

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
INSTITUTO TERCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ALEXANDRE TOMAN

O NÚMERO DE RADON EM GRAFOS

Rio de Janeiro

2014

ALEXANDRE TOMAN

O NÚMERO DE RADON EM GRAFOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do Título de Doutor em Informática.

Orientadores: Prof. Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter

Prof. Dr. Mitre Costa Dourado

Rio de Janeiro

2014

T655 Toman, Alexandre

O número de Radon em grafos. Alexandre Toman. – 2014.  
86 f.: il.

Tese (Doutorado em Informática) -  
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de  
Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e  
Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação  
em Informática, Rio de Janeiro, 2014.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter, Mitre Costa  
Dourado.

1. Algoritmos. 2. Grafos. 3. Convexidade. 4 Número de  
Radon - Teses. I. Szwarcfiter, Jayme Luiz (Orient.),  
II. Dourado, Mitre Costa (Orient.). III. Universidade  
Federal do Rio de Janeiro. Instituto Tércio Pacitti de  
Aplicações e Pesquisas Computacionais. Programa de Pós-  
Graduação em Informática. IV. Título.

ALEXANDRE TOMAN

O NÚMERO DE RADON EM GRAFOS

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

Aprovada por:

---

Prof. Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter  
(Orientador)  
PPGI - IM/UFRJ

---

Prof. Dr. Mitre Costa Dourado  
(Orientador)  
PPGI - IM/UFRJ

---

Prof. Dr. Vinícius Gusmão Pereira de Sá  
PPGI - IM/UFRJ

---

Prof. Dr. Simone Dantas de Souza  
IME/UFF

---

Prof. Dr. Luerbio Faria  
IME/UERJ

# Dedicatória

Dedicado a todos aqueles que me ajudaram a crescer academicamente ao longo da vida.

# Agradecimentos

Agradeço aos orientadores Mitre Costa Dourado e Jayme Luiz Szwarcfiter, pelas valiosas somas, correções e adaptações.

Agradeço também:

- Aos professores Vinícius Gusmão, Lilian Markenzon e Celina Figueiredo, pelas aulas que nos foram dadas durante o curso;
- Aos colegas do curso (todos);
- Aos livres pensadores de todo o mundo, que exercem suas atividades na construção de uma sociedade melhor;
- Aos meus pais e minha irmã, que apesar de todas as dificuldades que passamos durante a vida, nunca me disseram - por via direta ou subliminar - para abandonar os estudos;
- Aos funcionários da biblioteca do Instituto de Matemática da UFRJ por terem paciência comigo quando estava quase todos os dias devolvendo e renovando vários títulos que me eram emprestados;
- A todos os membros da banca desta tese por terem aceitado participar da mesma;
- A CAPES pelo suporte financeiro.

# Resumo

TOMAN, Alexandre. **O número de Radon em grafos.** 2014. Defesa (Doutorado em Informática) - Programa de Pós-Graduação em Informática, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Dado um grafo  $G(V(G), E(G))$  e um subconjunto  $R \subset V(G)$ ,  $R$  é um conjunto convexo quanto à convexidade  $P_3$  se para todo par de vértices  $x, y \in R$ , existe um caminho  $x - w - y$  tal que  $w \in R$ . O mesmo  $R$  é convexo relativo à convexidade geodética, se para todo par  $x, y \in R$ , os vértices em todos os caminhos mínimos entre  $x$  e  $y$  pertencem a  $R$ . Neste trabalho, determinamos o parâmetro de convexidade conhecido como “número de Radon”, para algumas classes de grafos em ambas as convexidades citadas acima. É provada a NP-completude para o cálculo do número de Radon de grafos gerais, em ambas as convexidades. Também mostramos que o número de Radon pode ser obtido em tempo polinomial para algumas classes de grafos, como cografos (ambas as convexidades), ciclos (ambas as convexidades) e grafos bloco (convexidade geodética).

Palavras-chave: algoritmos. convexidade. número de Radon. grafos.

# Abstract

TOMAN, Alexandre. **O número de Radon em grafos.** 2014. Defesa (Doutorado em Informática) - Programa de Pós-Graduação em Informática, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Given a graph  $G(V(G), E(G))$  and a set  $R \subset V(G)$ ,  $R$  is a convex set relative to the  $P_3$ -convexity if for all pairs of vertices  $x, y \in R$ , if there is a path  $x-w-y$  then  $w \in R$ . The same  $R$  is convex relative to the geodetic convexity, if for all pair  $x, y \in R$ , the vertices of all shortest paths between  $x$  and  $y$  belong to  $R$ . In this work, we determined the convexity parameter called “Radon number”, for some classes of graphs in the aforementioned convexities. We proved the NP-complexity of determining the Radon number of general graphs in both convexities. We demonstrated that the Radon number can be computed in polynomial time for some graph classes, like cographs (in both convexities), cycles (in both convexities) and block graphs (in geodetic convexity).

Keywords: algorithms. convexity. Radon number. graphs.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos preliminares</b>	<b>18</b>
2.1	Definições básicas em grafos . . . . .	18
2.2	Complexidade computacional . . . . .	24
2.3	Alguns conceitos de convexidade . . . . .	25
2.3.1	Convexidades em grafos . . . . .	26
2.3.2	Algumas definições relativas a este trabalho . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Convexidade geodética</b>	<b>32</b>
3.1	NP-completude do caso geral . . . . .	33
3.2	Cálculo do número de Radon de algumas classes de grafos . . . . .	35
3.2.1	Número de Radon de caminhos . . . . .	35
3.2.2	Número de Radon de grafos bipartidos completos . . . . .	35
3.2.3	Número de Radon de ciclos . . . . .	37
3.2.4	Número de Radon de árvores . . . . .	40
3.2.5	Número de Radon de algumas classes de grafos perfeitos . . . . .	42
3.3	Algoritmo eficiente para cálculo do número de Radon de grafos de intervalo unitário	54
<b>4</b>	<b>Convexidade <math>P_3</math></b>	<b>60</b>

4.1	NP-dificuldade para grafos de partição . . . . .	61
4.2	Cálculo do número de Radon de algumas classes de grafos . . . . .	63
4.2.1	Número de Radon de caminhos . . . . .	63
4.2.2	Número de Radon de ciclos . . . . .	65
4.2.3	Número de Radon de grafos bipartidos completos . . . . .	66
4.2.4	Número de Radon de árvores estritamente binárias . . . . .	67
4.2.5	Número de Radon de cografos . . . . .	68
4.3	Algoritmo eficiente para o cálculo do número de Radon de grafos de intervalo unitário biconexos . . . . .	70
4.3.1	Outras classes discutidas na convexidade geodética . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Conclusão e trabalhos futuros</b>	<b>73</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>76</b>
<b>A</b>	<b>Epílogo - Constantin Carathéodory</b>	<b>81</b>
<b>B</b>	<b>Epílogo - Johann Radon</b>	<b>83</b>
<b>C</b>	<b>Epílogo - Eduard Helly</b>	<b>87</b>

# Lista de Figuras

2.1	Os vértices $a, b, c, d$ formam um conjunto independente. . . . .	18
2.2	Exemplo de grafo biconexo em vértices e em arestas. . . . .	19
2.3	Exemplo de grafo perfeito. . . . .	20
2.4	Cografo. A operação 1 trata-se da união disjunta e a operação 2 da união junta. . . . .	21
2.5	No grafo $G$ acima, os vértices 2, 3 e 8 são articulações, enquanto que $(2, 3)$ é uma ponte. Temos que os quatro grafos à direita de $G$ são os componentes biconexos do grafo $G$ . . . . .	21
2.6	Observe as componentes biconexas do grafo da Figura (2.5). . . . .	22
2.7	Estrutura de um grafo bloco. Figura extraída do site Wikipedia. . . . .	22
2.8	Exemplo de um grafo de partição. Os vértices podem ser particionados em uma clique e um conjunto independente. Imagem retirada do site Wikipedia. . . . .	22
2.9	Grafo de intervalo e suas respectivas associações na reta. Figura retirada de [60]. . . . .	22
2.10	Grafo de intervalo unitário e suas associações na reta. Figura retirada de [60]. . . . .	23
2.11	Exemplo de grafo de partição. . . . .	23
2.12	Uma transformação do grafo de partição apresentado na Figura (2.11) para um grafo estrelado. . . . .	24
2.13	Sejam $R$ o conjunto de vértices vermelhos. . . . .	27
2.14	Observe que $a$ e $f$ são induzidos por $H[g, b]$ e $H[g, e]$ , respectivamente. Logo $a, f \in (H[R] - R)$ , que estão representados pelos vértices azuis. . . . .	28
2.15	$a, b \in R \subset H[R]$ . . . . .	28
2.16	Temos que $a$ e $b$ induzem $c$ por $H[R]$ . Logo $c \in (H[R] - R)$ . . . . .	28

2.17	Analogamente, $d \in H[R] - R$ , tendo $d$ sido induzido por $b, c \in H[R]$ . . . . .	29
2.18	E finalmente $e \in H[R] - R$ . . . . .	29
2.19	O número de Carathéodory deste grafo é 4. . . . .	29
2.20	O número de Radon deste grafo é 4. . . . .	30
2.21	Observe que o conjunto de vértices vermelhos é um anti-Radon pois estes pertencem a um conjunto convexo. . . . .	30
3.1	É dado um grafo $G'$ . . . . .	34
3.2	A partir do grafo $G'$ da Figura (3.1) faz-se a transformação descrita no texto, construindo o grafo $G$ representado na Figura. . . . .	34
3.3	O número de Radon de $P_n$ é 3, onde os $R = R_1 \cup R_2$ é partição de Radon, sendo $R_1 = \{a, c\}$ e $R_2 = \{b\}$ . . . . .	35
3.4	$r(K_{p,q}) > 2$ , com $p, q \geq 2$ . . . . .	36
3.5	$r(K_{p,q}) = 3$ , com $p, q \geq 2$ , já que dois vértices em uma mesma partição forma um conjunto envoltória. . . . .	36
3.6	$r(K_{1,q}) > 3$ . . . . .	37
3.7	$r(K_{1,q}) = 4$ . . . . .	37
3.8	$r(C_4) = 3$ . . . . .	38
3.9	Observe que o conjunto $\{a, b, c\}$ é um conjunto anti-Radon. . . . .	39
3.10	$r(C_6) > 3$ , pois $x = v_1, z = v_3$ e $y = v_5$ é um anti-Radon. . . . .	39
3.11	Observe que $R = \{a, b, c\}$ não é anti-Radon. . . . .	40
3.12	O conjunto formado pelos três vértices azuis é anti-Radon. . . . .	41
3.13	O número de Radon destas duas árvores $T$ e $T'$ é o mesmo, pois se $T' = T - \{u\}$ , com $u \notin H[R]$ , $r(T) = r(T') = 4$ . . . . .	41
3.14	Se existem duas componentes de $G$ que não são cliques, um par de vértices não adjacentes é um conjunto envoltória. . . . .	42
3.15	Caso em que apenas uma componente não é uma clique. O problema é dividido em casos. . . . .	43

3.16	Tome o grafo bloco acima e encontre $U(C, v)$ , para todo $v \in V(C)$ , sendo $V(C) = \{a, b, c, d\}$ . . . . .	44
3.17	Observe a construção de $U(C, v)$ para todo vértice $v \in V(C)$ da Figura (3.16). Observe que se tomarmos todos $v \in V(C)$ , $V(U(C, v))$ particiona $V(G)$ . . . . .	44
3.18	O conjunto independente formado pelos quatro vértices azuis forma um anti-Radon, apesar de que $ R  = \omega(G) + 1$ . . . . .	47
3.19	Caso em que temos duas cliques externas, e dois vértices de $R$ em cada uma destas cliques, representados de verde na figura. . . . .	51
3.20	No segundo caso, apenas uma clique externa $C_1$ possui dois vértices de $R$ . . . . .	52
3.21	O número de Radon deste grafo co-bipartido é maior que $\omega(G) + 1$ , pois o vértice $b$ está à distância dois de todos os vértices de $A$ . Os vértices azuis pertencem a $R_1$ e os verdes a $R_2$ , sendo a partição $R = R_1 \cup R_2$ , que não é partição de Radon. . . . .	55
3.22	Grafo de intervalo unitário $G$ onde $v_1, v_2, \dots, v_n$ é uma ordenação canônica para $V(G)$ . (Observe que não desenhamos todas as arestas, por exemplo $(v_3, v_5)$ . Os caminhos $v_1, b_2, b_3, b_4, v_n$ e $v_1, b'_2, b'_3, b'_4, v_n$ são menores caminhos de $v_1$ a $v_n$ obtidos pelo algoritmo guloso. . . . .	55
3.23	Os vértices pretos e cinzas são definidos pelos menores caminhos obtidos pelo algoritmo guloso. O caminho $v_6v_{10}v_{14}$ é um caminho cinza. . . . .	56
3.24	RP - região preta. Todas as outras são regiões cinzas. Os únicos vértices não simpliciais são $y_1$ e $y_2$ . Os vértices intermediários a $y_1$ e $y_2$ na ordenação canônica são simpliciais. Os vértices $x$ exibidos na figura são possíveis localizações para a testemunha de Radon citada na redução ao absurdo. . . . .	58
4.1	É dada uma instância de CONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO. . . . .	63
4.2	Transformação da instância de CONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO para CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO $P_3$ . Observe que trata-se de um grafo de partição. . . . .	63
4.3	Se $n \equiv 0 \pmod{3}$ , segue que um anti-Radon máximo possui exatamente $\frac{2}{3}$ do total de vértices. . . . .	64
4.4	Se $n \equiv 1 \pmod{3}$ , segue que um anti-Radon máximo possui exatamente $\frac{2(n-1)}{3} + 1$ vértices. . . . .	64
4.5	Os vértices azuis pertencem a $R_1$ e os vértices verdes a $R_2$ , da partição $R = R_1 \cup R_2$ . Observe que o anti-Radon máximo tem exatamente 5 vértices e o número de Radon é $\lfloor \frac{2 \cdot 8 + 3}{3} \rfloor = 6 = 5 + 1$ . . . . .	65

4.6	Observe que em qualquer grafo bipartido completo em que as partições são compostas por pelo menos dois vértices, teremos número de Radon igual a 3. . . . .	66
4.7	Observe que em qualquer grafo bipartido completo em que uma das partições é unitária, teremos número de Radon igual a 4. . . . .	67
4.8	Não importa como particionamos o conjunto de vértices azuis, tal partição não é partição de Radon. . . . .	68
4.9	Se $R = \{a, b, c\}$ , não existe partição de Radon neste cografo. . . . .	69
4.10	Vejamos como o algoritmo faria para encontrar um conjunto anti-Radon máximo do grafo de intervalo unitário acima. Cada aresta desenhada forma uma clique maximal. Encontra-se a ordenação canônica do grafo. . . . .	71
4.11	Coloca-se o primeiro vértice da ordenação canônica $v_1$ em $R$ . . . . .	71
4.12	O primeiro vértice que está à distância 3 de $v_1$ é posto em $R$ . . . . .	72
4.13	Coloca-se o primeiro vértice na ordenação canônica que esteja à distância $6 = 3 \times 2$ de $v_1$ em $R$ . Verifica-se que não existe mais vértices a uma distância múltipla de 3 de $v_1$ e o algoritmo acaba. O número de Radon do grafo de intervalo unitário do exemplo é $3 + 1 = 4$ . . . . .	72
5.1	Exemplo de grafo polar. . . . .	74
A.1	Carathéodory - Foto retirada de [9]. . . . .	82
B.1	Radon - Foto retirada de [57]. . . . .	86
C.1	Helly - Foto retirada de [62]. . . . .	87

# Lista de Tabelas

2.1	Resumo das diversas convexidades trabalhadas por diferentes autores. . . . .	27
2.2	Número de Radon relativo a algumas convexidades em grafos. . . . .	31
3.1	Resumo dos resultados do Capítulo 3. . . . .	32
3.2	Cálculo dos comprimentos do caminho entre dois vértices pelo sentido anti-horário do ciclo. . . . .	38
3.3	Cálculo dos comprimentos do caminho entre dois vértices pelo sentido horário do ciclo. . . . .	38
4.1	Resumo dos resultados do Capítulo 4. . . . .	60
5.1	Resumo dos resultados desenvolvidos na tese . . . . .	74

# Capítulo 1

## Introdução

Ao longo das últimas décadas, foram publicados diversos trabalhos que expandem conceitos de matemática contínua em matemática discreta, e em especial, em teoria dos grafos. A **envoltória convexa** de um conjunto  $X$  é o menor conjunto convexo que contém  $X$ . Podemos criar uma comparação entre os conceitos de convexidade em matemática contínua e teoria dos grafos considerando o conjunto de vértices de um grafo conexo e a distância entre vértices como um espaço métrico [46, 59]. Seja  $G(V(G), E(G))$  um grafo e  $P$  um conjunto de caminhos de  $G$ . Um conjunto  $S \subset V(G)$  é  $P$ -convexo se para todo par de vértices  $x, y \in S$  para os quais todo caminho de  $x$  para  $y$ , com  $C \in P$ , implica que todos os vértices de  $C$  pertencem a  $S$ .

Neste trabalho consideramos um tema no contexto de convexidade em grafos denominado “número de Radon”.

Johann Karl August Radon publicou em 1921 [53] o famoso teorema que originou diversos conceitos atuais de convexidade [59]. Este teorema diz que, dado um conjunto  $V$  com, no mínimo,  $d + 2$  pontos em  $\mathbb{R}^d$ , tal  $V$  pode ser particionado em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  cujas envoltórias convexas de  $V_1$  e  $V_2$  possuem interseção não nula. O número de Radon é exatamente a cardinalidade mínima de  $V$ , a qual podemos garantir a existência desta partição, denominada partição de Radon. No caso, o número de Radon em  $\mathbb{R}^d$  é  $d + 2$ .

