X(t_n)), & n = 0, \dots, N - 1 \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Denotando  $X^n = X(t_n)$  e escrevendo  $F^n = F(t_n, X(t_n))$ , chega-se ao sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} X^{n+1} = X^n + \Delta t F^n, & n = 0, \dots, N - 1 \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

que é resolvido iterando  $n$  de 0 a  $N - 1$ .

É importante frizar que a discretização da derivada descrita acima (chamada Método de Euler Explícito) é apenas um caso dentre muitos que podem ser obtidos através do polinômio de Taylor.

Pode-se também aproximar o valor num determinado ponto ponderando-se os valores nos arredores. O método geral (que também foi adotado neste trabalho) para esse tipo de aproximação é o Método de  $\theta$ -Neumark, dado por:

$$X(t_n) = \theta X^{n+1} + (1 - \theta)X^n,$$

onde  $\theta \in [0, 1]$ .

Ver (30) e (1) para outros casos com aplicações em E.D.P. e (28) para outros métodos de solução de problemas de valor inicial, bem como as análises de convergência. (27) contém códigos em C++ que implementam vários métodos para estes problemas. Esses três métodos descritos serão aplicados nos próximos capítulos para o estudo da equação KdV tanto no âmbito computacional quanto no analítico.

## 1.6 Formulação variacional

O Método dos Elementos Finitos não pode ser aplicado diretamente nas equações acima, ditas "*Formulações Forte*". Para utilizá-lo é necessária a *Formulação Fraca* da equação, também conhecida como *Formulação Variacional*. Essa formulação é de suma importância tanto para o estabelecimento da existência e unicidade das soluções das equações pelo Método de Galerkin, bem como para a estimativa do erro de aproximação pelo Método dos Elementos Finitos.

O conjunto  $\mathcal{D}(0, L) = \{v \in C^\infty(0, L); v(0) = v(L) = 0\}$  é denominado espaço das funções teste com suporte compacto. Tomando  $v \in \mathcal{D}(0, L)$ , multiplicando (1.1) por  $v$  e integrando sobre  $(0, L)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^L u'(t)v dx + \int_0^L u_x(t)v dx + \int_0^L u_{xxx}(t)v dx \\ & + \int_0^L u(t)u_x(t)v dx + \int_0^L a(x)u(t)v dx = \int_0^L f(t)v dx \end{aligned}$$

Integrando por partes e lembrando que  $v(0) = v(L) = 0$ :

$$\int_0^L u_{xxx}(t)v dx = u_{xx}(x, t)v(x) \Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L u_{xx}(t)v_x dx = - \int_0^L u_{xx}(t)v_x dx.$$

Substituindo

$$\begin{aligned} & \int_0^L u'(t)v dx + \int_0^L u_x(t)v dx - \int_0^L u_{xx}(t)v_x dx \\ & + \int_0^L u(t)u_x(t)v dx + \int_0^L a(x)u(t)v dx = \int_0^L f(t)v dx. \end{aligned}$$

Introduzindo a notação

$$(p, q) = \int_0^L p(x)q(x) dx,$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left( u'(t), v \right) + \left( u_x(t), v \right) - \left( u_{xx}(t), v_x \right) + \left( u(t)u_x(t), v \right) \\ & + \left( a(x)u(t), v \right) = \left( f(t), v \right), \forall v \in \mathcal{D}(0, L). \end{aligned}$$

Estabelecida essa formulação define-se em quais espaços buscar-se-á por  $u$  e  $v$ . A escolha desses espaços leva em consideração as exigências da formulação variacional juntamente com as condições de fronteira do problema que não foram usadas para se obter o resultado acima.

Com isso, quanto a  $u(t)$ , precisa-se que  $u(t), u_x(t), u_{xx}(t)$  sejam quadrado integráveis à Lebesgue em  $[0, L]$  e que satisfaçam  $u(0, t) = u(L, t) = u_x(L, t) = 0$ . Define-se por

$$V = \{u \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L); u_x(L) = 0\}$$

o espaço onde será buscada a solução  $u$  do problema variacional.

Quanto a  $v$ , tomar-se-á  $v \in V$ .

Lembrando que  $\mathcal{D}(0, L)$  é denso em  $H^2(0, L)$  e que  $V \subset H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ , então  $\mathcal{D}(0, L)$  é denso em  $V$ . Assim pode-se formalizar a formulação variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Procura-se por } u : [0, T] \rightarrow V \text{ tal que } \forall v \in V \text{ vale} \\ (u'(t), v) + (u_x(t), v) - (u_{xx}(t), v_x) + (u(t)u_x(t), v) + (a(x)u(t), v) = (f(t), v) \\ (u(0), v) = (u_0, v). \end{array} \right.$$

Procedendo de modo análogo com (1.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Procura-se por } u : [0, T] \rightarrow V \text{ tal que } \forall v \in V \text{ vale} \\ (u'(t), v) + (u_x(t), v) - (u_{xx}(t), v_x) + (a(x)u(t), v) = (f(t), v) \\ (u(0), v) = (u_0, v). \end{array} \right.$$

**Proposição 1.1.** *Considere  $V$  o conjunto definido acima munido do produto interno*

$$(u, v)_V = \int_0^L u_x v_x dx + \int_0^L u_{xx} v_{xx} dx$$

*e da norma induzida pelo produto interno*

$$\|u\|_V^2 = \int_0^L (u_x)^2 dx + \int_0^L (u_{xx})^2 dx.$$

*Então  $V$  é um espaço completo na norma do  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ .*

**Prova:** Tomando uma sequência de Cauchy  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $V$  e sendo  $V \subset H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ , tem-se que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy em  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$  possuindo limite  $v \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ , pois este é um espaço completo. A demonstração estará concluída quando provar-se que  $v_x(L) = 0$ . Com efeito, na reta ocorre a imersão contínua  $H^2(0, L) \hookrightarrow C^1(0, L)$ , então

$$\max \|(v_n)_x - v_x\| \leq \|v_n - v\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto, a convergência é uniforme. Então

$$(v_n)_x(x) \longrightarrow v_x(x), \quad \forall x \in [0, L].$$

Mas  $(v_n)_x(L) = 0$ , logo,  $v_x(L) = 0$ .

Assim,  $V$  é um espaço completo na norma do  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ .  $\square$

**Corolário 1.1.** *Nas hipóteses da proposição acima, existe um conjunto  $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$  que é base de  $V$ .*

Define-se  $\widehat{V} = \{v \in V; v_x(0) = 0\}$  e por  $V_m$  o subespaço gerado pelas  $m$  primeiras funções da base de  $\widehat{V}$ , isto é,  $V_m = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$  (cada  $w_i$  satisfaz  $(w_i)_x(0) = 0$ )<sup>3</sup>.

O problema aproximado é então definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Procura-se por } u_m : [0, T] \rightarrow V_m \text{ tal que } \forall v_m \in V_m \text{ vale:} \\ (u'_m(t), v_m) + ((u_m)_x(t), v_m) - ((u_m)_{xx}(t), (v_m)_x) \\ + (u_m(t)(u_m)_x(t), v_m) + (a(x)u_m(t), v_m) = (f(t), v_m) \\ (u_m(0), v_m) = (u_0, v_m) \end{array} \right.$$

---

<sup>3</sup> $\widehat{V}$  também é completo.

Analogamente, no problema linear tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Procura-se por } u_m : [0, T] \rightarrow V_m \text{ tal que } \forall v_m \in V \text{ vale:} \\ \left( u'_m(t), v_m \right) + \left( (u_m)_x(t), v_m \right) - \left( (u_m)_{xx}(t), (v_m)_x \right) \\ + \left( a(x)u_m(t), v_m \right) = \left( f(t), v_m \right), \\ \left( u_m(0), v_m \right) = \left( u_0, v_m \right) \end{array} \right.$$

## 1.7 Objetivos

Este trabalho tem o propósito de realizar um estudo de análise numérica da equação linear, onde serão feitas as estimativas do erro entre a solução exata e a solução aproximada obtida com a utilização dos Método dos Elementos Finitos (na variável espacial) e Diferenças Finitas (na variável temporal). Simulações computacionais validarão as estimativas.

No entanto, devido a sua importância, um estudo de existência e unicidade da solução da equação KdV pelo Método de Galerkin também foi incluído.

Além disso, objetiva-se comprovar numericamente duas propriedades teóricas da equação de KdV. Ambas foram provadas no artigo "*Stabilization of the Korteweg-de Vries Equation with localized damping*" (21) e se referem à atuação do termo de damping as equações KdV linear e não-linear.

Antes da descrição das propriedades, precisa-se estabelecer uma outra entidade importante que está intimamente relacionada ao estudo: a energia total do sistema.

Define-se por energia associada ao problema a seguinte integral:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u(x, t)|^2 dx.$$

A primeira propriedade relaciona-se com a equação (1.2) com  $f \equiv 0$ . Neste caso, multiplicando a equação (1.2) por  $u$  e integrando sobre  $(0, L)$ , obtém-se:

$$\int_0^L uu_t dx + \int_0^L uu_x dx + \int_0^L uu_{xxx} dx + \int_0^L a(x)u^2 dx = 0. \quad (1.4)$$

Usando as condições de fronteira, tem-se:

$$\frac{dE(t)}{dt} + \frac{1}{2}u_x^2(0, t) + \int_0^L a(x)u^2 dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{2}u_x^2(0, t) - \int_0^L a(x)u^2 dx \leq 0.$$

Em (32) prova-se que, quando  $a(x) \equiv 0$  e

$$L \in \mathcal{E} = \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{k^2 + kl + l^2}, k, l \in \mathbb{N} \right\} \quad (1.5)$$

existem  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $u \in H^3(0, L)$ ,  $u_0 \neq 0$ , tais que

$$\begin{cases} \lambda u_0 + \frac{du_0}{dx} + \frac{d^3 u_0}{dx^3} = 0, & x \in (0, L) \\ u_0(0) = \frac{du_0(0)}{dx} = u_0(L) = \frac{du_0(L)}{dx} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Observa-se então que  $u(x, t) = u_0(x)e^{\lambda t}$  satisfaz (1.2) com  $f \equiv 0$ . Além disso, as condições iniciais de (1.6) mostram o não-decaimento da energia associada:

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{2}u_x^2(0, t) = -\frac{1}{2}(u_0)_x^2(0)e^{2\lambda t} = 0. \quad (1.7)$$

Por outro lado, em (21) foi provado que, quando  $a(x) \geq a_0 > 0$  numa vizinhança de  $x = 0$  e  $x = L$ , então o decaimento é garantido para qualquer valor de  $L$ .

A segunda propriedade é relativa a equação não-linear (1.1) com  $f \equiv 0$ . Neste caso, o artigo faz uma análise do decaimento da energia considerando a localização  $\omega$  do damping.

Prova-se que, quando as condições iniciais pertencem a uma bola de raio  $R$  em  $L^2(0, L)$  e o conjunto  $\omega$  tem a forma  $\omega = (0, \delta) \cap (L - \delta, L)$ , então assegura-se o

decaimento exponencial da energia associada à equação.

Nota-se em (21) que o conjunto  $\omega$  onde o damping atua contém uma vizinhança de cada extremidade de  $[0, L]$ . No entanto, foi provado em (26) que o decaimento da energia associada à equação (1.1) independe da localização do damping.

## 1.8 Distribuição dos capítulos

Este texto se divide em seis capítulos e um apêndice.

No segundo capítulo são descritas as notações, definições e teoremas que serão utilizados no desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Faz-se um breve relato sobre Derivada Fraca, Convergência, Espaços de Sobolev, Teoremas de Caratheodory, Aubin-Lions, Douglas-Dupont, Lema de Gronwall nas formas continua e discreta, entre outros.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo da existência e unicidade da equação KdV pelo Método de Galerkin. Optou-se por uma abordagem construtiva: inicialmente mostra-se a existência e unicidade da equação linear (1.2) com  $a \equiv 0$ ; em seguida adiciona-se o termo de damping e faz-se o mesmo procedimento; finalmente o mesmo estudo é realizado para (1.1).

O quarto capítulo trata a análise numérica da equação linear. Novamente uma abordagem construtiva: inicialmente obtém-se resultados para  $a \equiv 0$ , para em seguida, obter-se resultados com  $a \neq 0$ . Gráficos e tabelas de erros são exibidos, bem como os resultados numéricos sobre o comportamento da solução quando  $L$  pertence ao conjunto  $\mathcal{E}$  de Rosier (primeira propriedade teórica).

O quinto capítulo versa sobre a equação KdV não-linear. Gráficos e tabelas de erros são mostrados, junto com os resultados numéricos sobre a localização do damping e o correspondente decaimento da energia (segunda propriedade teórica).

O sexto e último capítulo trás a conclusão do trabalho e comentários gerais.

O apêndice descreve o programa produzido para suportar os resultados apresenta-

dos, bem como as técnicas computacionais utilizadas.

## 2 NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentam-se os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

### 2.1 Preliminares

Dado o funcional linear  $\varphi : E \rightarrow \mathcal{R}$ , denota-se  $\varphi(u)$  por  $\langle \varphi, u \rangle$ . O conjunto dos funcionais lineares sobre  $E$  é escrito por  $E'$ .

**Definição 2.1** (Convergência Fraca). *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma sequência de  $E$ . Então  $u_\nu \rightharpoonup u$  se, e somente se,  $\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall \varphi \in E'$ .*

**Definição 2.2** (Convergência Fraca Estrela). *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $\varphi \in E'$  e  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma sequência de  $E'$ . Diz-se  $\varphi_\nu \xrightarrow{*} \varphi$  fraco estrela se, e somente se,  $\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E$ .*

**Teorema 2.1** (Banach-Steinhaus: Teorema da Limitação Uniforme). *Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Banach. Seja  $(T_i)_{i \in I}$  uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de  $E$  em  $F$ . Suponha que  $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$  para*

todo  $x \in E$ . Então  $\sup \|T_i\|_{(E,F)} < \infty$ . Noutras palavras, existe uma constante  $C$  tal que  $\|T_i(x)\| \leq C\|x\|$ ,  $\forall x \in E$  e  $\forall i \in I$ .

**Prova:** Ver (3).  $\square$

**Proposição 2.1.** *Seja  $E$  um espaço de Banach e  $(x_n)$  uma sequência em  $E$ . Verificam-se que:*

- (I) *Se  $x_n \rightarrow x$  fortemente, então  $x_n \rightarrow x$  fracamente em  $\sigma(E, E')$ ,*
- (II) *Se  $x_n \rightarrow x$  fracamente em  $\sigma(E, E')$ , então  $\|x_n\|$  é limitada e  $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ ,*
- (III) *Se  $x_n \rightarrow x$  fracamente em  $\sigma(E, E')$  e se  $f_n \rightarrow f$  fortemente em  $E'$  (isto é,  $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$ ), então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .*

**Prova:** Ver (3).  $\square$

**Observação 2.1.** *A parte (III) da proposição é uma consequência do Teorema de Banach-Steinhaus.*

**Teorema 2.2.** *Seja  $E$  um espaço de Banach separável e seja  $(f_n)$  uma sucessão limitada em  $E'$ . Então existe uma subsucessão  $(f_{n_k})$  que converge na topologia de  $\sigma(E', E)$ .*

**Prova:** Ver (3).  $\square$

## 2.2 Espaço das distribuições escalares

**Definição 2.3.** *Dada uma função contínua  $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega$  é um aberto, denomina-se suporte de  $\varphi$  ao fecho em  $\Omega$  do conjunto dos pontos  $x$  tais que  $\varphi(x) \neq 0$ .*

*Simbolicamente*

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Representa-se por  $C_0^\infty(\Omega)$  o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em  $\Omega$ , com suporte compacto em  $\Omega$ .

### 2.3 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado  $\Omega$  como acima, considere o espaço vetorial topológico  $C_0^\infty(\Omega)$ . Diz-se que uma sequência  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  de funções em  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  quando forem satisfeitas as seguintes condições:

*i)* Existe um conjunto compacto  $K \subset \Omega$  tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

*ii)*  $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente em  $K$  para todo multi-índice  $\alpha$ .

O espaço vetorial  $C_0^\infty(\Omega)$ , munido da noção de convergência definida acima, será representado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e denominado *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre  $\Omega$  a toda forma linear  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com respeito a topologia de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Isto significa o seguinte: uma sequência  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge, em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , para  $\varphi$ , se

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição  $T$  na função teste  $\varphi$  será representado por  $\langle T, \varphi \rangle$ .

O conjunto das distribuições escalares sobre  $\Omega$  é um espaço vetorial real, denotado

por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , denominado *espaço das distribuições escalares* sobre  $\Omega$ .

Dado um aberto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^N$  denota-se por  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|u|^p$  é integrável no sentido de *Lebesgue* em  $\Omega$ , equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso  $p = \infty$  denota-se por  $L^\infty(\Omega)$  o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em  $\Omega$ , isto é, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|u(x)| \leq C \quad \text{quase sempre em } \Omega,$$

onde *quase sempre* significa *a menos de um conjunto de medida nula*.

Neste espaço considera-se a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess} |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , com sua respectiva norma, é um *espaço de Banach*. Em particular, quando  $p = 2$ , tem-se que  $L^2(\Omega)$  é um *espaço de Hilbert* cuja *norma* e *produto interno* serão definidos e denotados, respectivamente por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Ver (19) para maiores detalhes sobre Integral de Lebesgue.

**Lema 2.1** (Du Bois Raymond). *Dada  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , seja a forma linear  $T_u$  definida em  $\mathcal{D}(\Omega)$  por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Então  $T_u = 0$  se, e somente se,  $u = 0$  quase sempre em  $\Omega$ .*

**Prova:** Ver (20).  $\square$

## 2.4 Convergência e derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

A sequência de distribuições escalares  $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge para a distribuição escalar  $T$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$  quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < \infty.$$

Dada uma distribuição  $T$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$  e dado um multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  define-se a *derivada distribucional* de ordem  $\alpha$  de  $T$  como sendo a forma linear e contínua  $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

## 2.5 Espaços de Sobolev

### 2.5.1 Convergência em $L^p$ e no dual de $L^p$

Diz-se que uma sequência  $(\varphi_\nu)$  converge para  $\varphi$  em  $L^p(\Omega)$  se  $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ , para  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $p$  e  $q$  são índices conjugados, isto é,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  com  $1 \leq p < \infty$ , então o dual topológico de  $L^p(\Omega)$ , que será denotado por  $[L^p(\Omega)]'$ , é o espaço  $L^q(\Omega)$ . No caso de  $1 \leq p < \infty$  o espaço vetorial  $L^p(\Omega)$  é separável e, para  $1 < p < \infty$ , é reflexivo. Para demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços  $L^p(\Omega)$  consulte (3).

**Teorema 2.3.** *Sejam  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$  e  $f \in L^p(\Omega)$ , tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subsequência  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge quase sempre para  $f$  em  $\Omega$ , e existe  $h \in L^p(\Omega)$  tal que  $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  quase sempre em  $\Omega$ .

**Prova:** Ver (3).  $\square$

**Definição 2.4.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de  $H$  uma sequência de elementos  $(\omega_n)$  de  $H$  tais que

$$(i) \quad \|\omega_n\|_H = 1, \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0, \forall n, m, m \neq n;$$

(ii) O espaço gerado pela  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é denso em  $H$ .

Sejam  $m > 0$ , um número inteiro positivo e  $1 \leq p \leq \infty$ . O espaço de Sobolev de ordem  $m$ , modelado sobre  $L^p(\Omega)$ , aqui denotado por  $W^{m,p}(\Omega)$ , é por definição o espaço vetorial das (classes de) funções de  $L^p(\Omega)$  para as quais suas derivadas até a ordem  $\alpha$ , no sentido das distribuições, pertencem a  $L^p(\Omega)$ , para todo multi-índice  $\alpha$ , com  $|\alpha| \leq m$ . O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  será equipado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

e quando  $p = \infty$ , define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Proposição 2.2.** Os espaços lineares  $W^{m,p}(\Omega)$  equipados com as respectivas normas acima são espaços de Banach.

O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço reflexivo se  $1 < p < \infty$  e separável se  $1 \leq p < \infty$ . No caso particular em que  $p = 2$ , o espaço  $W^{m,2}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert, que é

denotado por  $H^m(\Omega)$ . Simbolicamente

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

cuja norma e produto interno são dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } ((u, v)) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

O espaço  $H^m(\Omega)$  com a estrutura topológica acima, é um espaço de *Hilbert*, continuamente imerso em  $L^2(\Omega)$ .

Define-se  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como sendo o fecho de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$  e seu dual topológico é representado por  $W^{-m,q}(\Omega)$  se  $1 \leq p < \infty$  com  $p$  e  $q$  sendo índices conjugados. Se  $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$  então  $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$  pertence a  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Quando  $p = 2$ ,  $W_0^{m,2}(\Omega)$  é denotado por  $H_0^m(\Omega)$ , cujo dual é o espaço denotado por  $H^{-m}(\Omega)$ . A caracterização de  $W^{-m,p}(\Omega)$  é dada por:

**Teorema 2.4.** *Seja  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Então,  $T \in W^{-m,p}(\Omega)$  se, e somente se, existem  $g_\alpha \in L^q(\Omega)$  tais que  $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$ .*

**Prova:** Ver (3).  $\square$

**Lema 2.2** (Desigualdade de Poincaré). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado em alguma direção. Então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

**Prova:** Ver (3) ou (20).  $\square$

**Observação 2.2.** *Usando a desigualdade de Poincaré conclui-se que em  $H_0^1(\Omega)$ , as normas  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$  e  $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$  são equivalentes.*

## 2.6 Espaços $L^p(0, T; X)$ e distribuições vetoriais

Sejam  $X$  um espaço de Banach real com a norma  $\|\cdot\|_X$ ,  $T$  um número real positivo e  $\chi_E$  a função característica do conjunto  $E$ . Uma função vetorial  $\varphi : (0, T) \rightarrow X$  é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples  $\varphi : (0, T) \rightarrow X$  com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde  $E_i \subset (0, T)$  é mensurável,  $i = 1, 2, \dots, k$ , dois a dois disjuntos,  $m(E_i) < \infty$  e  $\varphi_i \in X$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Define-se a integral de  $\varphi$  como sendo o vetor de  $X$  dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \varphi_i.$$

Diz-se que uma função vetorial  $u : (0, T) \rightarrow X$  é Bochner integrável ( $\mathcal{B}$ -integrável) se existir uma sequência  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  de funções simples tal que:

i)  $\varphi_\nu \rightarrow u$  em  $X$ , q.s. em  $(0, T)$ ;

ii)  $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0$ .

Uma função vetorial  $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  é *fracamente mensurável* quando a função numérica  $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$  for mensurável,  $\forall \Phi \in X'$ , onde  $X'$  é o dual topológico de  $X$ . Diz-se que  $u$  é *fortemente mensurável* quando  $u$  for limite quase sempre de uma sequência  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  de funções simples. Em particular, quando  $u$  for fortemente mensurável, então a aplicação  $t \mapsto \|u(t)\|_X$  é mensurável à *Lebesgue*.

Denota-se por  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , o espaço vetorial das (classes de) funções  $u : (0, T) \rightarrow X$  fortemente mensuráveis e tais que a função  $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$  é integrável à *Lebesgue* em  $(0, T)$ , munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando  $p = 2$  e  $X = H$  é um espaço de *Hilbert*, o espaço  $L^2(0, T; H)$  é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por  $L^\infty(0, T; X)$  representa-se o espaço de *Banach* das (classes de) funções  $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  que são fortemente mensuráveis e tais que  $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$ . A norma em  $L^\infty(0, T; X)$  é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando  $X$  é reflexivo e separável e  $1 < p < \infty$ , então  $L^p(0, T; X)$  é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach*  $L^{p'}(0, T; X')$ , onde  $p$  e  $p'$  são índices conjugados, isto é,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Mais precisamente, mostra-se que para cada  $u \in [L^p(0, T; X)]'$ , existe  $\tilde{u} \in L^{p'}(0, T; X')$  tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle \tilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso,  $p = 1$ , o dual topológico do espaço  $L^1(0, T; X)$  se identifica ao espaço  $L^\infty(0, T; X')$ .

O espaço das aplicações lineares e contínuas de  $\mathcal{D}(0, T)$  em  $X$  é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre  $(0, T)$  com valores em  $X$ , o qual será denotado por  $\mathcal{D}'(0, T; X)$ .

**Definição 2.5.** *Seja  $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ . A derivada de ordem  $n$  é definida como sendo a distribuição vetorial sobre  $(0, T)$  com valores em  $X$  dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Por  $C^0([0, T]; X)$ ,  $0 < T < \infty$  representa-se o espaço de *Banach* das funções contínuas  $u : [0, T] \rightarrow X$  munido da norma da *convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Por  $C_w^0([0, T]; X)$  denota-se o espaço das funções  $u : [0, T] \rightarrow X$  fracamente contínuas, isto é, a aplicação  $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$  é contínua em  $[0, T], \forall v \in X'$ .

Quando  $X = H$  é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de  $u$  é equivalente a continuidade da aplicação  $t \mapsto (u(t), v)_H$  para  $\forall v \in H$ .

**Teorema 2.5** (Aubin-Lions). *Sejam  $B_0, B, B_1$  espaços de Banach,  $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$   $B_0$  e  $B_1$  reflexivos, a imersão de  $B_0$  em  $B$  é compacta,  $B$  imerso continuamente em  $B_1$ ,  $1 < p_0, p_1 < \infty$ , e,  $W$  o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

*equipado da norma  $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$ . Então  $W$  é um espaço de Banach, e a imersão de  $W$  em  $L^{p_0}(0, T; B)$  é compacta.*

**Observação 2.3.** *Como consequência do Teorema de Aubin-Lions tem-se: se  $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada em  $L^2(0, T; B_0)$  e  $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada em  $L^2(0, T; B_1)$  então  $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $W$ . Daí, segue que existe uma subsequência  $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  tal que  $u_{\nu_k} \rightarrow u$  forte em  $L^2(0, T; B)$ .*

**Proposição 2.3.** *Sejam  $V$  e  $H$  espaços de Hilbert,  $V$  continuamente imerso em  $H$ ,  $u \in L^p(0, T; V)$  e  $u' \in L^p(0, T; H)$ , com  $1 \leq p < \infty$ , então*

$$u \in C^0([0, T]; H).$$

## 2.7 Outros resultados úteis

Sejam  $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$  e  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Diz-se que  $F$  satisfaz as condições de Carathéodory sobre  $D$  quando

- $F(t, \Upsilon)$  é mensurável em  $t$ , para cada  $\Upsilon$  fixo;
- $F(t, \Upsilon)$  é contínua em  $\Upsilon$ , para cada  $t$  fixo;

- Para cada compacto  $K$  em  $D$ , existe uma função real integrável  $m_K(t)$  tal que  $\|F(t, \Upsilon)\| \leq m_K(t)$ , para todo  $(t, \Upsilon) \in D$ .

**Definição 2.6.** *Uma solução no sentido estendido do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

é uma função  $\Phi = \Phi(t)$  absolutamente contínua tal que, para algum  $\beta$  real, tenha-se

- i)*  $(t, \Phi(t)) \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ ;
- ii)*  $\Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$  para todo  $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , exceto em um conjunto de medida nula.

Considere o subconjunto fechado  $R = \{(t, \Upsilon) \in \mathbb{R}^{N+1}; \|t - t_0\| \leq a, \|\Upsilon - \Upsilon_0\| \leq b\}$ , com  $a, b > 0$ . Então valem:

**Teorema 2.6** (Carathéodory). *Seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  satisfazendo as condições de Carathéodory sobre  $R$ , então sobre algum intervalo  $|t - t_0| \leq \beta$  ( $\beta > 0$ ) existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = \Upsilon_0. \end{cases}$$

**Corolário 2.1** (Prolongamento de solução). *Sejam  $D = [0, \omega] \times B$ , com  $0 < \omega < \infty$  e  $B = \{\Upsilon \in \mathbb{R}^N; \|\Upsilon\| \leq b\}$ ,  $b > 0$  e  $F$  nas condições de Carathéodory. Seja  $\Phi(t)$  uma solução de*

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(0) = X_0, \|X_0\| \leq b. \end{cases}$$

*Suponha que em qualquer intervalo  $I$  onde  $\Phi(t)$  está definida, se tenha,  $\|\Phi(t)\| \leq M$ , para todo  $t \in I$ ,  $M$  independente de  $t$  e  $M < b$ . Então  $\Phi$  tem um prolongamento até  $[0, \omega]$ .*

**Lema 2.3** (J. L. Lions). *Sejam  $Q$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t$ ,  $g_m$  e  $g$  funções de  $L^q(Q)$ ,  $1 < q < \infty$ , tal que  $\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C$ ,  $g_m \rightarrow g$  quase sempre em  $Q$ . Então  $g_m \rightharpoonup g$  na topologia fraca de  $L^q(Q)$ .*

**Lema 2.4** (Gronwall - Forma Diferencial). *Seja  $\eta(\cdot)$  uma função não negativa, absolutamente contínua em  $[0, T]$ .*

(i) *Se  $\eta$  satisfaz*

$$\eta'(t) \leq \psi(t) + \varphi(t)\eta(t), \quad \text{q.s. em } [0, T] \quad (2.1)$$

*onde  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  são funções não negativas e integráveis em  $[0, T]$ , então*

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leq \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} ds \right] e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \\ &\leq \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \end{aligned} \quad (2.2)$$

*para todo  $0 \leq t \leq T$ .*

(ii) *Em particular, se  $\eta' \leq \varphi\eta$  em  $[0, T]$  e  $\eta(0) = 0$ , então*

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

**Prova:** Ver (20) ou (28).  $\square$

**Lema 2.5** (Gronwall - Forma Integral). *Sejam  $u, \varphi, \psi$  funções reais não negativas em  $[0, T]$  satisfazendo*

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \psi(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

*para todo  $t \in [0, T]$ . Então para todo  $t \in [0, T]$  tem-se*

$$u(t) \leq \phi(t) \int_0^t \psi(s)\phi(s)e^{\int_s^t \psi(\tau)d\tau} ds.$$

**Prova:** Ver (20) ou (28).  $\square$

## 2.8 Definições e teoremas utilizados em análise numérica

Em prol do desenvolvimento a ser realizado nos capítulos subsequentes, dedica-se esta seção às definições e teoremas a serem utilizados na análise numérica, tanto pelo Método dos Elementos Finitos, quanto pelo Método de Diferenças Finitas. Mais detalhes sobre o conteúdo desta seção podem ser encontrados em (30).

**Definição 2.7** (Notação). *Dada uma discretização uniforme  $\{0 = t_0, \dots, t_N = T\}$ , escreve-se  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Dada uma função  $w$  com domínio em  $[0, T]$ , define-se por  $w^n$  o valor que  $w$  assume no ponto  $t_n = n\Delta t$ , isto é,  $w^n = w(t_n)$ . Assim, também se definem:*

$$w^{n+\frac{1}{2}} = \frac{w^{n+1} + w^n}{2}$$

$$w^{n\theta} = \theta w^{n+1} + (1 - 2\theta)w^n + \theta w^{n-1}$$

$$w^{n+\theta} = \theta w^{n+1} + (1 - \theta)w^n$$

$$\delta w^{n+\frac{1}{2}} = \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t}$$

$$\delta w^{n-\frac{1}{2}} = \frac{w^n - w^{n-1}}{\Delta t}$$

$$\delta w^n = \frac{w^{n+\frac{1}{2}} - w^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{w^{n+1} - w^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\delta^2 w^n = \frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{\Delta t^2}$$

onde  $\theta \in [0, 1]$ .

