# UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO INSTITUTO DE MATEMÁTICA INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

CARLA ELAINE OLIVEIRA DE MORAES

ESTABILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI-EULER: ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS

> Rio de Janeiro 2014

# UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO INSTITUTO DE MATEMÁTICA INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

#### CARLA ELAINE OLIVEIRA DE MORAES

### ESTABILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI-EULER: ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientador: Mauro Antonio Rincon

Co-orientador: Gladson Octaviano Antunes

Rio de Janeiro 2014 M827e Moraes, Carla Elaine Oliveira de

Estabilização da Equação de Bernoulli-Euler: Aspectos Teóricos e Computacionais / Carla Elaine Oliveira de Moraes. – 2014.

89 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2014.

Orientador: Mauro Antonio Rincon; Coorientador: Gladson Octaviano Antunes.

1. Equação da Placa de Bernoulli-Euler. 2. Simulação Numérica. 3. Estabilidade. 4. Decaimento de Energia. 5. Método das Diferenças Finitas. — Teses. I. Rincon, Mauro Antonio (Orient.). II. Antunes, Gladson Octaviano (Co-orient.). III. Universidade Federal do Rio de Janeiro. IV. Título

CDD:

#### CARLA ELAINE OLIVEIRA DE MORAES

### Estabilização da Equação de Bernoulli-Euler: Aspectos Teóricos e Computacionais

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado em	: Rio de Janeiro, de de
	Prof. Dr. Mauro Antonio Rincon (Orientador)
	Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes (Co-orientador)
	Prof. Dr. Daniel Gregório Alfaro Vigo
	Prof. Dr. I-Shih Liu
	Prof. Dr. Luis Mariano Peñaranda
	Prof Dr Ronaldo da Silva Busse

Rio de Janeiro 2014

À minha avó Ismália (in memorian) e à minha mãe.

#### **AGRADECIMENTOS**

"Nunca deixe que lhe digam que Não vale a pena acreditar no sonho que se tem Ou que seus planos nunca vão dar certo Ou que você nunca vai ser alguém." (Mais uma vez - Renato Russo)

Seja X o conjunto das pessoas sem as quais este trabalho não existiria. É fácil verificar que X é não-vazio e em especial, eu não poderia deixar de agradecer:

- A Deus pois sem Ele nada seria possível. Obrigada pelo dom da vida, por mais esta vitória e por nunca ter me abandonado.
- A minha mãe Rosa pelo amor, dedicação, companheirismo e compreensão.
- A minha família pelo apoio.
- Ao meu orientador Prof. Mauro Rincon pela paciência, disponibilidade, pelo exemplo de amor e dedicação a profissão e por todo o conhecimento transmitido. Muito obrigada por acreditar em mim e sempre me incentivar a continuar nesta caminhada.
- Ao Prof. Gladson Antunes por ter aceitado co-orientar esta dissertação e ajudar-me com a parte teórica, enriquecendo o conteúdo deste trabalho. Obrigada pela grande paciência, pelo apoio, estímulo, e por sempre encontrar um tempo para minhas muitas dúvidas.
- A todos os professores que tive nesta vida, pois sem eles, eu jamais teria chegado até aqui. Em particular, os do PPGI/UFRJ merecem destaque. Aprendi muito com os professores Marcello Goulart, Daniel Alfaro, Juliana Valério e Luziane Mendonça. Graças a eles me apaixonei ainda mais por Análise Numérica.
- A banca pela avaliação criteriosa deste meu presente trabalho.
- Aos amigos que fui conquistando pela vida. Muito obrigada pelas conversas intermináveis, gargalhadas, festas, passeios e não só pelos momentos felizes, mas também pelo apoio e companhia nos difíceis. Em particular, agradeço aos amigos do LC3 (Laboratório de Combinatória e Computação Científica) pela paciência, piadas e pelos papos-cabeça.

• Ao CENPES/Petrobras pelo apoio financeiro.

Por último, porém não menos importante, não poderia esquecer da minha avó Ismália. Aquela que, mesmo não estando mais presente fisicamente, torcia por mim em outro plano e que hoje deve estar muito feliz ao ver o primeiro membro da sua família concluir um Mestrado. É com eterna gratidão e com uma imensa saudade que eu deixo o meu muito obrigada.

#### **RESUMO**

Moraes, Carla Elaine Oliveira de. **Estabilização da Equação de Bernoulli- Euler: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2014. 89 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

A finalidade deste trabalho é estudar a estabilização interna da equação de Bernoulli-Euler não só analíticamente, mas também numericamente. Para isto, consideraremos uma placa quadrada sujeita a uma força de amortecimento distribuída apenas em um subdomínio.

Construir sistemas de dimensão finita que sejam precisos não é uma tarefa simples. Os sistemas aproximados obtidos utilizando o método de elementos finitos ou diferenças finitas, em geral, não são uniformemente estáveis em relação ao parâmetro de discretização. Para contornar esta adversidade, uma ideia proposta na literatura é adicionar um termo de viscosidade numérica ao problema numérico.

Assim sendo, utilizando o software  $MatLab^{\textcircled{\$}}$ , foi proposto e implementado um algoritmo para obtenção de uma solução aproximada para o problema e o método numérico utilizado foi o das diferenças finitas.

Além disto, realizou-se um estudo numérico da estabilidade deste esquema proposto e também, seu processo de validação, seguido de uma análise do erro cometido.

Em seguida, foram realizadas simulações numéricas que mostram o comportamento desta placa ao longo do tempo, comprovando os resultados teóricos obtidos na literatura. Realizou-se também um estudo do decaimento da energia associada ao problema, do qual concluímos que quanto maior é a região onde o damping age, mais rápido acontece o decaimento da energia.

Palavras-chave: Equação da Placa de Bernoulli-Euler, Simulação Numérica, Estabilidade, Decaimento de Energia, Método das Diferenças Finitas.

#### **ABSTRACT**

Moraes, Carla Elaine Oliveira de. **Estabilização da Equação de Bernoulli- Euler: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2014. 89 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

The aim of this work is to study the internal stabilization of the Bernoulli-Euler equation not only analytically, but also numerically. For this, we consider a square plate subjected to a feedback/damping force distributed only in a subdomain.

Constructing finite dimensional systems that are accurate is not a simple task. The approximated systems obtained using the finite element method (FEM) or finite difference method (FDM), in general, are not uniformly stable with respect to the discretization parameter. To overcome this adversity, an idea proposed in the literature is to add a numerical viscosity term to the numerical problem.

Thus, using  $MatLab^{\circledR}$ , we proposed and implemented an algorithm for obtaining an approximated solution to this problem and the numerical method used was the FDM.

In addition, numerically, we studied the stability of the scheme proposed and also its validation, followed by an analysis of the numerical error.

Then, numerical simulations were performed and they showed the behavior of the solution, confirming the theoretical results that have already been proved in the literature. Also we conducted a study on the decay of the energy associated with the problem, which concluded that the larger the area where the damping acts, the faster the energy decreases.

**Keywords:** Bernoulli-Euler Plate Equation, Numerical Simulation, Stability, Energy Decay, Finite Difference Method.

# LISTA DE FIGURAS

Figura	4.1:	Domínio do Problema	23
Figura	5.1:	Malha Espacial Uniforme	28
Figura	5.2:	Discretização do Laplaciano - Imagem Retirada de [1]	29
Figura		Malha Espacial	30
Figura	5.4:	Discretização do Bilaplaciano - Imagem Retirada de [1]	31
Figura	5.5:	Matriz $C$ : $m = 15$	38
Figura	5.6:	Numeração dos Nós	39
Figura	5.7:	Estudo dos Autovalores: Dados da Tabela 5.2	45
Figura	6.1:	Domínio do Problema e Região $\mathcal O$	56
Figura	6.2:	Soluções: Exata × Numérica no ponto $x_{347} = \left(\frac{3}{16}\pi, \frac{3}{8}\pi\right)$ , considerando	
		$h = \frac{\pi}{32} \dots \dots$	58
Figura	6.3:	Soluções: Exata × Numérica no ponto $x_{351} = \left(\frac{5}{31}\pi, \frac{3}{8}\pi\right)$ , consi-	
		derando $h = \frac{\pi}{32}$	58
Figura	6.4:	Validação : Solução Exata × Solução Numérica considerando $h = \frac{\pi}{64}$	59
Figura	6.5:	Propagação do Erro ao Longo do Tempo	59
Figura	6.6:	Caso sem Damping e com $h = \frac{\pi}{64}$ fixo	63
Figura	6.7:	Caso com $h = \frac{\pi}{64}$ fixo e Damping agindo em $[0, \pi] \times [0, \pi]$	63
Figura	6.8:		64
Figura	6.9:		64
${\bf Figura}$	6.10:	Soluções Aproximadas em $a$ ) $t = 0.00$ , $b$ ) $t = 0.36$ , $c$ ) $t = 0.90$ ,	
		d) $t = 4.50$ , $e$ ) $t = 6.30$ , $f$ ) $t = 9.00$ , considerando $T = 9$ ,	
		$\Delta t = \frac{9}{200},  h = \frac{\pi}{32},  \mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right] \dots \dots \dots$	68
${\bf Figura}$	6.11:	Regiões Crescentes: Diferentes regiões $\mathcal{O}$	69
Figura	6.12:	Decaimento de Energia para diferentes regiões $\mathcal{O}$	70
${\bf Figura}$	6.13:	Regiões Encaixantes: Diferentes regiões $\mathcal{O}$	71
Figura	6.14:	Decaimento de Energia para diferentes regiões $\mathcal{O}$	71
Figura	6.15:	Energia: Comparação entre os casos com e sem o termo de visco-	
		sidade numérica, considerando $h = \frac{\pi}{32}$ e $\mathcal{O} = \left[\frac{5}{16}\pi, \frac{11}{16}\pi\right] \times \left[\frac{5}{16}\pi, \frac{11}{16}\pi\right]$	72
Figura	6.16:	Energia: Comparação entre os casos com e sem o termo de visco-	
		sidade numérica, considerando $h = \frac{\pi}{32}$ e $\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{32}, \frac{31}{32}\pi\right] \times \left[\frac{\pi}{32}, \frac{31}{32}\pi\right]$	73
${\bf Figura}$	6.17:	Energia: Comparação entre os casos com e sem o termo de visco-	
		sidade numérica e sem região de damping, tomando $h = \frac{\pi}{32}$	73

# LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1:	Estudo dos Autovalores de P: Caso em que $\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$	44
Tabela 5.2:	Estudo dos Autovalores de $P$ : $h$ fixo, $\Delta t$ variando e $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \times$	
	$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$	45
Tabela 5.3:	Estudo dos Autovalores de P: Caso em que não há região de	
	amortecimento	46
Tabela 5.4:	Estudo dos Autovalores de $P$ : Caso em que $\mathcal{O} = [h, \pi - h] \times [h, \pi - h]$	46
Tabela 5.5:	Variação da Posição Inicial $u_0(\bar{x})$	48
Tabela 5.6:	Variação da Velocidade Inicial $u_1(\bar{x})$	49
Tabela 5.7:	Variando Tanto a Posição Inicial Quanto a Velocidade Inicial do	
	Problema	49
Tabela 6.1:	Validação: Tabela de Erros com $\Delta t = 0.1$	57
Tabela 6.2:	Validação: Tabela de Erros com $\Delta t = 0.01$	57
Tabela 6.3:	Validação: Tabela de Erros com $h = \frac{\pi}{32}$ e $\Delta t$ variando	60
Tabela 6.4:	Validação: Tabela de Erros com $h = \frac{\pi}{32}$ e $\Delta t = 0.01$ e regiões $\mathcal{O}$	
	de mesmo tamanho e posições diferentes	61
Tabela 6.5:	Validação: Tabela de Erros com $h = \frac{\pi}{32}$ e $\Delta t = 0.01$ e regiões $\mathcal{O}$	
	de diferentes tamanhos e posições	62
Tabela 6.6:	Caso Em Que $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \end{bmatrix}$ : Ordem de Convergência	66
Tabela 6.7:	Caso Sem Região de Damping: Ordem de Convergência	66
Tabela 6.8:	Caso Em Que a Região de Damping é $\mathcal{O} = [h, \pi - h] \times [h, \pi - h]$ :	
	Ordem de Convergência	67

# SUMÁRIO

1 IN	NTRODUÇÃO	1
2 P 2.1 2.2 2.2.1 2.2.2 2.3 2.4 2.4.1 2.4.2	Semigrupos de Contrações de um Espaço de Hilbert	5 9 9 10 11 12 13
3 A 3.1 3.2	Apresentação do Problema	16 16 20
4 A 4.1 4.2 4.3 4.4	Apresentação do Problema: Placa Quadrada Bidimensional Relação entre os Capítulos 3 e 4	22 23 24 25
5 A 5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 5.7	Problema Semi-Discreto Problema Discreto  Numeração dos nós  Consistência  Estabilidade  Convergência	27 27 32 38 39 41 47 49
<b>6 S 6.1</b> 6.1.1 6.1.2	Validação	53 53 55 61
6.1.3 6.1.4	Conclusões da Etapa de Validação	65 65

6.2	Estudo da Energia	67
6.2.1	Exemplo: Regiões Crescentes	69
6.2.2	Exemplo: Regiões Encaixantes	69
6.2.3	Exemplo: Influência da Viscosidade Numérica	71
6.2.4	Conclusões do Estudo da Energia	74
7 C	ONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	75
REFE	RÊNCIAS	77
	IDICE A DISCRETIZAÇÃO DO LAPLACIANO E DO BILA-	
APÊI	IDICE A DISCRETIZAÇÃO DO LAPLACIANO E DO BILA-	80
APÊI A.1	IDICE A DISCRETIZAÇÃO DO LAPLACIANO E DO BILA- PLACIANO	80 80
APÊI A.1 A.2	IDICE A DISCRETIZAÇÃO DO LAPLACIANO E DO BILA- PLACIANO	80 80 81
APÊI A.1 A.2 APÊI	IDICE A DISCRETIZAÇÃO DO LAPLACIANO E DO BILA-PLACIANO	80 80 81 82

# 1 INTRODUÇÃO

"A ciência conhece um único comando: contribuir com a ciência."

#### Bertold Brecht

A palavra controle significa atuação e reflete o esforço humano para intervir no meio em que vive, garantindo assim sua sobrevivência e melhorando sua qualidade de vida. A teoria de controle é um campo interdisciplinar e tem como objetivo influenciar o comportamento de sistemas cujo comportamento se altera ao longo do tempo. Vibrações excessivas, em geral, não são desejáveis, pois podem comprometer a performance destes sistemas. Assim sendo, visando reduzir níveis excessivos de vibrações, a teoria de controle propõe modificações em tais sistemas, por exemplo, através da ação de forças externas agindo sobre eles.

Em [4], os autores apresentam alguns conceitos básicos desta teoria e também, sua evolução ao longo do tempo.

Pode-se dizer que tal teoria é importante para o desenvolvimento tecnológico. Como aplicação, temos o leitor de CD's portátil, também conhecido por discman, que foi muito utilizado no final do século passado. Os primeiros modelos eram muito sensíveis a choques, ou seja, a pequenos movimentos, o som era interrompido imediatamente. Estudos sobre a estabilidade da rotação dos discos foram realizados e os modelos seguintes lançados, graças a esta teoria, eram melhores.

Existem muitas outras aplicações desta teoria não só no dia a dia, mas também nos processos tecnológicos e industriais. Segundo [4], podemos citar como exemplos de aplicações desta teoria, as cisternas de nossas casas, mecanismos de

controle de ruídos das aeronaves modernas e sistemas de calefação e ventilação de grandes prédios. Existem ainda aplicações em medicina, como: desenho de corações artificiais e mecanismos de administração de insulina.

Um exemplo de controle ambiental muito interessante é a barreira do Rio Tâmisa. Esta é uma barreira móvel que tem como objetivo evitar que Londres seja inundada por tempestades ou marés altas. Uma breve descrição de seu funcionamento pode ser encontrada na mesma referência. Além disto, os modelos atualmente utilizados para tomar decisões sobre fechá-la ou não são sistemas de equações diferenciais parciais que são resolvidos utilizando métodos numéricos (diferenças finitas).

Além disto, interações entre teoria de controle e robótica, mecânica dos fluidos ou investigação biomédica (por exemplo, controle de sistemas de equações diferenciais parciais que modelam crescimento de tumores) são assuntos bem atuais e promissores.

A finalidade deste trabalho é estudar numericamente a estabilização interna da equação da placa quadrada de Bernoulli-Euler e para isto considera-se a placa sujeita a uma força de amortecimento agindo apenas em um subdomínio dela.

A estabilização desta equação já foi estudada por diversos pesquisadores e dentre eles, podemos citar os seguintes trabalhos: [11], [3] e [7].

No caso de uma placa retangular sob a ação de uma força interna de controle, um resultado foi provado em [10]. Neste caso, a equação de tal placa pode ser exponencialmente estabilizada por um mecanismo de controle agindo em um subdomínio arbitrário do domínio. Numericamente, somente o caso do domínio espacial unidimensional foi abordado e pode ser visto em [12].

Construir sistemas de dimensão finita que sejam precisos, isto é, que se aproximem do modelo matemático que descreve as situações desejadas, e que sejam exponencialmente estáveis, com decaimento de energia uniforme, tendendo a 0 quando  $t \to \infty$ , não é simples. Os sistemas aproximados obtidos utilizando o método de elementos finitos ou diferenças finitas, em geral, não são uniformemente estáveis com relação ao parâmetro de discretização. Alguns trabalhos foram realizados propondo novas ideias para contornar este problema, como, por exemplo, [5] e [8].

Para contornar esta dificuldade, conforme pode ser visto em [15] e [16], adicionando-se um termo de viscosidade no problema numérico, as aproximações obtidas serão uniformemente e exponencialmente estáveis, como desejado. Teremos como base teórica estes dois artigos, destacando que os resultados obtidos são os primeiros que consideram aproximações numéricas de problemas que não podem ser resolvidos pelo denominado método dos multiplicadores. Além disto, segundo os autores, o domínio de frequências utilizado pode ser adaptado para lidar com a equação de Schrödinger com damping interno.

Como não foram encontrados registros na literatura de simulações numéricas deste problema, nosso objetivo neste trabalho é, além de reproduzir as ideias de [15], implementar um algoritmo, baseado no método das diferenças finitas para obtenção da solução numérica e fazer simulações para reproduzir numericamente os resultados teóricos. Este artigo mencionado basicamente apresenta o sistema e prova existência e unicidade de solução analítica.

Ao adicionar um termo de viscosidade numérica no desenvolvimento do Capítulo 5 com o objetivo de obter a estabilidade desejada, uma pergunta pertinente que surge é sobre a necessidade dele para garantirmos estabilidade exponencial e uniforme. Para o problema de estabilização interna aqui apresentado, a resposta não é conhecida. É sabido que no caso do problema unidimensional, tal termo não é necessário [15]. Entretanto, o estudo do caso bidimensional sem tal termo ainda é uma questão em aberto.

O presente trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 2 serão introduzidos os principais conceitos teóricos utilizados no desenvolvimento desta dissertação e uma breve explicação sobre o método numérico utilizado nesta pesquisa. No Capítulo 3, um problema mais geral será apresentado e em seguida, no Capítulo 4, será apresentada uma aplicação desta teoria: a equação de Bernoulli-Euler, isto é, o problema central deste estudo. Ainda no Capítulo 4, serão estudados os tópicos: existência e unicidade de solução e o comportamento assintórico da energia associada. O Capítulo 5, por sua vez, é destinado aos aspectos numéricos: será proposto um esquema de diferenças finitas e realizado um estudo de estabilidade, consistência e de energia discreta.