O problema do número de Radon no espaço  $\mathbb{R}^d$  motivou o estudo do número de Radon para convexidade em grafos. Neste trabalho, representaremos o número de Radon do grafo  $G$  por  $r(G)$ .

Para grafos e digrafos os conjuntos convexas são normalmente definidos a partir de um conjunto  $P$  de caminhos. Inúmeros tipos de convexidade têm sido estudadas, dentre elas a convexidade onde  $P$  é o conjunto das geodésicas, ou seja, o conjunto de caminhos mínimos de  $G$ , chamada de convexidade geodética. Em [16] foram classificados todos os grafos com  $n - 2 \leq r(G) \leq n + 1$ , para um grafo  $G$  com  $n$  vértices. Mais recentemente, no artigo [29] estudou-se sobre o número de Radon para grades  $d$ -dimensionais, que são produtos cartesianos de  $d$  caminhos, relativos à convexidade geodética. A Seção (3.3) foi apresentada como um trabalho à

parte em [27], e neste se desenvolve um algoritmo polinomial para encontrar o número de Radon geodético para grafos de intervalo unitário.

Quando  $P$  é a coleção de todos os caminhos induzidos de  $G$  então temos a convexidade monofônica, que foi estudada em [30, 33]. No artigo [30], foi dada uma caracterização para se encontrar o número de Radon de qualquer grafo considerando-se a convexidade monofônica. Também foi caracterizado o número de Radon para a convexidade denominada convexidade do caminho triangular [8], e para  $P_3$  em torneios multipartidos [48].

Alguns artigos generalizam o conceito euclidiano de conjuntos convexos para a Teoria dos Grafos [13, 12, 31, 32, 33, 38]. Vários parâmetros de convexidade em grafos já foram estudados anteriormente, tais como conjuntos geodéticos, número geodético, número de envoltória e número de convexidade [7, 19, 21, 22, 26]. Em [1, 2] estudou-se sobre coberturas convexas e partições convexas geodéticas.

A convexidade de caminhos de tamanho dois (convexidade  $P_3$ ) foi estudada em diversos contextos [3, 10, 11]. Tal convexidade será uma das abordadas neste trabalho, assim como a geodética.

O Capítulo 2 deste trabalho apresenta alguns conceitos principais da Teoria dos Grafos e também dá alguns conceitos da convexidade em grafos, enfatizando as convexidades a serem estudadas, que são as convexidade geodética e  $P_3$ . No Capítulo 3 encontramos os números de Radon para certas classes particulares de grafos, considerando a convexidade geodética, e provamos a NP-completude do caso geral. No Capítulo 4 encontramos os números de Radon para algumas classes de grafos, considerando a convexidade  $P_3$ , e provamos que é NP-difícil encontrar o número de Radon, mesmo para classe dos grafos split (partição). O Capítulo 5 trata da conclusão e trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Conceitos preliminares

Neste capítulo apresentaremos a nomenclatura, notações e conceitos necessários para o desenvolvimento do restante do trabalho. Conceitos básicos da teoria dos grafos são definidos, assim como conceitos da convexidade em grafos.

### 2.1 Definições básicas em grafos

Um **grafo**  $G$  é uma dupla ordenada  $(V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto finito, cujos elementos são denominados **vértices**, e  $E(G)$  é um conjunto de subconjuntos de  $V(G)$  com cardinalidade dois, e estes elementos de  $E(G)$  são denominados **arestas**. Cada aresta  $e \in E$  será denotada pelo par de vértices  $e = (v, w)$  que a forma. Nesse caso, os vértices  $v, w$  são os **extremos** (ou **extremidades**) da aresta  $e$ , sendo denominados **adjacentes**. A aresta  $e$  é dita **incidente** a ambos  $v, w$ . Duas arestas que possuem um extremo comum são chamadas de **adjacentes**. Utilizaremos a notação  $n = |V|$  e  $m = |E|$ . O **complemento** de um grafo  $G$  é denotado por  $\bar{G}$  e este é formado pelo mesmo conjunto de vértices de  $G$  mas dois vértices de  $\bar{G}$  são adjacentes em  $G$  se e somente se eles não são adjacentes em  $G$ .

Um **conjunto independente** em um grafo é um conjunto de vértices que são, dois a dois, não-adjacentes.

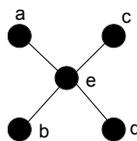


Figura 2.1: Os vértices  $a, b, c, d$  formam um conjunto independente.

Vamos desenhar  $n$  vértices em uma linha e conectar os vértices consecutivos por uma aresta. Desta forma obteremos um grafo com  $n - 1$  arestas, que denominaremos **caminho**. O primeiro e

último vértices na linha são chamados **extremidades do caminho**. Para  $n \geq 3$ , se conectarmos também o último vértice ao primeiro, obtemos um **ciclo**. Representamos um caminho com  $n$  vértices por  $P_n$  e um ciclo com  $n$  vértices por  $C_n$ ,  $n \geq 3$ .

Um grafo  $H$  é chamado de **subgrafo** de um grafo  $G$  se ele pode ser obtido de  $G$  removendo-se alguns de seus vértices e arestas. Um grafo é **conexo** se cada par de vértices em  $G$  pertence a pelo menos um caminho; caso contrário  $G$  é **desconexo**. Um vértice  $v$  é denominado **articulação** de um grafo conexo quando sua remoção de  $G$  o desconecta. Uma aresta  $e$  em um grafo conexo é denominada **ponte** quando a sua remoção de  $G$  o desconecta. Desta forma, um grafo é **biconexo** em vértices (arestas) se e somente se não possuir articulações (pontes). O grafo da Figura (2.2) é biconexo em vértices e também biconexo em arestas.

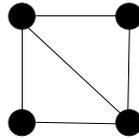


Figura 2.2: Exemplo de grafo biconexo em vértices e em arestas.

Uma **árvore** será representada por  $T$  e é um grafo conexo que não possui ciclos e além disso um dos vértices é escolhido como especial, este vértice sendo denominado **raiz da árvore**. Se um vértice  $v$  da árvore  $T$  possuir grau  $\leq 1$  então  $v$  é uma **folha**. Para uma árvore  $T$ , seja  $L(T)$  o conjunto de folhas de  $T$  e seja  $l(T)$  o número de folhas de  $T$ . Uma árvore  $T(V, E)$  é denominada **árvore enraizada** quando algum vértice  $y \in V$  é escolhido como especial ( $y$  é chamado de **raiz da árvore**). Suponha que  $v$  pertença ao caminho de  $r$  a  $w$  em  $T$ , com  $r$  sendo a raiz de  $T$ . Então  $v$  é **ancestral** de  $w$ , sendo  $w$  **descendente** de  $v$ . Além do mais, se  $(v, w)$  for aresta de  $T$ , então  $v$  é **pai** de  $w$ , sendo  $w$  **filho** de  $v$ . Dois vértices que possuem o mesmo pai são **irmãos**. Uma árvore enraizada é **estritamente binária** se todo nó possui 0 ou 2 filhos.

Um grafo é **completo** quando existe uma aresta entre cada par de seus vértices, sendo utilizada a notação  $K_n$  para um grafo completo de  $n$  vértices. Denomina-se **clique** de um grafo  $G$  a um subgrafo de  $G$  que seja completo. A **cardinalidade de uma clique** é o número de vértices desta clique. Um grafo é **k-partido** se  $V(G)$  pode ser expresso como a união de  $k$  conjuntos independentes, e cada um destes conjuntos independentes é denominado uma **partição**. O grafo é **k-partido completo** (ou **k-multipartido completo**) quando existe toda aresta  $(u, v)$ , sendo  $u$  e  $v$  vértices de partições diferentes. No caso  $k = 2$  o grafo 2-partido é também conhecido como grafo **bipartido**. Denotamos o grafo bipartido completo com conjuntos independentes de cardinalidade  $p$  e  $q$  por  $K_{p,q}$ .

Um caminho de  $n$  vértices é formado por  $n - 1$  arestas, e este valor  $n - 1$  é denominado **comprimento do caminho**. A **distância** entre dois vértices  $u$  e  $v$  em um grafo  $G$  é denotada por  $d(u, v)$ , e esta representa o comprimento do menor caminho entre  $u$  e  $v$ . Se  $x, y \in V(G)$  e existe a aresta  $(x, y) \in E(G)$ , representamos por  $x \rightarrow y$  o caminho de  $x$  para  $y$ . Cada  $x \rightarrow y$  consome uma unidade de distância. Se  $Z$  é um conjunto vazio de vértices, a notação  $x \rightarrow Z \rightarrow y$  significa o mesmo que  $x \rightarrow y$ . Caso contrário  $x \rightarrow Z \rightarrow y$  significa que de  $x$  percorremos todos os vértices de  $Z$ , segundo uma ordem especial, e então seguimos para  $y$ .

Em Teoria dos Grafos, **coloração de grafos** é um caso especial de rotulagem de grafos; é uma atribuição de rótulos tradicionalmente chamados “cores” a elementos de um grafo sujeita a certas restrições. Em sua forma mais simples, é uma forma de colorir os vértices de um grafo tal que não haja dois vértices adjacentes que compartilhem a mesma cor - isso é chamado de uma **coloração de vértices**. Da mesma forma, uma **coloração de arestas** atribui uma cor para cada aresta de modo que não haja duas arestas adjacentes da mesma cor. O **número cromático** de um grafo representa o menor número de cores necessárias para se realizar a coloração de vértices. Um subgrafo  $H$  é um **subgrafo induzido** de um grafo  $G$  se, para qualquer par de vértices  $x$  e  $y$  de  $H$ ,  $(x, y)$  é uma aresta de  $H$  se e somente se  $(x, y)$  é uma aresta de  $G$ . Em outras palavras,  $H$  é um subgrafo induzido de  $G$  se ele tem todas as arestas que aparecem em  $G$  sobre o mesmo conjunto de vértices.

Um **grafo perfeito** é um grafo em que o número cromático de cada subgrafo induzido é igual à cardinalidade da maior clique deste subgrafo. A Figura (2.3) mostra um grafo perfeito. Se 1, 2 e 3 são cores diferentes uma das outras, observe que cada par de vértices possui cores diferentes, como a sua clique máxima tem tamanho 3, segue que trata-se realmente de um grafo perfeito.

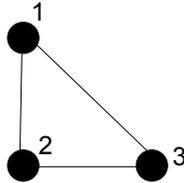


Figura 2.3: Exemplo de grafo perfeito.

Um **cografo** é definido recursivamente como:  $K_1$  é um cografo; se  $G_1, G_2$  são cografos, então a união disjunta  $G_1 \cup G_2$  e a união junta  $G_1 \oplus G_2$  são cografos (o grafo  $G \oplus H$  é formado pela adição de todas arestas da forma  $(u, v)$  para  $u \in V(G)$  e  $v \in V(H)$ .) De [14],  $G$  ser cografo é equivalente a  $G$  ser livre de  $P_4$  induzido que é equivalente ao fato de o complemento de todo subgrafo induzido conexo não trivial de  $G$  ser desconexo. A Figura (2.4) ilustra a união junta e disjunta.

Denomina-se **componentes biconexas** do grafo  $G$  aos subgrafos maximais de  $G$  que sejam isomorfos a  $K_2$  ou biconexos em vértices. A Figura (2.6) mostra as componentes biconexas do grafo apresentado na Figura (2.5). Cada componente biconexa é também chamado **bloco** do grafo. Assim se  $G$  é biconexo em vértices então  $G$  possui um único bloco, que coincide com o próprio  $G$ . Um **grafo bloco** é aquele em que todas as suas componentes biconexas são grafos completos. A Figura (2.7) dá exemplo de um grafo bloco.

Um **grafo de partição** (*split graph*) é aquele em que o conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique e em um conjunto independente. A Figura (2.8) é um grafo de partição.

Um **grafo co-bipartido** é o grafo complementar de um grafo bipartido.

Seja  $\{C_i\}_i$  uma família de conjuntos não vazios indexada num conjunto de índices  $V$ . Chama-

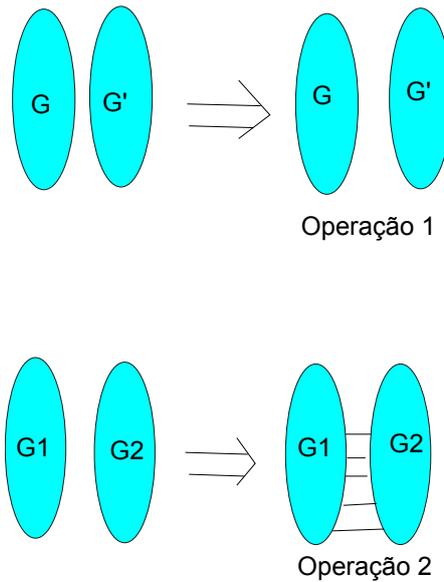


Figura 2.4: Cografo. A operação 1 trata-se da união disjunta e a operação 2 da união junta.

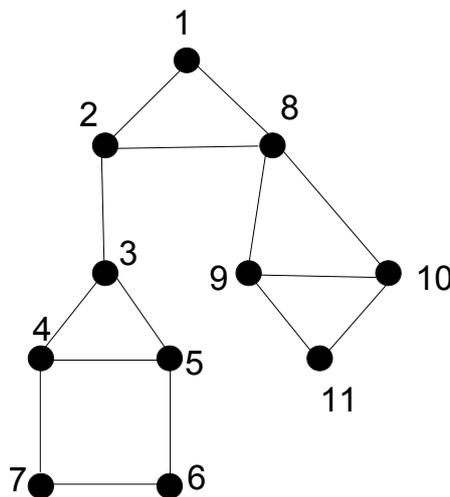


Figura 2.5: No grafo  $G$  acima, os vértices 2, 3 e 8 são articulações, enquanto que  $(2, 3)$  é uma ponte. Temos que os quatro grafos à direita de  $G$  são os componentes biconexos do grafo  $G$ .

se **grafo de interseção** desta família, o grafo  $G(V(G), E(G))$  onde  $V$  é o conjunto de índices da família, e as arestas de  $G$  são os pares não ordenados  $i, j$  tais que  $C_i$  intersecta  $C_j$ . Um grafo  $G$  diz-se um **grafo de intervalos** se for um grafo de interseção de uma família de intervalos. A Figura (2.9) dá exemplo de um grafo de intervalo.

Um grafo  $G$  é um **grafo de intervalo unitário** se  $G$  é o grafo de interseção de uma coleção de intervalos de mesmo comprimento na reta real. Sendo  $G$  um grafo de intervalo unitário, existe uma ordenação linear  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de  $V(G)$  tal que se existe aresta  $(v_i, v_j)$ , então  $v_i, \dots, v_j$ , com

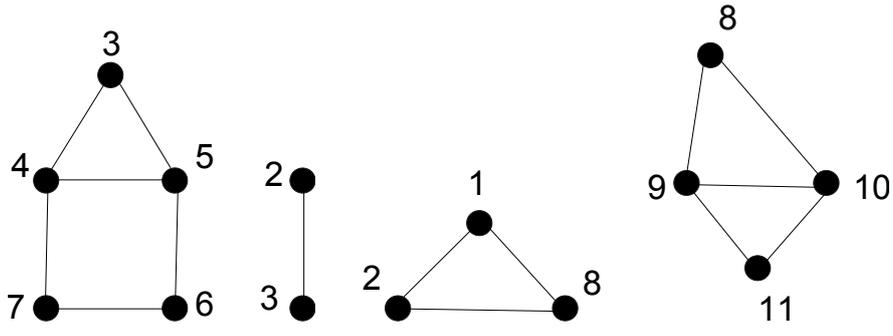


Figura 2.6: Observe as componentes biconexas do grafo da Figura (2.5).

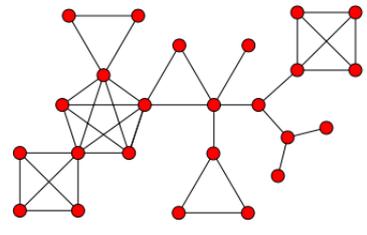


Figura 2.7: Estrutura de um grafo bloco. Figura extraída do site Wikipedia.

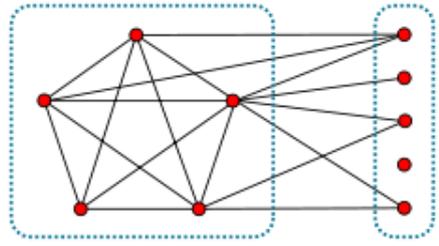


Figura 2.8: Exemplo de um grafo de partição. Os vértices podem ser particionados em uma clique e um conjunto independente. Imagem retirada do site Wikipedia.

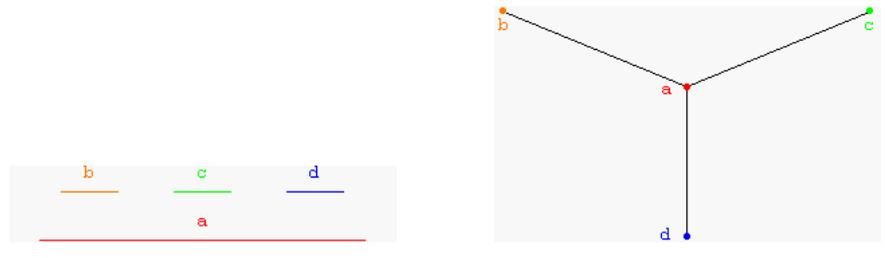


Figura 2.9: Grafo de intervalo e suas respectivas associações na reta. Figura retirada de [60].