**Definição 2.8** (Norma discreta). *Seja a discretização uniforme de  $[0, L]$  dada por  $\{x_1 = 0, x_2, \dots, x_m = L\}$ , com  $h = x_{i+1} - x_i$ . Dada função  $w \in L^2(0, L)$  ou  $w \in H^1(0, L)$ , define-se a norma discreta em  $L^2(0, L)$  por:*

$$\|w\|_{L^2(0,L)}^2 = h \sum_{i=1}^m |w(x_i)|$$

Dada função  $w \in H^1(0, L)$ , define-se a norma discreta em  $H^1(0, L)$  por:

$$\|w\|_{H^1(0,L)}^2 = \left( h \sum_{i=1}^m |w(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial w(x_i)}{\partial x} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definição 2.9** (Norma discreta em Distribuições Vetoriais). *Seja a função  $w \in L^2(0, T; H)$ , onde  $H$  é um Espaço de Sobolev. Define-se a norma discreta em  $w \in L^2(0, T; H)$  por:*

$$\|w\|_{L^2(0,T;H)}^2 = \Delta t \sum_{n=0}^N \|w^n\|_H^2.$$

*Seja a função  $w \in L^\infty(0, T; H)$ , onde  $H$  é um Espaço de Sobolev. Define-se a norma discreta em  $w \in L^\infty(0, T; H)$  por:*

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 = \max\{\|w^n\|_H, n = 1, \dots, N\}.$$

**Lema 2.6** (Gronwall - Forma discreta). *Dadas funções  $\varphi$  e  $\psi$  não negativas definidas num conjunto discreto  $\{t^n, n = 0, \dots, N\}$ , com  $\psi$  não crescente. Se*

$$\varphi^\tau \leq \psi^\tau + c\Delta t \sum_{n=0}^{\tau-1} \varphi^n, \quad \forall \tau = 0, \dots, N,$$

então

$$\varphi^\tau \leq \psi^\tau \exp(c\tau), \quad \forall \tau = 0, \dots, N.$$

onde a constante positiva  $c$  independe de  $\tau$ .

**Lema 2.7** (Dupont). *Seja  $w : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$  tal que  $w^n = w(t_n) \in L^2(\Omega)$ . Supondo  $\Delta t < 1$ , então*

$$\|w^{n-\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c[\|w^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta w\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega))}^2]$$

$$\|w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c[\|w^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta w\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega))}^2]$$

**Proposição 2.4** (Resultados da Teoria de Aproximação). *Seja  $p = 2$  ou  $p = \infty$  e  $H$  um espaço de Hilbert.*

$$1) \|\delta w\|_{L^p(0,T;H)} \leq c_1 \|w'\|_{L^p(0,T;H)}$$

$$2) \|\delta^2 w\|_{L^p(0,T;H)} \leq c_2 \|w''\|_{L^p(0,T;H)}$$

$$3) \|\delta w^{\theta n}\|_{L^p(0,T;H)} \leq c_3 \|w\|_{L^p(0,T;H)}$$

4) por 1 e 3, obtemos:

$$\|\delta w^{\theta n}\|_{L^p(0,T;H)} \leq c_4 \|w'\|_{L^p(0,T;H)}$$

5) Somatório por partes (análogo à integração por partes)

$$\Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \varphi^n \delta \psi^{n-\frac{1}{2}} = [\varphi^{N_1-1} \psi^{N_1-1} - \varphi^1 \psi^0] - \Delta t \sum_{n=2}^{N_1-1} \delta \varphi^{n-\frac{1}{2}} \psi^n$$

$$\Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \varphi^n \delta \psi^{n+\frac{1}{2}} = [\varphi^{N_1-1} \psi^{N_1} - \varphi^1 \psi^1] - \Delta t \sum_{n=2}^{N_1-1} \delta \varphi^{n+\frac{1}{2}} \psi^n$$

onde  $2 \leq N_1 \leq N$ .

**Lema 2.8** (Douglas-Dupont). *Sejam  $u(t), u'(t), u''(t) \in H^{k+1}(\Omega)$  e seja  $\tilde{u}(t)$  o interpolador de  $u(\cdot, t)$  em  $H^s(\Omega)$  para todo  $t \in [0, T]$ . Então*

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_s \leq ch^{k+1-s} \|u(t)\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

$$\|u'(t) - \tilde{u}'(t)\|_s \leq ch^{k+1-s} \|u'(t)\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

$$\|u''(t) - \tilde{u}''(t)\|_s \leq ch^{k+1-s} \|u''(t)\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

onde  $0 \leq s \leq k+1$ .

### 3 ESTUDO DA SOLUÇÃO FRACA

Neste capítulo mostrar-se-á a existência e unicidade das soluções das equações exibidas no Capítulo 1. Para tal, a demonstração é dividida em três partes: primeiro, o problema linear com termo de damping nulo; segundo, o problema linear com termo de damping não-nulo; por último, o problema não-linear com termo de damping não-nulo. Dessa forma estuda-se a influência de cada termo, a medida que são inseridos. Utiliza-se o Método de Galerkin nas demonstrações dos teoremas e as notações e definições do Capítulo 2 serão amplamente exploradas. Algumas diretrizes deste capítulo foram extraídas de (17).

#### 3.1 Existência e unicidade da equação linear

A formulação forte do problema linear é:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + u_x + u_{xxx} = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ u_x(L, t) = 0, \quad t \in [0, t] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

**Teorema 3.1.** *Dados  $f, f' \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  e  $u_0 \in V$ , então existe única solução (fraca)  $u$  para o problema (3.1) da classe:*

$$\begin{aligned} u &\in C(0, T; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; V) \\ u' &\in L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{aligned}$$

**Prova:** A formulação variacional de (3.1) é dada por: procura-se por  $u : [0, T] \rightarrow V$  tal que

$$\left( u'(t), v \right) + \left( u_x(t), v \right) - \left( u_{xx}(t), v_x \right) = \left( f(t), v \right), \forall v \in V. \quad (3.2)$$

Sistema Aproximado: O problema aproximado é dado por: procura-se  $u_m : [0, T] \rightarrow V_m$  descrita por

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i(x) \quad (3.3)$$

que satisfaz

$$\left( u'_m(t), v_m \right) + \left( (u_m)_x(t), v_m \right) - \left( (u_m)_{xx}(t), (v_m)_x \right) = \left( f(t), v_m \right). \quad (3.4)$$

Substituindo (3.3) em (3.4) e fazendo  $v_m = w_j$ , obtém-se:

$$\left( \sum_{i=1}^m g'_{im}(t) w_i, w_j \right) + \left( \sum_{i=1}^m g_{im}(t) (w_i)_x, w_j \right) - \left( \sum_{i=1}^m g_{im}(t) (w_i)_{xx}, (w_j)_x \right) = \left( f(t), w_j \right). \quad (3.5)$$

Usando a bilinearidade do produto acima, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^m g'_{im}(t) \left( w_i, w_j \right) + \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \left( (w_i)_x, w_j \right) - \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \left( (w_i)_{xx}, (w_j)_x \right) = \left( f(t), w_j \right). \quad (3.6)$$

Define-se as matrizes

$$A = (a_{ij}) = \left( w_i, w_j \right), \quad (3.7)$$

$$B = (b_{ij}) = \left( (w_i)_x, w_j \right) - \left( (w_i)_{xx}, (w_j)_x \right), \quad (3.8)$$

$$F(t) = (f_j) = \left( f, w_j \right). \quad (3.9)$$

E o vetor

$$g_m(t) = \left( g_{1m}(t), \dots, g_{mm}(t) \right)^T. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.7) - (3.10) em (3.5), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} Ag'(t) + Bg(t) = F(t) \\ g(0) = g_{0m} = \left( (u_0, w_1), \dots, (u_0, w_m) \right). \end{cases} \quad (3.11)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (3.11) possui solução local em  $(0, T_m)$  garantida pelo Teorema de Carathéodory (Capítulo 2). Para estender a solução a todo  $[0, T]$  deve-se demonstrar que as soluções aproximadas são limitadas independentemente de  $m$ . Dessa forma obtém-se a convergência da sequência  $u_m$  para  $u$ , solução de (3.1). As estimativas necessárias são desenvolvidas a seguir.

Estimativa I: Tomando  $v_m = u_m(t)$  em (3.4) e omitindo o índice  $m$ , obtém-se:

$$\left( u'(t), u(t) \right) + \left( u_x(t), u(t) \right) - \left( u_{xx}(t), u_x(t) \right) = \left( f(t), u(t) \right). \quad (3.12)$$

Do primeiro termo do membro direito de (3.12):

$$\left( u'(t), u(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2. \quad (3.13)$$

Integrando por partes no segundo termo do membro esquerdo de (3.12):

$$\begin{aligned} \left( u_x(t), u(t) \right) &= u^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left( u(t), u_x(t) \right) \Rightarrow \\ \left( u_x(t), u(t) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Integrando por partes no terceiro termo do membro esquerdo de (3.12):

$$\begin{aligned} \left( u_{xx}(t), u_x(t) \right) &= u_x^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left( u_{xx}(t), u_x(t) \right) \Rightarrow \\ \left( u_{xx}(t), u_x(t) \right) &= -\frac{1}{2} u_x^2(0, t). \end{aligned}$$

Finalmente, no termo do lado direito de (3.12) usam-se a desigualdade elementar  $ab < \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ :

$$(f(t), u(t)) \leq \frac{1}{2}\|f(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.13) - (3.15) em (3.12), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \frac{1}{2} u_x^2(0, t) \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|^2. \quad (3.16)$$

Multiplicando (3.16) por 2, integrando sobre  $(0, t)$ , com  $t \in (0, T_m)$  e retornando com o índice  $m$ , obtém-se:

$$\|u_m(t)\|^2 + \int_0^t (u_m)_x^2(0, s) ds \leq \|u_m(0)\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds. \quad (3.17)$$

Mostrar-se-á agora que a equação (3.17) satisfaz as hipóteses do Lema de Gronwall. De fato, nota-se inicialmente que o membro esquerdo é positivo. No membro direito,  $u_m(0)$  converge forte em  $V$  para  $u(0)$ , por hipótese, sendo portanto, limitada. Além disso, por hipótese, tem-se  $f \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ .

Dessas considerações conclui-se que são satisfeitas as hipóteses do Lema de Gronwall e portanto

$$u_m \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)). \quad (3.18)$$

e é limitada.

Além disso, voltando a equação (3.17), como  $u_m$  é limitada, tem-se que

$$\int_0^t (u_m)_x^2(0, s) ds \quad (3.19)$$

também é limitada. Assim

$$(u_m)_x(0) \in L^2(0, T). \quad (3.20)$$

Estimativa II: Tomando  $v_m = xu_m(t)$  em (3.4) e omitindo o índice  $m$ , obtém-se:

$$(u'(t), xu(t)) + (u_x(t), xu(t)) - (u_{xx}(t), [xu(t)]_x) = (f(t), xu(t)). \quad (3.21)$$

Do primeiro termo do membro esquerdo de (3.21):

$$\left(u'(t), xu(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(x, u^2(t)\right). \quad (3.22)$$

Integrando por partes no segundo termo do membro esquerdo de (3.21):

$$\begin{aligned} \left(u_x(t), xu(t)\right) &= xu^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(u(t), [xu(t)]_x\right) \\ &= -\left(u(t), [xu(t)]_x\right) \\ &= -\left(u(t), u(t)\right) - \left(u(t), xu_x(t)\right) \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\left(u_x(t), xu(t)\right) = -\frac{1}{2} \|u(t)\|^2.$$

Integrando por partes nos terceiro termo do membro esquerdo de (3.21):

$$\left(u_{xx}(t), [xu(t)]_x\right) = \left(u_{xx}(t), u(t)\right) + \left(u_{xx}(t), xu_x(t)\right).$$

Analisando em separado os termos acima, tem-se o primeiro:

$$\left(u_{xx}(t), u(t)\right) = -\|u_x(t)\|^2.$$

E o segundo:

$$\begin{aligned} \left(u_{xx}(t), xu_x(t)\right) &= xu_x^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(u_x(t), [xu_x(t)]_x\right) \\ &= -\left(u_x(t), u_x(t)\right) - \left(u_x(t), xu_{xx}(t)\right) \Rightarrow \\ \left(u_{xx}(t), xu_x(t)\right) &= -\frac{1}{2} \|u_x(t)\|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(u_{xx}(t), [xu(t)]_x\right) = -\frac{3}{2} \|u_x(t)\|^2. \quad (3.24)$$

Finalmente, do termo do lado direito de (3.21) usa-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \left(f(t), xu(t)\right) &\leq \left[\int_0^L |f(x, t)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^L |xu(x, t)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f(t)\| \left(x, u^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

E a desigualdade elementar:

$$\left(f(t), xu_m(t)\right) \leq \frac{1}{2}\|f(t)\|^2 + \frac{1}{2}\left(x, u^2(t)\right). \quad (3.25)$$

Substituindo (3.22) - (3.25) em (3.21), obtém-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(x, u^2(t)\right) + \frac{3}{2}\|u_x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|f(t)\|^2 + \frac{1}{2}\left(x, u^2(t)\right). \quad (3.26)$$

Multiplicando (3.26) por 2, integrando-a sobre  $(0, t)$ , com  $t \in (0, T_m)$  e retornando com índice  $m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(x, u_m^2(t)\right) + 3 \int_0^t \|(u_m)_x(s)\|^2 ds &\leq \|u_m\|_{L^2(0, T; L^2(0, L))} \\ &+ \left(x, u_m^2(0)\right) + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t \left(x, u_m^2(s)\right) ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Deve-se mostrar que estão sendo satisfeitas as condições do Lema de Gronwall. De fato, o membro esquerdo é positivo, visto que o primeiro termo é um produto de funções positivas

$$\left(x, u_m^2(t)\right) = \int_0^L xu_m^2(t) dx \geq 0$$

e  $\int_0^t \|u_{mx}(s)\|^2 ds$  é positivo.

Quanto ao membro direito,  $u_m$  é limitada devido à *Estimativa I*. Também o é

$$\left(x, u_m^2(0)\right) = \int_0^L xu_m^2(x, 0) dx$$

pois  $u_m(x, 0)$  converge forte para  $u_0(x)$  em  $H_0^1$ . Por último,  $f \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ .

Como consequência:

$$u_m \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)).$$

Voltando a equação, prova-se que

$$(u_m)_x \in L^2(0, T; L^2(0, L)). \quad (3.28)$$

Logo,

$$u_m \in L^2(0, T; H_0^1(0, L)). \quad (3.29)$$

Neste ponto tem-se condições de mostrar a existência de uma solução

$$u \in L^\infty(0, T; H^{-2}(0, L)).$$

Para isso, basta mostrar que  $v_x \in L^2(0, L) \Rightarrow v_{xxx} \in H^{-2}(0, L)$ . Com efeito, para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(0, L)$  tem-se:

$$\langle v_{xxx}, \varphi \rangle = -\langle v_{xx}, \varphi_x \rangle = \langle v_x, \varphi_{xx} \rangle = \int_0^L v_x \varphi_{xx} dx.$$

Como  $v_x \in L^2(0, L)$  então,  $\int_0^L v_x \varphi_{xx} dx < \infty$  e portanto  $v_{xxx} \in H^{-2}(0, L)$ .

No contexto deste trabalho a afirmação acima mostra que  $u_x \in L^2(0, T; L^2(0, L)) \Rightarrow u_{xxx} \in L^2(0, L; H^{-2}(0, L))$ . E a seguinte equação

$$u_t = f - u_x - u_{xxx}$$

mostra que  $u_t \in L^2(0, T; H^{-2}(0, L))$ .

Este resultado, entretanto, não é útil para as necessidades de análise numérica que serão apresentadas no próximo capítulo. Desenvolver-se-á as próximas duas estimativas para se obter uma solução mais regular.

O intuito é derivar (3.4) em relação à  $t$ , no entanto, o Teorema de Caratheodory fornece uma solução  $g(t)$  de classe  $C^1(0, T_m)$  do sistema (3.11). Nestas circunstâncias, não se pode derivar  $u'_m(t)$  diretamente em relação a  $t$  sem antes demonstrar a existência dessa segunda derivada.

O procedimento é denominado Método das Diferenças e será dada apenas uma breve idéia do método, visto que os detalhes são técnicos.

O método consiste em avaliar (3.4) em  $t + \Delta t$  ( $\Delta t > 0$  tal que  $t + \Delta t \in [0, T_m]$ ), subtraindo de (3.4) avaliada em  $t$  e multiplicando o resultado por  $1/\Delta t$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u'_m(t + \Delta t) - u'_m(t)}{\Delta t}, v_m \right) + \left( \frac{(u_m)_x(t + \Delta t) - (u_m)_x(t)}{\Delta t}, v_m \right) \\ & - \left( \frac{(u_m)_{xx}(t + \Delta t) - (u_m)_{xx}(t)}{\Delta t}, (v_m)_x \right) = \left( \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, v_m \right). \end{aligned}$$

Com isso, pode-se provar que

$$\left| \frac{(u'_m(t + \Delta t), v_m) - (u'_m(t), v_m)}{\Delta t} \right| < C,$$

para alguma constante  $C > 0$  independente de  $\Delta t$ . Assim, toma-se o limite quando o parâmetro tende a zero.

O problema aproximado, neste caso, é dado por:

$$\begin{aligned} (u''_m(t), v_m) + ((u_m)'_x(t), v_m) - ((u_m)'_{xx}(t), (v_m)_x) &= (f'(t), v_m), \\ \forall v_m \in V_m \subset V. \end{aligned} \quad (3.30)$$

No entanto, no decorrer da demonstração a seguir, será necessário um resultado mostrando a limitação de  $\|u'_m(0)\|$ . Toma-se então  $t = 0$  em 3.4:

$$(u'_m(0), v_m) + ((u_m)_x(0), v_m) - ((u_m)_{xx}(0), (v_m)_x) = (f(0), v_m).$$

Tomando  $v_m = u'_m(0)$  acima e reorganizando os termos da equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \|u'_m(0)\|^2 &= (f(0) - (u_m)_x(0) + (u_m)_{xx}(0), u'_m(0)) \\ &\leq \|f(0) - (u_m)_x(0) + (u_m)_{xx}(0)\| \cdot \|u'_m(0)\| \Rightarrow \\ \|u'_m(0)\| &\leq \|f(0) - (u_m)_x(0) + (u_m)_{xx}(0)\|. \end{aligned}$$

O termo  $\|f(0) - (u_m)_x(0) + (u_m)_{xx}(0)\|$  é limitado, inicialmente, pelas hipóteses sobre  $f$  e, além disso, como  $u_m(0)$  converger para  $u_0$  em  $V$ , resulta que  $\|u_m(0)\|_V$  é limitado.

Consequentemente,  $\|u'_m(0)\|$  é limitado, independente de  $m$ .

*Estimativa III:* Tomando  $v_m = u'_m(t)$  em (3.30) e omitindo o índice  $m$ , obtém-se:

$$(u''(t), u'(t)) + (u'_x(t), u'(t)) - (u'_{xx}(t), u'_x(t)) = (f'(t), u'(t)). \quad (3.31)$$

Analisando o primeiro termo da equação (3.31):

$$\left(u''(t), u'(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'(t)\|^2. \quad (3.32)$$

Para a análise do segundo termo usa-se o fato de que as condições de fronteira são invariantes à derivação em  $t$ . Por isso,  $u'(0, t) = u'(L, t) = 0$ . Logo, integrando por partes

$$\left(u'_x(t), u'(t)\right) = (u')^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(u'(t), u'_x(t)\right).$$

Então,

$$\left(u'_x(t), u'(t)\right) = 0. \quad (3.33)$$

O terceiro termo, também pela integração por partes:

$$\begin{aligned} \left(u'_{xx}(t), u'_x(t)\right) &= (u'_x)^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(u'_{xx}(t), u'_x(t)\right) \\ &= \frac{1}{2} (u'_x)^2(0, t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

O quarto e último termo:

$$\left(f'(t), u'(t)\right) \leq \frac{1}{2} \|f'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u'(t)\|^2. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.32) - (3.35) em (3.31), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2} (u'_x)^2(0, t) \leq \frac{1}{2} \|f'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u'(t)\|^2. \quad (3.36)$$

Multiplicando por 2, integrando sobre  $(0, t)$  com  $t \in [0, T_m]$  e retornando com o índice  $m$ , obtém-se:

$$\|u'_m(t)\|^2 + \int_0^t [(u'_m)'_x]^2(0, s) ds \leq \|u'_m(0)\|^2 + \int_0^t \|f'(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds. \quad (3.37)$$

Para mostrar que estão satisfeitas as condições do Lema de Gronwall, nota-se inicialmente que o membro esquerdo é positivo. Como no membro direito tem-se  $f' \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  e  $u'_m(0)$  limitado, conclui-se que se está em acordo com as hipóteses do Lema de Gronwall. Logo,

$$u'_m \in L^\infty\left(0, T; L^2(0, L)\right). \quad (3.38)$$

Como consequência de (3.37) tem-se que

$$\int_0^t [(u_m)'_x]^2(0, s) ds \quad (3.39)$$

é limitado. Assim

$$(u_m)'_x(0) \in L^2(0, T). \quad (3.40)$$

Por outro lado, a seguinte afirmação é válida em conjuntos limitados:

$$p < q \Rightarrow L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Aplicando-a, juntamente com a estimativa (3.38), conclui-se que

$$u'_m \in L^2\left(0, T; L^2(0, L)\right). \quad (3.41)$$

Estimativa IV: Finalmente mostrar-se-á que  $(u_m)_{xx} \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ . Com efeito, por hipótese, tem-se  $f \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ , e (3.41), (3.29) mostraram que  $u'_m, (u_m)_x \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ . Pela formulação variacional aproximada, tem-se:

$$\left((u_m)_{xx}, v_x\right) = -\left(f(t) - u'_m - (u_m)_x, v\right). \quad (3.42)$$

Donde conclui-se a afirmação sobre  $(u_m)_{xx}$ .

Convergência do dado inicial: Provou-se pelas *Estimativas* que

$$\begin{aligned} u_m & \text{ é limitada em } L^2\left(0, T; V\right), \\ u'_m & \text{ é limitada em } L^2\left(0, T; L^2(0, L)\right). \end{aligned}$$

O Teorema de Aubin-Lions afirma então que

$$u_m \in C^0\left([0, T]; L^2(0, L)\right). \quad (3.43)$$

Como esse espaço é um espaço métrico completo, então da sequência  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  pode-se extrair uma subsequência  $u_\nu$  que converge uniformemente para  $u$ , ou seja,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} \|u_\nu(t) - u(t)\|_{L^2(0, L)} = 0. \quad (3.44)$$

Desde que  $u \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ , então faz sentido tomar  $u(0)$  e além disso:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (u_0, w_i) = u(0). \quad (3.45)$$

Convergência do Sistema Aproximado: Tem-se que mostrar que o problema variacional aproximado (3.4) converge para o problema variacional (3.2). Mostrar-se-á via análise cada termo de (3.4).

Com efeito, a estimativa (3.28) implica que pode-se extrair de  $(u_m)_x$  uma subsequência, também denotada por  $(u_m)_x$ , que converge fraco para  $u_x \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ . Isto significa que para qualquer  $w(x, t) \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  temos

$$\int_0^T \int_0^L (u_m)_x w(x, t) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_0^L u_x w(x, t) dx dt.$$

Por outro lado, pode-se considerar  $w(x, t) = v(x)\theta(t)$ , onde  $\theta \in \mathcal{D}(0, T) \subset L^2(0, T)$  e  $v \in H_0^1(0, L) \subset L^2(0, L)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (u_m)_x v(x) \theta(t) dx dt &\rightarrow \int_0^T \int_0^L u_x v(x) \theta(t) dx dt \Rightarrow \\ \int_0^T \left( (u_m)_x, v(x) \right) \theta(t) dt &\rightarrow \int_0^T \left( u_x, v(x) \right) \theta(t) dt \Rightarrow \\ \left( (u_m)_x, v(x) \right) &\rightarrow \left( u_x, v(x) \right), \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \end{aligned}$$

sendo esta última a convergência no sentido das distribuições. Logo,

$$\int_0^T \left( (u_m)_x(t), v \right) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \left( u_x(t), v \right) \theta(t) dt, \quad (3.46)$$

$$\forall v \in H_0^1(0, L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Além disso, procedendo de modo análogo em (3.41):

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left( u_m(t), v \right) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} \left( u(t), v \right) \theta(t) dt, \quad (3.47)$$

$$\forall v \in H_0^1(0, L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

E, finalmente, pela *Esmativa IV*:

$$\int_0^T \left( (u_m)_{xx}(t), v_x \right) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T \left( u_{xx}(t), v_x \right) \theta(t) dt, \quad (3.48)$$

$$\forall v \in H_0^1(0, L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Logo, por (3.46) - (3.48):

$$\int_0^T \left[ \frac{d}{dt} \left( u_m(t), v \right) \theta(t) + \left( (u_m)_x(t), v \right) \theta(t) + \left( (u_m)_{xx}(t), v_x \right) \theta(t) \right] dt \longrightarrow$$

$$\int_0^T \left[ \frac{d}{dt} \left( u(t), v \right) \theta(t) + \left( u_{xx}(t), v_x \right) \theta(t) + \left( u_x(t), v \right) \theta(t) \right] dt$$

$$\forall v \in H_0^1(0, L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \quad (3.49)$$

Donde, no sentido das distribuições,

$$\frac{d}{dt} \left( u_m(t), v \right) + \left( (u_m)_x(t), v \right) + \left( (u_m)_{xx}(t), v_x \right) \longrightarrow \frac{d}{dt} \left( u(t), v \right)$$

$$+ \left( u_{xx}(t), v_x \right) + \left( u_x(t), v \right), \quad \forall v \in H_0^1(0, L).$$

Unicidade da Solução: Sejam  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$  duas soluções para o problema (3.1). Definindo  $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  e provando que  $w \equiv 0$ , concluir-se-á a unicidade da solução. Com efeito,  $w$  satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} w' + w_x + w_{xxx} = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ w_x(L, t) = 0, \quad t \in [0, t] \\ w(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \end{array} \right.$$

Multiplicando a primeira equação acima por  $w$  e integrando sobre  $[0, L]$ , obtém-se:

$$\left( w'(t), w(t) \right) + \left( w_x(t), w(t) \right) - \left( w_{xx}(t), w_x(t) \right) = 0.$$

Analisando termo a termo da equação acima, tem-se o primeiro termo:

$$\left(w'(t), w(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2. \quad (3.50)$$

O segundo termo, pelas condições de fronteira, se anula:

$$\begin{aligned} \left(w_x(t), w(t)\right) &= w^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(w(t), w_x(t)\right) \Rightarrow \\ &\left(w_x(t), w(t)\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

No terceiro termo, também pelas condições de fronteira, nota-se que

$$\begin{aligned} \left(w_{xxx}(t), w(t)\right) &= w_{xx}(x, t)w(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(w_{xx}(t), w_x(t)\right) \Rightarrow \\ &\left(w_{xxx}(t), w(t)\right) = -\left(w_{xx}(t), w_x(t)\right) \end{aligned}$$

E que

$$\begin{aligned} \left(w_{xx}(t), w_x(t)\right) &= w_x^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(w_{xx}(t), w_x(t)\right) \Rightarrow \\ &\left(w_{xx}(t), w_x(t)\right) = -\frac{1}{2} w_x^2(0, t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(w_{xx}(t), w_x(t)\right) = \frac{1}{2} w_x^2(0, t). \quad (3.52)$$

Substituindo os três termos na equação original, obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} w_x^2(0, t) = 0.$$

Como  $w_x^2(0, t)$  é estritamente positivo, afirma-se que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Integrando sobre  $[0, t]$ , com  $t \in (0, T)$ , e lembrando que  $w(0) \equiv 0$ , obtém-se:

$$\|w(t)\|^2 \leq \|w(0)\|^2 \Rightarrow \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Donde conclui-se que

$$\|w(t)\|^2 = 0.$$

Isso assegura que  $w(t) \equiv 0$  e assim a unicidade está garantida. ■

### 3.2 Existência e unicidade da equação linear com termo de damping

Neste caso, o procedimento seguirá o roteiro do problema anterior. O problema linear com termo de damping é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + u_x + u_{xxx} + a(x)u = f, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ u_x(L, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (3.53)$$

onde  $a \in L^\infty(0, L)$  e satisfaz  $a(x) \geq a_0 > 0$  quase sempre em um aberto  $\omega \subset (0, L)$ .

**Teorema 3.2.** *Dados  $f, f' \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ ,  $u_0 \in V$  e  $a \in L^\infty(0, L)$  com  $a(x) \geq a_0 > 0$  quase sempre em  $\omega \subset [0, L]$ . Então existe única solução (fraca)  $u$  para o problema (3.53) da classe:*

$$\begin{aligned} u &\in C(0, T; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; V), \\ u' &\in L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{aligned}$$

**Prova:** A formulação variacional do problema linear com termo de damping é dada por: procura-se por  $u : [0, T] \rightarrow V$  tal que  $\forall v \in V$  vale

$$\left( u'(t), v \right) + \left( u_x(t), v \right) - \left( u_{xx}(t), v_x \right) + \left( a(x)u(t), v \right) = \left( f(t), v \right). \quad (3.54)$$

Sistema Aproximado: Considerando-se a base  $(w_i)_{i=1}^m$  de  $V_m$ , a formulação variacional aproximada relativa ao problema linear com termo de damping é dada por: procura-se

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x) \quad (3.55)$$

como em (3.3) satisfazendo

$$\left(u'_m(t), v_m\right) + \left((u_m)_x(t), v_m\right) - \left((u_m)_{xx}(t), (v_m)_x\right) + \left(a(x)u_m(t), v_m\right) = \left(f, v_m\right). \quad (3.56)$$

Substituindo (3.55) em (3.56) e fazendo  $v_m = w_j$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m g'_{im}(t)w_i, w_j\right) + \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)(w_i)_x, w_j\right) - \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)(w_i)_{xx}, (w_j)_x\right) \\ + \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)a(x)w_i, w_j\right) = \left(f, w_j\right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Defini-se as matrizes:

$$A = (a_{ij}) = \left(w_i, w_j\right), \quad (3.58)$$

$$B = (b_{ij}) = \left((w_i)_x, w_j\right) - \left((w_i)_{xx}(x), (w_j)_x\right) + \left(a(x)w_i, w_j\right), \quad (3.59)$$

$$F(t) = (f_j) = \left(f, w_j\right), \quad (3.60)$$

$$g_m(t) = \left(g_{1m}(t), \dots, g_{mm}(t)\right)^T. \quad (3.61)$$

Substituindo (3.58) - (3.61) em (3.57), obtém-se:

$$\begin{cases} g'(t)A + g(t)B = F(t) \\ g(0) = g_{0m} = \left((u_0, w_1), \dots, (u_0, w_m)\right). \end{cases} \quad (3.62)$$

O sistema linear (3.62) possui solução em  $(0, T_m)$  garantida pelo Teorema de Carathéodory e são necessárias as estimativas que permitem estender a solução para todo  $(0, T)$ .