O Capítulo 6 começa com a validação do algoritmo proposto no capítulo anterior e em seguida, poderão ser vistos os resultados das simulações numéricas realizadas, incluindo os referentes ao decaimento de energia. Neste ponto, serão feitas simulações variando o tamanho da região onde a força de amortecimento agirá e também casos com e sem a viscosidade numérica mencionada anteriormente, visando entender como este termo afeta o problema. Finalmente, algumas conclusões e sugestões de trabalhos futuros serão mencionados no Capítulo 7.

Ao final do texto encontram-se as referências bibliográficas seguidas de dois apêndices. O primeiro deles é dedicado a discretização dos operadores Laplaciano e Bilaplaciano, e no último pode ser visto um pseudo-código do algoritmo implementado utilizando o software  $MatLab^{\mathbb{B}}$ .

#### 2 PRELIMINARES

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."

Galileu Galilei

Este Capítulo trata de apresentar os principais conceitos e lemas que serão utilizados ao longo deste trabalho. As definições apresentadas nas seções 2.1 e 2.2 foram obtidas a partir das referência [2] e [14], respectivamente. As definições da seção 2.3 foram extraídas de [6]. Na seção 2.4 será apresentada uma breve explicação sobre o método das diferenças finitas, o qual será utilizado para resolver numericamente o problema central desta dissertação, e alguns conceitos relacionados.

#### 2.1 Espaços Vetoriais

**Definição 2.1.1** Seja  $\mathbb{K}$  um conjunto de escalares e seja V um conjunto no qual estão definidas duas operações: soma e multiplicação por escalar, respectivamente,

$$(u,v)\mapsto u+v\in V,\quad \forall u,v\in V, \qquad \qquad (\alpha,v)\mapsto \alpha v,\ \forall v\in V,\ \alpha\in\mathbb{K}.$$

Diz-se que V é um espaço vetorial se estas operações satisfazem os seguintes axiomas:

- 1. Comutatividade: u + v = v + u,  $\forall u, v \in V$ ;
- 2. Associatividade: (u+v)+w=u+(v+w),  $\forall u,v,w\in V$ ;

- 3. Elemento Neutro da Soma: Existe  $0 \in V$  tal que 0 + v = v,  $\forall v \in V$ ;
- 4. Inverso Aditivo: Para cada  $v \in V$ , existe um elemento -v tal que v+(-v)=0;
- 5. Elemento Neutro da Multiplicação por Escalar: 1v = v,  $\forall v \in V$ ;
- 6. Associatividade:  $\alpha(\beta v) = (\alpha \beta)v, \forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- 7. Distributividade:  $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ ,  $\forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ ;
- 8. Distributividade:  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ ,  $\forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ ;

Quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , dizemos que V é um espaço vetorial real.

**Definição 2.1.2** Dado um espaço vetorial V, a  $norma \| \cdot \|$  é uma função de V em  $\mathbb{R}$  com as seguintes propriedades:

- 1.  $||v|| \ge 0$ ,  $\forall v \in V$  e ||v|| = 0 se, e somente se, v = 0;
- 2.  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ ,  $\forall v \in V$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ;
- 3. ||u+v|| < ||u|| + ||v||,  $\forall u, v \in V$ .

O espaço V munido da norma  $\|\cdot\|$  é dito um espaço vetorial normado.

**Definição 2.1.3** Seja V um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Um *produto interno*  $(\cdot,\cdot)$  é uma função de  $V\times V$  em  $\mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:

- 1.  $\forall v \in V$ ,  $(v, v) \ge 0$  e (v, v) = 0 se, e somente se, v = 0;
- 2.  $(u, v) = (v, u), \quad \forall u, v \in V;$

3.  $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w).$ 

Dado um espaço vetorial V e definindo  $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ ,  $\forall x \in V$ , verifica-se que  $x \mapsto ||x||$  é uma norma em V. Neste caso, a norma é dita induzida pelo produto interno.

**Definição 2.1.4** Seja V um espaço vetorial munido da norma  $\|\cdot\|$ . Uma sequência  $\{u_n\} \subset V$  converge para  $u \in V$  se

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Outras notações utilizadas são:  $\lim_{n\to\infty}u_n=u$  e  $u_n\to u$  quando  $n\to\infty$ .

**Definição 2.1.5** Dada uma sequência  $\{u_n\} \subset V$ , ela é dita de *Cauchy* se

$$\lim_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\| = 0.$$

**Definição 2.1.6** Um espaço normado é dito completo se toda sequência de Cauchy neste espaço converge para um elemento neste mesmo espaço. Um espaço vetorial normado completo é chamado um *Espaço de Banach*.

**Definição 2.1.7** Um espaço de Banach com a norma induzida por um produto interno, i.e., dada pela relação  $||u|| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ , é chamado um *Espaço de Hilbert*.

Definiremos a seguir alguns espaços que serão utilizados no decorrer do trabalho. Assim como em [18], considere  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Então, define-se o espaço  $L^2(\Omega)$  como:

$$L^{2}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \int_{\Omega} |u(x)|^{2} dx < \infty \right\},$$

com produto interno e norma induzida por:

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$
  $||u||_{L^{2}(\Omega)}^{2} = \sqrt{(u,u)} = \int_{\Omega} |u(x)|^{2}dx.$ 

**Observação:**  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com a norma acima.

 Definição 2.1.8 (Espaço de Sobolev) Dado  $m \in \mathbb{N},$  define-se o espaço  $H^m(\Omega)$  por:

$$H^{m}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \ u \in L^{2}(\Omega), \ \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}} \partial x_{2}^{\alpha_{2}} \dots \partial x_{n}^{\alpha_{n}}} \in L^{2}(\Omega) \right\},$$

com  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ ,  $1 \le \alpha \le m$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ . Além disto, o produto interno neste espaço é dado por:

$$(u,v) = \int_{\Omega} uv \ d\Omega + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_{\Omega} \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}} \partial x_{2}^{\alpha_{2}} \dots \partial x_{n}^{\alpha_{n}}} \frac{\partial^{\alpha} v}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}} \partial x_{2}^{\alpha_{2}} \dots \partial x_{n}^{\alpha_{n}}} d\Omega, \quad \forall u,v \in H^{m}(\Omega).$$

 $H^m(\Omega)$  com a norma induzida pelo produto interno definido acima é um espaço de Hilbert,  $m \in \mathbb{N}$ . Além disto, note que quando m = 0, temos  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

Em particular, considerando m=1, tem-se que:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \ u \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

com produto interno e norma dados, respectivamente, por:

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega, \qquad ||u||_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega.$$

Chamamos de  $H_0^1(\Omega)$  o subespaço de  $H^1(\Omega)$  formado pelas funções  $u \in H^1(\Omega)$  que se anulam na fronteira da região, ou seja:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \ u = 0 \ em \ \partial \Omega \right\}.$$

#### 2.2 Operadores

#### 2.2.1 Principais Conceitos

**Definição 2.2.1** Dados dois espaço vetoriais V e W, um operador T de V para W, denotado por  $T:V\to W$ , é uma regra (função) que associa a cada elemento em um subconjunto de V um único elemento de W. O domínio  $\mathcal{D}(T)$  de T é o maior subconjunto de T onde T está definido, ou seja,  $\mathcal{D}(T)=\{v\in V\mid T(v) \text{ está definido}\}.$ 

Em particular,  $T: V \to V$  é dito operador de V.

As operações de adição e multiplicação por escalar são definidas da seguinte forma. Sejam  $S,T:V\to W,\ \alpha\in\mathbb{K},$  então:

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v), \quad \forall v \in \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T).$$
  
 $(\alpha T)(v) = \alpha T(v), \quad \forall v \in \mathcal{D}(T).$ 

**Definição 2.2.2** Um operador  $L:V\to W$  é dito linear se:

$$L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}.$$

**Definição 2.2.3** O operador L é dito limitado se existe uma contante C>0 tal que:

$$||Lu||_W \le C||u||_V, \ \forall u \in \mathcal{D}(L).$$

Observação: É sabido que um operador linear é contínuo se, e somente se, é limitado.

Utilizamos a notação  $\mathcal{L}(V, W)$  para representar o conjunto de todos os operadores lineares contínuos (e limitados) de um espaço normado V para o espaço vetorial normado W.

**Definição 2.2.4** Seja V um espaço de Hilbert. Um operador A de V é dito compacto, quando para toda sucessão limitada  $(u_{\nu})$  de vetores de V podemos extrair de  $(Au_{\nu})$  uma subsucessão convergente em V.

#### 2.2.2 Operador Auto-Adjunto

**Definição 2.2.5** Sejam V e W espaços de Hilbert e  $L \in \mathcal{L}(V, W)$ . Definimos o operador  $L^*: W \to V$ , chamado adjunto de L, da seguinte forma:

$$(Lv, w)_W = (v, L^*w)_V$$
,  $\forall v \in V$ ,  $w \in W$ .

**Definição 2.2.6** Caso V=W e  $L=L^*$ , dizemos que L é um operador auto-adjunto, isto é:

$$(Lv, w) = (v, Lw)$$
,  $\forall v, w \in V$ .

**Definição 2.2.7** Seja L um operador linear definido em um espaço vetorial com produto interno. Dizemos que L é um operador positivo definido se para todo x neste espaço:

$$(Lx, x) \ge 0.$$

Além disto, o operador denominado raiz quadrada positiva de L é denotado por  $L^{1/2}$  e sua construção pode ser encontrada na página 140 de [14].

#### 2.3 Semigrupos de Contrações de um Espaço de Hilbert

Nesta subseção, iremos apresentar alguns resultados básicos sobre a teoria de semigrupos que serão úteis para o entendimento das demonstrações dos teoremas, os quais aparecerão nos Capítulos seguintes.

**Definição 2.3.1** Seja C um subconjunto de um espaço de Hilbert e S(t),  $t \geq 0$ , uma família de aplicações de C em C que depende do parâmetro  $t \geq 0$ .

- 1) Diz-se que S(t) é um semigrupo sobre C se:
  - (i) S(0) = I, onde I é a aplicação identidade de C sobre C.
  - (ii)  $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2), \ \forall t_1, t_2 > 0.$
- 2) Diz-se que S(t) é um semigrupo contínuo sobre C se:

(iii) 
$$\lim_{t\to t_0} S(t)x = S(t_0)x, \ \forall x \in C.$$

3) Diz-se que S(t) é um semigrupo de contrações se:

(iv) 
$$||S(t)x - S(t)y|| \le ||x - y||, \ \forall x, y \in C, \ \forall t \ge 0.$$

**Definição 2.3.2** Seja C um subconjunto convexo e fechado de H e S(t) um semigrupo sobre C. O operador  $A_{\circ}$  de H definido por:

$$\mathcal{D}(A_{\circ}) = \left\{ x \in C \mid \lim_{t \to 0} \frac{x - S(t)x}{t} \text{ existe} \right\},\,$$

$$A_{\circ}x = \lim_{t \to \infty} \frac{x - S(t)x}{t}, \ \forall x \in \mathcal{D}(A_{\circ}),$$

é dito **gerador infinitesimal** de S(t).

Além disto, é sabido que todo semigrupo S(t) sobre um subconjunto fechado

e convexo C de H admite apenas um gerador.

**Definição 2.3.3** Seja V um espaço de Banach complexo e seja  $L \in \mathcal{L}(V)$ . O conjunto resolvente é denotado por  $\rho(L)$  e definido da seguinte forma: [2]

$$\rho(L) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (L - \lambda I) \text{ \'e uma bijeção de } V \text{ para } V \}.$$

O espectro de L é definido como sendo o conjunto:

$$\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus \rho(L).$$

#### 2.4 Método das Diferenças Finitas

#### 2.4.1 Introdução

Dado um problema envolvendo equações diferenciais, nem sempre é simples ou possível encontrar sua solução analítica. Uma boa alternativa é recorrer aos métodos numéricos como, por exemplo, o Método das Diferenças Finitas. Este tem por objetivo resolver numericamente equações diferenciais com condições iniciais ou de fronteira. E, consiste em discretizar o domínio, transformando um problema contínuo em um problema discreto, com um número finito de incógnitas. Feito isto, resolve-se o problema com o auxílio do computador.

A ideia básica deste método numérico consiste em transformar o problema de resolver uma equação diferencial em um de resolver um sistema formado por equações algébricas, utilizando ao invés das derivadas, aproximações por diferenças finitas.

Para isto, divide-se o domínio em uma malha de pontos (nós discretos). Em

cada nó, aproxima-se, utilizando diferenças finitas, os termos da equação diferencial em questão. Tais aproximações saem diretamente da série de Taylor e para mais detalhes, pode-se consultar, por exemplo, [1] e [18]. Ao longo do texto, apresentaremos aproximações para a primeira derivada e também para a segunda.

#### 2.4.2 Consistência, Convergência e Estabilidade

Após o breve resumo do método numérico escolhido para resolver numericamente o problema deste trabalho, esta subseção tem o objetivo de introduzir alguns dos conceitos importantes que serão utilizados no Capítulo 5. As definições aqui apresentadas foram retiradas de [9].

Um problema é dito **bem posto** se valem existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais e/ou de contorno. Caso contrário, dizemos que o problema é *mal posto*.

No processo de discretização por diferenças finitas, como já foi mencionado, substituimos as derivadas que aparecem na equação por diferenças finitas. Consideremos u(x,t) a solução analítica do problema envolvendo a equação diferencial que deseja-se estudar. Definimos o incremento no tempo como sendo  $\Delta t$ , o passo espacial como h e  $U^n_j$  como sendo a variável discreta para aproximar u(x,t), isto é,  $U^n_j \approx u(jh, n\Delta t)$ . Além disto, denotemos o operador de diferenças por  $D[U^n_j]$ , ou seja, a equação discretizada desta forma. É importante lembrar que ao realizar estas aproximações, cometemos um erro de truncamento e o chamaremos de  $\varepsilon$ , logo  $D[U^n_j] = \varepsilon = \varepsilon(\Delta t, h)$ .

Para ilustrar o que foi citado acima, na referência [9], foram propostos esquemas para obter numericamente as equações do calor e de onda, utilizando o Método das Diferenças Finitas.

**Observação:** Analogamente, pode-se estender a definição para o caso u(x, y, t), ou seja, duas variáveis espaciais, x e y, e uma variável temporal t. Então, considerando em particular uma malha espacial uniforme com espaçamento h, temos:

$$U_{i,k}^n \approx u(jh, kh, n\Delta t).$$

Três propriedades são fundamentais para o comportamento de um esquema numérico, a saber: consistência, estabilidade e convergência. A condição de consistência define uma relação entre a equação diferencial e o esquema discreto associado, enquanto que a condição de estabilidade define uma relação entre a solução exata do sistema linear, resultante da discretização, e a solução numérica do mesmo. Já a condição de convergência conecta as soluções numérica e analítica.

O esquema  $D[U_j^n]$  é dito **consistente** com a equação diferencial associada a ele se:

$$\lim_{h \to 0, \Delta t \to 0} \varepsilon = 0.$$

Em outras palavras, no esquema consistente, a equação discretizada deve tender à equação diferencial associada quando  $\Delta t \to 0$  e  $h \to 0$ .

Considere u(x,t) a solução analítica de uma determinada equação diferencial parcial e  $U_j^n$  a solução obtida utilizando o esquema proposto. Dizemos que o método é **convergente** se:

$$\lim_{h\to 0, \Delta t\to 0} |U_j^n - u(x,t)| = 0.$$

Entretanto, a solução analítica do problema nem sempre é conhecida, logo o limite acima, em geral, não pode ser aplicado explicitamente. Para contornar esta

dificuldade, recorremos ao teorema de Lax que será apresentado a seguir. Em outras palavras, este teorema nos permite garantir a convergência do método proposto através do estudo da sua estabilidade.

Teorema da Equivalência de Lax: Dado um problema de valor inicial/de contorno bem posto e um esquema de diferenças finitas consistente com ele, a estabilidade é condição necessária e suficiente para a convergência.

Suponha que  $E^m$  seja o erro ou perturbação introduzido pelo operador de discretização D[]. Esta perturbação propaga-se à medida em que  $m \to \infty$ . Assim sendo, o método é dito **estável** se existe  $M \in \mathbb{R}$  e um inteiro positivo J tais que  $|E^m| < M$ ,  $\forall m > J$ . Em outras palavras, o método é estável se a perturbação  $E^m$  é uniformemente limitada à medida que  $m \to \infty$ .

Para verificar a estabilidade do esquema numérico será utilizado o Critério da Matriz. Mais detalhes sobre este critério serão mencionados na seção 5.5.

#### 3 ASPECTOS TEÓRICOS

"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela."

Albert Einstein

Este Capítulo tem como objetivo apresentar a teoria do problema mais geral que será estudado e isto é feito na seção 3.1, juntamente com o cálculo de energia associada a ele. Em seguida, em 3.2, um teorema que garante existência e unicidade deste problema geral será enunciado.

#### 3.1 Apresentação do Problema

Sejam U e H espaços de Hilbert reais, e  $A_0: \mathcal{D}(A_0) \to H$  um operador positivo e auto-adjunto, com  $A_0^{-1}$  compacto em H. Também, seja  $B_0 \in \mathcal{L}(U, H)$  um operador de controle.

Consideraremos o sistema modelado pela equação diferencial de segunda ordem:

$$\begin{cases}
\ddot{\omega}(t) + A_0 \omega(t) = B_0 u(t) \\
\omega(0) = \omega_0 \quad , \quad \dot{\omega}(0) = \omega_1 \quad , \quad t \in [0, \infty),
\end{cases}$$
(3.1)

onde (·) denota a derivada em relação ao tempo.

De acordo com a literatura, a maior parte das equações lineares que modelam vibrações de estruturas elásticas com controle distribuído pode ser escrita desta forma, com  $\omega$  sendo o campo de deslocamento.

Além disto, é possível calcular a energia associada a este problema. Denotaremos o produto interno em H por  $(\cdot, \cdot)$  e a norma de H por  $\|\cdot\|$ . Utilizando estas notações, partindo da equação principal em (3.1) e multiplicando-a por  $\dot{\omega}(t)$ , temos:

$$\left(\ddot{\omega}(t), \dot{\omega}(t)\right) + \left(A_0\omega(t), \dot{\omega}(t)\right) = \left(B_0u(t), \dot{\omega}(t)\right). \tag{3.2}$$

De (3.2), vem que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{\omega}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A_0^{\frac{1}{2}}\omega(t)\|^2 = \left(B_0u(t), \dot{\omega}(t)\right).$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\dot{\omega}(t)\|^2 + \|A_0^{\frac{1}{2}}\omega(t)\|^2\right\} = \left(B_0u(t), \dot{\omega}(t)\right). \tag{3.3}$$

Se definirmos a energia no instante t por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|\dot{\omega}(t)\|^2 + \|A_0^{\frac{1}{2}}\omega(t)\|^2 \right\},\,$$

Então, segue de (3.3) que:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \left(B_0 u(t), \dot{\omega}(t)\right).$$

Daí, integrando de 0 a t, obtemos:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \left( B_0 u(s), \dot{\omega}(s) \right) ds \quad \Longrightarrow \quad E(t) = E(0) + \int_0^t \left( B_0 u(s), \dot{\omega}(s) \right) ds.$$

Tal relação é válida para todo  $u\in U$ . Em particular, teremos, tomando  $u(t)=-B_0^*\dot{\omega}(t)$ :

$$\left(B_0\left(-B_0^*\dot{\omega}(t)\right),\dot{\omega}(t)\right) = \left(-B_0^*\dot{\omega}(t),B_0^*\dot{\omega}(t)\right) = -\|B_0^*\dot{\omega}(t)\|^2.$$

Portanto, segue que:

$$E(t) = E(0) - \int_0^t ||B_0^* \dot{\omega}(s)||^2 ds, \quad \forall t \ge 0,$$

ou seja, a energia associada ao problema é não-crescente.