$i < j$  formam um subgrafo completo [17, 58] e que chamaremos de **ordenação canônica** de  $V(G)$ . Observe que no grafo de intervalo unitário representado pela Figura (2.10),  $A, B, C, D, E$  é uma ordenação canônica.

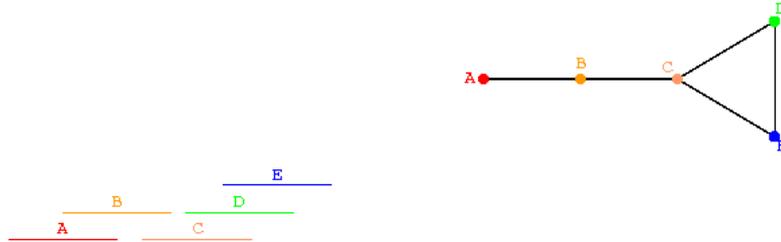


Figura 2.10: Grafo de intervalo unitário e suas associações na reta. Figura retirada de [60].

Se  $y$  é todo vértice adjacente a um vértice  $z$ , define-se a **vizinhança** (fechada) de  $z$ , denotada por  $N[z]$ , como  $\{z\} \cup \{y\}$ . Um vértice  $y \in V(G)$  será dito **dominado** por um outro vértice  $z \in V(G)$  em  $G$  quando  $N[y] \subset N[z]$ . Se  $N[y]=N[z]$ , diremos que  $y$  e  $z$  são **vértices gêmeos**. Um grafo **estrelado** (*starlike*) é definido da seguinte maneira: Pode ser obtido a partir de um grafo de partição  $G'$ , substituindo-se alguns dos vértices do conjunto independente de  $G'$  por uma clique de gêmeos gerando um novo grafo  $G$ . Tal  $G$  é dito grafo estrelado. A clique de  $G'$  é a mesma clique de  $G$  e a chamaremos de **clique central**. As cliques de gêmeos serão ditas **cliques externas**. A Figura (2.11) mostra um grafo de partição. A partir da Figura (2.11), criamos um grafo estrelado, como mostrado na Figura (2.12). Um vértice é dito **simplicial** se a sua vizinhança induz um grafo completo.

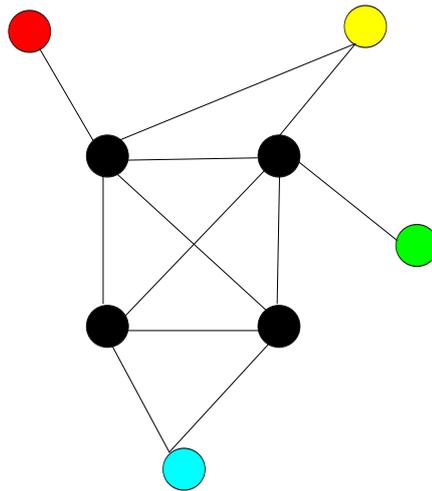


Figura 2.11: Exemplo de grafo de partição.

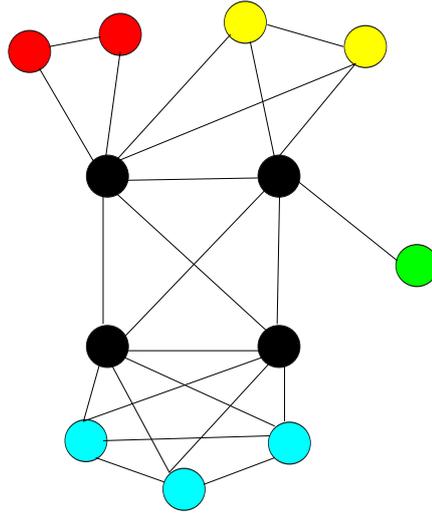


Figura 2.12: Uma transformação do grafo de partição apresentado na Figura (2.11) para um grafo estrelado.

## 2.2 Complexidade computacional

A **análise de complexidade** de um algoritmo consiste em calcular o quanto ele consome de tempo e de espaço segundo uma métrica. Esses valores são conhecidos por **complexidades algorítmicas de tempo** e **de espaço**, sendo conveniente expressá-los em função do tamanho da entrada. Como todo algoritmo discutido neste texto possui complexidade de tempo maior ou igual à sua complexidade de espaço, apresentamos apenas os cálculos das complexidades de tempo.

Seja  $A$  um algoritmo e  $\{E_1, \dots, E_m\}$  o conjunto de todas as entradas possíveis de  $A$  e  $t_i$  o número de passos efetuados por  $A$  quando a entrada for  $E_i$ . Desta forma, definimos então:

- **Complexidade de pior caso:**  $\max_{E_i \in E} \{t_i\}$ ,
- **Complexidade de caso médio:**  $\sum_{i=1}^m p_i t_i$ , onde  $p_i$  é a probabilidade de ocorrência da entrada  $E_i$ ,
- **Complexidade de melhor caso:**  $\min_{E_i \in E} \{t_i\}$ .

Uma função  $f$  é  $O(h)$  quando existir uma constante  $c > 0$  e um inteiro  $n_0$  tais que  $n > n_0 \Rightarrow f(n) \leq ch(n)$ . Uma função  $f$  é  $\Omega(h)$  quando existir uma constante  $c > 0$  e um inteiro  $n_0$  tais que  $n > n_0 \Rightarrow f(n) \geq ch(n)$ .

A **classe de problemas polinomiais**, ou **classe P de problemas**, contém todos os problemas para os quais é possível elaborar um algoritmo que é executado em tempo polinomial, ou seja, um algoritmo cuja complexidade de pior caso é um polinômio no tamanho da entrada.

O fato de que para alguns problemas bastante estudados não se encontrou um algoritmo polinomial e nem se provou que não existem algoritmos polinomiais para resolver tais problemas levou ao desenvolvimento da Teoria da NP-completude, que teve seu início com o trabalho de Cook [15] em 1971. Essa teoria permite agrupar problemas equivalentes, que são conhecidos por **NP-completos**. A existência de um algoritmo polinomial para um destes problemas implica que todos eles possuem solução polinomial, e que nenhum possui solução polinomial caso isso seja provado para algum destes problemas.

Um **problema de decisão** é composto pela especificação das entradas possíveis e de questão que admite “sim” ou “não” como resposta. A **classe NP** de problemas de decisão é aquela que contém os problemas para os quais pode-se testar um certificado para a resposta “sim” em tempo polinomial no tamanho da entrada. De forma análoga, podemos definir a classe de problemas **Co-NP** como a que contém os problemas de decisão para os quais pode-se testar um certificado para a resposta “não” em tempo polinomial.

Uma **redução** ou **transformação** de um problema  $P_1$  para um problema  $P_2$  é um procedimento com complexidade polinomial que transforma uma entrada para  $P_1$  em uma entrada para  $P_2$ . Desta forma, um algoritmo para  $P_2$  juntamente com esse procedimento torna-se um algoritmo para  $P_1$ . A operação de redução é transitiva.

Em [15] mostrou-se que todos os problemas pertencentes à classe NP são redutíveis ao problema de SATISFATIBILIDADE [15], tornando-o o primeiro problema NP-completo conhecido. Isto implica que se existe uma redução de SATISFATIBILIDADE, ou de qualquer problema NP-completo, para um problema  $P_1 \in NP$ , temos que  $P_1$  também é NP-completo. De forma análoga é feita a demonstração para problemas da classe Co-NP-completo.

Um problema  $P_1$  é dito **NP-difícil** se existe uma transformação de um problema NP-completo ou Co-NP-completo para  $P_1$ . Um problema NP-completo ou Co-NP-completo terá solução polinomial se e somente se  $P = NP$ . Se um problema NP-difícil tem solução polinomial, então  $P = NP$ . Para uma ampla discussão sobre NP-completude indica-se [34].

## 2.3 Alguns conceitos de convexidade

Nesta seção vamos apresentar alguns conceitos da convexidade em grafos.

### 2.3.1 Convexidades em grafos

Considere um grafo  $G$ . Um conjunto  $C$  de subconjuntos de  $V(G)$  é uma **convexidade** sobre  $V(G)$  se

- $\emptyset, V(G) \in C$  e
- $C$  é fechado sob interseções.

Os elementos de  $C$  são chamados **conjuntos convexos**. O **fecho convexo** de algum conjunto  $R$ , em relação à alguma convexidade  $C$  em questão, é o menor conjunto convexo  $H[R] \in C$  que contém  $R$ . Em um grafo  $G$  se um vértice  $x \in V(G)$  é tal que  $x \notin R$  mas  $x \in H[R]$  então dizemos que  $x$  é um vértice **induzido** por  $H[R]$ .

Diversas convexidades são definidas por um conjunto  $P$  de caminhos em grafos. Neste caso, um subconjunto  $C \in V(G)$  é convexo quando  $C$  contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de  $P$  cujos vértices extremos também pertencem a  $C$ . Se  $P$  for o conjunto de todos os caminhos mínimos em  $G$ , então  $C$  é uma **convexidade geodética**. Se  $P$  é a coleção de todos os caminhos induzidos de  $G$ , então  $C$  é uma **convexidade monofônica** [30]. Uma **corda** de um caminho  $P$  é uma aresta entre dois vértices não consecutivos em  $P$ . Cordas de um caminho dando origem a triângulos, formados com duas arestas do caminho, são denominadas **cordas curtas** de um caminho. Um **caminho triangular** é um caminho cujas cordas, caso existam, são todas curtas. A **convexidade de caminho de triângulo** é definida considerando  $P$  o conjunto de todos os caminhos de triângulos de um grafo [8]. A **convexidade  $P_3$**  é aquela em que  $P$  é a coleção de todos dos caminhos de tamanho 2. Um **k-torneio multipartido** ou **torneio multipartido**,  $k \geq 2$  é um grafo orientado obtido pela orientação de cada aresta de um grafo  $k$ -partido completo. A **convexidade  $P_3$  para torneios multipartidos** é aquela em que  $P$  é o conjunto de todos os caminhos de tamanho 2 no torneio multipartido. A Tabela (2.1) nos dá uma resumo das convexidades descritas. Observe que os exemplos (2.13) e (2.14) mostram um exemplo de indução de vértices considerando a convexidade geodética.

A convexidade obtida considerando  $P$  como o conjunto de todos os caminhos com três vértices é a **convexidade  $P_3$** . A convexidade  $P_3$  para grafos não direcionados foi considerada em [3].

Observe um exemplo de cálculo do  $H[R]$  relativo à convexidade  $P_3$  nas Figuras (2.15), (2.16), (2.17) e (2.18).

### 2.3.2 Algumas definições relativas a este trabalho

O teorema de Carathéodory afirma que todo ponto  $u$  no fecho convexo de um conjunto  $S \subset R^d$  encontra-se no fecho convexo de um subconjunto  $F$  de  $S$  de ordem no máximo  $d + 1$ . Em [3] estudou-se o número de Carathéodory em grafos, considerando a convexidade  $P_3$ . O **número de Carathéodory** de  $G$  é o menor inteiro  $c$  tal que, para todo conjunto  $S$  e todo

Convexidade em grafos	Citação	Definição
Geodética	[7]	$P$ é o conjunto de todos os menores caminhos
$P_3$	[23]	$P$ é o conjunto de todos os caminhos de tamanho 2
Monofônica	[30]	$P$ é coleção de todos os caminhos induzidos de $G$
Caminho triangular	[8]	$P$ é a coleção cujos caminhos são formados por cordas curtas
$P_3$ para um torneio multipartido $\tau$	[48]	$P$ é o conjunto de todos os caminhos de tamanho 2 de $\tau$

Tabela 2.1: Resumo das diversas convexidades trabalhadas por diferentes autores.

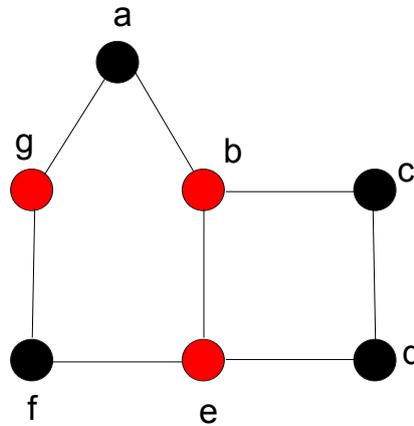


Figura 2.13: Sejam  $R$  o conjunto de vértices vermelhos.

vertice  $u \in H[S]$ , existe um conjunto  $F \subset S$  com  $|F| \leq c$  e  $u \in H[F]$ . Um conjunto  $S$  de vértices de um grafo é um **conjunto de Carathéodory** de uma convexidade  $C$  se o conjunto  $H[S] - \{\bigcup_{u \in S} H[S - \{u\}]\}$  é não vazio. Esta definição permite uma alternativa diferente para o cálculo do número de Carathéodory de  $C$  como sendo a cardinalidade máxima entre todos os conjuntos de Carathéodory de relativos à convexidade  $C$ .

Considere  $C$  a convexidade  $P_3$  e observe o grafo da Figura (2.19). Tome  $S = \{e, b, c, d\}$  um subconjunto de  $V(G)$  e observe que  $H[S] = V(G)$ . Considere o vértice  $g$ , e veja que  $g \in H[S]$  mas  $g \notin S$ . Se tomarmos  $F \subset S$  sempre de tamanho 2 o vértice  $g$  nunca pertencerá ao fecho convexo de  $F$ . Mas, se  $F = \{b, c, e\}$  então  $g \in H[F]$ . Logo,  $c(G) \geq 3$ . Para determinar o número de Carathéodory de  $G$  é necessário verificar todo subconjunto de  $V(G)$ . Ainda, considere o grafo da Figura (2.19) e a convexidade  $P_3$ . Seja o conjunto  $S = \{e, b, c, d\}$  de vértices de  $V(G)$ . Observe que  $h \notin H[S - \{v\}]$ , onde  $v \in S$ . Logo,  $S$  é um conjunto de Carathéodory. E, em particular, este é o maior conjunto de Carathéodory de  $G$ . Portanto  $c(G) = 4$ .

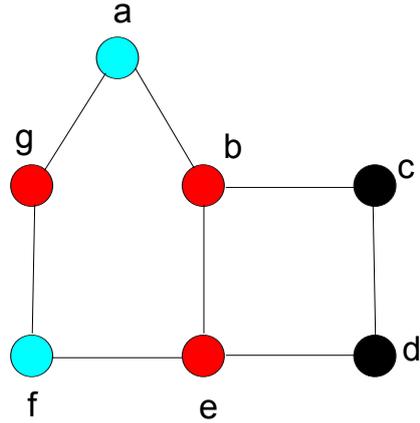


Figura 2.14: Observe que  $a$  e  $f$  são induzidos por  $H[g, b]$  e  $H[g, e]$ , respectivamente. Logo  $a, f \in (H[R] - R)$ , que estão representados pelos vértices azuis.

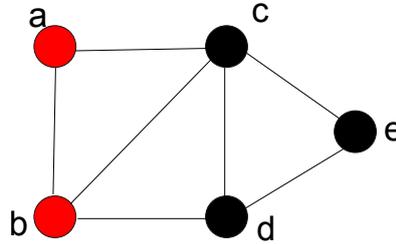


Figura 2.15:  $a, b \in R \subset H[R]$ .

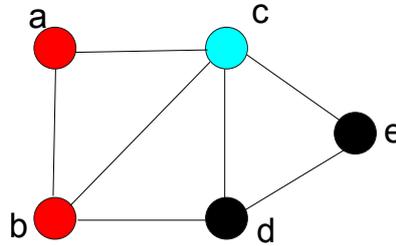


Figura 2.16: Temos que  $a$  e  $b$  induzem  $c$  por  $H[R]$ . Logo  $c \in (H[R] - R)$ .

Considere o grafo  $G$  e  $C$  uma convexidade sobre  $V(G)$ . Usaremos a notação  $R = (R_1, R_2)$  para a partição  $(R_1, R_2)$  de um conjunto  $R$  dos vértices de um grafo, podendo também representarmos tal partição, simplesmente por  $R = R_1 \cup R_2$ . Uma **partição de Radon** do conjunto  $R \subset V(G)$ , é uma partição  $R = (R_1, R_2)$  de tal que  $H[R_1] \cap H[R_2] \neq \emptyset$ . O **número de Radon**  $r(G)$  de  $C$  é o menor inteiro  $k$  tal que para todo  $R \subset V(G)$ , com  $|R| \geq k$ , existe uma partição de Radon. Se  $x \in (H[R_1] \cap H[R_2])$ , dizemos que  $x$  é **testemunha de Radon** ou **vértice de Radon** da partição  $R = (R_1, R_2)$ . Por exemplo, para o grafo  $G$  da Figura (2.20), se considerarmos a convexidade geodética, o conjunto  $S = \{a, b, d\}$  não tem partição de Radon para qualquer partição tomada. Logo  $r(G) > 3$ . Afirma-se que neste exemplo,  $r(G) = 4$ . De fato, tomando um

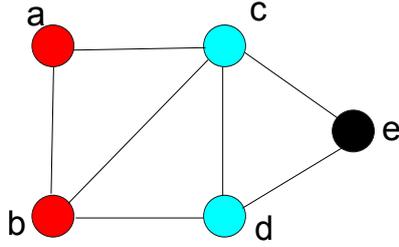


Figura 2.17: Analogamente,  $d \in H[R] - R$ , tendo  $d$  sido induzido por  $b, c \in H[R]$ .