Estimativa I: Tomando  $v_m = u_m(t)$  em (3.56) e omitindo o índice  $m$ , obtém-se:

$$\left(u'(t), u(t)\right) + \left(u_x(t), u(t)\right) - \left(u_{xx}(t), u_x(t)\right) + \left(a(x)u(t), u(t)\right) = \left(f(t), u(t)\right). \quad (3.63)$$

Observa-se que a diferença entre (3.12) e (3.63) é o termo de damping. A análise individual dos termos feita em (3.13) - (3.15) continua válida. Ou seja,

$$\left(u'(t), u(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2, \quad (3.64)$$

$$(u_x(t), u(t)) = 0, \quad (3.65)$$

$$(u_{xx}(t), u_x(t)) = -\frac{1}{2}u_x^2(0, t), \quad (3.66)$$

$$(f(t), u(t)) \leq \frac{1}{2}\|f(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2. \quad (3.67)$$

Além disso, o termo de damping em (3.63) satisfaz:

$$(a(x)u(t), u(t)) \leq \|a\|_{L^\infty(0,L)}\|u(t)\|^2. \quad (3.68)$$

Substituindo (3.64) - (3.68) em (3.63), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \frac{1}{2} u_x^2(0, t) \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|^2 + \left(\frac{1}{2} + \|a\|_\infty\right) \|u(t)\|^2. \quad (3.69)$$

Multiplicando (3.69) por 2, integrando sobre  $(0, t)$ , com  $t \in (0, T_m)$  e retornando com o índice  $m$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|^2 + \int_0^t [(u_m)_x]^2(0, s) ds &\leq \|u_m(0)\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \\ &+ (1 + 2\|a\|_\infty) \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Para se mostrar a validade das hipóteses do Lema de Gronwall, utilizam-se os mesmos argumentos usados na *Estimativa I* [ver (3.17)] da demonstração do problema relativo à equação linear. Basta adicionar o termo  $(1 + 2\|a\|_{L^\infty(0,L)})$ , que é limitado pois, por hipótese,  $a \in L^\infty(0, L)$ .

Logo,

$$u_m \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)). \quad (3.71)$$

Além disso, nota-se que

$$\int_0^t [(u_m)_x]^2(0, s) ds.$$

é limitado.

Estimativa II: Tomando  $v_m = xu_m(t)$  em (3.56) e omitindo o índice  $m$ , obtém-se:

$$(u'(t), xu(t)) + (u_x(t), xu(t)) - (u_{xx}(t), [xu(t)]_x) + (a(x)u(t), xu(t)) = (f(t), xu(t)). \quad (3.72)$$

Analogamente, as análises feitas em (3.22) - (3.25) são válidas:

$$\left(u'(t), xu(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(u(t), xu(t)\right), \quad (3.73)$$

$$\left(u_x(t), xu(t)\right) = -\frac{1}{2} \|u(t)\|^2, \quad (3.74)$$

$$\left(u_{xx}(t), [xu(t)]_x\right) = \frac{3}{2} \|u_x(t)\|^2, \quad (3.75)$$

$$\left(f(t), xu(t)\right) \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|^2 + \frac{1}{2} \left(x, u^2(t)\right). \quad (3.76)$$

Além disso,

$$\left(a(x)u(t), xu(t)\right) \leq |a|_{L^\infty(0,L)} \left(u(t), xu(t)\right). \quad (3.77)$$

Substituindo (3.73) - (3.77) em (3.72), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(x, u^2(t)\right) + \frac{3}{2} \|u_x(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_m(t)\|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|f(t)\|^2 + \left[\frac{1}{2} + |a|_{L^\infty(0,L)}\right] \left(x, u^2(t)\right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Multiplicando (3.78) por 2, integrando-a sobre  $(0, t)$ , com  $t \in (0, T_m)$  e retornando com o índice  $m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(x, u_m^2(t)\right) + 3 \int_0^t \|(u_m)_x(s)\|^2 ds &\leq \|u_m\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 \\ &+ \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + [1 + 2|a|_{L^\infty(0,L)}] \int_0^t \left(x, u_m^2(s)\right) ds. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Analogamente, provam-se as hipóteses do Lema de Gronwall utilizando-se os argumentos da *Estimativa II* [ver (3.27)] relativa ao problema da equação linear. A limitação do termo  $[1 + 2|a|_{L^\infty(0,L)}]$  é dada pela hipótese  $a \in L^\infty(0, L)$ . Com isso,

$$u_m \in L^\infty\left(0, T; L^2(0, L)\right).$$

Voltando a equação (3.78), tem-se

$$(u_m)_x \in L^2\left(0, T; L^2(0, L)\right). \quad (3.80)$$

Logo,

$$u_m \in L^2(0, T; H_0^1(0, L)). \quad \square \quad (3.81)$$

Pelos mesmos argumentos da seção anterior, teriam-se condições de encontrar uma solução  $u \in L^2(0, L; H^{-2}(0, L))$ . No entanto, precisa-se de uma solução mais regular e as duas próximas estimativas servem para este propósito. Uma análise com o Método das Diferenças similar àquela na seção anterior permite que se derive (3.54) em relação a  $t$ :

$$\left(u''(t), v\right) + \left(u'_x(t), v\right) - \left(u'_{xx}(t), v_x\right) + \left(a(x)u'(t), v\right) = \left(f'(t), v\right), \quad \forall v \in V. \quad (3.82)$$

O problema aproximado, neste caso, é dado por:

$$\begin{aligned} \left(u''_m(t), v_m\right) + \left((u_m)'_x(t), v_m\right) - \left((u_m)'_{xx}(t), (v_m)_x\right) + \left(a(x)u'_m(t), v_m\right) \\ = \left(f'(t), v_m\right), \quad \forall v_m \in V_m \subset V. \end{aligned} \quad (3.83)$$

*Estimativa III:* Tomando  $v_m = u'_m(t)$  em (3.83) e omitindo o índice  $m$ , obtém-se:

$$\left(u''(t), u'(t)\right) + \left(u'_x(t), u'(t)\right) - \left(u'_{xx}(t), u'_x(t)\right) + \left(a(x)u'(t), u'(t)\right) = \left(f'(t), u'(t)\right). \quad (3.84)$$

Os três primeiros termos do membro esquerdo de (3.84) e o termo do membro direito foram analisados na seção anterior (3.32) - (3.35):

$$\left(u''(t), u'(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'(t)\|^2, \quad (3.85)$$

$$\left(u'_x(t), u'(t)\right) = 0, \quad (3.86)$$

$$\left(u'_{xx}(t), u'_x(t)\right) = \frac{1}{2} (u'_x)^2(0, t), \quad (3.87)$$

$$\left(f'(t), u'(t)\right) \leq \frac{1}{2} \|f'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u'(t)\|^2. \quad (3.88)$$

Além disso,

$$\left(a(x)u'(t), u'(t)\right) \leq |a|_{L^\infty(0, L)} \|u'(t)\|^2. \quad (3.89)$$

Substituindo (3.85) - (3.89) em (3.84), tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2} (u'_x)^2(0, t) \leq \frac{1}{2} \|f'(t)\|^2 + \left(\frac{1}{2} + |a|_{L^\infty(0, L)}\right) \|u'(t)\|^2. \quad (3.90)$$

Multiplicando (3.90) por 2, integrando sobre  $(0, t)$  com  $t \in [0, T_m]$  e retornando com o índice  $m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \|u'_m(t)\|^2 + \int_0^t u_{mx}^2(0, s) ds &\leq \|u'_m(0)\|^2 + \int_0^t \|f'(s)\|^2 ds \\ &+ (1 + |a|_{L^\infty(0, L)}) \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Prova-se que as hipóteses do Lema de Gronwall são satisfeitas por meio dos argumentos usados na *Estimativa III* [ver (3.37)] relativa ao problema da equação linear e do fato de que  $a \in L^\infty(0, L)$ . Com isso,

$$u'_m \in L^\infty(0, T; L^2(0, T)). \quad (3.92)$$

Como consequência, conclui-se que

$$\int_0^t (u'_{mx})^2(0, s) ds. \quad (3.93)$$

é limitado. Assim tem-se

$$(u_m)'_x(0) \in L^2(0, T). \quad (3.94)$$

Por outro lado, a afirmação

$$p < q \Rightarrow L^q(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad (3.95)$$

junto com a estimativa (3.92) concluem que

$$u'_m \in L^2(0, T; L^2(0, L)). \quad (3.96)$$

Estimativa IV: Finalmente mostrar-se-á que  $(u_m)_{xx} \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ . Com efeito, por hipótese tem-se  $f \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ . Mostrou-se por (3.81), (3.80) e (3.96)

que  $u_m, (u_m)_x, u'_m \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ . Logo, pela equação KdV linear com damping (3.53), tem-se

$$\left( (u_m)_{xx}, v_x \right) = - \left( f(t) - u'_m - (u_m)_x - a(x)u_m, v \right).$$

Donde concluímos a afirmação sobre  $(u_m)_{xx}$ .

Convergência do dado inicial: Provou-se pelas *Estimativas* que

$$u_m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0, T; V)$$

$$u'_m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0, T; L^2(0, L)).$$

O Teorema de Aubin-Lions afirma então que

$$u_m \in C^0([0, T]; L^2(0, L)). \quad (3.97)$$

Como esse espaço é um espaço métrico completo, então da sequência  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  pode-se extrair uma subsequência  $u_\nu$  que converge uniformemente para  $u$ , ou seja,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} \|u_\nu(t) - u(t)\|_{L^2(0, L)} = 0. \quad (3.98)$$

Desde que  $u \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ , então faz sentido tomar  $u(0)$  e além disso:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (u_0, w_i) = u(0). \quad (3.99)$$

Convergência do Sistema Aproximado: Novamente, tem-se que mostrar a convergência do problema variacional aproximado com termo de damping (3.56) para o problema variacional com termo de damping (3.54). Mostrar-se-á via análise cada termo de (3.56), utilizando-se os resultados (3.46), (3.47) e (3.48) já estabelecidos pelo problema linear.

Com efeito,  $\forall v \in H_0^1(0, L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, L) \subset L^2(0, T)$ , valem:

$$\int_0^T ((u_m)_x(t), v) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u_x(t), v) \theta(t) dt, \quad (3.100)$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (u_m(t), v) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (u(t), v) \theta(t) dt, \quad (3.101)$$

$$\int_0^T ((u_m)_{xx}(t), v_x) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u_{xx}(t), v_x) \theta(t) dt, \quad (3.102)$$

Além disso, por (3.81), tem-se:

$$\int_0^T (a(x)u_m(t), v) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T (a(x)u(t), v) \theta(t) dt. \quad (3.103)$$

Logo, por (3.100) - (3.103):

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[ \frac{d}{dt} (u_m(t), v) \theta(t) + ((u_m)_x(t), v) \theta(t) + ((u_m)_{xx}(t), v_x) \theta(t) \right. \\ & \left. + (a(x)u_m(t), v) \theta(t) \right] dt \longrightarrow \int_0^T \left[ \frac{d}{dt} (u(t), v) \theta(t) + (u_{xx}(t), v_x) \theta(t) \right. \\ & \left. + (u_x(t), v) \theta(t) + (a(x)u(t), v) \theta(t) \right] dt \end{aligned}$$

$$\forall v \in H_0^1(0, L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Donde, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (u_m(t), v) + ((u_m)_x(t), v) + ((u_m)_{xx}(t), v_x) + (a(x)u_m(t), v) \longrightarrow \\ & \frac{d}{dt} (u(t), v) + (u_{xx}(t), v_x) + (u_x(t), v) + (a(x)u(t), v), \forall v \in H_0^1(0, L). \end{aligned}$$

Unicidade da Solução: Sejam  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$  duas soluções para o problema (3.53).

Definindo  $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  e provando que  $w \equiv 0$ , concluir-se-á a unicidade da solução. Com efeito,  $w$  satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} w' + w_x + w_{xxx} + a(x)w = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ w_x(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ w(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L]. \end{array} \right.$$

Multiplicando a primeira equação acima por  $w$  e integrando sobre  $[0, L]$ , obtém-se:

$$\left(w'(t), w(t)\right) + \left(w_x(t), w(t)\right) + \left(w_{xx}(t), w_x(t)\right) + \left(a(x)w(t), w(t)\right) = 0. \quad (3.104)$$

Os três primeiros termos já foram analisados em (3.50) - (3.52):

$$\left(w'(t), w(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2. \quad (3.105)$$

$$\left(w_x(t), w(t)\right) = 0. \quad (3.106)$$

$$\left(w_{xx}(t), w_x(t)\right) = -\frac{1}{2} w_x^2(0, t). \quad (3.107)$$

Quanto ao quarto termo, não há o que ser feito. Vê-se apenas que é positivo, desde que  $a(x) \geq a_0 > 0$ :

$$0 < a_0 \|w(t)\|^2 \leq \left(a(x)w(t), w(t)\right). \quad (3.108)$$

Substituindo os termos (3.105) - (3.108) na equação original (3.104), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} w_x^2(0, t) + \left(a(x)w(t), w(t)\right) = 0.$$

Como  $w_x^2(0, t)$  e  $\left(a(x)w(t), w(t)\right)$  são estritamente positivos, afirma-se que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Integrando sobre  $[0, t]$ , com  $t \in (0, T)$ , e lembrando que  $w(0) \equiv 0$ , obtém-se:

$$\|w(t)\|^2 \leq \|w(0)\|^2 \Rightarrow \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Donde conclui-se que

$$\|w(t)\|^2 = 0.$$

Isso assegura que  $w(t) \equiv 0$  e assim a unicidade está garantida. ■

### 3.3 Existência e unicidade da equação não-linear com termo de damping

Este é o último passo para completar a demonstração da existência e unicidade da solução da equação de Korteweg-De Vries. Adiciona-se o termo não-linear  $u(t)u_x(t)$  e seguir-se-á o procedimento feito no decorrer desse capítulo. O problema não-linear com termo de damping é definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = f, \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ u_x(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (3.109)$$

onde  $a \in L^\infty(0, L)$  e satisfaz  $a(x) \geq a_0 > 0$  quase sempre em  $\omega \subset (0, L)$ .

**Teorema 3.3.** *Dados  $f, f' \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ ,  $u_0 \in V$  e  $a \in L^\infty(0, L)$  com  $a(x) \geq a_0 > 0$  quase sempre em  $\omega \subset [0, L]$ . Então existe única solução (fraca)  $u$  para o problema (3.109) da classe:*

$$\begin{aligned} u &\in C(0, T; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; V) \\ u' &\in L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{aligned}$$

**Prova:** Para esta equação tem-se a seguinte formulação variacional: procura-se por  $u : [0, T] \rightarrow V$  tal que

$$\begin{aligned} &\left( u'(t), v \right) + \left( u_x(t), v \right) - \left( u_{xx}(t), v_x \right) + \left( u(t)u_x(t), v \right) \\ &+ \left( a(x)u(t), v \right) = \left( f(t), v \right), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Sistema Aproximado: Considerando-se a base  $(w_i)_{i=1}^m$  de  $V_m$ , a formulação variacional aproximada relativa ao problema não-linear com termo de Damping é dada

por: procura-se

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x) \quad (3.111)$$

como em (3.3) tal que

$$\begin{aligned} & \left( u'_m(t), v_m \right) + \left( (u_m)_x(t), v_m \right) - \left( (u_m)_{xx}(t), (v_m)_x \right) + \left( u_m(t)(u_m)_x(t), v_m \right) \\ & + \left( a(x)u_m(t), v_m \right) = \left( f(t), v_m \right). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Substituindo (3.111) em (3.112) e fazendo  $v_m = w_j$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)w_i, w_j \right) + \left( \sum_{i=1}^m g_{im}(t)(w_i)_x, w_j \right) - \left( \sum_{i=1}^m g_{im}(t)(w_i)_{xx}, w_{jx} \right) \\ & + \left( \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)a(x)w_i, w_j \right) + \left( \left[ \sum_{i=1}^m g_{im}(t)(w_i)_x \right] \left[ \sum_{k=1}^m g_{km}(t)(w_k)_x(x) \right], (w_j)_x \right) \\ & = \left( f(t), w_j \right). \end{aligned} \quad (3.113)$$

O capítulo 5 apresenta mais detalhes do porquê a equação (3.113) produz um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias da forma:

$$\begin{cases} Ag'(t) + C(t)g(t) = F(t) \\ g(0) = g_{0m} = \left( (u_0, w_1), \dots, (u_0, w_m) \right). \end{cases} \quad (3.114)$$

O sistema não-linear (3.114) possui solução em  $(0, T_m)$  garantida pelo Teorema de Caratheodory e são necessárias estimativas que permitem estender a solução para todo  $(0, T)$ .

Estimativa I: Tomando  $v_m = u_m(t)$  em (3.112) e omitindo o índice  $m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left( u'(t), u(t) \right) + \left( u_x(t), u(t) \right) - \left( u_{xx}(t), u_x(t) \right) + \left( u(t)u_x(t), u(t) \right) \\ & + \left( a(x)u(t), u(t) \right) = \left( f(t), u(t) \right). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Entretanto, nota-se que neste caso, integrando por partes no termo não-linear:

$$\begin{aligned} \left( u(t)u_x(t), u(t) \right) &= u^3(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left( u(t), [u(t)u(t)]_x \right) \implies \\ &\left( u(t)u_x(t), u(t) \right) = 0. \end{aligned}$$

Com isso, pode-se usar a *Estimativa I* do problema linear com termo de damping porque o novo termo inserido (termo não-linear) possui contribuição nula. Logo,

$$u_m \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)). \quad (3.116)$$

Além disso, nota-se que

$$\int_0^t [(u_m)_x]^2(0, s) ds. \quad (3.117)$$

é limitado.

Estimativa II: Tomando  $v_m = xu_m(t)$  em (3.112) e omitindo o índice  $m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \left( u'(t), xu(t) \right) + \left( u_x(t), xu(t) \right) - \left( u_{xx}(t), [xu(t)]_x \right) + \left( u(t)u_x(t), xu(t) \right) \\ + \left( a(x)u(t), xu(t) \right) = \left( f(t), xu(t) \right). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Sabe-se, pelas equações (3.73) - (3.76), que:

$$\left( u'(t), xu(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( x, u^2(t) \right), \quad (3.119)$$

$$\left( u_x(t), xu(t) \right) = -\frac{1}{2} \|u(t)\|^2, \quad (3.120)$$

$$\left( u_{xx}(t), [xu(t)]_x \right) = -\frac{3}{2} \|u_x(t)\|^2, \quad (3.121)$$

$$\left( f(t), xu(t) \right) \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|^2 + \frac{1}{2} \left( x, u^2(t) \right). \quad (3.122)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left( u(t)u_x(t), xu(t) \right) &= xu^3(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left( u(t), [xu^2(t)]_x \right) \implies \\ \left( u(t)u_x(t), xu(t) \right) &= - \left( u(t), u^2(t) \right) - 2 \left( u(t), xu(t)u_x(t) \right) \implies \\ \left( u(t)u_x(t), xu(t) \right) &= -\frac{1}{3} \left( u(t)u(t), u(t) \right). \end{aligned}$$

Como  $L^\infty(0, L) \subset L^3(0, L)$ , pode-se escrever:

$$\left( u(t)u_x(t), xu(t) \right) = -\frac{1}{3} \left( u(t)u(t), u(t) \right) = \int_0^L u(t)^3 dx \leq L |u(t)|_{L^\infty(0, L)}^3. \quad (3.123)$$

Substituindo (3.119) - (3.123) em (3.118), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( x, u^2(t) \right) + \frac{3}{2} \|u_x(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + L |u(t)|_{L^\infty(0, L)}^3 \\ &+ \frac{1}{2} \|f(t)\|^2 + \left[ \frac{1}{2} + \|a\|_\infty \right] \left( x, u^2(t) \right). \end{aligned} \quad (3.124)$$

Multiplicando (3.124) por 2, integrando sobre  $(0, t)$ , onde  $t \in (0, T_m)$  e retornando com o índice  $m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left( x, u_m^2(s) \right) ds + 3 \int_0^t \|(u_m)_x(s)\|^2 ds &\leq \left( x, u_m^2(0) \right) + \|u(t)\|_{L^2(0, T; L^2(0, L))} \\ &+ 2L \|u_m\|_{L^2(0, T; L^\infty(0, L))}^3 + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + [1 + 2\|a\|_\infty] \int_0^t \left( x, u_m^2(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (3.125)$$

A explicação do porquê (3.125) está nas hipóteses do Lema de Gronwall se dá pelos mesmos argumentos da *Estimativa II* [ver (3.79)] do problema da equação linear com termo de damping. Com isso,

$$\begin{aligned} (u_m)_x &\in L^2(0, T; L^2(0, L)) \\ u_m &\in L^\infty(0, T; L^2(0, L)). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Logo:

$$u_m \in L^2(0, T; H_0^1(0, L)). \quad (3.127)$$

Usando o mesmo argumento da seção anterior, são satisfeitas as condições para encontrar uma solução  $u \in L^2(0, L; H^{-2}(0, L))$ . No entanto, é necessária uma solução mais regular e as duas próximas estimativas se destinam a este propósito. Uma análise com o Método das Diferenças similar àquela da primeira seção permite que se derive (3.110) em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned} & \left( u''(t), v \right) + \left( u'_x(t), v \right) - \left( u'_{xx}(t), v_x \right) + \left( [u_m(t)u_{mx}(t)]', v_m \right) \\ & + \left( a(x)u'(t), v \right) = \left( f'(t), v \right), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Assim, o problema variacional aproximado é dado por:

$$\begin{aligned} & \left( u''_m(t), v_m \right) + \left( (u_m)'_x(t), v_m \right) - \left( (u_m)'_{xx}(t), (v_m)_x \right) + \left( [u_m(t)u_{mx}(t)]', v_m \right) \\ & + \left( a(x)u'_m(t), v_m \right) = \left( f'(t), v_m \right). \end{aligned} \quad (3.129)$$

Estimativa III: Tomando  $v_m = u'_m(t)$  em (3.129) e omitindo o índice  $m$ :

$$\begin{aligned} & \left( u''(t), u'(t) \right) + \left( u'_x(t), u'(t) \right) - \left( u'_{xx}(t), u'_x(t) \right) + \left( [u(t)u_x]'(t), u'(t) \right) \\ & + \left( a(x)u'(t), u'(t) \right) = \left( f'(t), u'(t) \right). \end{aligned} \quad (3.130)$$

Permanecem válidos os resultados de (3.85) - (3.89):

$$\left( u''(t), u'(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'(t)\|^2, \quad (3.131)$$

$$\left( u'_x(t), u'(t) \right) = 0, \quad (3.132)$$

$$\left( u'_{xx}(t), u'_x(t) \right) = -\frac{1}{2} u'^2_x(0, t), \quad (3.133)$$

$$\left( a(x)u'(t), u'(t) \right) \leq |a|_{L^\infty(0, L)} \|u'(t)\|^2, \quad (3.134)$$

$$\left( f'(t), u'(t) \right) \leq \frac{1}{2} \|f'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u'(t)\|^2. \quad (3.135)$$

Quanto ao termo não-linear, tem-se que:

$$\left( [u(t)u_x]'(t), u'(t) \right) = \left( u'(t)u_x(t), u'(t) \right) + \left( u(t)u'_x(t), u'(t) \right). \quad (3.136)$$

O primeiro termo de (3.136) é:

$$\begin{aligned}
\left( u'(t)u_x(t), u'(t) \right) &= (u')^2(x, t)u(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left( u(t), [(u')^2(t)]_x \right) \\
&= - \left( u(t), [u'^2(t)]_x \right) \\
&= -2 \left( u(t)u'_x(t), u'(t) \right).
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Substituindo (3.137) em (3.136):

$$\begin{aligned}
\left( [u(t)u_x]'(t), u'(t) \right) &= \left( u(t)u'_x(t), u'(t) \right) + \frac{1}{2} \left( u(t)u'_x(t), u'(t) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( u'(t)u'_x(t), u'(t) \right) \\
&\leq \frac{1}{2} |u_x(t)|_{L^\infty(0,L)} \|u'(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Substituindo (3.131) - (3.138) em (3.130):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2} [u'_x]^2(0, t) &\leq \frac{1}{2} \|f'(t)\|^2 \\
+ \{ |u_x(t)|_{L^\infty(0,L)} + |a|_{L^\infty(0,L)} + \frac{1}{2} \} &\|u'(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.139}$$

Multiplicando (3.139) por 2, integrando sobre  $(0, t)$ , com  $t \in [0, T_m]$ , e retornando com índice  $m$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\|u'_m(t)\|^2 + \int_0^t [(u_m)_x']^2(0, s) ds &\leq \|u'_m(0)\|^2 + \int_0^t \|f'(s)\|^2 ds \\
+ \{ 2|(u_m)_x|_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))} + 2|a|_{L^\infty(0,L)} + 1 \} &\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds.
\end{aligned} \tag{3.140}$$

A demonstração do porquê (3.140) está nas hipóteses do Lema de Gronwall segue os moldes da demonstração apresentada na *Estimativa III* para a equação (3.91) juntamente com o fato já demonstrado de que  $(u_m)_x \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  e  $a \in L^\infty(0, L)$ .

Logo,

$$u'_m \in L^\infty(0, T; L^2(0, T)). \tag{3.141}$$

Com este resultado retorna-se a equação (3.140) para concluir que

$$\int_0^t [(u_m)'_x]^2(0, s) ds \quad (3.142)$$

é limitado. E portanto,

$$u'_m(0) \in L^2(0, T). \quad (3.143)$$

Além disso, pela implicação  $p < q \Rightarrow L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  conclui-se que

$$u'_m \in L^2\left(0, T; L^2(0, T)\right). \quad (3.144)$$

*Estimativa IV:* Mostrar-se-á agora que  $u_m(u_m)_x \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  ao se mostrar que  $u_m(u_m)_x \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ .

De fato, fixando  $t \in [0, T]$  e usando a desigualdade de Holder, obtém-se:

$$\begin{aligned} |u_m(t)(u_m)_x(t)|_{L^2(0, L)}^2 &= \int_0^L |u_m(x, t)(u_m)_x(x, t)|^2 dx \\ &\leq \| (u_m(t))^2 \|_{L^\infty(0, L)} \| ((u_m)_x(t))^2 \|_{L^1(0, L)} \\ &= \| (u_m(t))^2 \|_{L^\infty(0, L)} \| (u_m)_x(t) \|_{L^2(0, L)}^2 \end{aligned}$$

Usando agora que  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L)$ , existe constante  $c_3 > 0$  tal que

$$\| \cdot \|_{L^2(0, L)} \leq c_3 \| \cdot \|_{H_0^1(0, L)}$$

independentemente de  $t$ , donde se obtém que

$$|u_m(t)(u_m)_x(t)|_{L^2(0, L)}^2 \leq c_3^2 |(u_m)_x|^4 \leq c_3^2 M_0^4 = M_1^2.$$

E assim,

$$\|u_m(u_m)_x\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} = \sup \text{ess} |u_m(t)(u_m)_x(t)| \leq M_1.$$

Logo,

$$u_m(u_m)_x \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \Rightarrow u_m(u_m)_x \in L^2(0, T; L^2(0, L)). \quad (3.145)$$

Estimativa V: Finalmente mostrar-se-á que  $(u_m)_{xx} \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ . Com efeito, tem-se por hipótese que  $f \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ . Mostrou-se por (3.126), (3.127), (3.144) e (3.145) que  $u_m, (u_m)_x, u_m(u_m)_x, u'_m \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ .

Assim, pela equação KdV não-linear com damping (3.109), tem-se

$$\left( (u_m)_{xx}, v_x \right) = - \left( f(t) - u'_m - (u_m)_x - u_m(u_m)_x - a(x)u_m, v \right).$$

Donde se conclui a afirmação sobre  $(u_m)_{xxx}$ .

Convergência do dado inicial: Provou-se pelas *Estimativas* que

$$u_m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0, T; V)$$

$$u'_m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0, T; L^2(0, L)).$$

O Teorema de Aubin-Lions afirma então que

$$u_m \in C^0([0, T]; L^2(0, L)). \quad (3.146)$$

Como esse espaço é um espaço métrico completo, então da sequência  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  pode-se extrair uma subsequência  $u_\nu$  que converge uniformemente para  $u$ , ou seja,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} \|u_\nu(t) - u(t)\|_{L^2(0, L)} = 0. \quad (3.147)$$

Desde que  $u \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ , então faz sentido tomar  $u(0)$  e além disso:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (u_0, w_i) = u(0). \quad (3.148)$$

Convergência do Sistema Aproximado: Finalmente resta provar a convergência do problema variacional aproximado não-linear com termo de damping (3.112) para o problema variacional não-linear com termo de damping (3.110). Mostrar-se-á via análise de cada termo de (3.112), utilizando os resultados (3.126), (3.144) e *Estimativa IV* já estabelecidos. Com efeito,  $\forall v \in H_0^1(0, L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, L) \subset L^2(0, T)$ :

$$\int_0^T \left( (u_m)_x(t), v \right) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T \left( u_x(t), v \right) \theta(t) dt, \quad (3.149)$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (u_m(t), v) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (u(t), v) \theta(t) dt, \quad (3.150)$$

$$\int_0^T ((u_m)_{xx}(t), v_x) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u_{xx}(t), v_x) \theta(t) dt, \quad (3.151)$$

$$\int_0^T (a(x)u_m(t), v) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T (a(x)u_x(t), v) \theta(t) dt. \quad (3.152)$$

A demonstração da convergência do termo não-linear exige mais cautela. Inicialmente, nota-se que, pela Desigualdade Elementar:

$$\|u_m(t)(u_m)_x(t)\| \leq \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|(u_m)_x(t)\|^2.$$

Como os termos do membro direito são limitados, vide (3.126) e (3.127), a equação acima mostra que

$$u_m(u_m)_x \in L^1(0, T; L^2(0, L)).$$

Mas como  $L^1(0, T; L^2(0, L))$  é um espaço não-reflexivo, tem-se somente que

$$(u_m(u_m)_x, v) \longrightarrow^* (w, v) \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \text{ e } \forall v \in L^2(0, L)$$

isto é,

$$\int_0^T (u_m(u_m)_x, v) \longrightarrow \int_0^T (w, v).$$

Por outro lado, nota-se que:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_m(u_m)_x - u(u_m)_x + u(u_m)_x - uu_x, v) \\ &= \int_0^T ([u_m - u](u_m)_x + u[(u_m)_x - u_x], v) \\ &= \int_0^T ([u_m - u](u_m)_x + \int_0^T u[(u_m)_x - u_x], v). \end{aligned} \quad (3.153)$$

O primeiro termo do membro direito de (3.153) converge para zero porque  $u_m \rightarrow u$  forte em  $L^2(0, T; H_0^1(0, L))$  (consequência do Teorema de Aubin-Lions) e porque  $(u_m)_x$  é limitado. Analogamente,  $(u_m)_x \rightarrow u_x$  por (3.126) e  $u$  é limitada.

Pela unicidade do limite,  $w = uu_x$ .