Substituindo  $u(t) = -B_0^* \dot{\omega}(t)$  no problema inicial (3.1), obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A_0 \omega(t) + B_0 B_0^* \dot{\omega}(t) = 0\\ \omega(0) = \omega_0 \quad , \quad \dot{\omega}(0) = \omega_1 \quad , \quad t \in [0, \infty) \,. \end{cases}$$

$$(3.4)$$

Assim como em [16], iremos considerar que o sistema (3.4) é exponencialmente estável, ou seja, existem  $M, \alpha > 0$  tais que:

$$E(t) \le Me^{-\alpha t}E(0), \quad \forall t \ge 0.$$

Seja  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$  o fecho de  $\mathcal{D}(A_0)$  em relação a seguinte norma:

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle A_0 \varphi, \varphi \rangle}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0).$$

Assumiremos que  $(V_h)_{h>0}$  é uma sequência de subespaços de dimensões finitas de  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$ . Além disto, para cada h>0, denotaremos por N(h) a dimensão de  $V_h$  e o produto interno nestes subespaços será o mesmo produto interno definido em H e continuará sendo denotado por  $(\cdot,\cdot)$ .

Definimos o operador  $A_{0h} \in V_h$  por:

$$\left(A_{0h}\varphi_h,\psi_h\right) = \left(A_0^{\frac{1}{2}}\varphi_h, A_0^{\frac{1}{2}}\psi_h\right), \quad \forall \varphi_h, \psi_h \in V_h.$$
(3.5)

Note que o operador  $A_{0h}$  definido em (3.5) é simétrico e positivo-definido. De fato,

•  $A_{0h}$  é simétrico:

Por definição:

$$\left(A_{0h}\varphi_h,\psi_h\right) = \left(A_{0h}^{\frac{1}{2}}\varphi_h,A_{0h}^{\frac{1}{2}}\psi_h\right).$$

Pela simetria do produto interno:

$$\left(A_{0h}^{\frac{1}{2}}\varphi_h,A_{0h}^{\frac{1}{2}}\psi_h\right) = \left(A_{0h}^{\frac{1}{2}}\psi_h,A_{0h}^{\frac{1}{2}}\varphi_h\right).$$

Novamente, por definição e pela simetria do produto interno, respectivamente, segue:

$$\left(A_{0h}^{\frac{1}{2}}\psi_h, A_{0h}^{\frac{1}{2}}\varphi_h\right) = \left(A_{0h}\psi_h, \varphi_h\right) = \left(\varphi_h, A_{0h}\psi_h\right).$$

$$\Longrightarrow (A_{0h}\varphi_h, \psi_h) = (\varphi_h, A_{0h}\psi_h),$$

ou seja, o operador  $A_{0h}$  é simétrico.

•  $A_{0h}$  é positivo-definido:

Tomando  $\varphi_h \neq 0$ , temos pela simetria e por definição que:

$$\left(\varphi_h, A_{0h}\varphi_h\right) = \left(A_{0h}\varphi_h, \varphi_h\right) = \left(A_{0h}^{\frac{1}{2}}\varphi_h, A_{0h}^{\frac{1}{2}}\varphi_h\right) > 0,$$

pois  $(a,a) \ge 0, \forall a$ , e como  $\varphi_h \ne 0$  e  $A_{0h}^{\frac{1}{2}}$  é o operador raiz quadrada, segue que:  $A_{0h}^{\frac{1}{2}}\varphi_h > 0$ .

Consideremos a sequência de subespaços  $(U_h)$ ,  $U_h \subseteq U$ , e definimos o operador  $B_{0h} \in \mathcal{L}(U_h, V_h)$  como sendo:

$$B_{0h}u_h = \tilde{\pi}_h B_0 u_h$$
 ,  $\forall u_h \in U_h$ ,

em que  $\tilde{\pi}_h$  é a projeção ortogonal de H sobre  $V_h$ .

O operador adjunto de  $B_{0h}$  é  $B_{0h}^*$ , dado pela relação a seguir.

$$B_{0h}^* \varphi_h = \rho_h B_0^* \varphi_h \quad , \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

em que  $\rho_h$  representa a projeção ortogonal de U sobre  $U_h$ .

As considerações acima nos dizem que para qualquer  $h^* > 0$ , as sequências  $(\|B_{0h}\|_{\mathcal{L}(U_h,V_h)})_{h\in(0,h^*)}$  e  $(\|B_{0h}^*\|_{\mathcal{L}(V_h,U_h)})_{h\in(0,h^*)}$  são limitadas.

Assim como em [16], iremos supor que a família de subespaços  $(V_h)$  aproxima o espaço  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$  e que analogamente,  $(U_h)$  aproxima U. Mais precisamente, se  $\pi_h$ denota a projeção ortogonal de  $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$  sobre  $V_h$ , supomos que existem  $\theta>0, h^*>$  $0, C_0 > 0$  tal que para todo  $h \in (0, h^*)$ , segue que:

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\|_{\frac{1}{2}} \le C_0 h^{\theta} \|A_0 \varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0),$$
 (3.6)

$$\|\pi_h \varphi - \varphi\| \le C_0 h^{2\theta} \|A_0 \varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0),$$
 (3.7)

$$\lim_{h \to 0} \rho_h u = u \quad em \ U, \qquad \forall u \in U,$$

$$\|\rho_h B_0^* \varphi - B_0^* \varphi\|_U \le C_0 h^{2\theta} \|A_0 \varphi\|, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0).$$
(3.8)

$$\|\rho_h B_0^* \varphi - B_0^* \varphi\|_U \le C_0 h^{2\theta} \|A_0 \varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0).$$
 (3.9)

Tais suposições e notações são de extrema importância na demonstração do teorema apresentado na próxima seção.

#### 3.2 Estabilidade do Sistema

A seguir, no Teorema 1, será apresentado um resultado de estabilidade uniforme e exponencial.

#### Teorema 1 Suponha que:

1.  $A_0^{\frac{1}{2}}$  tenha autovalores simples

$$\lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

e que exista uma constante  $\gamma_0 > 0$  tal que:

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge \gamma_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Exista uma constante  $\beta_0 > 0$  tal que para todo autovetor  $\varphi$  de  $A_0^{\frac{1}{2}}$  normalizado (em H), tenhamos:

$$||B_0^*\varphi||_U \ge \beta_0.$$

3. As famílias de subespaços  $(V_h)$  e  $(U_h)$  satisfaçam (3.6) - (3.9).

Então, a família de sistemas:

$$\ddot{\omega}_h(t) + A_{0h}\omega_h(t) + B_{0h}B_{0h}^*\dot{\omega}_h(t) + h^{\theta}A_{0h}\dot{\omega}_h(t) = 0, \tag{3.10}$$

$$\omega_h(0) = \omega_{0h} \in V_h \quad , \quad \dot{\omega}_h(0) = \omega_{1h} \in V_h. \tag{3.11}$$

é uniformemente e exponencialmente estável, no sentido de que existam constantes  $M, \alpha, h^* > 0$  (independentes de  $h, \omega_{0h}$  e  $\omega_{1h}$ ) tal que para todo  $h \in (0, h^*)$ :

$$\|\dot{\omega}_h(t)\|^2 + \|A_{0h}^{\frac{1}{2}}\omega_h(t)\|^2 \le Me^{-\alpha t} \left(\|\omega_{1h}\|^2 + \|A_{0h}^{\frac{1}{2}}\omega_h\|^2\right), \qquad \forall t \ge 0.$$
 (3.12)

Demonstração: Ver em [16].

## 4 APLICAÇÃO: PLACA QUADRADA BIDIMEN-SIONAL

"Gosto daquilo que me desafia. O fácil nunca me interessou, já o obviamente impossível sempre me atraiu — e muito."

Clarice Lispector

Neste Capítulo apresentaremos uma das aplicações da teoria vista anteriormente. Nosso interesse é estudar as vibrações de uma placa quadrada elástica sujeita à ação de um mecanismo de controle/dissipação (damping). Na seção 4.1 será mostrada a modelagem do problema e na seção 4.2, verificaremos a relação entre o Capítulo anterior e tal aplicação. Em seguida, nas seções 4.3 e 4.4, falaremos sobre a energia associada ao sistema em questão e verificaremos a existência e unicidade de solução do problema.

# 4.1 Apresentação do Problema: Placa Quadrada Bidimensional

Considere, então, o quadrado  $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$  e seja  $\mathcal{O} \subset \Omega$  o retângulo  $[a, b] \times [c, d]$ , com  $0 < a < b < \pi$  e  $0 < c < d < \pi$ , o subconjunto de  $\Omega$  onde o damping está agindo, como mostra a Figura 4.1. Denotando por  $\chi_{\mathcal{O}}$  a função característica de  $\mathcal{O}$ , nosso objeto de estudo é modelado pelo seguinte problema:

$$\begin{cases}
\ddot{\omega}(t) + \Delta^2 \omega(t) + \chi_{\mathcal{O}} \dot{\omega}(t) = 0 &, \quad x \in \Omega, \quad t \ge 0, \\
\omega(t) = \Delta \omega(t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \ge 0, \\
\omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \dot{\omega}(x, 0) = \omega_1(x), \quad \forall x \in \Omega,
\end{cases} (4.1)$$

em que o ponto (  $\dot{}$  ) denota a derivada em relação ao tempo e  $\Delta^2\omega$  representa o bilaplaciano de  $\omega$ . O último termo no lado esquerdo da primeira equação modela o efeito do amortecimento e nas últimas duas linhas de (4.1), temos as condições iniciais e de contorno do problema.

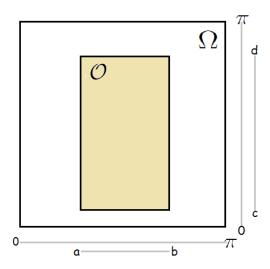


Figura 4.1: Domínio do Problema

#### 4.2 Relação entre os Capítulos 3 e 4

Nesta subseção, vamos estabelecer uma relação entre o problema abstrato e o problema apresentado na seção anterior. O sistema (4.1) pode ser escrito na forma (3.1), ou seja:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + A_0 \omega(t) = B_0 u(t) \\ \omega(0) = \omega_0 \quad , \quad \dot{\omega}(0) = \omega_1 \quad , \quad t \in [0, \infty) \, . \end{cases}$$

Para isto, considere:

$$H = L^2(\Omega)$$
,  $\mathcal{D}(A_0) = \{ \varphi \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid \Delta \varphi = 0 \ em \ \partial \Omega \}$ ,  
 $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to H$ ,  $A_0 \varphi = \Delta^2 \varphi$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(A_0)$ .

Note que o operador  $A_0$  é auto-adjunto e positivo.

Além disto, como pode ser visto em [15]:

$$\mathcal{D}\left(A_0^{\frac{1}{2}}\right) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

com a norma correspondente dada por:

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2}}^2 = \int_{\Omega} |\Delta\varphi(x)|^2 dx,$$

e os autovalores de  $A_0^{\frac{1}{2}}$  são:

$$\tilde{\lambda}_{p,q} = p^2 + q^2, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*.$$

Além de definir  $U=L^2\left((a,b)\times(c,d)\right)$  e o operador  $B_0\in\mathcal{L}(U,H)$  como sendo

$$B_0 u = \tilde{u} \chi_{[a,b] \times [c,d]}, \quad \forall u \in U,$$

em que  $\tilde{u}$  é uma extensão de u para algum elemento de  $L^2(\Omega)$ .

# 4.3 Energia

Sabe-se que a energia do sistema (4.1) no instante t é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|\dot{\omega}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta\omega(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \tag{4.2}$$

De fato, multiplicando a equação principal em (4.1) por  $\dot{\omega}(t)$  e integrando em  $\Omega$ , temos que:

$$(\ddot{\omega}(t),\dot{\omega}(t)) + (\Delta^2\omega(t),\dot{\omega}(t)) = -\int_{\Omega} \chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega}(t)\dot{\omega}(t),$$

denotando os operadores laplaciano e bilaplaciano por  $\Delta \omega$  e  $\Delta^2 \omega$ , respectivamente.

$$\Rightarrow (\ddot{\omega}(t), \dot{\omega}(t)) + (\Delta\omega(t), \Delta\dot{\omega}(t)) = -\int_{\Omega} \chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega}(t)\dot{\omega}(t).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{\omega}(t)\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\omega(t)\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} = -\int_{\mathcal{O}}|\dot{\omega}(t)|^{2}.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\dot{\omega}(t)\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} + \|\Delta\omega(t)\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right\} = -\int_{\mathcal{O}}|\dot{\omega}(t)|^{2}.$$

Integrando a equação acima de 0 a t, verificamos que a equação (4.2) é verdadeira.

Além disto, como acabamos de ver:

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_{\mathcal{O}} |\dot{\omega}(t)|^2.$$

Portanto,

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \int_{\mathcal{O}} |\dot{\omega}(s)|^2 ds \le 0 , \quad \forall t \ge 0,$$
 (4.3)

ou seja, a energia associada ao problema é não crescente.

Além disto, a referência [17] mostra que a energia decai exponencialmente. No artigo [15], os autores propuseram um esquema de semi-discretização espacial para este problema, o qual será estudado no próximo Capítulo. Tal esquema foi construído de modo a garantir decaimento exponencial e uniforme da energia discreta  $E_h(t)$  em relação ao parâmetro de discretização.

## 4.4 Existência e Unicidade de Solução

A seguir, será apresentado um resultado que assegura a existência e a unicidade de solução deste problema. Além disto, o Teorema 2 apresenta um resultado

de estabilidade exponencial.

**Teorema 2** Suponha que  $\omega_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$  e  $\omega_1 \in L^2(\Omega)$ . Então, o sistema (4.1) admite uma única solução  $\omega \in C(0,\infty; H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \cap C^1(0,\infty; L^2(\Omega))$ . Além disto, (4.1) é exponencialmente estável, isto é, existem constantes  $M, \alpha > 0$  dependendo de  $\mathcal{O}$  tais que:

$$\|\dot{\omega}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\omega(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 \le Me^{-\alpha t} \left( \|\omega_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\omega_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \right), \quad \forall t \ge 0.$$

Demonstração: Ver em [15].

# 5 ANÁLISE NUMÉRICA

"A persistência é o menor caminho do êxito."

Charles Chaplin

Neste Capítulo, estudaremos numericamente as vibrações transversais de uma placa elástica quadrada sujeita a ação de um mecanismo de controle/dissipação (damping). Começaremos apresentando na seção 5.1 a discretização espacial utilizada, baseada no Método das Diferenças Finitas. Em seguida, introduziremos a discretização temporal e obteremos um algoritmo para calcular a solução aproximada desejada em cada um dos nós da malha na seção 5.2. Já em 5.3, apresentaremos a numeração dos nós escolhida. Nas seções 5.4, 5.5 e 5.6, respectivamente, analisaremos os conceitos de consistência, estabilidade e convergência. Finalmente, em 5.7, o cálculo da energia discreta associada ao problema será o centro das atenções.

#### 5.1 Problema Semi-Discreto

Nesta seção, detalharemos o esquema de semi-discretização de diferenças finitas utilizado para aproximar (4.1).

Dado  $m \in \mathbb{N}$ , denotamos o espaçamento h<br/> da malha espacial uniforme como sendo:

$$h = \frac{\pi}{m+1},$$

ou seja, dividiremos o segmento de reta de 0 a  $\pi$  em m+1 intervalos e m+2 nós.

A Figura 5.1 nos mostra uma representação simplificada da malha espacial utilizada e nos ajuda a entender a discretização escolhida.

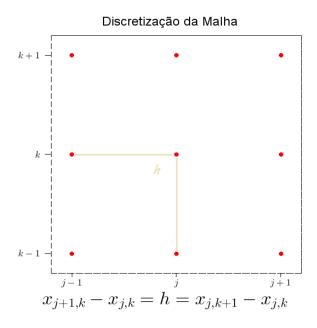


Figura 5.1: Malha Espacial Uniforme

Sem perda de generalidade, podemos supor que existem inteiros

$$a(h), b(h), c(h), d(h) \in \{1, \dots, m\},\$$

tais que:

$$a = a(h)h$$
,  $b = b(h)h$ ,  $c = c(h)h$ ,  $d = d(h)h$ .

Denotaremos por  $\omega_{j,k}$ , para todo  $j,k \in \{0,\ldots,m+1\}$ , a aproximação da solução  $\omega$  do sistema (4.1) no ponto  $x_{j,k}=(jh,kh)$ , ou seja,  $\omega_{j,k}\approx \omega(jh,kh)$ .

Além disto, para o Laplaciano, utilizaremos a seguinte aproximação de segunda ordem (considerando 5 pontos. Ver Figura 5.2 e os detalhes no Anexo A.1):

$$\Delta\omega(jh,kh) \approx \frac{1}{h^2} \left( \omega_{j+1,k} + \omega_{j-1,k} + \omega_{j,k+1} + \omega_{j,k-1} - 4\omega_{j,k} \right), \quad \forall j,k \in \{1,\dots,m\}.$$

Note que o erro de discretização é de ordem  $O(h^2)$ .

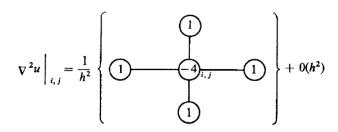


Figura 5.2: Discretização do Laplaciano - Imagem Retirada de [1]

Para satisfazer as condições de contorno do sistema (4.1), consideraremos:

$$\omega_{0,k} = \omega_{k,0} = \omega_{m+1,k} = \omega_{k,m+1} = 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, m+1\}.$$

$$\omega_{-1,k} = -\omega_{1,k} , \quad \omega_{m+2,k} = -\omega_{m,k} \quad \forall k \in \{0, \dots, m+1\}.$$

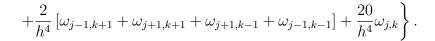
$$\omega_{k,-1} = -\omega_{k,1} , \quad \omega_{k,m+2} = -\omega_{k,m} \quad \forall k \in \{0, \dots, m+1\}.$$

Pelas condições de fronteira do problema (4.1) e pelas observações acima, concluímos que a solução é conhecida nos nós que se encontram na fronteira do domínio (representados pelos asteriscos na Figura 5.3) e que precisamos obter aproximações para a solução nos demais  $m^2$  nós (demais pontos na Figura 5.3).

Seja  $V_h=\mathbb{R}^{(m^2)}$  e  $\omega_h\in V_h$  o vetor cujas componentes são as de  $\omega_{j,k}$  para  $1\leq j,k\leq m.$ 

A matriz  $A_{0h}$ , que representa a discretização do bilaplaciano, pode ser definida utilizando a definição de tal operador e a fórmula apresentada anteriormente na Figura 5.2. A Figura 5.4 traz a representação esquemática do operador bilaplaciano discreto e sua fórmula, cuja dedução pode ser vista no Anexo A.2, é dada por:

$$\Delta^2 \omega_{j,k} = \left\{ \frac{1}{h^4} \left[ \omega_{j+2,k} + \omega_{j-2,k} + \omega_{j,k+2} + \omega_{j,k-2} \right] - \frac{8}{h^4} \left[ \omega_{j-1,k} + \omega_{j+1,k} + \omega_{j,k+1} + \omega_{j,k-1} \right] \right\}$$



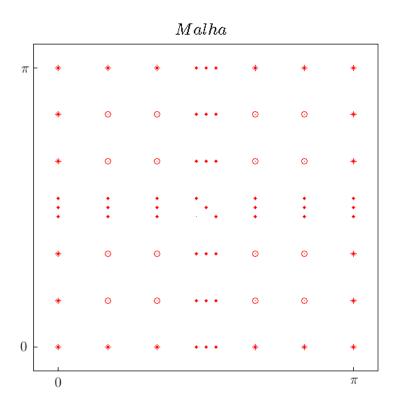


Figura 5.3: Malha Espacial

Assim, podemos definir a mesma matriz  $A_{0h}$ , já considerando as condições de contorno explicitadas acima, através da sua raiz quadrada  $A_{0h}^{1/2}$ :

$$\left(A_{0h}^{1/2}\omega_h\right)_{j,k} = \frac{1}{h^2} \left(\omega_{j+1,k} + \omega_{j-1,k} + \omega_{j,k+1} + \omega_{j,k-1} - 4\omega_{j,k}\right), \quad 1 \le j, k \le m. \quad (5.1)$$

O esquema de diferenças finitas para o sistema (4.1) é dado por:

$$\begin{cases}
\ddot{\omega}_{j,k} + (A_{0h}\omega_h)_{j,k} + (\chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega}_h)_{j,k} + h^2(A_{0h}\dot{\omega}_h)_{j,k} = 0, & 1 \leq j, k \leq m, t \geq 0, \\
\omega_h(0) = \omega_{0h}, & \dot{\omega}_h(0) = \omega_{1h}.
\end{cases}$$
(5.2)

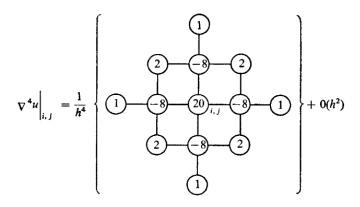


Figura 5.4: Discretização do Bilaplaciano - Imagem Retirada de [1]

Repare que foi adicionado o termo  $h^2(A_{0h}\dot{\omega}_h)$  em (5.2). Este termo é denominado de viscosidade numérica. Além disto,  $\omega_{0h}$  e  $\omega_{1h}$  são aproximações dos dados iniciais  $\omega_0$  e  $\omega_1$ , respectivamente, na malha definida acima.

