UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

JULIANA CASTANON XAVIER

Análise e Computação do Modelo Não Linear da Equação de Korteweg-de Vries

Prof. Dr. Mauro Antonio Rincon
Orientador

Prof. Dr. Daniel Gregorio Alfaro Vigo
Co-orientador

Rio de Janeiro, Maio de 2012

Ficha Catalográfica

Xavier, Juliana Castanon

Análise e Computação do Modelo Não Linear da Equação de Korteweg-de Vries / Juliana Castanon Xavier. – Rio de Janeiro: UFRJ IM, 2012.

123 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, BR–RJ, 2012.

Orientador: Mauro Antonio Rincon; Co-orientador: Daniel Gregorio Alfaro Vigo.

I. Antonio Rincon, Mauro. II. Gregorio Alfaro Vigo, Daniel. III. Título.

Análise e Computação do Modelo Não Linear da Equação de Korteweg-de Vries

Juliana Castanon Xavier

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado por:

Prof. Dr. Mauro Antonio Rincon (Orientador)

Prof. Dr. Daniel Gregorio Alfaro Vigo (Co-orientador)

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto

Profa. Dra. Juliana Vianna Valério

Prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira

Profa. Dra. Regina Célia Cerqueira de Almeida

Rio de Janeiro, Maio de 2012

Aos meus pais e irmão...

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, por ter me dado forças durante todo esse período, por não ter me deixado desistir mesmo nos momentos mais difíceis.

À minha família, em especial meus pais Iolanda e Joel, e meu irmão Joel, por acreditarem em mim e sempre estarem ao meu lado em todos os momentos. Pelo incentivo, pela paciência e pela compreensão essenciais para que eu pudesse concluir esse trabalho.

Ao meu companheiro e maior incentivador nos últimos tempos: Rodrigo. Obrigado por acreditar em mim e não me deixar desanimar. Você é o melhor presente que a matemática me deu.

Aos meus amigos, em especial aqueles que fiz nesses últimos anos: Fernanda, Giselle, Roberto, Aline, Patrick, Bernardo. Obrigado por todas as horas compartilhadas, por todos os cafezinhos de fim de tarde no Burguesão. Enfim, obrigado pelo apoio de sempre.

Aos novos amigos que o mestrado me proporcionou, Raphael e Rômulo, pelas incontáveis horas de descontração falando do nosso assunto preferido depois de matemática: academia.

Aos meus queridos orientadores Mauro Rincon e Daniel Alfaro pela oportunidade de trabalharmos juntos e pelos conhecimentos transmitidos durante esses anos. Espero que nossa parceria ainda continue por muito tempo.

À todo corpo docente do PPGI, em especial Juliana, Marcello e Luziane, pelas conversas, incentivo e colaborações. Considero vocês três como grandes amigos.

Ao tão competente secretário do PPGI, Aníbal, pela pronta assistência prestada durante todo o curso.

Aos companheiros de risadas e de multirões de organização do LC3, em especial Rabi, Guilherme, Júlio e Gabriel, e à todos que de alguma maneira fazem parte dessa história.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho serão estudadas analítica e numericamente a equação de Korteweg-de Vries unidimensional em um domínio limitado sobre o efeito de um mecanismo dissipativo agindo sobre o domínio $(0, L)$. Serão demonstradas a existência e a unicidade de soluções dos modelos linear e não linear, utilizando para isto o método de Galerkin. Para a análise numérica será utilizado o método dos elementos finitos na variável espacial, usando como base polinômios de Hermite, associado ao método das diferenças finitas na variável temporal, utilizando o esquema de Crank Nicolson para a resolução do sistema linear obtido. Soluções aproximadas serão obtidas no caso linear e não linear e será analisada a influência desse mecanismo dissipativo no decaimento da energia associada ao problema.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas, Polinômios de Hermite, Equação de KdV.

Analysis and Computation of Nonlinear Korteweg-de Vries Equation

RESUMO

In this work will be studied analytically and numerically the one-dimensional KdV equation in a bounded domain under the effect of a damping acting on the domain $(0, L)$. We shall demonstrate the existence and uniqueness of solutions of linear and nonlinear models using Galerkin method. For the numerical analysis we shall use the finite element method in the variable space, using as a basis of Hermite polynomials, associated with the method of finite differences in time, using Crank Nicolson scheme for solving the linear system obtained. Approximate solutions will be obtained in linear and nonlinear cases and will be examined the influence of the damping term in the decay of the energy associated with the problem.

Palavras-chave: Finite Element Method, Finite Difference Method, Hermite Polynomial, KdV Equation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma onda solitária é uma onda de água rasa que consiste do deslocamento singular da água acima do nível médio da água. Podemos observar tal fenômeno em situações como propagação de tsunamis, escoamentos costeiros e na pororoca, fenômeno que ocorre em certos períodos do ano na região amazônica.

O primeiro relato de observação de uma onda solitária foi feito em 1834, quando o engenheiro naval J. Scott Russel observou no canal que liga Edinburgh e Glasgow, Fig. 1.1, uma onda se propagando na superfície da água com velocidade constante de cerca de 15 Km/h por mais de 3 Km. Russel relatou sua observação em um jornal da Associação Britânica em 1844 (RUSSEL (1844)). Observar esse fato inspirou Russel a realizar uma série de testes, como pode ser visto na Fig. 1.2, a fim de provar a existência dessas ondas e estudá-las.

Figura 1.1: Canal Edinburgh-Glasgow (Fonte: http://www.geograph.org.uk)

Figura 1.2: Aqueduto J. Scott Russel (Fonte: http://www.ma.hw.ac.uk/solitons)

O objetivo dos testes era determinar um bom modelo matemático para descrever esse fenômeno. Russel obteve através de seus experimentos uma equação que descrevia essa onda, mas que entrava em contradição com a equação que havia sido obtida por cientistas como Airy e Stokes.

Muitas perguntas ainda precisavam ser respondidas. Foi quando por volta de 1871, Lord Rayleigh e Boussinesq resolveram esse problema, e deram uma prova matemática da existência da onda solitária, que pode ser encontrada no artigo BOUSSINESQ (1872). A comunidade matemática, não satisfeita, não aceitou o resultado obtido por Rayleigh e Boussinesq. Isso motivou Korteweg e seu aluno de Vries a investigarem novamente a existência dessa onda. Eles deduziram em 1895, no artigo KORTEWEG; DE VRIES (1895), a seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2}\frac{c_0}{h}u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{1.1}$$

onde c_0 é a velocidade de propagação da onda, h é a profundidade do canal e $u = u(t, x)$ é a elevação da água.

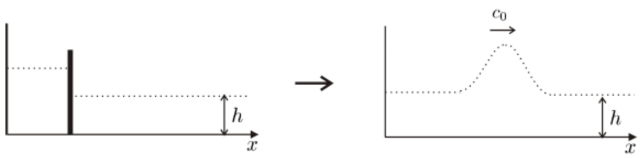

Figura 1.3: Produzindo uma onda solitária.

Fazendo uma mudança de variáveis, e adotando uma notação mais compacta, podemos escrever a equação (1.1) como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{1.2}$$

As equações de evolução não lineares que modelam propagação de ondas levam em conta tanto os efeitos lineares quanto dispersivos. A equação (1.2) tem um termo não linear $\left(6u\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, relacionado com a velocidade da onda, e um termo dispersivo $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$, relacionado com a amplitude da onda. Quando esses dois efeitos estão em equilíbrio, dão origem ao comportamento estável estacionário e ocorre o surgimento das ondas solitárias.

Desde a última metade do século passado, esse problema voltou a chamar atenção da comunidade científica devido ao aparecimento dos mesmos modelos em contextos como física dos plasmas, sistemas ópticos, redes cristalinas, cadeias atômicas e macromoléculas em meios elásticos.

Nesse trabalho, consideraremos a equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado $(0, L)$ na presença de um termo de mecanismo dissipativo $a(x)$ agindo em $(0, L)$, dado por:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + a(x)u = 0 \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) \quad para \quad x \in (0, L) \\ u(t, 0) = u(t, L) = u_x(t, L) = 0 \quad para \quad t \in (0, T) \end{cases} \tag{1.3}$$

em que $a(x) \geq a_0 > 0$ em $(0, L)$, com $a(x) \in L^\infty(0, L)$ e $u_0 \in L^2(0, L)$.

O termo $a(x)$ é um termo que reduz a oscilação de um sistema. É modelada como uma força sincronizada com a velocidade mas em direção oposta. Como já dito, nesse trabalho estamos considerando esse termo agindo em todo o domínio $(0, L)$, mas foi mostrado no artigo MENZALA; ZUAZUA; VASCONCELLOS (2002) que se esse termo agir em um subconjunto $\omega = (0, \delta) \cup (L - \delta, L) \subset (0, L)$ o decaimento da energia ainda continua sendo verificado. Algum tempo depois, esse resultado foi estendido para qualquer $\omega \subset (0, L)$, resultado este que pode ser encontrado no artigo PAZOTO (2005).

A solução aproximada de uma equação diferencial parcial qualquer pode ser obtida por várias classes de métodos, entre eles o método das diferenças finitas e o método das projeções. O método das projeções consiste em obter uma solução aproximada da equação diferencial usando uma combinação linear finita de funções conhecidas, usualmente chamadas de funções base. A projeção da solução exata, que pertence a um espaço de dimensão infinita, sobre o espaço de dimensão finita, é a solução aproximada.

Neste trabalho, utilizaremos o método dos elementos finitos, que é baseado no método das projeções, para determinar a solução aproximada do problema. Essa solução pode, de maneira geral, ser escrita como uma combinação linear das funções da base, isto é,

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \phi_i(x) \tag{1.4}$$

Conhecidas as funções base $\phi_i, \;\; i = 1, 2, ..., m$, o problema passa a ser determinar os coeficientes c_i da solução dada em (1.4). No nosso caso, esses coeficientes serão obtidos via método de Galerkin.

Serão feitas uma análise teórica e numérica da equação de KdV. Na análise teórica, feita para o modelo não linear dado na equação (1.3), serão demonstradas a existência e unicidade de solução forte do problema partindo de uma equação regularizada, como no artigo LARKIN (2004) e será feito um estudo sobre o decaimento da energia do sistema. Com respeito à análise numérica, feita no caso linear, ou seja, a equação (1.3) sem o termo uu_x, o objetivo será obter estimativas para o erro entre o cálculo da solução exata e a solução aproximada. Essa análise será feita nos tempos contínuo e discreto, considerando a aplicação do método dos elementos finitos, utilizando os polinômios de Hermite como base do espaço de funções ao qual pertence a solução.

No que se refere à parte computacional, serão realizadas diversas simulações numéricas. A solução aproximada será obtida nos casos linear e não linear. Nesta parte do trabalho, o objetivo será comprovar as propriedades analíticas dessa equação. O programa que determina essa solução foi desenvolvido em Matlab, e utilizou conjuntamente os métodos dos elementos finitos e das diferenças finitas.

Essa dissertação consta de 6 capítulos. No capítulo 2 apresentamos algumas notações, definições e resultados importantes que serão utilizados nos capítulos posteriores. O capítulo 3 será voltado para a análise teórica da equação de KdV. Nesse capítulo explicita-se o conceito básico do método dos elementos finitos juntamente com o método de Galerkin. Serão enunciados e demonstrados os resultados referentes a existência e unicidade de solução. Ainda no capítulo 3 será introduzida a formulação variacional do problema e feito o estudo sobre o decaimento da energia do sistema.

No capítulo 4 será feito um estudo numérico do problema no caso linear. Serão enunciados e demonstrados dois resultados, um com relação ao tempo contínuo e outro relacionado ao tempo discreto, que tratam da estimativa do erro entre o cálculo da solução exata e aproximada do problema linear da KdV.

O capítulo 5 será dedicado a resolução numérica do problema aproximado. Serão definidos os polinômios de Hermite e a solução aproximada do problema com relação à essa base. Também será discutido o método de diferenças finitas associado ao esquema de Crank-Nicolson para a discretização do tempo. Serão mostradas as construções das matrizes e tensores necessárias para a resolução aproximada do problema nos casos linear e não linear.

E por fim, o capítulo 6 será dedicado as simulações numéricas e conclusões do trabalho. Serão mostrados gráficos e tabelas que validam o método aplicado nesse trabalho, com a comprovação das estimativas obtidas nos capítulos anteriores. Serão também mostradas algumas simulações nos casos linear e não linear, que comprovam o decaimento da energia do sistema. E então, serão discutidas as conclusões do trabalho e comentários gerais.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e alguns resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores. As demonstrações de tais resultados serão omitidas, mas podem ser encontradas nas referências bibliográficas dadas.

2.1 Análise Funcional

2.1.1 Funcionais e Operadores Lineares - Espaço Dual

Seja X um espaço normado sobre $\mathbb{R}$. Um funcional linear sobre X é uma aplicação $f \ : \ X \longrightarrow \mathbb{R}$ linear.

Denotamos por $X^{'}$ o espaço dual de X dado pelo conjunto de todas as aplicações $f \ : \ X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas. O espaço $X^{'}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais,

$$\begin{array}{c}(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in X \\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in X, \ \alpha \in \mathbb{R}\end{array}$$

A norma em X' é dada por:

$$\|f\|_{X'} = sup\{|f(x)|; \|x\|_X \leq 1\}$$

O espaço $(X', \|.\|_{X'})$ é um espaço de *Banach*. Quando $f \in X'$ e $x \in X$, denotaremos $\langle f, x\rangle$ ao invés de $f(x)$. Dizemos que $\langle ., .\rangle$ é um produto escalar na dualidade X', X.

Sejam X e Y dois espaços de *Banach*. Um operador linear é uma aplicação $T\ : X \longrightarrow Y$ linear. Denotaremos por $\mathcal{L}(X.Y)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y com respeito a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X.Y)} = \underset{x \in X}{sup}\{\|T(x)\|; \|x\|_X \leq 1\}$$

Proposição 1. *Se* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$*,* X *e* Y *espaços de Banach. Suponhamos que para cada* $x \in X$ *existe* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$*. Então temos*

i) $\underset{n}{sup}\|T_n\|_{\mathcal{L}(X.Y)} < \infty$

ii) $T \in \mathcal{L}(X.Y)$

iii) $T_{\mathcal{L}(X.Y)} \leq \underset{n\to\infty}{lim\ inf}\|T_n\|_{\mathcal{L}(X.Y)}$

Prova. Ver BREZIS (1984) □

2.1.2 Topologias Fraca e Fraca-Estrela

Seja X um conjunto não vazio e $\tau \subset \rho(X)$. Suponhamos que:

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} A_\alpha \in \tau$, se $A_\alpha \in \tau \ \forall \alpha \in \mathbb{I}$

iii) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$, se $A_i \in \tau$, $i = 1, 2, ..., n$

onde $\rho(x)$ denota o conjunto das partes de X. Nesse caso, dizemos que τ forma uma topologia sobre X e o par (X, τ) é chamado de espaço topológico.

Definição 1. *Seja X um espaço de Banach. A topologia fraca sobre X, denotada por $\sigma(X, X')$, é a topologia menos fina sobre X, que torna contínua todas as aplicações $f \in X'$.*

Remark 1. *Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X, denotaremos por $x_n \rightarrow x$, a convergência de x_n para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$.*

Proposição 2. *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Então,*

i) *$x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$ se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \ \forall f \in X'$;*

ii) *se $x_n \rightarrow x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$;*

iii) *se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\|_X \leq \lim_{n\to\infty} inf \|x_n\|_X$;*

iv) *se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(X, X')$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em X', isto é, $\|f_n - f\|_{X'} \rightarrow 0$, então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.*

Prova. Ver BREZIS (1984) □

Seja X um espaço métrico. Dizemos que X é separável se ele possui um subconjunto enumerável e denso.

Proposição 3. *Seja X um espaço de Banach separável. Consideraremos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X'. Então, existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fraco-estrela em X'.*

Prova. Ver BREZIS (1984) □

2.1.3 Espaços L^p

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, como um conjunto de funções mensuráveis dado por:

$$L^p(\Omega) = \left\{ u\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \int_\Omega |u(x)||^p dx < \infty \right\}$$

Se $p = \infty$, definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o conjunto de funções definidas de Ω em $\mathbb{R}$ mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω, isto é, $|u| \leq C$ quase sempre em Ω.

Os espaços L^p, para $1 \leq p < \infty$ e L^∞ são espaços de *Banach* com as normas dadas respectivamente por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$
$$\|u\|_{L^\infty} = \underset{x\in\Omega}{sup\ ess}|u(x)| = inf\ \{C : |u(x)| \leq C\ q.s.\ em\ \Omega\}$$

Se $p = 2$ temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

Temos que $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < \infty$ e que é separável para todo $1 \leq p < \infty$.

O teorema abaixo identifica o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ com $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1 (Reresentação de Riez)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto,* $1 < p < \infty$*,* $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*. Então, existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que:*

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

e

$$\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^q(\Omega}$$

Prova. Ver BREZIS (1984) □

Se $p = \infty$ então,

Teorema 2. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$*. Então, existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que:*

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^1(\Omega)$$

e

$$\|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} = \|u\|_{L^\infty(\Omega}$$

Prova. Ver BREZIS (1984) □

2.2 Espaço das Distribuições Escalares

Definição 2. *Dada uma função contínua,* $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, onde* Ω *é um aberto, denomina-se* suporte *de* φ *ao fecho em* Ω *do conjunto dos pontos* x *tais que* $\varphi(x) \neq 0$*. Simbolicamente*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}\ .$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω, com suporte compacto em Ω.

2.3 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha\varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima, será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que se uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ convergir, em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ, então,

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi\rangle$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω.

Dado um aberto Ω do $\mathbb{R}^N$ denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de *Lebesgue* em Ω, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ denota-se por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Neste espaço considera-se a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ ess } |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, é um espaço de *Banach*. Em particular, quando $p = 2$, tem-se que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* cuja *norma* e *produto interno* serão definidos e denotados, respectivamente por

$$|u| = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx.$$

Lema 1 (Du Bois Reymond)**.** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então* $\int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx = 0$ $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova. Ver MEDEIROS; MIRANDA (1989). $\square$

2.4 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

A sequência de distribuições escalares $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando

$$\langle T_\nu, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle \ \text{ em } \mathbb{R}, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad \text{para todo} \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2.5 Espaços de Sobolev

2.5.1 Convergência em L^p e no dual do L^p

Diz-se que uma sequência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será denotado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, é reflexivo. Para demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços $L^p(\Omega)$ consulte BREZIS (1984).

Teorema 3. *Sejam* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge quase sempre para* f *em* Ω, *e existe* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ *quase sempre em* Ω.

Prova. Ver BREZIS (1984). □

Definição 3. *Seja* H *um espaço de Hilbert. Chama-se* base Hilbertiana *de* H *uma sequência de elementos* (ω_n) *de* H *tais que*

i) $\|\omega_n\|_H = 1 \ \ \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \ \ \forall n, m,\ m \neq n;$

ii) *O espaço gerado pela* $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é denso em* H.

Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O *espaço de Sobolev de ordem* m , modelado sobre $L^p(\Omega)$ é por definção o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^p(\Omega)$ para as quais suas derivadas até a ordem m, no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p},\ 1 \leq p < \infty$$

e quando $p = \infty$, define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

Proposição 4. *Os espaços lineares* $W^{m,p}(\Omega)$ *equipados das respectivas normas acima são espaços de* Banach.

Prova. Ver ADAMS (2003),MEDEIROS; MIRANDA (1989). □

O espaçoo $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, que é representado por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)\,; D^\alpha u \in L^2(\Omega)\,, \forall\alpha, |\alpha| \leq m\right\}$$

cuja norma e produto interno são dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u,v) = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

O espaço $H^m(\Omega)$ com a estrutura topológica acima, é um espaço de *Hilbert*, continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ então $\varphi\big|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é o espaço denotado por $H^{-m}(\Omega)$. A caracterização de $W^{-m,p}(\Omega)$ é dada por:

Teorema 4. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Prova. Ver ADAMS (2003). □

Lema 2 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Prova. Ver MEDEIROS; MIRANDA (1989). □

Remark 2. *Usando a desigualdade de Poincaré conclui-se que em $H_0^1(\Omega)$ as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.*

2.5.2 Imersões em Espaços de Sobolev

Sejam V e H espaços de Hilbert tais que $V \subseteq H$ e seja $\iota : V \longrightarrow H$, a injeção canônica de V em H que a cada $v \in V$ associa $\iota(v) = v$ como elemento de H. Dizemos que o operador linear ι é o operador de imersão de V em H.

Dizemos que essa imersão é contínua, quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\|v\|_H \leq C\|u\|_V$, $\forall v \in V$.

Um exemplo simples é o caso em que $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, ou ainda $V = H^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, ou de uma maneira geral $V = H^m(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$.

2.6 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto $E \subset [0,T]$. Uma função vetorial $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, $i = 1, 2, ..., k$, dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, ..., k$. Define-se a integral de φ como sendo o vetor dado por

$$\int_0^T \varphi(t)\, dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\, \varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B}$ *-integrável*) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s. em $(0,T)$;

ii) $\displaystyle\lim_{k,m\to\infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X \, dt = 0.$

Neste caso, a integral de *Bochner* de u, é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \varphi_\nu(t)\, dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X.

Uma função vetorial $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X. Dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à *Lebesgue*.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lesbegue* em $(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H \, ds.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representaremos o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in$

$L^{\infty}(0,T)$. A norma em $L^{\infty}(0,T;X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ess} \, \|u(t)\|_X .$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, pode-se verificar que para cada $u \in [L^p(0,T;X)]'$, existe $\widetilde{u} \in L^{p'}(0,T;X')$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle \widetilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} \, dt.$$

No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^{\infty}(0,T;X')$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 4. *Seja $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A* derivada *de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T) .$$

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$ representa-se o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ munido da norma da *convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X .$$

Por $C^0_w([0,T];X)$ denota-se o *espaço das funções $u : [0,T] \longrightarrow X$ fracamente contínuas*, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X',X}$ é contínua em $[0,T], \forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$ para $\forall v \in H$.

Teorema 5 (Aubin-Lions)**.** *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1, $1 < p_0$, $p_1 < \infty$, e, W o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0) ;\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Prova. Ver LIONS (1969). □

Remark 3. *Uma conseqüência do Teorema de Aubin-Lions* 5 *é que se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0,T;B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W. Logo existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.*

2.7 Outros Resutados Úteis

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ e $F : D \to \mathbb{R}^N$. Diz-se que F satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando

- $F(t, \Upsilon)$ é mensurável em t, para cada Υ fixo;
- $F(t, \Upsilon)$ é contínua em Υ, para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|F(t, \Upsilon)| \leq m_K(t)$, para todo $(t, \Upsilon) \in D$.

Definição 5. *Uma solução no sentido* estendido *do problema de Cauchy*

$$\left| \begin{array}{l} X' = F\,(t, X) \\ \\ X\,(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

é uma função $\Phi = \Phi(t)$ absolutamente contínua tal que se tenha, para algum β real,

i) $(t, \Phi(t)) \in \mathbb{R}$, *$\forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$;*

ii) $\Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$ *para todo $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.*

Considere-se o retângulo $R = \left\{ (t, \Upsilon) \in \mathbb{R}^{N+1};\ |t - t_0| \leq a,\ |\Upsilon - \Upsilon_0| \leq b \right\}$, com $a, b > 0$. Então tem-se

Teorema 6 (Carathéodory)**.** *Seja $F : R \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R, então sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\left| \begin{array}{l} X' = F\,(t, X) \\ X\,(t_0) = \Upsilon_0 \end{array} \right. .$$

Prova. Consulte CODDINGTON; LEVISON (1981) □

Corolário 1 (Prolongamento de solução)**.** *Sejam $D = [0, \omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \left\{ \Upsilon \in \mathbb{R}^N; |\Upsilon| \leq b \right\}$, $b > 0$ e F nas condições de Carathéodory. Seja $\Phi\,(t)$ uma solução de*

$$\left| \begin{array}{c} X' = F\,(t, X) \\ X\,(0) = X_0,\ |X_0| \leq b \end{array} \right. .$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde $\Phi\,(t)$ está definida, se tenha, $|\Phi\,(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então Φ tem um prolongamento até $[0, \omega]$.

Prova. Consulte CODDINGTON; LEVISON (1981) $\square$

Lema 3 (Lions). *Sejam Q um aberto limitado do $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(Q)$, $1 < q < +\infty$, tal que $\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C$, $g_m \to g$ quase sempre em Q. Então $g_m \rightharpoonup g$ na topologia fraca de $L^q(Q)$.*

Prova. Ver LIONS (1969). $\square$

Teorema 7 (Densidade). *O espaço $C_0(\Omega)$, espaço das funções contínuas em Ω com suporte compacto em Ω é denso em $L^1(\Omega)$, isto é, para toda $u \in L^1(\Omega)$ e para todo $\epsilon > 0$ existe $v \in C_0(\Omega)$ tal que $\|u - v\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$.*

Teorema 8 (Sobolev). *Se $1 \leq p \leq n$, tem-se $W^{m,p}(\Omega)$ imerso em $L^p(\Omega)$ para* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$

Prova. Ver RIVERA (1999) $\square$

2.7.1 Desigualdades Importantes

Desigualdade de Cauchy-Schwartz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de quadrado integrável, então

$$|(f,g)_{L^2}| = \left| \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \right| \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^2\,dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |fg(x)|^2\,dx \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$$

Desigualdade de Hölder

Suponhamos que $p_i \geq 1$, $i = 1, 2, ..., m$ são tais que:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$$

Se $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, 2, ..., m$ então temos que $\prod_{i=1}^{m} f_i \in L^1(\Omega)$ e ainda

$$\int_\Omega \Big| \prod_{i=1}^{m} f_i(x) \Big| \, dx \leq \prod_{i=1}^{m} \left(\int_\Omega |f_i(x)|^{p_i} \, dx \right)^{\frac{1}{p_i}}$$

Desigualdade de Gronwall Contínua

Suponhamos que f, g e h são funções positivas satisfazendo

$$f(t) + h(t) \leq g(t) + c \int_a^t f(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Então temos que:

$$f(t) + h(t) \leq e^{c(t-a)} g(t)$$

Desigualdade de Gronwall Discreta

Seja k_n uma sequência de números reais não negativos. Considere uma sequência $\phi_n \geq 0$ tal que:

$$\phi_0 \leq g_0$$
$$\phi_n \leq g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} k_s \phi_s \; para \; n \geq 1$$

com $g_0 \geq 0$ e $k_s \geq 0$. Então, para todo $n \geq 1$ temos:

$$\phi_n \leq \left(g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s \right) EXP \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} k_s \right\}$$

Desigualdade de Young

Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q \geq 0$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, vale que:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Desigualdade de Ehrling

Suponhamos que Ω satisfaz a propriedade do cone uniforme (ver ADAMS (2003)) e seja $\epsilon_0 > 0$ qualquer. Então existe uma constante $\delta = \delta(\epsilon_0, m, p, \Omega)$ tal que para quaisquer $0 < \epsilon < \epsilon_0$, inteiro $0 \leq j \leq m-1$ e $u \in W^{m,p}(\Omega)$ vale a seguinte desigualdade:

$$\left(\sum_{|\alpha|<j} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq \delta\, \epsilon \left(\sum_{|\alpha|<m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} + \delta \epsilon^{\frac{-j}{m-j}} \|u\|_{L^p}$$

3 ANÁLISE TEÓRICA

Neste capítulo trataremos da análise sobre a existência e unicidade de solução de (1.3). Essa análise é baseada no artigo LARKIN (2004). Consideramos o problema dado em (1.3) acrescido de dois termos de regularização, como no seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + \nu(u_{xx} + u_{xxxx}) + a(x)u = 0 \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) \ , \quad x \in (0,L) \\ u(t,0) = \nu u_{xx}(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) + \nu u_{xx}(t,L) = 0 \ , \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{3.1}$$

Primeiramente vamos mostrar a existência de solução de (3.1) e em seguida, mostrar que a solução obtida tende a solução de (1.3), quando $\nu \to 0$. A prova de existência será feita através do método de Galerkin, cuja ideia será explicitada na próxima seção.