Agrupando (3.149) - (3.152) e a convergência do termo não-linear acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left[ \frac{d}{dt} (u_m(t), v) \theta(t) + ((u_m)_x(t), v) \theta(t) + ((u_m)_{xx}(t), v_x) \theta(t) \right. \\
& \quad \left. + (u_m(t)(u_m)_x(t), v) \theta(t) + (a(x)u_m(t), v) \theta(t) \right] dt \longrightarrow \\
& \int_0^T \left[ \frac{d}{dt} (u(t), v) \theta(t) + (u_x(t), v) \theta(t) + (u_{xx}(t), v_x) \theta(t) \right. \\
& \quad \left. + (u(t)u_x(t), v) \theta(t) + (a(x)u(t), v) \theta(t) \right] dt, \\
& \quad \forall v \in H_0^1(0, L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).
\end{aligned} \tag{3.154}$$

Donde, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (u_m(t), v) + ((u_m)_x(t), v) + ((u_m)_{xxx}(t), v) \\
& \quad + (u_m(t)(u_m)_x(t), v) + (a(x)u_m(t), v) \longrightarrow \\
& \frac{d}{dt} (u(t), v) + (u_x(t), v) + (u_{xxx}(t), v) \\
& \quad + (u(t)u_x(t), v) + (a(x)u(t), v), \forall v \in H_0^1(0, L).
\end{aligned}$$

Unicidade da Solução: Sejam  $u_1(x, t)$  e  $u_2(x, t)$  duas soluções para o problema (3.109).

Definindo  $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  e provando que  $w \equiv 0$ , concluir-se-á a unicidade da solução. Com efeito,  $w$  satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} w' + w_x + w_{xxx} + u_1(u_1)_x - u_2(u_2)_x + a(x)w = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ w_x(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ w(x, 0) = 0, \quad x \in [0, L] \end{array} \right.$$

Multiplicando a primeira equação acima por  $w$  e integrando sobre  $[0, L]$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left( w'(t), w(t) \right) + \left( w_x(t), w(t) \right) - \left( w_{xx}(t), w_x(t) \right) \\ & + \left( u_1(u_1)_x - u_2(u_2)_x, w(t) \right) + \left( a(x)w(t), w(t) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Os seguintes termos já foram analisados em (3.105) - (3.108):

$$\left( w'(t), w(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2, \quad (3.156)$$

$$\left( w_x(t), w(t) \right) = 0, \quad (3.157)$$

$$\left( w_{xx}(t), w_x(t) \right) = -\frac{1}{2} w_x^2(0, t), \quad (3.158)$$

$$0 < a_0 \|w(t)\|^2 \leq \left( a(x)w(t), w(t) \right). \quad (3.159)$$

Quanto ao termo não-linear, usa-se integração por partes e o fato de  $u_1$  e  $u_2$  serem  $L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ :

$$\begin{aligned} \left| \left( u_1(u_1)_x - u_2(u_2)_x, w(t) \right) \right| &= \frac{1}{2} \left| \left( \frac{d}{dx} [u_1^2 - u_2^2](t), w \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left( [u_1^2 - u_2^2](t), w_x(t) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \left( [u_1 + u_2](t)w(t), w_x(t) \right) \right| \quad (3.160) \\ &\leq |C| \left( w(t), w_x(t) \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Substituindo os termos (3.156) - (3.160) na equação (3.155), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{2} w_x^2(0, t) + \left( a(x)w(t), w(t) \right) &= - \left( u_1(u_1)_x - u_2(u_2)_x, w(t) \right) \\ &\leq \left| \left( u_1(u_1)_x - u_2(u_2)_x, w(t) \right) \right| \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Como  $w_x^2(0, t)$  e  $(a(x)w(t), w(t))$  são estritamente positivos, afirma-se que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Integrando sobre  $[0, t]$ , com  $t \in (0, T)$ , e lembrando que  $w(0) \equiv 0$ , obtém-se:

$$\|w(t)\|^2 \leq \|w(0)\|^2 \Rightarrow \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Donde conclui-se que

$$\|w(t)\|^2 = 0.$$

Isso assegura que  $w(t) \equiv 0$  e assim a unicidade está garantida. ■

## 4 ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO LINEAR

Estabelecida a existência e unicidade da solução para a equação de Korteweg-de Vries, tornou-se possível o estudo da convergência dos métodos numéricos que serão aplicados nos problemas linear com e sem termo de damping.

Dividiu-se este capítulo em quatro seções. Na primeira tratar-se-á o problema linear sem termo de damping, suas estimativas em tempo contínuo e discreto, e, por fim, resultados computacionais de simulação e convergência obtidos para fins de validação dos métodos. Na segunda seção seguir-se-ão os mesmos passos da seção anterior, mas no contexto do problema linear com termo de damping. Na terceira são mostrados os resultados de simulação com  $f \equiv 0$ . Na última seção são apresentados os resultados computacionais relativos à primeira propriedade teórica, enunciada no Capítulo 1.

## 4.1 Estimativa de erro da equação KdV linear

Considera-se a formulação forte da equação KdV linear estabelecida no capítulo 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + u_x + u_{xxx} = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u_x(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

A formulação variacional: procura-se  $u : [0, T] \rightarrow V$  solução de:

$$\left( u'(t), v \right) + \left( u_x(t), v \right) - \left( u_{xx}(t), v_x \right) = \left( f(t), v \right). \quad (4.2)$$

Bem como a formulação variacional aproximada: procura-se  $u : [0, T] \rightarrow V_m$  solução de:

$$\left( u'_m(t), v_m \right) + \left( (u_m)_x(t), v_m \right) - \left( (u_m)_{xx}(t), (v_m)_x \right) = \left( f(t), v_m \right). \quad (4.3)$$

O subespaço de dimensão finita  $V_m \subset V$  possui índice  $m$  para enfatizar sua relação com a dimensão.

### 4.1.1 Tempo contínuo

O objetivo é estimar o erro

$$\begin{aligned} \|u - u_m\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} &= \max_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_m(t)\|_{L^2(0, L)} \\ &= \max_{t \in [0, T]} \left( \int_0^L |u(x, t) - u_m(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

gerado pela utilização do Método de Galerkin, onde  $u(t)$  é solução de (4.2) e  $u_m(t)$  é solução de (4.3).

Como  $V_m$  é subespaço de  $V$ , a equação (4.2) é válida para  $v_m \in V_m$ . Então, tomando  $v = v_m$  em (4.2) e subtraindo de (4.3), obtém-se:

$$\left(u'(t) - u'_m(t), v_m\right) + \left(u_x(t) - (u_m)_x(t), v_m\right) - \left(u_{xx}(t) - (u_m)_{xx}(t), (v_m)_x\right) = 0. \quad (4.4)$$

Para se provar a estimativa, introduz-se a Projeção de Rayleigh-Ritz definida em (18):

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow V_m \\ u(t) &\mapsto Pu(t) = \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

satisfazendo:

$$\left(u_{xx}(t) - \tilde{u}_{xx}(t), (v_m)_x\right) = 0, \quad \forall v_m \in V_m.$$

Nota-se que, sendo a projeção  $\tilde{u}(t) \in V_m$  e  $\{\varphi_i(x), \psi_i(x)\}$  uma base de Hermite de  $V_m$ , então podemos escrever

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{i=1}^m u_{im}(t) \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^m (u_x)_{im}(t) \psi_i(x), \quad (4.5)$$

logo,  $\tilde{u}(x_i, t) = u_{im}(t)$  e  $\tilde{u}_x(x_i, t) = (u_x)_{im}(t)$ . Além disso,  $\tilde{u}_x(L, t) = u_x(L, t) = 0$ . Dessa forma,  $\tilde{u}(t)$  também é denominada interpolante de  $u$ . Esta projeção será usada para decompor o erro da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e(t) &= u(t) - u_m(t) \\ &= u(t) + \tilde{u}(t) - \tilde{u}(t) - u_m(t) \\ &= \rho(t) + \xi(t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|u(t) - \tilde{u}(t)\| + \|\tilde{u}(t) - u_m(t)\| \\ &= \|\rho(t)\| + \|\xi(t)\|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A idéia da decomposição do erro e a introdução da projeção foram desenvolvidos em (36).

O erro  $\rho(t)$  entre a solução aproximada e sua interpolante são conhecidos pela Teoria de Interpolação definidas no Capítulo 2. Resta encontrar estimativas para o termo  $\|\xi(t)\|$ .

**Observação 4.1** (Hipóteses de regularidade). *Para obter-se as estimativas de erros entre a solução exata e a aproximada, obtida pelo Método dos Elementos Finitos, é necessária mais regularidade da solução. Esta regularidade será assumida como hipótese adicional:*

$$(H1) \quad u' \in L^2(0, T; V).$$

$$(H2) \quad u'' \in L^2(0, T; V).$$

$$(H3) \quad u''' \in L^2(0, T; V).$$

**Teorema 4.1.** *Sob as hipóteses de regularidade (H1), (H2), (H3) acima e dada  $u_0 \in V$ , tem-se que a solução numérica obtida pelo Método dos Elementos Finitos possui a seguinte estimativa:*

$$\|u(t) - u_m(t)\|_{L^2(0, L)} \leq ch, \quad \forall t \geq 0,$$

onde a constante positiva  $c$  independe de  $h$ .

**Prova:** Somando e subtraindo  $\tilde{u}'(t)$ ,  $\tilde{u}_x(t)$ ,  $\tilde{u}_{xx}(t)$  respectivamente nos três termos de (4.4), obtém-se:

$$\left(\rho'(t) + \xi'(t), v_m\right) + \left(\rho_x(t) + \xi_x(t), v_m\right) - \left(\rho_{xx}(t) + \xi_{xx}(t), (v_m)_x\right) = 0.$$

Por definição de projeção, tem-se  $\left(\rho_{xx}(t), (v_m)_x\right) = 0$ . Então:

$$\left(\rho'(t) + \xi'(t), v_m\right) + \left(\xi_x(t) + \rho_x(t), v_m\right) - \left(\xi_{xx}(t), (v_m)_x\right) = 0.$$

Tomando  $v_m = \xi(t)$  acima, obtém-se:

$$\left(\rho'(t) + \xi'(t), \xi(t)\right) + \left(\xi_x(t) + \rho_x(t), \xi(t)\right) - \left(\xi_{xx}(t), \xi_x(t)\right) = 0.$$

Rearranjando os termos:

$$\left(\xi'(t), \xi(t)\right) + \left(\xi_x(t), \xi(t)\right) - \left(\xi_{xx}(t), \xi_x(t)\right) = -\left(\rho'(t), \xi(t)\right) - \left(\rho_x(t), \xi(t)\right). \quad (4.8)$$

Analisam-se inicialmente os termos do membro esquerdo de (4.8). O primeiro é:

$$\left(\xi'(t), \xi(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\|^2. \quad (4.9)$$

Usando integração por partes no segundo termo de (4.8):

$$\begin{aligned} \left(\xi_x(t), \xi(t)\right) &= \xi^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(\xi(t), \xi_x(t)\right) \implies \\ \left(\xi_x(t), \xi(t)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Tem-se que  $\xi^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0$  pois, visto que são conhecidos os valores de  $u(x, t)$  em  $x = 0$  e  $x = L$ , também serão conhecidos os valores de  $\tilde{u}$  e  $u_m$  nesses pontos. Com isso,  $\xi(x, t) = \tilde{u}(x, t) - u_m(x, t)$  em  $x = 0$  e  $x = L$  implica  $\xi(0, t) = \xi(L, t) = 0$ .

Usando a integração por partes no terceiro termo de (4.8):

$$\left(\xi_{xx}(t), \xi_x(t)\right) = \xi_x(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left(\xi_x(t), \xi_{xx}(t)\right).$$

Como  $\xi_x(L, t) = u_x(L, t) - \tilde{u}_x(L, t) = 0$ , obtém-se:

$$\left(\xi_{xx}(t), \xi_x(t)\right) = -\frac{1}{2} \xi_x^2(0, t). \quad (4.10)$$

Usando a desigualdade elementar em ambos os termos do membro direito de (4.8):

$$\left(\rho'(t), \xi(t)\right) \leq \frac{1}{2} \|\rho'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi(t)\|^2, \quad (4.11)$$

$$\left(\rho_x(t), \xi(t)\right) \leq \frac{1}{2} \|\rho_x(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi(t)\|^2. \quad (4.12)$$

Substituindo (4.9) - (4.12) em (4.8), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\|^2 + \frac{1}{2} \xi_x^2(0, t) \leq \|\rho'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\rho_x(t)\|^2 + \|\xi(t)\|^2. \quad (4.13)$$

Multiplicando (4.13) por 2 e integrando sobre  $(0, t)$ , tem-se:

$$\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \xi_x^2(0, s) ds \leq \|\xi(0)\|^2 + \int_0^t \|\rho'(s)\|^2 ds + \int_0^t \|\rho_x(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t \|\xi(s)\|^2 ds. \quad (4.14)$$

Como  $\xi(0) = \tilde{u}(0) - u_m(0)$  é limitado e também o são  $\rho'$  e  $\rho_x$  (pelo Lema de Douglas-Dupont, Capítulo 2), é permitido, então, aplicar o Lema de Gronwall:

$$\|\xi(t)\|^2 \leq \|\xi(0)\|^2 + \int_0^t \|\rho'(s)\|^2 ds + \int_0^t \|\rho_x(s)\|^2 ds. \quad (4.15)$$

Como  $u(0) - u_m(0) = \xi(0) + \rho(0)$ , tem-se  $\xi(0) = u(0) - u_m(0) - \rho(0)$  e portanto,  $\|\xi(0)\| = \|u(0) - u_m(0)\| + \|\rho(0)\|$ .

Para  $m = 0$  e  $t = 0$ , o Lema de Douglas-Dupont fornece

$$\|\rho(0)\| \leq ch^2 \|u(0)\|_V.$$

Além disso, também supõe-se

$$\|u(0) - u_m(0)\| \leq ch^2 \|u(0)\|_V.$$

Logo,

$$\|\xi(0)\|^2 \leq ch^4 \|u(0)\|_V^2 = ch^4 \|u_0\|_V^2.$$

Tomando  $m = 0$  e  $m = 1$  no Lema de Douglas-Dupont, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\rho'(s)\|^2 ds &\leq ch^4 \int_0^t \|u'(s)\|_V^2 ds, \\ \int_0^t \|\rho_x(s)\|^2 ds &\leq \int_0^t \|\rho(s)\|_1^2 ds \leq ch^2 \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds, \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em (4.15), obtém-se:

$$\|\xi(t)\|^2 \leq c_1 h^4 \left\{ \|u_0\|_V^2 + \int_0^t \|u'(s)\|_V^2 ds \right\} + c_2 h^2 \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds.$$

Como o espaço  $V_m$  possui dimensão finita, as normas são equivalentes e isso permite extrair a raiz termo a termo. Portanto,

$$\|\xi(t)\| \leq c_1 h^2 \left\{ \|u_0\|_V + \|u'\|_{L^2(0,T;V)} \right\} + c_2 h \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Por outro lado, tomando  $m = 0$  no Lema de Douglas-Dupont, tem-se:

$$\|\rho(t)\| \leq c_1 h^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Assim, sabendo que  $\|u(t) - u_m(t)\| \leq \|\rho(t)\| + \|\xi(t)\|$  e que  $h^2 < h$ , quando  $h \ll 1$ , obtém-se

$$\|u(t) - u_m(t)\| \leq ch \left\{ \|u_0\|_V + \|u'\|_{L^2(0,T;V)} + \|u\|_{L^2(0,T;V)} \right\}.$$

Donde se conclui:

$$\|u(t) - u_m(t)\|_{L^2(0,L)} = O(h). \quad \blacksquare \quad (4.16)$$

#### 4.1.2 Tempo discreto

Nas estimativas anteriores para o problema semidiscreto considerou-se a variação contínua do parâmetro  $t$ , mas, na prática, o tempo  $t$  varia discretamente.

Em geral, nas equações do tipo parabólico e hiperbólico usa-se o Método dos Elementos Finitos para a variável espacial e o Método das Diferenças Finitas para a variável temporal. Nada impede o uso do Método dos Elementos Finitos também na variável temporal. Apesar de tal abordagem ser matematicamente razoável, prova-se que isso destrói propriedades importantes de propagação.

Sendo assim, utilizar-se-á o Método das Diferenças Finitas (Método de Euler Progressivo para a aproximação da derivada, em conjunto com o Método Trapezoidal Generalizado) na variável temporal e o Método dos Elementos Finitos na variável espacial (ambos apresentados no Capítulo I) para obter a estimativa de erro  $\|u - u_m\|$  em alguma norma de Sobolev.

Considerando as notações, definições e teoremas estabelecidos no Capítulo 2, anuncia-se:

**Teorema 4.2.** *Sob as hipóteses de regularidade (H1), (H2) e (H3) da seção anterior e dada  $u_0 \in V$ , a solução numérica obtida pelo Método dos Elementos Finitos e pelo Método Trapezoidal Generalizado para*

$$\theta \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \quad e \quad \Delta t \leq \frac{2}{3}$$

possui a seguinte estimativa:

$$\|u - u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c(h + \Delta t^r).$$

onde  $r = 1$  quando  $\theta > \frac{1}{2}$  e  $r = 2$  quando  $\theta = \frac{1}{2}$ .

**Prova:** O erro entre a solução aproximada  $u_m^n$  e a solução exata  $u^n$  é definido por:

$$e^n = u^n - u_m^n, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

De modo análogo ao feito no problema semidiscreto, introduz-se a projeção  $\tilde{u}^n, n = 0, \dots, N$ , satisfazendo  $\tilde{u}^n \in V_m$  e:

$$\left( u_{xx}^n - \tilde{u}_{xx}^n, (v_m)_x \right) = 0, \quad \forall v_m \in V_m, \forall n,$$

Assim decompõe-se o erro na forma:

$$e^n = u^n - u_m^n = u^n - \tilde{u}^n + \tilde{u}^n - u_m^n = \rho^n + \xi^n.$$

Como as estimativas para  $\rho^n$  são conhecidas pelo Lema de Douglas-Dupont, basta estimatimar o termo  $\xi^n$ , para  $n = 0, \dots, N$ .

Para tal, avalia-se a formulação fraca do problema (4.2) nos tempos  $t = t_{n+1}$  e  $t = t_n$ , multiplicando-as por  $\theta$  e  $(1 - \theta)$  (com  $0 \leq \theta \leq 1$ ), respectivamente. Soma-se o resultado:

$$\left( u_t^{n+\theta}, v \right) + \left( u_x^{n+\theta}, v \right) - \left( u_{xx}^{n+\theta}, v_x \right) = \left( f^{n+\theta}, v \right), \quad \forall v \in V.$$

Somando e subtraindo o termo  $\left( \delta u^{n+\frac{1}{2}}, v \right)$  no primeiro termo acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \left( \delta u^{n+\frac{1}{2}}, v \right) + \left( u_x^{n+\theta}, v \right) - \left( u_{xx}^{n+\theta}, v_x \right) &= \left( f^{n+\theta}, v \right) - \left( u_t^{n+\theta}, v \right) + \left( \delta u^{n+\frac{1}{2}}, v \right) \\ &= \left( f^{n+\theta} + g^n, v \right), \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{4.17}$$

com  $g^n = \delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\theta}$ .

Considera-se agora o sistema aproximado no subespaço  $V_m$ , dado por:

$$\begin{aligned} \left( \delta u_m^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( (u_m)_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( (u_m)_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) &= \left( f^{n+\theta}, v_m \right), \\ \forall v_m \in V_m, \quad \forall n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tomando, em particular,  $v = v_m \in V_m \subset V$  em (4.17) e subtraindo de (4.18), obtém-se

$$\left( \delta u^{n+\frac{1}{2}} - \delta u_m^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( u_x^{n+\theta} - (u_m)_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( u_{xx}^{n+\theta} - (u_m)_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) = \left( g^n, v_m \right). \quad (4.19)$$

Somando e subtraindo os seguintes termos interpolantes em (4.19)  $\delta(\tilde{u})^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $(\tilde{u})_x^{n+\theta}$  e  $(\tilde{u})_{xx}^{n+\theta}$ , respectivamente, obtém-se:

$$\left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}} + \delta \xi^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( \rho_x^{n+\theta} + \xi_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( \rho_{xx}^{n+\theta} + \xi_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) = \left( g^n, v_m \right).$$

Pela definição de projeção  $(\rho_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x) = 0, \forall n$ . Então

$$\left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}} + \delta \xi^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( \xi_x^{n+\theta} + \rho_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( \xi_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) = \left( g^n, v_m \right).$$

Rearranjando os termos:

$$\left( \delta \xi^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( \xi_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( \xi_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) = \left( g^n, v_m \right) - \left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) - \left( \rho_x^{n+\theta}, v_m \right).$$

Tomando  $v_m = \xi^{n+\theta}$ , chega-se a equação:

$$\begin{aligned} \left( \delta \xi^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\theta} \right) + \left( \xi_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta} \right) - \left( \xi_{xx}^{n+\theta}, \xi_x^{n+\theta} \right) &= \left( g^n, \xi^{n+\theta} \right) \\ - \left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\theta} \right) - \left( \rho_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Analisa-se, inicialmente, os termos do membro esquerdo de (4.20).

No primeiro termo supõe-se  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , usam-se as definições, a bilinearidade de  $(\cdot, \cdot)$  e

a Desigualdade Elementar (entre a terceira e quarta equações):

$$\begin{aligned}
\left(\delta\xi^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\theta}\right) &= \left(\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t}, \theta\xi^{n+1} + (1 - \theta)\xi^n\right) \\
&= \frac{\theta}{\Delta t}(\xi^{n+1}, \xi^{n+1}) + \frac{1 - \theta}{\Delta t}(\xi^{n+1}, \xi^n) - \frac{\theta}{\Delta t}(\xi^n, \xi^{n+1}) - \frac{1 - \theta}{\Delta t}(\xi^n, \xi^n) \\
&= \frac{\theta}{\Delta t}\|\xi^{n+1}\|^2 - \frac{-1 + 2\theta}{\Delta t}(\xi^{n+1}, \xi^n) - \frac{1 - \theta}{\Delta t}\|\xi^n\|^2 \\
&\geq \left\{\frac{\theta}{\Delta t} - \frac{-1 + 2\theta}{2\Delta t}\right\}\|\xi^{n+1}\|^2 - \left\{\frac{1 - \theta}{\Delta t} + \frac{-1 + 2\theta}{2\Delta t}\right\}\|\xi^n\|^2 \\
&= \frac{1}{2\Delta t}\{\|\xi^{n+1}\|^2 - \|\xi^n\|^2\}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

No segundo termo do membro esquerdo de (4.20), tem-se:

$$\begin{aligned}
\left(\xi_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) &= \left(\theta\xi_x^{n+1} + (1 - \theta)\xi_x^n, \theta\xi^{n+1} + (1 - \theta)\xi^n\right) \\
&= \theta^2(\xi_x^{n+1}, \xi^{n+1}) + (1 - \theta)^2(\xi_x^n, \xi^n) \\
&\quad + \theta(1 - \theta)(\xi_x^{n+1}, \xi^n) + \theta(1 - \theta)(\xi_x^n, \xi^{n+1}).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Sabe-se que  $(\xi_x(t), \xi(t)) = 0$ , como foi provado para estimar o tempo contínuo. Com isso, os dois primeiros termos da equação (4.22) são nulos. Logo,

$$\left(\xi_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) = \theta(1 - \theta)(\xi_x^{n+1}, \xi^n) + \theta(1 - \theta)(\xi_x^n, \xi^{n+1}).$$

Integrando por partes o primeiro termo do membro direito da equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\left(\xi_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) &= -\theta(1 - \theta)(\xi^{n+1}, \xi_x^n) + \theta(1 - \theta)(\xi_x^n, \xi^{n+1}) \Rightarrow \\
&\left(\xi_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Integrando por partes o terceiro termo do membro esquerdo de (4.20):

$$\begin{aligned} \left( \xi_{xx}^{n+\theta}, \xi_x^{n+\theta} \right) &= [\xi_x^{n+\theta}]^2(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \left( \xi_x^{n+\theta}, \xi_{xx}^{n+\theta} \right) \Rightarrow \\ & \left( \xi_{xx}^{n+\theta}, \xi_x^{n+\theta} \right) = -\frac{1}{2} [\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por fim, aplica-se a desigualdade elementar em todos os termos do membro direito de (4.20):

$$\begin{aligned} \left( g^n, \xi^{n+\theta} \right) &\leq \frac{1}{2} \|g^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi^{n+\theta}\|^2 \\ \left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\theta} \right) &\leq \frac{1}{2} \|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi^{n+\theta}\|^2 \\ \left( \rho_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta} \right) &\leq \frac{1}{2} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Antes de substituir as análises individuais na devida equação, nota-se que:

$$\|\xi^{n+\theta}\|^2 = \|\theta \xi^{n+1} + (1-\theta) \xi^n\|^2 \leq \theta \|\xi^{n+1}\|^2 + (1-\theta) \|\xi^n\|^2. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.21) - (4.25) em (4.20) e considerando (4.26), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} \{ \|\xi^{n+1}\|^2 - \|\xi^n\|^2 \} + \frac{1}{2} [\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t) &\leq \frac{1}{2} \|g^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2 + \frac{3}{2} \theta \|\xi^{n+1}\|^2 + \frac{3}{2} (1-\theta) \|\xi^n\|^2. \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2\Delta t} - \frac{3}{2} \theta \right\} \|\xi^{n+1}\|^2 - \left\{ \frac{1}{2\Delta t} + \frac{3}{2} (1-\theta) \right\} \|\xi^n\|^2 + \frac{1}{2} [\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t) \\ \leq \frac{1}{2} \|g^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Multiplicando (4.27) por  $2\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \{1 - 3\Delta t\theta\} \|\xi^{n+1}\|^2 + \Delta t [\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t) &\leq \{1 + 3\Delta t(1-\theta)\} \|\xi^n\|^2 \\ &+ \Delta t \|g^n\|^2 + \Delta t \|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t \|\rho_x^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Desmembrando  $1 + 3\Delta t(1 - \theta) = 1 + 3\Delta t - 3\Delta t\theta$  e considerando  $[\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t) \geq 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \{1 - 3\Delta t\theta\} \|\xi^{n+1}\|^2 &\leq \{1 - 3\Delta t\theta\} \|\xi^n\|^2 + 3\Delta t \|\xi^n\|^2 + \Delta t \|g^n\|^2 \\ &\quad + \Delta t \|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t \|\rho_x^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Somando (4.29) de  $n = 0, \dots, N-1$ :

$$\begin{aligned} \{1 - 3\Delta t\theta\} \|\xi^N\|^2 &\leq \{1 - 3\Delta t\theta\} \|\xi^0\|^2 + 3\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\xi^n\|^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|g^n\|^2 \\ &\quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\Delta t < \frac{2}{3}$  e  $\theta \geq \frac{1}{2}$  implicam  $1 - 3\Delta t\theta > 0$ , aplicando o Lema de Gronwall na forma discreta, obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\xi^N\|^2 &\leq c \|\xi^0\|^2 + \frac{c\Delta t}{1 - 3\Delta t\theta} \sum_{n=0}^{N-1} \|g^n\|^2 \\ &\quad + \frac{c\Delta t}{1 - 3\Delta t\theta} \sum_{n=0}^{N-1} \|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{c\Delta t}{1 - 3\Delta t\theta} \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $c = \exp\left(\frac{3\Delta t}{1 - 3\Delta t\theta} N\right) > 0$ .

Avalia-se agora os termos do membro direito da equação (4.30).

O primeiro termo é  $\|\xi^0\| = \|u(0) - w(0)\|$ . Como  $u(0) = u_0$  é conhecida, toma-se:

$$\|\xi^0\| \leq c_1 h^2 \|u_0\|_V^2. \quad (4.31)$$

Para os terceiro e quarto termos utilizam-se as propriedades de aproximação exibidas no capítulo 2 e o Lema de Douglas-Dupont com  $m = 0$  e  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 &\leq \int_{t_0}^{t_N} \|\rho'(s)\|^2 ds \\ &\leq c_2 h^4 \int_{t_0}^{t_N} \|u'(s)\|_V^2 ds \\ &= c_2 h^4 \|u'\|_{L^2(0,T;V)}^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2 &\leq \int_{t_0}^{t_N} \|\rho_x(s)\|^2 ds \\
&\leq c_3 h^2 \int_{t_0}^{t_N} \|u(s)\|_V^2 ds \\
&= c_3 h^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Usa-se a seguinte igualdade para avaliar o segundo termo:

$$u^{n+\theta} = u^{n+\frac{1}{2}} - \left(\theta - \frac{1}{2}\right)(u^{n+1} - u^n)$$

donde se obtém:

$$\begin{aligned}
g^n &= \delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\theta} \\
&= \left\{ \delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \left\{ \left(\theta - \frac{1}{2}\right)(u_t^{n+1} - u_t^n) \right\} \\
&= g_1^n + g_2^n.
\end{aligned}$$

O termo  $g_1^n$  é:

$$\begin{aligned}
g_1^n &= \frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - u^n) - \frac{1}{2}(u_t^{n+1} - u_t^n) \\
&= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)(t_{n+1} - s)u'''(s)ds.
\end{aligned}$$

Na última equação acima aplica-se a seguinte mudança de variáveis:  $s - t_n = \Delta t \vartheta$ ,  $\vartheta \in [0, 1]$ . Nota-se, além disso que  $\vartheta(1 - \vartheta) \geq \frac{1}{4}$ ,  $\vartheta \in [0, 1]$ . Então,

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)(t_{n+1} - s)u'''(s)ds = \frac{-\Delta t^2}{2} \int_0^1 \vartheta(1 - \vartheta)u'''(\vartheta)d\vartheta. \Rightarrow$$

$$\|g_1^n\|^2 \leq \frac{\Delta t^4}{64} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u'''(s)\|^2 ds = \frac{\Delta t^4}{64} \|u'''\|_{L^2(t_n, t_{n+1}; V)}^2.$$

Multiplicando a desigualdade por  $\Delta t$  e fazendo a soma para  $n = 1, \dots, N - 1$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\|g_1\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 &\leq \frac{\Delta t^4}{64} \left\{ \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|u'''\|_{L^2(t_n, t_{n+1}; V)}^2 \right\} \\
&\leq c_3 \Delta t^4 \|u'''\|_{L^2(0,T;V)}^2.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Quanto ao termo  $g_2^n$ , tem-se:

$$g_2^n = \left(\theta - \frac{1}{2}\right)(u_t^{n+1} - u_t^n) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} u''(s) ds.$$

Usando a desigualdade de Holder, tem-se:

$$\begin{aligned} \|g_2^n\|^2 &\leq \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} 1 ds \right] \left[ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u''(s)\|^2 ds \right] \\ &\leq \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u''(s)\|^2 ds \\ &\leq \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \|u''(s)\|_{L^2(t_n, t_{n+1}; V)}^2 ds. \end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade por  $\Delta t$  e fazendo a soma para  $n = 1, \dots, N-1$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{L^2(0, T; L^2(0, L))}^2 &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|g_2^n\|^2 \\ &\leq \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \|u''\|_{L^2(0, T; V)}^2. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Substituindo (4.34) e (4.35) na equação que define  $g^n$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \|g^n\|_{L^2(0, T; L^2(0, L))}^2 &\leq \|g_1\|_{L^2(0, T; L^2(0, L))}^2 + \|g_2\|_{L^2(0, T; L^2(0, L))}^2 \\ &\leq c_4 \Delta t^4 \|u'''\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \|u''\|_{L^2(0, T; V)}^2. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Finalmente, substituindo (4.31) - (4.36) em (4.30), obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\xi^N\|^2 &\leq c_1 h^4 \left\{ \|u_0\|_V^2 + \|u'\|_{L^2(0, T; V)}^2 \right\} + c_2 h^2 \|u\|_{L^2(0, T; V)}^2 \\ &\quad + c_3 \Delta t^4 \|u'''\|_{L^2(0, T; V)}^2 + c_4 \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \|u''\|_{L^2(0, T; V)}^2. \end{aligned}$$

Em espaços de dimensão finita todas as normas são equivalentes. Então extrai-se a raiz quadrada da equação acima:

$$\begin{aligned} \|\xi^N\| &\leq c_1 h^2 \left\{ \|u_0\|_V + \|u'\|_{L^2(0, T; V)} \right\} + c_2 h \|u\|_{L^2(0, T; V)} \\ &\quad + c_3 \Delta t^2 \|u'''\|_{L^2(0, T; V)} + c_4 \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \|u''\|_{L^2(0, T; V)}. \end{aligned}$$

Por hipótese  $u, u', u'', u''' \in L^2(0, T; V)$  e  $u_0 \in V$ . Lembrando que  $h^2 < h$  quando  $h \ll 1$ , então tem-se que:

$$\|\xi\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \leq c \left\{ h + \Delta t^2 + \Delta t \left( \theta - \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Por outro lado, fazendo  $m = 0$  no Lema de Douglas-Dupont, obtém-se:

$$\|\rho(t)\| \leq c_1 h^2 \|u\|_{L^2(0, T; V)} \Rightarrow$$

$$\|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \leq c_1 h^2 \|u\|_{L^2(0, T; V)}.$$

Logo

$$\|u - u_m\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \leq c \left\{ h + \Delta t^2 + \Delta t \left( \theta - \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

No caso  $\theta > \frac{1}{2}$ , obtém-se a estimativa de erro:

$$\|u - u_m\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \leq c \{h + \Delta t\}.$$

E, finalmente, no caso  $\theta = \frac{1}{2}$  obtém-se:

$$\|u - u_m\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \leq c \{h + \Delta t^2\}. \quad \blacksquare$$

### 4.1.3 Simulações e convergência

Mostrar-se-á agora a formulação matricial do problema linear e, ao final, uma tabela com os resultados de simulação e convergência.