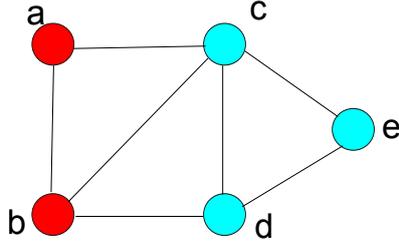


Figura 2.18: E finalmente  $e \in H[R] - R$ .

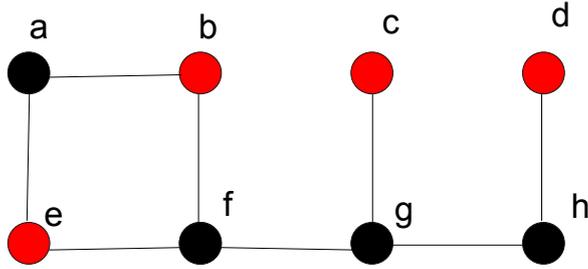


Figura 2.19: O número de Carathéodory deste grafo é 4.

$R \subset V(G)$ , com  $|R| = 4$ ,  $c \in R$  ou  $c \notin R$ . Se  $c \in R$ , pelo princípio das casas dos pombos, ou  $\{a, b\} \subset R$  ou  $\{d, e\} \subset R$ . No primeiro caso, se  $R = (R_1, R_2)$  com  $R_1 = \{a, b\}$  e  $c \in R_2$ , segue que  $c \in H[R_1] \cap H[R_2]$  (análogo se  $\{d, e\} \subset R$ ). Se  $c \notin R$ , os outros quatro vértices de  $V(G)$  pertencem a  $R$ , e assim tomando a partição  $R = (R_3, R_4)$  com  $R_3 = \{a, b\}$  e  $R_4 = \{d, e\}$ ,  $c$  é testemunha de Radon da partição  $R = (R_3, R_4)$ .

Um conjunto  $R$  se denomina **conjunto anti-Radon** ou simplesmente **anti-Radon** se  $R$  não possui partição de Radon. Podemos dizer que o número de Radon de  $G$  é a cardinalidade de um conjunto anti-Radon máximo adicionado de uma unidade, isto é,

$$r(G) = \max\{|R| \text{ tal que } R \text{ é um anti-Radon de } G\} + 1.$$

Observe que, relativo à convexidade geodética, o conjunto  $R$  composto pelos quatro vértices vermelhos na figura (2.21) é anti-Radon, pois como existe uma aresta para cada par de vértices vermelhos, independente de como particionarmos  $R = (R_1, R_2)$ ,  $R_1$  e  $R_2$  serão conjuntos convexos

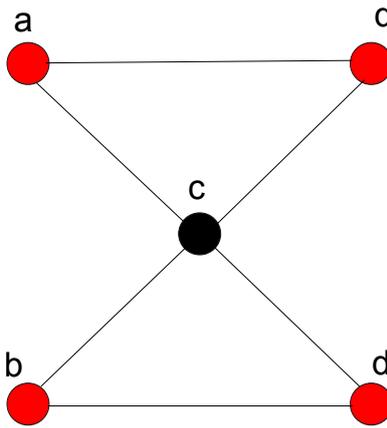


Figura 2.20: O número de Radon deste grafo é 4.

e  $H[R_1] = R_1$ , assim como  $H[R_2] = R_2$  e  $H[R_1] \cap H[R_2] = R_1 \cap R_2 = \emptyset$ .

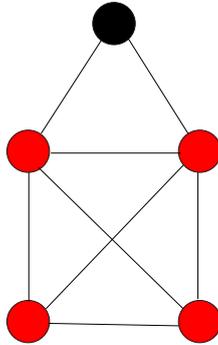


Figura 2.21: Observe que o conjunto de vértices vermelhos é um anti-Radon pois estes pertencem a um conjunto convexo.

Para a convexidade geodética, em [16] foram classificados todos os grafos com  $n - 2 \leq r(G) \leq n + 1$ , para um grafo  $G$  com  $n$  vértices. Mais recentemente, no artigo [29] estudou-se sobre o número de Radon para grades  $d$ -dimensionais, que são produtos cartesianos de  $d$  caminhos. A Seção (3.3) foi apresentada como um trabalho à parte em [27], e neste se desenvolve um algoritmo polinomial para encontrar o número de Radon geodético para grafos de intervalo unitário. Já para a convexidade  $P_3$ , em [23] foi dado um limite superior para o número de Radon considerando a convexidade  $P_3$ . Também relativo a esta convexidade, em [25] foi construído um algoritmo polinomial para o cálculo do número de Radon para árvores. Em [24] foi caracterizado via subgrafos proibidos quando um determinado subconjunto  $R$  de um grafo split (partição) possui ou não partição de Radon. Tal tese motivou a publicação dos artigos [23, 29, 28]. Para as convexidades da Tabela (2.2), o número de Radon já está bem definido.

O **número de Helly**  $h(C)$  de uma convexidade  $C$  é o menor inteiro  $k$  para o qual toda família de conjuntos convexos  $F$  de  $C$  satisfaz  $\bigcap_{S \in F} S \neq \emptyset$  se todas as subfamílias  $F'$  de  $F$  de

Convexidade em grafos	Referência	$r(G)$
Monofônica	[30]	$\omega+1$ ou $\leq 4$
Caminho triangular	[8]	$\leq 4$
$p_3$ para torneios multipartidos	[48]	$\leq \lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor$

Tabela 2.2: Número de Radon relativo a algumas convexidades em grafos.

tamanho  $k$  satisfazem  $\bigcap_{S' \in F'} S' \neq \emptyset$ . O número de Helly foi bastante estudado na Referência [18]. De [45] temos que  $c(G)h(G) + 1 \geq r(G) \geq h(G) + 1$ .

Embora estes três parâmetros de convexidade estejam relacionados, o foco deste trabalho está sobre o número de Radon.

Um **conjunto envoltória** (*hull set*) é um conjunto  $R \subset V(G)$ , tal que  $H[R]=V(G)$ . A cardinalidade de um conjunto envoltória mínimo é denominado **número de envoltória** (*hull number*). Observe que no grafo da Figura (2.15), se consideramos a convexidade  $P_3$ , o número de envoltória é igual a 2 e  $\{a, b\}$  é um conjunto envoltória.

Neste trabalho mostraremos a NP-completude para os problemas CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO e CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$ , que estão descritos abaixo.

PROBLEMA: CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO

ENTRADA: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

QUESTÃO:  $G$  contém um conjunto anti-Radon de tamanho  $\geq k$ ?

PROBLEMA: CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$

ENTRADA: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

QUESTÃO:  $G$  contém um conjunto anti-Radon de tamanho  $\geq k$ ?

Um limite inferior imediato para o número de Radon do grafo  $G$ , quanto a convexidade geodética, é  $\omega(G)+1$ , onde neste trabalho denotamos por  $\omega(G)$  a cardinalidade da clique máxima do grafo  $G$ , pois uma clique é um conjunto convexo.

Em todos os momentos deste trabalho nos limitamos a encontrar o número de Radon apenas de grafos conexos. Isto se deve ao fato de que se temos um grafo desconexo  $G$  com componentes conexas  $G_1, G_2, \dots, G_i$ , então para encontrarmos seu número de Radon basta tomarmos

$$r(G) = \left( \sum_{k=1}^i \max\{|R_k| \mid R_k \text{ é um anti-Radon de } G_k\} \right) + 1,$$

já que um anti-Radon máximo deste grafo desconexo é formado por um anti-Radon máximo de  $G_1$ , um anti-Radon máximo de  $G_2$ ,  $\dots$ , um anti-Radon máximo de  $G_i$ .

# Capítulo 3

## Convexidade geodética

O presente capítulo tem por objetivo apresentar os primeiros resultados deste trabalho. Mostramos a NP-completude do caso geral, calculamos o número de Radon de caminhos, ciclos, grafos bipartidos completos, árvores, cografos, grafos bloco, grafos de partição, grafos estrelados, grafos co-bipartidos e apresentamos um algoritmo polinomial para cálculo do número de Radon de grafos de intervalo unitário.

Segue a Tabela (3.1), com os resultados relativos a esta complexidade.

Classe de grafo	Convexidade geodética
Caminhos	3
Ciclos	{3, 4}
Bipartidos completos	{3, 4}
Árvores	4 (que não é caminho)
Cografos ( $\omega(G) \geq 3$ )	$\omega(G) + 1$
Grafos bloco ( $\omega(G) \geq 3$ )	$\omega(G) + 1$
Grafos de partição ( $\omega(G) \geq 3$ )	$\{\omega(G) + 1, \omega(G) + 2\}$
Grafos estrelados ( $\omega(G) \geq 3$ )	$\{\omega(G) + 1, \omega(G) + 2\}$
Grafos co-bipartidos	$\{\omega(G) + 1, \omega(G) + 2\}$
Grafos de intervalo unitário	algoritmo - $O(n^3)$
Grafos Gerais	NP-completo

Tabela 3.1: Resumo dos resultados do Capítulo 3.

De [6], temos que  $r(K_n) = n + 1$ .

## 3.1 NP-completude do caso geral

PROBLEMA: CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO

ENTRADA: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

QUESTÃO:  $G$  contém um conjunto anti-Radon de tamanho  $\geq k$ ?

Antes de apresentar o teorema que mostra a NP-completude de CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO, vamos apresentar o problema NP-completo o qual usaremos na redução. Para a redução, empregamos o problema CLIQUE-MÁXIMA, que é conhecido ser NP-completo [44] e o descrevemos abaixo.

PROBLEMA: CLIQUE-MÁXIMA

ENTRADA: Um grafo  $G'$  e um inteiro  $k'$ .

QUESTÃO:  $G'$  contém uma clique de tamanho maior ou igual a  $k'$ ?

Agora podemos apresentar o teorema desta seção.

**Teorema 3.1.1.** *Para um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , é NP-completo decidir se  $G$  admite um conjunto anti-Radon de tamanho  $\geq k$ .*

*Demonstração.* Como o fecho convexo de um subconjunto de vértices pode ser computado em tempo polinomial para qualquer grafo, o problema claramente pertence a  $NP$ . Como dito anteriormente, usaremos o problema CLIQUE-MÁXIMA. Dado um  $G'$  e um  $k'$ , vamos construir a seguinte instância de CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO, formado por um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ : Os vértices e arestas de  $G'$  são vértices e arestas de  $G$ . Além disso, criamos dois vértices adicionais  $w_1, w_2 \in V(G)$  tal que  $w_1$  e  $w_2$  são adjacentes a todos vértices de  $G$  com exceção de um ao outro ( $w_1$  não é adjacente a  $w_2$ ). Finalmente tome  $k = k' + 1$ . A construção da entrada de CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO está completa. Sem perda de generalidade, tomamos  $k' \geq 3$ . Provaremos que  $G'$  possui uma clique de tamanho  $\geq k'$  se e somente se  $G$  possui um conjunto anti-Radon de tamanho  $\geq k$ . Seja  $R \subset V(G)$  uma clique de  $G'$ , onde  $|R| \geq k'$ . Segue que  $R$  e  $R \cup \{w_1\}$  são cliques e então são conjuntos geodeticamente convexos de  $G$ . Além disso, qualquer subconjunto de  $R \cup \{w_1\}$  é convexo. Esta última informação garante que qualquer bipartição  $R_1 \cup R_2 = R \cup \{w_1\}$  satisfaz  $H[R_1] \cap H[R_2] = \emptyset$ . Consequentemente,  $R \cup \{w_1\}$  é um conjunto anti-Radon de  $G$  tendo tamanho  $\geq k$ .

Reciprocamente, seja  $R$  um conjunto anti-Radon de  $G$  com cardinalidade  $\geq k$ . Primeiramente, mostramos que  $R$  é uma clique. Suponhamos o contrário, ou seja,  $R$  possui uma par de vértices não adjacentes  $u_1, u_2 \in V(G)$ . Se  $u_1 = w_1$  e  $u_2 = w_2$  então  $k \geq 3$  implica que  $R$  contem algum vértice  $v \neq w_1, w_2$ . Nesta situação, e observando que  $\{w_1, w_2\}$  é um conjunto envoltória de  $G$ , podemos formar uma partição de Radon admitindo  $\{w_1, w_2\} \subset R_1$  e  $v \in R_2$ . A possibilidade restante é que  $u_1, u_2 = v_1, v_2 \in V(G)$ , onde  $v_1, v_2 \neq w_1, w_2$ . A construção implica que  $w_1, w_2 \in H[v_1, v_2]$ , implicando que  $\{v_1, v_2\}$  é um conjunto envoltória de  $G$ . Como  $k \geq 3$ , existe  $v_3 \neq v_1, v_2$ , satisfazendo  $v_3 \in R$ . Então, atribuindo  $v_1, v_2 \in R_1$  e  $v_3 \in R_2$  define uma

partição de Radon  $R_1 \cup R_2 = R$ , o que é uma contradição. Assim sendo,  $R$  é uma clique de  $G$ . Se exatamente um dos vértices  $w_1$  ou  $w_2$  pertencem a  $R$ , podemos removê-lo e obter uma clique de tamanho  $\geq k'$ . De outra forma, quando  $w_1, w_2 \notin R$ , então o próprio conjunto  $R$  é a clique procurada.

■

As Figuras (3.1) e (3.2) exemplificam a transformação do problema CLIQUE-MÁXIMA para o problema CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO.

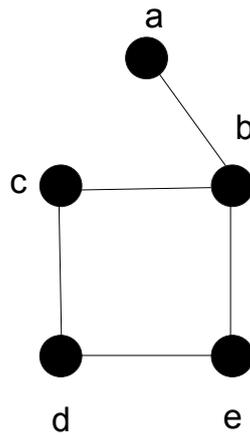


Figura 3.1: É dado um grafo  $G'$ .

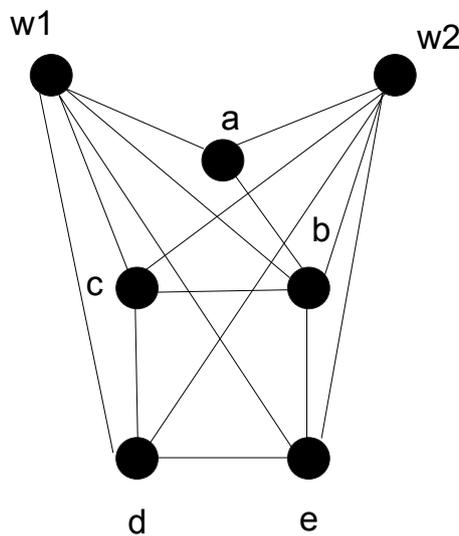


Figura 3.2: A partir do grafo  $G'$  da Figura (3.1) faz-se a transformação descrita no texto, construindo o grafo  $G$  representado na Figura.

## 3.2 Cálculo do número de Radon de algumas classes de grafos

Nesta segunda parte, calcularemos o número de Radon de algumas classes particulares de grafos, considerando a convexidade geodética.

### 3.2.1 Número de Radon de caminhos

Para um caminho  $P_n$  é algo minimamente trivial encontrar seu número de Radon. Apresentamos o resultado através do Teorema (3.2.1).

**Teorema 3.2.1.**  $r(P_1) = 2$ . Se  $n \geq 2$ , então  $r(P_n) = 3$ .

*Demonstração.* Como  $P_1$  é um grafo completo com um vértice, segue que  $r(P_1) = r(K_1) = 1 + 1 = 2$ . Observe que  $r(P_n) > 2$ , para  $n \geq 2$ , pois cada partição terá apenas um vértice, de forma que não haverá partição de Radon. Tomando então três vértices  $v_i, v_j, v_k$ , com  $v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ , com  $1 \leq i < j < k \leq n$ , pondo  $v_i, v_k \in R_1$  e  $v_j \in R_2$ , teremos que  $v_j$  será testemunha de Radon, já que  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_{k-1}, v_k\} = H[R_1]$  e  $v_j \in H[R_2]$ . ■

Na figura (3.3), se  $a, c \in R_1$  e  $b \in R_2$ , temos que  $R = R_1 \cup R_2$  é uma partição de Radon, sendo  $b$  testemunha de Radon desta partição..

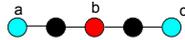


Figura 3.3: O número de Radon de  $P_n$  é 3, onde os  $R = R_1 \cup R_2$  é partição de Radon, sendo  $R_1 = \{a, c\}$  e  $R_2 = \{b\}$ .

### 3.2.2 Número de Radon de grafos bipartidos completos

A classe dos grafos bipartidos completos também é uma classe com uma estrutura bem simples e seu número de Radon pode ser encontrado com relativa facilidade. Exporemos o resultado através do Teorema (3.2.2).

**Teorema 3.2.2.**

$$r(K_{p,q}) = \begin{cases} 4, & p = 1, q \geq 3. \\ 3, & p, q \geq 2, \end{cases}$$

*Demonstração.* Para  $G = K_{1,q}$ , temos  $V(K_{1,q}) = \{e\} \cup V(X_1)$ , onde  $e$  é o vértice da partição unitária e  $X_1$  o conjunto independente máximo de  $G$ . Observe que se  $R = \{a, b, c\}$ , ou seja,  $|R| = 3$ , com  $a, b, c \in V(X_1)$ , temos que  $R = R_1 \cup R_2$  é anti-Radon, sendo  $|R_1| = 2$  e  $|R_2| = 1$ . Assim, sem perda de generalidade se  $R_1 = \{a, b\}$  e  $R_2 = \{c\}$ , temos que  $H[R_1] = \{a, b, e\}$  e  $H[R_2] = R_2 = \{c\}$ , e desta forma,  $H[R_1] \cap H[R_2] = \emptyset$ , implicando que  $r(K_{1,q}) > 3$ . Precisamos de exatamente quatro vértices para termos partição de Radon, pois se  $e \in R$ , basta que  $|R| = 3$  e temos partição de Radon; e se  $e \notin R$ , tomando  $R = \{a, b, c, d\}$ , basta tomar  $R_3 = \{a, b\}$  e  $R_4 = \{c, d\}$  e teremos que  $e \in H[R_3] \cap H[R_4]$ , implicando que para qualquer conjunto de quatro vértices de  $K_{1,q}$ , existe partição de Radon com a partição  $R = R_3 \cup R_4$ .