3.1 Método de Galerkin

O método de Galerkin é baseado no conceito de ortogonalidade de funções. Dizemos que duas funções integráveis u e v definidas em $[0, L]$ são ortogonais se:

$$(u, v) = \int_0^L u(x)v(x)dx = 0$$

Considere agora o problema de determinar uma função $u = u(x)$ que satisfaça, por exemplo,

$$\begin{cases} -u^{''}(x) + u(x) = f(x) \ em \ (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

e seja $r(x)$ a função resíduo de (3.2) dada por:

$$r(x) = -u^{''}(x) + u(x) - f(x) \qquad \forall x \in [0, L]$$

Observe que se $u(x)$ é solução exata do problema (3.2), então $r(x) = 0$. Logo a função resíduo é ortogonal a qualquer função e, em particular, as funções que compõem a base do espaço ao qual a solução u pertence. Contudo, quando queremos determinar a solução aproximada $u_m(x)$ da equação (3.2), não podemos garantir que o resíduo, nesse caso denotado por $r_m(x)$, seja ortogonal a qualquer função.

Sabemos entretanto, que a solução aproximada $u_m(x)$ pode ser escrita como uma combinação linear finita das funções da base do espaço ao qual pertence. Portanto, o método de Galerkin consiste em determinar a solução aproximada u_m de tal forma a preservar a ortogonalidade da solução exata, isto é, que a função resíduo no caso aproximado $r_m(x)$ seja ortogonal a todas as funções $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$ que compõem a base do espaço.

3.2 Existência e Unicidade de Solução

Antes de enunciar e demonstrar os dois principais resultados dessa seção vamos introduzir algumas notações e um lema, que serão utilizados ao longo da demonstração. Vamos denotar por:

$$\begin{aligned} &(u, v)(t) = \int_0^L u(x, t) v(x, t) dx \\ &\|u(t)\|^2 = (u, u)(t) = \|u\|^2_{L^2(Q)} \\ &D_j = \frac{\partial^j}{\partial x^j} \end{aligned}$$

e considerar o seguinte lema:

Lema 4. *Para todo $\nu > 0$ existem auto-funções do seguinte problema:*

$$\begin{aligned} \nu u_{xxxx} w_j = \mu_j w_j \\ w_j(0) = w_j(1) = \nu w_{jxx}(0) = w_{jx}(1) + w_{jxx}(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

que formam uma base para $H^4(0, L)$ ortonormal em $L^2(0, L)$.

Prova. Ver artigo LARKIN (2004) □

Seguem então, dois resultados referentes ao problema dado em (3.1).

Teorema 9. *Seja $\nu > 0$ e $u_0 \in H^4(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, $\nu u_{0xx}(0) = u_{0x}(L) + \nu u_{0xx}(L) = 0$. Então existe uma única solução para o problema (3.1) da seguinte classe:*

$$\begin{aligned} & u \in C(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap L^\infty(0, T; H^4(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \\ & u_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \\ & u_{tt} \in L^2(0, T; H^{-2}(0, L)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

As soluções aproximadas de (3.1) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$u^N(x, t) = \sum_{j=1}^{N} g_j^N(t) w_j(x)$$

onde as funções $w_j(x)$ são definidas no lema 4 e $g_j^N(t)$ são encontradas a partir da solução do problema de Cauchy para um sistema de N equações diferenciais ordinárias dado por:

$$\begin{aligned} (u_t^N, w_j)(t) + (u^N u_x^N, w_j)(t) + (u_{xxx}^N, w_j)(t) + \nu(u_{xx}^N, w_j)(t) + & \\ + \nu(u_{xxxx}^N, w_j)(t) + (a(x)u^N, w_j)(t) & = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$g_j^N(0) = (u_0, w_j), \ para \ j = 1, ..., N \tag{3.6}$$

O sistema dado em (3.5)-(3.6) é um sistema não linear de equações diferenciais ordinárias, e portanto existe algum intervalo $(0, T_N)$ em que as funções $\left\{g_j^N(t)\right\}$ estão definidas.

Para estender essas funções para todo $T < \infty$ e passar o limite quando $N \to \infty$, precisaremos de estimativas a priori.

Prova. (Teorema 9) Como o objetivo é fazer a passagem do limite em (3.5) quando $\nu \to 0$, vamos assumir que $\nu \in (0,1)$.

Estimativa I: Substituímos em (3.5) w_j por $2u^N$. Temos então que:

$$\begin{aligned}\underbrace{(u_t^N, 2u^N)}_{I_1}(t) + \underbrace{(u^N u_x^N, 2u^N)}_{I_2}(t) + \underbrace{(u_{xxx}^N, 2u^N)}_{I_3}(t) + \nu(u_{xx}^N, 2u^N)(t) + \\ +\nu\underbrace{(u_{xxxx}^N, 2u^N)}_{I_4}(t) + \underbrace{(a(x)u^N, 2u^N)}_{I_5}(t) = 0\end{aligned} \tag{3.7}$$

Analisando cada uma das parcelas de (3.7) temos:

$$I_1 = (u_t^N, 2u^N) = \int_0^L 2u_t^N u^N dx = \int_0^L 2\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^N)^2 dx = \frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2$$

$$\begin{aligned} I_2 &= (u^N u_x^N, 2u^N) = \int_0^L 2u_x^N (u^N)^2 dx = \int_0^L \frac{2}{3}\frac{d}{dx}(u^N)^3 dx \\ &= \frac{2}{3}\int_0^L \frac{d}{dx}(u^N)^3 dx = \frac{2}{3}\{(u^N(L,t))^3 - (u^N(0,t))^3\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= (u_{xxx}^N, 2u^N) = \int_0^L 2u_{xxx}^N u^N dx = 2\left\{u^N u_{xx}^N|_0^1 - \int_0^L u_{xx}^N u_x^N dx\right\} \\ &= -2\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u_x^N)^2 dx = -(u_x^N(L,t))^2 + (u_x^N(0,t))^2 \end{aligned}$$

$$I_4 = \nu(u_{xxxx}^N, 2u^N) = 2\nu(u_{xxxx}^N, u^N) = -2\nu u_x^N(L,t)u_{xx}^N(L,t) + 2\nu\|u_{xx}^N(t)\|^2$$

$$I_5 = (a(x)u^N, 2u^N) \geq -2\int_0^L |a(x)||(u^N)^2|dx \geq -2\|a(x)\|_{L^\infty}\int_0^L |u^N|^2 dx$$

Substituindo essas parcelas em (3.7), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2 - (u_x^N(L,t))^2 + (u_x^N(0,t))^2 + 2\nu(u_{xx}^N, u^N) \\ -2\nu u_x^N(L,t)u_{xx}^N(L,t) + 2\nu\|u_{xx}^N(t)\|^2 \leq 2\|a(x)\|_{L^\infty}\|u^N\|^2\end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2 + (u_x^N(0,t))^2 - (u_x^N(L,t))^2 - 2\nu u_x^N(L,t)u_{xx}^N(L,t) + 2\nu\|u_{xx}^N(t)\|^2$$
$$\leq 2\|a(x)\|_{L^\infty}\|u^N\|^2 - 2\nu\int_0^L u_{xx}^N u^N dx \leq 2\|a(x)\|_{L^\infty}\|u^N\|^2 + 2\nu\int_0^L |u_{xx}^N||u^N|dx$$
$$\leq 2\|a(x)\|_{L^\infty}\|u^N\|^2 + 2\nu\|u_{xx}^N\|\|u^N\|dx \leq 2\|a(x)\|_{L^\infty}\|u^N\|^2 + \nu^2\|u_{xx}^N\|^2 + \|u^N\|^2$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2 + (u_x^N(0,t))^2 - (u_x^N(L,t))^2 - 2\nu u_x^N(L,t)u_{xx}^N(L,t) + 2\nu\|u_{xx}^N(t)\|^2\\ &\quad\leq 2\|a(x)\|_{L^\infty}\|u^N\|^2 + \nu^2\|u_{xx}^N\|^2 + \|u^N\|^2\end{aligned} \tag{3.9}$$

A terceira parcela do lado esquerdo de (3.9) satisfaz

$$-2(u_x^N(L,t))^2 < -(u_x^N(L,t))^2 \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10) temos que:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2 + (u_x^N(0,t))^2 - 2u_x^N(L,t)(u_x^N(L,t) + \nu u_{xx}^N(L,t)) + 2\nu\|u_{xx}^N(t)\|^2\\ &\quad\leq 2\|a(x)\|_{L^\infty}\|u^N\|^2 + \nu^2\|u_{xx}^N\|^2 + \|u^N\|^2\end{aligned} \tag{3.11}$$

E, usando as condições de fronteira de (3.1) em (3.11) segue que:

$$\frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2 + (u_x^N(0,t))^2 + (2\nu - \nu^2)\|u_{xx}^N(t)\|^2 \leq \underbrace{(2\|a(x)\|_{L^\infty} + 1)}_{c_1}\|u^N\|^2 \tag{3.12}$$

Integrando (3.12) de 0 até t obtemos:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\|u^N(t)\|^2 dt + \int_0^t (u_x^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xx}^N(t)\|^2 dt \leq c_1\int_0^t \|u^N\|^2 dt$$

$$\|u^N(t)\|^2 - \|u^N(0)\|^2 + \int_0^t (u_x^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xx}^N(t)\|^2 dt \leq c_1\int_0^t \|u^N\|^2 dt$$

$$\|u^N(t)\|^2 + \int_0^t (u_x^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xx}^N(t)\|^2 dt \leq \|u^N(0)\|^2 + c_1\int_0^t \|u^N\|^2 dt \tag{3.13}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.13) temos:

$$\|u^N(t)\|^2 + \int_0^t (u_x^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xx}^N(t)\|^2 dt \leq c_2(t)\|u^N(0)\|^2 \tag{3.14}$$

com $t \in (0,T)$ e $c_2(t)$ uma constante que não depende de N.

Estimativa II: Substituímos em (3.5) w_j por u^N_{xxxx}. Então,

$$\begin{aligned}\underbrace{(u^N_t, u^N_{xxxx})}_{I_1}(t) + \underbrace{(u^N u^N_x, u^N_{xxxx})}_{I_2}(t) + \underbrace{(u^N_{xxx}, u^N_{xxxx})}_{I_3}(t) + \nu\, \underbrace{(u^N_{xx}, u^N_{xxxx})}_{I_4}(t) + \\ +\nu\, \underbrace{(u^N_{xxxx}, u^N_{xxxx})}_{I_5}(t) + \underbrace{(a(x)u^N, u^N_{xxxx})}_{I_6}(t) = 0\end{aligned} \tag{3.15}$$

Analogamente à estimativa I, vamos analisar cada parcela de (3.15).

$$\begin{aligned} I_1 &= (u^N_t, u^N_{xxxx}) = \int_0^L u^N_t u^N_{xxxx} dx = u^N_t u^N_{xxx}|_0^L - \int_0^L u^N_{xxx} u^N_{tx} dx \\ &= -\int_0^L u^N_{xxx} u^N_{tx} dx = -u^N_{tx} u^N_{xx}|_0^L + \int_0^L u^N_{xx} u^N_{tx} \\ &= -u^N_{tx}(L,t) u^N_{xx}(L,t) + u^N_{tx}(0,t) u^N_{xx}(0,t) + \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^N_{xx})^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\nu |u^N_{xx}(L,t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N_{xx}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= (u^N u^N_x, u^N_{xxxx}) = \int_0^L u^N u^N_x u^N_{xxxx} dx \geq -\int_0^L |u^N||u^N_x||u^N_{xxxx}| dx \\ &\geq -\|u^N\|_{L^\infty} \int_0^L |u^N_x||u^N_{xxxx}| dx \geq -\|u^N\|_{L^\infty} \|u^N_x\| \|u^N_{xxxx}\| \\ &= \frac{\sqrt{\nu}}{2}\|u^N_{xxxx}\| \|u^N\|_{L^\infty} \frac{2}{\sqrt{\nu}} \|u^N_x\| \geq -\frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2 - \frac{2}{\nu}\|u^N\|^2_{L^\infty}\|u^N_x\|^2 \\ &\geq -\frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2 - \frac{2}{\nu}\|u^N\|^2_{L^\infty}\{\varepsilon \|u^N_{xx}\|^2 + c_3(\varepsilon)\|u^N\|^2\} \\ &\underset{\varepsilon = \frac{1}{\|u\|_{L^\infty}}}{\geq} -\frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2 - \frac{2}{\nu}\|u^N_{xx}\|^2 - c_4(\nu)\|u^N\|^2 \\ &\underset{3.14}{\geq} -\frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2 - c_5(\nu)\|u^N_{xx}\|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= (u^N_{xxx}, u^N_{xxxx}) = \int_0^L u^N_{xxx} u^N_{xxxx} dx \geq -\int_0^L |u^N_{xxx}||u^N_{xxxx}| dx \\
&\geq -\|u^N_{xxx}\|\|u^N_{xxxx}\| = -\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{8}}\|u^N_{xxxx}\|\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\nu}}\|u^N_{xxx}\| \\
&\geq -\frac{\nu}{16}\|u^N_{xxxx}\|^2 - \frac{4}{\nu}\|u^N_{xxx}\|^2 \\
&\geq -\frac{\nu}{16}\|u^N_{xxxx}\|^2 - \frac{4}{\nu}\{\varepsilon\|u^N_{xxxx}\|^2 + c_6(\varepsilon)\|u^N\|^2\} \\
&\underset{\varepsilon=\frac{\nu^2}{64}}{\geq} -\frac{\nu}{16}\|u^N_{xxxx}\|^2 - \frac{\nu}{16}\|u^N_{xxxx}\|^2 - c_7(\nu)\|u^N\|^2 = -\frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2 - c_7(\nu)\|u^N\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \nu(u^N_{xx}, u^N_{xxxx}) = \nu\int_0^L u^N_{xx} u^N_{xxxx} dx \geq -\nu\int_0^L |u^N_{xx}||u^N_{xxxx}| dx \\
&\geq -\nu\|u^N_{xx}\|\|u^N_{xxxx}\| = -2\nu\|u^N_{xx}\|\frac{1}{2}\|u^N_{xxxx}\| \geq -2\nu\|u^N_{xx}\|^2 + \frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2
\end{aligned}
$$

$$
I_5 = \nu(u^N_{xxxx}, u^N_{xxxx}) = \nu\int_0^L (u^N_{xxxx})^2 dx = \nu\|u^N_{xxxx}\|^2
$$

$$
\begin{aligned}
I_6 &= (a(x)u^N, u^N_{xxxx}) = \int_0^L a(x)u^N u^N_{xxxx} dx \geq -\int_0^L |a(x)||u^N||u^N_{xxxx}| dx \\
&\geq -\|a(x)\|_{L^\infty}\int_0^L |u^N||u^N_{xxxx}| dx \geq -\|a(x)\|_{L^\infty}\frac{2}{\sqrt{\nu}}\|u^N\|\frac{\sqrt{\nu}}{2}\|u^N_{xxxx}\| \\
&\geq -\frac{2}{\nu}\|a(x)\|^2_{L^\infty}\|u^N\|^2 - \frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2
\end{aligned}
$$

Substituindo cada parcela calculada anteriormente em (3.15) temos:

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\nu|u^N_{xx}(L,t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N_{xx}\|^2 + \nu\|u^N_{xxxx}\|^2 \leq \frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2 + c_5(\nu)\|u^N_{xx}\|^2 + \frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2
$$
$$
+c_7(\nu)\|u^N\|^2 + 2\nu\|u^N_{xx}\|^2 + \frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2 + \frac{2}{\nu}\|a(x)\|^2_{L^\infty}\|u^N\|^2 + \frac{\nu}{8}\|u^N_{xxxx}\|^2
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\nu|u^N_{xx}(L,t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N_{xx}\|^2 + \frac{\nu}{2}\|u^N_{xxxx}\|^2 \leq c_8(\nu)\|u^N_{xx}\|^2 + c_9(\nu)\|u^N\|^2
$$

com $c_8(\nu) = c_5(\nu) + 2\nu$ e $c_9(\nu) = c_7(\nu) + \dfrac{2}{\nu}\|a(x)\|^2_{L^\infty}$.

Multiplicando a desigualdade anterior por 2 e tomando $c_{10}(\nu) = max\left\{c_8(\nu), c_9(\nu)\right\}$ temos:

$$\frac{d}{dt}\left\{\nu|u^N_{xx}(L,t)|^2 + \|u^N_{xx}\|^2\right\} + \nu\|u^N_{xxxx}\|^2 \leq c_{10}(\nu)(\|u^N_{xx}\|^2 + \|u^N\|^2) \tag{3.16}$$

Integrando (3.16) de 0 a t chegamos a:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left\{\nu|u^N_{xx}(L,t)|^2 + \|u^N_{xx}\|^2\right\}dt + \nu\int_0^t \|u^N_{xxxx}\|^2 dt \leq c_{10}(\nu)\int_0^t(\|u^N_{xx}\|^2 + \|u^N\|^2)$$

$$\begin{aligned}&\nu|u^N_{xx}(L,t)|^2 + \|u^N_{xx}(t)\|^2 - \nu|u^N_{xx}(L,0)|^2 - \|u^N_{xx}(0)\|^2 + \nu\int_0^t \|u^N_{xxxx}\|^2 dt\\ &\quad\leq c_{10}(\nu)\int_0^t \|u^N_{xx}\|^2 + c_{10}(\nu)\int_0^t \|u^N\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nu|u^N_{xx}(L,t)|^2 + \|u^N_{xx}(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|u^N_{xxxx}\|^2 dt \leq \nu|u^N_{xx}(L,0)|^2 + \|u^N_{xx}(0)\|^2 +\\ &\quad + c_{10}(\nu)\int_0^t \|u^N_{xx}\|^2 + c_{10}(\nu)\int_0^t \|u^N\|^2\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwall na desigualdade anterior, segue que:

$$\begin{aligned}&\nu|u^N_{xx}(L,t)|^2 + \|u^N_{xx}\|^2 + \nu\int_0^t \|u^N_{xxxx}\|^2 dt\\ &\leq \nu|u^N_{xx}(L,0)|^2 + c_{11}(\nu,t)\|u^N_{xx}(0)\|^2 + c_{10}(\nu)\int_0^t \|u^N\|^2\\ &\underset{3.14}{\leq} \nu|u^N_{xx}(L,0)|^2 + c_{11}(\nu,t)\|u^N_{xx}(0)\|^2 + c_{12}(\nu,t)\|u^N(0)\|^2\end{aligned}$$

Tomando $c_{13}(\nu,t) = max\{1, c_{11}, c_{12}\}$ temos:

$$\begin{aligned}&\nu|u^N_{xx}(L,t)|^2 + \|u^N_{xx}\|^2 + \nu\int_0^t \|u^N_{xxxx}\|^2 dt\\ &\quad\leq c_{13}(\nu,t)\left(\nu|u^N_{xx}(L,0)|^2 + \|u^N_{xx}(0)\|^2 + \|u^N(0)\|^2\right)\end{aligned} \tag{3.17}$$

com $t \in (0,T)$ e $c_{13}(\nu,t)$ uma constante não dependente de N.

Estimativa III: Derivamos a equação (3.5) em relação a t, e substituímos w_j por $2u^N_t$. Temos então que:

$$\begin{aligned}&\underbrace{(u^N_{tt}, 2u^N_t)}_{I_1}(t) + \underbrace{((u^N u^N_x)_t, 2u^N_t)}_{I_2}(t) + \underbrace{(u^N_{xxxt}, 2u^N_t)}_{I_3}(t) + \nu\underbrace{(u^N_{xxt}, 2u^N_t)}_{I_4}(t) +\\ &\quad + \nu\underbrace{(u^N_{xxxxt}, 2u^N_t)}_{I_5}(t) + \underbrace{(a(x)u^N_t, 2u^N_t)}_{I_6}(t) = 0\end{aligned} \tag{3.18}$$

Analogamente as estimativas anteriores, vamos analisar separadamente cada parcela de (3.18).

$$I_1 = (u_{tt}^N, 2u_t^N) = \int_0^L 2u_{tt}^N u_t^N dx = \int_0^L 2\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t^N)^2 dx = \frac{d}{dt}\|u_t^N(t)\|^2$$

$$\begin{aligned}
I_2 \quad &= \quad ((u^N u_x^N)_t, 2u_t^N) = (u_t^N u_x^N + u^N u_{xt}^N, 2u_t^N) = (u_t^N u_x^N, 2u_t^N) + (u^N u_{xt}^N, 2u_t^N) \\
&= \quad \int_0^L 2\ (u_t^N)^2 u_x^N dx + \int_0^L 2\ u^N u_{xt}^N u_t^N dx \\
&= \quad 2\left((u_t^N)^2 u^N\right)_0^L - 2\ \int_0^L 2u_t^N u_{tx}^N u^N dx + 2\ \int_0^L u_t^N u^N u_{tx}^N \\
&= \quad -4(u_t^N u^N, u_{tx}^N) + 2(u_t^N u^N, u_{tx}^N) = -2(u_t^N u^N, u_{tx}^N) \\
&= \quad -2\ \int_0^L u_t^N u^N u_{tx}^N dx \geq -2\ \int_0^L |u_t^N||u^N||u_{tx}^N| dx \\
&\geq \quad -2\|u^N\|_{L^\infty}\ \int_0^L |u_t^N||u_{tx}^N| dx \geq -2\|u_t^N\|\|u^N\|_{L^\infty}\|u_{tx}^N\| \\
&\geq \quad -2\|u_t^N\|^2 - \frac{1}{2}\|u^N\|_{L^\infty}^2\|u_{tx}^N\|^2 \geq -2\|u_t^N\|^2 - \frac{1}{2}\|u^N\|_{L^\infty}^2\left\{\varepsilon\|u_{xxt}^N\|^2 + c_{14}(\varepsilon)\|u_t^N\|^2\right\} \\
\varepsilon = \tfrac{1}{\|u^N\|^2}\ &\geq \quad -2\|u_t^N\|^2 - \frac{1}{2}\|u_{xxt}^N\|^2 - c_{15}\|u_t^N\|^2 \\
&\geq \quad -\underbrace{(2 + c_{15})}_{c_{16}}\|u_t^N\|^2 - \frac{1}{2}\|u_{xxt}^N\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 \ &= \ (u_{xxxt}^N, 2u_t^N) = \int_0^L 2u_{xxxt}^N u_t^N dx = 2\ \left(u_t^N u_{xxt}^N\right)_0^L - 2\ \int_0^L u_{xxt}^N u_{xt}^N dx \\
&= \ -2\ \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u_{xt}^N)^2 dx = -(u_{xt}^N(L,t))^2 + (u_{xt}^N(0,t))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 \ &= \ \nu(u_{xxt}^N, 2u_t^N) = 2\nu\ \int_0^L u_{xxt}^N u_t^N dx \geq -2\nu \int_0^L |u_t^N||u_{xxt}^N| dx \\
&\geq \ -2\nu\|u_t^N\|\|u_{xxt}^N\| \geq -2\|u_t^N\|^2 + \nu^2\|u_{xxt}^N\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_5 &= \nu(u^N_{xxxxt}, 2u^N_t) = 2\nu \int_0^L u^N_{xxxxt} u^N_t = 2\nu \left(u^N_t u^N_{xxxt}\right)_0^L - 2\nu \int_0^L u^N_{xxxt} u^N_{xt} dx \\
&= -2\nu \int_0^L u^N_{xxxt} u^N_{xt} dx = -2\nu \left(u^N_{xt} u^N_{xxt}\right)_0^L + 2\nu \int_0^L (u^N_{xxt})^2 dx \\
&= -2\nu u^N_{xt}(L,t) u^N_{xxt}(L,t) + 2\nu u^N_{xt}(0,t) u^N_{xxt}(0,t) + 2\nu \|u^N_{xxt}\|^2 \\
&= -2\nu u^N_{xt}(L,t) u^N_{xxt}(L,t) + 2\nu \|u^N_{xxt}\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_6 &= (a(x)u^N_t, 2u^N_t) \geq -2 \int_0^L a(x)(u^N_t)^2 dx \geq -2 \int_0^L |a(x)||(u^N_t)^2| dx \\
&\geq -2\|a(x)\|_{L^\infty} \int_0^L |u^N_t|^2 dx = -2\|a(x)\|_{L^\infty} \|u^N_t\|^2
\end{aligned}
$$

Substituindo as integrais calculadas em (3.18) temos que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u^N_t(t)\|^2 - (u^N_{xt}(L,t))^2 + (u^N_{xt}(0,t))^2 - 2\nu u^N_{xt}(L,t) u^N_{xxt}(L,t) + 2\nu \|u^N_{xxt}\|^2 \\
&\leq 2\|a(x)\|_{L^\infty} \|u^N_t\|^2 + c_{16}\|u^N_t\|^2 + \nu^2 \|u^N_{xxt}\|^2 + 2\|u^N_t\|^2
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

A segunda parcela do lado esquerdo de (3.19) também satisfaz (3.10). Logo, segue que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u^N_t(t)\|^2 + (u^N_{xt}(0,t))^2 - 2u^N_{xt}(L,t)(u^N_{xt}(L,t)) + \nu u^N_{xxt}(L,t)) + 2\nu \|u^N_{xxt}\|^2 \\
&\leq 2\|a(x)\|_{L^\infty} \|u^N_t\|^2 + c_{16}\|u^N_t\|^2 + \nu^2 \|u^N_{xxt}\|^2 + 2\|u^N_t\|^2
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Usando as condições de fronteira de (3.1), podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u^N_t(t)\|^2 + (u^N_{xt}(0,t))^2 + 2\nu \|u^N_{xxt}\|^2 \leq 2\|a(x)\|_{L^\infty} \|u^N_t\|^2 + c_{16}\|u^N_t\|^2 + \\
&+\nu^2 \|u^N_{xxt}\|^2 + 2\|u^N_t\|^2
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Por outro lado, considerando $t = 0$ e $w_j = u^N_t$ em (3.5) temos:

$$
\begin{aligned}
&(u^N_t(0), u^N_t(0)) + (u^N(0)u^N_x(0), u^N_t(0)) + (u^N_{xxx}(0), u^N_t(0)) + \\
&+\nu(u^N_{xx}(0), u^N_t(0)) + \nu(u^N_{xxxx}(0), u^N_t(0)) + (a(x)u^N(0), u^N_t(0)) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|u^N_t(0)|^2 &\leq |(u^N(0)u^N_x(0), u^N_t(0))| + |(u^N_{xxx}(0), u^N_t(0))| + \nu|(u^N_{xx}(0), u^N_t(0))| + \\
&+\nu|(u^N_{xxxx}(0), u^N_t(0))| + |(a(x)u^N(0), u^N_t(0))| \\
&\leq |u^N(0)u^N_x(0)||u^N_t(0)| + |u^N_{xxx}(0)||u^N_t(0)| + \nu|u^N_{xx}(0)||u^N_t(0)| + \\
&+\nu|u^N_{xxxx}(0)||u^N_t(0)| + |a(x)u^N(0)||u^N_t(0)|
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 até L temos:

$$\begin{aligned}\int_0^L |u_t^N(0)|^2 \;\leq\; & \int_0^L |u^N(0)||u_x^N(0)||u_t^N(0)|dx + \int_0^L |u_{xxx}^N(0)||u_t^N(0)|dx + \\ & +\nu \int_0^L |u_{xx}^N(0)||u_t^N(0)|dx + \nu \int_0^L |u_{xxxx}^N(0)||u_t^N(0)|dx + \\ & + \int_0^L |a(x)u^N(0)||u_t^N(0)|dx\end{aligned}$$

Usando a estimativa I, dada por (3.14), consideranto $t = 0$ segue:

$$\begin{aligned}\|u_t^N(0)\|^2 \;\leq\; & \|u_x^N(0)\|\|u_t^N(0)\| + \|u_{xxx}^N(0)\|\|u_t^N(0)\| + \nu\|u_{xx}^N(0)\|\|u_t^N(0)\| \\ & +\nu\|u_{xxxx}^N(0)\|\|u_t^N(0)\| + \|a(x)\|\|u^N(0)\|\|u_t^N(0)\| \\ \leq\; & (\|u_x^N(0)\| + \|u_{xxx}^N(0)\| + \nu\|u_{xx}^N(0)\| + \nu\|u_{xxxx}^N(0)\| + \\ & +\|a(x)\|\|u^N(0)\|)\|u_t^N(0)\|\end{aligned}$$