Mesmo que essa formulação matricial agregue o termo de damping, os resultados de simulação nesta subseção foram feitos tomando  $a \equiv 0$ . Isso possibilita que, na próxima seção, ao se tratar do problema linear com termo de damping, a formulação matricial abaixo continue sendo válida.

Considere o problema aproximado definido no Capítulo 1, seção 5:

$$\begin{aligned} & \left( v_m, u'_m(t) \right) + \left( v_m, (u_m)_x(t) \right) - \left( (v_m)_x, (u_m)_{xx}(t) \right) \\ & + \left( v_m, a(x)u_m(t) \right) = \left( v_m, f(t) \right), \quad \forall v_m \in V_m \subset V. \end{aligned} \tag{4.37}$$

A escrita acima difere um pouco daquela apresentada anteriormente, mas como  $(.,.) : L^2(0, L) \times L^2(0, L) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear, isso não faz diferença. Por outro lado, o modo que a formulação está descrita acima torna mais natural o preenchimento das matrizes.

Os Polinômios de Hermite definidos abaixo foram escolhidos para compor a base de  $V_m$  pois estes satisfazem as condições definidas em  $V$  e, como é sabido, formam uma base completa para  $H^2(0, L)$ .

Sejam  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e  $\{a = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b\}$  uma discretização de  $[a, b]$ . Para cada nó  $x_i$  define-se dois elementos de função base, a saber  $\varphi_i(x)$  (interpola a função) e  $\psi_i(x)$  (interpola a derivada da função), satisfazendo:

$$\begin{cases} \varphi_i(x_{i-1}) = 0 & \varphi_i(x_i) = 1 & \varphi_i(x_{i+1}) = 0 \\ \varphi_i'(x_{i-1}) = 0 & \varphi_i'(x_i) = 0 & \varphi_i'(x_{i+1}) = 0 \\ \psi_i(x_{i-1}) = 0 & \psi_i(x_i) = 0 & \psi_i(x_{i+1}) = 0 \\ \psi_i'(x_{i-1}) = 0 & \psi_i'(x_i) = 1 & \psi_i'(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

e se anulando nos demais nós da discretização. Tomando um intervalo  $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$  e uma malha uniforme  $h = x_{i+1} - x_i$ , explicitam-se as funções que formam a base de Hermite:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left( \left| \frac{x - x_i}{h} \right| - 1 \right)^2 \left( 2 \left| \frac{x_{i+1} - x}{h} \right| + 1 \right), & \forall x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} (x - x_i) \left( \left| \frac{x - x_i}{h} \right| - 1 \right)^2, & \forall x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases} \quad (4.40)$$

Nas Figuras 4.1 e 4.2 são representadas as duas funções que formam  $\varphi$ ; enquanto que, nas Figuras 4.3 e 4.4, são representadas as duas funções que formam  $\psi$ . Todos os gráficos foram plotados no intervalo  $[0, 1]$ .

Agora, estabelecida a base, vê-se que, dado  $u_m(t) \in V_m$ , existem  $c_0(t), \dots, c_N(t)$  e

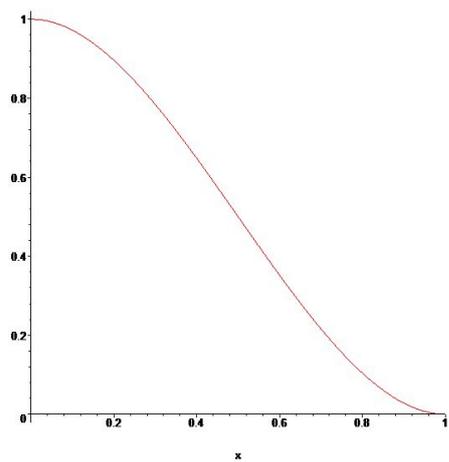


Figura 4.1: 1<sup>a</sup> função base de  $\varphi$

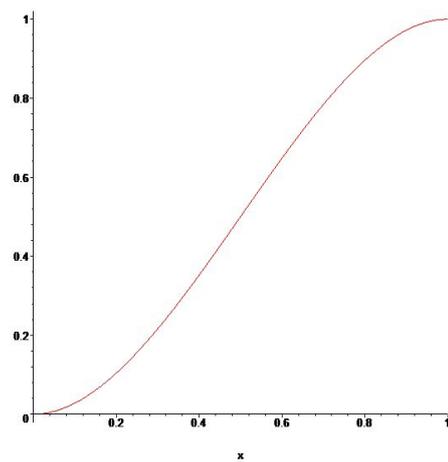


Figura 4.2: 2<sup>a</sup> função base de  $\varphi$

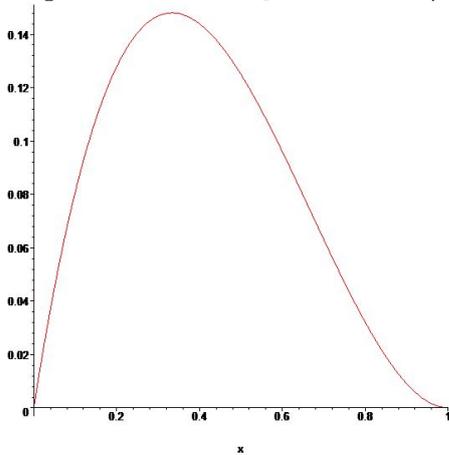


Figura 4.3: 1<sup>a</sup> função base de  $\psi$

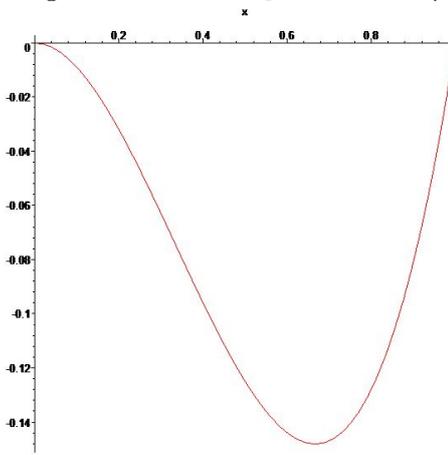


Figura 4.4: 2<sup>a</sup> função base de  $\psi$

$d_0(t), \dots, d_N(t)$  tais que

$$u_m(t) = \sum_{j=0}^m c_j(t)\varphi_j(x) + d_j(t)\psi_j(x). \quad (4.41)$$

Substituindo a expressão de  $u_m(t)$  na formulação aproximada, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left( v_m, \sum_{j=0}^m c'_j(t)\varphi_j + d'_j(t)\psi_j \right) + \left( v_m, \sum_{j=0}^m c_j(t)(\varphi_j)_x + d_j(t)(\psi_j)_x \right) \\ & - \left( (v_m)_x, \sum_{j=0}^m c_j(t)(\varphi_j)_{xx} + d_j(t)(\psi_j)_{xx} \right) + \left( v_m, a(x) \left[ \sum_{j=0}^m c_j(t)\varphi_j + d_j(t)\psi_j \right] \right) \\ & = \left( v_m, f(t) \right), \forall v_m \in V_m \subset V. \end{aligned}$$

Pela bilinearidade do produto interno  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m c'_j(t) \left( v_m, \varphi_j \right) + \sum_{j=0}^m d'_j(t) \left( v_m, \psi_j \right) \\ & + \sum_{j=0}^m c_j(t) \left( v_m, (\varphi_j)_x \right) + \sum_{j=0}^m d_j(t) \left( v_m, (\psi_j)_x \right) \\ & - \sum_{j=0}^m c_j(t) \left( (v_m)_x, (\varphi_j)_{xx} \right) - \sum_{j=0}^m d_j(t) \left( (v_m)_x, (\psi_j)_{xx} \right) \\ & + \sum_{j=0}^m c_j(t) \left( v_m, a(x)\varphi_j \right) + \sum_{j=0}^m d_j(t) \left( v_m, a(x)\psi_j \right) \\ & = \left( v_m, f(t) \right), \quad \forall v_m \in V_m \subset V. \end{aligned}$$

Tomando  $v_m = \varphi_i$ ,  $v_m = \psi_i$  e definindo  $\mathbf{X}(t) = \left( c_0(t), \dots, c_m(t), d_0(t), \dots, d_m(t) \right)^T$  obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\varphi & \mathbf{B}^\varphi \\ \mathbf{A}^\psi & \mathbf{B}^\psi \end{bmatrix} \mathbf{X}'(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^\varphi & \mathbf{N}^\varphi \\ \mathbf{M}^\psi & \mathbf{N}^\psi \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\varphi(t) \\ \mathbf{F}^\psi(t) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^\varphi &= \left( \mathbf{A}_{ij}^\varphi \right) = \left( \varphi_i(x), \varphi_j(x) \right) \\
\mathbf{B}^\varphi &= \left( \mathbf{B}_{ij}^\varphi \right) = \left( \varphi_i(x), \psi_j(x) \right) \\
\mathbf{A}^\psi &= \left( \mathbf{A}_{ij}^\psi \right) = \left( \psi_i(x), \varphi_j(x) \right) \\
\mathbf{B}^\psi &= \left( \mathbf{B}_{ij}^\psi \right) = \left( \psi_i(x), \psi_j(x) \right) \\
\mathbf{M}^\varphi &= \left( \mathbf{M}_{ij}^\varphi \right) = \left( \varphi_i(x), \varphi_j'(x) + a(x)\varphi_j(x) \right) - \left( \varphi_i'(x), \varphi_j''(x) \right) \\
\mathbf{N}^\varphi &= \left( \mathbf{N}_{ij}^\varphi \right) = \left( \varphi_i(x), \psi_j'(x) + a(x)\psi_j(x) \right) - \left( \varphi_i'(x), \psi_j''(x) \right) \\
\mathbf{M}^\psi &= \left( \mathbf{M}_{ij}^\psi \right) = \left( \psi_i(x), \varphi_j'(x) + a(x)\varphi_j(x) \right) - \left( \psi_i'(x), \varphi_j''(x) \right) \\
\mathbf{N}^\psi &= \left( \mathbf{N}_{ij}^\psi \right) = \left( \psi_i(x), \psi_j'(x) + a(x)\psi_j(x) \right) - \left( \psi_i'(x), \psi_j''(x) \right) \\
\mathbf{F}^\varphi &= \left( \mathbf{F}_i^\varphi \right) = \left( f(t), \varphi_i(x) \right) \\
\mathbf{F}^\psi &= \left( \mathbf{F}_i^\psi \right) = \left( f(t), \psi_i(x) \right)
\end{aligned}$$

Reescreve-se o sistema de equações diferenciais lineares, resumidamente, por:

$$\begin{cases} \mathbf{M}X'(t) + \mathbf{K}X(t) = \mathbf{F}(t) \\ X(0) = \left( c_0(0), \dots, c_m(0), d_0(0), \dots, d_m(0) \right). \end{cases} \quad (4.43)$$

Para terminar a formulação matricial do problema resta discretizar a variável temporal. Dado  $[0, T]$  e uma discretização  $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ , utiliza-se o Método de Euler Progressivo juntamente com o Método  $\theta$ -Newmark da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
X'(t_n) &= \frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{\Delta t} = \frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t}, \\
X(t_n) &= \theta X^{n+1} + (1 - \theta)X^n.
\end{aligned}$$

Substituindo acima, obtém-se:

$$\mathbf{M} \frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t} + \mathbf{K} \left( \theta X^{n+1} + (1 - \theta)X^n \right) = \theta \mathbf{F}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{F}^n.$$

E finalmente,

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + \Delta t \theta \mathbf{K}) X^{n+1} = (\mathbf{M} - \Delta t(1 - \theta) \mathbf{K}) X^n + \theta \mathbf{F}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{F}^n \\ X^0 = (c_0^0, \dots, c_m^0, d_0^0, \dots, d_m^0). \end{cases}$$

Considera-se, para fins de validação do método, nas simulações abaixo os valores  $L = 1$ ,  $T = 1$ ,  $a \equiv 0$ . Como condição inicial, toma-se:

$$u_0(x) = \frac{1}{L^2} x(x - L)^2. \quad (4.44)$$

Nota-se que esta condição inicial satisfaz as três condições de fronteira.

Como solução exata, toma-se:

$$u(x, t) = u_0(x) e^{-t} = \frac{1}{L^2} x(x - L)^2 e^{-t}.$$

O termo  $f = -u' - u_x - u_{xxx}$  é dado pela expressão:

$$f(x, t) = -\frac{1}{L^2} x(x - L)^2 e^{-t} + \frac{1}{L^2} ((x - L)^2 + x(x - L)) e^{-t} + \frac{6}{L^2} e^{-t}.$$

Na Tabela 4.1 encontra-se o resultado de ordem de convergência. Para obter tais números considera-se a fórmula (ver (30)):

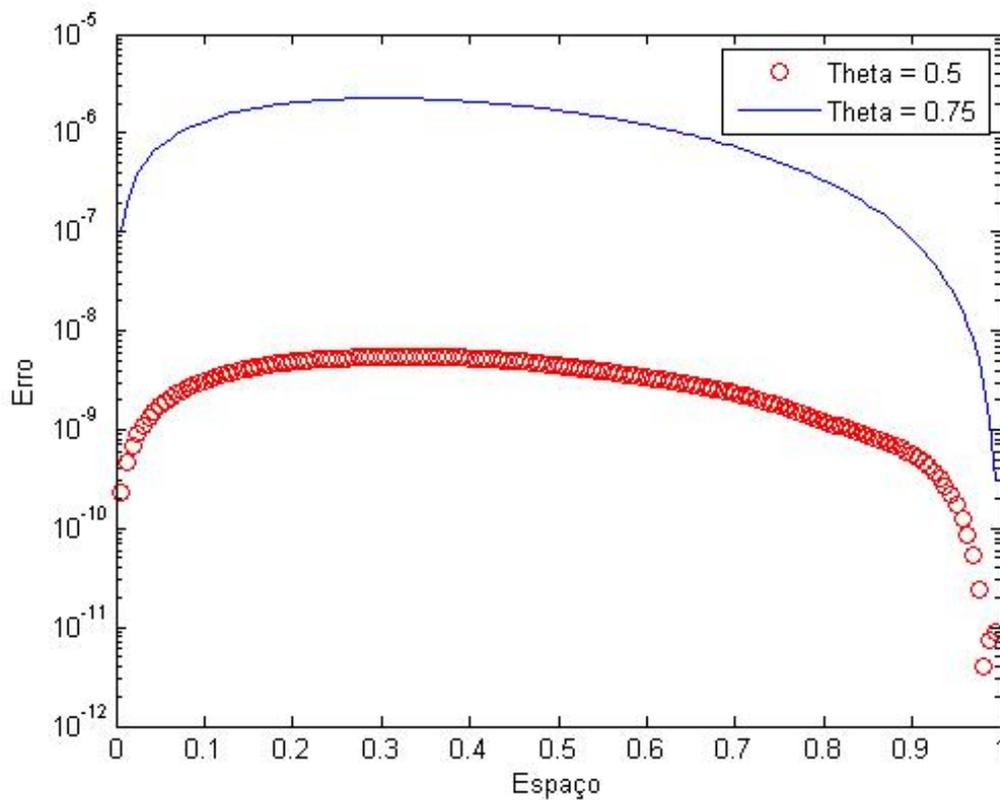
$$p = \frac{\ln(E_i/E_{i+1})}{\ln(2)},$$

onde  $p$  é a ordem de convergência e  $E_i = \max_{t \in [0, T]} \{ \|E_i(t)\|_{L^2(0, L)} \}$  é o erro associado à malha  $h = 5 \cdot 2^{i+1}$ .

A Figura 4.5 abaixo compara o erro obtido entre a solução numérica encontrada e a solução exata descrita acima. Foi plotada considerando  $h = 1/160$ ,  $\Delta t = 1/160$  e as curvas representam o erro para o tempo fixo  $t = 0.5$ .

Tabela 4.1: Convergência da equação linear sem termo de damping

$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{t+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Ordem de Convergência
0.75	20	$1.7207 \times 10^{-5}$	—
	40	$0.8576 \times 10^{-5}$	1.00448
	80	$0.4308 \times 10^{-5}$	0.993268
	160	$0.2165 \times 10^{-5}$	0.992253
	320	$0.1085 \times 10^{-5}$	0.9961
0.5	20	$3.8541 \times 10^{-7}$	—
	40	$0.7289 \times 10^{-7}$	2.3367
	80	$0.1922 \times 10^{-7}$	1.98841
	160	$0.0549 \times 10^{-7}$	1.80651
	320	$0.0212 \times 10^{-7}$	1.37306

Figura 4.5: Gráfico do erro entre  $\theta = 0.5$  e  $\theta = 0.75$ .

## 4.2 Estimativa de erro da equação KdV linear com termo de damping

Procede-se agora um estudo análogo ao realizado na seção anterior considerando  $a(x) \geq a_0 > 0$  quase sempre em  $\omega \subset (0, L)$ . A formulação forte da equação KdV linear com termo de damping é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + u_x + u_{xxx} + a(x)u = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u_x(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (4.45)$$

A formulação variacional: determinar  $u : [0, T] \rightarrow V$  solução de

$$\left( u'(t), v \right) + \left( u_x(t), v \right) - \left( u_{xx}(t), v_x \right) + \left( a(x)u(t), v \right) = \left( f(t), v \right). \quad (4.46)$$

Bem como a formulação variacional aproximada: determinar  $u_m : [0, T] \rightarrow V_m$  solução de

$$\left( u'_m(t), v_m \right) + \left( (u_m)_x(t), v_m \right) - \left( (u_m)_{xx}(t), (v_m)_x \right) + \left( a(x)u_m(t), v \right) = \left( f(t), v_m \right). \quad (4.47)$$

As mesmas considerações sobre o subespaço de dimensão finita  $V_m$  são válidas nesta seção.

### 4.2.1 Tempo contínuo

O objetivo é estimar o erro

$$\begin{aligned} \|u - u_m\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} &= \max_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_m(t)\|_{L^2(0, L)} \\ &= \max_{t \in [0, T]} \left( \int_0^L |u(x, t) - u_m(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

gerado pela utilização do Método de Galerkin, onde  $u(t)$  é solução de (4.46) e  $u_m(t)$  é solução de (4.47).

Como  $V_m$  é subespaço de  $V$ , a equação (4.46) é válida para  $v_m \in V_m$ . Então, tomando  $v = v_m$  em (4.46) e subtraindo de (4.47), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( u'(t) - u'_m(t), v_m \right) + \left( u_x(t) - (u_m)_x(t), v_m \right) - \left( u_{xx}(t) - (u_m)_{xx}(t), (v_m)_x \right) \\ + \left( a(x)[u(t) - u_m(t)], v_m \right) = 0, \\ \left( u(0) - u_m(0), v_m \right) = 0, \quad \forall v_m \in V_m. \end{array} \right. \quad (4.48)$$

A Projeção de Rayleigh-Ritz permanece:

$$\begin{aligned} P : V &\rightarrow V_m \\ u(t) &\mapsto Pu(t) = \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

satisfazendo:

$$\left( u_{xx}(t) - \tilde{u}_{xx}(t), (v_m)_x \right) = 0, \quad \forall v_m \in V_m.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|u(t) - \tilde{u}(t)\| + \|\tilde{u}(t) - u_m(t)\| \\ &= \|\rho(t)\| + \|\xi(t)\|. \end{aligned} \quad (4.49)$$

O erro  $\rho(t)$  entre a solução aproximada e sua interpolante são conhecidos pela Teoria de Interpolação definidas no Capítulo 2. Resta encontrar estimativas para o termo  $\|\xi(t)\|$ .

**Teorema 4.3.** *Seja o damping satisfazendo  $a(x) \geq a_0 > 0$ . Sob as hipóteses de regularidade acima (H1), (H2), (H3) e dada  $u_0 \in V$ , tem-se que a solução numérica obtida pelo Método dos Elementos Finitos possui a seguinte estimativa:*

$$\|u(t) - u_m(t)\|_{L^2(0,L)} \leq ch,$$

onde a constante positiva  $c$  independe de  $h$ .

**Prova:** Somando e subtraindo  $\tilde{u}'(t)$ ,  $\tilde{u}_x(t)$ ,  $\tilde{u}_{xx}(t)$  respectivamente nos três termos de (4.48), obtém-se:

$$\left(\rho'(t) + \xi'(t), v_m\right) + \left(\rho_x(t) + \xi_x(t), v_m\right) - \left(\rho_{xx}(t) + \xi_{xx}(t), (v_m)_x\right) + \left(a(x)[\rho(t) + \xi(t)], v_m\right) = 0.$$

Por definição de projeção, tem-se  $\left(\rho_{xx}(t), (v_m)_x\right) = 0$ . Então:

$$\left(\rho'(t) + \xi'(t), v_m\right) + \left(\xi_x(t) + \rho_x(t), v_m\right) - \left(\xi_{xx}(t), (v_m)_x\right) + \left(a(x)[\rho(t) + \xi(t)], v_m\right) = 0.$$

Tomando  $v_m = \xi(t)$  acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\left(\rho'(t) + \xi'(t), \xi(t)\right) + \left(\xi_x(t) + \rho_x(t), \xi(t)\right) - \left(\xi_{xx}(t), \xi_x(t)\right) \\ &\quad + \left(a(x)[\rho(t) + \xi(t)], \xi(t)\right) = 0. \end{aligned}$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} &\left(\xi'(t), \xi(t)\right) + \left(\xi_x(t), \xi(t)\right) - \left(\xi_{xx}(t), \xi_x(t)\right) = -\left(\rho'(t), \xi(t)\right) \\ &\quad - \left(\rho_x(t), \xi(t)\right) - \left(a(x)[\rho(t) + \xi(t)], \xi(t)\right). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Os termos do membro esquerdo de (4.50) foram analisados na seção anterior, nas equações (4.9) - (4.12), e serão apenas repetidos abaixo.

$$\left(\xi'(t), \xi(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\|^2, \tag{4.51}$$

$$\left(\xi_x(t), \xi(t)\right) = 0, \tag{4.52}$$

$$\left(\xi_{xx}(t), \xi_x(t)\right) = -\frac{1}{2} \xi_x^2(0, t). \tag{4.53}$$

Os dois primeiros termos do membro direito da equação (4.50) também já foram analisados.

$$\left(\rho'(t), \xi(t)\right) \leq \frac{1}{2} \|\rho'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi(t)\|^2. \tag{4.54}$$

$$\left(\rho_x(t), \xi(t)\right) \leq \frac{1}{2} \|\rho_x(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi(t)\|^2. \tag{4.55}$$

Usa-se, nos terceiro e quarto termos, o fato de  $a \in L^\infty(0, L)$  juntamente com a desigualdade elementar:

$$\left( a(x)\rho(t), \xi(t) \right) \leq \|a\|_\infty \left\{ \frac{1}{2}\|\rho(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi(t)\|^2 \right\}, \quad (4.56)$$

$$\left( a(x)\xi(t), \xi(t) \right) \leq \|a\|_\infty \|\xi(t)\|^2. \quad (4.57)$$

Substituindo (4.51) - (4.57) em (4.50), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\|^2 + \frac{1}{2} \xi_x^2(0, t) &\leq \frac{1}{2} \|\rho'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\rho_x(t)\|^2 + \\ &\frac{1}{2} \|a\|_\infty \|\rho(t)\|^2 + \left\{ 1 + \frac{3}{2} \|a\|_\infty \right\} \|\xi(t)\|^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Multiplicando (4.58) por 2 e integrando sobre  $(0, t)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \xi_x^2(0, t) dt &\leq \|\xi(0)\|^2 + \int_0^t \|\rho'(t)\|^2 dt + \\ &\int_0^t \|\rho_x(t)\|^2 dt + \|a\|_\infty \int_0^t \|\rho(t)\|^2 dt + \{2 + 3\|a\|_\infty\} \int_0^t \|\xi(t)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Como  $\xi(0) = \tilde{u}(0) - u_m(0)$  é limitado e também o são  $\rho$ ,  $\rho_x$  e  $\rho'$  pelo Lema de Douglas-Dupont, permite-se então usar do Lema de Gronwall:

$$\|\xi(t)\|^2 \leq \|\xi(0)\|^2 + \int_0^t \|\rho'(t)\|^2 dt + \int_0^t \|\rho_x(t)\|^2 dt + \|a\|_\infty \int_0^t \|\rho(t)\|^2 dt. \quad (4.60)$$

Como  $u(0) - u_m(0) = \xi(0) + \rho(0)$ , tem-se  $\xi(0) = u(0) - u_m(0) - \rho(0)$  e portanto,  $\|\xi(0)\| = \|u(0) - u_m(0)\| + \|\rho(0)\|$ . Para  $m = 0$  e  $t = 0$ , o Lema de Douglas-Dupont fornece

$$\|\rho(0)\| \leq ch^2 \|u(0)\|_V.$$

Além disso, também supõe-se

$$\|u(0) - u_m(0)\| \leq ch^2 \|u(0)\|_V.$$

Logo,

$$\|\xi(0)\|^2 \leq ch^4 \|u(0)\|_V^2 = ch^4 \|u_0\|_V^2.$$

Tomando  $m = 0$  e  $m = 1$  no Lema de Douglas-Dupont, obtém-se que:

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\rho_t(s)\|^2 ds &\leq ch^4 \int_0^t \|u'(s)\|_V^2 ds, \\ \int_0^t \|\rho(s)\|^2 ds &\leq ch^4 \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds, \\ \int_0^t \|\rho_x(s)\|^2 ds &\leq \int_0^t \|\rho(s)\|_1^2 ds \leq ch^2 \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds.\end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em (4.60), obtém-se:

$$\begin{aligned}\|\xi(t)\|^2 &\leq c_1 h^4 \left[ \|u_0\|_V^2 + \int_0^t \|u'(s)\|_V^2 ds + \|a\|_\infty \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds \right] + c_2 h^2 \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds.\end{aligned}$$

Como o espaço  $V_m$  possui de dimensão finita, as normas são equivalentes e isso permite extrair a raiz termo a termo. Portanto,

$$\|\xi(t)\| \leq c_1 h^2 \left\{ \|u_0\|_V + \int_0^t \|u'(s)\|_V ds + \|a\|_\infty \int_0^t \|u(s)\|_V ds \right\} + c_2 h \int_0^t \|u(s)\|_V ds.$$

Por outro lado, tomando  $m = 0$  no Lema de Douglas-Dupont, tem-se:

$$\|\rho(t)\| \leq ch^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Assim, sabendo que  $\|u(t) - u_m(t)\| \leq \|\rho(t)\| + \|\xi(t)\|$ , tem-se:

$$\|u(t) - u_m(t)\| \leq c_1 h^2 \left\{ \|u_0\|_V + \|u'\|_{L^2(0,T;V)} + \|a\|_\infty \|u\|_{L^2(0,T;V)} \right\} + c_2 h \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Donde se conclui:

$$\|u(t) - u_m(t)\|_{L^2(0,L)} = O(h). \quad \blacksquare \quad (4.61)$$

#### 4.2.2 Tempo discreto

**Teorema 4.4.** *Seja o damping satisfazendo  $a(x) \geq a_0 > 0$ . Sob as hipóteses de regularidade (H1), (H2) e (H3) da seção anterior e dada  $u_0 \in V$ , a solução numérica*

obtida pelo Método dos Elementos Finitos e pelo Método Trapezoidal Generalizado para

$$\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad e \quad \Delta t \leq \frac{2}{3(1+a_0)}$$

possui a seguinte estimativa:

$$\|u - u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c(h + \Delta t^r)$$

onde  $r = 1$  para  $\theta \neq \frac{1}{2}$  e  $r = 2$  para  $\theta = \frac{1}{2}$ .

**Prova:** O erro entre a solução aproximada  $u_m^n$  e a solução exata  $u^n$  é definido por:

$$e^n = u^n - u_m^n, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

De modo análogo ao feito no problema semidiscreto, introduz-se a projeção  $\tilde{u}^n, n = 0, \dots, N$ , satisfazendo  $\tilde{u}^n \in V_m$  e:

$$\left(u_{xx}^n - \tilde{u}_{xx}^n, (v_m)_x\right) = 0, \quad \forall v_m \in V_m, \quad \forall n.$$

Assim decompõe-se o erro na forma:

$$e^n = u^n - u_m^n = u^n - \tilde{u}^n + \tilde{u}^n - u_m^n = \rho^n + \xi^n.$$

Como as estimativas para  $\rho^n$  são conhecidas pelo Lema de Douglas-Dupont, basta estimatimar o termo  $\xi^n$ , para  $n = 0, \dots, N$ .