Para  $K_{p,q}$ , com  $p, q \geq 2$ , tomando  $R = \{a, b, c\}$ , pelo princípio das casas dos pombos, existem dois vértices que pertencem à mesma partição de  $K_{p,q}$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que  $a$  e  $b$  pertencem à mesma partição de  $K_{p,q}$ . Pondo  $R_1 = \{a, b\}$  e  $R_2 = \{c\}$ , temos que  $R_1$  é um conjunto envoltória e, desta forma,  $c \in H[R_1]$ , ou seja,  $c \in H[R_1] \cap H[R_2]$ .

■

Observe que no grafo apresentado na Figura (3.4) não existe subconjunto de cardinalidade 2 possuindo partição de Radon, mas o mesmo grafo possui a partição de Radon  $R_1 = \{a, b\}$  e  $R_2 = \{c\}$ , como exemplifica a Figura (3.5).

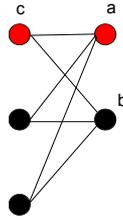


Figura 3.4:  $r(K_{p,q}) > 2$ , com  $p, q \geq 2$ .

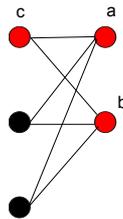


Figura 3.5:  $r(K_{p,q}) = 3$ , com  $p, q \geq 2$ , já que dois vértices em uma mesma partição forma um conjunto envoltória.

Já no caso em que  $p = 1$ , existe  $R$  anti-Radon com  $|R| = 3$ , como mostra a Figura (3.6). Já com  $|R| = 4$  isto não é possível, e o vértice da partição unitária será testemunha de Radon, como mostra a Figura (3.7).

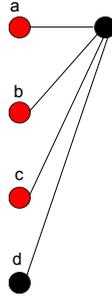


Figura 3.6:  $r(K_{1,q}) > 3$ .

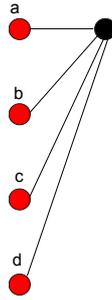


Figura 3.7:  $r(K_{1,q}) = 4$ .

Então dado um grafo bipartido completo  $G$ , que não é um caminho, o algoritmo irá verificar se existe um vértice  $v$  de  $G$  com grau  $n - 1$ . Se existir o número de Radon será 4, caso contrário será 3.

### 3.2.3 Número de Radon de ciclos

A estratégia para o cálculo do número de Radon de um ciclo  $C_n$  é similar à apresentada para grafos bipartidos completos. Expomos o resultado através do Teorema (3.2.3).

**Teorema 3.2.3.**

$$r(C_n) = \begin{cases} 4, & n \geq 3, n \neq 4. \\ 3, & n = 4, \end{cases}$$

*Demonstração.* Temos que o número de Radon de  $C_4$ , pois conforme a Figura (3.8) mostra,  $r(C_4) = 3$  pois se  $a, c \in R_1$  e  $b \in R_2$  temos que  $b \in H[R_1] = V(C_4)$  e, desta forma, temos partição de Radon com a partição  $R = R_1 \cup R_2$ , sendo  $b$  testemunha de Radon desta partição.

No caso de um  $C_3$ , trata-se de um grafo completo e  $r(C_3) = r(K_3) = 3 + 1 = 4$ . Vamos mostrar agora que  $r(C_n) = 4$ , para  $n \geq 5$ . O problema será dividido em dois casos:

Primeiro Caso: Se  $n$  é par, este é da forma  $n = 2k$ , e o ciclo possui conjunto de vértices

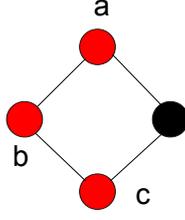


Figura 3.8:  $r(C_4) = 3$ .

$V(C_{2k}) = \{v_1 v_2 \dots v_{2k}\}$ , com  $k$  inteiro. Para  $1 \leq i \leq n - 1$ , vamos construir  $C_{2k}$  da seguinte forma: a menor distância entre  $v_i$  e  $v_{i+1}$  é obtida percorrendo-se a aresta  $(v_i, v_{i+1})$  em sentido anti-horário. Vamos usar também o artifício de que  $v_j \equiv v_{2k+j}$ . Assim podemos mostrar que para  $n = 2k \geq 8$ , o conjunto  $S = \{v_1, v_{k-1}, v_{k+2}\}$  é anti-Radon. De fato, observe as Tabelas (3.2) e (3.3).

Comprimento entre os vértices	Pelo sentido anti-horário do ciclo
$v_1$ e $v_{k-1}$	$(k - 1) - 1 = k - 2$
$v_1$ e $v_{k+2}$	$(k + 2) - 1 = k + 1$
$v_{k-1}$ e $v_{k+2}$	$(k + 2) - (k - 1) = 3$

Tabela 3.2: Cálculo dos comprimentos do caminho entre dois vértices pelo sentido anti-horário do ciclo.

Comprimento entre os vértices	Pelo sentido horário do ciclo
$v_1$ e $v_{k-1}$	$2k + 1 - (k - 1) = k + 2 > k - 2$
$v_1$ e $v_{k+2}$	$(2k + 1) - (k - 2) = k - 1 < k + 1$
$v_{k-1}$ e $v_{k+2}$	$(2k + k - 1) - (k - 2) = 2k - 3$

Tabela 3.3: Cálculo dos comprimentos do caminho entre dois vértices pelo sentido horário do ciclo.

Se percorre-se  $C_{2k}$  em sentido anti-horário a partir de  $v_1$  alcança-se os vértices do conjunto  $S$  na seguinte ordem:

Primeiro vértice alcançado -  $v_1$

Segundo vértice alcançado -  $v_{k-1}$

Terceiro vértice alcançado -  $v_{k+2}$

Analisando a Tabela (3.3), o menor caminho de  $v_1$  para  $v_{k-1}$  é o de sentido anti-horário do ciclo, de forma que não passará por  $v_{k+2}$ , e a partição  $R = R_1 \cup R_2$ , com  $R_1 = \{v_1, v_{k-1}\}$  e  $R_2 = \{v_{k+2}\}$  não é partição de Radon. Analogamente, o menor caminho de  $v_1$  e  $v_{k+2}$  é o percorrido no sentido horário do ciclo, ou seja, a partição  $R = R_3 \cup R_4$ ,  $R_3 = \{v_1, v_{k+2}\}$  e  $R_4 = \{v_{k-1}\}$  não é partição de Radon.

Pela última linha da Tabela (3.3), observa-se que existirá partição de Radon se e somente se o menor caminho de  $v_{k-1}$  até  $v_{k+2}$  for o de sentido horário do ciclo (e  $v_1$  será testemunha de Radon da partição  $R = R_5 \cup R_6$ ,  $R_5 = \{v_{k-1}, v_{k+2}\}$  e  $R_6 = \{v_1\}$ ). Isto acontecerá quando

$$2k - 3 \leq 3 \iff 2k \leq 6 \iff n \leq 6.$$

Ou seja, a propriedade é válida para  $C_4$  e  $C_6$  apenas. Para  $C_4$  já sabemos o número de Radon e para  $C_6$ , observe que  $\{v_1, v_3, v_5\}$  é um anti-Radon, como mostra a Figura (3.10). Então para todo  $n$  par com  $n \geq 6$ ,  $r(C_n) > 3$ . Para todos os outros  $C_{2k}$ , o conjunto  $S$  não possui partição de Radon, tal como exemplificado na Figura (3.9), com  $a = v_1$ ,  $b = v_{k-1}$  e  $c = v_{k+2}$ .

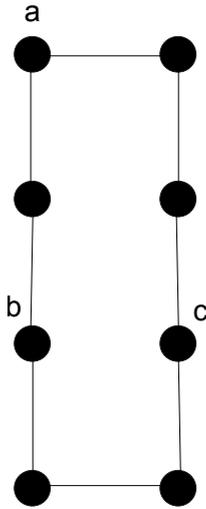


Figura 3.9: Observe que o conjunto  $\{a, b, c\}$  é um conjunto anti-Radon.

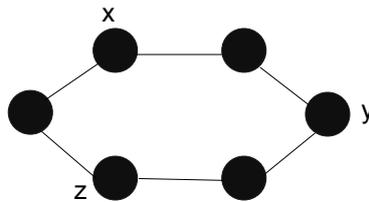


Figura 3.10:  $r(C_6) > 3$ , pois  $x = v_1$ ,  $z = v_3$  e  $y = v_5$  é um anti-Radon.

Segundo Caso: Se o ciclo é  $C_n = \{v_1 v_2 \dots v_n\}$ , com  $n$  ímpar, analogamente ao caso anterior, basta observar que o conjunto  $\{v_1, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, v_n\}$  não possui partição de Radon como exemplifica a Figura (3.11). Logo  $r(C_n) > 3$ , para  $n$  ímpar.

Afirmamos que  $r(C_n) = 4$ , para  $n \geq 5$ . De fato, suponha que  $R = \{v_1, v_i, v_j, v_k\}$  (podemos denominar como  $v_1$  o primeiro vértice escolhido para entrar em  $R$  e ordenar os índices do ciclo a partir de  $v_1$ ), com  $1 \leq i < j < k \leq n$ . Pondo  $R_1 = \{v_1, v_j\}$  e  $R_2 = \{v_i, v_k\}$ . Segue que  $H[v_1, v_j]$  conterà  $v_i$  ou  $v_k$  e  $r(G) = 4$ .

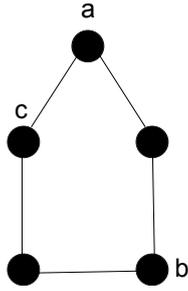


Figura 3.11: Observe que  $R = \{a, b, c\}$  não é anti-Radon.

Temos então que:

$$r(C_n) = \begin{cases} 4, & n \geq 3, n \neq 4. \\ 3, & n = 4. \end{cases}$$

■

### 3.2.4 Número de Radon de árvores

O cálculo do número de Radon de árvores difere um pouco dos apresentados anteriormente. De toda forma, é de simples computação e terá valor 3 se a árvore tem apenas duas folhas e 4 em caso contrário.

**Teorema 3.2.4.** *Se  $T$  é uma árvore, tal que  $|V(T)| \geq 3$  então*

$$r(T) = \begin{cases} 4, & T \neq P_n. \\ 3, & T = P_n \end{cases}$$

*Demonstração.* Tomemos uma árvore qualquer  $T$  e  $R \subset V(T)$ . Vamos mostrar que  $r(T) \in \{3, 4\}$ . Como  $P_n$  é uma árvore, segue que  $r(T)$  realmente pode ser 3. Agora tomemos uma árvore  $T$  que não é um caminho. Seu número de Radon não é 3, como mostra a figura (3.12), ou seja,  $r(T) > 3$ .

Os únicos vértices que nos interessam são os que estão em algum menor caminho entre dois vértices. Como em uma árvore, um caminho mínimo entre dois vértices é único, podemos formar a árvore  $T'$  onde  $T' = T - \{u\}$ , com  $u \notin H[R]$ , e ter a propriedade  $r(T') = r(T)$ , tal como mostra a Figura (3.13). Fazendo isto, a árvore  $T'$  terá, no máximo, 4 folhas, sendo cada folha um vértice de  $R$ . Por exemplo, na Figura (3.13) se os vértices azuis pertencem a  $R$ , observe que existe partição de Radon para o grafo à esquerda se e somente se, existe partição de Radon para o grafo à direita, ou seja, o grafo resultante da eliminação de vértices que não estão em menores caminhos entre dois vértices de  $R$ .

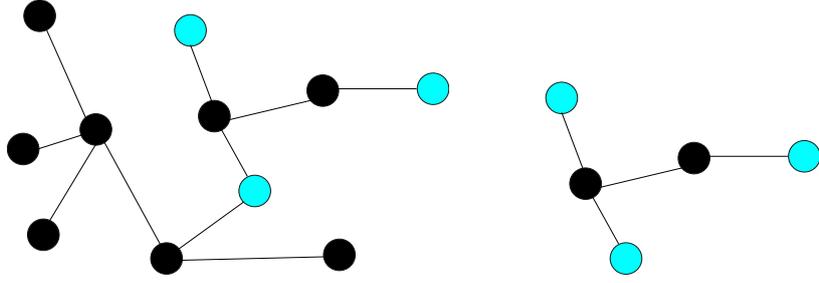


Figura 3.12: O conjunto formado pelos três vértices azuis é anti-Radon.

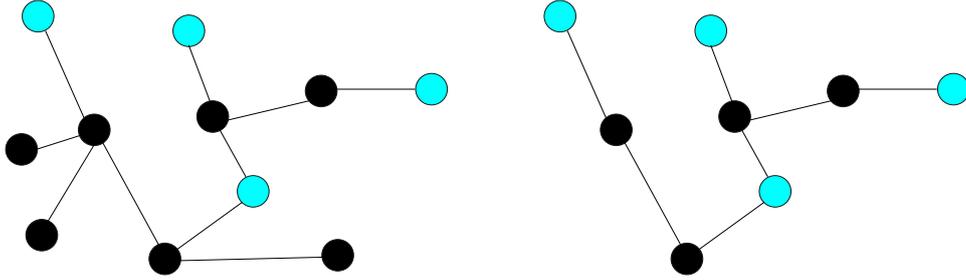


Figura 3.13: O número de Radon destas duas árvores  $T$  e  $T'$  é o mesmo, pois se  $T' = T - \{u\}$ , com  $u \notin H[R]$ ,  $r(T) = r(T') = 4$ .

Seja então  $R = \{a, b, c, d\}$  e  $T$  uma árvore. Já analisamos o caso de uma árvore com duas folhas (caminho). Se  $T'$  tem 3 folhas, o vértice de  $R$  que não é folha, digamos  $d$  deverá pertencer a algum caminho entre duas folhas, digamos  $a, b \in R$ . Então basta tomar  $a, b \in R_1$  e  $c, d \in R_2$  que teremos uma partição de Radon  $R = R_1 \cup R_2$ , sendo  $d$  testemunha de Radon desta partição. Se  $T'$  tem 4 folhas, digamos que  $R_1 = \{a, b\}$  e  $R_2 = \{c, d\}$ . Se conseguirmos uma partição de Radon com tais  $R_1$  e  $R_2$  o problema acabou. Senão, isso significa que  $H[R_1]$  gerou um caminho disjunto em vértices de  $H[R_2]$ . Tomemos então  $R_3 = \{a, c\}$  e  $R_4 = \{b, d\}$ . Vamos supor por absurdo que  $R = R_3 \cup R_4$  também não é partição de Radon. Vamos calcular  $H[R_3]$  de  $a$  para  $c$  e seja  $e$  o primeiro vértice de  $H[R_2] \cap H[R_3]$  que se tornou elemento de  $H[R_3]$ . Analogamente, calculando o  $H[R_4]$  de  $d$  para  $b$ , seja  $f$  o primeiro vértice de  $H[R_1] \cap H[R_4]$  que se tornou elemento de  $H[R_4]$ . Observe que

$$a \rightarrow (H[R_3] - H[R_2]) \rightarrow e \rightarrow H[e, d] \rightarrow d \rightarrow (H[R_4] - H[R_1]) \rightarrow f \rightarrow H[f, a] \rightarrow a$$

é um ciclo, o que é absurdo, pois  $T$  é uma árvore.

Isto completa a prova. ■

### 3.2.5 Número de Radon de algumas classes de grafos perfeitos

Existem determinadas classes para as quais o problema se torna mais complexo em termos de tempo. Existe um algoritmo polinomial descrito em [37] para encontrar a clique máxima de um grafo perfeito. Cografos, grafos bloco, grafos de partição, grafos estrelados, grafos de intervalo unitário e grafos co-bipartidos são subclasses dos grafos perfeitos, de forma que se o número de Radon destas classes depender do tamanho da clique máxima, podemos encontrar o número de Radon de forma eficiente.

#### Número de Radon de cografos

Vamos provar que se  $G$  é um cografo que não é uma árvore, então  $r(G) = \omega(G) + 1$ .

**Teorema 3.2.5.** *Se  $G$  é um cografo tal que  $\omega(G) \geq 3$ , então  $r(G) = \omega(G) + 1$ .*

*Demonstração.* Se  $\omega(G) = 2$ , então o cografo é uma árvore, e já sabemos seu número de Radon.

Lembrando que para todo grafo  $G$ ,  $r(G) \geq \omega(G) + 1$ .

Seja  $R$  um subconjunto dos vértices de  $G$ , com  $|R| = \omega(G) + 1 > \omega(G)$ . Se  $G$  é completo, já sabemos que  $r(G) = \omega(G) + 1$ . Vamos supor então que  $G$  é cografo não completo. Tomemos dois vértices de  $R$  que não são adjacentes, digamos  $v, v'$  sendo estes da mesma componente  $G_i$  do complemento de  $G$ . Todas as outras componentes são induzidas pelo  $H[v, v']$ . Então:

- Se uma das componentes (que não é a componente  $G_i$ ) não é uma clique, então  $V(G) = H[v, v']$ . Como  $|\{v, v'\}| = 2$ , segue que  $r(G) = \max\{\omega(G) + 1, 3\}$ , e neste caso  $r(G) = \omega(G) + 1$ , pelo fato de  $\omega(G) + 1 \geq 3$ . Segue um esboço deste caso na Figura (3.14)

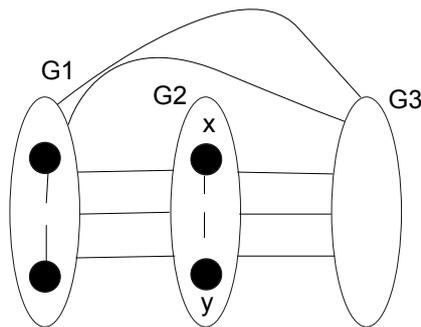


Figura 3.14: Se existem duas componentes de  $G$  que não são cliques, um par de vértices não adjacentes é um conjunto envoltória.