Tomando $c_{17} = max\,\{1, \nu, \|a(x)\|\}$ temos:

$$\|u_t^N(0)\| \leq c_{17}\left(\|u_x^N(0)\| + \|u_{xxx}^N(0)\| + \|u_{xx}^N(0)\| + \|u_{xxxx}^N(0)\|\right)$$

$$\|u_t^N(0)\| \leq c_{17}\|u^N(0)\|_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)} \tag{3.22}$$

Também temos que, de (3.14) e (3.17) segue que:

$$\sup_{t>0} \|u^N\|_{H^2(0,L)} \leq c_{18} \tag{3.23}$$

Voltando em (3.21), temos que:

$$\frac{d}{dt}\|u_t^N\|^2 + (u_{xt}^N(0,t))^2 + (2\nu - \nu^2)\|u_{xxt}^N\|^2 \leq \underbrace{(2\|a(x)\|_{L^\infty} + c_{16} + 2)}_{c_{19}}\|u_t^N\|^2 \tag{3.24}$$

Integrando (3.24) de 0 até t obtemos:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_t^N\|^2 dt + \int_0^t (u_{xt}^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xxt}^N\|^2 dt \leq c_{19}\int_0^t \|u_t^N\|^2 dt$$

$$\|u_t^N(t)\|^2 - \|u_t^N(0)\|^2 + \int_0^t (u_{xt}^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xxt}^N\|^2 dt \leq c_{19}\int_0^t \|u_t^N\|^2 dt$$

$$\|u_t^N(t)\|^2 + \int_0^t (u_{xt}^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xxt}^N\|^2 dt \leq \|u_t^N(0)\|^2 + c_{19}\int_0^t \|u_t^N\|^2 dt$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall na última desigualdade, temos que:

$$\|u_t^N(t)\|^2 + \int_0^t (u_{xt}^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xxt}^N\|^2 dt \leq \|u_t^N(0)\|^2 e^{c_{19}t} \tag{3.25}$$

Usando (3.22) temos que:

$$\|u_t^N(t)\|^2 + \int_0^t (u_{xt}^N(0,t))^2 dt + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xxt}^N\|^2 dt \leq \|u_t^N(0)\|^2_{H^4(0,L)\cap H_0^L(0,L)} c_{20}(t) \tag{3.26}$$

Sendo o segundo termo do lado esquerdo de (3.26) positivo, podemos escrever:

$$\|u_t^N(t)\|^2 + (2\nu - \nu^2)\int_0^t \|u_{xxt}^N\|^2 dt \leq c_{20}(t)\|u_t^N(0)\|^2_{H^4(0,L)\cap H_0^L(0,L)} \tag{3.27}$$

onde $t \in (0,T)$ e $c_{20}(t)$ é uma constante positiva não dependente de N. Segue de (3.5) e de (3.18), quando avaliados em w_j que:

$$\begin{array}{l} u^N \in L^\infty(0,T;H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)) \\ u_{tt}^N \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L)) \end{array} \tag{3.28}$$

As estimativas dadas em (3.14), (3.17) e (3.27) e a relação (3.28) implicam que $u^N(x,t)$ pode ser estendida para todo $T \in (0,\infty)$ e que as aproximações de u^N convergem quando $N \longrightarrow \infty$. Passando o limite em (3.5) fica então demonstrado o teorema. □

O teorema 9 garante a existência de solução do problema (3.1) para todo $\nu > 0$. Desejamos agora, fazer $\nu \to 0$. Nesse caso, temos o seguinte resultado:

Teorema 10. *Seja $u_0 \in H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)$, $u_{0x}(L) = 0$. Então existe uma única solução do problema (1.3) da seguinte classe:*

$$\begin{array}{l} u \in L^\infty(0,T;H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)) \\ u_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))\cap L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \end{array} \tag{3.29}$$

Do teorema 9 temos que para todo $\nu > 0$ existe uma única solução associada u_ν que satisfaz a seguinte identidade integral:

$$(u_{\nu t}, v) + (u_\nu u_{\nu x}, v) + (u_{\nu xxx}, v) + \nu(u_{\nu xx}, v) + \nu(u_{\nu xxxx}, v) + (a(x)u_\nu, v) = 0 \quad (3.30)$$

que é verdadeira para toda função $v \in L^2(0, L)$ e todo $t \in (0, T)$.

Antes da demonstração do teorema 10, vamos enunciar e provar alguns resultados.

Lema 5. *Para todo* $\nu \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ *as soluções de (3.1) satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$\|u_\nu\|^2 + \int_0^t \|u_{\nu x}\|^2 dx + \nu \int_0^L \|u_{\nu xx}\|^2 \leq c_{28}\|u_{0\nu}\|^2 \quad (3.31)$$

em que a constante c_{28} *não depende de* ν*.*

Prova. Consideramos $v = 2e^{\lambda x}u_\nu$ em (3.30) para qualquer real $\lambda > 0$. Obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_\nu, 2e^{\lambda x}u_\nu) + \underbrace{(u_\nu u_{\nu x}, 2e^{\lambda x}u_\nu)}_{I_1} + \underbrace{(u_{\nu xxx}, 2e^{\lambda x}u_\nu)}_{I_2} + \nu\underbrace{(u_{\nu xx}, 2e^{\lambda x}u_\nu)}_{I_3} + \\ + \nu\underbrace{(u_{\nu xxxx}, 2e^{\lambda x}u_\nu)}_{I_4} + \underbrace{(a(x)u_\nu, 2e^{\lambda x}u_\nu)}_{I_5} = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vamos analisar separadamente as parcelas de (3.32).

$$\begin{aligned} I_1 &= (u_\nu u_{\nu x}, 2e^{\lambda x}u_\nu) = 2\int_0^L u_\nu u_{\nu x} u_\nu e^{\lambda x} dx = 2\int_0^L \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(u_\nu)^3 e^{\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{3}\left(e^{\lambda x}(u_\nu)^3\right)_0^L - \frac{2\lambda}{3}\int_0^L e^{\lambda x}(u_\nu)^3 dx = -\frac{2\lambda}{3}\int_0^L e^{\lambda x}(u_\nu)^3 dx \\ &\geq -\frac{2\lambda}{3}\int_0^L |e^{\lambda x}||u_\nu||u_\nu|^2 dx \geq -\frac{2\lambda e^{\lambda L}}{3}\int_0^L |u_\nu||u_\nu|^2 dx \\ &\geq -\frac{2\lambda e^{\lambda L}}{3}\|u_\nu\|_{L^\infty}\|u_\nu\|^2 \geq -\frac{2\lambda e^{\lambda L}}{3}\|u_{\nu x}\|\|u_\nu\|^2 \\ &\geq -2\lambda e^{\lambda L}\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{6\lambda}}\frac{1}{\sqrt{e^{2\lambda L}}}\|u_{\nu x}\|\frac{1}{3}\frac{\sqrt{6\lambda}}{\sqrt{\eta}}\sqrt{e^{2\lambda L}}\|u_\nu\|^2 \\ &\geq -\frac{\eta\lambda}{3}\|u_{\nu x}\|^2 - \frac{\lambda e^{2\lambda L}}{3\eta}\|u_\nu\|^4 \end{aligned}$$

com η constante positiva arbitrária.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= (u_{\nu xxx}, 2e^{\lambda x}u_\nu) = 2\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xxx}u_\nu dx \\
&= 2\left(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu xx}\right)_0^L - 2\lambda\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xx}u_\nu dx - 2\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xx}u_{\nu x}dx \\
&= -2\lambda\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xx}u_\nu dx - 2\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xx}u_{\nu x}dx \\
&= -2\lambda\left(e^{\lambda x}u_{\nu x}u_\nu\right)_0^L + 2\lambda^2\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu x}u_\nu dx + 2\lambda\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu x}^2 dx - \\
&\quad -2\int_0^L e^{\lambda x}\frac{1}{2}\frac{d}{dx}u_{\nu x}^2 dx \\
&= \lambda^2\int_0^L e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(u_\nu)^2 dx + 2\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) - \int_0^L e^{\lambda x}\frac{d}{dx}(u_{\nu x})^2 dx \\
&= \lambda^2\left(e^{\lambda x}(u_\nu)^2\right)_0^L - \lambda^3\int_0^L e^{\lambda x}(u_\nu)^2 dx + 2\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) - \\
&\quad -\left(e^{\lambda x}(u_{\nu x})^2\right)_0^L + \lambda\int_0^L e^{\lambda x}(u_{\nu x})^2 dx \\
&= -\lambda^3\,(e^{\lambda x}, u_\nu^2) + 2\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) - e^{\lambda L}(u_{\nu x})^2(L,t) + (u_{\nu x})^2(0,t) + \lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) \\
&= -\lambda^3\,(e^{\lambda x}, u_\nu^2) + 3\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) - e^{\lambda L}(u_{\nu x})^2(L,t) + (u_{\nu x})^2(0,t) \\
&\geq -\lambda^3\,(e^{\lambda x}, u_\nu^2) + 3\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) - 2e^{\lambda L}(u_{\nu x})^2(L,t) + (u_{\nu x})^2(0,t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \nu(u_{\nu xx}, 2e^{\lambda x}u_\nu) = \nu\int_0^L e^{\lambda x}2u_{\nu xx}u_\nu dx \\
&= \nu\int_0^L \left(e^{\lambda x}(u_{\nu xx}+u_\nu)^2 - e^{\lambda x}(u_{\nu xx})^2 - e^{\lambda x}(u_\nu)^2\right)dx \\
&= \nu\int_0^L e^{\lambda x}(u_{\nu xx}+u_\nu)^2 dx - \nu\int_0^L e^{\lambda x}(u_{\nu xx})^2 dx - \nu\int_0^L e^{\lambda x}(u_\nu)^2 dx \\
&\geq -\nu\int_0^L e^{\lambda x}(u_{\nu xx})^2 dx - \nu\int_0^L e^{\lambda x}(u_\nu)^2 dx \geq -\nu(e^{\lambda x}, u_{\nu xx}^2) - \nu(e^{\lambda x}, u_\nu^2)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \nu(u_{\nu xxxx}, 2e^{\lambda x}u_\nu) = 2\nu \int_0^L e^{\lambda x} u_{\nu xxxx} u_\nu dx \\
&= 2\nu \left(e^{\lambda x} u_\nu u_{\nu xxx}\right)_0^L - 2\nu\lambda \int_0^L e^{\lambda x} u_\nu u_{\nu xxx} dx - 2\nu \int_0^L e^{\lambda x} u_{\nu x} u_{\nu xxx} dx \\
&= -2\nu\lambda \int_0^L e^{\lambda x} u_\nu u_{\nu xxx} dx - 2\nu \int_0^L e^{\lambda x} u_{\nu x} u_{\nu xxx} dx \\
&= \nu\lambda^4 (e^{\lambda x}, u_\nu^2) - 2\nu\lambda^2 (e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + \nu\lambda e^{\lambda L} (u_{\nu x})^2(L,t) - \nu\lambda (u_{\nu x})^2(0,t) - \\
&\quad -\nu\lambda^2 (e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) - 2\nu e^{\lambda L} u_{\nu x}(L,t) u_{\nu xx}(L,t) + \nu\lambda e^{\lambda L}(u_{\nu x})^2(L,t) - \\
&\quad -\nu\lambda (u_{\nu x})^2(0,t) - \nu\lambda^2 (e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + 2\nu (e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) \\
&= -2\nu\lambda (u_{\nu x})^2(0,t) + 2\nu\lambda e^{\lambda L}(u_{\nu x})^2(L,t) - 4\nu\lambda^2 (e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + \nu\lambda^4 (e^{\lambda x}, u_\nu^2) + \\
&\quad +2\nu (e^{\lambda x}, u_{\nu xx}^2) - 2\nu e^{\lambda L} u_{\nu x}(L,t) u_{\nu xx}(L,t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= (a(x)u_\nu, 2e^{\lambda x}u_\nu) \geq -2 \int_0^L a(x) e^{\lambda x}(u_\nu)^2 dx \geq -2 \int_0^L |a(x)||e^{\lambda x}||u_\nu|^2 dx \\
&\geq -\|a(x)\|_{L^\infty} e^{\lambda L} \|u_\nu\|^2
\end{aligned}$$

Substituindo as integrais calculadas acima em (3.32), usando o fato de que $\nu \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e as condições de fronteira de (3.1) temos que:

$$\begin{aligned}
2\frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, u_\nu^2) - \frac{\eta\lambda}{3}\|u_{\nu x}\|^2 - \frac{\lambda e^{2\lambda L}}{3\eta}\|u_\nu\|^4 - \lambda^3 (e^{\lambda x}, u_\nu^2) + 3\lambda (e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) - \nu (e^{\lambda x}, u_{\nu xx}^2) \\
-\nu (e^{\lambda x}, u_\nu^2) - 2\nu\lambda (u_{\nu x})^2(0,t) - 4\nu\lambda^2 (e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + \nu\lambda^4 (e^{\lambda x}, u_\nu^2) + 2\nu (e^{\lambda x}, u_{\nu xx}^2) \\
+2\nu\lambda e^{\lambda L} u_{\nu x}^2(L,t) + u_{\nu x}^2(0,t) \leq \|a(x)\|_{L^\infty} e^{\lambda L} \|u_\nu\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, u_\nu^2) + (1 - 2\nu\lambda)(u_{\nu x})^2(0,t) + \lambda\left(3 - \frac{\eta}{3} - 4\nu\lambda\right)(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + \nu (e^{\lambda x}, u_{\nu xx}^2) + \\
+(\nu\lambda^4 - \nu - \lambda^3)(e^{\lambda x}, u_\nu^2) + 2\nu\lambda e^{\lambda L} u_{\nu x}^2(L,t) \leq \left(\|a(x)\|_{L^\infty} e^{\lambda L} + \frac{\lambda e^{2\lambda L}}{3\eta}\right)\|u_\nu\|^4
\end{aligned}$$

Tomando $\eta = 3$, $\lambda = 1$ e usando novamente que $\nu \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ chegamos a:

$$\begin{aligned}
2\frac{d}{dt}(e^x, u_\nu^2) + \underbrace{(1 - 2\nu)}_{c_{21}(\nu)}(u_{\nu x})^2(0,t) + \underbrace{(2 - 4\nu)}_{c_{22}(\nu)}(e^x, u_{\nu x}^2) + \nu (e^x, u_{\nu xx}^2) \\
-(e^x, u_\nu^2) \leq \underbrace{\left(\|a(x)\|_{L^\infty} e^L + \frac{e^{2L}}{9}\right)}_{c_{23}}\|u_\nu\|^4
\end{aligned}$$

Como $(1-2\nu)u_{\nu x}^2(0,t)>0$, vale em particular que:

$$
\begin{aligned}
2\frac{d}{dt}(e^x,u_\nu^2)+c_{22}(\nu)(e^x,u_{\nu x}^2)+\nu(e^x,u_{\nu xx}^2) &\leq (e^x,u_\nu^2)-c_{23}\|u_\nu\|^4\\
&\leq (e^x,u_\nu^2)+c_{23}\|u_\nu\|^4\\
&\leq \underbrace{e^L}_{c_{24}}\|u_\nu\|^2+c_{23}\|u_\nu\|^4\\
&\leq c_{24}\|u_\nu\|^2+c_{23}\|u_\nu\|^4
\end{aligned}
$$

com c_{23} e c_{24} independentes de ν. Dividindo por 2 e integrando de 0 até t a última desigualdade, segue que:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{d}{dt}(e^x,u_\nu^2)dt+c_{22}(\nu)\int_0^t(e^x,u_{\nu x}^2)dt+\nu\int_0^t(e^x,u_{\nu xx}^2)dt\\
&\leq c_{24}\int_0^t\|u_\nu\|^2dt+c_{23}\int_0^t\|u_\nu\|^4dt
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Pela estimativa I, obtida na demonstração do teorema 9, podemos limitar o lado direito de (3.33) por constantes que não dependem de ν. Portanto,

$$
(e^x,u_\nu^2(t))-(e^x,u_\nu^2(0))+c_{22}(\nu)\int_0^t(e^x,u_{\nu x}^2)dt+\nu\int_0^t(e^x,u_{\nu xx}^2)dt\leq \underbrace{c_{24}c_{26}\ t+c_{23}c_{26}\ t}_{c_{27}(t)}
$$

$$
\begin{aligned}
&(e^x,u_\nu^2(t))+c_{22}(\nu)\int_0^t(e^x,u_{\nu x}^2)dt+\nu\int_0^t(e^x,u_{\nu xx}^2)dt\\
&\quad\leq (e^x,u_\nu^2(0))+c_{27}(t)\leq e^L\|u_{0\nu}\|^2+c_{27}(t)\leq \underbrace{max\left\{e^L,c_{27}(t)\right\}}_{c_{28}(t)}\|u_{0\nu}\|^2\leq c_{28}\|u_{0\nu}\|^2
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
(e^x,u_\nu^2(t))+c_{22}(\nu)\int_0^t(e^x,u_{\nu x}^2)dt+\nu\int_0^t(e^x,u_{\nu xx}^2)dt\leq c_{28}(t)\|u_{0\nu}\|^2 \tag{3.34}
$$

onde c_{28} não depende de ν. A estimativa (3.34) mostra o efeito de suavização do termo dispersivo u_{xxx} da equação. □

Lema 6. *Para todo $\nu\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ as soluções de (3.1) satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$
\|u_{\nu t}\|^2+\int_0^t\|u_{\nu xs}\|^2ds+\nu\int_0^t\|u_{\nu xxs}\|^2ds\leq c_{33}(\|u_0\|^2_{H^3(0,L)\cap H_0^L(0,L)}+\nu\|u_{xxx}(0)\|^2) \tag{3.35}
$$

em que a constante c_{33} não depende de ν.

Prova. Considere, primeiramente em (3.30), a função v independente de t. Derivando (3.30) em relação a t, sendo isto possível pelo teorema 9 já demonstrado, e substituindo $v = 2e^{\lambda x}u_{\nu t}$ temos que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) + \underbrace{((u_\nu u_{\nu x})_t, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{I_1} + \underbrace{(u_{\nu xxxt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{I_2} + \underbrace{\nu(u_{\nu xxt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{I_3} + \\ + \underbrace{\nu(u_{\nu xxxxt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{I_4} + \underbrace{(a(x)u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{I_5} = 0\end{aligned} \tag{3.36}$$

Vamos analisar separademente, como feito no lema 5, as integrais de (3.36).

$$\begin{aligned} I_1 &= ((u_\nu u_{\nu x})_t, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) = 2(e^{\lambda x}u_{\nu t}u_{\nu x}, u_{\nu t}) + 2(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu xt}, u_{\nu t}) \\ &= -2\lambda \int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu t}^2 u_\nu dx - 2\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu t}u_\nu u_{\nu xt}dx \\ &\geq -2\lambda \max_{x\in(0,L)} |u_\nu|(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2) - \delta(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) - \frac{1}{\delta}\|u_{\nu x}\|^2(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) \\ &\geq -\delta(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) - \left(2\lambda + \frac{1}{\delta}\right)\|u_{\nu x}\|^2(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2)\end{aligned}$$

com δ um número positivo arbitrário.

$$\begin{aligned} I_2 &= (u_{\nu xxxt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) = 2\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xxxt}u_{\nu t}dx \\ &= -2\lambda \int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu t}u_{\nu xxt}dx - 2\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xt}u_{\nu xxt}dx \\ &= 2\lambda^2(e^{\lambda x}u_{\nu xt}, u_{\nu t}) + 2\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) - \left(e^{\lambda x}u_{\nu xt}^2\right)_0^L + \lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) \\ &= 2\lambda^2(e^{\lambda x}u_{\nu xt}, u_{\nu t}) + 3\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) - \left(e^{\lambda x}u_{\nu xt}^2\right)_0^L \\ &\geq u_{\nu xt}^2(0,t) - 2e^{\lambda L}u_{\nu xt}^2(L,t) + 3\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) - \lambda^3(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \nu(u_{\nu xxt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) = \nu\int_0^L e^{\lambda x}2u_{\nu xxt}u_{\nu t}dx \\ &= \nu\int_0^L e^{\lambda x}(u_{\nu xxt} + u_{\nu t})^2 dx - \nu\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xxt}^2 dx - \nu\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu t}^2 dx \\ &\geq -\nu(e^{\lambda x}, u_{\nu xxt}^2) - \nu(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \nu(u_{\nu xxxxt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) = 2\nu\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xxxxt}u_{\nu t}dx \\
&= -2\nu\lambda(e^{\lambda x}u_{\nu xxxt}, u_{\nu t}) - 2\nu(e^{\lambda x}u_{\nu xxxt}, u_{\nu xt}) \\
&= -2\nu e^{\lambda L}u_{\nu xt}(L,t)u_{\nu xxt}(L,t) + 2\nu\lambda\left(e^{\lambda x}u_{\nu xt}^2\right)_0^L + 2\nu(e^{\lambda x}, u_{\nu xxt}^2) - \\
&\quad -4\nu\lambda^2(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) + \nu\lambda^4(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2)
\end{aligned}
$$

$$
I_5 = (a(x)u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) \geq -2\int_0^L a(x)e^{\lambda x}u_{\nu t}^2dx \geq -2e^{\lambda L}\|a(x)\|_{L^\infty}\|u_{\nu t}\|^2
$$

Substituindo as integrais calculadas em (3.36) obtemos:

$$
\begin{gathered}
2\frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2) + (3\lambda - 4\nu\lambda^2 - \delta)(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) + \nu(e^{\lambda x}, u_{\nu xxt}^2) + u_{\nu xt}^2(0,t) - \\
-\left[\left(2\lambda + \frac{1}{\delta}\right)\|u_{\nu x}\|^2 + \lambda^3 + \nu - \nu\lambda^4\right](e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2) \leq 2e^{\lambda L}\|a(x)\|_{L^\infty}\|u_{\nu t}\|^2
\end{gathered}
$$

Tomando $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$ e $\lambda = 1$, sendo $\nu \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, segue que:

$$
\begin{aligned}
&2\frac{d}{dt}(e^x, u_{\nu t}^2) + \underbrace{\left(\frac{5}{2} - 4\nu\right)}_{c_{29}(\nu)}(e^x, u_{\nu xt}^2) - \left(1 + 4\|u_{\nu x}\|^2\right)(e^x, u_{\nu t}^2) + \nu(e^x, u_{\nu xxt}^2) + \\
&\quad +u_{\nu xt}^2(0,t) \leq 2e^L\|a(x)\|_{L^\infty}\|u_{\nu t}\|^2
\end{aligned}
$$

Multiplicando a equação acima por 2,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e^x, u_{\nu t}^2) + c_{29}(\nu)(e^x, u_{\nu xt}^2) + \frac{\nu}{2}(e^x, u_{\nu xxt}^2) + \frac{1}{2}u_{\nu xt}^2 \\
&\quad \leq \left(\frac{1}{2} + 2\|u_{\nu x}\|^2\right)(e^x, u_{\nu t}^2) + e^L\|a(x)\|_{L^\infty}\|u_{\nu t}\|^2 \\
&\quad \leq \left(\frac{1}{2} + 2\|u_{\nu x}\|^2\right)e^L\|u_{\nu t}\|^2 + 2e^L\|a(x)\|_{L^\infty}\|u_{\nu t}\|^2
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{d}{dt}(e^x, u_{\nu t}^2) + c_{29}(\nu)(e^x, u_{\nu xt}^2) + \nu(e^x, u_{\nu xxt}^2) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^L + 2e^L\|u_{\nu x}\|^2 + 2e^L\|a(x)\|_{L^\infty}\right)}_{c_{30}}\|u_{\nu t}\|^2
$$

Por outro lado, tomando $t = 0$ em (3.30) e considerando $v = u_{\nu t}$ temos:

$$
\begin{gathered}
(u_{\nu t}(0), u_{\nu t}(0)) + (u_\nu(0)u_{\nu x}(0), u_{\nu t}(0)) + (u_{\nu xxx}(0), u_{\nu t}(0)) + \\
+\nu(u_{\nu xx}(0), u_{\nu t}(0)) + \nu(u_{\nu xxxx}(0), u_{\nu t}(0)) + (a(x)u_\nu(0), u_{\nu t}(0)) = 0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
|u_{\nu t}(0)|^2 &\leq |(u_\nu(0)u_{\nu x}(0), u_{\nu t}(0))| + |(u_{\nu xxx}(0), u_{\nu t}(0))| + \nu|(u_{\nu xx}(0), u_{\nu t}(0))| + \\
&\quad +\nu|(u_{\nu xxxx}(0), u_{\nu t}(0))| + |(a(x)u_\nu(0), u_{\nu t}(0))| \\
&\leq |u_\nu(0)u_{\nu x}(0)||u_{\nu t}(0)| + |u_{\nu xxx}(0)||u_{\nu t}(0)| + \nu|u_{\nu xx}(0)||u_{\nu t}(0)| + \\
&\quad +\nu|u_{\nu xxxx}(0)||u_{\nu t}(0)| + |a(x)u_\nu(0)||u_{\nu t}(0)|
\end{aligned}
$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 até L segue que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L |u_{\nu t}(0)|^2 &\leq \int_0^L |u_\nu(0)||u_{\nu x}(0)||u_{\nu t}(0)|dx + \int_0^L |u_{\nu xxx}(0)||u_{\nu t}(0)|dx + \\
&\quad +\nu \int_0^L |u_{\nu xx}(0)||u_{\nu t}(0)|dx + \nu \int_0^L |u_{\nu xxxx}(0)||u_{\nu t}(0)|dx + \\
&\quad + \int_0^L |a(x)||u_\nu(0)||u_{\nu t}(0)|dx
\end{aligned}
$$

Usando (3.14), temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L |u_{\nu t}(0)|^2 &\leq c_{31}\|u_{\nu x}(0)\|\|u_{\nu t}(0)\| + \|u_{\nu xxx}(0)\|\|u_{\nu t}(0)\| + \nu\|u_{\nu xx}(0)\|\|u_{\nu t}(0)\| \\
&\quad +\nu\|u_{\nu xxxx}(0)\|\|u_{\nu t}(0)\| + c_{31}\|a(x)\|_{L^\infty}\|u_{\nu t}(0)\| \\
&\leq (c_{33}(\nu)\|u_{\nu x}(0)\| + \nu\|u_{\nu xx}(0)\| + \|u_{\nu xxx}(0)\| + \\
&\quad +c_{31}\|a(x)\|_{L^\infty})\|u_{\nu t}(0)\| + \nu\|u_{\nu xxxx}(0)\|
\end{aligned}
$$

Considerando $c_{32} = max\,\{c_{32}, 1, \nu, c_{31}\|a(x)\|_{L^\infty}\}$, constante independente de ν, já que $\nu \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, podemos escrever:

$$
\|u_{\nu t}(0)\|^2 \leq c_{32}\|u_{\nu 0}\|_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu\|u_{\nu xxxx}(0)\| \tag{3.37}
$$

Derivando a estimativa (3.31) dada no lema 5 em relação a t, e usando a desigualdade (3.37), temos que:

$$
\begin{aligned}
\|u_{\nu t}\|^2 + \int_0^t \|u_{\nu xt}\|^2 dx + \nu \int_0^t \|u_{\nu xxt}\|^2 &\leq c_{28}\|u_{\nu t}(0)\|^2 \\
&\leq c_{28}\left(c_{32}\|u_{\nu 0}\|_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu\|u_{\nu xxxx}(0)\|\right)
\end{aligned}
$$

E portanto:

$$
\|u_{\nu t}\|^2 + \int_0^t \|u_{\nu xt}\|^2 dx + \nu \int_0^t \|u_{\nu xxt}\|^2 \leq c_{33}\left(\|u_{\nu 0}\|^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu\|u_{\nu xxxx}(0)\|^2\right) \tag{3.38}
$$

□

Combinando as estimativas (3.31) e (3.35) e usando os teoremas de imersão de espaços de Sobolev, temos que:

$$\begin{aligned} u_\nu &\in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ u_{\nu t} &\in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \sqrt{\nu}u_\nu &\in L^2(0,T;H^2(0,L)) \\ \sqrt{\nu}u_{\nu t} &\in L^2(0,T;H^2(0,L)) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u_\nu &\in C(0,T;H_0^1(0,L)) \\ \sqrt{\nu}u_\nu &\in C(0,T;H^2(0,L)) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Segue de (3.30) e dos lemas 4 e 5 que:

$$(u_{\nu tt},v)+((u_\nu u_{\nu x})_t,v)+(u_{\nu xxxt},v)+\nu(u_{\nu xxt},v)+\nu(u_{\nu xxxxt},v)+(a(x)u_{\nu t},v)=0 \tag{3.40}$$

Portanto,

$$(u_{\nu tt},v)=(-(u_\nu u_{\nu x})_t-u_{\nu xxxt}-\nu u_{\nu xxt}-\nu u_{\nu xxxxt}-a(x)u_{\nu t},v) \tag{3.41}$$

Das limitações dadas em (3.39) podemos escrever:

$$u_{\nu tt}=-(u_\nu u_{\nu x})_t-u_{\nu xxxt}-\nu u_{\nu xxt}-\nu u_{\nu xxxxt}-a(x)u_{\nu t} \tag{3.42}$$

A igualdade dada em (3.42) é válida em $L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$, independente de ν. Antes de iniciarmos a demonstração do teorema 10, observamos que quando $\nu \to 0$ existe uma sequência de funções u_ν satisfazendo (3.30) e os lemas 5 e 6, o que implica que existe uma subsequência de u_ν, ainda denotada por u_ν, e uma função u tal que:

$$\begin{aligned} &u_\nu \to u \quad em \quad C([0,T]\times[0,L]) \\ &u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad em \quad L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)) \\ &u_{\nu t} \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad em \quad L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ &u_{\nu t} \rightharpoonup u_t \quad em \quad L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ &\nu\ u_{\nu xx} \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \quad em \quad L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \end{aligned}$$

Além disso, temos o seguinte resultado:

Teorema 11. *Seja* $u_0 \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$*,* $u_{0x} = 0$*. Então existe pelo menos uma solução fraca do problema (1.3) tal que:*

$$\begin{aligned} &u \in C(0,T;H_0^1(0,L)) \\ &u_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \end{aligned} \tag{3.43}$$

satisfazendo a seguinte igualdade:

$$(u_t, v) + (uu_x, v) + (u_x, v_{xx}) + (a(x)u, v) = 0 \tag{3.44}$$

onde $v(x,t)$ *é uma função arbitrária de*

$$W = \left\{v \in L^\infty(0,T;H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)); v_x(0,t) = 0, t \in (0,T)\right\}$$

A equação (3.44) é dita formulação variacional abstrata, ou formulação fraca do problema (1.3). Essa formulação é necessária para a aplicação do método dos Elementos Finitos. Esse assunto será melhor discutido no próximo capítulo. As funções $v \in W$ também pertencem ao espaço onde estão as soluções aproximadas do problema. Logo, as formulações fraca e clássica são equivalentes e portanto conduzem para a mesma solução.