Em (5.2), lembrando que  $\chi_{\mathcal{O}}$  é a função característica de  $\mathcal{O}$ , o termo  $\chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega}_h$  denota o vetor de  $V_h$  cujas entradas são:

$$(\chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega}_h)_{j,k} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_{j,k} \ , \quad \text{se } a(h) \leq j \leq b(h) \ \text{e } c(h) \leq k \leq d(h) \\ 0 \quad , \quad \text{caso contrário.} \end{array} \right.$$

Note que a energia deste sistema semi-discretizado no instante t é dada por:

$$E_h(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|\dot{\omega}_h(t)\|^2 + \|A_{0h}^{1/2}\omega_h(t)\|^2 \right\}.$$
 (5.3)

De agora em diante, utilizaremos a notação  $\|\cdot\|$  para representar a norma Euclidiana do  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . O resultado principal desta seção vem a seguir.

**Teorema 3** A família de sistemas definida por (5.2) é exponencialmente e uniformemente estável, no sentido de que existem constantes  $C, \alpha, h^* > 0$  (independentes

de  $h, \omega_{0h}$  e  $\omega_{1h}$ ) tais que para todo  $h \in (0, h^*)$ :

$$\|\dot{\omega}_h(t)\|^2 + \|A_{0h}^{1/2}\omega_h(t)\|^2 \le Ce^{-\alpha t} \left(\|\omega_{1h}\|^2 + \|A_{0h}^{1/2}\omega_{0h}\|^2\right) , \quad \forall t \ge 0.$$

**Demonstração:** Ver em [15]. A demonstração deste teorema é baseada na caracterização de domínio de frequências para a estabilidade uniforme e exponencial de uma sequência de semigrupos, a qual será apresentada a seguir.

**Teorema 4** Seja  $(\mathbb{T}_h)_{h>0}$  uma família de semigrupos de contração no espaço de Hilbert  $V_h$  e seja  $A_h$  o correspondente gerador infinitesimal. Então, a família  $(\mathbb{T}_h)_{h>0}$  é uniformemente e exponencialmente estável se, e somente se, as duas condições a seguir forem satisfeitas:

- (i)  $\forall h > 0$ ,  $i\mathbb{R} \subset \rho(A_h)$ , onde  $\rho(A_h)$  representa o conjunto resolvente de  $A_h$ .
- (ii)  $\sup_{h>0, \omega \in \mathbb{R}} ||(i\omega A_h)^{-1}|| < +\infty.$

O Teorema 4 é utilizado na demonstração do Teorema 3 e para mais detalhes sobre ele e sua demonstração, ver [13].

**Observação:** [15] mostram que o Teorema 3 também é válido no caso de uma placa retangular.

#### 5.2 Problema Discreto

Nesta seção iremos introduzir a discretização temporal utilizando o Método das Diferenças Finitas e chegaremos em um algoritmo para resolver numericamente o problema em questão. Deste ponto em diante, os resultados obtidos são contribuições do presente trabalho.

Definimos o incremento no tempo  $\Delta t$  por:

$$t_n = n\Delta t$$
,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,

ou seja,

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < t_2 < \dots < t_N = T = N\Delta t.$$

Para aproximar os termos que envolvem derivadas em relação ao tempo, utilizaremos aproximações de segunda ordem, conforme [1]. Além disto, denotaremos a solução aproximada no ponto  $x_{j,k}$  e no tempo discreto  $t_n$  por  $\omega_{j,k}^n$ , ou seja,  $\omega(x_{j,k},t_n)=\omega(jh,kh,n\Delta t)=\omega_{j,k}^n$ .

Assim,

$$\ddot{\omega}_{j,k}^{n} = \frac{\omega_{j,k}^{n+1} - 2\omega_{j,k}^{n} + \omega_{j,k}^{n-1}}{(\Delta t)^{2}} + O(\Delta t^{2}) \quad , \qquad \dot{\omega}_{j,k}^{n} = \frac{\omega_{j,k}^{n+1} - \omega_{j,k}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^{2}). \quad (5.4)$$

Além disto, utilizaremos o Método de Newmark, ou seja, a média abaixo, com  $\theta = \frac{1}{4}$ , para o termo que não apresenta derivadas:

$$\omega_{j,k}^{n} \approx \theta \omega_{j,k}^{n+1} + (1 - 2\theta)\omega_{j,k}^{n} + \theta \omega_{j,k}^{n-1} = \frac{1}{4}\omega_{j,k}^{n+1} + \frac{1}{2}\omega_{j,k}^{n} + \frac{1}{4}\omega_{j,k}^{n-1}.$$
 (5.5)

Juntando as informações (5.4) e (5.5) com a semi-discretização vista em (5.2) e lembrando que  $A_{0h}$  é o operador linear descrito na seção anterior, temos:

$$\frac{\omega_{j,k}^{n+1} - 2\omega_{j,k}^{n} + \omega_{j,k}^{n-1}}{(\Delta t)^{2}} + A_{0h} \left(\frac{1}{4}\omega^{n+1} + \frac{1}{2}\omega^{n} + \frac{1}{4}\omega^{n-1}\right)_{j,k} + (\chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega})_{j,k}^{n}$$
$$+ h^{2} \left(A_{0h} \left(\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n-1}}{2\Delta t}\right)\right)_{j,k} = 0.$$

$$\Rightarrow 2\omega_{j,k}^{n+1} - 4\omega_{j,k}^{n} + 2\omega_{j,k}^{n-1} + 2(\Delta t)^{2}A_{0h}\left(\frac{1}{4}\omega^{n+1} + \frac{1}{2}\omega^{n} + \frac{1}{4}\omega^{n-1}\right)_{j,k} + 2(\Delta t)^{2}(\chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega})_{j,k}^{n}$$

$$+h^{2}\Delta t \left(A_{0h}(\omega^{n+1} - \omega^{n-1})_{j,k}\right) = 0.$$
 (5.6)

De (5.6), segue que:

• Se  $a(h) \le j \le b(h)$  e  $c(h) \le k \le d(h)$ :

$$2\omega_{j,k}^{n+1} - 4\omega_{j,k}^{n} + 2\omega_{j,k}^{n-1} + 2(\Delta t)^{2} A_{0h} \left(\frac{1}{4}\omega_{j,k}^{n+1} + \frac{1}{2}\omega_{j,k}^{n} + \frac{1}{4}\omega_{j,k}^{n-1}\right) + 2(\Delta t)^{2} \left(\frac{\omega_{j,k}^{n+1} - \omega_{j,k}^{n-1}}{2\Delta t}\right) + h^{2} \Delta t \left(A_{0h} \left(\omega_{j,k}^{n+1} - \omega_{j,k}^{n-1}\right)\right) = 0.$$

$$2\omega_{j,k}^{n+1} - 4\omega_{j,k}^{n} + 2\omega_{j,k}^{n-1} + (\Delta t)^{2} \left( \frac{1}{2} A_{0h} \omega_{j,k}^{n+1} + A_{0h} \omega_{j,k}^{n} + \frac{1}{2} A_{0h} \omega_{j,k}^{n-1} \right) + \Delta t \left( \omega_{j,k}^{n+1} - \omega_{j,k}^{n-1} \right) + h^{2} \Delta t \left( A_{0h} \omega_{j,k}^{n+1} - A_{0h} \omega_{j,k}^{n-1} \right) = 0.$$

$$\therefore \left(2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + \Delta t + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{n+1} = \left(4 - (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^n$$

$$+ \left(-2 - \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + \Delta t + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{n-1}.$$
(5.7)

• Caso contrário:

$$2\omega_{j,k}^{n+1} - 4\omega_{j,k}^{n} + 2\omega_{j,k}^{n-1} + 2(\Delta t)^{2} \left(\frac{1}{4}A_{0h}\omega_{j,k}^{n+1} + \frac{1}{2}A_{0h}\omega_{j,k}^{n} + \frac{1}{4}A_{0h}\omega_{j,k}^{n-1}\right) + h^{2}\Delta t \left(A_{0h}\omega_{j,k}^{n+1} - A_{0h}\omega_{j,k}^{n-1}\right) = 0.$$

$$\left(2 + \frac{2(\Delta t)^2}{4}A_{0h} + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{n+1} = \left(4 - \frac{2(\Delta t)^2}{2}A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{n} + \left(-2 - \frac{2(\Delta t)^2}{4}A_{0h} + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{n-1}.$$

$$\therefore \left(2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{n+1} = \left(4 - (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^n + \left(-2 - \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{n-1}.$$
(5.8)

Assim, resolvendo os sistemas lineares, baseados nas equações (5.7) e (5.8), obtemos a solução aproximada em cada nó da malha para cada tempo discreto, lembrando que  $A_{0h}$  funciona como apresentado na Figura 5.4. Ou seja, para obter a solução aproximada em cada  $t_{n+1}$ , resolveremos um sistema linear, utilizando soluções aproximadas obtidas nos 2 tempos discretos imediatamente anteriores e respeitando as expressões acima.

Observe que fazendo n=0 em (5.7) e (5.8) obtemos, respectivamente, (5.9) e (5.10):

$$\left(2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + \Delta t + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^1 = \left(4 - (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^0 
+ \left(-2 - \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + \Delta t + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{-1},$$
(5.9)

$$\left(2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^1 = \left(4 - (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^0 
+ \left(-2 - \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^{-1},$$
(5.10)

onde  $\Delta t$  e h são conhecidos, assim como a atuação do bilaplaciano e  $\omega_{j,k}^0$  (condição inicial  $\omega_{0h}$ , dada em (5.2)). Entretanto, o termo  $\omega_{j,k}^{-1}$  é desconhecido a princípio.

Podemos, porém, aproximá-lo utilizando a fórmula apresentada em (5.4). De fato, fazendo n = 0 em (5.4), obtemos:

$$\dot{\omega}_{j,k}^0 = \frac{\omega_{j,k}^1 - \omega_{j,k}^{-1}}{2\Delta t}$$

Então,

$$\omega_{j,k}^{-1} = \omega_{j,k}^1 - 2\Delta t \dot{\omega}_{j,k}^0, \tag{5.11}$$

onde  $\dot{\omega}_{j,k}^0$  é conhecido graças a condição inicial  $\omega_{1h}$  em (5.2).

Então, substituindo (5.11) em (5.9):

$$\left(2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + \Delta t + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^1 = \left(4 - (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^0 
+ \left(-2 - \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + \Delta t + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \left(\omega_{j,k}^1 - 2\Delta t \dot{\omega}_{j,k}^0\right).$$

$$\left(4 + (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^1 = \left(4 - (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^0 + 2\Delta t \left(2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} - \Delta t - h^2 \Delta t A_{0h}\right) \dot{\omega}_{j,k}^0.$$
(5.12)

Analogamente, substituindo (5.11) em (5.10):

$$\left(2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \omega_{j,k}^1 = \left(4 - (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^0 + \left(-2 - \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h} + h^2 \Delta t A_{0h}\right) \left(\omega_{j,k}^1 - 2\Delta t \dot{\omega}_{j,k}^0\right).$$

$$\left(4 + (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^1 = \left(4 - (\Delta t)^2 A_{0h}\right) \omega_{j,k}^0 + 2\Delta t \left(2 - h^2 \Delta t A_{0h} + \frac{(\Delta t)^2}{2} A_{0h}\right) \dot{\omega}_{j,k}^0.$$
(5.13)

Desta forma, resolvendo o sistema linear, utilizando as equações (5.12) e (5.13), obtemos a solução numérica em  $t_1$ .

Note que as equações apresentadas em (5.7), (5.8) e (5.12), (5.13) nos mostram como obter a solução aproximada desejada em qualquer tempo discreto e em todos os nós da malha espacial.

Observe que, dado um determinado tempo discreto, para cada nó representado por um marcador redondo na Figura 5.3, temos uma equação associada a ele. Portanto, para obter a solução aproximada do problema em  $t_{n+1}$ , é preciso resolver (n+1) sistemas lineares, i.e., um a cada tempo discreto  $t_i$ ,  $i=1,2,\ldots,n+1$ , da forma

$$C\omega^{n+1}=b$$
.

onde:

- C é uma matriz  $m^2 \times m^2$ , cujas linhas são formadas como explicitado pelo lado esquerdo de (5.7), (5.8) (ou (5.12) e (5.13), se n = 1);
- $b = b(\omega^n, \omega^{n-1})$  é um vetor  $m^2 \times 1$ , que depende da solução calculada em  $t_n$  e  $t_{n-1}$ , e suas entradas são dadas pelo lado direito das equações já mencionadas;
- $\omega^{n+1} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_{m^2}]^T$ , com os índices numerados como descrito na seção a seguir. Ou seja,  $\omega^{n+1}$  é o vetor das incógnitas.

Não é difícil notar que C é uma matriz esparsa. Considerando, por exemplo, m=15, sabemos que C tem dimensão  $225\times 225$  e a estrutura esparsa da matriz em questão é representada pela Figura 5.5.

Além disto, podemos dizer que C é uma matriz de banda de ordem  $m^2$  e o

comprimento da banda é 2m+2m+1=4m+1, pois C tem influências do operador bilaplaciano. Assim,  $c_{ij}=0$ , se |i-j|>2m.

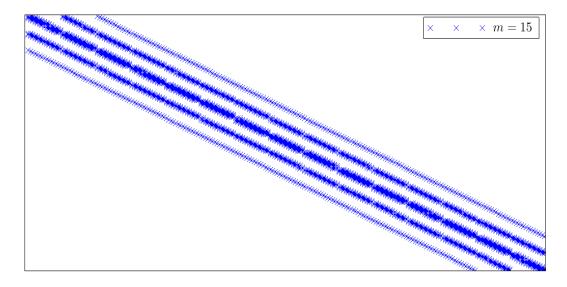


Figura 5.5: Matriz C: m = 15

O algoritmo do problema foi implementado utilizando o software  $MatLab^{\circledR}$  e seu pseudo-código pode ser visto no final do texto (Anexo B). Entretanto, a implementação não utiliza o fato de C ser esparsa. Uma sugestão de trabalho futuro é utilizar esta particularidade da matriz ao implementar o algoritmo.

## 5.3 Numeração dos nós

Um tópico que merece atenção ao lidarmos com o Método de Diferenças Finitas é a numeração dos nós da malha e nesta seção, descreveremos como nossa malha foi numerada.

Dada a malha como mostrada na Figura 5.1, neste mesmo Capítulo, vimos que a solução numérica não é calculada nos nós marcados asteriscos, pois ela já é

conhecida previamente (dado do problema original). O mesmo não acontece para os nós internos,com marcadores redondos. No sistema linear apresentado na seção 5.2, temos uma equação associada a cada um destes pontos. Assim, para montar tal sistema, por simplicidade, os pontos representados por circunferências serão numerados da esquerda para a direita, de baixo para cima, como mostra a Figura 5.6.

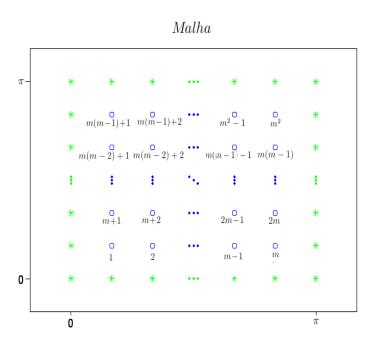


Figura 5.6: Numeração dos Nós

#### 5.4 Consistência

Esta seção é destinada ao estudo da consistência do esquema numérico proposto anteriormente. Para isto, temos:

$$\mathcal{D}\omega = \omega_{tt} + \omega_{xxxx} + 2\omega_{xxyy} + \omega_{yyyy} + \chi_{\mathcal{O}}\omega_t = 0.$$
 (5.14)

$$\mathcal{D}_{\Delta t,h}\omega_{j,k}^{n} = \frac{\omega_{j,k}^{n+1} - 2\omega_{j,k}^{n} + \omega_{j,k}^{n-1}}{(\Delta t)^{2}} + \frac{1}{4}A_{0h}\omega_{j,k}^{n+1} + \frac{1}{2}A_{0h}\omega_{j,k}^{n} + \frac{1}{4}A_{0h}\omega_{j,k}^{n+1}$$
$$+\chi_{\mathcal{O}}\left[\frac{\omega_{j,k}^{n+1} - \omega_{j,k}^{n-1}}{2\Delta t}\right] + h^{2}A_{0h}\left[\frac{\omega_{j,k}^{n+1} - \omega_{j,k}^{n-1}}{2\Delta t}\right] = 0, \tag{5.15}$$

onde  $A_{0h}\omega_{j,k}^n$  representa o operador bilaplaciano discreto, o qual funciona como mostrado na Figura 5.4.

Para  $\phi = \phi(t, \bar{x})$  regular, utilizando expansão de Taylor, teremos:

$$\phi(t_{n\pm 1}, x_{j,k}) = \phi_{j,k}^{n\pm 1} = \left[\phi \pm \Delta t \phi_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \phi_{tt} \pm \frac{(\Delta t)^3}{3!} \phi_{ttt}\right]_{j,k}^n + \mathcal{O}((\Delta t)^4).$$

$$\phi(t_n, x_{i\pm 1,j}) = \phi_{i\pm 1,j}^n = \left[\phi \pm h\phi_x + \frac{h^2}{2}\phi_{xx} \pm \frac{h^3}{3!}\phi_{xxx} + \frac{h^4}{4!}\phi_{xxxx} \pm \frac{h^5}{5!}\phi_{xxxxx}\right]_{i,j}^n + \mathcal{O}(h^6).$$

$$\phi(t_n, x_{i,j\pm 1}) = \phi_{i,j\pm 1}^n = \left[\phi \pm h\phi_y + \frac{h^2}{2}\phi_{yy} \pm \frac{h^3}{3!}\phi_{yyy} + \frac{h^4}{4!}\phi_{yyyy} \pm \frac{h^5}{5!}\phi_{yyyyy}\right]_{i,j}^n + \mathcal{O}(h^6).$$

$$\phi_{i\pm 2,j}^{n} = \left[\phi \pm 2h\phi_{x} + \frac{(2h)^{2}}{2}\phi_{xx} \pm \frac{(2h)^{3}}{3!}\phi_{xxx} + \frac{(2h)^{4}}{4!}\phi_{xxxx} \pm \frac{(2h)^{5}}{5!}\phi_{xxxxx}\right]_{i,j}^{n} + \mathcal{O}(h^{6}).$$

$$\phi_{i,j\pm 2}^{n} = \left[\phi \pm 2h\phi_{y} + \frac{(2h)^{2}}{2}\phi_{yy} \pm \frac{(2h)^{3}}{3!}\phi_{yyy} + \frac{(2h)^{4}}{4!}\phi_{yyyy} \pm \frac{(2h)^{5}}{5!}\phi_{yyyyy}\right]_{i,j}^{n} + \mathcal{O}(h^{6}).$$

Fazendo as contas, conclui-se que:

$$[\mathcal{D} - \mathcal{D}_{\Delta t,h}] \phi_{ik}^n = \mathcal{O}((\Delta t)^2) + \mathcal{O}(h^2).$$

Portanto, quando  $(\Delta t, h) \to 0$ :

$$\left[\mathcal{D} - \mathcal{D}_{\Delta t,h}\right] \phi_{j,k}^n \to 0,$$

ou seja, o esquema proposto é consistente.