Para tal, avalia-se a formulação fraca do problema (4.46) nos tempos  $t = t_{n+1}$  e  $t = t_n$ , multiplicando-as por  $\theta$  e  $(1 - \theta)$  respectivamente. Soma-se o resultado:

$$\left(u_t^{n+\theta}, v\right) + \left(u_x^{n+\theta}, v\right) - \left(u_{xx}^{n+\theta}, v_x\right) + \left(a(x)u^{n+\theta}, v\right) = \left(f^{n+\theta}, v\right), \quad \forall v \in V.$$

Somando e subtraindo o termo  $\left(\delta u^{n+\frac{1}{2}}, v\right)$  no primeiro termo acima, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\delta u^{n+\frac{1}{2}}, v\right) + \left(u_x^{n+\theta}, v\right) - \left(u_{xx}^{n+\theta}, v_x\right) + \left(a(x)u^{n+\theta}, v\right) \\ &= \left(f^{n+\theta}, v\right) - \left(u_t^{n+\theta}, v\right) + \left(\delta u^{n+\frac{1}{2}}, v\right) \\ &= \left(f^{n+\theta} + g^n, v\right), \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{4.62}$$

onde  $g^n = \delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\theta}$ .

Considera-se agora o sistema aproximado no subespaço  $V_m$ , dado por:

$$\begin{aligned} & \left( \delta u_m^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( (u_m)_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( (u_m)_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) \\ & + \left( a(x)u_m^{n+\theta}, v_m \right) = \left( f^{n+\theta}, v_m \right), \quad \forall v_m \in V_m, \quad \forall n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Tomando, em particular,  $v = v_m \in V_m \subset V$  em (4.62) e subtraindo de (4.18), obtém-se

$$\begin{aligned} & \left( \delta u^{n+\frac{1}{2}} - \delta u_m^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( u_x^{n+\theta} - (u_m)_x^{n+\theta}, v_m \right) + \left( a(x)[u^{n+\theta} - u_m^{n+\theta}], v_m \right) \\ & - \left( u_{xx}^{n+\theta} - (u_m)_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) = \left( g^n, v_m \right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Somando e subtraindo os seguintes termos interpolantes em (4.64)  $\delta(\tilde{u})^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $(\tilde{u})_x^{n+\theta}$ ,  $(\tilde{u})_{xx}^{n+\theta}$  e  $(\tilde{u})^{n+\theta}$ , respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}} + \delta \xi^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( \rho_x^{n+\theta} + \xi_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( \rho_{xx}^{n+\theta} + \xi_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) \\ & + \left( a(x)[\rho^{n+\theta} + \xi^{n+\theta}], v_m \right) = \left( g^n, v_m \right). \end{aligned}$$

Pela definição de projeção  $(\rho_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x) = 0, \forall n$ . Então

$$\begin{aligned} & \left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}} + \delta \xi^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( \xi_x^{n+\theta} + \rho_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( \xi_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) \\ & + \left( a(x)[\rho^{n+\theta} + \xi^{n+\theta}], v_m \right) = \left( g^n, v_m \right). \end{aligned}$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} & \left( \delta \xi^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) + \left( \xi_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( \xi_{xx}^{n+\theta}, (v_m)_x \right) = \left( g^n, v_m \right) - \left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}}, v_m \right) \\ & - \left( \rho_x^{n+\theta}, v_m \right) - \left( a(x)[\rho^{n+\theta} + \xi^{n+\theta}], v_m \right). \end{aligned}$$

Tomando  $v_m = \xi^{n+\theta}$ , chega-se a equação:

$$\begin{aligned} & \left( \delta \xi^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\theta} \right) + \left( \xi_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta} \right) - \left( \xi_{xx}^{n+\theta}, \xi_x^{n+\theta} \right) = \left( g^n, \xi^{n+\theta} \right) - \left( \delta \rho^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\theta} \right) \\ & - \left( \rho_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta} \right) - \left( a(x)[\rho^{n+\theta} + \xi^{n+\theta}], \xi^{n+\theta} \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

A análise dos termos do membro esquerdo foi realizada nas equações (4.21) - (4.25) e é apenas repetida aqui:

$$\left(\delta\xi^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\theta}\right) \geq \frac{1}{2\Delta t} \{ \|\xi^{n+1}\|^2 - \|\xi^n\|^2 \}, \quad (4.66)$$

$$\left(\xi_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) = 0, \quad (4.67)$$

$$\left(\xi_{xx}^{n+\theta}, \xi_x^{n+\theta}\right) = -\frac{1}{2}[\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t), \quad (4.68)$$

$$\left(g^n, \xi^{n+\theta}\right) \leq \frac{1}{2}\|g^n\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi^{n+\theta}\|^2,$$

$$\left(\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\theta}\right) \leq \frac{1}{2}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi^{n+\theta}\|^2, \quad (4.69)$$

$$\left(\rho_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) \leq \frac{1}{2}\|\rho_x^{n+\theta}\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi^{n+\theta}\|^2.$$

Além disso, o termo de damping é:

$$\begin{aligned} \left(a(x)\xi^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) &\leq \|a\|_\infty \|\xi^{n+\theta}\|^2, \\ \left(a(x)\rho^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) &\leq \|a\|_\infty \left\{ \frac{1}{2}\|\rho^{n+\theta}\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi^{n+\theta}\|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Substituindo (4.66) - (4.70) em (4.65) e considerando (4.26), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} \{ \|\xi^{n+1}\|^2 - \|\xi^n\|^2 \} + \frac{1}{2}[\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t) &\leq \frac{1}{2}\|g^n\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\rho_x^{n+\theta}\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\|a\|_\infty \|\rho^{n+\theta}\|^2 + \frac{3}{2}\theta(1 + \|a\|_\infty)\|\xi^{n+1}\|^2 + \frac{3}{2}(1 - \theta)(1 + \|a\|_\infty)\|\xi^n\|^2. \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2\Delta t} - \frac{3}{2}\theta(1 + \|a\|_\infty) \right\} \|\xi^{n+1}\|^2 - \left\{ \frac{1}{2\Delta t} + \frac{3}{2}(1 - \theta)(1 + \|a\|_\infty) \right\} \|\xi^n\|^2 \\ + \frac{1}{2}[\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t) \leq \frac{1}{2}\|g^n\|^2 + \frac{1}{2}\|\rho_x^{n+\theta}\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|a\|_\infty \|\rho^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Multiplicando (4.71) por  $2\Delta t$  e considerando  $[\xi_x^{n+\theta}]^2(0, t) > 0$ :

$$\begin{aligned} & \{1 - 3\Delta t\theta(1 + \|a\|_\infty)\} \|\xi^{n+1}\|^2 - \{1 - 3\Delta t\theta(1 + \|a\|_\infty)\} \|\xi^n\|^2 \\ & \leq 3\Delta t(1 + \|a\|_\infty)\|\xi^n\|^2 + \Delta t\|g^n\|^2 + \Delta t\|\rho_x^{n+\theta}\|^2 \\ & \quad + \Delta t\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t\|a\|_\infty\|\rho^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Somando (4.72) de  $n = 0, \dots, N-1$ :

$$\begin{aligned} & \{1 - 3\Delta t\theta(1 + \|a\|_\infty)\} \|\xi^N\|^2 - \{1 - 3\Delta t\theta(1 + \|a\|_\infty)\} \|\xi^0\|^2 \\ & \leq 3\Delta t(1 + \|a\|_\infty) \sum_{n=0}^{N-1} \|\xi^n\|^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|g^n\|^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2 \\ & \quad + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t\|a\|_\infty \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Como  $a(x) \geq a_0 > 0$ ,  $\theta \geq \frac{1}{2}$  e  $\Delta t \leq \frac{2}{3(1+a_0)}$  implicam  $1 - 3\Delta t\theta(1 + \|a\|_\infty) > 0$ , pode-se aplicar o Lema de Gronwall na forma discreta:

$$\begin{aligned} \|\xi^N\|^2 & \leq \|\xi^0\|^2 + c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|g^n\|^2 + c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2 \\ & \quad + c\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + c\Delta t\|a\|_\infty \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho^{n+\theta}\|^2. \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde  $c = \exp\left(\frac{3\Delta t(1 + \|a\|_\infty)}{1 - 3\Delta t\theta(1 + \|a\|_\infty)}\right) > 0$ .

Todos os termos do membro direito de (4.74) foram analisados nas equações (4.31) - (4.36) na seção anterior. Sumariamente, tem-se:

$$\|\xi^0\|^2 \leq c_1 h^2 \|u_0\|_V^2, \quad (4.75)$$

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq c_2 h^4 \|u'\|_{L^2(0,T;V)}^2, \quad (4.76)$$

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho^{n+\theta}\|^2 \leq c_2 h^4 \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2, \quad (4.77)$$

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|\rho_x^{n+\theta}\|^2 \leq c_3 h^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2, \quad (4.78)$$

$$\|g^n\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 \leq c_4 \Delta t^4 \|u'''\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \|u''\|_{L^2(0,T;V)}^2. \quad (4.79)$$

Finalmente, substituindo (4.75) - (4.79) em (4.74), obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\xi^N\|^2 &\leq c_1 h^4 \left\{ \|u_0\|_V^2 + \|u'\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|a\|_\infty \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 \right\} + c_2 h^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 \\ &\quad + c_3 \Delta t^4 \|u'''\|_{L^2(0,T;V)}^2 + c_4 \Delta t^2 \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \|u''\|_{L^2(0,T;V)}^2. \end{aligned}$$

Em espaços de dimensão finita todas as normas são equivalentes. Então extrai-se a raiz quadrada da equação acima:

$$\begin{aligned} \|\xi^N\| &\leq c_1 h^2 \left\{ \|u_0\|_V + \|u'\|_{L^2(0,T;V)} + \|a\|_\infty \|u\|_{L^2(0,T;V)} \right\} + c_2 h \|u\|_{L^2(0,T;V)} \\ &\quad + c_3 \Delta t^2 \|u'''\|_{L^2(0,T;V)} + c_4 \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \|u''\|_{L^2(0,T;V)}. \end{aligned}$$

Por hipótese  $u, u', u'', u''' \in L^2(0, T; V)$  e  $u_0 \in V$ , então tem-se que:

$$\|\xi^N\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c \left\{ h + \Delta t^2 + \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Por outro lado, fazendo  $m = 0$  no Lema de Douglas-Dupont, obtém-se:

$$\|\rho^N\| \leq c_1 h^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)} \Rightarrow$$

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c_1 h^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Logo,

$$\|u - u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c \left\{ h + \Delta t^2 + \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Quando  $\theta > \frac{1}{2}$ , se obtém a estimativa de erro:

$$\|u - u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c \{h + \Delta t\}.$$

E quando  $\theta = \frac{1}{2}$ , obtém-se:

$$\|u - u_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c \{h + \Delta t^2\}. \quad \blacksquare$$

### 4.2.3 Simulações e convergência

Todas as análises realizadas na subseção 'Simulações e Convergência' da seção anterior permanecem válidas. Todavia, as simulações agora apresentarão o termo de damping atuando tanto em todo  $[0, L]$  quanto em apenas parte  $[0, \delta] \cup [\delta, L]$  do domínio.

Considera-se ainda, para fins de validação dos métodos, nas simulações abaixo os valores  $L = 1$ ,  $T = 1$  e  $a \equiv 1$  atuando sobre  $\omega \subset [0, L]$ . Como condição inicial, toma-se:

$$u_0(x) = \frac{1}{L^2}x(x - L)^2.$$

Nota-se que esta condição inicial satisfaz as três condições na fronteira.

Como solução exata, toma-se:

$$u(x, t) = u_0(x)e^{-t} = \frac{1}{L^2}x(x - L)^2e^{-t}.$$

O termo  $f = -u' - u_x - u_{xxx} - a(x)u$  é dado pela expressão:

$$f(x, t) = -\frac{x}{L^2}(x-L)^2e^{-t} + \frac{1}{L^2}((x-L)^2 + 2x(x-L))e^{-t} + \frac{6}{L^2}e^{-t} + \frac{1}{L^2}a(x)x(x-L)^2e^{-t}.$$

Apresentam-se, inicialmente, na Tabela 4.2 os resultados de convergência para o damping unitário atuando sobre todo  $[0.0, 1.0]$ .

Na Tabela 4.3 estão os resultados com damping unitário atuando sobre o conjunto  $(0.0, 0.25) \cup (0.75, 1.0)$  são exibidos.

Os resultados gráficos para estas configurações de damping são semelhantes aos da seção anterior, visto que foi imposta a mesma solução exata e as tabelas abaixo não apresentam modificações quanto à ordem de convergência.

Tabela 4.2: Convergência da equação linear com damping unitário sobre  $[0.0, 1.0]$ 

$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{i+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Ordem de convergência
0.75	20	$1.7031 \times 10^{-5}$	—
	40	$0.8463 \times 10^{-5}$	1.00896
	80	$0.4252 \times 10^{-5}$	0.992844
	160	$0.2137 \times 10^{-5}$	0.99249
	320	$0.1071 \times 10^{-5}$	0.996226
0.5	20	$3.8193 \times 10^{-7}$	—
	40	$0.7528 \times 10^{-7}$	2.34289
	80	$0.1896 \times 10^{-7}$	1.98901
	160	$0.0541 \times 10^{-7}$	1.80757
	320	$0.0208 \times 10^{-7}$	1.37435

Tabela 4.3: Convergência da equação linear com damping unitário sobre  $(0.0, 0.25) \cup (0.75, 1.0)$ 

$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{i+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Ordem de convergência
0.75	20	$1.7207 \times 10^{-5}$	—
	40	$0.8576 \times 10^{-5}$	1.00448
	80	$0.4308 \times 10^{-5}$	0.993268
	160	$0.2165 \times 10^{-5}$	0.992253
	320	$0.1085 \times 10^{-5}$	0.996096
0.5	20	$3.8541 \times 10^{-7}$	—
	40	$0.7629 \times 10^{-7}$	2.3367
	80	$0.1922 \times 10^{-7}$	1.98842
	160	$0.0549 \times 10^{-7}$	1.80648
	320	$0.0212 \times 10^{-7}$	1.37276

### 4.3 Simulação do problema homogêneo

Anteriormente tomou-se  $f = u_t - u_x - u_{xxx} - a(x)u$  com  $a(x) \equiv 0$  na primeira seção e  $a(x) \equiv \text{const} > 0$  na segunda seção. O propósito deste feito foi a obtenção dos resultados de convergência confrontando a solução obtida pelo método dos elementos finitos com a solução exata conhecida.

Na Figura (4.6) é exibido o resultado gráfico para  $f \equiv 0$ , que forma a equação motriz deste trabalho. Os demais dados da simulação são:

- (i)  $L = 5.0$ ;
- (ii)  $m = 100$ ;
- (iii)  $T = 50.0$ ;
- (iv)  $N = 5 \times 10^4$ ;
- (v) Condição inicial polinomial dada por (4.44);
- (vi)  $a(x) \equiv 0$ .

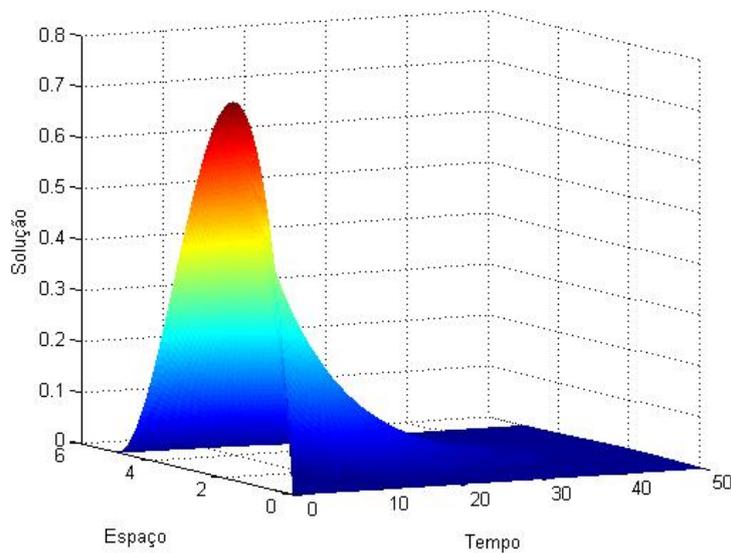


Figura 4.6: Simulação da equação linear homogênea.

#### 4.4 Resultados numéricos sobre a restrição de Rosier

Nesta seção será desenvolvido e apresentado o resultado numérico referente à primeira propriedade teórica estabelecida no primeiro capítulo.

Em (32) é provado que na equação (1.2) com  $f \equiv 0$  e  $L \in \mathcal{E} = \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2}, k, l \in \mathbb{N} \right\}$  existem  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $u_0 \in H^3(0, L)$  satisfazendo:

$$\begin{cases} \lambda u_0(x) + \frac{d}{dx}u_0(x) + \frac{d^3}{dx^3}u_0(x) = 0, & x \in (0, L) \\ u_0(0) = u_0(L) = \frac{d}{dx}u_0(0) = \frac{d}{dx}u_0(L) = 0. \end{cases} \quad (4.80)$$

Neste caso,  $u(x, t) = u_0(x)e^{\lambda t}$  é solução da equação (1.2) com  $f \equiv 0$  e

$$\frac{dE}{dt}(t) = -\frac{1}{2}(u_x(0, t))^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}u_0(0, t)e^{\lambda t} = 0.$$

Ou seja, não ocorre o decaimento da energia.

Entretanto, provou-se em (21) que, quando  $a(x) \geq a_0 > 0$ , é assegurado o decaimento da solução e, conseqüentemente, o decaimento da energia. O objetivo aqui é observar numericamente esse comportamento.

Aproxima-se o problema de autovalor/autovetor acima pelo Método dos Elementos Finitos usando a base formada pelos polinômios de Hermite, já apresentados anteriormente.

A formulação aproximada é dada por:

$$\lambda(v_m, u_0) + (v_m, u_{0x}) - ((v_m)_x, u_{0xx}) = 0.$$

E a matricial:

$$(\mathbf{M} + \lambda\mathbf{K})U = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M}U = -\lambda\mathbf{K}U, \quad (4.81)$$

onde  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  são as mesmas matrizes definidas na primeira seção deste capítulo.

O caminho natural agora seria resolver o problema de autovalor/autovetor acima e, de alguma maneira, descobrir o autovalor (e seu autovetor, possivelmente não único)

que satisfaz o problema acima. Nesta abordagem para cada autovalor encontrado teria-se que calcular o respectivo autovetor e 'testar' se esse par autovalor/autovetor satisfaz o não-decaimento da solução.

Felizmente essa abordagem será facilitada porque a demonstração da primeira propriedade teórica exhibe uma fórmula explícita do cálculo do autovalor  $\lambda$ .<sup>1</sup>

Em (32) é mostrado que  $\lambda$  é um número puramente complexo da forma  $\lambda = -pi$ , onde  $i$  é a unidade complexa e  $p$  é dado por:

$$p = \mu_0(\mu_0 + k\frac{2\pi}{L})(\mu_0 + (k+l)\frac{2\pi}{L}).$$

com

$$L = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}} \quad \text{e} \quad \mu_0 = \frac{1}{3}(2k+l)\frac{2\pi}{L}.$$

onde  $k, l \in \mathcal{N}$ .

O algoritmo, então, é:

- (i) Inseridos os valores  $k$  e  $l$  que definem  $L$ , calcular  $\lambda$  pela fórmula acima;
- (ii) Preencher as matrizes  $K$  e  $M$ , e encontrar os autovalores do problema (4.81);
- (iii) Encontrar o autovetor correspondente ao autovalor  $\lambda$ . Este autovetor é a representação de  $u_0(x)$  usando base de Hermite e será utilizado como condição inicial da simulação;
- (iv) Completada a simulação, calcular a energia a cada instante de tempo, plotar um gráfico exibindo o resultado e identificar os valores máximo e mínimo atingidos pela energia.

A energia é calculada por

$$E_m^n = \int_0^L |u_m^n(x)|^2 dx,$$

onde o índice  $m$  se refere ao número de elementos finitos e o índice  $n$  indica o passo de tempo considerado. O integrando é dado por  $u_m^n(x) = \sum_{i=1}^m c_i^n \varphi_i(x) + d_i^n \psi_i(x)$ , onde  $\varphi$  e  $\psi$  são as funções da base de Hermite. A integral é calculada numericamente via quadratura de Gauss com 5 nós, que é suficiente para calcular exatamente as

---

<sup>1</sup>Fato relativamente raro para um teorema de existência e unicidade.

integrais de polinômios de até grau nove.

Antes da apresentação dos resultados deve ser ressaltado um problema importante de grande influência nos resultados: a aproximação computacional de  $L$ .

Tem-se que qualquer número no conjunto  $\mathcal{E}$  é irracional por ser um múltiplo de  $\pi$ . Mas como o computador representa apenas números racionais, tem-se que aproximar o valor real de  $L$  por um número racional e isso será feito mediante uma aproximação de  $\pi$ . Apesar do efeito dessa aproximação no cálculo da energia (cálculo da integral) não apresentar grandes perdas, o efeito em termos teóricos é catastrófico, pois como a aproximação não pertence ao conjunto  $\mathcal{E}$ , não faria sentido então desenvolver o problema de autovalor/autovetor para estas definições de  $L$ . Para contornar essa situação considerar-se-á então que todas as aproximações pertencem ao conjunto  $\mathcal{E}$ . Isto é, tomando, por exemplo,  $k = l = 1$ , tem-se  $L = 2\pi \in \mathcal{E}$  e tomando  $\pi \approx 3.141595$  aceita-se que  $L = 6.28319$  seja considerado um número em  $\mathcal{E}$ .

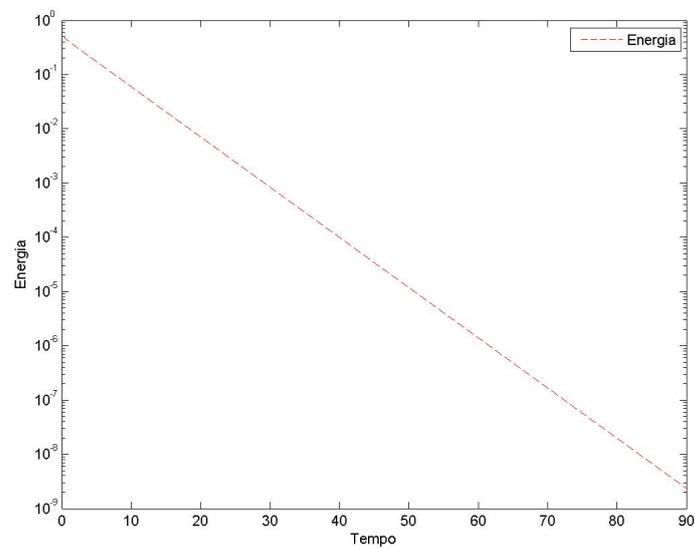
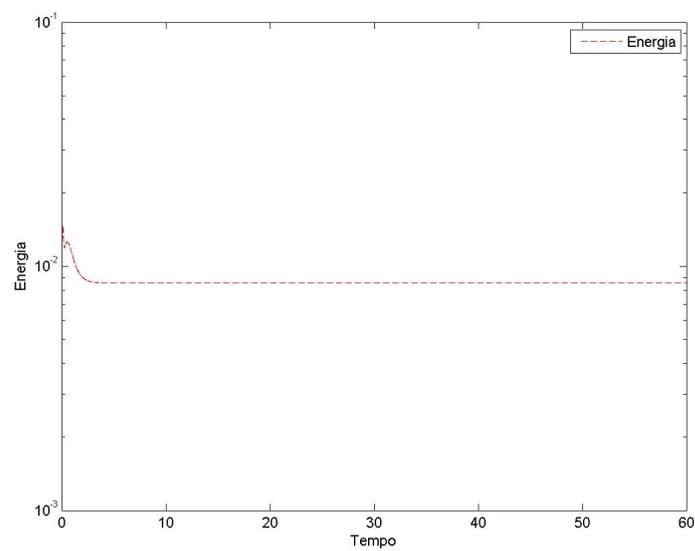
#### 4.4.1 Simulações

Enumeram-se agora algumas simulações com respectivos dados de execução, gráficos e comentários. Fixou-se  $\theta = 0.5$ ,  $h = 0.01$  e  $\Delta t = 0.0001$ . Todos os gráficos estão em escala logarítmica no eixo  $y$ .

Considera-se, inicialmente, o caso  $L \notin \mathcal{E}$  com  $L = 5.0$ ,  $T = 90$  e dado inicial polinomial dado pela equação (4.44). O resultado é exibido na Figura 4.7. Nota-se que o decaimento é linear durante todo o tempo de simulação.

Tomando, em seguida, o caso  $L \in \mathcal{E}$  aproximando  $\pi$  por 3.141592653589793 com  $L = 2\pi \approx 6.283185307179586$ ,  $T = 10$  e o dado inicial sendo a solução do problema de autovalor/autovetor (4.80). Tem-se o resultado na Figura 4.8. Nota-se em que ocorre um decaimento, mas seguido de uma estabilização no valor 0.0085396.

Conforme descrito acima, o papel do damping é garantir o decaimento da energia para valores de  $L$  em  $\mathcal{E}$ . Neste sentido, tem-se a próxima simulação abaixo, realizada

Figura 4.7:  $L = 5.0$ Figura 4.8:  $L = 6.283185307179586$  e dado initial (4.80)

tomando  $L = 6.283185307179586$ ,  $T = 60$ , um dado inicial de (4.80) e damping  $a(x) \equiv 0.1$  atuando sobre todo  $[0, L]$ . O resultado é dado na Figura 4.9. Neste caso, confirma-se o decaimento da energia.

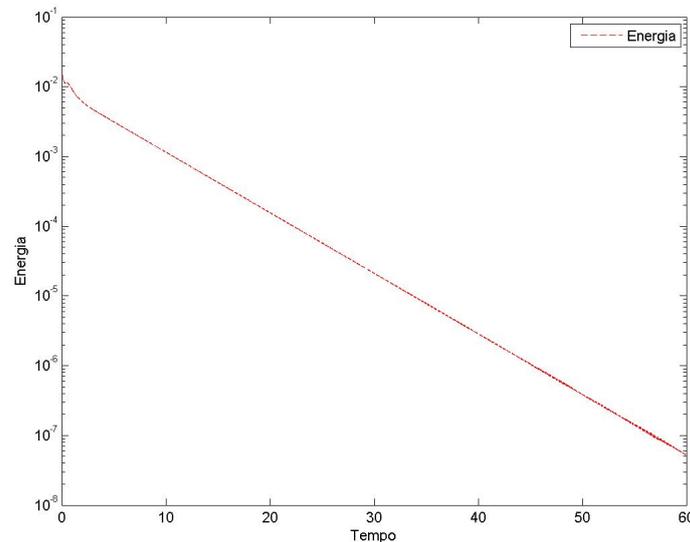


Figura 4.9:  $L = 6.283185307179586$ , dado inicial (4.80) e damping  $a(x) \equiv 0.1$  sobre  $[0, L]$

Faz-se entretanto uma nova simulação tomando o damping  $a(x) \equiv 0.5$  atuando novamente sobre todo  $[0, L]$ . Os demais dados não foram modificados e o resultado está exposto na Figura 4.10. Vê-se em que o aumento do damping acarretou um decaimento mais veloz da energia. Restringe-se agora o damping ao conjunto  $\omega = (0, \delta) \cup (L - \delta, L)$ .

Considerando  $a(x) = 0.1$ ,  $L = 6.283185307179586$ ,  $\delta = 1$ ,  $T = 60$ ,  $\Delta t = 0.0001$  e mantendo  $m = 100$ , a Figura (4.11) abaixo mostra o decaimento da energia. Nota-se que o decaimento é muito mais lento do que o decaimento mostrado anteriormente.

Faz-se uma nova simulação tomando o damping  $a(x) \equiv 0.5$  atuando sobre  $(0, 1) \cup (5.283185307179586, 6.283185307179586)$ . Os demais dados não foram modificados e o resultado está exposto na Figura 4.12. Vê-se em que o aumento do damping

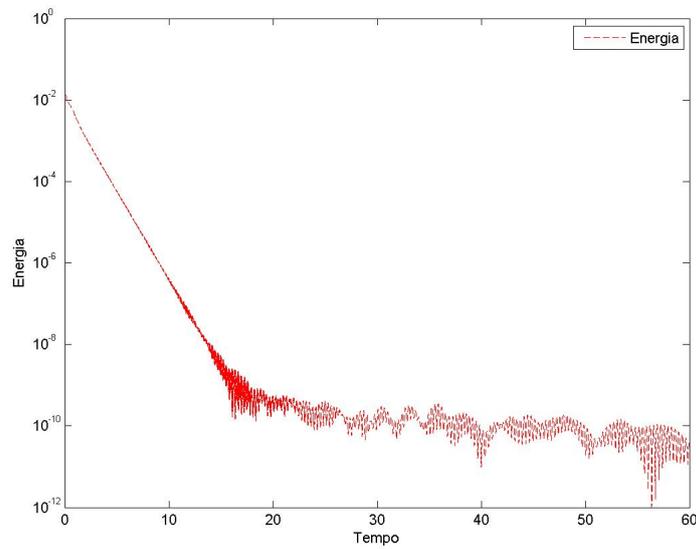


Figura 4.10:  $L = 6.283185307179586$ , dado inicial (4.80) e damping  $a(x) \equiv 0.5$  sobre  $[0, L]$ .

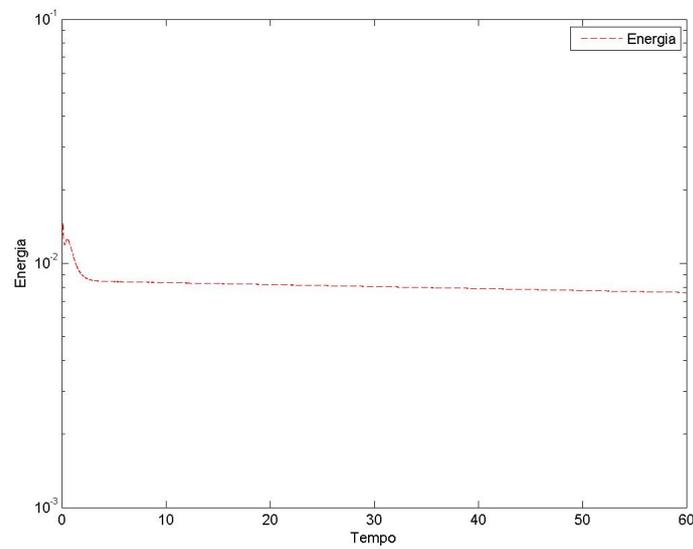


Figura 4.11:  $L = 6.283185307179586$ , dado inicial (4.80) e damping  $a(x) \equiv 0.1$  sobre  $(0, 1) \cup (5.28319, 6.28319)$

acarretou novamente num decaimento mais veloz da energia.