- Se todas as outras componentes exceto  $G_i$  formam uma clique, temos o caso de que  $G = G_1 \cup G_2$ , com  $G_2$  sendo uma clique e  $G_1 = G_i$ . Assim  $V(G_2) \subset H[v, v']$ . Sabemos que  $\omega(G) \geq \omega(G_1) + 1$ , (já que  $|V(G_2)| \geq 1$ ) e desta forma,  $|R| \geq \omega(G_1) + 2$ . Observe que

se existir  $x \in V(G_2) \cap R$  temos que  $x$  é testemunha de Radon e  $\{v, v', x\}$  são suficientes para que exista partição de Radon. Segue um esboço deste caso na Figura (3.15). Em caso contrário temos três casos para analisar:

**Primeiro Caso:** Se existem dois vértices  $c, d \in V(G_1) \cap R$  tal que  $v$  não é adjacente a  $c \in V(G_1) \cap R$  e  $v'$  não é adjacente a  $d \in V(G_1) \cap R$ , então pondo  $v, c \in R_1$  e  $v', d \in R_2$  teremos que  $V(G_2)$  será testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ ;

**Segundo Caso:** Se existe apenas um  $c \in R$  que não é adjacente à  $v$  e nem a  $v'$  (quer dizer que  $v$  e  $v'$  são adjacentes a todos os outros elementos de  $R$ ). Desta forma, se  $l \in V(G_1) \cap R$ , percorremos o caminho de  $v'$  para  $c$ :  $v' \rightarrow l \rightarrow c$  e pondo  $R_1 = R - \{l\}$  e  $R_2 = \{l\}$  temos que  $l$  é testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ ;

**Terceiro Caso:** Se  $v$  é adjacente a  $R - \{v'\}$ , assim como  $v'$  é adjacente a  $R - \{v\}$ , segue que existe  $l \in R$  tal que podemos seguir o caminho  $v' \rightarrow l \rightarrow v$ , e assim existe a partição de Radon  $R = R_1 \cup R_2$ , com  $R_1 = R - \{l\}$ ,  $R_2 = \{l\}$ .

Segue que para todo cografo  $G$ ,  $r(G) = \omega(G) + 1$ .

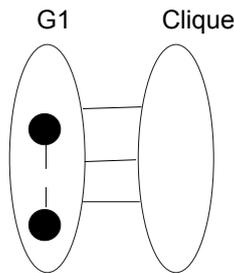


Figura 3.15: Caso em que apenas uma componente não é uma clique. O problema é dividido em casos.

■

### Número de Radon de grafos bloco

O número de Radon de um grafo bloco dado terá a mesma expressão concluída para a classe dos cografos. Utilizaremos o princípio das casas dos pombos para chegar a esta conclusão. O resultado é exposto através do Teorema (3.2.6).

**Teorema 3.2.6.** *Se  $G$  é um grafo bloco com  $\omega(G) \geq 3$ , então  $r(G) = \omega(G) + 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $R \subset V(G)$  tal que  $|R| = \omega(G) + 1$ . Sendo  $v \in V(G)$  e  $C$  uma clique de  $G$ , definimos  $U(C, v)$  como o subgrafo induzido de  $G$  formado pelos vértices  $\{v\} \cup \{y\}$ , onde  $y$  são todos os vértices de  $G$  tal que  $H[v, y] \cap V(C) = \{v\}$ . Obviamente se considerarmos todos os

vértices  $v \in V(C)$ , os vértices de  $U(C, v)$  formam uma partição de  $V(G)$ . Observe que no grafo  $G$  da Figura (3.16) abaixo, se  $C = \{a, b, c, d\}$ , teremos  $V(U(C, a)) = \{a, m, n\}$ ,  $V(U(C, b)) = \{b\}$ ,  $V(U(C, c)) = \{c, e, g, f\}$  e  $V(U(C, d)) = \{d, i, j, h, l, k\}$ . Neste mesmo grafo, se  $C' = \{d, j\}$ , temos que  $V(U(C', j)) = \{j, l, k\}$  e  $V(U(C', d)) = V(G) - \{j, l, k\}$ . As partições dos vértices de  $G$  se encontram na Figura (3.17).

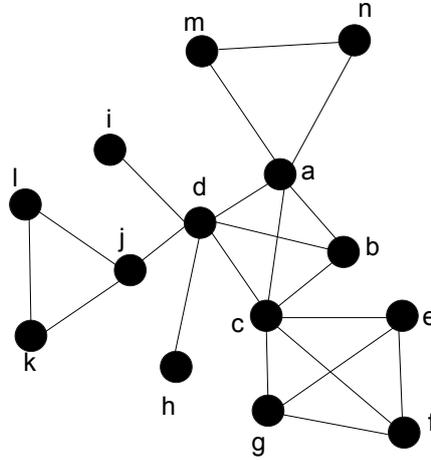


Figura 3.16: Tome o grafo bloco acima e encontre  $U(C, v)$ , para todo  $v \in V(C)$ , sendo  $V(C) = \{a, b, c, d\}$ .

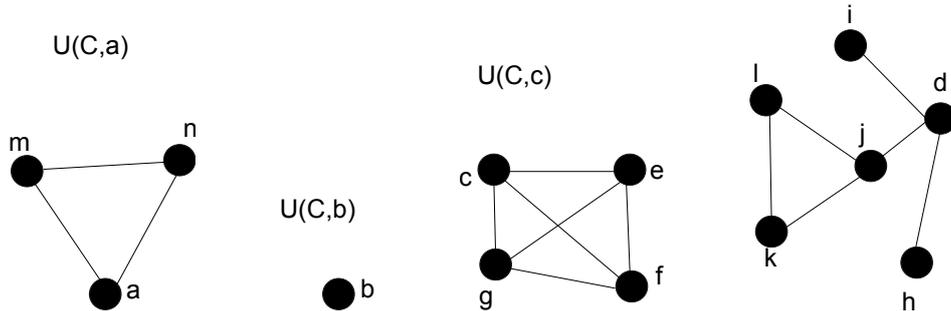


Figura 3.17: Observe a construção de  $U(C, v)$  para todo vértice  $v \in V(C)$  da Figura (3.16). Observe que se tomarmos todos  $v \in V(C)$ ,  $V(U(C, v))$  particiona  $V(G)$ .

Como  $|R| = \omega(G) + 1 > \omega(G)$ , pelo princípio das casas dos pombos, existe um  $U(C', t)$  sendo  $C'$  uma clique e  $t \in V(C')$ , tal que  $|U(C', t) \cap R| \geq 2$ . Temos então dois casos:

Primeiro Caso: Se  $t \in R$ , tomando  $a \in V(U(C', t)) \cap R$  em  $R_1$  e  $x \in R - V(U(C', t))$  também em  $R_1$  e  $t \in R_2$ , teremos que  $t \in H[x, a]$  e  $t$  será testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ ;

Segundo Caso: Se  $t \notin R$ , sejam  $a, b \in U(C', t) \cap R$ . Sejam  $c \in (V(U(C_1, p)) - V(U(C', t))) \cap R$  e  $d \in (V(U(C_2, q)) - V(U(C', t))) \cap R$ , sendo  $p, q$  vértices distintos das cliques  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente (observe que neste caso  $C_1$  pode ser igual a  $C_2$ ). Desta forma, como o menor

caminho de  $a$  para  $c$  bem como o de  $b$  para  $d$  passam pelo vértice  $t$ , da componente  $U(C', t)$ , teremos que  $t$  será uma testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ , onde  $R_1 = \{a, c\}$  e  $R_2 = \{b, d\}$ .

Segue que  $r(G) = \omega(G) + 1$ .

■

## Número de Radon de grafos de partição

Apresentamos agora alguns resultados específicos de grafos de partição que irão culminar em um teorema maior. Para grafos de partição o cálculo do número de Radon é dividido em dois casos. Apresentaremos alguns lemas e teoremas necessários para o entendimento global deste tópico.

**Teorema 3.2.7.** *Se  $G$  é um grafo de partição, com  $C$  sua clique máxima e  $I$  seu conjunto independente, sendo  $\omega(G) \geq 3$ , e  $|V(C) \cap R| \geq 1$ , então para  $|R| \geq \omega(G) + 1$ ,  $R$  não é anti-Radon.*

*Demonstração.* Basta mostrar que para  $|R| = \omega(G) + 1$ , existe partição de Radon. Inicialmente tomemos em  $R = V(C) \cup \{v\}$ . Existe  $a \in V(C) \cap R$  tal que a aresta  $(a, v)$ , existe e  $b \in V(C) \cap R$  tal que  $(b, v)$  não existe. Neste caso, basta tomar  $\{b, v\} \subset R_1$  e  $a \in R_2$  e teremos que  $a \in H[R_1] \cap H[R_2]$ . Também temos partição de Radon se quatro vértices de  $V(I) \cap R$  são todos adjacentes a um mesmo vértice de  $V(C) \cap R$ . Digamos agora que  $C' = V(C) \cap R$ ,  $I' = V(I) \cap R$ , com  $|C'| = |V(C) \cap R| = \omega(G) - k$  e  $|I'| = |V(I) \cap R| = k + 1$ ,  $k \geq 1$ . Temos dois casos:

Primeiro Caso:  $|C'| \geq 2$

- Caso exista  $a \in I'$  adjacente a  $c \in C'$  mas não a  $c' \in C'$ , se  $\{a, c'\} \subset R_1$  e  $c \in R_2$  temos que  $c \in H[R_1] \cap H[R_2]$ ;
- Caso todo vértice de  $I'$  é adjacente a todo vértice de  $C'$ , se  $a, b \in I'$  em  $R_1$ , temos que existe  $d \in C'$  tal que  $d \in H[R_1]$  e atribuindo  $d \in R_2$  temos uma partição de Radon;
- Se todo vértice de  $I'$  não é adjacente a vértice algum de  $C'$ , temos que  $|V(C) - R| = k$ . Como  $|I'| = k + 1$ , pelo princípio das casas dos pombos, existe  $c \in V(C) - R$  que é adjacente a  $e, f \in I'$ . Seja  $g, h \in C'$ . Tomando  $\{e, g\} \subset R_1$  e  $\{f, h\} \subset R_2$ , temos  $c \in H[R_1] \cap H[R_2]$ ;
- E finalmente, digamos existir  $a \in I'$ , com  $a$  não adjacente a vértice algum de  $C'$  e  $b \in I'$ , adjacente a todo vértice de  $C'$ . Temos dois subcasos:

-Se  $b, e \in I'$  são adjacentes a todo  $C'$ . Desta forma, se  $b, e \in R_1$  e  $C' \subset R_2$ , teremos que os vértices de  $C'$  são testemunhas de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ ;

-Se apenas o vértice  $b$  é adjacente a todos vértices de  $C'$ . Caso exista  $z \in I'$  tal que  $d(b, z) = 3$ , se  $b, z \in R_1$  teremos que os vértices de  $C'$  serão testemunhas de Radon; se todo vértice de  $I'$  estiver à distância 2 de  $b$  teremos o seguinte:  $b$  não pode ser adjacente a todos os vértices de  $C$ , logo existe  $l \in V(C) - R$  tal que  $l$  é adjacente a dois vértices de  $I'$ , digamos  $o, p$ . Desta forma, se  $s, t \in C'$  então, como  $d(s, o) = 2$  e  $d(t, p) = 2$ , admitindo  $a, o \in R_1$  e  $t, p \in R_2$  temos que  $l$  será testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ .

Segundo Caso:  $|C'| = 1$ . Seja  $V(C) \cap R = \{v\}$ . Temos os seguintes casos:

- Se  $v$  é adjacente a dois vértices de  $I'$ , já conseguimos partição de Radon, sendo  $v$  testemunha de Radon da partição em que  $R_2 = \{v\}$  e  $R_1$  é composto por todos os vértices de  $I'$ .
- Se temos três vértices de  $I'$ , digamos  $r, s, t$ , adjacentes a um mesmo vértice  $f \in C'$ , com  $f \neq v$ . Neste caso, só é possível que  $v$  seja adjacente a no máximo um dos vértices do conjunto  $X = \{r, s, t\}$ . Se  $v$  não é adjacente a vértice algum de  $X$ , temos a partição de Radon  $R = R_1 \cup R_2$ , sendo  $R_1 = \{r, v\}$  e  $R_2 = \{s, t\}$ , e assim  $f$  será testemunha de Radon; caso  $v$  seja adjacente a  $r$ , como não é adjacente a  $s$ , existe a partição de Radon  $R = R_3 \cup R_4$ , sendo  $R_3 = \{v, s\}$  e  $R_4 = \{t, r\}$ , sendo  $f$  testemunha de Radon.
- A partir de agora todo vértice de  $C$  é adjacente a no máximo dois vértices de  $I'$ . Suponhamos que  $v \in C'$  é adjacente a um único vértice  $u \in I'$ . Caso exista  $w \in I'$ , tal que  $d(w, u) = 3$ , um caminho mínimo entre  $u$  e  $w$  é  $u \rightarrow v \rightarrow f \in V(C) \rightarrow w$ , e como  $v \in R$ ,  $v$  será uma testemunha de Radon. Então vamos supor que  $\forall w \in I', d(u, w) = 2$ . Sabemos que todo vértice de  $C$  é adjacente a, no máximo, dois vértices de  $I'$ . Como  $|R - \{u, v\}| = \omega(G) - 1 = |V(C)| - 1$ ,  $u$  deverá ser adjacente a toda clique, já que cada vértice de  $V(C) - \{v\}$  tem como vizinho um vértice de  $I'$ . Absurdo, pois desta forma, a clique máxima teria cardinalidade  $\omega(G) + 1$  e não  $\omega(G)$ .
- Se todo vértice de  $I$  adjacente a  $v$  pertence a  $V(I) - R$ . Logo, existe  $x \in V(C) - R$  tal que existem dois vizinhos de  $x$  pertencentes a  $I'$ , digamos  $a$  e  $y$ . Temos dois subcasos:
  - Existindo  $w \in I'$  tal que  $d(a, w) = 3$ , admitindo  $v, y \in R_1$  e  $a, w \in R_2$ , temos que  $x$  será testemunha de Radon da partição de Radon  $R = R_1 \cup R_2$ ;
  - Não existindo tal  $w$ , temos que  $\forall w' \in I', d(a, w') = 2$  e  $d(y, w') = 2$ . Suponha por absurdo que  $R$  é anti-Radon. Já sabemos que se um vértice de  $V(C) - R$  for adjacente a três vértices de  $I'$ , então haverá partição de Radon. Isto significa que  $y$  deve ser adjacente a pelo menos um vértice  $c \in V(C)$  tal que  $c$  é vizinho de  $f \in I'$ , para todo  $f \in I'$ . O mesmo vale para o vértice  $a$ . Sabemos que  $a$  e  $y$  não podem ser ambos adjacentes ao mesmo  $f$  pois senão estaríamos no caso anterior. Como  $|R - \{a, v, y\}| = \omega(G) - 2$ ,  $a$  deve ser adjacente a  $(\omega(G) - 2)$  vértices de  $C$  e  $y$  adjacente a outros  $(\omega(G) - 2)$  vértices diferentes de  $C$ . Assim,

$$|R - \{a, v, y\}| = \omega(G) - 2 \geq (\omega(G) - 2) + (\omega(G) - 2) \Leftrightarrow \omega(G) \leq 2$$

o que é absurdo.

Isto completa a prova. ■

Apesar de que para qualquer subconjunto  $R$ , com  $|V(C) \cap R| \geq 1$  em um grafo de partição de clique máxima  $C$  com  $\omega(G) \geq 3$ ,  $R$  não é anti-Radon, se  $R$  é composto apenas de vértices de  $V(I) \cap R$ , onde  $I$  é o conjunto independente de tal grafo de partição, não necessariamente temos partição de Radon, vide Figura (3.18), em que  $R = \{a, b, c, d\}$  e  $R$  é anti-Radon, apesar de que  $\omega(G) = 3$ . O número de Radon deste grafo não é  $\omega(G) + 1$ .

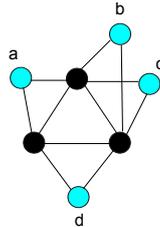


Figura 3.18: O conjunto independente formado pelos quatro vértices azuis forma um anti-Radon, apesar de que  $|R| = \omega(G) + 1$ .

Apesar disto, temos um corolário que resolve o problema para um caso específico de grafo de partição.

**Corolário 3.2.1.** *Se  $G$  é um grafo de partição,  $C$  sua clique máxima, com  $\omega(G) \geq 3$  e  $I$  seu conjunto independente máximo, e além disso  $|V(C)| \geq |V(I)|$ , então  $r(G) = \omega(G) + 1$ .*

Como se  $|V(C) \cap R| \geq 1$  teremos partição de Radon com  $\omega(G) + 1$  vértices em  $R$ , temos que estudar a partir de agora, o que acontece quando  $|V(C) \cap R| = 0$ . Então a partir de agora,  $R \subset V(I)$  e  $|V(I)| \geq \omega(G) + 1$

**Teorema 3.2.8.** *Todos os grafos de partição  $G = C \cup I$  possuem número de Radon  $\omega(G) + 1$  exceto o grafo da figura (3.18) e os grafos que possuem todas as propriedades abaixo:*

- $\omega(G) = 4$ ;
- $|V(I)| = 5$ ;
- Cada vértice de  $V(C)$  possui grau três em relação à  $V(I)$ ;
- Todos os vértices de  $I$  estão à distância 2 um do outro.