#### 5.5 Estabilidade

De acordo Teorema de Equivalência de Lax, consistência, estabilidade e convergência são conceitos que são relacionados entre si:

Consistência + Estabilidade ← Convergência.

Agora, verificaremos se o esquema de diferenças finitas apresentado anteriormente é estável e para isto, será utilizado o critério da matriz. Mais detalhes sobre este critério podem ser encontrados em [20] e [1].

Na seção 5.2, apontamos que para obter a solução numérica deste problema no tempo discreto  $t_{n+1}$ , é preciso resolver um sistema linear e utilizamos as soluções obtidas nos tempos discretos  $t_n$  e  $t_{n-1}$ .

Denote por  $\omega^n$  o vetor com as soluções aproximadas no tempo discreto  $t_n$  nos nós da malha, conforme a numeração apresentada anteriormente, isto é:  $\omega^n = (\omega_1^n, \omega_2^n, \dots, \omega_{m^2}^n)^T$ . Assim, podemos escrever o referido sistema linear da seguinte forma:

$$C\omega^{n+1} = D\omega^n + E\omega^{n-1},\tag{5.16}$$

onde C é a matriz mencionada anteriormente, e D e E também são matrizes quadradas de ordem  $m^2$ .

De (5.16), segue:

$$\omega^{n+1} = C^{-1}D\omega^n + C^{-1}E\omega^n. (5.17)$$

Definindo  $V^n = \begin{bmatrix} \omega^n \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix}$ , então a equação (5.17) pode ser reescrita como:

$$V^{n+1} = \begin{bmatrix} \omega^{n+1} \\ \omega^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1}D & C^{-1}E \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega^n \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix}.$$
 (5.18)

Logo, se 
$$P=\begin{bmatrix} C^{-1}D & C^{-1}E\\ I & 0 \end{bmatrix}$$
, matriz por blocos: 
$$V^{n+1}=PV^n. \tag{5.19}$$

Então,

$$V^{n+1} = PV^n = P^2V^{n-1} = P^3V^{n-2} = \dots = P^nV^1.$$

Denotando os autovalores de P por  $\mu_i$  e os autovetores correspondentes por  $v^{(i)}$ , sabemos que:

$$Pv^{(i)} = \mu_i v^{(i)}.$$

Se  $v^{(i)}$  são distintos, pode-se escrever:

$$V^{1} = \sum \alpha_{i} v^{(i)}, \qquad V^{n+1} = P^{n} V^{1} = \sum \alpha_{i} \mu_{i}^{n} v^{(i)}.$$

Para descobrir estes autovalores, basta resolver a equação  $det(P-\mu I)=0.$ Pela definição da matriz P:

$$\det(P - \mu I) = \det \begin{vmatrix} C^{-1}D - \mu I & C^{-1}E \\ I & -\mu I \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore \det |(C^{-1}D - \mu I)(-\mu I) - (C^{-1}D - \mu I)I(C^{-1}D - \mu I)^{-1}C^{-1}E| = 0.$$

$$\therefore \det |(C^{-1}D - \mu I)(-\mu I) - C^{-1}E| = 0.$$

$$\Rightarrow \det |\mu^2 C - \mu D - C| = 0.$$

$$(5.20)$$

De (5.20), teremos os autovalores desejados. Entretanto, deixaremos como trabalho futuro este estudo. Analisaremos os autovalores de C de outra forma: calculando-os com o auxílio do computador a cada iteração do algoritmo proposto. Para isto, foi utilizado o codigo implementado (mais detalhes sobre a fase de validação serão apresentados no começo do próximo capítulo) e consideramos 3 cenários distintos: cada um com uma região de damping distinta. A seguir, nas tabelas resultantes de diversas simulações numéricas, apresesentamos o maior autovalor de todas as matrizes P geradas ao longo de cada simulação. Além disto, utilizando a norma  $L^{\infty}(0,\pi,L^2(\Omega))$ , apresentamos também o erro cometido (neste caso, em particular, definimos uma solução exata para o problema não homogêneo a ser estudado, a saber:  $\omega_e(\bar{x},t) = \cos(t)\sin(x)\sin(y)$ , e assim, é possível compará-la com a solução numérica. Ver Seção 6.1).

Iremos, então, lidar com o problema:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + \Delta^2 \omega(t) + \chi_{\mathcal{O}} \dot{\omega}(t) = f(\bar{x}, t) &, \quad \bar{x} \in \Omega, \quad t \ge 0, \\ \\ \omega(t, \bar{x}) = \Delta \omega(t, \bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \partial \Omega, \quad t \ge 0, \\ \\ \omega(\bar{x}, 0) = \omega_0(\bar{x}) = \sin x \sin y, \quad \dot{\omega}(\bar{x}, 0) = \omega_1(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in \Omega, \end{cases}$$

Tomaremos  $0 \le t \le \pi$  e os três cenários analizados serão apresentados a seguir.

1) Na Tabela 5.1 encontram-se os resultados das simulações realizadas, considerando a região de amortecimento:  $\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ .

Tabela 5.1: Estudo dos Autovalores de $P$ :	Caso em que $\mathcal{O} =$	$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ ×	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$
---	-----------------------------	--	--

$r = \frac{\Delta t}{h}$	$\Delta t$	h	$E_{L^{\infty}(0,\pi,L^{2}(\Omega))}$	Maior Autovalor de $P$
1	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0507363	1.1033288
1	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0197866	1.0723735
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0434040	1.0701445
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0168814	1.0418304
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{8} = 0.3926991$	0.0923022	1.0681942
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0415735	1.0416683
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{128} = 0.0245437$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0161562	1.0226734

Ainda considerando a mesma região  $\mathcal{O}$ , nas simulações apresentadas na Tabela 5.2,  $h=\frac{\pi}{32}$  foi fixado e diminuindo o  $\Delta t$ , analisaremos o módulo do maior autovalor de P em cada situação, bem como o erro cometido ao obter a solução numérica.

Note que a partir de certo ponto, reduzir o incremento do tempo não altera de forma significativa o erro cometido nas aproximações. Além disto, pode-se observar que quanto menor o  $\Delta t$ , mais próximo de 1 está o módulo do maior autovalor da matriz P.

Considerando os dados desta tabela, na Figura 5.7, pode-se notar a relação entre  $\Delta t$  e  $\frac{\rho(P)-1}{\Delta t}=C$ . Deste gráfico, é possível verificar que quanto menor o incremento no tempo, C tende a 1.

1.0015264

$\Delta t$	h	$T_{max}$	$E_{L^{\infty}(0,\pi,L^2(\Omega))}$	$\mid$ Max Autovalor de $P\mid$
$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\pi$	0.0197866	1.0723735
$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\pi$	0.0168814	1.0418304
$\frac{\pi}{128} = 0.0245437$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\pi$	0.0161562	1.0226734
$\frac{\pi}{256} = 0.0122718$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\pi$	0.0159749	1.0117967
$\frac{\pi}{512} = 0.0061359$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\pi$	0.0159296	1.0060162
$\frac{\pi}{1024} = 0.0030680$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\pi$	0.0159183	1.0030379

 $\pi$ 

0.0159154

 $\frac{\pi}{32} = 0.0981748$ 

= 0.0015340

Tabela 5.2: Estudo dos Autovalores de P: h fixo,  $\Delta t$  variando e  $\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ .

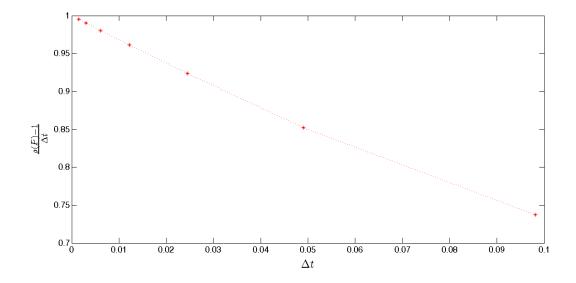


Figura 5.7: Estudo dos Autovalores: Dados da Tabela 5.2

- 2) Na Tabela 5.3, considerou-se o caso sem região  $\mathcal{O}$ , ou seja, o amortecimento nãa atua sobre a placa.
- 3) Neste caso, os resultados podem ser vistos na Tabela 5.4 e tomou-se a região de amortecimento como sendo  $\mathcal{O}=[h,\pi-h]\times[h,\pi-h].$

Tabela 5.3: Estudo dos Autovalores de P: Caso em que não há região de amortecimento

$r = \frac{\Delta t}{h}$	$\Delta t$	h	$E_{L^{\infty}\left(0,\pi,L^{2}(\Omega)\right)}$	Maior Autovalor de $P$
1	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0682658	1.1033446
1	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0261142	1.072374
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0579281	1.071933
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0221821	1.0422531
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{8} = 0.3926991$	0.1212314	1.0704225
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0553440	1.0421486
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{128} = 0.0245437$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0212004	1.0227835

Tabela 5.4: Estudo dos Autovalores de P: Caso em que  $\mathcal{O} = [h, \pi - h] \times [h, \pi - h]$ 

$r = \frac{\Delta t}{h}$	$\Delta t$	h	$E_{L^{\infty}\left(0,\pi,L^{2}(\Omega)\right)}$	Maior Autovalor de $P$
1	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0364258	1.1033056
1	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0135740	1.0723718
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0320323	1.0678134
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0118575	1.0411486
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	$\frac{\pi}{8} = 0.3226991$	0.0762781	1.0662901
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0309343	1.0410438
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{128} = 0.0245437$	$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0114287	1.0224959

Segundo [20], uma condição suficiente para estabilidade é

$$||P|| \le 1 + C\Delta t,\tag{5.21}$$

onde  $\Delta t$  é o incremento no tempo e C é uma constante independente de  $\Delta t$  e h. Mas sobre o raio espectral de P,  $\rho(P)$ , é sabido que:

$$\rho(P) = \max_{1 \le i \le 2m^2} |\mu_i| \le ||P||. \tag{5.22}$$

De 
$$(5.21)$$
 e  $(5.22)$ :

$$\rho(P) \le 1 + C\Delta t.$$

Note que nas Tabelas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, esta condição é satisfeita. Portanto, os resultados numéricos sugerem que, considerando este problema com as dadas condições iniciais, o esquema proposto é estável.

**Observação:** Foram realizados outros testes, com r = 2, r = 4 e r = 8, por exemplo. Nestes casos, o erro cometido também era pequeno, entretanto os maiores autovalores em cada situação eram valores entre 1 e 1.55.

## 5.6 Convergência

Agora, o objetivo é concluir que o esquema de diferenças finitas proposto é convergente. Para isto, utilizaremos o Teorema de Equivalência de Lax, o qual enuncia que:

Dado um PVI bem posto, um esquema de diferenças finitas consistente com a EDP associada é convergente se, e somente se, é estável.

Nas seções 5.4 e 5.5, verificamos a consistência e a estabilidade, respectivamente. Falta-nos verificar que o problema em questão é bem posto.

Dizemos que um problema é bem posto (no sentido de Hadamard) se ele possui uma única solução e esta solução depende continuamente dos dados iniciais do problema. Mas a existência e a unicidade de solução do problema em questão são garantidas pelo Teorema 2 e simulações numéricas mostram que a dependência contínua dos dados iniciais, e consequentemente, que o problema é bem posto.

Por exemplo, visando entender o efeito que alterações nos dados iniciais causam na solução do problema, consideraremos as condições abaixo:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + \Delta^2 \omega(t) + \chi_{\mathcal{O}} \dot{\omega}(t) = 0 &, \quad \bar{x} \in \Omega, \quad t \ge 0, \\ \\ \omega(t) = \Delta \omega(t) = 0, \quad \bar{x} \in \partial \Omega, \quad t \ge 0, \\ \\ \omega(\bar{x}, 0) = \omega_0(\bar{x}) = \sin x \sin y, \quad \dot{\omega}(\bar{x}, 0) = \omega_1(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in \Omega, \end{cases}$$

Considerando  $\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ ,  $T_{\text{max}} = \pi$ ,  $h = \frac{\pi}{32}$  e  $\Delta t = \frac{h}{2}$ , nas tabelas a seguir, mostramos os dados iniciais do problema com as perturbações  $u_{\epsilon}$  e analisamos como isto afetou a solução aproximada. Tais pertuburbações utilizadas são da forma:

$$u_{\epsilon}(\bar{x}) = \epsilon(\bar{x} - \pi)\bar{x}.$$

• Variando a posição inicial do problema:

Tabela 5.5: Variação da Posição Inicial  $u_0(\bar{x})$ 

$\omega_0^*(\bar{x}) = \omega_0(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	$\ \omega_h - \omega_h^*\ _{L^{\infty}(0,T,L^2(\Omega))}$
$\omega_0^*(\bar{x}) = \omega_0(\bar{x}) + 0.001(\bar{x} - \pi)\bar{x}$	0.0325557
$\omega_0^*(\bar{x}) = \omega_0(\bar{x}) + 0.0001(\bar{x} - \pi)\bar{x}$	0.0032556
$\omega_0^*(\bar{x}) = \omega_0(\bar{x}) + 0.00001(\bar{x} - \pi)\bar{x}$	0.0003256

- Nesta nova situação, o objetivo é variar a velocidade inicial do problema. Os resultados podem ser vistos na Tabela 5.6.
- Para esta simulação, considerou-se a variação da posição inicial e também da velocidade inicial do problema. Os resultados podem ser vistos na Tabela 5.7.

Tabela 5.6: Variação da Velocidade Inicial  $u_1(\bar{x})$ 

$\omega_1^*(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	$\ \omega_h - \omega_h^*\ _{L^{\infty}(0,T,L^2(\Omega))}$
$\omega_1^*(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + 0.001(\bar{x} - \pi)\bar{x}$	0.0144639
$\omega_1^*(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + 0.0001(\bar{x} - \pi)\bar{x}$	0.0014464
$\omega_1^*(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + 0.00001(\bar{x} - \pi)\bar{x}$	0.0001446

Tabela 5.7: Variando Tanto a Posição Inicial Quanto a Velocidade Inicial do Problema

$\epsilon$	$\omega_0^*(\bar{x}) = \omega_0(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	$\omega_1^*(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	$\ \omega_h - \omega_h^*\ _{L^{\infty}(0,T,L^2(\Omega))}$
$\epsilon = 0.001$	$\omega_0^*(\bar{x}) = \omega_0(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	$\omega_1^*(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	0.0362354
$\epsilon = 0.0001$	$\omega_0^*(\bar{x}) = \omega_0(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	$\omega_1^*(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	0.0036235
$\epsilon = 0.00001$	$\omega_0^*(\bar{x}) = \omega_0(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	$\omega_1^*(\bar{x}) = \omega_1(\bar{x}) + u_{\epsilon}(\bar{x})$	0.0003624

Note que pequenas variações nos dados iniciais acarretaram numa pequena variação da solução calculada, ou seja, a solução depende continuamente dos dados iniciais do problema.

Portanto, pelas conclusões tiradas das seções 5.4 e 5.5 e pelo fato descrito acima, segue do Teorema de Lax, a desejada convergência para este problema com as condições iniciais dadas.

## 5.7 Estudo Numérico da Energia

Nesta seção, nosso interesse é estudar numericamente a energia associada ao problema principal (4.1). Sabemos que a energia relacionada a tal sistema é dada por (4.2) e ao sistema semi-discreto no tempo t, por (5.3). Desta última, é verdade

que:

$$E_h(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|\dot{\omega}_h(t)\|^2 + \|A_{0h}^{1/2}\omega_h(t)\|^2 \right\}.$$

De (5.3), sabe-se que:

$$E_h(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|\dot{\omega}_h(t)\|^2 + \|A_{0h}^{1/2}\omega_h(t)\|^2 \right\}.$$

Por simplicidade, o método utilizado para resolver numericamente esta integral é a Regra dos Trapézios Repetida.

Lembrando que:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{x_{0}}^{x_{m+1}} f(x)dx = \frac{h}{2} \left[ f(x_{0}) + 2\sum_{i=1}^{m} f(x_{i}) + f(x_{m+1}) \right] - \frac{mh^{3}}{12} f''(\xi),$$

onde  $\xi \in (a,b) = (x_0, x_{m+1})$ , e  $h = x_i + 1 - x_i$ , i = 0, ..., m. Entretanto não podemos calcular  $f''(\xi)$ , dado que não conhecemos precisamente quem é este ponto. Podemos, porém, obter um limitante superior para o erro, que é dado por:

$$|E_{TR}| \le \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Para mais detalhes sobre esta regra, consultar [19].

Considere o tempo discreto  $t_n = n\Delta t, n = 0, ..., N$ , em (5.3) e lembre que  $\omega_h$  é o vetor cujas componentes são  $\omega_{j,k}$ , com  $1 \leq j,k \leq m$ , e cuja numeração já foi mencionada anteriormente.

Como  $\Omega$  é o domínio do problema e é sabido da Seção 4.1 e da Figura 4.1 que  $\Omega$  corresponde a um quadrado, as normas acima envolvem integrais duplas. Assim, calculando-as pela Regra dos Trapézios Repetida, para n fixo, temos:

$$\Rightarrow E_h(t_n) = \frac{h^2}{8} \left\{ \left[ |\dot{\omega}_h(x_{1,1}, t_n)|^2 + 2 \sum_{k=2}^{m-1} |\dot{\omega}_h(x_{1,k}, t_n)|^2 + |\dot{\omega}_h(x_{1,m}, t_n)|^2 \right] + \right.$$

$$2\sum_{i=2}^{m-1} \left( |\dot{\omega}_{h}(x_{i,1},t_{n})|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |\dot{\omega}_{h}(x_{i,k},t_{n})|^{2} + |\dot{\omega}_{h}(x_{i,m},t_{n})|^{2} \right) + \left[ |\dot{\omega}_{h}(x_{m,1},t_{n})|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |\dot{\omega}_{h}(x_{m,k},t_{n})|^{2} + |\dot{\omega}_{h}(x_{m,m},t_{n})|^{2} \right] + \left[ |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{1,1}^{n}|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{1,k}^{n}|^{2} + |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{1,m}^{n}|^{2} \right] + 2\sum_{i=2}^{m-1} \left( |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{i,1}^{n}|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{i,k}^{n}|^{2} + |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{i,m}^{n}|^{2} \right) + \left[ |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{m,1}^{n}|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{m,k}^{n}|^{2} + |(A_{0h}^{1/2}\omega_{h})_{m,m}^{n}|^{2} \right] \right\}.$$

Entretanto, conhecemos uma aproximação para a primeira derivada no tempo, como foi visto em (5.4), daí, definindo:

$$\dot{\omega}_h(x_{j,k}, t_n) \approx \delta \omega_h^n(x_{j,k}) = \frac{\omega_h(x_{j,k}, t_{n+1}) - \omega_h(x_{j,k}, t_{n-1})}{2\Delta t}, \quad 1 \le j, k \le m , \quad (5.23)$$

então:

$$\Rightarrow E_{h}(t_{n}) = \frac{h^{2}}{8} \left\{ |\delta\omega_{h}^{n}(x_{1,1})|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |\delta\omega_{h}^{n}(x_{1,k})|^{2} + |\delta\omega_{h}^{n}(x_{1,m})|^{2} \right.$$

$$+2\sum_{i=2}^{m-1} \left( |\delta\omega_{h}^{n}(x_{i,1})|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |\delta\omega_{h}^{n}(x_{i,k})|^{2} + |\delta\omega_{h}^{n}(x_{i,m})|^{2} \right)$$

$$+|\delta\omega_{h}^{n}(x_{m,1})|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |\delta\omega_{h}^{n}(x_{m,k})|^{2} + |\delta\omega_{h}^{n}(x_{m,m})|^{2}$$

$$+ \left[ |\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{1,1}^{n}|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{1,k}^{n}|^{2} + |\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{1,m}^{n}|^{2} \right]$$

$$+2\sum_{i=2}^{m-1} \left( |\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{i,1}^{n}|^{2} + 2\sum_{k=2}^{m-1} |\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{i,k}^{n}|^{2} + |\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{i,m}^{n}|^{2} \right)$$

$$+\left[\left|\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{m,1}^{n}\right|^{2}+2\sum_{k=2}^{m-1}\left|\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{m,k}^{n}\right|^{2}+\left|\left(A_{0h}^{1/2}\omega_{h}\right)_{m,m}^{n}\right|^{2}\right]\right\}.$$
 (5.24)

Como a solução aproximada é conhecida em todos os pontos discretos do domínio, pela equação (5.24), sabemos calcular  $E_h(0), E_h(t_1), \ldots, E_h(t_N)$ . Entretanto, dado que  $\omega_h(x_{j,k}, t_{-1})$  não é conhecido, para o cálculo de  $E_h(t_0)$  foi utilizada a seguinte aproximação de primeira ordem:

$$\dot{\omega}_h(x_{j,k}, t_1) \approx \frac{\omega_h(x_{j,k}, t_1) - \omega_h(x_{j,k}, t_0)}{\Delta t}.$$

Estas contas serão implementadas e no próximo capítulo, alguns gráficos de energia serão exibidos.