Prova. Já sabemos pelo teorema 9, que para todo $\nu \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ a identidade dada em (3.30) é verificada para uma função v arbitrária em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$. Em particular podemos tomar v como sendo uma função de W.

Usando as condições de fronteira de (3.1), podemos reescrever (3.30), após integração por partes dos terceiro e quinto termos, como:

$$(u_{\nu t}, v) + (u_\nu u_{\nu x}, v) + (u_{\nu x}, v_{xx}) + \nu(u_{\nu xx}, v) + \nu(u_{\nu xx}, v_{xx}) + (a(x)u_\nu, v) = 0 \tag{3.45}$$

Fazendo $\nu \to 0$ em (3.45) temos:

$$(u_t, v) + (uu_x, v) + (u_x, v_{xx}) + (a(x)u, v) = 0 \tag{3.46}$$

para todo $t \in (0,T)$ e $\forall v \in W$.

As condições de fronteira $u(0,t) = u(L,t) = 0$ são claramente satisfeitas, e a condição de fronteira $u_x(L,t) = 0$ é satisfeita no sentido fraco. A função $u_0 \in H^4(0,L)$ no teorema 9 satisfaz as seguites condições de contorno:

$$u_0(0) = \nu\ u_{0xx}(0) = u_0(L) = u_{0x}(L) + \nu\ u_{0xx}(L) = 0$$

Então, quando $\nu \to 0$, vale:

$$u_0(0) = u_0(L) = u_{0x}(L) = 0$$

□

Considerando as propriedade de u, podemos reescrever (3.46) da seguinte forma:

$$(u_x, v_{xx}) = -(u_t, v) - (uu_x, v) - (a(x)u, v) = (F, v) \tag{3.47}$$

onde $F = -u_t - uu_x - a(x)u \in L^2(0,L)$. Isto significa que u é uma solução fraca do seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} u_{xxxx} = F(x) \\ u(0) = u(L) = u_x(L) = 0 \end{cases} \tag{3.48}$$

Devemos mostrar que a solução fraca do teorema 11 é regular, e para isto, vamos usar o seguinte lema.

Lema 7. *A solução fraca de (3.48) é unicamente definida.*

Prova. Ver LARKIN (2004) □

Feito isso, observamos que, por outro lado a função

$$u_0(x) = k_1 + k_2 x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x z^2 F(z)dz - x\int_0^x zF(z)dz + \frac{x^2}{2}\int_0^x F(z)dz$$

pertence a $H^3(0,L)$, pois u_0, u_{0x}, u_{0xx} e $u_{0xxx} \in L^2(0,L)$, já que as parcelas de cada uma dessas funções pertence a $L^2(0,L)$. Além disso, $u_0(0) = 0$ para qualquer $F \in L^2(0,L)$ e satisfaz a equação

$$u_{0xxx} = F(x) \tag{3.49}$$

Conhecida a função F, as constantes k_1 e k_2 podem ser encontradas de modo que as condições de contorno $u_0(L) = u_{0x}(L) = 0$ sejam satisfeitas. Multiplicando (3.54) por $v \in W$ e integrando por partes, usando as condições de contorno dadas acima, segue que:

$$(u_{0x}, v_{xx}) = (F, v) \quad \forall\, t \in (0,T) \tag{3.50}$$

Subtraindo (3.47) de (3.55) chegamos a:

$$((u - u_0), v_{xx}) = 0 \tag{3.51}$$

Do lema 7 concluímos que $u - u_0 = 0 \;\Rightarrow\; u = u_0$ em $(0,L)$. Com já mostramos que $u_0 \in H^3(0,L)$ então, pela igualdade, $u \in H^3(0,L)$. Voltando em (3.47) obtemos que:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + a(x)u = 0 \\ u(0) = u(L) = u_x(L) = 0 \\ u(x,0) = u_{0x} \end{cases}$$

Acabamos de mostrar a existência de soluções regulares para (1.3) quando $u_0 \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e $u_{0x}(L) = 0$. Finalmente, a demonstração do teorema 10, consiste em mostrar a existência de soluções com dados iniciais mais fracos, isto é, $u_0 \in H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L)$.

Prova. (Teorema 10) Para enfraquecer a condição sobre o dado inicial do problema, observamos que de (3.14), precisamos que $u_0 \in L^2(0,L)$. De (3.35), omitindo o terceiro termo positivo do lado esquerdo, passamos o limite quando $\nu \to 0$ e chegamos a:

$$\|u_t\|^2 + \int_0^L \|u_{xs}\|^2 dx \le c_{33}\|u_0\|^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}$$

com c_{33} não dependente de ν.

Portanto, aproximando as funções $u_0 \in H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ tal que $u_{0x}(L) = 0$ por funções $u_{0m} \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ garantimos a existência de soluções para o problema (3.1). E fica assim provado a existência de solução. Para mostrar a unicidade, consideramos u_1 e u_2 duas soluções distintas de (3.47). Tomamos $w = u_1 - u_2$, temos então que:

$$\begin{cases} w_t + \dfrac{1}{2}\left[(u_1+u_2)w\right]x + w_{xxx} + a(x)w = 0 \\ w(t,0) = w(t,L) = w_x(t,L) = 0 \\ w(0,x) = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

Multiplicamos a equação dada do sistema (3.52) por $e^{\lambda x}w$ e integramos de 0 até L. Temos que:

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, w^2) - \underbrace{(e^{\lambda x}w_x, (u_1+u_2)w)}_{I_1} - \underbrace{\lambda(e^{\lambda x}, (u_1+u_2)w^2)}_{I_2} + \underbrace{(e^{\lambda x}w_{xxx}, w)}_{I_3} = - \underbrace{(a(x)e^{\lambda x}, w^2)}_{I_4} \tag{3.53}$$

Analisaremos, como feito anteriormente, cada parcela de (3.54). Temos:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_0^L e^{\lambda x} w_x (u_1+u_2) w dx \geq \int_0^L |e^{\lambda x}||ww_x||(u_1+u_2)|dx \\ &\geq -\|u_1+u_2\|_{L^\infty} \int_0^L e^{\lambda x}|ww_x|dx \geq -M\int_0^L e^{\lambda x}\left(\sqrt{2\epsilon}|w_x|\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}|w|\right)dx \\ &\geq -M\epsilon\int_0^L e^{\lambda x}w_x^2dx - \frac{M}{4\epsilon}\int_0^L e^{\lambda x}w^2dx \\ &\geq -\varepsilon(e^{\lambda x}, w_x^2) - c_{34}(\varepsilon)(e^{\lambda x}, w^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -\lambda\int_0^L e^{\lambda x}(u_1+u_2)w^2dx \geq -\lambda\int_0^L |e^{\lambda x}||u_1+u_2||w^2|dx \\ &\geq -\lambda M\int_0^L e^{\lambda x}|w|^2dx = -\lambda M(e^{\lambda x}, w^2) \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^L e^{\lambda x}w_{xxx}wdx = w_x^2(0,t) + 3\lambda(e^{\lambda x}, w_x^2) - \lambda^3(e^{\lambda x}, w^2)$$

$$I_4 \quad = \quad -\int_0^L a(x)e^{\lambda x}w^2dx \leq \|a(x)\|_{L^\infty}\int_0^L e^{\lambda x}w^2 = \|a(x)\|_{L^\infty}(e^{\lambda x}, w^2)$$

Substituindo essas estimativas em (3.54), temos que:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, w^2) + w_x^2(0,t) + & & \\ +3\lambda(e^{\lambda x}, w_x^2) - \lambda^3(e^{\lambda x}, w^2) & \leq & \varepsilon(e^{\lambda x}, w_x^2) + c_{34}(\varepsilon)(e^{\lambda x}, w^2) + \lambda M(e^{\lambda x}, w^2) + \\ & & +\|a(x)\|_{L^\infty}(e^{\lambda x}, w^2) \end{array}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, w^2) + w_x^2(0,t) + (3\lambda - \varepsilon)(e^{\lambda x}, w_x^2) \leq \left(\lambda^3 + c_{34}(\varepsilon) + \lambda M + \|a(x)\|_{L^\infty}\right)(e^{\lambda x}, w^2) \tag{3.54}$$

com λ e ε constantes positivas arbitrárias. Tomamos $\lambda = 1$ e $\varepsilon = 2$ em (3.54) e obtemos que:

$$\frac{d}{dt}(e^x, w^2) + w_x^2(0,t) + (e^x, w_x^2) \leq \underbrace{(1 + c_{34}(1) + M + \|a(x)\|_{L^\infty})}_{c_{35}}(e^x, w^2)$$

Como $w_x^2(0,t) > 0$, segue então que:

$$\frac{d}{dt}(e^x, w^2) + (e^x, w_x^2) \leq c_{35}(e^x, w^2) \tag{3.55}$$

Integrando (3.55) de 0 até t,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^x, w^2)dt + \int_0^t (e^x, w_x^2)dt \leq c_{35}\int_0^t (e^x, w^2)dt$$

$$(e^x, w^2)(t) - (e^x, w^2)(0) + \int_0^t (e^x, w_x^2)dt \leq c_{35}\int_0^t (e^x, w^2)dt$$

$$(e^x, w^2)(t) + \int_0^t (e^x, w_x^2)dt \leq (e^x, w^2)(0) + c_{35}\int_0^t (e^x, w^2)dt$$

Em particular vale que:

$$(e^x, w^2) \leq c_{35}\int_0^t (e^x, w^2)dt \tag{3.56}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.56), concluímos que $(e^x, w^2) = 0$, o que implica que $\|w\| = 0$. Sendo assim, $w = 0$ $\forall t \in (0, T)$. Portanto $u_1 = u_2$. $\square$

3.3 Decaimento da Energia

Nesta seção vamos analisar a influência do termo de mecanismo dissipativo $a(x)$ na energia do sistema estudado. Faremos essa análise baseada no artigo MENZALA; ZUAZUA; VASCONCELLOS (2002).

Vamos começar a análise tratando da equação sem os termos de regularização, isto é, a equação dada em (1.3). A energia total desse sistema é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u(t,x)|^2 dx \tag{3.57}$$

Para mostrar o decaimento da energia no sistema (1.3), devemos mostrar que:

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0 \tag{3.58}$$

Multiplicando a equação em (1.3) por u e integrando de 0 até L, temos que:

$$\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2 dx + \int_0^L u_{xxx}u dx + \int_0^L u^2 u_x dx + \int_0^L a(x)u^2 dx = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2 dx &= -\int_0^L u_{xxx}u dx - \int_0^L u^2 u_x dx - \int_0^L a(x)u^2 dx \\ &= -\frac{1}{2}u_x^2(t,0) - \int_0^L a(x)u^2 dx \leq 0\end{aligned}$$

E portanto, chegamos a:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}u_x^2(t,0) - \int_0^L a(x)u^2 dx \leq 0 \tag{3.59}$$

Já no caso em que a equação apresenta os termos de regularização, isto é, a equação dada em (3.1), temos a energia total do sistema dada como em (3.57). No artigo LARKIN (2004) foi demonstrado um resultado sobre o decaimento das soluções para a equação (3.1) sem o termo $a(x)$ (ver Teorema 5.2). A seguir, é feita uma análise da mesma equação mas agora na presença desse termo.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx + \nu\int_0^L u_{xx}udx &= -\int_0^L u_{xxx}udx - \nu\int_0^L u_{xxxx}udx - \\
&\quad -\int_0^L u^2u_xdx - \int_0^L a(x)u^2dx \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx - \nu\int_0^L u_x^2dx &= -\frac{1}{2}u_x^2(0,t) - u_x^2(L,t) - \nu\int_0^L u_{xx}^2dx \\
&\quad -\int_0^L a(x)u^2dx
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré chegamos a:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx - \nu C\|u_{xx}\|^2 \leq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx - \nu\|u_x\|^2 &= -\frac{1}{2}u_x^2(0,t) - u_x^2(L,t) - \\
&\quad \nu\|u_{xx}\|^2 - \int_0^L a(x)u^2dx
\end{aligned}$$

onde C é dita a constante de Poincaré. Essa constante é de difícil determinação. Contudo, quando estamos considerando o espaço de Sobolev $W^{1,2}$, ou seja, $p = 2$, essa constante é tomada como $\dfrac{d}{\pi}$ (ver o artigo PAYNE; WEINBERGER (1960)), onde d é o diâmetro do domínio. Como no nosso caso o domínio é o intervalo $(0, L)$, então $d = L$. Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx - \nu\frac{L}{\pi}\|u_{xx}\|^2 \leq -\frac{1}{2}u_x^2(0,t) - u_x^2(L,t) - \nu\|u_{xx}\|^2 - \int_0^L a(x)u^2dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx \leq -\frac{1}{2}u_x^2(0,t) - u_x^2(L,t) - \left(\nu - \nu\frac{L}{\pi}\right)\|u_{xx}\|^2 - \int_0^L a(x)u^2dx \quad (3.60)$$

Observe que o lado direito da desigualdade (3.60) é menor ou igual a zero sempre que $L < \pi$, o que nos leva a concluir que a energia nesse caso satisfaz

$$\frac{d}{dt}E_{reg}(t) \leq 0 \quad (3.61)$$

sendo portanto decrescente, onde E_{reg} denota a energia total do sistema regularizado.

4 ANÁLISE NUMÉRICA

Neste capítulo faremos um estudo sobre a convergência dos métodos numéricos utilizados para a resolução do modelo linear da equação de Korteweg-de Vries com termo de damping, dado por:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + a(x)u = 0 \quad em \quad (0,T) \times (0,L) \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in (0,L) \end{cases} \tag{4.1}$$

No capítulo anterior utilizamos um modelo regularizado, dado em (3.1), para mostrar a existência e unicidade de solução do problema. Portanto, durante a análise numérica, vamos considerar a versão regularizada de (4.1), dada por:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + \nu u_{xx} + \nu u_{xxxx} + a(x)u = 0 \quad em \quad (0,T) \times (0,L) \\ u(0,t) = \nu u_{xx}(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) + \nu u_{xx}(L,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in (0,L) \end{cases} \tag{4.2}$$

Apresentaremos algumas estimativas de erros em espaços de Sobolev, obtidas entre a solução exata $u(x,t)$ e a solução aproximada $u_m(x,t) = u_h(t)$ de (4.2), obtida pelo método dos Elementos Finitos. Vamos dividir o capítulo essencialmente em duas seções: uma relativa a análise do problema semi-discreto, isto é, quando consideramos apenas a variável espacial sendo discretizada e a variável temporal permanecendo contínua, e outra relativa a análise do problema discreto, ou seja, quando as duas variáveis são discretizadas.

Já vimos que, de uma maneira geral, a solução aproximada de um problema pode ser escrita como uma combinação linear das funções que compõe a base do espaço à qual essa solução pertence, como pode ser visto na equação (1.4). Vamos, a seguir, introduzir a ideia do método dos Elementos Finitos que permite o cálculo dessa solução aproximada.

4.1 Método dos Elementos Finitos

Em cada um dos métodos numéricos de projeção, o problema computacional mais importante é resolver um sistema de equações, lineares ou não lineares. Logo, é importante que a matriz dos coeficientes tenha algumas propriedades que facilitem a resolução desse sistema e que a tornem uma matriz bem condicionada.

A matriz dos coeficientes, depende fundamentalmente das funções base que geram o subespaço onde estamos procurando a solução aproximada. Portanto, a ideia principal do método dos elementos finitos é introduzir funções base de suporte pequeno, localizado nos pontos nodais dos elementos, isto é, escolhemos funções que assumem alguns valores no intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ e se anulam foram desse intervalo. Essa escolha faz com que a matriz dos coeficientes se torne uma matriz em banda, o que facilita e diminui muito o número de operações necessárias para a resolução do sistema.

A escolha dessas funções base depende basicamente da regularidade esperada pela solução do problema considerado. Neste trabalho, usaremos como base do espaço de soluções o conjunto de funções formado por polinômios de Hermite, assunto que será melhor discutido no próximo capítulo.

De um modo geral, as funções da base são polinômios de grau k definidas em cada elemento finito Ω_e. A partir do grau desses polinômios, definimos o espaço de elementos finitos $V_m^k(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, onde

$$V_m = V_m^k(\Omega) = \{v_h \in V; v_h^e \in P_k(\Omega_e)\}$$

e v_h^e denota a restrição de v_h ao elemento e e P_k é o conjunto de polinômios definidos em Ω_e com graus menores ou iguais a k na variável x.

4.2 Formulação Variacional

Como foi comentado no capítulo anterior, o método dos Elementos Finitos não pode ser aplicado diretamente na equação dada no sistema (4.2). Para utilizar o método é necessário determinarmos a formulação variacional do problema, também conhecida como formulação fraca. A formulação matemática original, dada em (4.2), denomina-se forma clássica ou forte.

Para obter a formulação variacional tomaremos funções $v \in \mathcal{D}(0, L)$. O conjunto $\mathcal{D}(0, L) = \{v \in C^\infty(0, L); v(0) = v(L) = 0\}$ é chamado espaço das funções teste com suporte compacto. Multiplicando a equação (4.2) por v e integrando de 0 até L, usando as condições de fronteira sobre u, chegamos a:

$$\begin{cases} (u_t, v)(t) + (u_x, v_{xx})(t) + \nu(u_{xx}, v)(t) + \nu(u_{xx}, v_{xx})(t) + \\ \quad +(a(x)u, v)(t) + v_x(0)u_x(0, t) = 0 \\ (u, v)(0) = (u_0, v) \end{cases} \tag{4.3}$$

Observe que, para que a formulação fraca do problema dada em (4.3) tenha sentido, as funções $u, u_x, u_{xx} \in L^2(0, L)$ e $u(0, t) = u(L, t) = u_x(L, t) = 0$. Logo, definimos $V = \{v \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L); v_x(L) = 0\}$ e tomamos $v \in V$.

Como $\mathcal{D}(0,L)$ é denso em $H^2(0,L)$ e $V \subset H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$, então $\mathcal{D}(0,L)$ é denso em V. Portanto, no caso contínuo, o objetivo é determinar uma função $u : [0,T] \longrightarrow H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ que seja solução de (4.3), para $v \in V$.

De outra maneira, temos:

$$\begin{cases} (u_t, v) + a(u,v) + v_x(0)u_x(0,t) = 0 \\ (u(0), v) = (u_0, v) \end{cases} \tag{4.4}$$

considerando $a(u,v) = (u_x, v_{xx}) + \nu(u_{xx}, v) + \nu(u_{xx}, v_{xx}) + (a(x)u, v)$ e $v \in V$.

Já para o problema semi-discreto, o objetivo é determinar $u_h : [0,T] \longrightarrow V_m$ solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} (u_h^{'}, v_h) + a(u_h, v_h) + v_{hx}(0,t)u_{hx}(0,t) = 0 \\ (u_h(0), v_h) = (u_{0h}, v_h) \end{cases} \tag{4.5}$$

sendo $a(u,v)$ a mesma forma definida anteriormente e $v_h \in V_m = V_m^3 \subset H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$.

Antes da análise nos casos contínuo e discreto, vamos enunciar e provar a seguinte proposição:

Proposição 5. *A forma $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $a(u,v) = (u_x, v_{xx}) + \nu(u_{xx}, v) + \nu(u_{xx}, v_{xx}) + (a(x)u, v)$ é bilinear, contínua e coerciva em V.*

Prova. Começaremos mostrando a bilinearidade. De fato,

$$\begin{aligned}
a(u+w,v) &= ((u+w)_x, v_{xx}) + \nu((u+w)_{xx}, v) + \nu((u+w)_{xx}, v_{xx}) + (a(x)(u+w), v) \\
&= (u_x + w_x, v_{xx}) + \nu(u_{xx} + w_{xx}, v) + \nu(u_{xx} + w_{xx}, v_{xx}) + (a(x)u + a(x)w, v) \\
&= \int_0^L (u_x + w_x)v_{xx}dx + \nu \int_0^L (u_{xx} + w_{xx})vdx + \nu \int_0^L (u_{xx} + w_{xx})v_{xx}dx + \\
&\quad + \int_0^L (a(x)u + a(x)w)vdx \\
&= \int_0^L u_x v_{xx}dx + \int_0^L w_x v_{xx}dx + \nu \int_0^L u_{xx}vdx + \nu \int_0^L w_{xx}vdx + \\
&\quad +\nu \int_0^L u_{xx}v_{xx}dx + \nu \int_0^L w_{xx}v_{xx}dx + \int_0^L a(x)uvdx + \int_0^L a(x)wvdx \\
&= a(u,v) + a(w,v)
\end{aligned}$$

Analogamente, usando as mesmas propriedades de linearidade das operações de derivação e integração, podemos concluir que:

$$\begin{gathered}
a(u+w,v) = a(u,v) + a(w,v) \\
a(u,v+w) = a(u,v) + a(u,w) \\
a(\alpha u, v) = \alpha a(u,v) \\
a(u, \alpha v) = \alpha a(u,v)
\end{gathered}$$

Essas quatro identidades nos permitem afirmar que a forma $a(u,v)$ é bilinear. Para mostrar a continuidade fazemos:

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_0^L u_x v_{xx}dx + \nu \int_0^L u_{xx}vdx + \nu \int_0^L u_{xx}v_{xx}dx + \int_0^L a(x)uvdx \\
&= \int_0^L u_x v_{xx}dx + \nu \left[(vu_x)_0^L - \int_0^L u_x v_x dx \right] + \nu \int_0^L u_{xx}v_{xx}dx + \int_0^L a(x)uvdx \\
&= \int_0^L u_x v_{xx}dx - \nu \int_0^L u_x v_x dx + \nu \int_0^L u_{xx}v_{xx}dx + \int_0^L a(x)uvdx
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_0^L u_x v_{xx} dx - \nu \int_0^L u_x v_x dx + \nu \int_0^L u_{xx} v_{xx} dx + \int_0^L a(x) uv dx \right| \\
&\leq \left| \int_0^L u_x v_{xx} dx \right| + \left| -\nu \int_0^L u_x v_x dx \right| + \nu \left| \int_0^L u_{xx} v_{xx} dx \right| + \left| \int_0^L a(x) uv dx \right| \\
&\leq \int_0^L |u_x||v_{xx}| dx + \nu \int_0^L |u_x||v_x| dx + \nu \int_0^L |u_{xx}||v_{xx}| dx + \int_0^L |a(x)||u||v| dx \\
&\leq \|u_x\|\|v_{xx}\| + \nu \|u_x\|\|v_x\| + \nu \|u_{xx}\|\|v_{xx}\| + \|a(x)\|_{L^\infty}\|u\|\|v\| \\
&\leq \underbrace{max\left\{1, \nu, \|a(x)\|_{L^\infty}\right\}}_{c_1(\nu)} \left(\|u\| + \|u_x\| + \|u_{xx}\|\right)\left(\|v\| + \|v_x\| + \|v_{xx}\|\right) \\
&\leq c_1(\nu)\|u\|_{H^2(0,L)}\|v\|_{H^2(0,L)}
\end{aligned}$$

sendo portanto a forma $a(u,v)$ contínua.

Para mostrar a coercividade fazemos

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= (v_x, v_{xx}) + \nu(v_{xx}, v) + \nu(v_{xx}, v_{xx}) + (a(x)v, v) \\
&= \int_0^L v_x v_{xx} dx + \nu \int_0^L v_{xx} v dx + \nu \int_0^L v_{xx}^2 dx + \int_0^L a(x) v^2 dx \\
&= \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dx} v_x^2 dx + \nu \int_0^L v_{xx} v dx + \nu \int_0^L v_{xx}^2 dx + \int_0^L a(x) v^2 dx \\
&= \frac{1}{2} v_x^2(L) - \frac{1}{2} v_x^2(0) + \nu \int_0^L v_{xx} v dx + \nu \int_0^L v_{xx}^2 dx + \int_0^L a(x) v^2 dx \\
&= (\nu + \varepsilon)\frac{\nu}{2} \int_0^L v_{xx} v dx - \varepsilon \int_0^L v_{xx} v dx + \nu \int_0^L v_{xx}^2 dx + \int_0^L a(x) v^2 dx \\
&\geq -\frac{\nu + \varepsilon}{2} \int_0^L \left(v_{xx}^2 + v^2\right) dx + \varepsilon \int_0^L v_x^2 dx + \nu \int_0^L v_{xx}^2 + a_0 \int_0^L v^2 dx \\
&\geq \left(\nu - \frac{h + \varepsilon}{2}\right) \int_0^L v_{xx}^2 dx + \varepsilon \int_0^L v_x^2 dx + \left(a_0 - \frac{\nu + \varepsilon}{2}\right) \int_0^L v^2 dx \\
&\geq \underbrace{min\left\{\nu - \frac{\nu + \varepsilon}{2}, \varepsilon, a_0 - \frac{\nu + \varepsilon}{2}\right\}}_{c_2} \int_0^L (v^2 + v_x^2 + v_{xx}^2) dx \\
&\geq c_2 \|v\|_{H^2(0,L)}^2
\end{aligned}$$

tomando ε uma constante arbitrária positiva qualquer. Como,

$$a(v, v) \geq c_2 \|v\|^2_{H^2(0,L)}$$

concluímos que a forma bilinear é coerciva. $\square$

Demonstrada a proposição 5, garantimos pelo teorema de Lax-Milgram que os problemas variacionais abstratos dados em (4.4) e (4.5) tem uma única solução $u, u_h \in V$.