*Estas exceções possuem número de Radon  $\omega(G) + 2$ .*

Antes de provarmos o Teorema (3.2.8), é necessário apresentar os Lemas (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) e (3.2.4).

**Lema 3.2.1.** *Se  $G = C \cup I$  é um grafo de partição, com  $C$  sua clique máxima e  $I$  seu conjunto independente, e tal que  $a, b \in V(I) \cap R$ , são adjacentes a  $x \in V(C)$ , e existe  $e, f \in V(I) \cap R$  tal que  $d(a, e) = 3 = d(b, f)$ , então  $x$  é testemunha de Radon.*

**Lema 3.2.2.** *Se o Lema (3.2.1) não é satisfeito, dado um grafo de partição  $G = C \cup I$  com  $C$  sendo sua clique máxima e  $I$  o seu conjunto independente, e  $|R \cap V(I)| = \omega(G) + 1$ , então existe um vértice  $w \in C$  que possui três vizinhos em  $V(I) \cap R$ . Além disso, um destes três vértices é o vértice  $a$  ou o vértice  $b$  enunciado no Lema (3.2.1).*

**Lema 3.2.3.** *Se  $G = C \cup I$  é um grafo de partição, com  $C$  sua clique máxima e  $I$  seu conjunto independente, e tal que  $x \in V(C)$  possui quatro vizinhos em  $V(I) \cap R$ . Então  $x$  é testemunha de Radon.*

**Lema 3.2.4.** *Seja um grafo de partição  $G = C \cup I$ , onde  $C$  é a clique máxima de  $G$  e  $I$  é o conjunto independente de  $G$ . Se temos  $w \in V(C)$  tal que  $w$  possui exatamente três vizinhos em  $V(I) \cap R$ , digamos  $a, b$  e  $c$  e existe  $e \in V(I) \cap R$  tal que  $d(a, e) = 3$ . Então  $w$  é testemunha de Radon.*

Sabendo dos Lemas (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) e (3.2.4), podemos interpretar o problema da seguinte forma: se queremos construir um anti-Radon máximo, os Lemas (3.2.1), (3.2.3) e (3.2.4) não podem ser satisfeitos. Então qualquer vértice  $w \in V(C)$  que possua dois vértices adjacentes em  $V(I) \cap R$  deve ter pelo menos um destes vizinhos à distância 2 de todos os outros vértices de  $V(I) \cap R$ , e qualquer vértice  $x \in V(C)$  que tenha três vizinhos em  $V(I) \cap R$ , deve ter estes três vizinhos à distância 2 de todos os outros vértices de  $R$ . Mostraremos que mesmo no melhor caso (supormos um grafo com todos os vértices de  $C$  tendo grau 3 em relação à  $V(I)$ ), chegamos a um absurdo, obrigando a existir algum vértice de  $C$  com pelo menos 4 vizinhos em  $V(I)$  (nos outros casos, ou seja, em que supomos existir vértice de  $C$  com 0, 1 ou 2 vizinhos em  $V(I)$ ), teremos que remanejar arestas do melhor caso, formando mais vértices de  $C$  ainda com grau maior ou igual a 4 em relação à  $V(I)$ . Basta então provar o Lema (3.2.5).

**Lema 3.2.5.** *Não é possível construir um grafo de partição  $G = C \cup I$  tal que*

- $\omega(G) \geq 5$ ,
- $d(u, v) = 2$  para todo  $u, v \in V(I)$ ,
- $|V(I)| = \omega(G) + 1$  e,
- Todos vértices de  $V(C)$  possuem grau três em relação à  $V(I)$ .

*Demonstração.* Vamos provar por indução sobre  $\omega(G)$ .

i) Caso Base,  $\omega(G) = 5$ .

Vamos supor por absurdo que tal construção seja possível e seja  $G$  tal grafo. Sejam  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  os vértices da clique máxima de  $G$ . Seja  $F(x)$ , com  $x \in C$  a função que retorna um

conjunto de cardinalidade igual a três, onde seus elementos são a vizinhança de  $x$  pertencente a  $I$ . Observe que  $F(i)$ , com  $1 \leq i \leq 5$  geram quinze posições para se colocar os vértices de  $I$ . Observe ainda que dado qualquer vértice de  $I$ , digamos  $a$ , este deve ser um dos elementos de pelo menos três dos  $F(i)$ , e no máximo de quatro dos  $F(i)$ , com  $1 \leq i \leq 5$ . Desta forma, como  $|V(I)| = 6$ , segue que teríamos que ter pelo menos  $3 \times 6 = 18$  posições para preencher todos os  $F(i)$ , com  $1 \leq i \leq 5$ , mas na verdade temos apenas 15 posições. Logo, tal construção não é possível.

Desta forma, o caso base está provado.

ii) Suponha que para  $\omega(G) = k - 1$  o resultado seja válido. Vamos provar que para  $\omega(G) = k$  continua sendo válido.

Seja  $G'$  tal que  $\omega(G') = k - 1$ . Seja  $G = G' \cup \{v\}$ , sendo  $v$  pertencente à clique máxima de  $G$ . Segue que  $\omega(G) = k$ . Retire  $v$  de  $G$  e teremos um grafo com clique máxima de cardinalidade  $k - 1$ . Utilizando a hipótese de indução, conseguimos um vértice de grau pelo menos 4. Colocando novamente  $v$ , temos que um grafo em que a clique máxima é uma unidade maior e existe mais um vértice em  $R$ , ou seja, a cardinalidade de  $R$  passou de  $k$  para  $k + 1$ , sendo  $R$  o nosso candidato à anti-Radon. Então existe mais um vértice  $y \in V(I) \cap R$  (caso  $y \in V(C) \cap R$  já temos partição de Radon conforme o Corolário (3.2.1)). Se  $y$  for adjacente à qualquer vértice de  $V(C) - \{v\}$ , teremos quatro vértices adjacentes ao mesmo vértice de  $C$  e está provado. Caso contrário, lembrando que os vértices precisam estar à distância 2 de  $y$ , como  $\omega(G) \geq 5$ , segue que  $|V(I) \cap R - \{y\}| \geq 5$  e portanto todos os  $\omega(G)$  vértices de  $V(I) - \{y\}$  terão que ser adjacentes à  $v$ , o que implica novamente termos algum vértice de  $V(C)$  com grau pelo menos 4 em relação à  $V(I)$ .

■

Agora podemos provar o Teorema (3.2.8).

*Demonstração.* Observe que se  $|V(C) \cap R| \geq 1$ , então temos partição de Radon com  $\omega(G) + 1$  vértices em  $R$ . Logo precisamos analisar apenas os grafos de partição tal que  $|V(C)| < |V(I)|$  e que  $|V(C) \cap R| = 0$  e  $V(I') = V(I) \cap R$ . Analogamente vamos dividir o problema em casos:

Primeiro Caso: Se existe quatro vértices de  $I'$  adjacentes a  $w \in V(C)$  então  $w$  é uma testemunha de Radon, conforme o Lema (3.2.3).

Segundo Caso: Se existe  $w \in V(C)$  tal que  $w$  possui três vizinhos em relação à  $I'$ .

Se a configuração do grafo respeitar as hipóteses do Lema (3.2.4), então  $w$  possuirá partição de Radon. Vamos então tentar construir grafos em que tal hipótese não seja respeitada. Isso significa que se  $a, b$  e  $c$  são os vizinhos de  $w$  em  $I'$  então estes vértices devem estar à distância dois de todos os outros vértices de  $I'$ . Pelo Lema (3.2.5), para  $\omega(G) \geq 5$  sempre haverá um vértice que possua estas propriedades e tem grau pelo menos quatro em relação à  $I'$  e desta forma voltamos ao primeiro caso.

Se  $\omega(G) = 4$ , então seja  $C = \{1, 2, 3, 4\}$  a clique máxima de  $G$  e  $F(x)$  com  $x \in V(C)$  a

função que retorna um conjunto de cardinalidade 3 cujos elementos são a vizinhança de  $x$  em  $I$ . Teremos doze posições a serem preenchidas por  $F(i)$  com  $1 \leq i \leq 4$ . Cada vértice de  $I$  pertencerá a no mínimo dois e no máximo três dos  $F(i)$  com  $1 \leq i \leq 4$ . Assim o numero de posições que os vértices de  $I$  ocupam nos  $F(i)$  com  $1 \leq i \leq 4$ , varia de  $5 \times 2 = 10$  a  $5 \times 3 = 15$ . Porém temos exatamente 12 posições. Então três dos vértices de  $I$  devem aparecer em dois dos  $F(i)$  com  $1 \leq i \leq 4$ , e os dois vértices restantes de  $I$  devem aparecer em três dos  $F(i)$  com  $1 \leq i \leq 4$ , completando 12 posições. Por exemplo, seja  $V(I) = \{a, b, c, d, e\}$  e

$$\begin{aligned} F(1) &= \{a, b, c\} \\ F(2) &= \{a, d, e\} \\ F(3) &= \{b, d, e\} \\ F(4) &= \{c, d, e\}. \end{aligned}$$

Observe que assim não existe partição de Radon com os  $\omega(G) + 1$  vértices de  $V(I)$ , pois sem perda de generalidade, se  $a, b \in R_1$  e  $c, d \in R_2$ , teremos que apenas  $a, b$  geram apenas o vértice 1 a entrar no  $H[R_1]$ . Cada par de vértices gera apenas um vizinho comum, e desta forma, como teremos 3 vértices de  $I$  em  $R_1$  e dois em  $R_2$ , e todo vértice tem grau três em relação à  $I$ , torna-se impossível existir testemunha de Radon em  $C$  (em  $I$  já era impossível). Com  $\omega(G) + 2$  vértices, obrigaremos a pelo menos um vértice de  $V(C)$  a pertencer a  $R$ , e assim, pelo Teorema (3.2.7), existirá partição de Radon, e o número de Radon será  $\omega(G) + 2$ .

Terceiro Caso: O caso restante, ou seja, existe apenas vértice(s) com grau menor ou igual a dois em relação a  $I'$ . Seja  $a, b \in I'$ , vizinhos de  $w \in V(C)$ . Vamos dividir em subcasos:

- Se existe  $c, e \in I'$  tal que  $d(a, c) = d(b, e) = 3$ , então  $w$  é testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ , com  $R_1 = \{a, c\}$  e  $R_2 = \{b, e\}$ .
- Se  $b$  está à distância dois de todos os vértices de  $I'$  temos que  $b$  deve ser adjacente a toda a clique  $C$  (pois  $|R| \geq \omega(G) + 1$ ) e desta forma aumentamos a cardinalidade da clique máxima de uma unidade, o que é absurdo. Logo esta configuração de grafo de partição não existe.

Segue que neste terceiro caso sempre temos partição de Radon com apenas  $\omega(G) + 1$  vértices.

Desta forma, fica provado o teorema. ■

## Cálculo do número de Radon de grafos estrelados

Para o cálculo do número de Radon de grafos estrelados usaremos o resultado anterior, apresentado para grafos de partição. O Teorema (3.2.9) nos dá a quintessência do procedimento.

**Teorema 3.2.9.** *Seja  $G$  é um grafo estrelado que possui  $k$  cliques externas  $C_1, C_2, \dots, C_k$  e  $\omega(G) \geq 3$ . Para cada clique externa de  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  de  $G$ , remova  $|V(C_i)| - 1$  vértices gêmeos de  $C_i$ , gerando um grafo de partição  $G'_i$ . Então  $r(G) = \max_i\{r(G'_i), \omega(G) + 1\}$ .*

*Demonstração.* Fixemos  $|R| = \omega(G) + 1$ . Seja  $C$  a clique central de  $G$ . Temos que se  $a, b \in V(G)$ , então  $1 \leq d(a, b) \leq 3$ . Analisemos:

- Caso existam dois vértices  $a$  e  $b$  de  $R$ , em uma clique externa  $C_1$  e outros dois  $c$  e  $d$  em outra clique externa  $C_2$ . A Figura (3.19) nos mostra um grafo estrelado com  $R$  exemplificando este caso.

Primeiro Caso: Se  $d(a, b) = 3$ , com  $a \in (V(C_1) - V(C)) \cap R$  e  $b \in (V(C_2) - V(C)) \cap R$  temos uma partição de Radon pois se  $a, c \in V(C_1) \cap R$  e  $b, d \in V(C_2) \cap R$ , pelo menos um vértice de  $V(C) \cap V(C_1)$  e de  $V(C) \cap V(C_2)$  são gerados, e se  $b, d \in V(C_2) \cap R$ , pondo  $a, b \in R_1$  e  $c, d \in R_2$  os vértices de  $V(C) \cap V(C_1) \cap H[R_1]$  e  $V(C) \cap V(C_2) \cap H[R_1]$  serão testemunhas de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ ;

Segundo Caso: Se  $d(a, b) = 2$ , temos que se  $c \in V(C_1) \cap R$ ,  $c' \in V(C_2) \cap R$  e  $d(a, b) = 2 = \text{dist}(c, c')$ , então existe  $x \in V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C)$  tal que  $a \rightarrow x \rightarrow b$  e  $c \rightarrow x \rightarrow c'$  e se  $a, b \in R_1$  e  $c, c' \in R_2$ ,  $x$  testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$  (observe que se  $c, c' \in V(C) \cap V(C_1) \cap V(C_2)$ ,  $c$  e  $c'$  serão testemunhas de Radon);

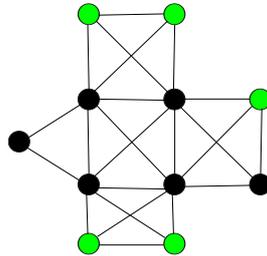


Figura 3.19: Caso em que temos duas cliques externas, e dois vértices de  $R$  em cada uma destas cliques, representados de verde na figura.

- Supondo que existe apenas uma clique  $C_1$  tal que  $|V(C_1) \cap R| \geq 2$ . Sejam  $a, b \in V(C_1) \cap R$ . Assim, para  $c \in V(C_j) \cap (R - V(C_1))$  então  $c \in V(C) - V(C_1)$  ou  $d(a, c) = 3$  ou, em último caso,  $d(a, c) = 2$  com  $V(C_1) \cap V(C_j) \neq \emptyset$ . A Figura (3.20) nos dá um exemplo deste caso. Tratem os três casos:

Primeiro e Segundo Casos: Em qualquer uma das duas primeiras situações, se  $a, c \in R_1$  teremos que os vértices de  $C \cap C_1$  são gerados por  $H[R_1]$  e, desta forma, se  $\{b, d\} \subset R_2$ , com  $d \in R \cap C_i$ ,  $2 \leq i \leq k$ , teremos que os vértices de  $C \cap C_1$  serão testemunhas de Radon

da partição  $R = R_1 \cup R_2$ ;

Terceiro Caso: Se para todo  $c \in R - V(C_1)$  temos que  $d(a, c) = 2$ , com  $V(C_1) \cap V(C_j) \neq \emptyset$  então se  $z \in V(C_1) \cap V(C_j) \cap V(C_l) \cap V(C)$ , com  $c \in V(C_j) \cap R$  e  $c_l \in V(C_l) \cap R$ , e assim, caso  $a, c \in R_1$  e  $b, c_l \in R_2$ ,  $z$  será testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ . Se  $V(C_1) \cap V(C_j) \cap V(C) \neq \emptyset$ ,  $V(C_1) \cap V(C_l) \cap V(C) \neq \emptyset$  mas  $V(C_1) \cap V(C_j) \cap V(C_l) \cap V(C) = \emptyset$  segue que se existe  $h \in V(C_1) \cap V(C_j) \cap V(C) \cap R$ ,  $h$  é uma testemunha de Radon. Digamos então que, para finalizar este caso,  $V(C_1) \cap V(C_j) \cap V(C) \cap R = \emptyset$ . Sabemos que  $|V(C_1)| \leq \omega(G)$  e  $|R| = \omega(G) + 1$  e que uma clique externa não pode ser adjacente a todos os vértices de  $C$ . Como a clique  $C_1$  tem pelo menos dois vértices ( $a$  e  $b$ ), esta só pode ser adjacente a  $\omega(G) - 2$  vértices de  $C$  no máximo, (caso em que  $|C| = \omega(G)$ ). Como  $|R| = \omega(G) + 1 > \omega(G)$ , pelo princípio das casas dos pombos, deve existir  $t \in V(C_1) \cap V(C)$ , que é adjacente a algum  $y \in V(C_p) \cap R$  e a algum  $v \in V(C_q) \cap R$ , com  $1 \leq p, q \leq k$ , onde  $V(C_1) \cap V(C_p) \cap V(C_q) \cap V(C) \neq \emptyset$ . Desta forma, se  $a, y \in R_3$  e  $b, v \in R_4$  segue que  $t$  será testemunha de Radon da partição  $R = R_3 \cup R_4$ .

- Se  $|V(C_i) \cap R| \leq 1, \forall 1 \leq i \leq k$ , então podemos sem perda de generalidade eliminar os vértices de cliques externas que não nos interessam para efeitos de menores caminhos e assim obter um grafo de partição  $G'$  e agir como já analisado anteriormente.