# 6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

"O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário."

Albert Einstein

Este Capítulo é destinado aos resultados das simulações numéricas realizadas utilizando o algoritmo proposto no Capítulo anterior. A seção 6.1 trata do processo de validação do mesmo. Nesta fase foram realizados experimentos considerando diferentes regiões  $\mathcal{O}$  e os resultados podem ser vistos nas subseções 6.1.1 e 6.1.2. Em seguida, em 6.1.3, apresenta-se uma breve conclusão desta etapa e em 6.1.4, a ordem de convergência foi o foco do estudo. Na seção 6.2, volta-se ao problema original e novas simulações são realizadas. Neste ponto, verifica-se o decaimento de energia, já previsto na literatura, para diferentes áreas de damping e outras questões são levantadas.

## 6.1 Validação

Após implementar o algoritmo mencionado no Capítulo anterior, o próximo passo é a validação. Para isto, partiremos de uma função  $\omega_e(x,t)$  escolhida como solução do problema e trocaremos o lado direito da equação (4.1), que é 0, por uma função  $f = f(\bar{x}, t)$ . Tomamos a seguinte função como solução exata do problema:

$$\omega_e(\bar{x}, t) = \cos(t)\sin(x)\sin(y),\tag{6.1}$$

considerando  $\bar{x} = (x, y)$ , ou seja, as coordenadas x e y usuais.

Note que:

$$\omega_e(\bar{x}, 0) = \sin(x)\sin(y) = \omega_0(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \Omega. \tag{6.2}$$

Também:

$$\dot{\omega}_e(\bar{x}, t) = -\sin(x)\sin(y)\sin(t).$$

$$\dot{\omega}_e(\bar{x}, 0) = 0 = \omega_1(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \Omega.$$
(6.3)

Além disto, para todo  $x \in \partial \Omega$ , é verdade que:

$$\omega_e(\bar{x}, t) = 0. \tag{6.4}$$

E:

$$\omega_{e_{xx}}(\bar{x},t) = -\sin(x)\sin(y)\cos(t) = -\omega_{e}(\bar{x},t) = \omega_{e_{yy}}(\bar{x},t).$$

$$\Rightarrow \Delta\omega_{e}(\bar{x},t) = \omega_{e_{xx}}(\bar{x},t) + \omega_{e_{yy}}(\bar{x},t) = -2\omega_{e}(\bar{x},t).$$

$$\Delta\omega_{e}(\bar{x},t) = 0, \quad \forall \bar{x} \in \partial\Omega.$$
(6.5)

Portanto, de (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), conclui-se que as condições iniciais estão definidas e as de contorno, satisfeitas. Assim, (6.1) é a solução exata do seguinte problema:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + \Delta^2 \omega(t) + \chi_{\mathcal{O}} \dot{\omega}(t) = f(\bar{x}, t) &, \quad \bar{x} \in \Omega, \quad t \ge 0, \\ \omega(\bar{x}, t) = \Delta \omega(\bar{x}, t) = 0, \quad \bar{x} \in \partial \Omega, \quad t \ge 0, \\ \omega(\bar{x}, 0) = \omega_0(\bar{x}) = \sin x \sin y, \quad \dot{\omega}(\bar{x}, 0) = \omega_1(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in \Omega, \end{cases}$$
(6.6)

em que  $f = f(\bar{x}, t)$  é obtida, utilizando o mesmo raciocínio apresentado em (5.5), ou seja,

$$f(t_n) = \frac{1}{4}f^{n+1} + \frac{1}{2}f^n + \frac{1}{4}f^{n-1}.$$

Além disto,  $f_i^n$ ,  $i=1,\ldots,m^2$ , é obtida para cada nó da malha, cuja solução é desconhecida, substituindo (6.1) na equação (4.1), adicionando o termo de viscosidade numérica e levando em conta se o nó em questão está no interior do retângulo  $\mathcal{O}$  ou não.

O problema (6.6) acima foi resolvido numericamente. Neste caso, a solução exata é conhecida, pois partimos dela para construir o problema. Desta forma, é possível comparar as soluções analítica e numérica. Para tais comparações, foi utilizada a seguinte norma:

$$||E||_{L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega))} = \max_{t_{n} \in [0,T]} \left\{ \frac{h}{2} \left( |E_{1}^{n}|^{2} + 2 \sum_{i=2}^{m^{2}-1} |E_{i}^{n}|^{2} + |E_{m^{2}}^{n}|^{2} \right) \right\}^{1/2},$$

sendo h o espaçamento da malha definido no Capítulo 5, e  $E_i^n = E(x_i, t_n)$  a diferença entre a solução exata e a numérica obtida, com n = 1, ..., N, ou seja,

$$E_i^n = E(x_i, t_n) = \omega_e(x_i, t_n) - \omega(x_i, t_n), \qquad 1 \le i \le m^2.$$

Observação: Ao inicializar o algoritmo, fazendo n=0, temos :

$$f(t_0) = \frac{1}{4}f^1 + \frac{1}{2}f^0 + \frac{1}{4}f^{-1}.$$

Para o cálculo do último termo, fizemos  $f_i^{-1} = f(x_i, -\Delta t)$ .

A seguir apresentaremos as análises de algumas simulações feitas. Primeiramente, fixamos a região  $\mathcal{O}$  e na subseção seguinte, este local onde o damping está agindo foi mudado de posição e tamanho.

# **6.1.1** Simulações com $\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$

Lembrando que estamos trabalhando com uma placa quadrada, cujos lados medem  $\pi$ , o cenário desta primeira simulação pode ser visto na Figura 6.1, com o



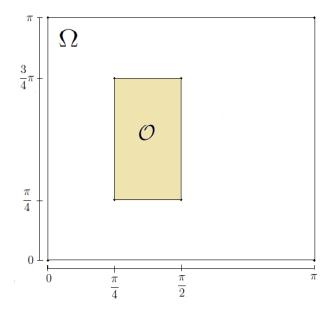


Figura 6.1: Domínio do Problema e Região  $\mathcal{O}$ 

Os resultados de algumas simulações realizadas podem ser vistos nas Tabelas 6.1 e 6.2 a seguir, considerando T=1 e:

$$\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right] \approx [0.7853982, 1.5707963] \times [0.7853982, 2.3561945].$$

Observe que h foi tomado como sendo:

$$h_i = \frac{\pi}{2^{i+2}}, \ i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Das Tabelas 6.1 e 6.2, concluimos que, fixado  $\Delta t$ , quanto mais refinada a malha espacial, menor o erro cometido.

Para ilustrar, considerando a simulação da penúltima linha da Tabela 6.2, a Figura 6.2 apresenta a comparação ao longo do tempo entre a solução exata e

Tabela 6.1: Validação: Tabela de Erros com  $\Delta t = 0.1$ 

i	$h_i$	$\Delta t$	$  E  _{L^{\infty}(0,1;L^{2}(\Omega))}$
0	0.7853982	0.1	0.0775903
1	0.3926991	0.1	0.0563078
2	0.1963495	0.1	0.0256471
3	0.0981748	0.1	0.0115063
4	0.0490874	0.1	0.0068410

Tabela 6.2: Validação: Tabela de Erros com  $\Delta t = 0.01$ 

i	$h_i$	$\Delta t$	$  E  _{L^{\infty}(0,1;L^2(\Omega))}$
0	0.7853982	0.01	0.0758241
1	0.3926991	0.01	0.0550678
2	0.1963495	0.01	0.0239501
3	0.0981748	0.01	0.0090214
4	0.0490874	0.01	0.0032785

a aproximada do ponto  $x_{347} = \left(\frac{3}{16}\pi, \frac{3}{8}\pi\right)$ , que pertence ao interior do retângulo  $\mathcal{O}$ . Já na Figura 6.3 pode ser vista a mesma comparação, porém para o ponto  $x_{351} = \left(\frac{5}{31}\pi, \frac{3}{8}\pi\right)$ , que não pertence a região de damping. Em ambos os casos, verifica-se que a solução aproximada está bem próxima da exata, ou seja, a solução numérica está sendo obtida corretamente.

Analogamente, na Figura 6.4, considerando  $h = \frac{\pi}{64}$ , tomou-se o mesmo ponto dentro da região  $\mathcal{O}$  e outro fora dela e verificou-se que em ambos os casos, a solução exata e a aproximada estão bem próximas, o que era esperado dada a última linha da Tabela 6.2.

Ainda analisando as simulações das últimas duas linhas da Tabela 6.2, a Figura 6.5 mostra a propagação do erro ao longo do tempo. Note que no gráfico da direita, o que possui a malha espacial mais refinada, o erro é menor.

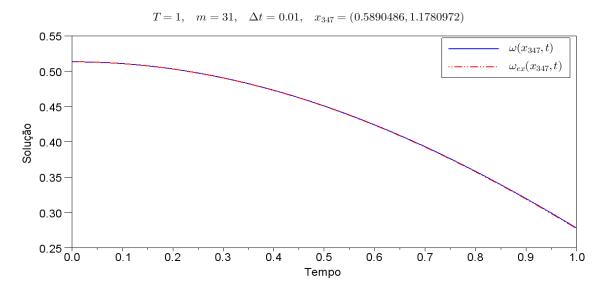


Figura 6.2: Soluções: Exata × Numérica no ponto  $x_{347}=\left(\frac{3}{16}\pi,\frac{3}{8}\pi\right)$ , considerando  $h=\frac{\pi}{32}$ 

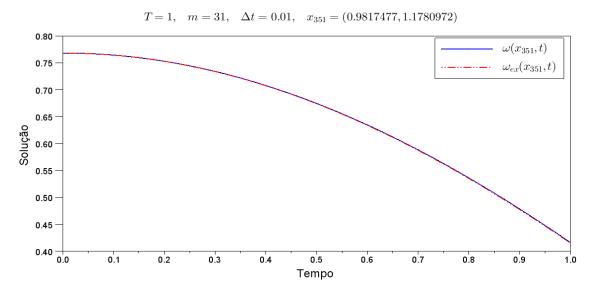


Figura 6.3: Soluções: Exata × Numérica no ponto  $x_{351}=\left(\frac{5}{31}\pi,\frac{3}{8}\pi\right)$ , considerando  $h=\frac{\pi}{32}$ 

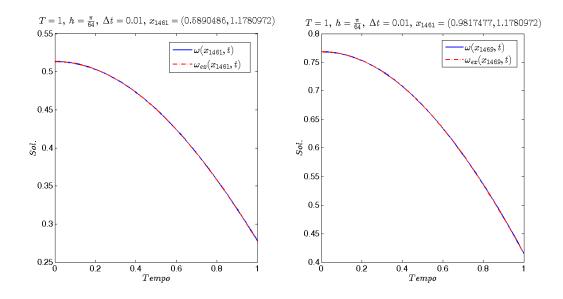


Figura 6.4: Validação : Solução Exata × Solução Numérica considerando  $h=\frac{\pi}{64}$ 

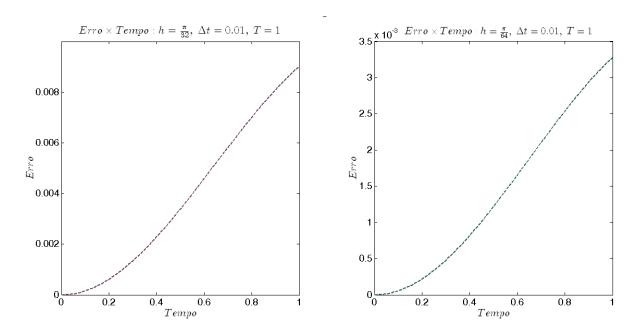


Figura 6.5: Propagação do Erro ao Longo do Tempo

Como curiosidade, para realizar a simulação da penúltima linha da Tabela 6.2, com  $h = \frac{\pi}{32}$  e  $\Delta t = 0.01$  e esta região  $\mathcal{O}$ , foram resolvidos 100 sistemas lineares de ordem  $31^2$  e gastou-se cerca de 13 segundos. Por outro lado, para  $h = \frac{\pi}{64}$  e  $\Delta t = 0.01$ , demorou aproximadamente 300 segundos. Para malhas mais refinadas, o tempo gasto é maior, o que é esperado, pois neste caso teremos matrizes com maior quantidade de linhas e colunas (refinando a malha espacial) e/ou mais sistemas lineares serão resolvidos (no caso do refinamento da malha temporal).

As simulações mencionadas acima foram realizadas utilizando o  $MatLab^{\circledR}$  R2013a em um computador com 4 Gb de memória instalada (RAM), processador Intel Core i3-2310M CPU 2.10 GHz. Além disto, o sistema operacional utilizado foi o Windows 7 (64 bits).

O erro depende de h e  $\Delta t$ . Então, da Tabela 6.3, percebe-se que neste caso a predominância é em relação a h. Assim não adianta diminuir mais o  $\Delta t$ , esperando reduzir significativamente o erro cometido.

Tabela 6.3: Validação: Tabela de Erros com  $h = \frac{\pi}{32}$  e  $\Delta t$  variando

7	Α.	11.7711
h	$\Delta t$	$  \  E \ _{L^{\infty}(0,1;L^{2}(\Omega))}$
0.0981748	0.1	0.0115063
0.0981748	0.05	0.0096250
0.0981748	0.04	0.0093987
0.0981748	0.02	0.0090969
0.0981748	0.01	0.0090214
0.0981748	0.008	0.0090123
0.0981748	0.005	0.0090025

## 6.1.2 Outras regiões $\mathcal{O}$

O objetivo nesta subseção é, ainda nesta fase de validação, mover o subdominio  $\mathcal{O}$  dentro dominio para verificar se há influência da posição da região na solução.

Para efeitos de comparação, fixou-se  $h = \frac{\pi}{32}$  e  $\Delta t = 0.01$  e em cada simulação,  $\mathcal{O}$  tinha largura  $\frac{\pi}{4}$  e altura  $\frac{\pi}{2}$ . Os resultados podem ser vistos na Tabela 6.4. Analisando esta tabela, percebe-se que ao variar a posição da região  $\mathcal{O}$  de tamanho fixo, o erro permaneceu praticamente constante. Além disto, variando a posição de região  $\mathcal{O}$ , a solução numérica ainda é obtida corretamente.

Tabela 6.4: Validação: Tabela de Erros com  $h=\frac{\pi}{32}$  e  $\Delta t=0.01$  e regiões  $\mathcal O$  de mesmo tamanho e posições diferentes

h	$\Delta t$	O	$  E  _{L^{\infty}(0,1;L^{2}(\Omega))}$
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$	0.0090214
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{\pi}{32}, \frac{9}{32}\pi\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$	0.0097619
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{\pi}{32}, \frac{9}{32}\pi\right] \times \left[\frac{15}{32}\pi, \frac{31}{32}\pi\right]$	0.0098695
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{\pi}{32}, \frac{9}{32}\pi\right] \times \left[\frac{\pi}{32}, \frac{17}{32}\pi\right]$	0.0098695
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{23}{32}\pi, \frac{31}{32}\pi\right] \times \left[\frac{15}{32}\pi, \frac{31}{32}\pi\right]$	0.0098695
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{\pi}{32}, \frac{9}{32}\pi\right] \times \left[\frac{15}{32}\pi, \frac{31}{32}\pi\right]$	0.0098695
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{5}{32}\pi, \frac{13}{32}\pi\right] \times \left[\frac{11}{32}\pi, \frac{27}{32}\pi\right]$	0.0093700
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{15}{32}\pi, \frac{23}{32}\pi\right] \times \left[\frac{4}{32}\pi, \frac{20}{32}\pi\right]$	0.0090706

A ideia das próximas simulações foi partir de  $\mathcal{O}_1$  localizada no centro da placa e com comprimento e altura valendo  $\frac{3\pi}{32}$ . As demais regiões  $\mathcal{O}_i$  foram obtidas seguindo o raciocínio:

$$\mathcal{O}_i = \left[\frac{\pi}{2} - 3hi, \frac{\pi}{2} + 3hi\right] \times \left[\frac{\pi}{2} - 3hi, \frac{\pi}{2} + 3hi\right] \times, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Novamente considerou-se  $h = \frac{\pi}{32}$ , T = 1 e  $\Delta t = 0.01$  e os resultados podem ser vistos na Tabela 6.5. Observe que ao aumentar a região onde o damping está agindo, a solução numérica ainda está sendo obtida corretamente e o erro, embora muito pouco, diminui.

Tabela 6.5: Validação: Tabela de Erros com  $h=\frac{\pi}{32}$  e  $\Delta t=0.01$  e regiões  $\mathcal O$  de diferentes tamanhos e posições

h	$\Delta t$	O	$  E  _{L^{\infty}(0,1;L^{2}(\Omega))}$
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{13}{32}\pi, \frac{19}{32}\pi\right] \times \left[\frac{13}{32}\pi, \frac{19}{32}\pi\right]$	0.0095871
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{10}{32}\pi, \frac{22}{32}\pi\right] \times \left[\frac{10}{32}\pi, \frac{22}{32}\pi\right]$	0.0086978
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{7}{32}\pi, \frac{25}{32}\pi\right] \times \left[\frac{7}{32}\pi, \frac{25}{32}\pi\right]$	0.0079885
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{4}{32}\pi, \frac{28}{32}\pi\right] \times \left[\frac{4}{32}\pi, \frac{28}{32}\pi\right]$	0.0076518
$\frac{\pi}{32}$	0.01	$\left[\frac{\pi}{32}, \frac{31}{32}\pi\right] \times \left[\frac{\pi}{32}, \frac{31}{32}\pi\right]$	0.0075861

Nos gráficos a seguir, visando entender a influência do incremento no tempo  $\Delta t \text{ no erro cometido ao resolver numericamente o problema da dissertação, fixamos } T=1.4 \text{ e } h=\frac{\pi}{64}.$ 

Na Figura 6.6, consideramos o caso em que não há damping agindo sobre a placa. Na Figura 6.7, a região na qual a força de amortecimento age é dada por:  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ . Já na Figura 6.8, a região de damping é  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ .