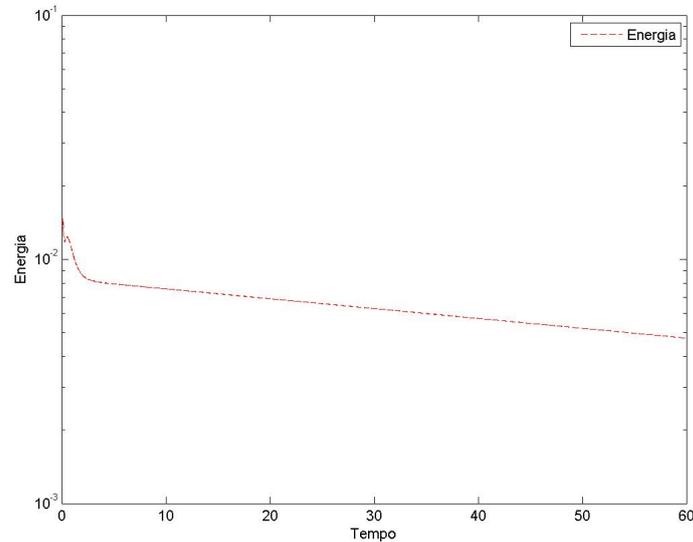


Figura 4.12:  $L = 6.283185307179586$ , dado initial (4.80) e damping  $a(x) \equiv 0.5$  sobre  $(0, 1) \cup (5.283185307179586, 6.283185307179586)$

#### 4.4.2 A influência da aproximação de $\pi$

Para as simulações da seção anterior tomou-se

$$\pi \approx 3.141592653589793$$

e verificou-se que de certa maneira os efeitos esperados ocorreram.

O propósito desta subseção é refinar a aproximação de  $\pi$  e analisar os resultados obtidos no cálculo da energia com os dados  $L \approx 2\pi$ ,  $T = 60$ ,  $m = 100$  e  $\Delta t = 0.0001$ . A tabela (4.4) abaixo relaciona o número de casas decimais usado para aproximar  $\pi$  com os valores máximo e mínimo da energia encontrados executando a simulação com os dados acima, sendo o dado inicial a solução de (4.80). A aproximação de  $\pi$  mais refinada é 3.14159265358979323846 (vinte casas decimais).

Tabela 4.4: Tabela que relaciona o número de casas decimais usado para aproximar  $\pi$  com os valores máximo e mínimo da energia.

Casas decimais	Energia máxima	Energia mínima
2	0.0064979	$2.14351 \times 10^{-6}$
3	0.0065048	$2.27917 \times 10^{-6}$
4	0.0065084	$2.35076 \times 10^{-6}$
5	0.0065195	$2.36756 \times 10^{-6}$
6	0.0065517	$2.37954 \times 10^{-6}$
7	0.0071047	$2.58047 \times 10^{-6}$
8	0.0117414	0.00431284
9	0.0146844	0.00833333
10	0.0154365	0.00953159
11	0.0158188	0.0100838
12	0.0150412	0.00895382
13	0.014188	0.00757621
14	0.0147126	0.0084767
15	0.0147561	0.0085396
16	0.0147561	0.0085396
17	0.0147561	0.0085396
18	0.0147561	0.0085396

## 5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR

Este capítulo apresenta os resultados da simulação a equação KdV na forma não-linear. Diferentemente do capítulo anterior, nenhum estudo de análise numérica é demonstrado, mas sim as formulações variacional, matricial (apenas do termo não-linear) e as técnicas de linearização, bem como simulações, gráficos e tabelas de convergência.

### 5.1 Simulações e convergências

Seja a formulação variacional do problema não-linear desenvolvido no primeiro capítulo:

$$\begin{aligned} \left( v_m, u'_m(t) \right) + \left( v_m, (u_m)_x(t) \right) - \left( (v_m)_x, (u_m)_{xx}(t) \right) + \left( v_m, u_m(t)(u_m)_x(t) \right) \\ + \left( v_m, a(x)u_m(t) \right) = \left( v_m, f(t) \right), \quad \forall v_m \in V_m \subset V. \end{aligned}$$

Como os termos lineares e de damping já foram estudados no capítulo anterior, será desenvolvido aqui apenas o termo não-linear, as linearizações e, em seguida, a acoplação na formulação matricial do problema linear.

Seja a base de  $V_m$  formada pelos polinômios de Hermite,  $\varphi(x)$  (interpolação da função) e  $\psi(x)$  (interpolação da derivada da função). Dado  $u_m(t) \in V_m$  existem  $\{c_0(t), \dots, c_m(t)\}$  e  $\{d_0(t), \dots, d_m(t)\}$  tais que

$$u_m(t) = \sum_{j=0}^m c_j(t)\varphi_j(x) + d_j(t)\psi_j(x).$$

Substituindo no termo não-linear:

$$\left(v_m, u_m(t)(u_m)_x(t)\right) = \left(v_m, \left[\sum_{j=0}^m c_j(t)\varphi_j + d_j(t)\psi_j\right] \left[\sum_{k=0}^m c_k(t)(\varphi_k)_x + d_k(t)(\psi_k)_x\right]\right).$$

Num futuro próximo será tomado  $v_m = \varphi_i$  e  $v_m = \psi_i$ , então substitui-se abaixo  $v_m$  por  $v_i$  para introduzir o índice  $i$  agora.

Desmembrando a multiplicação e usando a bilinearidade  $(\cdot, \cdot)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left(v_i, \left[\sum_{j,k=0}^m c_j(t)\varphi_j c_k(t)(\varphi_k)_x\right]\right) + \left(v_i, \left[\sum_{j,k=0}^m c_j(t)\varphi_j d_k(t)(\psi_k)_x\right]\right) + \\ & \left(v_i, \left[\sum_{j,k=0}^m d_j(t)\psi_j c_k(t)(\varphi_k)_x\right]\right) + \left(v_i, \left[\sum_{j,k=0}^m d_j(t)\psi_j d_k(t)(\psi_k)_x\right]\right) \\ & = \sum_{j,k=0}^m c_j(t)c_k(t) \left(v_i, \varphi_j(\varphi_k)_x\right) + \sum_{j,k=0}^m c_j(t)d_k(t) \left(v_i, \varphi_j(\psi_k)_x\right) + \\ & \sum_{j,k=0}^m d_j(t)c_k(t) \left(v_i, \psi_j(\varphi_k)_x\right) + \sum_{j,k=0}^m d_j(t)d_k(t) \left(v_i, \psi_j(\psi_k)_x\right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Define-se as seguintes matrizes tridimensionais:

$$P_{ijk}^v = (v_i, \varphi_j(\varphi_k)_x), \quad Q_{ijk}^v = (v_i, \varphi_j(\psi_k)_x),$$

$$R_{ijk}^v = (v_i, \psi_j(\varphi_k)_x), \quad S_{ijk}^v = (v_i, \psi_j(\psi_k)_x),$$

onde o superíndice  $v$  foi introduzido para generalizar o uso de  $\varphi$  e  $\psi$ .

Logo, o termo não-linear se reescreve como:

$$\sum_{j,k=0}^m c_j(t)c_k(t)P_{ijk}^v + \sum_{j,k=0}^m c_j(t)d_k(t)Q_{ijk}^v + \sum_{j,k=0}^m d_j(t)c_k(t)R_{ijk}^v + \sum_{j,k=0}^m d_j(t)d_k(t)S_{ijk}^v.$$

Neste momento já se teriam condições de acoplar a equação acima no problema linear e resolver o sistema não-linear resultante usando técnicas de solução de sistemas não-lineares. Isso não é desejável e as duas próximas subseções mostrarão técnicas de linearização aplicadas a cada termo de  $u(t)u_x(t)$ .

### 5.1.1 Linearização do termo $u(t)$ em $u(t)u_x(t)$

Tornar o termo  $u(t)$  linear significa substituí-lo por alguma expressão que o deixe 'constante' a cada passo de tempo.

Neste caso, é importante enfatizar o papel do índice  $j$ , pois o termo  $u(t)$  foi escrito inicialmente por

$$u(t) = \sum_{j=0}^m c_j(t)\varphi_j + d_j(t)\psi_j.$$

A partir das definições de  $P_{ijk}^v$ ,  $Q_{ijk}^v$ ,  $R_{ijk}^v$  e  $S_{ijk}^v$ , define-se

$$P_{ik}^v(t) = \sum_{j=0}^m c_j(t)P_{ijk}^v, \quad Q_{ik}^v(t) = \sum_{j=0}^m c_j(t)Q_{ijk}^v,$$

$$R_{ik}^v(t) = \sum_{j=0}^m d_j(t)R_{ijk}^v, \quad S_{ik}^v(t) = \sum_{j=0}^m d_j(t)S_{ijk}^v,$$

onde o somatório em  $j$  mostra como esses termos dependem de  $u(t)$ . Substituindo em (5.1) se chega na seguinte expressão:

$$\sum_{k=0}^m c_k(t)P_{ik}^v(t) + \sum_{k=0}^m c_k(t)Q_{ik}^v(t) + \sum_{k=0}^m d_k(t)R_{ik}^v(t) + \sum_{k=0}^m d_k(t)S_{ik}^v(t)$$

$$= \sum_{k=0}^m c_k(t)[P_{ik}^v(t) + Q_{ik}^v(t)] + \sum_{k=0}^m d_k(t)[R_{ik}^v(t) + S_{ik}^v(t)].$$

Definindo  $X(t) = (c_0(t), \dots, c_m(t), d_0(t), \dots, d_m(t))^T$  e fazendo  $v_m = \varphi(x)$  e  $v_m = \psi(x)$  obtém-se a matriz relativa ao termo não-linear:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^\varphi(t) + \mathbf{Q}^\varphi(t) & \mathbf{R}^\varphi(t) + \mathbf{S}^\varphi(t) \\ \mathbf{P}^\psi(t) + \mathbf{Q}^\psi(t) & \mathbf{R}^\psi(t) + \mathbf{S}^\psi(t) \end{bmatrix} X(t), \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  são matrizes (não-lineares) definidas por:

$$\mathbf{P}^v(t) = \left( P_{ik}^v(t) \right), \quad \mathbf{Q}^v(t) = \left( Q_{ik}^v(t) \right),$$

$$\mathbf{R}^v(t) = \left( R_{ik}^v(t) \right), \quad \mathbf{S}^v(t) = \left( S_{ik}^v(t) \right).$$

Acopla-se a matriz (5.2) ao problema matricial relativo à equação linear (4.43):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\varphi & \mathbf{B}^\varphi \\ \mathbf{A}^\psi & \mathbf{B}^\psi \end{bmatrix} X'(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^\varphi & \mathbf{N}^\varphi \\ \mathbf{M}^\psi & \mathbf{N}^\psi \end{bmatrix} X(t) +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^\varphi(t) + \mathbf{Q}^\varphi(t) & \mathbf{R}^\varphi(t) + \mathbf{S}^\varphi(t) \\ \mathbf{P}^\psi(t) + \mathbf{Q}^\psi(t) & \mathbf{R}^\psi(t) + \mathbf{S}^\psi(t) \end{bmatrix} X(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^\varphi(t) \\ \mathbf{F}^\psi(t) \end{bmatrix}.$$

E obtém-se um sistema não-linear de equações diferenciais. Sucintamente:

$$\begin{cases} \mathbf{M}X'(t) + \mathbf{K}X(t) + \mathbf{N}_L(t)X(t) = \mathbf{F}(t) \\ X(0) = (c_0(0), \dots, c_m(0), d_0(0), \dots, d_m(0)), \end{cases}$$

onde presume-se que o termo de damping está inserido na matriz  $\mathbf{K}$ . Para resolver esse sistema, lineariza-se o termo  $\mathbf{N}_L(t)X(t)$  como:

$$\mathbf{N}_L(t)X(t) = \mathbf{N}_L^n \left[ \frac{1}{2}X^{n+1} + \frac{1}{2}X^n \right]$$

onde,

$$\mathbf{N}_L^n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{\varphi n} + \mathbf{Q}^{\varphi n} & \mathbf{R}^{\varphi n} + \mathbf{S}^{\varphi n} \\ \mathbf{P}^{\psi n} + \mathbf{Q}^{\psi n} & \mathbf{R}^{\psi n} + \mathbf{S}^{\psi n} \end{bmatrix}.$$

Cada entrada da matrix  $\mathbf{N}_L(t)$  pode ser escrita como

$$W_{ik}^v(t) = \sum_{j=0}^m g_j(t) W_{ijk}^v.$$

onde  $g_j$  representa tanto  $c_j$  quanto  $d_j$  e  $W$  representa qualquer um dos tensores  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ . Destaca-se, mais um vez, o índice  $j$  como responsável pela linearização do termo  $u(t)$ .

Define-se, inicialmente, uma discretização de  $[0, T]$  por  $\{0 = t_0, \dots, t_N = T\}$  e toma-se então  $W_{ik}^v(t)$  no tempo  $t_n$ :

$$W_{ik}^v(t_n) = W_{ik}^{vn} = \sum_{j=0}^m g_j(t_n) W_{ijk}^v = \sum_{j=0}^m g_j^n W_{ijk}^v.$$

Com relação ao restante da discretização temporal, procede-se como no caso linear tomando Método de Euler Explícito juntamente com Método de  $\theta$ -Newmark (exceto na matriz  $\mathbf{N}_L(t)$ ):

$$\mathbf{M} \frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t} + \mathbf{K}(\theta X^{n+1} + (1 - \theta)X^n) +$$

$$\mathbf{N}_L^n \left( \frac{1}{2} X^{n+1} + \frac{1}{2} X^n \right) = \theta \mathbf{F}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{F}^n.$$

Finalmente,

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{M} + \Delta t \theta \mathbf{K} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{N}_L^n] X^{n+1} = [\mathbf{M} - \Delta t(1 - \theta) \mathbf{K} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{N}_L^n] X^n + \\ \quad \Delta t \theta \mathbf{F}^{n+1} + \Delta t(1 - \theta) \mathbf{F}^n. \\ X^0 = (c_0^0, \dots, c_m^0, d_0^0, \dots, d_m^0). \end{array} \right.$$

Observa-se que no passo de tempo  $n + 1$  a matriz  $\mathbf{N}_L^n$  é conhecida e portanto o sistema acima é linear. Por outro lado, pela maneira como foi definida, a matriz  $\mathbf{N}_L^n$  depende da solução  $X^n$  e deve ser recalculada a cada passo de tempo.

Objetiva-se, agora, estimar a ordem de convergência da solução obtida pelo Método dos Elementos Finitos para a solução exata da equação KdV.

Para a validação do método são considerados os valores  $L = 1$ ,  $T = 1$ . Como condição inicial define-se

$$u_0(x) = \frac{1}{L^2} x(x - L)^2,$$

e como solução exata

$$u(x, t) = u_0(x) e^{-t}.$$

Para que seja possível confrontar os valores obtidos pelo método com os valores exatos, deve-se definir  $f$  por

$$\begin{aligned} f(x, t) &= u'(x, t) + u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) + a(x)u(x, t) \\ &= -\frac{1}{L^2} x(x - L)^2 e^{-t} + \frac{1}{L^2} [(x - L)^2 + 2x(x - L)] e^{-t} + \frac{6}{L^2} e^{-t} + \\ &\quad \left\{ \frac{1}{L^2} x(x - L)^2 e^{-t} \left[ \frac{1}{L^2} ((x - L)^2 + 2x(x - L)) e^{-t} \right] \right\} + \frac{1}{L^2} a(x) x(x - L)^2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Na Tabela 5.1 encontram-se os resultados de convergência para  $a(x) \equiv 0$ . A Figura 5.1 abaixo compara o erro obtido pela solução numérica encontrada com a solução exata descrita acima. Foi plotada considerando  $h = 1/160$ ,  $\Delta t = 1/160$  e as curvas representam o erro para o tempo fixo  $t = 0.5$ .

Toma-se agora  $a(x) \equiv 1$  atuando sobre todo o conjunto  $[0.0, 1.0]$ . Na Tabela 5.2 encontram-se os resultados de convergência.

Por fim, considera-se  $a(x) \equiv 1$  atuando sobre o conjunto  $[0.0, 0.25] \cup [0.75, 1.0]$ . Os resultados de convergência são exibidos na Tabela 5.3.

Tabela 5.1: Linearização de  $u$  - convergência da equação não-linear sem damping

$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{i+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Convergência
0.75	20	$4.2850 \times 10^{-4}$	—
	40	$4.3097 \times 10^{-4}$	-0.00831559
	80	$4.3544 \times 10^{-4}$	-0.014868
	160	$4.3944 \times 10^{-4}$	-0.0132157
	320	$4.4177 \times 10^{-4}$	-0.00762563
0.5	20	$5.8561 \times 10^{-4}$	—
	40	$5.0505 \times 10^{-4}$	0.213531
	80	$4.5511 \times 10^{-4}$	0.150197
	160	$4.4615 \times 10^{-4}$	0.0286842
	320	$4.4523 \times 10^{-4}$	0.00298158

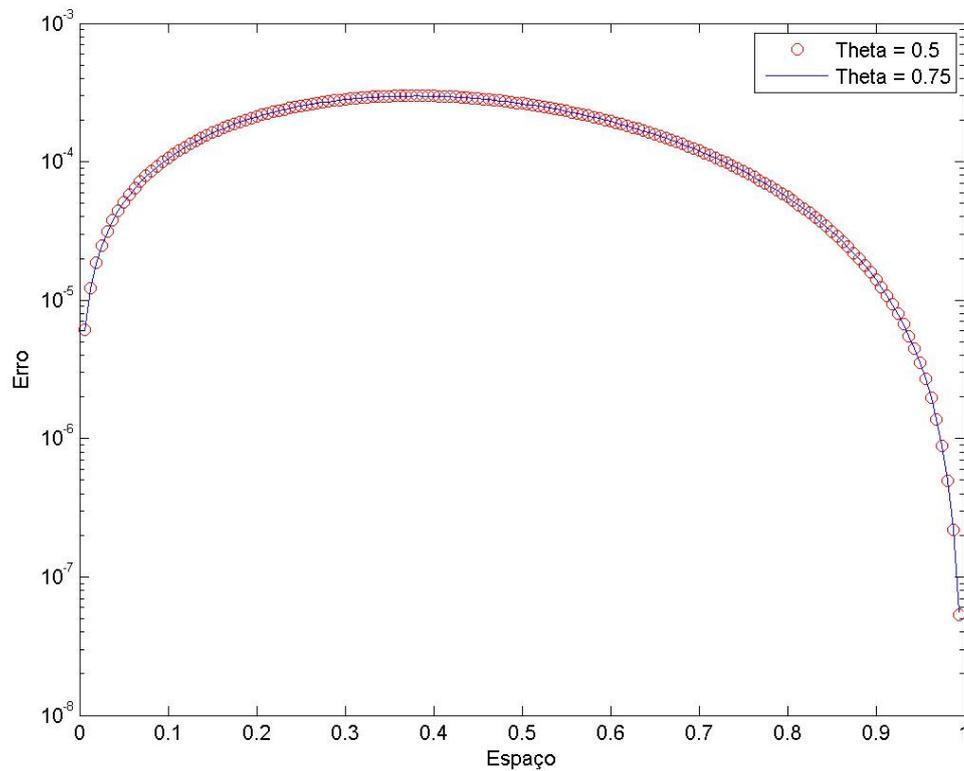


Figura 5.1: Gráfico do erro entre  $\theta = 0.5$  e  $\theta = 0.75$ .

Tabela 5.2: Linearização de  $u$  - convergência da equação não-linear com damping sobre  $[0.0, 1.0]$

$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{i+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Convergência
0.75	20	$4.2364 \times 10^{-4}$	—
	40	$4.2541 \times 10^{-4}$	-0.00597578
	80	$4.2919 \times 10^{-4}$	-0.0127951
	160	$4.3322 \times 10^{-4}$	-0.0134945
	320	$4.3556 \times 10^{-4}$	-0.00777575
0.5	20	$5.7976 \times 10^{-4}$	—
	40	$4.9803 \times 10^{-4}$	0.219223
	80	$4.4878 \times 10^{-4}$	0.150222
	160	$4.3991 \times 10^{-4}$	0.0287823
	320	$4.3890 \times 10^{-4}$	0.00331489

Tabela 5.3: Linearização de  $u$  - convergência da equação não-linear com damping sobre  $[0.0, 0.25] \cup [0.75, 1.0]$ 

$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{i+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Convergência
0.75	20	$4.2851 \times 10^{-4}$	—
	40	$4.3097 \times 10^{-4}$	-0.00831559
	80	$4.3544 \times 10^{-4}$	-0.014868
	160	$4.3944 \times 10^{-4}$	-0.0132157
	320	$4.4177 \times 10^{-4}$	-0.00762563
0.5	20	$5.8561 \times 10^{-4}$	
	40	$5.0505 \times 10^{-4}$	0.213531
	80	$4.5511 \times 10^{-4}$	0.150197
	160	$4.4615 \times 10^{-4}$	0.0286842
	320	$4.4523 \times 10^{-4}$	0.00298158

### 5.1.2 Linearização do termo $u_x(t)$ em $u(t)u_x(t)$

O termo  $u_x(x, t)$  foi definido por

$$u_x(x, t) = \sum_{k=0}^m c_k(t)(\varphi_k)_x(x) + d_k(t)(\psi_k)_x(x).$$

A partir das definições de

$$P_{ijk}^v = (v_i, \varphi_j(\varphi_k)_x), \quad Q_{ijk}^v = (v_i, \varphi_j(\psi_k)_x),$$

$$R_{ijk}^v = (v_i, \psi_j(\varphi_k)_x), \quad S_{ijk}^v = (v_i, \psi_j(\psi_k)_x).$$

Define-se:

$$P_{ij}^v(t) = \sum_{k=0}^m c_k(t)P_{ijk}^v, \quad Q_{ij}^v(t) = \sum_{k=0}^m d_k(t)Q_{ijk}^v,$$

$$R_{ij}^v(t) = \sum_{k=0}^m c_k(t)R_{ijk}^v, \quad S_{ij}^v(t) = \sum_{k=0}^m d_k(t)S_{ijk}^v.$$

Esta linearização difere sutilmente da anterior pois o somatório agora é feito sobre o índice  $k$  (o invés do índice  $j$ ), e isso exhibe a dependência do termo  $u_x(t)$ .

A partir deste ponto o resto da análise é similar e, apesar de serem obtidas matrizes

ligeiramente diferentes, obtém-se o sistema linear análogo ao anterior.

Além disso, os mesmos dados de simulação foram utilizados a fim de se obter os resultados de simulação.

Na Tabela 5.4 encontram-se os resultados de convergência para  $a(x) \equiv 0$ . A Figura 5.2 abaixo compara o erro obtido pela solução numérica encontrada com a solução exata descrita acima. Foi plotada considerando  $h = 1/160$ ,  $\Delta t = 1/160$  e as curvas representam o erro para o tempo fixo  $t = 0.5$ .

Toma-se agora  $a(x) \equiv 1$  atuando sobre todo o conjunto  $[0.0, 1.0]$ . Os resultados de convergência são mostrados na Tabela 5.5.

Por fim, considera-se  $a(x) \equiv 1$  atuando sobre todo o conjunto  $[0.0, 0.25] \cup [0.75, 1.0]$ , onde os resultados de convergência são exibidos na Tabela 5.6.

Os resultados gráficos para estas configurações de damping são semelhantes ao caso com damping nulo, visto que foi imposta a mesma solução exata e as tabelas abaixo não apresentam modificações quanto à ordem de convergência.

Tabela 5.4: Linearização de  $u_x$  - convergência da equação não-linear sem damping

$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{i+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Convergência
0.75	20	$3.0376 \times 10^{-5}$	—
	40	$1.5254 \times 10^{-5}$	0.993738
	80	$0.7691 \times 10^{-5}$	0.987909
	160	$0.3866 \times 10^{-5}$	0.992385
	320	$0.1939 \times 10^{-5}$	0.995016
0.5	20	$0.9829 \times 10^{-5}$	—
	40	$0.4426 \times 10^{-5}$	1.15084
	80	$0.2042 \times 10^{-5}$	1.11587
	160	$0.1015 \times 10^{-5}$	1.00814
	320	$0.0508 \times 10^{-5}$	0.996943

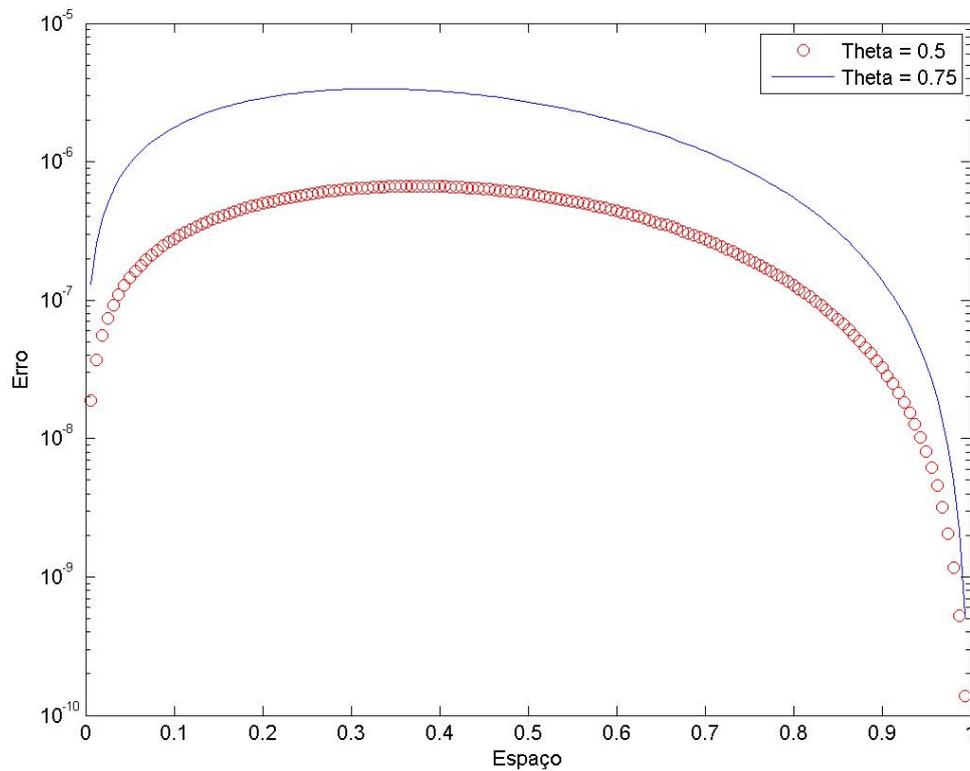


Figura 5.2: Gráfico do erro entre  $\theta = 0.5$  e  $\theta = 0.75$ .

Tabela 5.5: Linearização de  $u_x$  - convergência da equação não-linear com damping unitário sobre  $[0.0, 1.0]$

$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{i+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Convergência
0.75	20	$3.0047 \times 10^{-5}$	—
	40	$1.5040 \times 10^{-5}$	0.998431
	80	$0.7585 \times 10^{-5}$	0.987454
	160	$0.3812 \times 10^{-5}$	0.992647
	320	$0.1912 \times 10^{-5}$	0.994933
0.5	20	$0.9730 \times 10^{-5}$	—
	40	$0.4364 \times 10^{-5}$	1.15654
	80	$0.2013 \times 10^{-5}$	1.11596
	160	$0.1001 \times 10^{-5}$	1.00821
	320	$0.0501 \times 10^{-5}$	0.997281

Tabela 5.6: Linearização de  $u_x$  - convergência da equação não-linear com damping unitário sobre  $[0.0, 0.25] \cup [0.75, 1.0]$

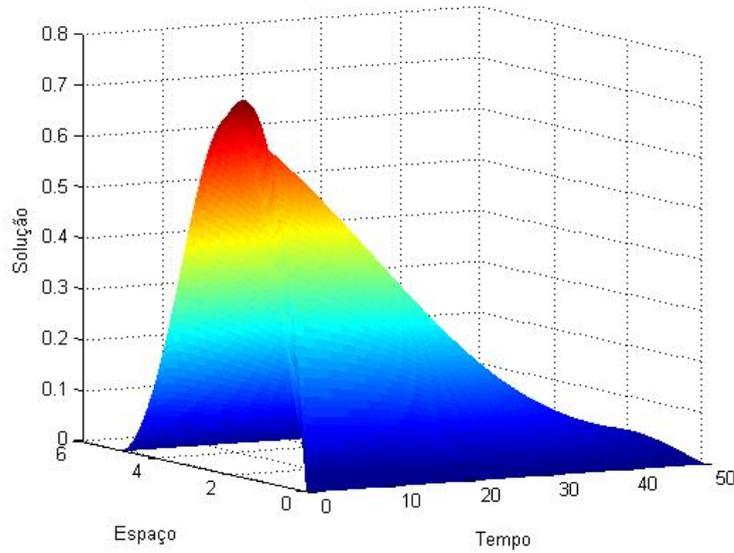
$\theta$	$N = m = 5 \cdot 2^{i+1}$	$\ u - u_m\ _{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	Convergência
0.75	20	$3.0376 \times 10^{-5}$	—
	40	$1.5254 \times 10^{-5}$	0.993738
	80	$0.7691 \times 10^{-5}$	0.987909
	160	$0.3866 \times 10^{-5}$	0.992385
	320	$0.1939 \times 10^{-5}$	0.995016
0.5	20	$0.9829 \times 10^{-5}$	—
	40	$0.4426 \times 10^{-5}$	1.15084
	80	$0.2042 \times 10^{-5}$	1.11587
	160	$0.1015 \times 10^{-5}$	1.00814
	320	$0.0508 \times 10^{-5}$	0.996943

## 5.2 Simulação do caso homogêneo

Anteriormente tomou-se  $f = u_t - u_x - u_{xxx} - uu_x - a(x)u$  com  $a(x) \equiv 0$  na primeira seção e  $a(x) \equiv k$ , com  $k > 0$  constante, na segunda seção. O propósito deste feito foi a obtenção dos resultados de convergência confrontando a solução obtida pelo método dos elementos finitos com a solução exata conhecida.

Nesta seção serão exibidos os resultados gráficos para  $f \equiv 0$ . Os demais dados da simulação são:

- (i)  $L = 5.0$ ;
- (ii)  $m = 100$ ;
- (iii)  $T = 5.0$ ;
- (iv)  $N = 5 \times 10^4$ ;
- (v) linearização de  $u_x$  em  $uu_x$ ;
- (vi) Condição inicial polinomial dada por (4.44).



### 5.3 Resultados numéricos sobre o damping localizado

O objetivo desta seção é apresentar os resultados numéricos da segunda propriedade teórica, a saber, o decaimento exponencial localmente uniforme da energia  $E(t)$  quando o damping  $a(x) \geq a_0 > 0$  atua sobre um subconjunto  $\omega \subset [0, L]$ . Diz-se com isso que o decaimento da energia será exponencial quando o dado inicial  $u_0(x)$  estiver contido numa bola de raio  $R$  em  $L^2(0, L)$ , isto é,  $\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq R$ . Enuncia-se abaixo o teorema de (21) que formaliza a descrição acima.

**Teorema 5.1.** *Sejam  $\omega$  contendo dois conjuntos da forma  $(0, \delta)$  e  $(L - \delta, L)$  para algum  $\delta > 0$ , e  $a = a(x)$  uma função não-negativa em  $L^\infty(0, L)$  tal que  $a(x) \geq a_0 > 0$  quase sempre em  $\omega$ . Então, para todo  $L > 0$  e  $R > 0$ , existem  $c > 0$  e  $\mu > 0$  tais que*

$$E(t) \leq c \|u_0\|_{L^2(0,L)}^2 e^{-\mu t}$$

para todo  $t > 0$  e para qualquer solução de (1.1) com  $u_0 \in L^2(0, L)$  tal que  $\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq R$ .

Enumera-se alguns comentários pertinentes:

(I) As constantes  $c$  e  $\mu$  do teorema acima dependem exclusivamente de  $R$ , não sendo demonstrado, entretanto, como ocorre essa dependência.