4.3 Tempo Contínuo

Nesta seção, o objetivo principal é fazer estimativas do erro entre as soluções exata e aproximada do problema, isto é, estimar $\|u(t) - u_h(t)\|$ em elementos finitos, para cada $t \in [0, T]$ fixo, em que $u(t)$ e $u_h(t)$ são soluções dos problemas (4.4) e (4.5) respectivamente.

Já foi provado (ver página 90 do livro RINCON; LIU (2011)) que quando o problema é estacionário, a solução aproximada $u_h \in V_m^k$ obtida pelo método de Galerkin é a projeção ortogonal da solução u no subespaço V_m^k com respeito a forma bilinear $a(.,.)$, isto é, $a(u - u_h, v) = 0 \ \forall v \in V_m^k$. Como no nosso caso a solução do problema (4.4) é dependente do tempo, esse resultado passa a não ser mais verdadeiro.

Contudo, podemos definir uma projeção ortogonal, denominada projeção ortogonal de Rayleigh-Ritz, com respeito a forma bilinear $a(.,.)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P \ &: \ V \longrightarrow V_m^k \\ &u(t) \longmapsto Pu(t) = \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

tal que,

$$a(u(t)-\tilde{u}(t),v_h)=0 \ \ \forall v_h \in V_m^k, \ para \ cada \ t \ fixo \tag{4.6}$$

A projeção $\tilde{u}$ pode ser vista como a solução $u_h \in V_m^k$ obtida pelo método de Galerkin, e ela será usada como uma solução intermediário entre a solução exata $u(t)$ do problema (4.4) e a solução aproximada $u_h(t)$ do problema (4.5).

Podemos observar ainda que, sendo $\tilde{u} \in V_m^k$, podemos escrevê-la como uma combinação linear das funções que compõem a base do espaço V_m^k, isto é,

$$\tilde{u}(x,t)=\sum_{i=1}^{m} u_{im}(t)\phi_i(x) \tag{4.7}$$

De (4.7), podemos denominar a projeção $\tilde{u}$ também como interpolante de u em V_m^k. Isso será importante pois, sendo $\tilde{u}$ interpolante, podemos decompor o cálculo do erro em duas partes, isto é,

$$e(t)=|u(t)-u_h(t)|=|(u-\tilde{u})(t)+(\tilde{u}-u_h)(t)| \tag{4.8}$$

A primeira parcela do lado direito de (4.8) já tem estimativa dada pelo lema que será enunciado a seguir (Estimativa Ótima em Espaços de Sobolev), restando apenas estimar a segunda parcela no subespaço V_m^k.

Lema 8 (Estimativa Ótima em Espaços de Sobolev)**.** *Seja $u(t) \in H^{k+1}$ e $\tilde{u} \in V_m^k$. Então, para cada t fixo, vale que:*

$$\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_m \leq ch^{k+1-m}\|u(t)\|_{k+1} \tag{4.9}$$

onde $k \geq 1$ é o grau do polinômio interpolador da função base que gera o subespaço vetorial de dimensão finita e $m \leq k$

Prova. Ver em ZIENKIEWICZ (2005) □

Um outro lema importante ao longo da demonstração deve ser citado antes da prova do teorema principal dessa seção.

Lema 9 (Douglas e Dupont)**.** *Sejam* $u(.,t)$*,* $u^{'}(.,t)$ *e* $u^{''}(.,t) \in H^{k+1}(0,L)$*, para todo* $t \in [0,T]$ *e seja* $\tilde{u}(.,t)$ *o interpolador de* $u(.,t)$ *em* V_m^k *para cada* $t \in [0,T]$*. Então,* $u^{'}(.,t)$ *satisfaz a mesma estimativa para o erro da interpolação de* $u(.,t)$*, ou seja,*

$$\|u^{'}(t) - \tilde{u}^{'}(t)\|_m \leq \tilde{c}h^{k+1-m}\|u^{'}(t)\|_{k+1} \tag{4.10}$$

onde $m \leq k$*,* $k \geq 1$ *e* $\tilde{c}$ *é uma constante positiva independente de* $u(t)$ *e* h*.*

Prova. Ver em DOUGLAS; DUPONT (1970) □

Com os resultados dados nos lemas 8 e 9 somos capazes de fazer a estimativa entre as soluções exata e aproximada, considerando o tempo contínuo. Neste trabalho, como vamos utilizar a base formada por polinômios cúbicos de Hermite, consideraremos $k = 3$. As estimativas serão obtidas em relação a norma $L^2(0,L)$, logo $m = 0$. A estimativa no tempo contínuo é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 12. *Seja* $u(t)$ *sob as hipóteses do lema 9. Então, o erro absoluto da aproximação de método do Elementos Finitos, dado por (4.8), para cada* $t \in [0,T]$ *satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(0,L)} \leq c_6 h^4 \|u(t)\|_{H^4(0,L)} \tag{4.11}$$

Prova. Começamos a demonstração observando que a formulação variacional do problema, dada na equação em (4.4), também é válida se tomarmos $v = v_h$ com $v_h \in V_m^k$, pois $V_m^k \subset H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$. Portanto,

$$(u^{'}(t), v_h) + a(u(t), v_h) + v_{hx}(0,t)u_{hx}(0,t) = 0 \tag{4.12}$$

Subtraindo as equações (4.12) e (4.5) e somando e subtraindo as funções $\tilde{u}^{'}$ e $\tilde{u}$ nas primeira e segunda parcelas respectivamente, chegamos a:

$$(u^{'} - \tilde{u}^{'} + \tilde{u}^{'} - u_h^{'}, v_h) + a(u - \tilde{u} + \tilde{u} - u_h, v_h) = 0 \tag{4.13}$$

Sabemos que o erro de aproximação dado por $e = u - u_h$ pode ser decomposto e escrito em função da solução interpolante $\tilde{u}$, como em (4.8), isto é,

$$e(t) = u(t) - u_h(t) = u(t) - \tilde{u}(t) + \tilde{u}(t) - u_h(t) = \rho(t) - \xi(t) \tag{4.14}$$

Usando a linearidade do produto interno em $L^2(0, L)$ e da forma bilinear $a(.,.)$ e a decomposição do erro dado em (4.14), reescrevemos (4.13) como:

$$(\rho^{'}(t), v_h) + (\xi^{'}(t), v_h) + a(\rho(t), v_h) + a(\xi(t), v_h) = 0$$

Pela definição da projeção dada em (4.6), segue que:

$$(\xi^{'}(t), v_h) + a(\xi(t), v_h) = -\ (\rho^{'}(t), v_h) \tag{4.15}$$

Analisaremos cada parcela de (4.15) separadamente quando consideramos $v_h = \xi(t)$. Temos:

$$(\xi^{'}, \xi) \ = \ \int_0^L \xi^{'}\xi dx = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\xi^2(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi(t)\|^2$$

A segunda parcela, $a(\xi(t), v_h)$ é dada por:

$$a(\xi, \xi) = \underbrace{(\xi_x, \xi_{xx})}_{I_1} + \underbrace{\nu(\xi_{xx}, \xi)}_{I_2} + \underbrace{\nu(\xi_{xx}, \xi_{xx})}_{I_3} + \underbrace{(a(x)\xi, \xi)}_{I_4}$$

com,

$$I_1 \ = \ (\xi_x, \xi_{xx}) = \int_0^L \xi_x\xi_{xx}dx = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\xi_x^2 dx = \frac{1}{2}\xi_x^2(L, t) - \frac{1}{2}\xi_x^2(0, t)$$

$$\begin{aligned} I_2 \ &= \ \nu(\xi_{xx}, \xi) = \nu \ \int_0^L \xi_{xx}\xi dx \geq -\nu \ \int_0^L |\xi_{xx}||\xi| dx \\ &\geq \ -\nu \ \|\xi_{xx}\|\|\xi\| \geq -\frac{h}{2}\|\xi_{xx}\|^2 - \frac{h}{2}\|\xi\|^2 \end{aligned}$$

$$I_3 = \nu(\xi_{xx}, \xi_{xx}) = \nu \int_0^L \xi_{xx}^2 dx = \nu \|\xi_{xx}\|^2$$

$$I_4 = (a(x)\xi, \xi) = \int_0^L a(x)\xi^2 dx \geq -\int_0^L |a(x)||\xi|^2 dx \geq -\|a(x)\|_{L^\infty} \|\xi\|^2$$

Por fim, o lado direito de (4.15):

$$-(\rho'(t), \xi) = -\int_0^L \rho' \xi dx \leq \int_0^L |\rho'||\xi| dx \leq \|\rho'\|\|\xi\| \leq \frac{1}{2}\|\rho'\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi\|^2$$

Substituindo as integrais dadas acima em (4.15) temos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi(t)\|^2 + \frac{1}{2}\xi_x^2(L,t) - \frac{1}{2}\xi_x^2(0,t) + \nu\ \|\xi_{xx}\|^2 \\ &\quad \leq \|a(x)\|_{L^\infty(0,L)}\|\xi\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\xi_{xx}\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\xi\|^2 + \frac{1}{2}\|\rho'\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi\|^2 \end{aligned}$$

Multiplicando a equação anterior por 2 e integrando de 0 até t segue que:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{d}{dt}\|\xi(t)\|^2 dt + \int_0^t \xi_x^2(L,t)dt + 2\nu \int_0^t \|\xi_{xx}\|^2 dt \\ &\quad \leq (2\|a(x)\|_{L^\infty} + \nu + 1)\int_0^t \|\xi(t)\|^2 dt + \int_0^t \|\rho'\|^2 dt + \int_0^t \xi_x^2(0,t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|\xi(t)\|^2 - \|\xi(0)\|^2 + \int_0^t \xi_x^2(L,t)dt + 2\nu \int_0^t \|\xi_{xx}\|^2 dt \\ &\quad \leq (2\|a(x)\|_{L^\infty} + \nu + 1)\int_0^t \|\xi(t)\|^2 dt + \int_0^t \|\rho'\|^2 dt + \int_0^t \xi_x^2(0,t)dt \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \xi_x^2(L,t)dt + 2\nu \int_0^t \|\xi_{xx}\|^2 dt \\ &\quad \leq \|\xi(0)\|^2 + (2\|a(x)\|_{L^\infty} + \nu + 1)\int_0^t \|\xi(t)\|^2 dt + \int_0^t \|\rho'\|^2 dt + \int_0^t \xi_x^2(0,t)dt \end{aligned} \tag{4.16}$$

Do lema 9 segue que:

$$\|\rho'(t)\| = \|u'(t) - \tilde{u}'(t)\|_0 \leq \tilde{c}h^4 \|u'(t)\|_{H^4(0,L)} \tag{4.17}$$

Integrando (4.17) de 0 até t temos:

$$\int_0^t \|\rho'\|^2 dt \leq \int_0^t \tilde{c}^2 h^8 \|u'(t)\|^2_{H^4(0,L)} dt \leq \tilde{c}^2 h^8 \int_0^t \|u'(t)\|^2_{H^4(0,L)} dt \tag{4.18}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (4.16) e usando a estimativa dada em (4.18) podemos escrever:

$$\begin{aligned} &\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \xi_x^2(L,t)dt + 2\nu \int_0^t \|\xi_{xx}\|^2 dt \\ &\leq \|\xi(0)\|^2 e^{(2\|a(x)\|_{L^\infty}+\nu+1)} + \tilde{c}^2 h^8 \int_0^t \|u^{'}(t)\|^2_{H^4(0,L)} dt + \int_0^t \xi_x^2(0,t)dt \end{aligned} \tag{4.19}$$

Vamos analisar o termo $\|\xi(0)\|$ de (4.21). Temos que:

$$u(0) - u_h(0) = u(0) - \tilde{u}(0) + \tilde{u}(0) - u_h(0) = \rho(0) + \xi(0)$$

$$\xi(0) = u(0) - u_h(0) - \rho(0)$$

$$|\xi(0)| = |u(0) - u_h(0) - \rho(0)| \leq |u(0) - u_h(0)| + |\rho(0)|$$

Considerando no dado inicial ($t = 0$) que $u_h(0) = \tilde{u}(0)$ temos que:

$$|\xi(0)| \leq 2|\rho(0)|$$

Elevando os dois lados ao quadrado, integrando de 0 até L e usando o lema 8 na desigualdade acima, concluímos que:

$$\|\xi(0)\| \leq c_3 h^4 \|u_0\|_{H^4(0,L)} \tag{4.20}$$

Usando (4.20) e (4.18), voltamos em (4.16) e obtemos que:

$$\begin{aligned} &\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \xi_x^2(L,t)dt + 2\nu \int_0^t \|\xi_{xx}\|^2 dt \\ &\leq c_3^2 h^8 e^{(2\|a(x)\|_{L^\infty}+\nu+1)} \|u_0\|^2_{H^4(0,L)} + \tilde{c}^2 h^8 \int_0^t \|u^{'}(t)\|^2_{H^4(0,L)} dt + c_4^2 h^8 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Tomando $c_5^2(\nu) = max\left\{c_3^2 e^{(2\|a(x)\|_{L^\infty}+\nu+1)}, \tilde{c}^2, c_4^2\right\}$ vale então que:

$$\|\xi(t)\|^2 + \int_0^t \xi_x^2(L,t)dt + 2\nu \int_0^t \|\xi_{xx}\|^2 dt \leq c_5^2(\nu) h^8 \left\{\|u_0\|^2_{H^4(0,L)} + \|u^{'}(t)\|^2_{L^2(0,T;H^4(0,L))}\right\}$$

E, em particular,

$$\|\xi(t)\|^2 \leq c_5^2(\nu) h^8 \left\{\|u_0\|^2_{H^4(0,L)} + \|u^{'}(t)\|^2_{L^2(0,T;H^4(0,L))}\right\}$$

$$\|\xi(t)\| \leq c_5(\nu)h^4 \left\{\|u_0\|_{H^4(0,L)} + \|u'(t)\|_{L^2(0,T;H^4(0,L))}\right\} \tag{4.22}$$

De (4.14), (4.22), o lema 8 e as hipóteses do teorema, chegamos finalmente a:

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(0,L)} \leq c_6 h^4 \|u(t)\|_{H^4(0,L)}$$

□

4.4 Tempo Discreto

Matematicamente é possível aplicar o método de Elementos Finitos nas duas variáveis, mas ao fazer isso juntamente com a aplicação do método de Galerkin, transformamos o sistema de equações resultantes em um sistema acoplado. Esse sistema acoplado perde propriedades importantes que facilitam sua resolução, como pode ser visto no livro STRANG; FIX (1973).

Nesta seção trataremos do caso em que a variável temporal também é discretizada. Entretanto, utilzaremos o método das Diferenças Finitas como aproximação para a derivada temporal, e manteremos o método dos Elementos Finitos aplicado na variável espacial. Nosso objetivo, novamente, é determinar estimativas de erro $\|u - u_h\|$ entre as soluções exata e aproximada de (4.2).

Inicialmente, vamos definir o conceito de norma discreta para uma função w dependente do tempo t. Sendo M o número de intervalos em $[0, T]$, para $j = 0, 1, ..., M-1$ definimos a malha temporal uniforme com passo $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, e consideraremos o valor de w no tempo discreto t_j denotado por $w(t_j) = w^j$, e a aproximação da derivada temporal como:

$$\delta u^{j+\frac{1}{2}} = \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} \tag{4.23}$$

Sendo N o número de intervalos entre $[0, L]$, para $i = 0, 1, ..., N-1$ definimos a malha espacial uniforme com passo $h = x_{i+1} - x_i$ e a norma discreta em $L^2(0,L)$ como:

$$\|u\|_{L^2(0,L)} = \left(h \sum_{i=0}^{N-1} |u(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

As normas discretas nos espaços vetorias $L^2(0,T;H)$ e $L^\infty(0,T;H)$, em que $H = L^2(0,L); H_0^1(0,L); H^2(0,L)$ são dadas por:

$$\|u\|_{\widehat{L}^\infty(0,T;H)} = max \left\{ \|u^j\|_H, j = 0,1,...,M-1 \right\}$$

$$\|u\|_{\tilde{L}^\infty(0,T;H)} = max \left\{ \|u^{j+\frac{1}{2}}\|_H, j = 0,1,...,M-1 \right\}$$

$$\|u\|_{\widehat{L}^2(0,T;H)} = \Delta t \sum_{j=0}^{M-1} \|u^j\|_H^2$$

$$\|u\|_{\tilde{L}^2(0,T;H)} = \Delta t \sum_{j=0}^{M-1} \|u^{j+\frac{1}{2}}\|_H^2$$

Para enunciar e demonstrar o resultado referente a estimativa com tempo discreto, vamos enunciar o seguinte lema:

Lema 10 (Dupont)**.** *Seja w um vetor dependente do tempo tal que $w^n \in L^2(0,L)$ para $j = 0,1,2,...,M$ e suponha $\Delta t < 1$. Então,*

$$\|w^{j-\frac{1}{2}}\|_{L^2}^2 \leq c_7 \left(\|w^{1/2}\|_{L^2}^2 + \|\delta w\|_{\widehat{L}^2(0,t^j;L^2(0,L))}^2 \right)$$
$$\|w^j\|_{L^2}^2 \leq c_8 \left(\|w^0\|_{L^2}^2 + \|\delta w\|_{\widehat{L}^2(0,t^j;L^2(0,L))}^2 \right)$$

onde c_7 e c_8 são constantes independentes de w.

Estamos prontos para enunciar e demonstrar o principal teorema desta seção.

Teorema 13. *Suponha que a solução do problema (4.2) e suas derivadas tenham a seguinte regularidade:*

$$u \in L^\infty(0,T;H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L))$$
$$u_t, u_{tt}, u_{ttt} \in L^\infty(0,T;H^4(0,L))$$

Se $u_0 \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ *então a solução numérica obtida pelo método de Crank-Nicolson (aproximação da derivada no tempo como em (4.23)) satisfaz a seguinte estimativa de erro:*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c_{11}(h^4 + (\Delta t)^2) \tag{4.24}$$

em que c_{11} *é uma constante positiva, independente de* h *e* t*, com* $h \in (0,1)$.

Prova. O erro em um determinado tempo $t = t_n$ entre a solução aproximada u_h^n e a solução exata u^n é dado por:

$$e^n = u^n - u_h^n = u^n - \tilde{u}^n + \tilde{u}^n - u_h^n \tag{4.25}$$

A formulação variacional dada em (4.4) quando observada no tempo discreto $t = n + \dfrac{1}{2} = t_{n+\frac{1}{2}}$ é representada por:

$$(u_t^{n+\frac{1}{2}}, v) + a(u^{n+\frac{1}{2}}, v) + v_x(0)u_x(0, t_{n+\frac{1}{2}}) = 0 \ \forall v \in W \subset H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \tag{4.26}$$

em que a forma bilinear $a(u,v)$ e o espaço V são os mesmos considerados na seção anterior.

Somando e subtraindo o termo $(\delta u^{n+\frac{1}{2}}, v)$ em (4.26) temos:

$$(\delta u^{n+\frac{1}{2}}, v) + a(u^{n+\frac{1}{2}}, v) + v_x(0)u_x(0, t_{n+\frac{1}{2}}) = (\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}, v) \tag{4.27}$$

Observando agora a formulação variacional dada em (4.5) no mesmo tempo discreto $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ chegamos a:

$$(\delta u_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h) + a(u_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h) + v_{hx}(0)u_{hx}(0, t_{n+\frac{1}{2}}) = 0 \ \forall v_h \in V_m^k \subset W \subset H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \tag{4.28}$$

sendo (4.27) e (4.28) válidas para cada $n = 0, 1, ..., M-1$.

O próximo passo é tomar $v = v_h$ em (4.27). Segue que:

$$(\delta u^{n+\frac{1}{2}}, v_h) + a(u^{n+\frac{1}{2}}, v_h) + v_{hx}(0)u_{hx}(0, t_{n+\frac{1}{2}}) = (\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}, v_h) \tag{4.29}$$

Subtraindo (4.29) de (4.28) obtemos que:

$$(\delta u^{n+\frac{1}{2}} - \delta u_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h) + a(u^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h) = (\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}, v_h) \tag{4.30}$$

Somando e subtraindo $\delta\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}$ e $\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}$ respectivamente nas primeira e segunda parcelas de (4.30) implica que:

$$\begin{aligned}(\delta u^{n+\frac{1}{2}} - \delta\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}, v_h) + (\delta\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} - \delta u_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h) + & \\ + a(u^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{u}^{n+\frac{1}{2}}, v_h) + a(\tilde{u}^{n+\frac{1}{2}} - u_h^{n+\frac{1}{2}}, v_h) &= (\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}, v_h)\end{aligned}$$

Usando a decomposição do erro dado em (4.25) no tempo $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ e as propriedades da projeção ortogonal de Rayleigh-Ritz definida anteriormente, chegamos finalmente a:

$$\underbrace{(\delta\xi^{n+\frac{1}{2}}, v_h)}_{I_1} + \underbrace{a(\xi^{n+\frac{1}{2}}, v_h)}_{I_2} = \underbrace{(\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}, v_h)}_{I_3} - \underbrace{(\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}, v_h)}_{I_4} \tag{4.31}$$

Vamos então, analisar cada parcela de (4.31) quando tomamos $v_h = \xi^{n+\frac{1}{2}}$. Temos,

$$\begin{aligned} I_1 &= (\delta\xi^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\frac{1}{2}}) = \left(\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t}, \frac{\xi^{n+1} + \xi^n}{2}\right) = \frac{1}{2\Delta t}(\xi^{n+1} - \xi^n, \xi^{n+1} + \xi^n) \\ &= \frac{1}{2\Delta t}\left(\|\xi^{n+1}\|^1 - \|\xi^n\|^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= (\xi_x^{n+\frac{1}{2}}, \xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}) + (a(x)\xi^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\frac{1}{2}}) + \nu(\xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\frac{1}{2}}) + \nu(\xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}, \xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2}(\xi_x^{n+\frac{1}{2}})^2(L,t) - \frac{1}{2}(\xi_x^{n+\frac{1}{2}})^2(0,t) + \nu\int_0^L a(x)(\xi^{n+\frac{1}{2}})^2dx + \int_0^L \xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}\xi^{n+\frac{1}{2}}dx + \\ &\quad +\nu\|\xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= (\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\frac{1}{2}}) = \int_0^L (\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}})\xi^{n+\frac{1}{2}}dx \\ &\leq \int_0^L |\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}||\xi^{n+\frac{1}{2}}|dx \leq \|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= -(\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}, \xi^{n+\frac{1}{2}}) = -\int_0^L \delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\xi^{n+\frac{1}{2}}dx \leq \int_0^L |\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}||\xi^{n+\frac{1}{2}}|dx \\ &\leq \|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{2}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2\end{aligned}$$

Substituindo as parcelas calculadas em (4.31) temos que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\xi^{n+1}\|^2-\|\xi^n\|^2\right)+\frac{1}{2}(\xi_x^{n+\frac{1}{2}})^2(L,t)-\frac{1}{2}(\xi_x^{n+\frac{1}{2}})^2(0,t)+\nu\|\xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}\|^2\\
&\leq-\int_0^L a(x)(\xi^{n+\frac{1}{2}})^2dx-\nu\int_0^L \xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}\xi^{n+\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{2}\|\delta u^{n+\frac{1}{2}}-u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{2}\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2\\
&\quad+\frac{1}{2}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{2}\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2\\
&\leq\|a(x)\|_{L^\infty}\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{\nu^2}{2}\|\xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{2}\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{2}\|\delta u^{n+\frac{1}{2}}-u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2\\
&\quad+\frac{1}{2}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2
\end{aligned}
$$

E, portanto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\xi^{n+1}\|^2-\|\xi^n\|^2\right)+\frac{1}{2}(\xi_x^{n+\frac{1}{2}})^2(L,t)+\left(\nu-\frac{\nu^2}{2}\right)\|\xi_{xx}^{n+\frac{1}{2}}\|^2\\
&\leq\frac{1}{2}\|\delta u^{n+\frac{1}{2}}-u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{2}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\left(\|a(x)\|_{L^\infty}+\frac{3}{2}\right)\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\frac{1}{2}(\xi_x^{n+\frac{1}{2}})^2(0,t)
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Multiplicando (4.32) por $2\Delta t$, vale em particular que:

$$
\begin{aligned}
\|\xi^{n+1}\|^2-\|\xi^n\|^2 \;\leq\;& \Delta t\|\delta u^{n+\frac{1}{2}}-u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\Delta t\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\\
&+2\Delta t\left(\|a(x)\|_{L^\infty}+\frac{3}{2}\right)\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Somando (4.33) de $n=0,1,...,M-1$ temos que:

$$
\begin{aligned}
\|\xi^M\|^2-\|\xi^0\|^2 \;\leq\;& \Delta t\sum_{n=0}^{M-1}\|\delta u^{n+\frac{1}{2}}-u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\Delta t\sum_{n=0}^{M-1}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\\
&+2\Delta t\left(\|a(x)\|_{L^\infty}+\frac{3}{2}\right)\underbrace{\sum_{n=0}^{M-1}\|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2}_{*}
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

O termo em destaque (*) pode ser visto como:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{M-1} \|\xi^{n+\frac{1}{2}}\|^2 &= \sum_{n=0}^{M-1} \|\frac{\xi^{n+1}+\xi^n}{2}\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{M-1}\|\xi^{n+1}+\xi^n\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M-1}\|\xi^{n+1}\|^2 + \|\xi^n\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{M}\|\xi^n\|^2 + \sum_{n=0}^{M-1}\|\xi^n\|^2\right) \\
&\leq \sum_{n=0}^{M}\|\xi^n\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi^0\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi^M\|^2
\end{aligned}$$

Voltando em (4.34) temos então que:

$$\begin{aligned}
\|\xi^M\|^2 - \|\xi^0\|^2 &\leq \Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{M-1}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \\
&+2\Delta t\left(\|a(x)\|_{L^\infty} + \frac{3}{2}\right)\sum_{n=0}^{M}\|\xi^n\|^2 - \Delta t\left(\|a(x)\|_{L^\infty} + \frac{3}{2}\right)\|\xi^0\|^2 \\
&-\Delta t\left(\|a(x)\|_{L^\infty} + \frac{3}{2}\right)\|\xi^M\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left[1+\Delta t\left(\|a(x)\|_{L^\infty} + \frac{3}{2}\right)\right]}_{\eta_1}\|\xi^M\|^2 \leq \underbrace{\left[1-\Delta t\left(\|a(x)\|_{L^\infty} + \frac{3}{2}\right)\right]}_{\eta_2}\|\xi^0\|^2 + \\
&+\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{M-1}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + 2\Delta t\left(\|a(x)\|_{L^\infty} + \frac{3}{2}\right)\sum_{n=0}^{M}\|\xi^n\|^2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Observe que, $1 \leq \eta_1 \leq \eta_1(a(x), \Delta t)$ e, portanto, podemos dividir (4.35) por η_1. Segue que:

$$\begin{aligned}
\|\xi^M\|^2 &\leq \frac{\eta_2}{\eta_1}\|\xi^0\|^2 + \frac{\Delta t}{\eta_1}\sum_{n=0}^{M-1}\|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\Delta t}{\eta_1}\sum_{n=0}^{M-1}\|\delta\rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\
&+\Delta t\ \underbrace{\frac{2}{\eta_1}\left(\|a(x)\|_{L^\infty} + \frac{3}{2}\right)}_{c_9(\Delta t)}\sum_{n=0}^{M}\|\xi^n\|^2
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Aplicando a versão discreta do lema de Gronwall em (4.36) temos que:

$$\|\xi^M\|^2 \leq \frac{\eta_2}{\eta_1}\|\xi^0\|^2 e^{c_9} + \frac{1}{\eta_1}\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{\eta_1}\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \qquad (4.37)$$

onde $c_9 = c_9(\Delta t)$.