Note que em todas as três situações analisadas, ao utilizarmos  $\Delta t = \frac{1}{10} = 0.1$ , o erro cometido é superior aos demais casos, com a malha temporal mais refinada. Entretanto, não há diferenças significativas ao considerar  $\Delta t = 0.01$  ou  $\Delta t = 0.001$ , pois neste caso o erro é dominado pelo tamanho de h. Repare que ao fazer  $\Delta t$  grande, por exemplo,  $\frac{1}{10}$ , o erro depende não só de h, mas também de  $\Delta t$ .

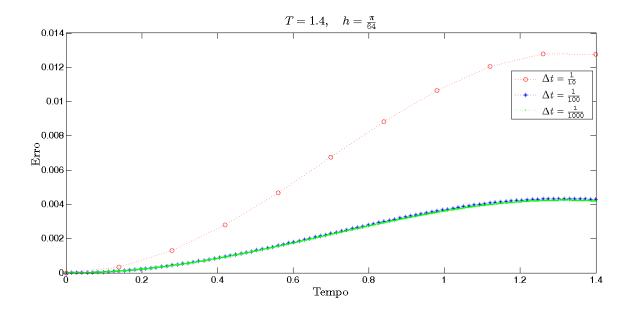


Figura 6.6: Caso sem Damping e com  $h=\frac{\pi}{64}$  fixo

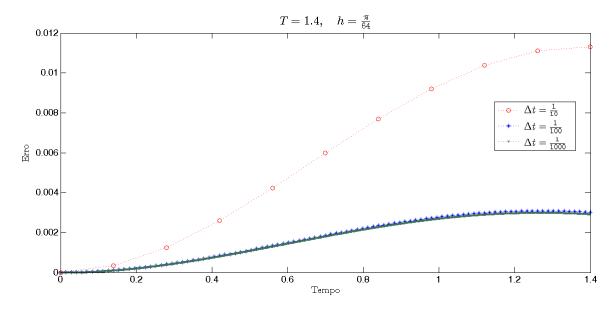


Figura 6.7: Caso com  $h=\frac{\pi}{64}$  fixo e Damping agindo em  $[0,\pi]\times[0,\pi]$ 

Já o gráfico na Figura 6.9, considerando  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$  e fixado um  $\Delta t$  pequeno,  $\Delta t = 0.001$ , o objetivo era estudar o efeito do refinamento da malha espacial no erro cometido na aproximação. Neste caso, ao reduzir o espaçamento h,

o erro também diminui significativamente.

Desta forma nota-se que h sozinho não determina o erro, mas que tanto  $\Delta t$  quanto h contribuem no erro.

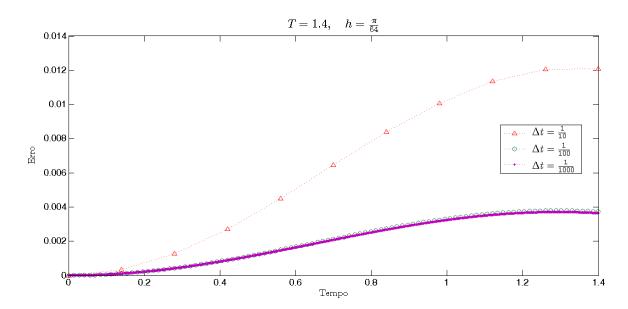


Figura 6.8: Caso com  $h=\frac{\pi}{64}$  fixo e Damping agindo em  $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$ 

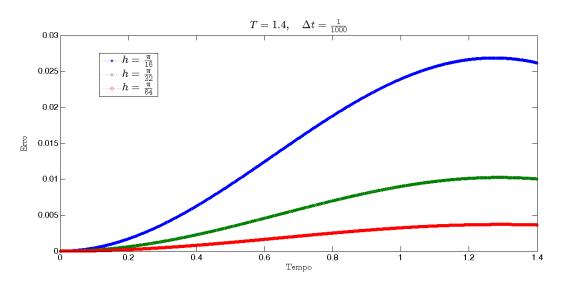


Figura 6.9: Caso com  $\Delta t = \frac{1}{1000}$  fixo e Damping agindo em  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ 

### 6.1.3 Conclusões da Etapa de Validação

Note que analisando as simulações realizadas, conclui-se que a solução numérica obtida está próxima da exata. Em outras palavras, a solução numérica está sendo calculada corretamente. Então, tomando  $f(\bar{x},t)=0$ , no lado direito de (6.6), voltamos ao problema original. Porém antes será feito um breve estudo sobre a ordem de convergência deste esquema proposto.

#### 6.1.4 Ordem de Convergência Numérica

Agora, iremos analisar numericamente a ordem de convergência do problema (6.6), onde a solução exata é conhecida e dada por (6.1).

Considere novamente

$$E_i = \max_{t \in [0,T]} ||E_i(t)||_{L^2(\Omega)},$$

como sendo o erro associado a malha:

$$h_i = \frac{\pi}{2^{i+2}}, i = 0, 1, \dots, N.$$

Note que  $h_i = 2h_{i+1}, i = 0, ..., N-1$ . Tomemos, em particular,  $\Delta t = h$ .

Dizemos que a taxa de convergência numérica p é dada por:

$$p = \frac{ln\left(\frac{E_i}{E_{i+1}}\right)}{ln\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)} = \frac{ln\left(\frac{E_i}{E_{i+1}}\right)}{ln(2)},$$

e para mais detalhes, ver [18].

Vamos agora calcular a ordem de convergência p do algoritmo proposto anteriormente. Para isto, considere os três casos a seguir:

• Caso 1) Na Tabela 6.6, considera-se a região de damping  $\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ .

Tabela 6.6: Caso Em Que  $\mathcal{O} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ : Ordem de Convergência

$\Delta t = h$	$E_{L^{\infty}\left(0,\pi,L^{2}(\Omega)\right)}$	p
$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0507363	-
$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0197866	1.3584946
$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	0.0072406	1.4503426

• Caso 2) Na Tabela 6.7, considera-se a situação sem damping agindo sobre a placa.

Tabela 6.7: Caso Sem Região de Damping: Ordem de Convergência

$\Delta t = h$	$E_{L^{\infty}\left(0,\pi,L^{2}(\Omega)\right)}$	p
$\frac{\pi}{8} = 0.3926991$	0.1478295	-
$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0682658	1.1146993
$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0261142	1.3863285
$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	0.0094250	1.47027

- Caso 3) Na Tabela 6.8, a região de damping é dada por  $\mathcal{O} = [h, \pi - h] \times [h, \pi - h]$ .

Das Tabelas 6.6, 6.7 e 6.8, pode-se concluir que  $p \approx 1.5$ , ou seja, independentemente de  $\mathcal{O}$  (região de damping), a ordem de convergência numérica p do esquema proposto é aproximadamente 1.5.

$\Delta t = h$	$E_{L^{\infty}\left(0,\pi,L^{2}(\Omega)\right)}$	p
$\frac{\pi}{8} = 0.3926991$	0.0852443	-
$\frac{\pi}{16} = 0.1963495$	0.0364258	1.2266427
$\frac{\pi}{32} = 0.0981748$	0.0135740	1.4241147
$\frac{\pi}{64} = 0.0490874$	0.0048643	1.4805418

Tabela 6.8: Caso Em Que a Região de Damping é  $\mathcal{O} = [h, \pi - h] \times [h, \pi - h]$ : Ordem de Convergência

## 6.2 Estudo da Energia

Na seção 6.1, o método numérico para obtenção da solução numérica aproximada foi validado, tomando um caso particular onde o problema foi construído com uma função do lado direito da equação, de forma que a solução exata era conhecida. Para o problema original, com f=0, a solução exata não é conhecida. Agora, considerando as mesmas condições iniciais  $\omega_0(\bar{x})$  e  $\omega_1(\bar{x})$  utilizadas anteriormente, o problema a ser estudado é dado por:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + \Delta^2 \omega(t) + \chi_{\mathcal{O}} \dot{\omega}(t) = 0 &, \quad \bar{x} \in \Omega, \quad t \ge 0, \\ \omega(\bar{x}, t) = \Delta \omega(\bar{x}, t) = 0, \quad \bar{x} \in \partial \Omega, \quad t \ge 0, \\ \omega(\bar{x}, 0) = \omega_0(\bar{x}) = \sin x \sin y, \quad \dot{\omega}(\bar{x}, 0) = \omega_1(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in \Omega, \end{cases}$$

$$(6.7)$$

Considerando estas condições dadas acima e, por exemplo, T=9,  $\Delta t=\frac{9}{200}$ ,  $h=\frac{\pi}{32}$  e  $\mathcal{O}=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$ , podemos ver na Figura 6.10 o comportamento da placa nos tempos discretos t=0.00, t=0.36, t=0.90, t=4.50, t=6.30 e t=9.00. Note que em t=8 a placa está praticamente na horizontal, e que ao longo do tempo, houve dissipação de energia.

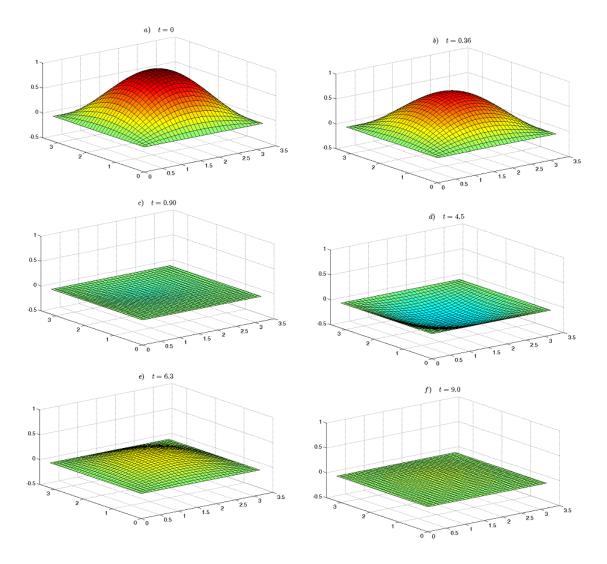


Figura 6.10: Soluções Aproximadas em a)  $t=0.00, \ b$ )  $t=0.36, \ c$ )  $t=0.90, \ d$ )  $t=4.50, \ e$ )  $t=6.30, \ f$ ) t=9.00, considerando  $T=9, \ \Delta t=\frac{9}{200}, \ h=\frac{\pi}{32}, \ \mathcal{O}=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$ 

O objetivo agora é verificar o decaimento de energia previsto na teoria. Para isto, nas subseções a seguir serão apresentados os resultados de alguns testes realizados.

## 6.2.1 Exemplo: Regiões Crescentes

Nesta primeira simulação, foram fixados T=10,  $h=\frac{\pi}{32}$  e  $\Delta t=\frac{10}{100}=0.1$ . Foram realizados testes variando apenas  $\mathcal{O}$  e as diferentes regiões onde o amortecimento age em cada uma das simulações podem ser vistas na Figura 6.11. Os resultados de decaimento de energia para cada uma destas regiões podem ser vistos na Figura 6.12.

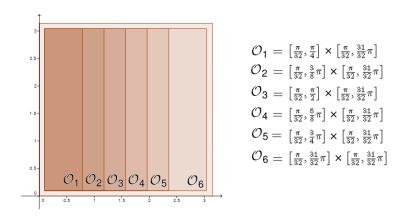


Figura 6.11: Regiões Crescentes: Diferentes regiões  $\mathcal{O}$ 

Note que a energia é, de fato, decrescente em todos os casos. Além disto, à medida em que a região de damping aumenta, a energia descresce mais rapidamente.

## 6.2.2 Exemplo: Regiões Encaixantes

Na próxima simulação foi construída uma sequência crescente de subdominios encaixantes, objetivando visualizar a influência do damping agindo no subdomínio. Como veremos adiante, quanto o maior o intervalo onde age o damping, mais rápido decresce a energia.

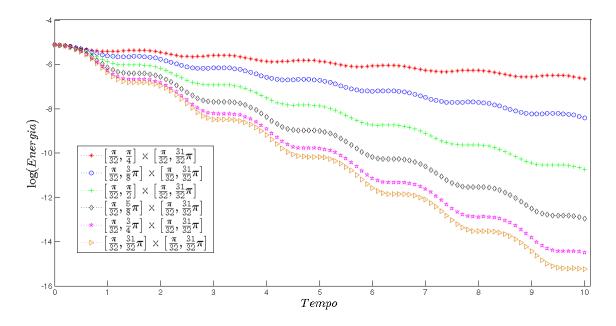


Figura 6.12: Decaimento de Energia para diferentes regiões  $\mathcal{O}$ 

As simulações a seguir consistem em fixados  $T=8, h=\frac{\pi}{32}, \Delta t=\frac{8}{100}=0.08.$ Os testes a seguir foram realizados variando apenas a região  $\mathcal{O}$  onde o damping age.

Inicialmente tomamos  $\mathcal{O}$  como sendo o quadrado  $\left[\frac{13}{32}\pi, \frac{19}{32}\pi\right] \times \left[\frac{13}{32}\pi, \frac{19}{32}\pi\right]$ , localizado no centro da placa. A cada simulação seguinte,  $\mathcal{O}$  aumentava 6h na horizontal e na vertical, até chegar na maior região possível, isto é,  $[h, \pi - h] \times [h, \pi - h]$ . Dito de outra forma, as regiões podem ser vistas na Figura 6.13 e temos:

$$\mathcal{O}_i = \left[ \frac{16}{32} \pi - 3ih, \frac{16}{32} \pi + 3ih \right] \times \left[ \frac{16}{32} \pi - 3ih, \frac{16}{32} \pi + 3ih \right], \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Da Figura 6.14, pode-se concluir que a energia decai em cada uma das simulações realizadas e se aproxima de 0. Além disto, novamente, quanto maior a região  $\mathcal{O}$ , mais rápido decresce a energia.

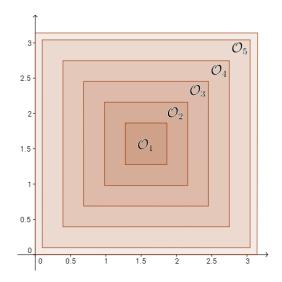


Figura 6.13: Regiões Encaixantes: Diferentes regiões  $\mathcal{O}$ 

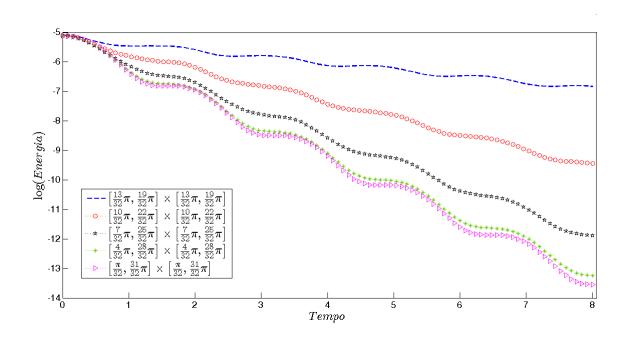


Figura 6.14: Decaimento de Energia para diferentes regiões  $\mathcal O$ 

## 6.2.3 Exemplo: Influência da Viscosidade Numérica

Neste exemplo, vamos investigar a necessidade do acréscimo do termo de viscosidade numérica ao problema. Para isto, foram realizadas algumas simulações

cujos gráficos podem ser vistos nas Figuras 6.15 e 6.16. Note que foram consideradas regiões  $\mathcal{O}$  diferentes e em ambos os casos, independentemente da presença da viscosidade numérica, havia o decaimento de energia. Além disto, no tocante a energia, notou-se pouca diferença ao adicionar este termo.

Como pode ser visto na Figura 6.17, verificou-se também que na ausência da região de damping, considerando o esquema com o termo de viscosidade numérica, a energia decaia lentamente. Entretanto, ao retirarmos tal termo, não havia dissipação de energia. Ou seja, para haver decaimento de energia, no caso sem região de damping, o termo de viscosidade numérica é imprescindível.

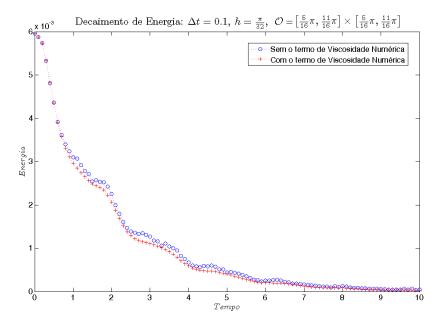


Figura 6.15: Energia: Comparação entre os casos com e sem o termo de viscosidade numérica, considerando  $h = \frac{\pi}{32}$  e  $\mathcal{O} = \left[\frac{5}{16}\pi, \frac{11}{16}\pi\right] \times \left[\frac{5}{16}\pi, \frac{11}{16}\pi\right]$ 

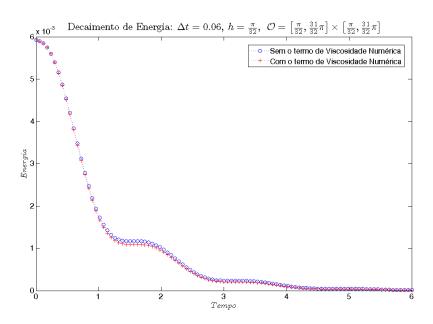


Figura 6.16: Energia: Comparação entre os casos com e sem o termo de viscosidade numérica, considerando  $h=\frac{\pi}{32}$  e  $\mathcal{O}=\left[\frac{\pi}{32},\frac{31}{32}\pi\right]\times\left[\frac{\pi}{32},\frac{31}{32}\pi\right]$ 

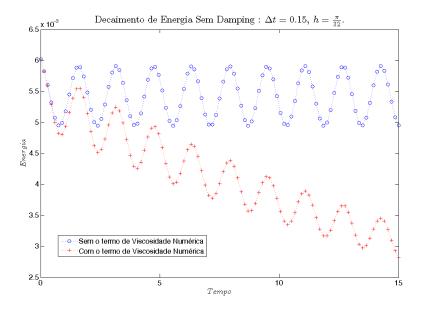


Figura 6.17: Energia: Comparação entre os casos com e sem o termo de viscosidade numérica e sem região de damping, tomando  $h=\frac{\pi}{32}$ 

## 6.2.4 Conclusões do Estudo da Energia

Após estudar numericamente a energia associada ao problema em questão, verificou-se que esta decai, como assegurado na teoria. Além disto, notou-se que tal decaimento está relacionado com a região  $\mathcal{O}$ : quanto maior a área, mais rápido é o decrescimento.

Analisando os resultados das simulações realizadas, com a presença de damping, considerar ou não o termo de viscosidade não alterou de forma significativa o decaimento de energia. Entretanto, o mesmo não acontece na ausência de tal região O.

Podemos concluir em relação as simulações feitas que ou o damping ou a viscosidade numérica é essencial para o decaimento de energia. Entretanto, não é necessária a ação de ambos simultaneamente para o decaimento da energia.

# 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.

Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."

#### Madre Teresa de Calcutá

Neste trabalho, abordou-se a estabilização da Equação de Bernoulli-Euler tanto do ponto de vista teórico quanto do numérico, ao estudar as vibrações de uma placa quadrada sujeita a ação de um mecanismo de controle/dissipação. As principais contribuições foram a implementação de um algoritmo, baseado no método das Diferenças Finitas, capaz de resolver numericamente este problema e a análise dos resultados. Acrescenta-se também a esta lista de feitos a realização de diversas simulações que, além de validarem o método numérico desenvolvido, confirmaram resultados teóricos já conhecidos. Além disso, concluímos que a ordem de convergência numérica do esquema proposto é  $p\approx 1.5$  e o decaimento da energia associada ao problema foi verificado.