(II) O termo de damping  $a(x)u$  pode ser trocado por qualquer outro mecanismo de damping  $Bu$ , desde que  $B$  seja um operador linear limitado em  $L^2(0, L)$  tal que  $Bu \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$  em  $\omega$ .

(III) [Corolário] Se  $\omega$  contém dois conjuntos da forma  $(0, \delta)$  e  $(L - \delta, L)$  para algum  $\delta > 0$ , então as soluções de (1.1) decaem exponencialmente para zero no sentido do Teorema acima.

(IV) Na primeira propriedade teórica, o principal teorema indicava uma fórmula de encontrar o autovalor do problema. Mas neste caso agora, não há indicação na demonstração do significado preciso de 'grande ou pequena amplitudes em  $L^2(0, L)$ ' (o valor de  $R$ ). Para dados iniciais de 'baixa amplitude' é assegurado o decaimento exponencial da energia usando-se um determinado método; enquanto que, para 'grandes amplitudes', o decaimento exponencial é assegurado outro método (esse último resultado é a principal contribuição de (21)).

(V) Afirma-se que uma pequena quantidade de damping é suficiente para garantir o decaimento exponencial da energia. No entanto, a idéia de 'pequena' neste argumento é vaga.

Para as simulações a seguir foram fixados os seguintes parâmetros:

- (i)  $L = 5.0$ ;
- (ii)  $T = 60.0$ ;
- (iii)  $m = 100$ ;
- (iv)  $\Delta t = 1/30000$ ;
- (v)  $\theta = 0.5$ ;
- (vi)  $f \equiv 0$  (problema homogêneo);
- (vii) Condição inicial polinomial dada por  $u_0(x) = x(x - L)^2$ ;
- (viii) Linearização de  $u_x(t)$  em  $u(t)u_x(t)$ .

Na Figura 5.3 considera-se inicialmente o caso  $a(x) \equiv 0$ , onde se vê nitidamente que não ocorre o decaimento.

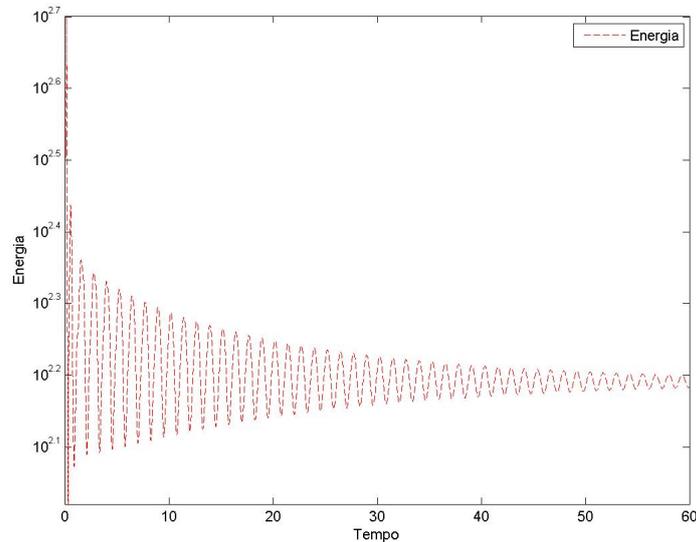


Figura 5.3: Grafico da energia, sem damping.

Faz-se agora o caso com damping  $a(x) = 1.0$  atuando sobre todo o conjunto  $[0, L]$ . O resultado é exibido na Figura 5.4. Neste caso o decaimento ocorre conforme o esperado. Nota-se um ruído quando  $T > 20$ , mas como a energia já com ordem entre  $10^{-10}$  e  $10^{-15}$ , isso pode ser considerado uma consequência da propagação do erro acumulado em cada passo de tempo.

Por fim faz-se o damping  $a(x) = 1.0$  atuante sobre  $(0, 1) \cup (4, 5)$ . O resultado é exibido na Figura 5.5 abaixo. O decaimento é perceptível.

Mantendo os dados de entrada da simulação anterior, faz-se o damping  $a(x) = 5.0$  atuante sobre  $(0, 1) \cup (4, 5)$ . O resultado é mostrado na Figura 5.6.

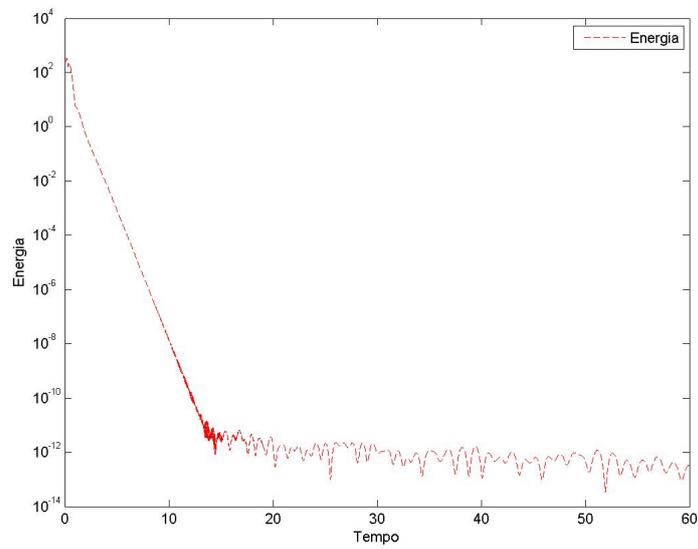


Figura 5.4: Grafico da energia com damping  $a(x) = 1.0$  sobre  $[0, 5]$ .

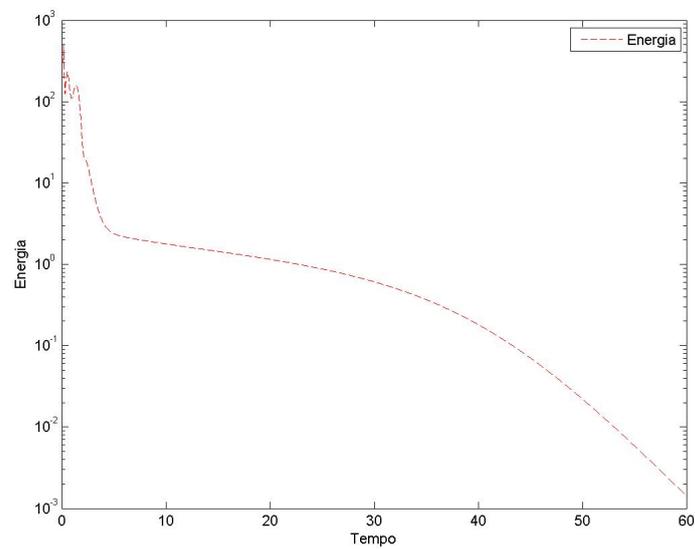


Figura 5.5: Grafico da energia com damping  $a(x) = 1.0$  sobre  $\omega = (0, 1) \cup (4, 5)$ .

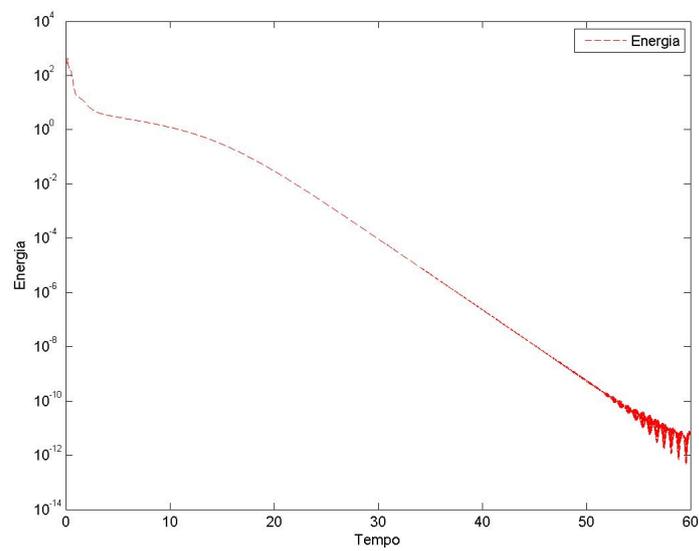


Figura 5.6: Gráfico da energia com damping  $a(x) = 5.0$  sobre  $\omega = (0, 1) \cup (4, 5)$ .

## 6 CONCLUSÃO

O propósito deste trabalho era analisar numericamente o método dos elementos finitos juntamente com o método das diferenças finitas aplicados à equação de Korteweg-de Vries. Para tal era necessário um estudo de existência e unicidade da solução da equação. Além disso, em (21) e (32) duas propriedades teóricas interessantes foram desenvolvidas e isso motivou a busca pela comprovação computacional desses resultados. A forma com qual essas propriedades foram obtidas influenciou na organização da apresentação dos resultados numéricos e teóricos, como será melhor descrito na sequência. Segue abaixo então um sumário do que se pode concluir de cada capítulo.

O Capítulo III (Estudo da Solução Fraca) tratou da demonstração da existência e unicidade das equações linear, linear com damping e não-linear com damping.

Através do Capítulo I nota-se que originalmente a equação KdV tem a forma da equação (1.1) adicionado o termo de damping. A partir da linearização em torno da solução  $u \equiv 0$  obtém-se a equação linear (1.2) com ou sem termo de damping dependendo se  $a(x) \equiv 0$  ou não.

Nota-se, no entanto, que o Capítulo III é apresentado de forma inversa à do Capítulo I: inicialmente o estudo é realizado sobre a equação linear sem termo de damping (isto é,  $a(x) \equiv 0$ ); em seguida, considera-se  $a(x) > 0$ ; e finalmente, a adição do

termo não linear completa a demonstração.

As justificativas para esta abordagem estão nas primeira e segunda propriedades teóricas, provadas em (21), onde, na primeira, o termo de damping é usado para se obter o decaimento da energia sob um certo conjunto problemático, e na segunda, o termo de damping ajuda no decaimento da equação não-linear quando o dado inicial tem uma amplitude alta na norma de  $L^2(0, L)$ . Objetivou-se então, comprovada sua importância, captar a influência do damping na existência e unicidade da equação. Como era de se esperar, as conclusões sobre existência e as de unicidade não foram afetadas pela inclusão do damping. Isto é, o termo de damping não precisou ser incluído para garantir os resultados de existência e unicidade.

No Capítulo IV (Análise Numérica da Equação Linear) o objetivo novamente foi captar a influência do termo de damping, mas, dessa vez, nas estimativas de convergência dos métodos numéricos aplicados na equação KdV linear.

Começou-se com as estimativas para equação linear sem termo de damping, a validação computacional do método e dos resultados teóricos. Em seguida o mesmo procedimento foi feito para a equação linear com o termo de damping. Assim, validado o método, fez-se a simulação do problema homogêneo.

Obteve-se que o termo de damping não influencia a ordem de convergência espacial obtida ( $O(h)$  em todos os casos), independente da sua localização  $\omega \subset (0, L)$ . No entanto, nota-se pelo enunciado do Teorema (4.4) que o passo de tempo  $\Delta t$  é inversamente proporcional à constante  $a_0$  que satisfaz  $a(x) \geq a_0 > 0$ .

Por fim, a última seção do Capítulo IV mostra os resultados de simulação da primeira propriedade teórica. São notáveis os efeitos do damping sobre o decaimento da energia quando  $L \in \{2\pi\sqrt{\frac{k^2+kl+l^2}{3}}, k, l \in \mathcal{N}\}$  e quando a condição inicial  $u_0(x)$  satisfaz (4.80). Quanto à influência da aproximação de  $\pi$ , notou-se que há discrepância entre energia mínima e máxima à medida que aumenta-se o número de casas decimais da aproximação. Na tabela 4.4 nota-se que quando são atingidas 15 casas há uma estabilização dos valores de energia. Isso ocorre porque um computador normalmente aproxima números com até 12 ou 15 casas decimais, ou seja, mesmo inserindo um

número com 16 ou 19 casas, todas além da décima quinta são descartadas. Softwares profissionais, no entanto, fazem uso de bibliotecas especiais que melhoram a aproximação.

No Capítulo V (Simulação Numérica da Equação Não-linear) o foco foi a equação KdV não-linear, com e sem damping.

Na primeira seção são mostrados a formulação matricial e os resultados de convergência de ambas as linearizações. Validado o método, na segunda seção os resultados de convergência do problema homogêneo são exibidos. A linearização do termo  $uu_x$  não se mostrou satisfatória no sentido da convergência para a solução exata à medida que a malha era refinada. Por outro lado, a linearização de  $u_x$  possui comportamento muito satisfatório neste sentido.

Por fim, na última seção do Capítulo V foram apresentados os resultados de simulação da segunda propriedade teórica. O efeito do damping sobre o decaimento da energia quando o dado inicial possui alta amplitude é claramente perceptível.

## REFERÊNCIAS

- [1] Ames, William: *Numerical methods for partial differential equations*, Computer science and scientific computing - Academic Press, 1992.
- [2] Benoît Jacob; Gaël Guennebaud: *Eigen Library*. Disponível em: <http://eigen.tuxfamily.org/index.php?title=Mainpage>.
- [3] Brezis, Haim: *Analyse Fonctionnelle*, Masson, 1983.
- [4] Cecka, C.; Lew, A.; Darve, E.: *Introduction to assembly of finite element methods on graphics processors*, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, volume 10, 2010.
- [5] Clark, Mauro Rodrigues: *Aspectos Teóricos e Numéricos sobre a Equação de Benjamin-Bona-Mahony Viscosa*, Instituto de Matemática - UFRJ, 2008, Dissertação de Mestrado.
- [6] Demmel, J.; Eisenstat, S.; Gilbert, J.; Li, X.; Liu, J.: *A supernodal approach to sparse partial pivoting*, SIAM J. Matrix Analysis and Applications, volume 20, 1999, (720-755).
- [7] Foster, Ian: *Designing and building parallel programs: concepts and tools for parallel software engineering*, Addison-Wesley, 1995.
- [8] Gaster, B.; et al.: *Heterogeneous Computing with OpenCL*, Elsevier Inc., 2011.

- [9] Gockenbach, Mark: *Understanding and Implementing the Finite Element Method*, SIAM, 2006.
- [10] Haberman, Richard: *Elementary applied partial differential equations: with Fourier series and boundary value problems*, Prentice Hall, 1998.
- [11] Hughes, Thomas: *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, Dover Publications, 2000.
- [12] Johnson, Claes: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987.
- [13] Juan Soulié: *Cplusplus*. Disponível em: <http://www.cplusplus.com>.
- [14] Kreiszig, Erwin: *Introductory Functional Analysis With Applications*, Wiley India Pvt. Ltd., 2007.
- [15] Kitware: *VTK - Visualization Toolkit*, Disponível em: <http://www.vtk.org/doc/release/5.6/html/annotated.html>.
- [16] Korteweg, Diedrik J.; de Vries, Gustav: *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. 539 (1895), 422-443.
- [17] Larkin, Nicolai: *Korteweg-de Vries and Kuramoto-Shivashinsky equations on bounded domains*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, volume 297, 2004 (169-185).
- [18] Ma, Heping; Sun, Weiwei: *Optimal Error Estimates of the Legendre-Petrov-Galerkin Method for the Korteweg-de Vries Equation*, SIAM Journal on Numerical Analysis, volume 39, 2002, (1380-1394).
- [19] Medeiros, L. A.; Mello, E. A.: *Integral de Lebesgue*, Instituto de Matemática - UFRJ, 2003.

- [20] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M.: *Introdução aos Espaços de Sobolev e as Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática - UFRJ, 1989.
- [21] Menzala, G. P.; Vasconcellos, C. F.; Zuazua, E.: *Stabilization of the Korteweg-De Vries equation with localized damping*, Q. Appl. Math., volume LX, p. 111-129, 2002.
- [22] Meyers, Scott: *Effective C++: 55 specific ways to improve your programs and designs*, Addison-Wesley, 2005.
- [23] Meyers, Scott: *Effective STL: 50 specific ways to improve your use of the standard template library*, Addison-Wesley, 2001.
- [24] Meyers, Scott: *More Effective C++: 35 New Ways to Improve Your Programs and Designs*, Pearson Education, 1995.
- [25] Nokia: *Qt*. Disponível em: <http://doc.trolltech.com/4.3/classes.html>.
- [26] Pazoto, Ademir F.: *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, ESAIM Control Optimization and Calculus Variations, v. 11, n. 3, p. 473-486, 2005.
- [27] Press, W.; Teukolsky, S.; Vetterling, W.; Flannery, B.: *Numerical Recipes in C++*, Cambridge University Press, 2007.
- [28] Quarteroni, A.; Sacco, R.; Saleri, F.: *Numerical Mathematics*, SPRINGER VERLAG, 2006.
- [29] Reddy, J. N.: *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill series in mechanical engineering, 2006.
- [30] Rincon, M. A.; Liu, I-Shih; *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, Instituto de Matemática - UFRJ, 2011, 3º edição.

- [31] Rincon, M. A.; Límaco, J.; Vale, R.: *Analysis and Numerical Solutions of Benjamin-Bona-Mahony equation with moving boundary*, Applied Analysis and Computation, Vol. 216, Issue 1, p. 138-148, 2010.
- [32] Rosier, Lionel: *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries Equation on a Bounded Domain*, Control, Optimization and Calculus of Variations, volume 2, p. 33-55, 1997.
- [33] Sanders, J.; Kandrot, E.: *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming*, Pearson Education, 2010.
- [34] Silva, A.; Rincon, M. A.: *Analysis and Numerical Simulations of Viscous Burgers Equation*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 32(7), p. 1-22, 2011.
- [35] Stroustrup, Bjarne: *The C++ programming language*, Addison-Wesley, 1997.
- [36] Wheeler, M. F.: *A priori  $L_2$  error estimate for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations*. SIAM J. Numer. Anal. 10, 723-759, 1973.

## APÊNDICE A COMENTÁRIOS SOBRE O SOFTWARE

O objetivo deste apêndice é versar sobre o software implementado para suportar os resultados numéricos obtidos neste trabalho. São cobertos itens desde motivação até detalhes de otimização utilizados.

### A.1 Motivação

Alguns autores sugerem que atualmente uma nova ciência emana dos campos comuns da Física, Matemática e Computação: a Ciência da Simulação.<sup>1</sup> Cientistas dessa nova disciplina atuariam em campos desde a Modelagem Física e Computacional até a utilização de conceitos de Computação de Alto Desempenho para a simulação eficiente dos modelos propostos.

Este software foi concebido visando a inserção (pelo menos em parte) do autor neste novo ramo da ciência.

E porquê C++, Qt, Eigen e VTK ao invés de MatLab, Maple ou Mathematica? Resposta: o meio industrial é o segmento mais interessado no desenvolvimento dessa área

---

<sup>1</sup>Fato semelhante ocorreu na década de 60 com a Ciência da Computação emergindo da Matemática Aplicada e da Engenharia Elétrica

de pesquisa e no contexto nacional são pouquíssimas as empresas que investem na obtenção desses softwares já consolidados (menor ainda é o número de empresas que podem investir nisso). Faz-se então necessária a formação de profissionais capazes de construir seus próprios códigos, quando necessário, e/ou de agregar os blocos de uso livre <sup>2</sup>.

## A.2 Descritivo das classes e suas funcionalidades

Apesar deste software não agregar uma complexidade técnica que fizesse jus a uma detalhada descrição para fins gerenciais, faz-se necessária uma descrição breve das classes implementadas e alguns comentários pertinentes sobre as funcionalidades.

(I) *KdV.h*: principal classe do software. Nesta são instanciados todos os objetos das classes abaixo e também é realizado todo o fluxo de trabalho em prol da solução.

(II) *PreSimulationProcessData.h*: estrutura que armazena todos os dados de entrada do software. O objeto dessa classe é argumento de entrada para outros objetos que devem ser instanciados de acordo com cada caso a ser simulado.

(III) *Function1D.h*: implementação das funções polinomiais através de 'functors', um tipo de objeto que reimplementa o método 'operator()' de tal maneira que sua utilização o confunde com uma função. No entanto, seu uso como argumento de entrada para outras funções é muito mais eficiente e muito mais elegante. 'Function1D' na verdade é uma classe abstrata que possui as classes 'Polynomial' e 'Polynomial2' como derivadas. O uso de herança neste caso permite a implementação de novos tipos de funções sem a necessidade de modificação nos métodos que as utilizam.

(IV) *Element.h*: elemento geométrico, as funções base e as matrizes locais.

(V) *FiniteElementSpace.h*: núcleo operacional do software. Aqui é construída a malha computacional bem como o preenchimento das matrizes globais e do vetor

---

<sup>2</sup>As bibliotecas Qt e VTK possuem uso livre para fins acadêmicos e a biblioteca Eigen possui uso livre para todos os fins.

com o dado inicial, o cálculo dos autovetores do problema de Rosier (vide Capítulo 4) e a avaliação pontual das soluções.

(VI) *NumericalPackage.h*: caixa de ferramentas numéricas utilizadas, tais como o cálculo da quadratura de Gauss, as normas das matrizes para o cálculo dos erros.

(VII) *ShowResults.h*: visualização das matrizes como arquivo de texto.

(VIII) *Visualization.h*: visualização gráfica dos resultados.

(IX) *Problem.h*: problema matemático a ser utilizado na validação dos métodos numéricos, tais como dado inicial, solução exata e sua primeira derivada espacial, função  $f(x, t)$ .

(X) *KdV.ui*: arquivo do Qt que implementa a interface com o usuário.

### A.3 Descrição da interface do usuário

Mesmo para um software de baixa complexidade e poucos dados de entrada, a confecção de uma interface deixa sua utilização mais amigável.

Na Figura (A.3) é mostrada a tela inicial do software. Nesta são definidos os parâmetros da equação e são inseridos os dados de simulação. Segue uma breve explicação do que é configurado em cada opção.

(I) *Equation*: equação linear ou não-linear (no último caso, escolhe-se o tipo de linearização de  $u(x)$  ou  $u_x(X)$ ).

(II) *Type*: a opção '*Homogeneous*' configura  $f \equiv 0$ , enquanto a opção '*Accuracy Text*' faz  $f = u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u$  no caso linear e insere o termo  $uu_x$  no caso não-linear.

(III) *Initial value*: escolhendo '*Rosier's ODE solution*' o dado inicial será a solução do problema de autovalor dado por (4.80); a opção '*low amplitude*' indica que o dado inicial será (4.44); por fim, a opção '*high amplitude*' indica que o dado inicial é  $u_0(x) = x(x - L)^2$ .

(IV) *Simulation setup*: os dados principais a serem utilizados pelos métodos são

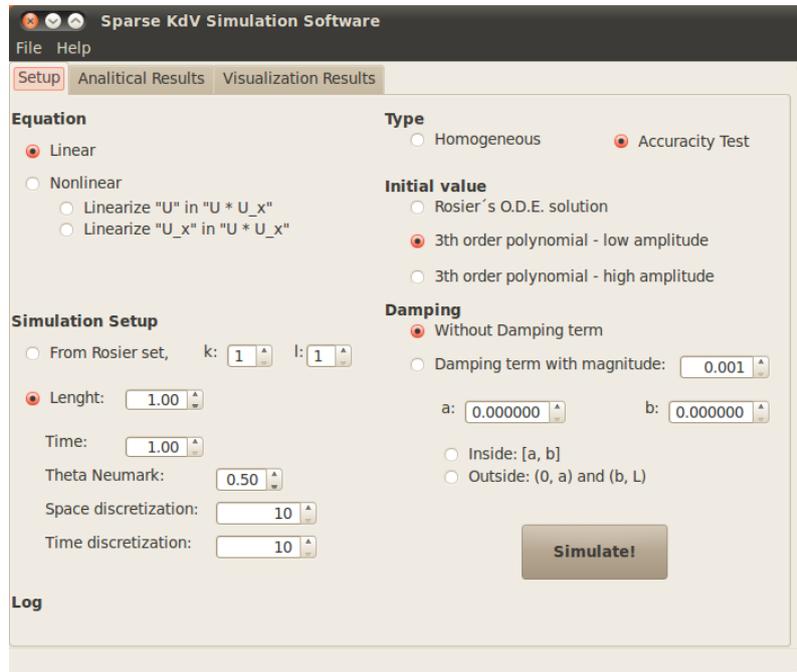


Figura A.1: Tela inicial. Setup da simulação.

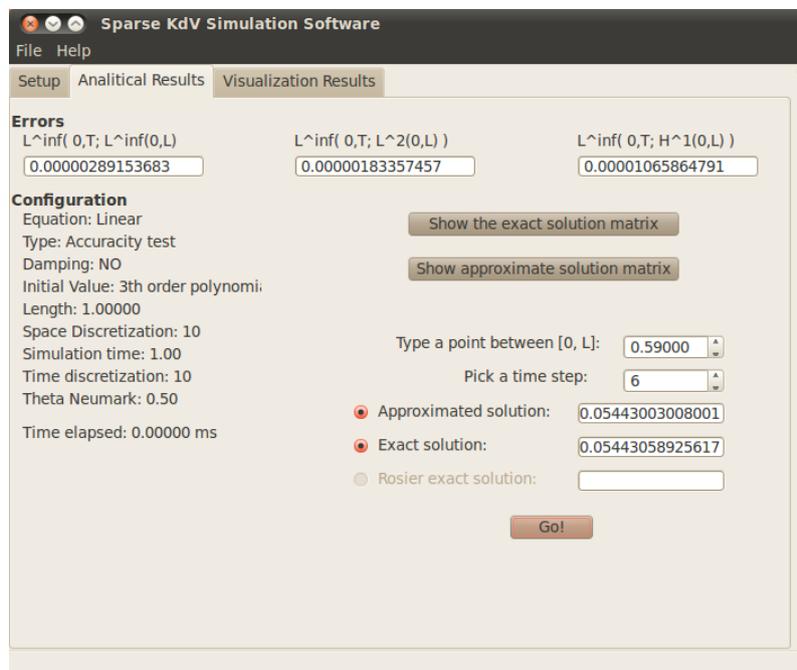


Figura A.2: Tela dos resultados analíticos.

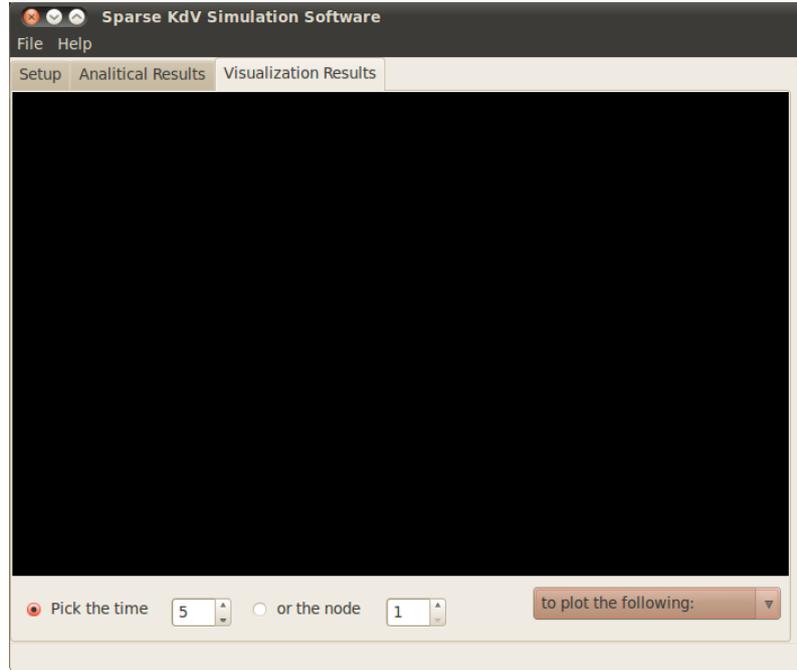


Figura A.3: Tela dos resultados de visualização gráfica.

configurados neste bloco, tais como comprimento do espaço  $L$  (*'Length'* ou *'From Rosier set'*), o intervalo de tempo  $T$  (*'Time'*), parâmetro de Newmark (*'Theta Newmark'*), número de elementos finitos (*'Space discretization'*) e número de passos no tempo (*'Time discretization'*).

(**V**) *Damping* : indica se há ou não damping, sua amplitude e seu intervalo de atuação. Após inserir os valores de  $a$  e  $b$ , caso se indique *'Inside'* o damping atuará sobre  $(a, b)$ ; caso se indique *'Outside'*, o damping atuará sobre  $(0, a) \cap (b, L)$ .

Na Figura (A.3) tem-se a tela dos resultados analíticos.

Em *'Errors'* são mostrados os resultados comparativos entre a solução exata e a solução aproximada obtida pelo método nas normas  $L^\infty(0, T; L^\infty(0, L))$ ,  $L^\infty(0, T; L^2(0, L))$  e  $L^\infty(0, T; H^1(0, L))$ , respectivamente.

Em *'Configuration'* é mostrado um resumo dos dados da simulação.

Os botões *'Show the exact solution matrix'* e *'Show the approximate solution matrix'* servem para exibir as matrizes exata e aproximata, respectivamente, em formato

texto.

Por fim, inserindo-se um ponto entre  $[0, L]$  e tomando-se um passo de tempo dentro dos limites é possível calcular o valor pontual tanto da solução exata (quanto cabível) quanto da solução aproximada.

Na Figura (A.3) é mostrada a tela dos resultados de visualização gráfica.

Inserindo-se um passo de tempo (*'Pick a time'*) e/ou um nó da discretização (*'or a node'*) pode-se obter os seguintes gráficos a partir do bloco *'to plot the following'*:

(I) *'Approximate solution'*: solução aproximada. Permite-se fixar um passo de tempo e plotar o domínio espacial OU fixar um nó no espaço e plotar o domínio temporal.

(II) *'Exact solution'*: solução exata. Idem o anterior para as possibilidades oferecidas.

(III) *'Both solutions'*: ambas soluções exata e aproximada. Idem o anterior para as possibilidades oferecidas.

(IV) *'Both solutions + zoom'*: ambas as soluções mas com zoom de 5000 vezes no domínio espacial iniciando-se no nó escolhido.

(V) *'Energy'*: energia da solução aproximada. Não é necessário escolher passo de tempo ou nó para visualizar esse resultado.

## A.4 Recursos não utilizados neste programa

Muitas técnicas amplamente difundidas não foram utilizadas neste programa pois demandam um tempo alto de aprendizado, análise e implementação.

A principal delas é o paralelismo (7).

Há uma vasta bibliografia sobre como utilizar o paralelismo no contexto do Método dos Elementos Finitos. Em (4), os algoritmos para montagem das matrizes de rigidez, massa e vetor força por meio de GPU (CUDA, (33)) são descritos.

A biblioteca SuperLU (ver (6)) utilizada neste programa, que implementa solvers esparsos para solução de sistemas lineares, oferece uma versão paralelizada com

MPI (memória distribuída) e OpenMP (memória compartilhada). Infelizmente a biblioteca Eigen (ver (2)) não suporta o paralelismo ainda.

Para a solução de problemas de valores iniciais, a biblioteca ODEINT oferece implementação por meio de GPU (CUDA).

Entretanto, as linguagens MPI (ou OpenMP) e CUDA atuam sobre diferentes tipos de hardware (o primeiro, CPU; o segundo, GPU) e não são usadas concomitantemente. Essa situação está sendo contornada pelo desenvolvimento da linguagem OpenCL (ver (8)) que torna possível executar um código paralelo tanto na CPU quanto na GPU.