Vamos analisar separadamente cada parcela de (4.37). Primeiro, podemos observar que $\xi^0 = \xi(t_0) = \xi(0)$ e portanto, podemos usar a estimativa dada em (4.20). Resta analisarmos os outros dois termos. No segundo temos:

$$\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - u^n) - \frac{1}{2}(u_t^{n+1} + u_t^n)$$

Fazendo a expansão de Taylor nos termos $u(t_{n+1})$ e $u(t_n)$, considerando o truncamento de termos de ordens superiores, a expressão anterior se torna:

$$\begin{aligned}
\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[(t_n - s) + (t_{n+1} - s)\right] u^{''}(s) ds \\
&= -\frac{1}{2\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[(s - t_n) + (t_{n+1} - s)\right] u^{'''}(s) ds \\
&= -\frac{\Delta t^2}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \theta(1-\theta) u^{'''}(\theta)\, d\theta \\
&= -\frac{\Delta t^2}{8}\int_{t_n}^{t_{n+1}} u^{'''}(w)\, dw
\end{aligned}$$

Nas duas últimas passagens usamos a mudança de variável $s - t_n = \Delta t\theta$ e o fato de que no método de Crank-Nicolson temos $\theta = \dfrac{1}{2}$. Portanto,

$$\|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\| = -\frac{\Delta t^2}{8}\left\|\int_{t_n}^{t_{n+1}} u^{'''}(w)\, dw\right\| \leq \frac{\Delta t^2}{8}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{'''}(w)\|\, dw$$

$$\|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{\Delta t^4}{64}\|u^{'''}\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(0,L))} \qquad (4.38)$$

Multiplicando (4.38) por Δt e somando de $n = 0, 1, ..., M-1$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2 &\leq \frac{\Delta t^4}{64}\left(\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|u^{'''}\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(0,L))}\right) \\
&\leq \frac{\Delta t^4}{64}\|u^{'''}\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}
\end{aligned} \qquad (4.39)$$

Por fim, como $H^4(0,L) \subseteq L^2(0,L)$,

$$\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\delta u^{n+\frac{1}{2}} - u_t^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{\Delta t^4}{64} \|u^{'''}(w)\|^2_{L^2(0,T;H^4(0,L))} \tag{4.40}$$

Já no terceiro termo de (4.37) temos:

$$\delta \rho^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \rho^{'}(s) ds$$

Logo,

$$\|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\rho^{'}(s)\| ds$$

$$\|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \frac{1}{\Delta t^2} \|\rho^{'}\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(0,L))} \leq \frac{1}{\Delta t} \|\rho^{'}\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(0,L))} \tag{4.41}$$

Multiplicando (4.41) por Δt e somando $n = 0, 1, ..., M-1$ temos:

$$\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \sum_{n=0}^{M-1} \|\rho^{'}\|^2_{L^2(t_n,t_{n+1};L^2(0,L))} \leq \|\rho^{'}\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \tag{4.42}$$

Pelo lema 9 chegamos finalmente a:

$$\Delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|\delta \rho^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \tilde{c}^2 h^8 \|u^{'}\|^2_{L^2(0,T;H^4(0,L))} \tag{4.43}$$

Usando (4.20), (4.40) e (4.43) em (4.37) segue que:

$$\|\xi^M\|^2 \leq \frac{\eta_2}{\eta_1} e^{c_9} c_3^2 h^8 \|u_0\|_{H^4} + \frac{1}{\eta_1} \frac{\Delta t^4}{64} \|u^{'''}\|^2 + \frac{1}{\eta_1} \tilde{c}^2 h^8 \|u^{'}\|^2 \tag{4.44}$$

De (4.44) podemos então concluir que:

$$\|\xi^M\| \leq c_{10}(h^4 + \Delta t^2) \tag{4.45}$$

Usando as estimativas em relação a ξ e ρ e as hipóteses do teorema, existe uma constante c_{11} independente de h e de t tal que:

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leq c_{11}(h^4 + (\Delta t)^2) \tag{4.46}$$

$\square$

5 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA APROXIMADO

Neste capítulo trataremos da determinação da solução aproximada do problema. Primeiramente vamos introduzir os polinômios de Hermite, funções escolhidas como base do espaço de soluções do problema, e explicitar o motivo da escolha destas funções. A solução aproximada será determinada a partir da resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Para a resolução desse sistema de equações diferenciais usaremos o método das diferenças finitas, e, portanto, haverá uma seção dedicada ao método. Também dedicaremos uma seção a construção das matrizes que compõem o sistema linear decorrente da aplicação do método da diferenças finitas.

5.1 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite são polinômios de grau 3 e funções de classe $C^1(0, L)$. São convenientes ao problema devido a formulação dada em (1.3). A base formada por esses polinômios interpola os valores da função e da primeira derivada com relação a variável espacial nos nós do intervalo $(0, L)$.

Discretizamos o intervalo $(0, L)$ da forma $0 = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = L$, e para cada nó x_i definimos dois elementos de função base ϕ_i e ψ_i satisfazendo:

$$\begin{cases} \phi_i(x_{i-1}) = 0 & \phi_i(x_i) = 1 & \phi_i(x_{i+1}) = 0 \\ \phi_i'(x_{i-1}) = 0 & \phi_i'(x_i) = 0 & \phi_i'(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} \psi_i(x_{i-1}) = 0 & \psi_i(x_i) = 0 & \psi_i(x_{i+1}) = 0 \\ \psi_i'(x_{i-1}) = 0 & \psi_i'(x_i) = 1 & \psi_i'(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Essas funções se anulam para $x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Considerando uma malha uniforme com passo $h = x_{i+1} - x_i$, definimos as funções de Hermite, contínuas por partes, como:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (\mid \frac{x-x_i}{h} \mid -1)^2(2 \mid \frac{x-x_i}{h} \mid +1) & \forall x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} (\mid \frac{x-x_i}{h} \mid -1)^2(x - x_i) & \forall x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{5.4}$$

As funções dadas acima são representadas graficamente por:

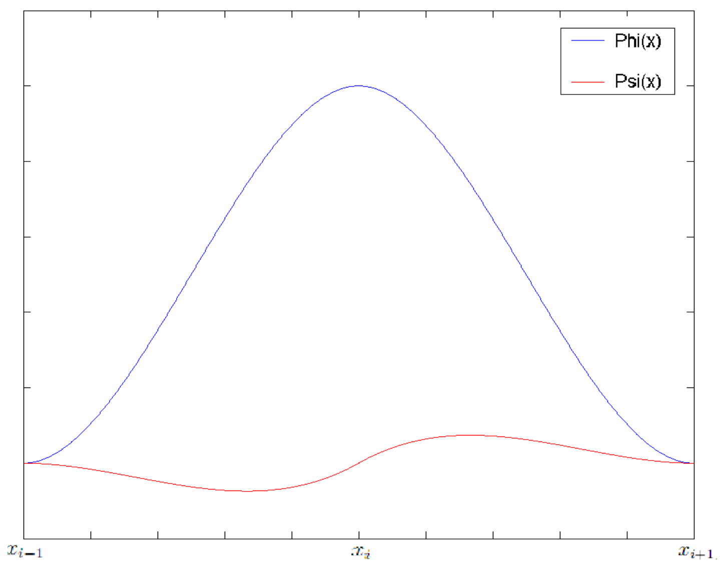

Figura 5.1: Funções Base

5.2 Funções Base Globais e Locais

Na seção anterior, definimos essas funções base de uma maneira global, isto é, definimos uma função ϕ_i e ψ_i para cada nó $x_i \in [0, L]$.

Cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ ou $[x_i, x_{i+1}]$ de $[0, L]$ é denominado *elemento* e é denotado por e. Para exemplificar, consideramos um intervalo $[0, L] = [0, 4]$ com passo $h = 0.5$. A divisão do intervalo em elementos finitos e as funções base globais graficamente são dadas nas figuras a seguir:

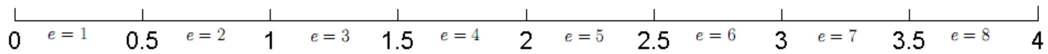

Figura 5.2: Elementos em $[0, L]$

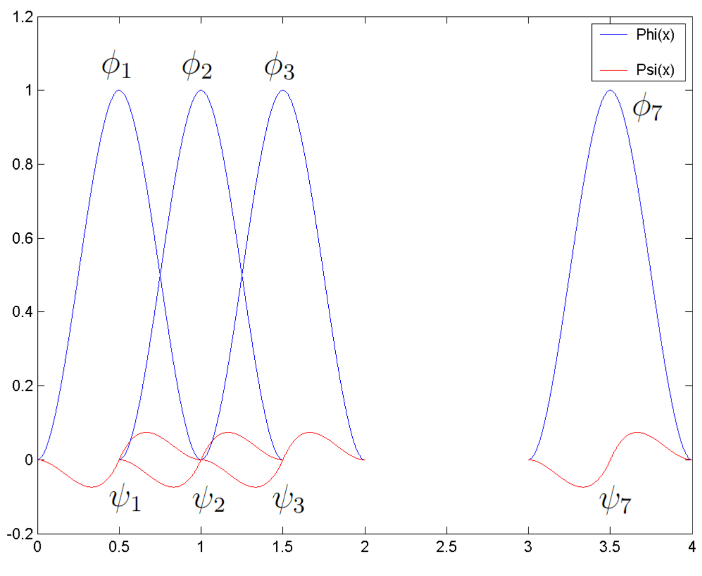

Figura 5.3: Função Base Global

Vamos definir também, as funções base locais, isto é, as funções ϕ_i e ψ_i restritas em cada elemento e. Essas funções serão dadas por:

$$\begin{cases} \varphi_1^e(x) = \left(\frac{x-x_1^e}{h} - 1\right)^2 \left(2\frac{x-x_1^e}{h} + 1\right) \\ \varphi_2^e(x) = \left(\frac{x_2^e-x}{h} - 1\right)^2 \left(2\frac{x_2^e-x}{h} + 1\right) \\ \varphi_3^e(x) = \left(\frac{x-x_1^e}{h} - 1\right)^2 (x - x_1^e) \\ \varphi_4^e(x) = \left(\frac{x_2^e-x}{h} - 1\right)^2 (x - x_2^e) \end{cases} \tag{5.5}$$

onde $x_1^e = x_i$ e $x_2^e = x_{i+1}$, para $i = 0, 1, ..., N$.

Elas serão úteis para que a montagem das matrizes que compõem o sistema linear que deverá ser resolvido seja feita de maneira mais eficiente. Podem ser representadas graficamente por:

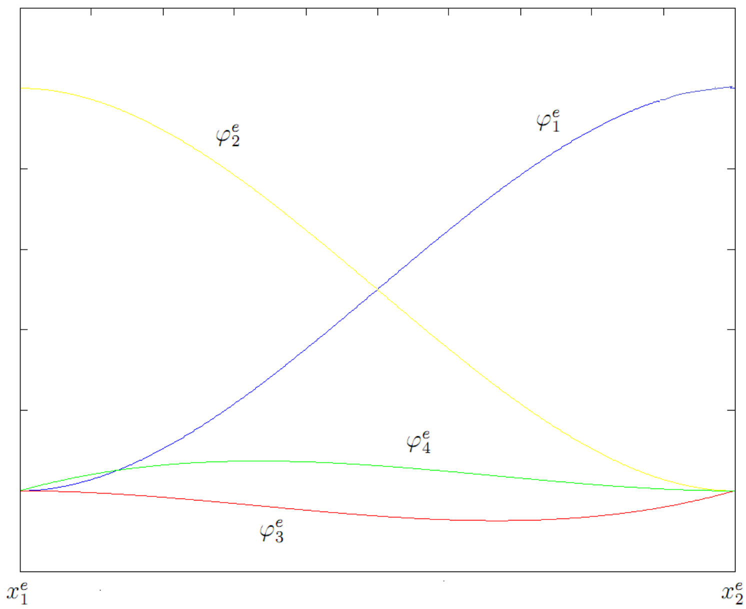

Figura 5.4: Função Base Local

5.3 Método das Diferenças Finitas

Para resolver o sistema de equações diferencias ordinárias, utilizaremos o o método de Crank-Nicolson, que é um método de diferenças finitas usado para resolver numericamente a equação do calor e equações diferenciais parciais similares. É um método de segunda ordem no tempo e no espaço, implícito no tempo e numericamente estável. O método foi desenvolvido por John Crank e Phyllis Nicolson na metade do século 20, como pode ser visto no artigo CRANK; NICOLSON (1947). Para equações de difusão e para outros modelos, pode-se provar que o método de Crank Nicolson é incondicionalmente estável (veja o livro THOMAS (1995)).

O método de Crank Nicolson é baseado em diferenças centradas no espaço e na regra trapezoidal no tempo. É a combinação do método de Euler progressivo em n e do método de Euler regressivo em $n+1$. Entretanto, deve-se notar, que o método por si só não é simplesmente a média desses dois métodos, já que a equação apresenta uma dependência implícita na solução.

Para exemplificar o método, considere a seguinte equação diferencial parcial unidimensional dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Utilizando os métodos de Euler progressivo e regressivo respectivamente para a aproximação de F_i^n e F_i^{n+1} segue que:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^n\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+1}\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Fazendo a média das duas últimas equações, temos que:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left[F_i^n\left(u,x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+F_i^{n+1}\left(u,x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right]$$

que é o método implícito de Crank Nicolson.

Definida a base que conterá a solução e introduzido o método para a resolução do sistema de equações diferenciais resultante, vamos descrever a seguir a determinação da solução aproximada. Com relação a base de Hermite, a solução aproximada de (1.3), em todos os casos que serão estudados, é dada por:

$$u_h(t,x)=\sum_{j=0}^{N}(c_j(t)\phi_j(x)+d_j(t)\psi_j(x)) \tag{5.6}$$

5.4 Solução Aproximada - Modelo Linear

A solução aproximada u_h nesse caso, será determinada nos casos com e sem os termos de regularização. Utilizaremos as seguintes formulações variacionais:

$$(u_t,v)+(u_x,v_{xx})+(a(x)u,v)+v_x(0)u_x(0,t)=0 \tag{5.7}$$

$$(u_t,v)+(u_x,v_{xx})+(a(x)u,v)+\nu(u_{xx},v)+\nu(u_{xx},v_{xx})+v_x(0)u_x(0,t)=0 \tag{5.8}$$

Substituindo (5.6) em (5.7) e (5.8) e tomando ora $v=\phi_i$ ora $v=\psi_i$ chegamos, respectivamente, aos seguintes sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias, representados matricialmente por:

$$KX^{'}(t)+MX(t)=0 \tag{5.9}$$

$$KX^{'}(t)+\tilde{M}X(t)=0 \tag{5.10}$$

onde as matrizes K, M e $\tilde{M}$ são matrizes bloco, dadas por:

$$K=\left[\begin{array}{ccc}(\phi_j,\phi_i) & | & (\psi_j,\phi_i)\\ ----- & | & -----\\ (\phi_j,\psi_i) & | & (\psi_j,\psi_i)\end{array}\right] \tag{5.11}$$

$$M = \begin{bmatrix} (\phi_j', \phi_i'') + (a(x)\phi_j, \phi_i) & | & (\psi_j', \phi_i'') + (a(x)\psi_j, \phi_i) \\ ----------- & | & ----------- \\ (\phi_j', \psi_i'') + (a(x)\phi_j, \psi_i) & | & (\psi_j', \psi_i'') + (a(x)\psi_i, \psi_j) \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} (\phi_j', \phi_i'') + \nu(\phi_j'', \phi_i) + & | & (\psi_j', \phi_i'') + \nu(\psi_j'', \phi_i) \\ +\nu(\phi_j'', \phi_i'') + (a(x)\phi_j, \phi_i) & | & +\nu(\psi_j'', \phi_i'') + a(x)\psi_j, \phi_i) \\ ----------- & | & ----------- \\ (\phi_j', \psi_i'') + \nu(\phi_j'', \psi_i) + & | & (\psi_j', \psi_i'') + \nu(\psi_j'', \psi_i) \\ +\nu(\phi_j'', \psi_i'') + (a(x)\phi_j, \psi_i) & | & +\nu(\psi_j'', \psi_i'') + a(x)\psi_j, \psi_i) \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

e os vetores $X'(t)$ e $X(t)$ são dados por:

$$X'(t) = \left[c_0'(t)\ c_1'(t)\ \ldots\ c_N'(t)\ d_0'(t)\ d_1'(t)\ \ldots\ d_N'(t)\right]^T \tag{5.14}$$

$$X(t) = \left[c_0(t)\ c_1(t)\ \ldots\ c_N(t)\ d_0(t)\ d_1(t)\ \ldots\ d_N(t)\right]^T \tag{5.15}$$

Os valores de c_j e d_j determinam respectivamente o valor da solução aproximada e da primeira derivada com relação a x dessa solução para cada $t \in (0, T)$.

Para resolver os sistemas de equações diferenciais ordinárias (5.9) e (5.10) vamos utilizar o método de diferenças finitas. Em particular, usaremos o esquema de Crank-Nicolson introduzido anteriormente. Serão consideradas as aproximações para os termos $X'(t)$ e $X(t)$ quando avaliados no tempo $t_n = n\Delta t$, sendo denotados por $(X^n)'$ e X^n para $n = 0, 1, 2, ..., N$. Temos então que:

$$X'(t) = \frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t} \qquad e \qquad X(t) = \frac{X^{n+1} + X^n}{2} \tag{5.16}$$

Substituindo essas aproximações nos sistemas (5.9) chegamos a:

$$K\left(\frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t}\right) + M\left(\frac{X^{n+1} - X^n}{2}\right) = 0 \tag{5.17}$$

Por outro lado, quando substituímos em no sistema (5.10) chegamos a:

$$K\left(\frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t}\right) + \tilde{M}\left(\frac{X^{n+1} - X^n}{2}\right) = 0 \tag{5.18}$$

De (5.17) e (5.18) obtemos dois sistemas lineares dados respectivamente por:

$$(2K + \Delta t M)X^{n+1} = (2K - \Delta t M)X^n \tag{5.19}$$

e

$$(2K + \Delta t\tilde{M})X^{n+1} = (2K - \Delta t\tilde{M})X^n \qquad (5.20)$$

que devem ser resolvidos para cada $n = 0, 1, 2, ..., N$.

5.4.1 Montagem das Matrizes

Para a resolução dos sistemas dados em (5.19) e (5.20) precisamos determinar as matrizes K, M e $\tilde{M}$. Para determinar essas matrizes, vamos utilizar as funções base $\phi(x)$ e $\psi(x)$ já definidas neste capítulo. A escolha dessas duas funções como polinômios de Hermite é fundamental para a otimização da resolução do sistema linear, isto porque as matrizes resultantes conterão muitos elementos nulos. Esse tipo de matriz é denominada matriz esparsa e o sistema linear resultante é, em geral, bem condicionado.

Cada matriz global no nosso problema, ilustrado abaixo na dimensão 8×8, tem a seguinte estrutura:

$$K, M, \tilde{M} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$

sendo cada bloco tridiagonal pois são utilizadas as definições das funções base dadas em (5.3) e (5.4).

Para que o cálculo desses coeficientes não nulos das matrizes K, M e $\tilde{M}$ seja feito de maneira mais eficiente, vamos utilizar as funções base locais φ_i^e, $i = 1, 2, 3, 4$, definidas na seção 5.2.

Na figura 5.4 notamos que para cada elemento e teremos definidas 4 funções locais. Portanto, para cada elemento e, vamos determinar uma matriz local associada, isto é, K^e, M^e e $\tilde{M}^e$. Essas matrizes locais terão dimensão 4×4.

Como já definimos globalmente essas matrizes em (5.11), (5.12) e (5.13), segue que as matrizes locais associadas a K, M e $\tilde{M}$ são dadas respectivamente por:

$$K^e = \begin{bmatrix} K^e_{11} & K^e_{12} & K^e_{13} & K^e_{14} \\ K^e_{21} & K^e_{22} & K^e_{23} & K^e_{24} \\ K^e_{31} & K^e_{32} & K^e_{33} & K^e_{34} \\ K^e_{41} & K^e_{42} & K^e_{43} & K^e_{44} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

$$M^e = \begin{bmatrix} M^e_{11} & M^e_{12} & M^e_{13} & M^e_{14} \\ M^e_{21} & M^e_{22} & M^e_{23} & M^e_{24} \\ M^e_{31} & M^e_{32} & M^e_{33} & M^e_{34} \\ M^e_{41} & M^e_{42} & M^e_{43} & M^e_{44} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

$$\tilde{M}^e = \begin{bmatrix} \tilde{M}^e_{11} & \tilde{M}^e_{12} & \tilde{M}^e_{13} & \tilde{M}^e_{14} \\ \tilde{M}^e_{21} & \tilde{M}^e_{22} & \tilde{M}^e_{23} & \tilde{M}^e_{24} \\ \tilde{M}^e_{31} & \tilde{M}^e_{32} & \tilde{M}^e_{33} & \tilde{M}^e_{34} \\ \tilde{M}^e_{41} & \tilde{M}^e_{42} & \tilde{M}^e_{43} & \tilde{M}^e_{44} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

em que cada elemento é dado respectivamente por:

$$K^e_{ij} = \int_{x^e_1}^{x^e_2} \varphi^e_i \varphi^e_j dx \tag{5.24}$$

$$M^e_{ij} = \int_{x^e_1}^{x^e_2} \left((\varphi^e_i)_x (\varphi^e_j)_{xx} + a(x) \varphi^e_i \varphi^e_j \right) dx \tag{5.25}$$

$$\tilde{M}^e_{ij} = \int_{x^e_1}^{x^e_2} \left((\varphi^e_i)_x (\varphi^e_j)_{xx} + \nu\ (\varphi^e_i)_{xx} \varphi^e_j + \nu\ (\varphi^e_i)_{xx} (\varphi^e_j)_{xx} + a(x) \varphi^e_i \varphi^e_j \right) dx \tag{5.26}$$

com x^e_1 e x^e_2 nós de cada elemento e (como na figura 5.4).

Calculadas as matrizes locais, o objetivo é determinar como essas matrizes influem na matriz global e utilizá-las para a montagem da mesma. Já sabemos que as matrizes globais são tridiagonais. Portanto, para as três matrizes, só precisaremos calcular os elementos associados as seguintes linhas e colunas: ii, $i(i+1)$ e $(i+1)i$.

De uma maneira geral, os elementos das matrizes locais são acumulados na matriz global seguindo um determinado padrão. No nosso caso, como temos matrizes globais em bloco, as matrizes locais serão consideradas com essa estrutura, isto é, sendo cada matriz local 4×4, então cada bloco seu terá dimensão 2×2. Esses blocos locais contribuirão aos seus respectivos blocos globais, ou seja, o primeiro bloco local contribuirá apenas para o primeiro bloco global, o segundo local apenas para o segundo global e assim por diante. Mais a frente essa montagem estará representada em uma figura.

Até este momento, não levamos em conta na resolução aproximada do problema as condições de fronteira dos problemas dadas nos sistemas (4.1) e (4.2). Como esses problemas levam a resolução de dois sistemas lineares diferentes, dados respectivamente em (5.9) e (5.10), vamos impor as condições de fronteira separadamente em cada problema.

No problema dado em (4.1), sabemos que a solução exata é conhecida em $x_0 = 0$ e $x_N = L$. Além disso, conhecemos o valor da primeira derivada da função também em $x_N = L$. Logo, para determinarmos a solução aproximada, determinada pelas componentes do vetor dado em (5.15), devemos impor que $c_0 = c_N = 0$ e $d_N = 0$.

Então, o sistema global dado em (5.9) que tinha dimensão $(2N+2) \times (2N+2)$ passa então a ter dimensão $(2N-1) \times (2N-1)$.

Já no problema dado em (4.2), a solução exata é conhecida nos mesmo pontos citados anteriormente e além disso precisam ser satisfeitas as condições:

$$\nu u_{xx}(0,t) = u_x(L,t) + \nu u_{xx}(L,t) = 0 \tag{5.27}$$

Contudo, essas condições já foram impostas durante a obtenção da formulação variacional do problema no caso regularizado, dada em (5.8). Logo, na resolução do sistema linear, devemos impor apenas que $c_0 = c_N = 0$. E, portanto, o sistema global dado em (5.10) que tinha dimensão $(2N+2) \times (2N+2)$ passa a ter então dimensão $(2N) \times (2N)$. Esses dois casos estão ilustrados nas figuras a seguir.

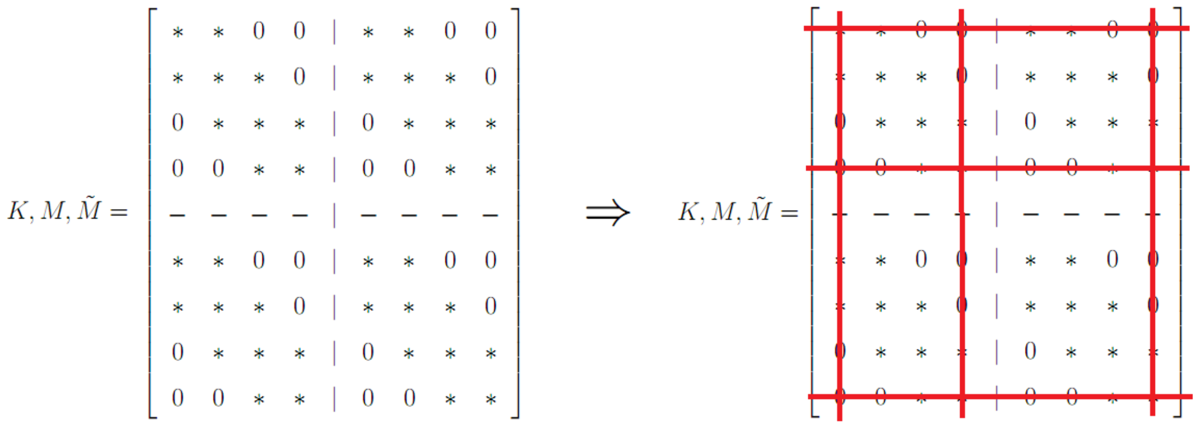

Figura 5.5: Condições de Fronteira (sem regularização)

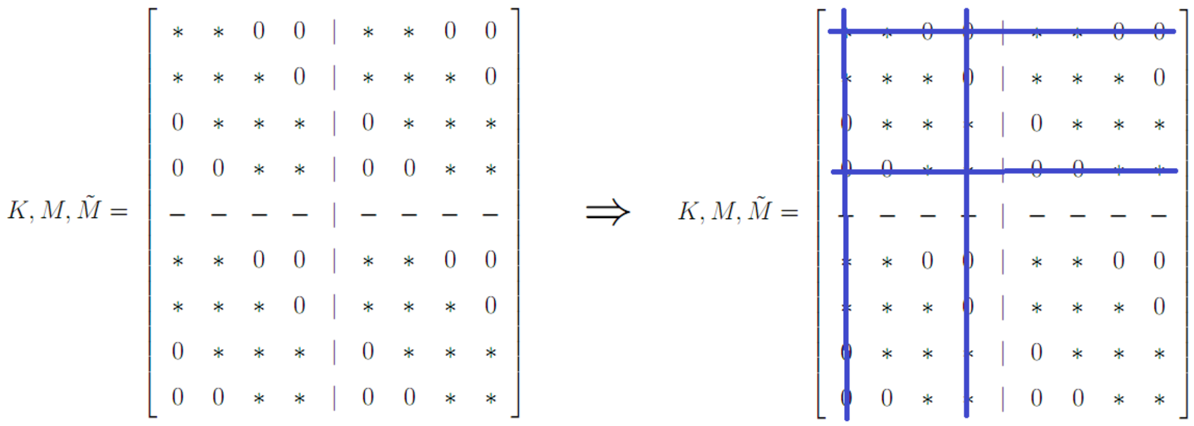

Figura 5.6: Condições de Fronteira (com regularização)

Determinadas as dimensões das matrizes, vamos estabelecer o critério de acumulação dos elementos das matrizes locais nas matrizes globais, bloco a bloco. Cada bloco das matrizes globais K, M e $\tilde{M}$ será preenchida de acordo com um algoritmo. A seguir, mostramos o algoritmo para a montagem da matriz K.

if $e \neq nel$ **then**
  $K_{ee} = K_{22} + K_{11}$
  if $e \neq (nel - 1)$ **then**
    $K_{ee+1} = K_{12}$
  end if
  if $e \neq 1$ **then**
    $K_{ee-1} = K_{21}$
  end if
end if

if $e \neq nel$ **then**
  $K_{e(nel+e)} = K_{24} + K_{13}$
  $K_{e(nel-1+e)} = K_{23}$
  if $e \neq (nel - 1)$ **then**
    $K_{e(nel+1+e)} = K_{14}$
  end if
end if

if $e \neq nel$ **then**
  $K_{(nel+e)e} = K_{42} + K_{31}$
  $K_{(nel-1+e)e} = K_{32}$
  if $e \neq (nel - 1)$ **then**
    $K_{(nel+1+e)e} = K_{41}$
  end if
end if

$K_{(nel)(nel)} = K_{33}$
if $e \neq (nel - 1)$ **then**
  $K_{(nel+e)(nel+e)} = K_{44} + K_{33}$
  $K_{(nel-1+e)(nel+e)} = K_{34}$
  $K_{(nel+e)(nel-1+e)} = K_{43}$
end if

Figura 5.7: Algoritmo para a Montagem da Matriz Global K

O mesmo procedimento pode ser aplicado as matrizes M e $\tilde{M}$, trocando os elementos locais K_{ij}^e utilizados no algoritmo pelos elementos locais M_{ij}^e e $\tilde{M}_{ij}^e$.