Analisando os resultados das simulações realizadas, concluiu-se que tal decaimento de energia está associado com o tamanho região  $\mathcal{O}$ , onde o damping age. Em outras palavras, quanto maior  $\mathcal{O}$ , mais rápido deu-se este decaimento. Além disto, visando entender a influência do termo de viscosidade numérica adicionado ao problema semi-discreto, foi verificado que na presença de damping, não houve diferença significativa no tocante ao comportamento da energia, considerando ou não o termo de viscosidade. Entretanto, na ausência de damping, ou seja, sem a região  $\mathcal{O}$ , o mesmo não aconteceu. Neste caso, o termo de viscosidade foi necessário para existir dissipação de energia.

Algumas sugestões de trabalhos futuros podem ser citadas, por exemplo, a otimização do código implementado (para assim gerar simulações com malhas mais refinadas) e também, propor e inventisgar os efeitos de uma outra numeração dos nós da malha espacial. A solução numérica deste mesmo problema utilizando o Método de Elementos Finitos na discretização espacial também seria bastante interessante e seria possível comparar os resultados desta nova versão com os aqui obtidos.

Além disto, um estudo mais detalhado da estabilidade do esquema numérico precisa ser realizado ainda, isto é, trabalhar mais a fundo a equação (5.20). A verificação analítica de que o problema estudado é bem posto também precisa ser feita.

Uma pergunta que pode surgir ao longo do estudo é referente a necessidade da viscosidade numérica para garantir estabilidade uniforme e exponencial. No problema de estabilização interna, como aqui estudado, a resposta não é conhecida. No caso unidimensional, já foi mostrado que tal termo não é necessário e uma breve explicação sobre o assunto pode ser vista em [15]. Entretanto, o caso bidimensional sem este termo ainda é uma questão em aberto.

# REFERÊNCIAS

- [1] AMES, W. F. Numerical methods for partial differential equations. 3. ed. San Diego: Academic Press Inc, 1977. (Computer Science and Scientific Computing).
- [2] ATKINSON, K. E.; HAN, W. Theoretical numerical analysis: a functional analysis framework. New York: Springer, 2009. (Texts in Applied Mathematics, 39).
- [3] BURQ, N.; LEBEAU, G. Micro-local approach to the control for the plates equation. In: BARBU, V.; TIBA, D.; BONNANS, J. (Eds.). **Optimization, optimal control and partial differential equations**. Basel: Birkhäuser Verlag Basel, 1992. p.111-122. (International Series of Numerical Mathematics / Internationale Schriftenreihezur Numerischen Mathematik / Série Internationale d'Analyse Numérique, v.107).
- [4] FERNÁNDEZ-CARA, E.; ZUAZUA, E. Las matemáticas del control. Arbor, Madrid, v.183, n.725, p.383 - 393, 2007.
- [5] GLOWINSKI, R.; LI, C.-H.; LIONS, J.-L. A Numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I) Dirichlet controls: description of the numerical methods. **Japan Journal of Applied Mathematics**, Tokyo, v.7, n.1, p.176, Feb. 1990.
- [6] GOMES, A. M. Equações diferenciais e semigrupos de contrações não lineares dos espaços de Hilbert. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1982.

- [7] GUZMÁN, R. B.; TUCSNAK, M. Energy decay estimates for the damped plate equation with a local degenerated dissipation. Systems & Control Letters, Amsterdam, v. 48, n. 3-4, p. 191-197, Mar. 2003.
- [8] INFANTE, J. A.; ZUAZUA, E. Boundary observability for the space semidiscretizations of the 1-d Wave Equation. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Cambridge, v. 33, n. 02, p. 407-438, Mar. 1999.
- [9] IÓRIO, V. **EDP**, um curso de graduação. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [10] JAFFARD, S. Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque rectangulaire. **Portugaliae Mathematica**, Lisboa, v. 47, n. 4, p.423-429, 1990.
- [11] LAGNESE, J. E.; LIONS, J.-L. Modelling analysis and control of thin Plates. Paris: Springer, 1988. volume 6 of (Recherches en Mathématiques Appliquées, v. 6).
- [12] LEON, L.; ZUAZUA, E. Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretizations of the beam equation. Control, Optimisation and Calculus of Variations, Les Ulis, v. 8, p. 827-862, 2002.
- [13] LIU, Z.; ZHENG, S. Semigroups associated with dissipative systems. London: Chapman & Hall / CRC Press, 1999. (Chapman & Hall / CRC Research Notes in Mathematics, v. 398).
- [14] MIRANDA, M. M. Análise espectral em espaços de Hilbert. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1990. (UFRJ Textos de Métodos Matemáticos, n.28).
- [15] RAMDANI, K.; TAKAHASHI, T.; TUCSNAK, M. Internal stabilization of the plate equation in a square: the continuous and the semi-discretized problems. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Paris, v. 85, n. 1, p. 17-37, Jan. 2006.

- [16] RAMDANI, K.; TAKAHASHI, T.; TUCSNAK, M. Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations. Control, Optimisation and Calculus of Variations, Les Ulis, v. 13, n. 3, p.503-527, 2007.
- [17] \_\_\_\_\_\_. A uniformly stable finite difference space semi-discretization for the internal stabilization of the plate equation in a square. In: CASTRO, A. B. et al. Numerical mathematics and advanced applications. Proceedings of ENUMATH 2005, the 6th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications Santiago de Compostela, Spain, July 2005. Berlin: Springer, 2006. p.1068 1076.
- [18] RINCON, M. A.; LIU, I.-S. Introdução ao método de elementos finitos computação e análise em equações diferenciais parciais. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.
- [19] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997.
- [20] SOD, G. A. Numerical methods in fluid dynamics: initial and initial boundary value problems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

# APÊNDICE A DISCRETIZAÇÃO DO LAPLACIANO E DO BILAPLACIANO

Nesta seção apresentaremos os detalhes das contas da discretização do laplaciano e, também, do bilaplaciano mencionadas no Capítulo 5 desta dissertação.

## A.1 Discretização do Laplaciano

Como pode ser visto em [1], a derivada segunda de uma função u(x,y) pode ser aproximada da forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, y_k) \approx \frac{u(x_{j+1}, y_k) - 2u(x_j, y_k) + u(x_{j-1}, y_k)}{h^2} = \delta_{x,h}^2 u(x_j, y_k).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_j, y_k) \approx \frac{u(x_j, y_{k+1}) - 2u(x_j, y_k) + u(x_j, y_{k-1})}{h^2} = \delta_{y,h}^2 u(x_j, y_k).$$

Então, sabendo que  $\Delta\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ , onde x e y representam as duas direções do plano no qual a nossa placa se encontra, utilizando o passo da malha uniforme determinada no ínicio do Capítulo 5, temos que:

$$\Delta\omega_{j,k} = \frac{\omega_{j+1,k} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j-1,k}}{h^2} + \frac{\omega_{j,k+1} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j,k-1}}{h^2}.$$

Reorganizando os temos acima, segue que:

$$\Delta\omega(jh,kh) \approx \Delta\omega_{j,k} = \frac{1}{h^2} \left( \omega_{j+1,k} + \omega_{j-1,k} + \omega_{j,k+1} + \omega_{j,k-1} - 4\omega_{j,k} \right).$$

## A.2 Discretização do Bilaplaciano

Note que:  $\Delta^2 \omega = \Delta(\Delta \omega)$ , ou seja,  $\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$ . Portanto, utilizando a mesma notação e as fórmulas do anexo anterior, teremos:

$$\Delta^{2}\omega_{j,k} = \left\{ \delta_{x,h}^{2} \left[ \frac{\omega_{j+1,k} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j-1,k}}{h^{2}} \right] + 2\delta_{x,h}^{2} \left[ \frac{\omega_{j,k+1} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j,k-1}}{h^{2}} \right] + \delta_{y,h}^{2} \left[ \frac{\omega_{j,k+1} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j,k-1}}{h^{2}} \right] \right\}.$$

$$\Delta^{2}\omega_{j,k} = \left\{ \frac{1}{h^{2}} \left[ \frac{\omega_{j+2,k} - 2\omega_{j+1,k} + \omega_{j,k}}{h^{2}} - 2\frac{\omega_{j+1,k} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j-1,k}}{h^{2}} + \frac{\omega_{j,k} - 2\omega_{j-1,k}}{h^{2}} \right] + \frac{2}{h^{2}} \left[ \frac{\omega_{j+1,k+1} - 2\omega_{j,k+1} + \omega_{j-1,k+1}}{h^{2}} - 2\frac{\omega_{j+1,k} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j-1,k}}{h^{2}} + \frac{\omega_{j+1,k-1}}{h^{2}} \right] - \frac{2\omega_{j,k-1} + \omega_{j-1,k-1}}{h^{2}} \right] + \frac{1}{h^{2}} \left[ \frac{\omega_{j,k+2} - 2\omega_{j,k+1} + \omega_{j,k}}{h^{2}} - 2\frac{\omega_{j,k+1} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j,k-1}}{h^{2}} + \frac{\omega_{j,k}}{h^{2}} \right] \right\}.$$

Agrupando os termos iguais, chegamos na discretização do Bilaplaciano apresentada na seção 5.2, ou seja:

$$\Delta^2 \omega_{j,k} = \left\{ \frac{1}{h^4} \left[ \omega_{j+2,k} + \omega_{j-2,k} + \omega_{j,k+2} + \omega_{j,k-2} \right] - \frac{8}{h^4} \left[ \omega_{j-1,k} + \omega_{j+1,k} + \omega_{j,k+1} + \omega_{j,k-1} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{2}{h^4} \left[ \omega_{j-1,k+1} + \omega_{j+1,k+1} + \omega_{j+1,k-1} + \omega_{j-1,k-1} \right] + \frac{20}{h^4} \omega_{j,k} \right\}.$$

# APÊNDICE B ALGORITMO

Apresentaremos, neste apêndice, o pseudo-código baseado nas ideias mostradas no Capítulo 5 (Análise Numérica) e utilizado nas simulações numéricas do Capítulo 6.

O software  $MatLab^{\circledR}$  foi escolhido para implementação. Por simplicidade, na resolução dos sistemas lineares, o método numérico utilizado foi a Eliminação Gaussiana e no cálculo das integrais de energia, a Regra dos Trapézios Repetida.

## Algoritmo 1 Cálculo da Solução Aproximada do Problema

- 1: Definir  $h \in \Delta t$ , discretizando o domínio temporal e espacial.
- 2: Definir os inteiros a(h), b(h), c(h), d(h) para representar a região  $\mathcal{O}$ .
- 3: Guardar os dados iniciais do problema.
- 4: Criar a matriz que representa a discretização do operador Laplaciano.
- 5: Resolver o sistema linear para obter a solução aproximada em  $t_1 = \Delta t$ , utilizando as equações (5.12) e (5.13).
- 6: Armazenar a solução aproximada obtida no tempo  $t_1$ .
- 7: para i  $\leftarrow 2$  até N faça
- Resolver um sistema linear para obter a solução aproximada no tempo discreto  $t_i$ , utilizando as equações (5.7) e (5.8).
- 9: Armazenar a solução obtida para o tempo  $t_i$ .

#### 10: **fim para**

## B.1 Arquivo: main.m

```
Programa da Dissertacao considerando teta-metodo
   teta = 1/4
  % Limpando a memoria
  clear all;
  clc;
  format long;
  tic() % Funcao que informa o tempo de execucao do programa
11
  m = 31; % Obtencao de m (inteiro) -> m+2 nos, m+1 intervalos
  % Lembrando que os indices comecam a ser contados de 1
  % passo = pi/(numero de intervalos)
  h = (pi)/(m+1); % h -> Malha uniforme
  % Incremento no tempo
18
  Tmax = 10; %tempo t maximo
  N = 200; % t_0 = 0 < t_1 = deltat < ... < <math>t_N = Tmax
  deltat = Tmax/N;
23
  t = zeros(N+1,1);
24
  for k = 1:N+1
     t(k)=(k-1)*deltat;
  end
28
30
  % Discretizacao da Malha:
  % A priori, trabalharemos apenas com nos nos quais
  % precisaremos obter solucao aproximada. (i.e., indices
  % 10cais : 1 ate m ; m+1 ate 2m; ... ; m*(m-1) ate m*m);
  % Numeracao: Da esquerda para a Direita; de baixo para cima.
  coord_x = zeros(m*m,1);
39
40
coord_y = zeros(m*m,1);
```

```
42
   for i = 1:m*m
43
      coord_x(i) = mod(i,m);
44
      if coord_x(i) == 0
45
         coord_x(i) = m;
46
      end
47
      coord_y(i) = 1 + (i-coord_x(i))/m;
48
  end
49
  % Inteiros do retangulo (determinando a area onde o damping
  % vai agir). Por exemplo:
52
53
  ah = round(h/h);
54
  bh = round((pi - h)/h);
  ch = round(h/h);
  dh = round((pi - h)/h);
58
  % a = ah*h , b = bh*h , c = ch*h , d = dh*h
59
60
  % 1 \le ah, bh, ch, dh \le m, inteiros.
61
  Bilaplac = Laplaciano(m,h)*Laplaciano(m,h);
63
64
65
  % Solucao e Condicoes Iniciais
66
  u0 = zeros(m*m,1);
  u1 = zeros(m*m,1);
69
70
  for i = 1:m*m
71
      u0(i) = sin(h*coord_x(i))*sin(h*coord_y(i))*cos(t(1));
72
      u1(i) = 0;
73
  end
74
75
76
  % Armazenando as solucoes que serao obtidas: Solucao no
77
  % tempo t_n sera armazenada na coluna (n+1) da matriz Sol.
78
  Sol = zeros(m*m, N+1);
  % Armazenando a solucao em t_0 (dado do problema)
82
83
  Sol(:,1) = u0;
```

```
85
   \% Obtendo a solucao aproximada no tempo t_1:
86
87
   b = zeros(m*m,1);
89
   C = zeros(m*m, m*m);
90
91
   for i = 1:m*m
92
       aux = 0;
       aux2 = 0;
94
       if ah <= coord_x(i) && coord_x(i) <= bh && coord_y(i) >= ch &&
95
       coord_y(i) <= dh
96
          aux = Bilaplac(i,:)*u0;
97
          aux2 = Bilaplac(i,:)*u1;
98
          C(i,:) = (deltat*deltat)*Bilaplac(i,:);
          C(i,i) = C(i,i) + 4;
100
101
          b(i) = 4*u0(i) - deltat*deltat*aux + 4*deltat*u1(i)
102
          - 2*deltat*deltat*u1(i) + deltat*deltat*deltat*aux2
103
          - 2*h*h*deltat*deltat*aux2;
104
105
       else
106
          aux = Bilaplac(i,:)*u0;
107
          aux2 = Bilaplac(i,:)*u1;
108
          C(i,:) = deltat*deltat*Bilaplac(i,:);
109
          C(i,i) = C(i,i) + 4;
          b(i) = 4*u0(i) - deltat*deltat*aux + 4*deltat*u1(i) -
1\,1\,1
          2*deltat*deltat*h*h*aux2 +deltat*deltat*deltat*aux2;
112
113
       end
114
115
   end
116
   omega = C \ b;
117
118
119
   % Armazenando a solucao obtida
120
   for i = 1:m*m
       Sol(i,2) = omega(i);
122
123
   end
124
   for j = 2:N
125
126
       omega = zeros(m*m,1);
127
```

```
128
      C = zeros(m*m, m*m);
129
130
       b = zeros(m*m,1);
131
132
      for i = 1:m*m
133
          aux = 0;
134
          aux2 = 0;
135
          if ah <= coord_x(i) && coord_x(i) <= bh && coord_y(i) >= ch
137
          && coord_y(i) <= dh
138
139
              aux = Bilaplac(i,:)*Sol(:,j); %tempo n
140
141
              aux2 = Bilaplac(i,:)*Sol(:,j-1);%tempo n-1
142
143
              C(i,:)=((1/2)*deltat^2 + deltat*h*h)*Bilaplac(i,:);
144
145
              C(i,i) = C(i,i) + 2 + deltat;
146
147
             b(i) = 4*Sol(i,j) -deltat*deltat*aux
              + (deltat -2) * Sol(i, j -1)
149
              + (h*h*deltat - deltat*deltat*(1/2))*aux2;
150
151
          else
152
              aux = Bilaplac(i,:)*Sol(:,j); %tempo n
154
              aux2 = Bilaplac(i,:)*Sol(:,j-1);%tempo n-1
155
156
              C(i,:)=((1/2)*deltat^2 + deltat*h*h)*Bilaplac(i,:);
157
              C(i,i) = C(i,i)+2;
158
159
              b(i) = 4*Sol(i,j) - deltat*deltat*aux -2*Sol(i,j-1)
160
              + (deltat*h*h - deltat*deltat*(1/2))*aux2;
161
162
163
          end
       end
164
       omega = C \setminus b;
166
167
      % Armazenando a solucao
168
       for i = 1:m*m
169
          Sol(i,j+1) = omega(i);
170
```

```
171 end

172 end

173 tempo = toc()
```

**Observação:** Para geração das animações que simulam o comportamento da placa ao longo do tempo, foi utilizado o trecho abaixo no final do programa. Primeiramente, definimos os vetores posX e posY que armazenam as coordenadas cartesianas de todos os  $(m+2)^2$  nós da malha, incluindo os nós que estão no bordo do domínio. Em seguida, a matriz denominada grafico foi criada com a finalidade de armazenar as soluções de todos estes nós em cada tempo discreto e assim, ser utilizada para a criação da animação.

```
%Dominio Espacial todo, incluindo os pontos da fronteira, onde
       a solucao ja e conhecida!
   for i=1:m+2
       x(i)=(i-1)*h;
3
       y(i) = x(i);
4
   end
5
6
  k = 0;
7
   for j = 1:(m+2)
      for i = 1:(m+2)
9
         k = k+1;
10
         posX(k) = x(i);
11
         posY(k) = y(j);
12
      end
13
   end
14
15
   video = avifile('exemplo_video.avi','compression','Indeo5',
16
             'quality',10)
17
18
   for tempo=1:N+1
19
      cont = 0;
20
      k = 0;
21
      grafico = zeros(m+2,m+2);
22
23
      \% Grafico e a matriz que armazena as solucoes de todos os
24
```

```
% nos em cada tempo discreto, incluindo os nos do bordo,
25
      % cuja solucao e contorno do problema.
26
      for j = 1:(m+2)
         for i = 1:m+2
29
            k = k+1;
30
                if posX(k) == x(1) \mid posX(k) == x(m+2)
31
                | | posY(k) == y(1) | | posY(k) == y(m+2)
32
                   grafico(i,j) = 0;
33
                else
34
                   cont = cont + 1;
35
                   grafico(i,j) = Sol(cont,tempo);
36
                end
37
         end
38
      end
39
      % Criando o grafico posicao X solucao aproximada
41
      surf(x,y,grafico);
42
43
      % Fixando o comprimento dos eixos
44
      axis([0 3.5 0 3.5 -0.5 1 -1 1]);
46
      % Adicionando este grafico ao video
47
      F = getframe(gcf);
48
      video = addframe(video,F);
49
50
  end
51
  video = close(video)
```

# B.2 Arquivo: Laplaciano.m

A seguir, será apresentado o código da função Laplaciano utilizada no programa.

```
function[y] = Laplaciano(N,h)

lapl = zeros(N*N,N*N);
4
```

```
for i = 1: N*N
5
          lapl(i,i) = -4;
6
7
      end
      for i = 1: N*N-1
9
         if (i+N \le N*N)
10
              lapl(i,i+N)=1;
11
12
      end
13
14
      for i = 2: N*N
15
         if (i-N>=1)
16
             lapl(i,i-N) = 1;
17
          end
18
19
      end
^{20}
      for i = 1: N*N-1
^{21}
         if (mod(i,N)~=0)
22
              lapl(i,i+1) = 1;
23
24
          end
      end
25
^{26}
      for i = 2: N*N
27
         if (mod(i-1,N)~=0)
28
             lapl(i,i-1) = 1;
29
          end
30
      end
31
^{32}
      y=lap1/(h^2);
33
34
35
  end
```