No algoritmo dado na figura 5.7, nel é o número total de elementos finitos na malha espacial, e e é a posição atual do elemento no contador. A ideia é percorrer todos os elementos, calcular cada elemento local e já armazená-lo na sua "posição global".

Isso está exemplificado na figura 5.8. Foram considerados 4 elementos na malha espacial como na figura 5.2, ou seja, para o algoritmo, $nel = 4$ e e pode assumir os valores $1, 2, 3, 4$. Será representado o fato de cada matriz local também ser uma matriz em bloco (com blocos 2×2) e que será observado como esses blocos contribuem separadamente para matriz global.

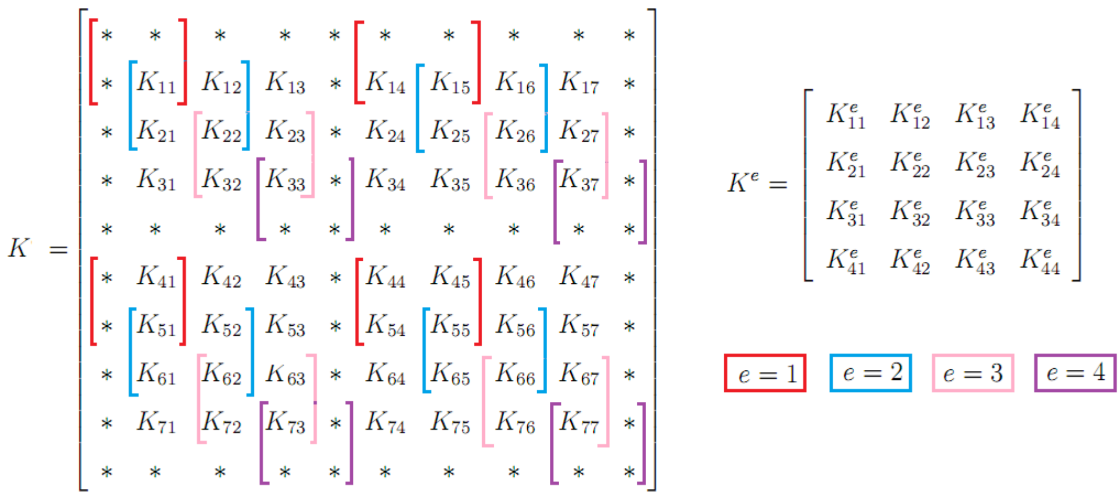

Figura 5.8: Esquema da Montagem da Matriz Global K

5.5 Solução Aproximada - Modelo Não Linear

A solução aproximada u_h também será determinada nos casos com e sem os termos de regularização. Serão utilizadas as seguintes formulações variacionais:

$$(u_t, v) + (uu_x, v) + (u_x, v_{xx}) + (a(x)u, v) + v_x(0)u_x(0, t) = 0 \tag{5.28}$$

$$(u_t, v) + (uu_x, v) + (u_x, v_{xx}) + (a(x)u, v) + \nu(u_{xx}, v) + \nu(u_{xx}, v_{xx}) + v_x(0)u_x(0, t) = 0 \tag{5.29}$$

Substituindo (5.6) em (5.28) e (5.29) e tomando ora $v = \phi_i$ ora $v = \psi_i$ chegamos, respectivamente, aos seguintes sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias, representados matricialmente por:

$$KX^{'}(t) + MX(t) + B(X(t)) = 0 \tag{5.30}$$

$$KX^{'}(t) + \tilde{M}X(t) + B(X(t)) = 0 \tag{5.31}$$

onde as matrizes bloco K, M e $\tilde{M}$ e os vetores $X^{'}(t)$ e $X(t)$ são dados na seção anterior e o termo B, que surge do termo não linear (uu_x, v), é um tensor dado por:

$$B = \begin{bmatrix} B^{(a)} \\ --- \\ B^{(b)} \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

onde,

$$B^{(a)} = \sum_{i,j=0}^{N} c_j c_i (\phi_j (\phi_i)_x, \phi_k) + c_j d_i (\phi_j (\psi_i)_x, \phi_k) + d_j c_i (\psi_j (\phi_i)_x, \phi_k) + d_j d_i (\psi_j (\psi_i)_x, \phi_k) \tag{5.33}$$

quando tomamos $v = \phi_k$ e

$$B^{(b)} = \sum_{i,j=0}^{N} c_j c_i (\phi_j (\phi_i)_x, \psi_k) + c_j d_i (\phi_j (\psi_i)_x, \psi_k) + d_j c_i (\psi_j (\phi_i)_x, \psi_k) + d_j d_i (\psi_j (\psi_i)_x, \psi_k) \tag{5.34}$$

quando tomamos $v = \psi_k$.

Os valores de c_j e d_j, como dito anteriormente, determinam o valor da solução aproximada e da primeira derivada com relação a x dessa solução para cada $t \in (0, T)$.

Para resolver os sistemas (5.30) e (5.31) iremos linearizar o termo $B(X(t))$.

5.5.1 Linearização do Termo $B(X(t))$

Vamos fazer a linearização do termo $B(X(t))$ partindo do sistema (5.30). Como é amplamente utilizado na literatura, vamos linearizar o termo u_x do produto uu_x que compõe o termo não linear. No caso do sistema (5.31) é feita a mesma linearização, com a diferença apenas de que a matriz M é substituída pela matriz $\tilde{M}$.

Usando (5.32), o sistema (5.30) também pode ser escrito como:

$$KX'(t) + \underbrace{B^{(1)}c_jc_i(t) + B^{(2)}c_jd_i(t) + B^{(3)}d_jc_i(t) + B^{(4)}d_jd_i(t)}_{B(X(t))} + MX(t) = 0 \quad (5.35)$$

Os termos $B^{(1)}(X(t))$, $B^{(2)}(X(t))$, $B^{(3)}(X(t))$ e $B^{(4)}(X(t))$ formam os blocos do tensor B, representado por:

$$B(X(t)) = \left[\begin{array}{ccc} B^{(1)}(X(t)) & | & B^{(2)}(X(t)) \\ ----- & | & ----- \\ B^{(3)}(X(t)) & | & B^{(4)}(X(t)) \end{array} \right] \quad (5.36)$$

com

$$\begin{aligned} B^{(1)}(X(t)) &= \sum_{i,j=0}^{N} c_jc_i(\phi_j(\phi_i)_x, \phi_k) + c_jd_i(\phi_j(\psi_i)_x, \phi_k) \\ B^{(2)}(X(t)) &= \sum_{i,j=0}^{N} d_jc_i(\psi_j(\phi_i)_x, \phi_k) + d_jd_i(\psi_j(\psi_i)_x, \phi_k) \\ B^{(3)}(X(t)) &= \sum_{i,j=0}^{N} c_jc_i(\phi_j(\phi_i)_x, \psi_k) + c_jd_i(\phi_j(\psi_i)_x, \psi_k) \\ B^{(4)}(X(t)) &= \sum_{i,j=0}^{N} d_jc_i(\psi_j(\phi_i)_x, \psi_k) + d_jd_i(\psi_j(\psi_i)_x, \psi_k) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Avaliando o termo $B(X(t))$ de (5.35) no tempo $t = t_n$ segue que:

$$B(X(t)) = B^{(1)}c_j^nc_i^n + B^{(2)}c_j^nd_i^n + B^{(3)}d_j^nc_i^n + B^{(4)}d_j^nd_i^n \quad (5.38)$$

Se denotarmos por $(B^{(l)})^n = B^{(l)}c_i^n$ com $l = 1, 2, 3, 4$, as matrizes decorrentes de $B(X(t))$ avaliadas em cada tempo dado $t = t_n$, podemos reescrever (5.38) como:

$$B(X(t)) = (B^{(1)})^nc_j^n + (B^{(2)})^nd_j^n + (B^{(3)})^nc_j^n + (B^{(4)})^nd_j^n \quad (5.39)$$

Finalmente, substituindo (5.39) em (5.35) chegamos a:

$$KX'(t) + B^nX(t) + MX(t) = 0 \quad (5.40)$$

onde

$$B^n = \left[\begin{array}{ccc} (B^{(1)})^nc_i^n & | & (B^{(2)})^nc_i^n \\ ------- & | & ------- \\ (B^{(3)})^nd_i^n & | & (B^{(4)})^nd_i^n \end{array} \right]$$

em que os blocos decorrem das expressões dadas em (5.37) quando avaliadas em $t = t_n$.

O sistema (5.40) é a versão linearizada do sistema (5.30) e para sua resolução, assim como no caso linear, vamos utilizar o método de Crank-Nicolson com as aproximações dadas em (5.16). Temos então que:

$$K\left(\frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t}\right) + B^n\left(\frac{X^{n+1} + X^n}{2}\right) + M\left(\frac{X^{n+1} + X^n}{2}\right) = 0 \qquad (5.41)$$

Da equação (5.41), concluímos que no caso não linear devemos resolver para cada $n = 0, 1, 2, ..., N$ o seguinte sistema linear:

$$(2K + \Delta t B^n + \Delta t M)X^{n+1} = (2K - \Delta t B^n - \Delta t M)X^n \qquad (5.42)$$

ou o sistema

$$(2K + \Delta t B^n + \Delta t \tilde{M})X^{n+1} = (2K - \Delta t B^n - \Delta t \tilde{M})X^n \qquad (5.43)$$

também para cada $n = 0, 1, 2, ..., N$ quando estamos considerando a linearização do termo partindo do sistema (5.31).

5.5.2 Montagem das Matrizes

Os sistemas dados em (5.42) e (5.43) também apresentam as matrizes K, M e $\tilde{M}$ do caso linear, e já foi determinado como essas matrizes foram construídas. Portanto, nesta seção vamos focar na determinação das matrizes B^n, que mudarão a cada n. Observe que a matriz B^n será a nos sistemas (5.42) e (5.43).

Assim como na seção anterior, vamos determinar as matrizes locais $(B^n)^e$ e a partir delas determinar a matriz global B^n. Essas matrizes locais também serão matrizes bloco de dimensão 4×4, tendo 4 blocos de dimensão 2×2. Apresentam a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} (B_{11})^n & (B_{12})^n & (B_{13})^n & (B_{14})^n \\ (B_{21})^n & (B_{22})^n & (B_{23})^n & (B_{24})^n \\ (B_{31})^n & (B_{32})^n & (B_{33})^n & (B_{34})^n \\ (B_{41})^n & (B_{42})^n & (B_{43})^n & (B_{44})^n \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

com

$$\begin{aligned}
(B_{11})^n &= c_1^n(\varphi_1(\varphi_1)_x, \varphi_1) + d_1^n(\varphi_1(\varphi_3)_x, \varphi_1) \\
(B_{12})^n &= c_1^n(\varphi_2(\varphi_1)_x, \varphi_1) + d_1^n(\varphi_2(\varphi_3)_x, \varphi_1) \\
(B_{13})^n &= c_1^n(\varphi_3(\varphi_1)_x, \varphi_1) + d_1^n(\varphi_3(\varphi_3)_x, \varphi_1) \\
(B_{14})^n &= c_1^n(\varphi_4(\varphi_1)_x, \varphi_1) + d_1^n(\varphi_4(\varphi_3)_x, \varphi_1) \\
(B_{21})^n &= c_2^n(\varphi_1(\varphi_2)_x, \varphi_2) + d_2^n(\varphi_1(\varphi_4)_x, \varphi_2) \\
(B_{22})^n &= c_2^n(\varphi_2(\varphi_2)_x, \varphi_2) + d_2^n(\varphi_2(\varphi_4)_x, \varphi_2) \\
(B_{23})^n &= c_2^n(\varphi_3(\varphi_2)_x, \varphi_2) + d_2^n(\varphi_3(\varphi_4)_x, \varphi_2) \\
(B_{24})^n &= c_2^n(\varphi_4(\varphi_2)_x, \varphi_2) + d_2^n(\varphi_4(\varphi_4)_x, \varphi_2) \\
(B_{31})^n &= c_1^n(\varphi_1(\varphi_1)_x, \varphi_3) + d_1^n(\varphi_1(\varphi_3)_x, \varphi_3) \\
(B_{32})^n &= c_1^n(\varphi_2(\varphi_1)_x, \varphi_3) + d_1^n(\varphi_2(\varphi_3)_x, \varphi_3) \\
(B_{33})^n &= c_1^n(\varphi_3(\varphi_1)_x, \varphi_3) + d_1^n(\varphi_3(\varphi_3)_x, \varphi_3) \\
(B_{34})^n &= c_1^n(\varphi_4(\varphi_1)_x, \varphi_3) + d_1^n(\varphi_4(\varphi_3)_x, \varphi_3) \\
(B_{41})^n &= c_2^n(\varphi_1(\varphi_2)_x, \varphi_4) + d_2^n(\varphi_1(\varphi_4)_x, \varphi_4) \\
(B_{42})^n &= c_2^n(\varphi_2(\varphi_2)_x, \varphi_4) + d_2^n(\varphi_2(\varphi_4)_x, \varphi_4) \\
(B_{43})^n &= c_2^n(\varphi_3(\varphi_2)_x, \varphi_4) + d_2^n(\varphi_3(\varphi_4)_x, \varphi_4) \\
(B_{44})^n &= c_2^n(\varphi_4(\varphi_2)_x, \varphi_4) + d_2^n(\varphi_4(\varphi_4)_x, \varphi_4)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

As condições de fronteira são inseridas da mesma maneira que foram inseridas em K, M e $\tilde{M}$, no caso linear com e sem regularização, como pode ser visto nas figuras 5.5 e 5.6. As dimensões também se mantém como $(2N-1) \times (2N-1)$ e $(2N) \times (2N)$ nos casos com e sem regularização respectivamente.

Vamos agora explicitar o algoritmo que determina a acumulação dos elementos das matrizes locais nas matrizes globais. Podemos observar que como B depende de n (B^n), uma nova matriz será calculada a cada passo de tempo.

Observe que o algoritmo descrito na figura 5.9 vale do segundo até o penúltimo elemento finito da malha. Isso ocorre pois as matrizes locais do primeiro e do último elemento finito são calculadas separadamente, já que temos apenas uma parte de suas entradas contribuindo para a matriz global. A matriz relacionada a $e = 1$

for $e = 2, 3, ..., (nel - 1)$ **do**

$B_{e-1\ e-1} = B_{e-1\ e-1} + B_{11}$

$B_{e\ e} = B_{e\ e} + B_{22}$

$B_{e\ e-1} = B_{e\ e-1} + B_{21}$

$B_{e-1\ e} = B_{e-1\ e} + B_{12}$

end for

$B_{nel-1\ nel-1} = B_{nel-1\ nel-1} + B_{11}^{nel}$

for $e = 2, 3, ..., (nel - 1)$ **do**

$B_{e-1\ e-1+nel} = B_{e-1\ e-1+nel} + B_{13}$

$B_{e-1\ e+nel} = B_{e-1\ e+nel} + B_{14}$

$B_{e\ e-1+nel} = B_{e\ e-1+nel} + B_{23}$

$B_{e\ e+nel} = B_{e\ e+nel} + B_{24}$

end for

$B_{nel-1\ 2nel-1} = B_{nel-1\ 2nel-1} + B_{13}^{nel}$

for $e = 2, 3, ..., (nel - 1)$ **do**

$B_{e-1+nel\ e-1} = B_{e-1+nel\ e-1} + B_{31}$

$B_{e+nel\ e-1} = B_{e+nel\ e-1} + B_{41}$

$B_{e-1+nel\ e} = B_{e-1+nel\ e} + B_{32}$

$B_{e+nel\ e} = B_{e+nel\ e} + B_{42}$

end for

$B_{2nel-1\ nel-1} = B_{2nel-1\ nel-1} + B_{31}^{nel}$

for $e = 2, 3, ..., (nel - 1)$ **do**

$B_{e-1+nel\ e-1+nel} = B_{e-1+nel\ e-1+nel} + B_{33}$

$B_{e-1+nel\ e+nel} = B_{e-1+nel\ e+nel} + B_{34}$

$B_{e+nel\ e-1+nel} = B_{e+nel\ e-1+nel} + B_{43}$

$B_{e+nel\ e+nel} = B_{e+nel\ e+nel} + B_{44}$

end for

$B_{2nel-1\ 2nel-1} = B_{2nel-1\ 2nel-1} + B_{33}^{nel}$

Figura 5.9: Algoritmo de Montagem da matriz B^n

contribui com os seguintes elementos:

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^1 & B_{23}^1 & B_{24}^1 \\ 0 & B_{32}^1 & B_{33}^1 & B_{34}^1 \\ 0 & B_{42}^1 & B_{43}^1 & B_{44}^1 \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

Essa contribuição ocorre da mesma maneira nos casos com e sem regularização. Já a matriz relacionada ao último elemento finito, $e = nel$, contribui com

$$B^{nel} = \begin{bmatrix} B_{11}^{nel} & 0 & B_{13}^{nel} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31}^{nel} & 0 & B_{33}^{nel} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

no caso sem regularização, e contribui com

$$B^{nel} = \begin{bmatrix} B_{11}^{nel} & 0 & B_{13}^{nel} & B_{14}^{nel} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31}^{nel} & 0 & B_{33}^{nel} & B_{34}^{nel} \\ B_{41}^{nel} & 0 & B_{43}^{nel} & B_{44}^{nel} \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

no caso com regularização.

6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E CONCLUSÕES

Neste capítulo estaremos interessados em determinar soluções aproximadas para os problemas dados em (1.3) e (3.1). O capítulo estará basicamente dividido nas seguintes seções: validação do método escolhido, convergência da solução do problema regularizado para a solução da equação de KdV, análise da energia do sistema e ordem de convergência do método. Será também feita a validação no caso não linear.

Já mostramos a existência e unicidade de solução exata para o problema regularizado (3.1). Além disso, foi também demonstrado que essa solução converge para a solução do problema (1.3). O que esperamos então é que a solução aproximada de (3.1) também convirja para a solução aproximada de (1.3).

Antes de verificar essa convergência, vamos primeiramente mostrar a convergência da solução aproximada para a solução exata em cada um dos casos.

6.1 Validação do Método

Não conhecemos a priori a solução aproximada dos problemas (1.3) e (3.1). Precisamos então de parâmetros para verificar que o método para a obtenção da soluções aproximadas adotado é válido. Para isso, consideraremos os seguintes problemas:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + a(x)u = f(t,x) \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) \quad para \quad x \in (0,L) \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) = 0 \quad para \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{6.1}$$

e

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + \nu(u_{xx} + u_{xxxx}) + a(x)u = \tilde{f}(t,x) \quad em \quad (0,L) \times (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) \quad para \quad x \in (0,L) \\ u(t,0) = \nu u_{xx}(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) + \nu u_{xx}(t,L) = 0 \quad para \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{6.2}$$

onde as forças $f(t,x)$ e $\tilde{f}(t,x)$ funcionarão como esse parâmetro. Essas duas forças gerarão um equilíbrio no sistema e permitirão que as soluções aproximadas sejam comparadas com as soluções exatas que serão conhecidas.

Se o resultado estiver dentro do esperado, isto é, o erro entre a solução aproximada e exata for pequeno, podemos afirmar que o método escolhido é adequado, e a partir daí, fazer simulações no caso em que $f = 0$ e $\tilde{f} = 0$.

6.1.1 Modelo Linear

No modelo linear da equação sem regularização, validaremos o método utilizando o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + a(x)u = f_1(t,x) \quad em \quad (0,T) \times (0,L) \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) = 0 \quad \forall t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in (0,L) \end{cases} \tag{6.3}$$

Consideraremos a solução exata de (6.3) dada pela função

$$u(t,x) = x^3(x-L)^2e^{-t} \tag{6.4}$$

com solução inicial

$$u_0(x) = u(0,x) = x^3(x-L)^2 \tag{6.5}$$

Note que a função $u(t,x)$ satisfaz as condições de fronteira $u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) = 0$, e portanto pode ser utilizada como solução de (6.3). A força $f_1(t,x)$, quando consideramos o termo de mecanismo dissipativo, dado por $a(x) = x^2$, é dada por:

$$f_1(t,x) = -x^3(x-L)^2e^{-t} + (6(x-L)^2 + 36x(x-L) + 18x^2)e^{-t} + x^5(x-L)^2e^{-t} \tag{6.6}$$

Nas simulações foram considerados $L = 1$ e $T = 1$. A discretização espacial e temporal foi feita da seguinte maneira: consideramos o intervalo espacial $[0,1]$ dividido nos pontos $0 = x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = 1$. Analogamente, o intervalo temporal $[0,1]$ dividido nos pontos $0 = t_1 < t_2 < ... < t_m < t_{m+1} = 1$.

Cada malha consta de $n+1$ e $m+1$ pontos respectivamente. Os espaçamentos nas duas malhas são dados respectivamente por: $h = \dfrac{L}{n}$ e $\Delta t = \dfrac{T}{m}$, quando consideramos a malha uniforme.

Além disso, vamos tomar h e Δt sempre da seguinte maneira:

$$h_i = (5 \times 2^i)^{-1} \tag{6.7}$$

e

$$\Delta t_i = (5 \times 2^i)^{-1} \tag{6.8}$$

com $i = 1, 2, 3, ..., N$, com N grande o suficiente para que $h \to 0$ e $\Delta t \to 0$.

A seguir estão os resultados obtidos quando variamos o número de elementos finitos em $[0,L] = [0,1]$ e o número de elementos em $[0,T] = [0,1]$. As tabelas 6.1

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
$h = 0.1$	0.1	6.5862×10^{-4}
$T = 1$	0.05	5.3616×10^{-4}
	0.025	5.0456×10^{-4}
	0.0125	4.5025×10^{-4}
	0.00625	4.3860×10^{-4}

Tabela 6.1: Comparação das soluções exata e aproximada.

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
$h = 0.0125$	0.1	2.1288×10^{-4}
$T = 1$	0.05	1.7427×10^{-4}
	0.025	1.5406×10^{-4}
	0.0125	1.3964×10^{-4}
	0.00625	1.3827×10^{-4}

Tabela 6.2: Comparação das soluções exata e aproximada.

e 6.2 foram obtidas a partir da variação do espaçamento na malha temporal (Δt) mantendo o espaçamento na malha espacial (h) fixado, sendo h e Δt tomados como em (6.7) e (6.8) respectivamente, considerando $N = 5$. Observe que considerar $N = 5$ significa que vamos variar, por exemplo, o número de elementos finitos em $[0, 1]$ de 10 até 160, sempre considerando o dobro do número de elementos anterior.

As figuras 6.1 e 6.2 a seguir mostram a comparação entre as soluções exata e aproximada em um ponto fixo $x \in [0, 1]$.

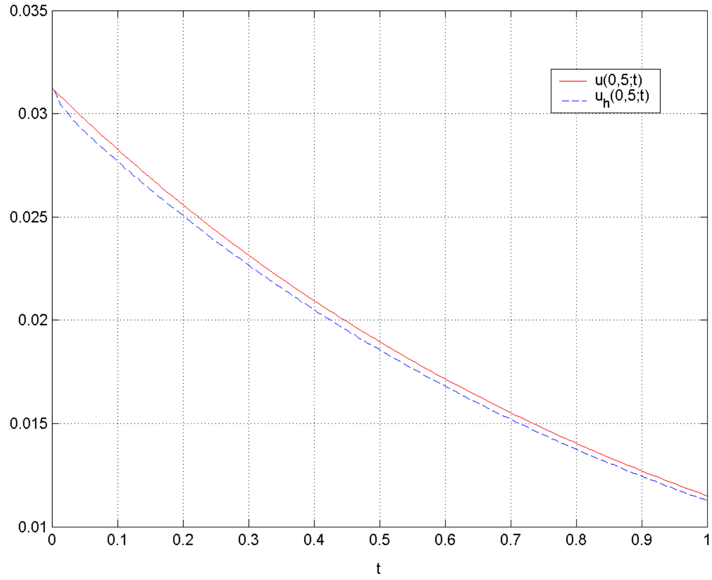

Figura 6.1: Comparação das soluções em $x = 0.5$ com $h = 0.1$.

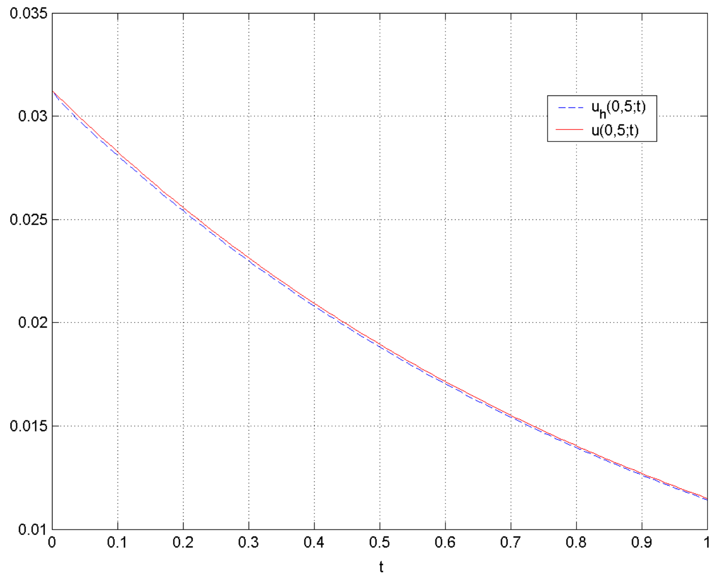

Figura 6.2: Comparação das soluções em $x = 0.5$ com $h = 0.0125$.

Já no caso em que a equação apresenta os dois termos de regularização, faremos a validação utilizando o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + \nu(u_{xx} + u_{xxxx}) + a(x)u = f_2(t,x) \quad em \quad (0,L)\times(0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) \quad para \quad x \in (0,L) \\ u(t,0) = \nu u_{xx}(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) + \nu u_{xx}(t,L) = 0 \quad para \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{6.9}$$

Nesse caso, a solução exata de (6.9) será dada pela função

$$\tilde{u}(t,x) = x^3(x-L)(x-\alpha)e^{-t} \tag{6.10}$$

com solução inicial

$$\tilde{u}(0,x) = x^3(x-L)(x-\alpha) \tag{6.11}$$

Note que a função $\tilde{u}(t,x)$ satisfaz as condições de fronteira $u(t,0) = \nu u_{xx}(t,0) = u(t,L) = 0$. Para garantirmos que a condição de fronteira dada por $u_x(t,L) + \nu u_{xx}(t,L) = 0$ seja satisfeita, devemos ter $\alpha = \dfrac{L^2 + 8\nu L}{L + 6\nu}$. A força $f_2(t,x)$, quando consideramos o termo de mecanismo dissipativo dado por $a(x) = x^2$, fica então determinada por:

$$\begin{aligned} f_2(t,x) = &-x^3(x-L)(x-\alpha)e^{-t} + 20\nu x^3 e^{-t} + (60 - 12\alpha\nu - 12L\nu)x^2e^{-t} + \\ &+(-24\alpha - 24L + 6L\alpha\nu + 120\nu)xe^{-t} + (6L\alpha - 24\alpha\nu - 24L\nu)e^{-t} + \\ &+x^5(x-L)(x-\alpha)e^{-t} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Nas simulações feitas para esse problema também foram considerados $L = 1$ e $T = 1$. A discretização espacial e temporal foi feita da mesma maneira considerada anteriormente, sendo os espaçamentos nas duas malhas dados como nas equações (6.7) e (6.8).

Os resultados a seguir foram obtidos quando variamos o número de elementos finitos em $[0,L] = [0,1]$ e o número de elementos em $[0,T] = [0,1]$, fixando o valor de ν pequeno, de modo que $\nu \to 0$.

Novamente, as figuras 6.3 e 6.4 a seguir ilustram a convergência da solução aproximada para a solução exata, que pode ser observada nas tabelas 6.3 e 6.4.

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	
		$\nu = 10^{-4}$	$\nu = 10^{-5}$
$h = 0.1$	0.1	0.0011	0.0011
$T = 1$	0.05	8.9736×10^{-4}	8.5460×10^{-4}
	0.025	8.3338×10^{-4}	7.9099×10^{-4}
	0.0125	7.4864×10^{-4}	7.1136×10^{-4}
	0.00625	7.3374×10^{-4}	6.9754×10^{-4}

Tabela 6.3: Comparação das soluções exata e aproximada.

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	
		$\nu = 10^{-4}$	$\nu = 10^{-5}$
$h = 0.0125$	0.1	6.1825×10^{-4}	5.8376×10^{-4}
$T = 1$	0.05	5.1000×10^{-4}	4.8341×10^{-4}
	0.025	4.3699×10^{-4}	4.0820×10^{-4}
	0.0125	4.0295×10^{-4}	3.7790×10^{-4}
	0.00625	3.9977×10^{-4}	3.7585×10^{-4}

Tabela 6.4: Comparação das soluções exata e aproximada.

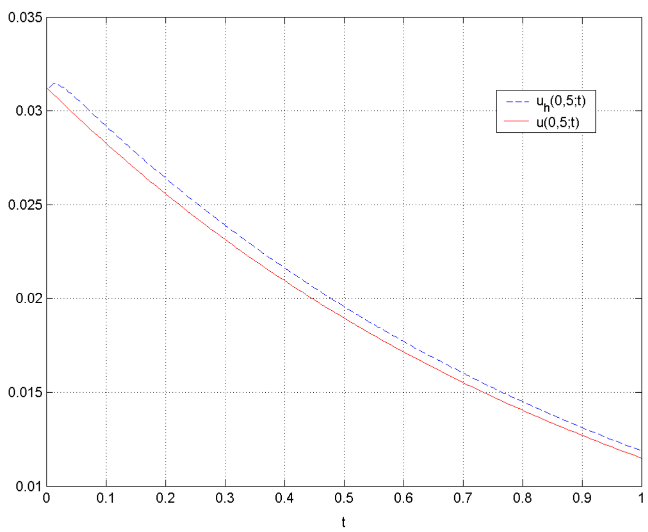

Figura 6.3: Comparação das soluções em $x = 0.5$ com $h = 0.1$.

Na figura 6.5 observamos o comportamento da solução aproximada $u_h(t, x)$ quando tomamos $h = 0.0125$ e $\Delta t = 0.0125$, considerando $\nu = 10^{-5}$ fixado.

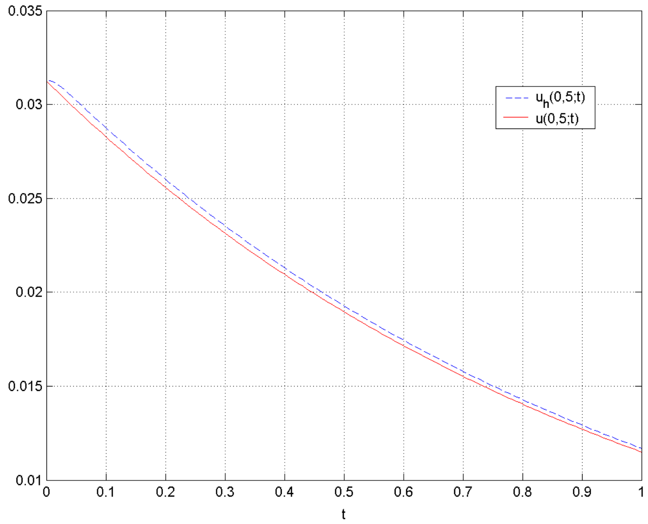

Figura 6.4: Comparação das soluções em $x = 0.5$ com $h = 0.0125$.

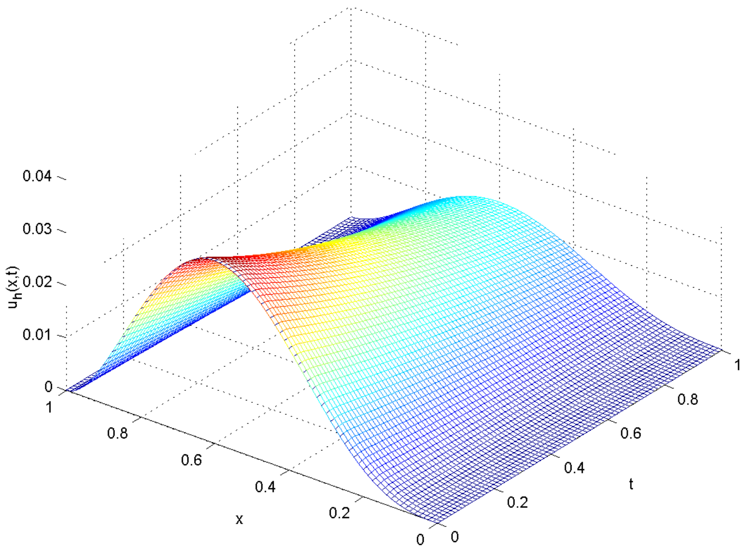

Figura 6.5: Comportamento da solução aproximada u_h.

6.1.2 Modelo Não Linear

Para validar o método no caso não linear, vamos utilizar as equações dadas em (6.1) e (6.2). Assim como na seção anterior, utilizaremos duas funções, denominadas

$f(t,x)$ e $\tilde{f}(t,x)$, para que seja possível fazer uma comparação entre as soluções exata e a solução aproximada.

No primeiro caso, isto é, na equação dada em (6.1), consideraremos a solução exata dada por:

$$u_{reg}(t,x) = x^3(x-L)^2e^{-t} \tag{6.13}$$

com solução inicial

$$u_{reg}(0,x) = x^3(x-L)^2 \tag{6.14}$$

A função $u_{reg}(t,x)$ satisfaz as condições de fronteira, como na seção anterior. A força $f(t,x)$, neste caso, quando consideramos o termo de damping dado por $a(x) = x^2$, será dada por:

$$\begin{aligned} f(t,x) = &-x^3(x-L)^2e^{-t} + x^3(x-L)^2(3x^2(x-L)^2 + 2x^3(x-L))e^{-2t} + \\ &+(6(x-L)^2 + 36x(x-L) + 18x^2)e^{-t} + x^5(x-L)^2e^{-t} \end{aligned} \tag{6.15}$$

As simulações também foram feitas considerando $L = 1$ e $T = 1$ e as malhas foram tomadas assim como dado nas equações (6.7) e (6.8). Os resultados podem ser observados nas tabelas a seguir.

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
$h = 0.05$	0.1	9.7426×10^{-5}
$T = 1$	0.05	8.0589×10^{-5}
	0.025	7.6173×10^{-5}
	0.0125	6.7153×10^{-5}
	0.00625	6.5387×10^{-5}

Tabela 6.5: Comparação das soluções exata e aproximada.

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$
$h = 0.0125$	0.1	9.3973×10^{-6}
$T = 1$	0.05	8.4940×10^{-6}
	0.025	7.0890×10^{-6}
	0.0125	5.5262×10^{-6}
	0.00625	5.4171×10^{-6}

Tabela 6.6: Comparação das soluções exata e aproximada.

As figuras 6.6 e 6.7, ilustram as convergências que estão sendo observadas nas tabelas 6.5 e 6.6.

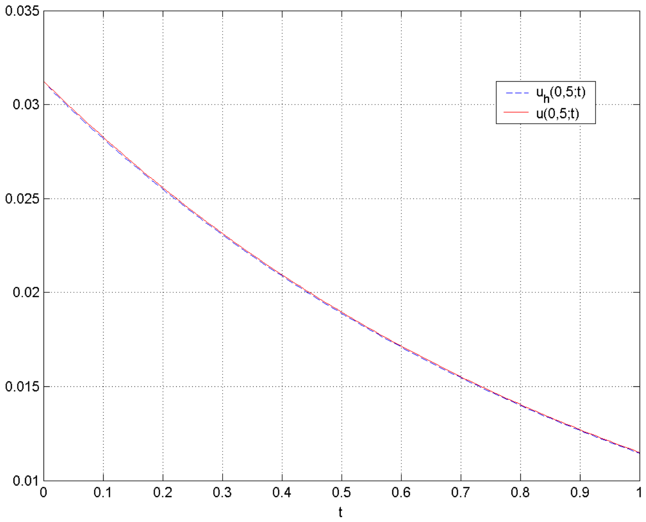

Figura 6.6: Comparação das soluções em $x = 0.5$ com $h = 0.05$.

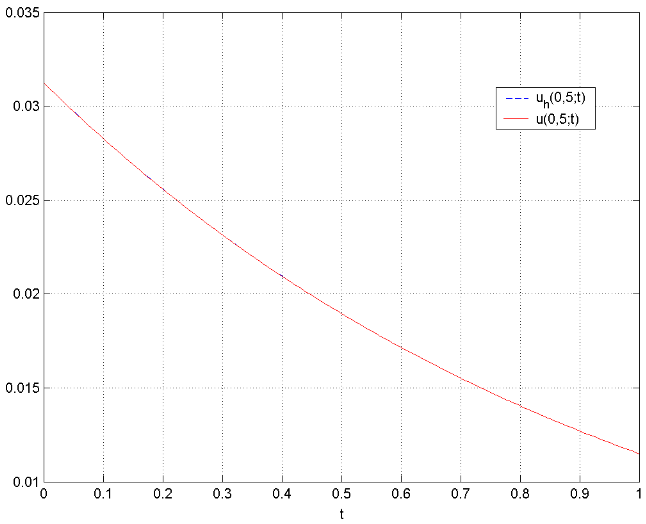

Figura 6.7: Comparação das soluções em $x = 0.5$ com $h = 0.0125$.

Com relação a equação dada em (6.2) usaremos que a solução exata é dada pela função

$$\tilde{u}_{reg}(t,x) = x^3(x-L)(x-\alpha_1)e^{-t} \tag{6.16}$$

com posição inicial

$$\tilde{u}_{reg}(0,x) = x^3(x-L)(x-\alpha_1) \tag{6.17}$$

Assim como na seção anterior, apenas as três primeiras condições de fronteira são satisfeitas imediatamente. Para que a última também seja satisfeita, devemos ter $\alpha = \alpha_1 = \dfrac{L^2+8\nu L}{L+6\nu}$. A força $\tilde{f}(t,x)$, quando consideramos o termo de damping dado por $a(x) = x^2$, fica então determinada por:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t,x) = &-x^3(x-L)(x-\alpha_1)e^{-t}20\nu x^3e^{-t} + (60-12\alpha_1\nu-12L\nu)x^2e^{-t}+ \\ &+(-24\alpha_1-24L+6L\alpha_1\nu+120\nu)xe^{-t}+(6L\alpha_1-24\alpha_1\nu-24L\nu)e^{-t}+ \\ &+x^3(x-L)(x-\alpha_1)(5x^4-4\alpha_1x^3-4Lx^3+3\alpha_1Lx^2)e^{-2t}+ \\ &+x^5(x-L)(x-\alpha_1)e^{-t} \end{aligned} \tag{6.18}$$

Como nos casos anteriores, as simulações foram feitas tomando $L = 1$ e $T = 1$ e as malhas escolhidas como nas equações (6.7) e (6.8). Os resultados podem ser observados nas tabelas 6.7 e 6.8 a seguir.

As figuras 6.8 e 6.9 ilustram a convergência observada nas tabelas 6.7 e 6.8.

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	
		$\nu = 10^{-4}$	$\nu = 10^{-5}$
$h = 0.05$	0.1	7.3235×10^{-4}	6.7947×10^{-4}
$T = 1$	0.05	5.9970×10^{-4}	5.5841×10^{-4}
	0.025	5.2873×10^{-4}	4.8542×10^{-4}
	0.0125	4.8400×10^{-4}	4.4617×10^{-4}
	0.00625	4.7766×10^{-4}	4.4138×10^{-4}

Tabela 6.7: Comparação das soluções exata e aproximada.

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	
		$\nu = 10^{-4}$	$\nu = 10^{-5}$
$h = 0.0125$	0.1	6.1885×10^{-4}	5.7783×10^{-4}
$T = 1$	0.05	5.1102×10^{-4}	4.7963×10^{-4}
	0.025	4.3519×10^{-4}	4.0097×10^{-4}
	0.0125	4.0226×10^{-4}	3.7262×10^{-4}
	0.00625	3.9934×10^{-4}	3.7109×10^{-4}

Tabela 6.8: Comparação das soluções exata e aproximada.

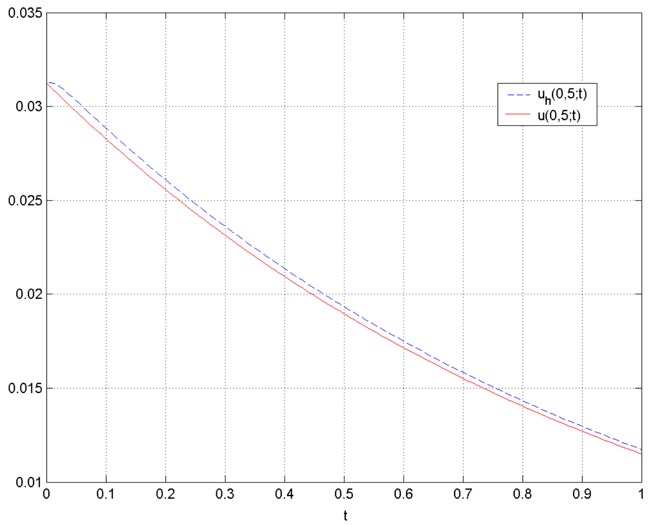

Figura 6.8: Comparação das soluções em $x = 0.5$ com $h = 0.05$.

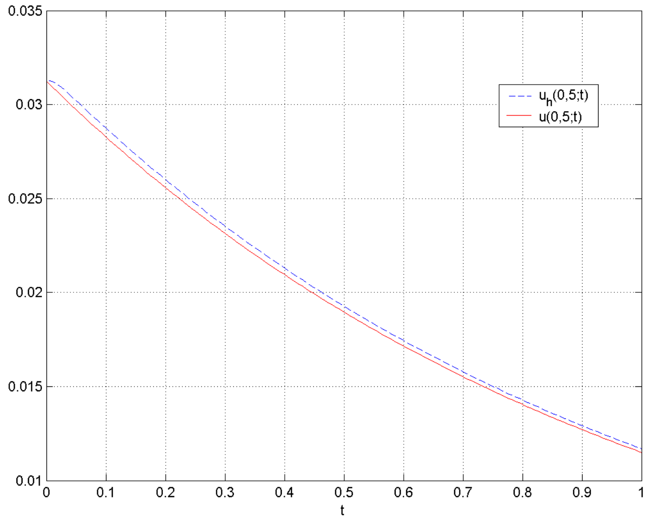

Figura 6.9: Comparação das soluções em $x = 0.5$ com $h = 0.0125$.

6.2 Ordem de Convergência

Os resultados de convergência obtidos na análise numérica são as estimativas de erro esperadas entre o cálculo da solução exata e a solução aproximada. Em geral, essa solução exata não é conhecida, então uma pergunta natural que pode ser feita é: como garantir que os resultados numéricos obtidos estão corretos?

Nesta seção introduziremos um procedimento conhecido para essa análise, estabelecendo uma relação entre os resultados numéricos com relação as estimativas de erro obtidos no capítulo 4.

Vamos considerar como solução exata do problema a solução $u^{N+1}(t, x)$, com N muito grande (ou em outras palavras, com espaçamento h muito pequeno). Esse $N+1$ é o número de nós da discretização espacial. Construiremos então uma sequência de soluções $\{u_i\}$ associadas a diversos tamanhos de malha h_i, e calcularemos seus respectivos erros. Ou de outra maneira, calcularemos $\|u_i - u^N\|$ para cada $i = 1, 2, ..., N$.

Já sabemos do capítulo 4 que, em tempo contínuo, vale a estimativa dada na equação (4.11). Logo, para cada $i = 1, 2, ..., N$ temos que:

$$e_i = \|u_i(t) - u^N(t)\|_{L^2(0,L)} \approx ch_i^4 \tag{6.19}$$

Quando discretizamos o tempo, vale então a estimativa dada em (4.24). Isto é,

$$e_i^n = \|u_i^n - u_N^n\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \approx c_1(h_i^4 + (\Delta t_n)^2) \tag{6.20}$$

com $n = 1, ..., M + 1$

Da equação (6.20), temos então que:

$$\alpha_i = \frac{\|e_i^n\|}{\|e_i^{n+1}\|} \approx \frac{(\Delta t_n)^2}{(\Delta t_{n+1})^2} = \left(\frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n+1}}\right)^2 \quad \forall n \tag{6.21}$$

com $\Delta t_{n+1} < \Delta t_n$.

A equação (4.46) nos diz que quando $h = \Delta t$, a taxa de convergência numérica é esperada é $p = 2$ (expoente da expressão do lado direito). Na teoria esse valor é constante, como pode ser visto em (6.21), mas na prática esperamos obter valores aproximados para p e esses valores dependerão da sequência de soluções escolhida. O valor de p será aproximadamente dado por:

$$p = \frac{ln\left(\dfrac{\|e_i^n\|}{\|e_i^{n+1}\|}\right)}{ln\ 2} \tag{6.22}$$

Para a construção das sequências de soluções numéricas criaremos as malhas espacial e temporal como nas equações (6.7) e (6.8) respectivamente.

A seguir, estão os resultados referentes a ordem de convergência esperada para a equação no caso linear com o termo de regularização, modelo estudado no capítulo 4.

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	p
0.1	5.3708×10^{-4}	-
0.05	1.0694×10^{-4}	2.32
0.025	2.7367×10^{-5}	1.96
0.0125	8.6316×10^{-6}	1.66
0.00625	4.4702×10^{-6}	0.94

Tabela 6.9: Ordem de convergência tomando $\nu = 10^{-5}$ e $a(x) = x^2$.

Fizemos simulações também considerando o termo de mecanismo dissipativo sendo constante dado por $a(x) = 1$. Obtemos que:

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	p
0.1	5.2481×10^{-4}	-
0.05	1.0173×10^{-4}	2.36
0.025	2.3016×10^{-5}	2.14
0.0125	5.5742×10^{-6}	2.04
0.00625	2.2113×10^{-6}	1.33

Tabela 6.10: Ordem de convergência tomando $\nu = 10^{-5}$ e $a(x) = 1$.

6.3 Convergência da Equação Regularizada para a KdV

Mostramos na seção anterior a convergência da solução aproximada para a solução exata, nos modelo linear e não linear, considerando a equação de KdV com e sem os termos de regularização. Nesta seção, vamos mostrar que a solução aproximada da equação regularizada converge para a solução da KdV quando $\nu \to 0$.

Esquematicamente, queremos verificar que:

$$\begin{array}{ccc} u_{reg} & \longrightarrow & u \\ \uparrow & & \uparrow \\ u^h_{reg} & \underset{?}{\longrightarrow} & u^h \end{array} \tag{6.23}$$

As tabelas a seguir, verificarão a convergência esperada das soluções aproximadas como na última linha do esquema (6.23). Nessas tabelas, estamos considerando

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} = \|u_{reg} - u^h\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$$

Segue que,

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	
		$\nu = 10^{-4}$	$\nu = 10^{-5}$
$h = 0.05$	0.1	0.0011	9.9142×10^{-4}
$T = 1$	0.05	8.5823×10^{-4}	8.0940×10^{-4}
	0.025	7.7275×10^{-4}	7.2471×10^{-4}
	0.0125	7.0222×10^{-4}	6.5866×10^{-4}
	0.00625	6.9110×10^{-4}	6.4881×10^{-4}
$h = 0.0125$	0.1	8.3797×10^{-4}	7.9664×10^{-4}
$T = 1$	0.05	6.9168×10^{-4}	6.5759×10^{-4}
	0.025	5.9772×10^{-4}	5.6279×10^{-4}
	0.0125	5.4967×10^{-4}	5.1803×10^{-4}
	0.00625	5.4514×10^{-4}	5.1454×10^{-4}

Tabela 6.11: Comparação entre as soluções u^h_{reg} e u^h (modelo linear).

	Δt	$E_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}$	
		$\nu = 10^{-4}$	$\nu = 10^{-5}$
$h = 0.05$	0.1	8.2898×10^{-4}	7.6765×10^{-4}
$T = 1$	0.05	6.7812×10^{-4}	6.2736×10^{-4}
	0.025	6.1026×10^{-4}	5.6020×10^{-4}
	0.0125	5.5614×10^{-4}	5.1083×10^{-4}
	0.00625	5.4720×10^{-4}	5.0320×10^{-4}
$h = 0.0125$	0.1	6.1751×10^{-4}	5.6998×10^{-4}
$T = 1$	0.05	5.1151×10^{-4}	4.7300×10^{-4}
	0.025	4.3745×10^{-4}	3.9718×10^{-4}
	0.0125	4.0479×10^{-4}	3.6869×10^{-4}
	0.00625	4.0192×10^{-4}	3.6715×10^{-4}

Tabela 6.12: Comparação entre as soluções u^h_{reg} e u^h (modelo não linear).

6.4 Decaimento da Energia

Nessa seção vamos comprovar numericamente o decaimento da energia dos sistemas com e sem os termos de regularização, nos modelos linear e não linear. Esse decaimento foi observado na equação (3.60).

Para determinar numericamente a energia dada na equação (3.57), iremos aplicar o método dos trapézios para o cálculo da integral. Isto é,

$$E(t_n) = \frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}\left(u^2(t_n, x_1) + 2\sum_{i=2}^{N} u^2(t_n, x_i) + u^2(t_n, x_{N+1})\right)\right] \tag{6.24}$$

com $n = 1, ..., M+1$.

As simulações foram feitas tomando $L = T = 1$, $h = \Delta t = 0.00625$ e nos casos regularizados $\nu = 10^{-5}$. O termo de mecanismo dissipativo se mantém como $a(x) = x^2$. Os resultados obtidos no caso linear e não linear estão indicados a seguir.

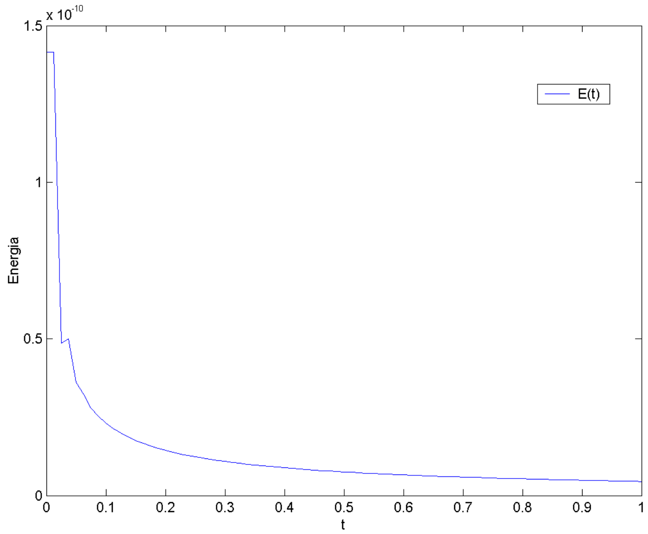

Figura 6.10: Decaimento da energia da solução da KdV (não linear).

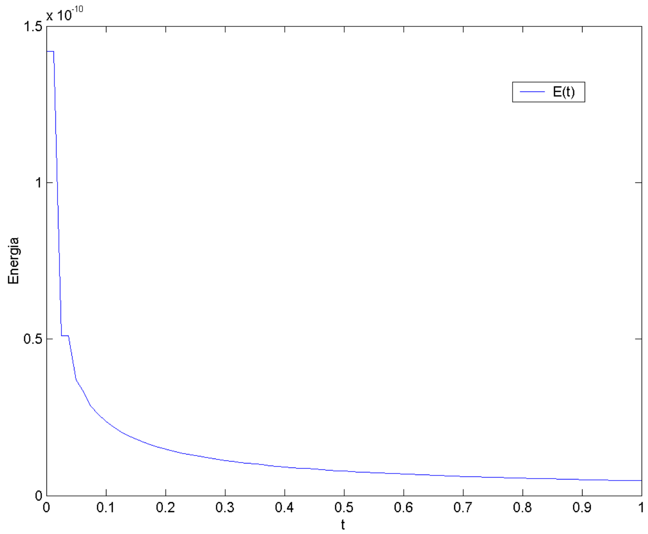

Figura 6.11: Decaimento da energia da solução regularizada (não linear).

6.5 Conclusões

Neste trabalho fizemos uma análise teórica e numérica para um modelo matemático que descreve a propagação de ondas. Esse modelo foi considerado em um domínio limitado na presença de um termo de mecanismo dissipativo.

Mostramos a existência e unicidade de soluções no caso não linear, assim como o decaimento da energia do sistema. Obtivemos duas estimativas numéricas referentes ao erro cometido entre a solução aproximada, obtida através do método dos Elementos Finitos juntamente com o método das Diferenças Finitas, e a solução exata do problema. As simulações numéricas, quando a solução exata do problema é conhecida, verificaram a eficácia do método aplicado e confirmaram as estimativas obtidas durante a análise numérica. Além disso, foi verificado numericamente a convergência da solução do problema regularizado para a solução da KdV.

REFERÊNCIAS

ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. 2th.ed. USA: Pure and Applied Mathematics Series, 2003.

BOUSSINESQ, J. V. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'um canal rectangulaire horizonta en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensibliment pareilles de la surface au fond. **Math. Pures Appli.**, [S.l.], v.17, n.4, p.55–108, July 1872.

BREZIS, H. **Analisis Funcional, Teoria y Aplicaciones**. 1th.ed. Madrid: Alianza Editorial S. A., 1984.

CODDINGTON, E. A.; LEVISON, N. **Theory of Ordinary Diferential Equations**. 9th.ed. New York: MC Graw-Hill, 1981.

CRANK, J.; NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. **Proc. Camb. Phil. Soc.**, [S.l.], v.43, n.4, p.50–67, July 1947.

DOUGLAS, J.; DUPONT, T. Galerkin Methods for Parabolic Equations. **Numerical Analysis**, [S.l.], v.7, n.4, p.576–626, June 1970.

KORTEWEG, D.; DE VRIES, G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stacionary waves. **Phil. Mag.**, [S.l.], v.39, n.4, p.422–443, July 1895.

LARKIN, N. A. Kortewe-de Vries and Kuramoto Sivashinsky equations in bounded domains. **Math. Anal. Appl.**, [S.l.], v.297, n.1, p.169–185, Sept. 2004.

LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non Linéaires**. 1th.ed. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Introdução aos Espaços de Sobolev e as Equações Diferenciais Parciais**. 1th.ed. UFRJ: Instituto de Matemática, 1989.

MENZALA, G. A. P.; ZUAZUA, E.; VASCONCELLOS, C. F. Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping. **Quarterly of Applied Mathematics**, [S.l.], v.1, n.4, 2002.

PAYNE, L. E.; WEINBERGER, H. F. An optimal Poincaré inequality for convex domains. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, [S.l.], v.18, n.4, p.286292, 1960.

PAZOTO, A. F. Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping. **ESAIM - Control, Optimisation and Caculus of Variations**, [S.l.], v.11, n.4, p.473–486, July 2005.

RINCON, M. A.; LIU, I. S. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. 2th.ed. Brasil: Instituto de Matemática - UFRJ, 2011.

RIVERA, J. E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferencias Parciais**. 1th.ed. LNCC, Petrópolis - Rio de Janeiro: Série Textos Avançados, 1999.

RUSSEL, J. S. Report on waves. In: BRITISH, 14., 1844, London. **Proceedings. . .** Assoc. for the Advancement of Science, 1844. p.311–390.

STRANG, G.; FIX, G. J. **An Analysis of the Finite Element Method**. 1th.ed. USA: Cambridge Press, 1973.

THOMAS, J. W. **Numerical Partial Differential Equations**: finite difference methods. 2th.ed. New York: Springer-Verlag, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Method**. 6th.ed. Oxford: McGranw-Hill, 2005.