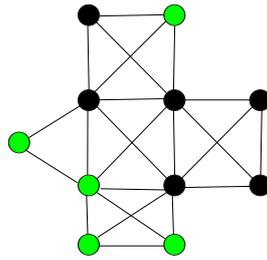


Figura 3.20: No segundo caso, apenas uma clique externa  $C_1$  possui dois vértices de  $R$ .

Desta forma,  $r(G) = \max\{r(G'), \omega(G) + 1\}$ .

■

### Cálculo do número de Radon para grafos co-bipartidos

Um grafo co-bipartido é construído a partir de um grafo bipartido. Tomamos um grafo bipartido conexo  $\bar{G}$  e em seguida tomamos o grafo co-bipartido  $G$ . Teremos então duas cliques  $A$  e  $B$ . Se  $\bar{G}$  for bipartido completo, então  $G$  será desconexo e não temos interesse neste caso. Então partiremos do princípio que  $\bar{G}$  é um grafo bipartido não completo e conexo, ou seja,  $G$  é conexo e não possui vértice universal. Observe que dados dois vértices  $x, y \in V(G)$  temos que  $1 \leq d(x, y) \leq 3$ .

Os Lemas (3.2.6), (3.2.7) e (3.2.8) são imediatos.

**Lema 3.2.6.** *Se  $|V(B) \cap R| \geq 2$  e  $B$  possui uma ponte, então  $R$  não é anti-Radon.*

**Lema 3.2.7.** *Se um vértice de  $R$  pertence ao menor caminho de outros dois vértices de  $R$  então  $R$  não é anti-Radon.*

**Lema 3.2.8.** *Se  $x, b \in V(B) \cap R$ ;  $a \in V(A) \cap R$ ,  $d(x, a) = k$  e  $d(b, a) = k + 1$  então  $R$  não é anti-Radon.*

**Teorema 3.2.10.** *Se  $A$  e  $B$  são as cliques de um grafo co-bipartido  $G$ , com  $|V(A)| \geq |V(B)|$ ,  $\omega(G) \geq 3$ , e existe um único  $b \in V(B)$  tal que todos os vértices de  $V(A)$  estão à distância 2 de  $b$ , então  $r(G) = \omega(G) + 2$ . Em caso contrário  $r(G) = \omega(G) + 1$ .*

*Demonstração.* Tomemos então, inicialmente, um conjunto  $R$  com a propriedade  $|R| = \omega(G) + 1$ . Sem perda de generalidade, como  $A$  e  $B$  são cliques, digamos que  $|V(A)| = \omega(A) \geq |V(B)| = \omega(B)$ . Vamos dividir o problema em casos:

Primeiro Caso:  $|V(A) \cap R| \geq 2$  e  $|V(B) \cap R| \geq 2$

1) Se existe  $a \in V(A) \cap R$  e  $b \in V(B) \cap R$  com  $d(a, b) = 3$ .

- Se existe  $x \in V(A) \cap R$  e  $y \in V(B) \cap R$  tal que  $d(x, y) \leq 2$  então, pelo Lema (3.2.8), existe partição de Radon, com  $\omega(G) + 1$  vértices.
- Caso contrário, ou seja,  $d(x, y) = 3$ , para todo  $x \in V(A) \cap R$  e  $y \in V(B) \cap R$ , segue que se  $a \rightarrow a' \in V(A) \rightarrow b' \in V(B) \rightarrow b$  é um caminho de  $a$  para  $b$ , então  $x \rightarrow a' \in V(A) \rightarrow b' \in V(B) \rightarrow y$  também será um caminho de  $x$  para  $y$ . Logo  $a', b'$  são testemunhas de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ , com  $R_1 = \{a, b\}$  e  $R_2 = \{x, y\}$ .

2) Se não existem  $a \in V(A) \cap R$  e  $b \in V(B) \cap R$  tal que  $d(a, b) = 3$ , mas digamos que satisfazem  $d(a, b) = 2$ .

- Se existe  $x \in V(A) \cap R$  e  $y \in V(B) \cap R$  com  $d(x, y) = 1$ , temos partição de Radon, pois se  $a$  e  $y$  são adjacentes, então  $a \rightarrow y \rightarrow b$  é um caminho de  $a$  para  $b$ , sendo  $y$  testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$  em que  $x, y \in R_2$  e  $a, b \in R_1$ ; se  $a$  e  $y$  não são adjacentes segue que  $a \rightarrow x \rightarrow y$  é um caminho de  $a$  para  $y$ , sendo  $x$  testemunha de Radon da partição  $R = R_3 \cup R_4$  em que  $x, y \in R_3$  e  $a, b \in R_4$ ;
- Se  $d(x, y) = 2$ , para todo  $x \in V(A) \cap R$  e  $y \in V(B) \cap R$ . Vamos supor inicialmente que existe um grafo desta forma e tal que para todo  $z \notin R$ ,  $z$  tem grau 1 em relação ao lado oposto (se  $z \in V(A)$ , então  $z$  possui apenas uma aresta para  $B$  e vice versa). Digamos que  $\omega(A) = k + 1$  e  $\omega(B) = \omega(G) - k$ . Como não existe vértice universal,  $n = |V(G)| = \omega(A) + \omega(B)$ . Como  $\omega(A) \geq \omega(B)$ , temos  $n - \omega(G) - 1 = \omega(A) + \omega(B) - \omega(A) - 1 = \omega(B) - 1$  vértices que não pertencem a  $R$ . Assim

$$|R| = \omega(A) + 1 > \omega(A) - 1 \geq \omega(B) - 1.$$

Desta forma, não existe uma correspondência biunívoca dos vértices de  $R$  para os vértices que não estão em  $R$ , de forma que sempre sobrarão pelo menos dois vértices de  $R$  sem arestas para o lado oposto (caso contrário existiriam vértices não pertencentes a  $R$  de grau 2 em relação ao lado oposto). Assim sendo, ou algum  $z \notin R$  terá grau 2 em relação ao lado oposto (o que é absurdo por hipótese) ou teremos distâncias iguais a 3, o que também é absurdo. Concluimos então, que não é possível construirmos um grafo assim, com  $\omega(G) + 1$  vértices em  $R$ . Logo, deve existir  $z \notin R$  com grau pelo menos 2 em relação ao lado oposto. Assim  $z \in H[a, b] \cap H[x, y]$ , já que todos os vértices de  $V(A) \cap R$  estão à distância 2 de  $V(B) \cap R$  (se nem todos estivessem a tal distância 2, pelo Lema (3.2.8), já teríamos partição de Radon).

3) Se existem apenas distâncias iguais a 1, temos uma clique e não é possível tal grafo ter sido gerado por um grafo bipartido conexo.

Segundo Caso:  $|R| = \omega(G) + 1$  e  $|V(B) \cap R| = 1$ , com  $\omega(G) = \omega(A) \geq \omega(B)$ . Temos então que  $V(A) = V(A) \cap R$ .

1) Se existe  $a \in V(A)$  tal que  $d(a, b) = 3$ , segue que  $b \rightarrow y \in V(B) \rightarrow x \in V(A) \rightarrow a$  é um caminho de  $b$  para  $a$  e assim  $x$  é testemunha de Radon.

2) Não é possível que  $b$  seja adjacente a todos os vértices de  $A$  senão poderíamos ter colocado-o na clique  $A$  e não na clique  $B$ .

3) Se a distância de  $b$  para outros vértices de  $R$  são todas iguais a 2 (se temos uma distância igual a 1 e outra igual a 2, pelo Lema (3.2.8) já teremos partição de Radon), para todos os vértices de  $A$  estarem à distância 2 de  $b$ , deve existir um caminho  $x \in V(A) \cap R \rightarrow v \in V(B) - R \rightarrow b$  para um ou mais vértices  $v$ . De toda a forma, com  $\omega(G) + 1$  vértices não teremos partição de Radon, então precisamos de mais um vértice em  $R$ , ou seja,  $\omega(G) + 2$  vértices para existir partição de Radon, pois independente de como tomarmos a partição de  $R = R_1 \cup R_2$ , se  $b \in R_1$ , então  $R_2$  é um conjunto convexo, sendo que  $H[R_1]$  não gera vértice algum de  $R_2$ . Observe na Figura (3.21), um caso de grafo co-bipartido  $G$  em que  $r(G) = \omega(G) + 2$ . Os vértices verdes pertencem a  $R_1$  e os azuis a  $R_2$ , e  $R = R_1 \cup R_2$ .

■

### 3.3 Algoritmo eficiente para cálculo do número de Radon de grafos de intervalo unitário

Esta seção foi o tema de apresentação no Lawcliques de 2012 [27]. Seja  $v_1, \dots, v_n$  a ordenação canônica de um grafo de intervalo unitário  $G$ . Dado  $R \subset V(G)$ , desejamos saber se  $R$  é anti-Radon ou não. Temos alguns resultados e definições que nos ajudarão a responder à pergunta sobre  $R$  ser anti-Radon ou não.

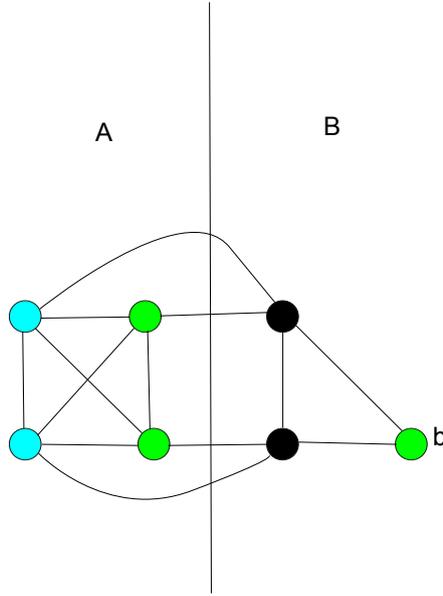


Figura 3.21: O número de Radon deste grafo co-bipartido é maior que  $\omega(G) + 1$ , pois o vértice  $b$  está à distância dois de todos os vértices de  $A$ . Os vértices azuis pertencem a  $R_1$  e os verdes a  $R_2$ , sendo a partição  $R = R_1 \cup R_2$ , que não é partição de Radon.

**Algoritmo 3.3.1.** [20] *Seja  $v_i, v_j$ ,  $i < j$ , dois vértices em uma ordenação canônica. Começando com  $v_i$ , o próximo vértice em um menor caminho é o vizinho mais distante de  $v_i$  na ordenação canônica, digamos  $v_k$ , tal que  $k \leq j$ . Então repetimos o procedimento para  $v_k$ , e assim até que  $v_j$  seja alcançado.*

É interessante notar que tal algoritmo pode ser aplicado de  $v_j$  para  $v_i$ , ou seja, na ordem canônica inversa.

Considere uma ordenação canônica  $\Gamma$  de  $G$ . Sejam  $v_1 = b_1, b_2 = v_2, \dots, b_k = v_n$  e  $v_1 = b'_1, b'_2 = v'_2, \dots, b'_k = v_n$  dois menores caminhos de  $v_1$  a  $v_n$  obtidos pelo algoritmo guloso, aplicado a  $\Gamma$ , começando de  $v_1$  e  $v_n$ , respectivamente. Observe que  $b'_i \leq b_i$  em  $\Gamma$ . Note também que todo vértice  $b$  maior que  $b'_i$  e menor que  $b_i$  em  $\Gamma$  sempre está em algum menor caminho de  $v_1$  a  $v_n$ .

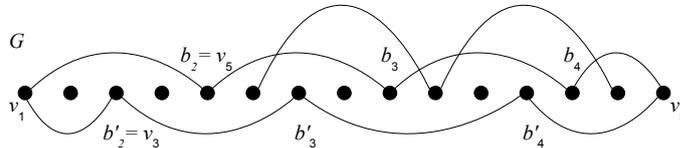


Figura 3.22: Grafo de intervalo unitário  $G$  onde  $v_1, v_2, \dots, v_n$  é uma ordenação canônica para  $V(G)$ . (Observe que não desenhamos todas as arestas, por exemplo  $(v_3, v_5)$ ). Os caminhos  $v_1, b_2, b_3, b_4, v_n$  e  $v_1, b'_2, b'_3, b'_4, v_n$  são menores caminhos de  $v_1$  a  $v_n$  obtidos pelo algoritmo guloso.

Definimos o conjunto de vértices  $b'_i, \dots, b_i$  como a **região preta**  $B_i$  de  $\Gamma$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Analogamente, definimos como **região cinza** a sequência de vértices entre duas regiões pretas

consecutivas. As regiões cinzas são notadas por  $R_1, R_2, \dots$  da esquerda para a direita de  $\Gamma$ . Uma **aresta cinza** é uma aresta tal que as extremidades são vértices de regiões cinzas distintas. Um caminho é um **caminho cinza** se contém apenas arestas cinzas. Um vértice cinza é **restrito à esquerda (restrito à direita)** se não contém arestas cinzas para a direita (esquerda).

Seja  $X = v_{i_1}, \dots, v_{i_p} = r_1, \dots, r_p$  uma sequência de vértices cinzas em  $\Gamma$ ,  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p$ . Um **componente** de  $\Gamma$  é uma subsequência de vértices consecutivos de  $X$  tal que o primeiro vértice é restrito à direita, o último vértice é restrito à esquerda, e não possui dois vértices consecutivos  $v_{i_j}$  e  $v_{i_{j+1}}$  tal que  $v_{i_j}$  é restrito para a esquerda e  $v_{i_{j+1}}$  é restrito para a direita. Claramente, as componentes formam uma partição de  $X$ .

Sejam  $B_i$  e  $B_{i+1}$  duas regiões pretas consecutivos de  $\Gamma$ . Uma **aresta longa** de  $\Gamma$  é uma aresta unindo o primeiro vértice de  $B_i$  ao último vértice de  $B_{i+1}$ . Um vértice cinza  $v \in R_j$  é **coberto por uma aresta longa** se há uma aresta longa entre o primeiro e o último vértices das regiões  $B_j, B_{j+1}$ , respectivamente. Um componente  $C$  é **coberto** se todos os seus vértices são cobertos por arestas longas e em caso contrário,  $C$  é **não coberto**.

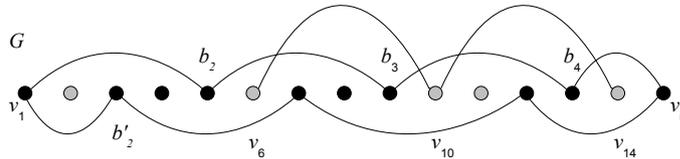


Figura 3.23: Os vértices pretos e cinzas são definidos pelos menores caminhos obtidos pelo algoritmo guloso. O caminho  $v_6v_{10}v_{14}$  é um caminho cinza.

**Lema 3.3.1.** [20] *Sejam  $u$  e  $w$  vértices que pertencem a regiões cinzas  $R_a$  e  $R_b$ ,  $a \leq b$ . Se existe um caminho cinza de vértices entre  $u$  e  $w$ , então  $d(u, w) = b - a$ ; em caso contrário  $d(u, w) = b - a + 1$ .*

**Lema 3.3.2.** [20] *Seja  $\Gamma$  uma ordenação canônica de um grafo de intervalo unitário  $G$ , e  $w$  um vértice simplicial de  $G$ ,  $w \neq v_1$ , e  $w \neq v_n$ . Então as seguintes sentenças acontecem: (a)  $w$  é um vértice cinza; (b)  $w$  é restrito para esquerda e para direita; (c)  $w$  é uma componente.*

**Lema 3.3.3.** [20] *Seja  $C$  uma componente e  $v \in C$ . Então  $C \subset H[v, v_1, v_n]$ .*

**Lema 3.3.4.** [20] *Seja  $C$  uma componente não coberta. Então  $C \subset H[v_1, v_n]$ .*

Sabendo destes resultados do artigo [20], podemos enunciar Teorema (3.3.1).

**Teorema 3.3.1.** *Um conjunto  $R \subset V(G)$  é um conjunto anti-Radon se e somente se  $R' = R - \{v_1, v_n\}$  está contido em uma região cinza de  $G$  e todo vértice de  $R'$  pertence a componentes cobertas distintas de  $G$ .*

*Demonstração.* Observe que para provar a necessidade precisamos provar os quatro itens abaixo:

Caso a: Se  $|R \cap (RP \cup CNC)| \geq 3$ , onde  $CNC$  significa componente não coberta e  $RP$  região preta, então  $R$  não é anti-Radon.

Caso b:  $|R \cap C'| \geq 2$ , onde  $C'$  é uma componente coberta, então  $R$  não é anti-Radon.

Caso c:  $u_1 \in (CC_1 \cap R)$  e  $u_2 \in (CC_2 \cap R)$  com região preta entre  $CC_1$  e  $CC_2$ , e sendo  $CC_1$  e  $CC_2$  duas componentes cobertas distintas, então  $R$  não é anti-Radon.

Caso d:  $u_1 \in (CC_1 \cap R)$  e  $u_2 \in (CC_2 \cap R)$  sem região preta entre elas, sendo  $CC_1$  e  $CC_2$  duas componentes cobertas distintas, porém  $u_1$  e  $u_2$  pertencendo a regiões cinzas diferentes, então  $R$  não é anti-Radon.

Já para provar a suficiência precisamos mostra as duas assertivas abaixo:

Caso e1:  $(R - v_n) \subset \text{Clique}$  é anti-Radon.

Caso e2:  $R - \{v_1, v_n\} \subset RC$ , onde  $RC$  é uma região cinza, então  $R$  é anti-Radon.

Sem perda de generalidade, podemos tomar o primeiro vértice de  $R$  na ordenação canônica como  $v_1$  e o último como  $v_n$ , já que vértices à esquerda de  $v_1$  e à direita de  $v_n$  não interessam a estudos sobre menores caminhos. Vamos seguir para a prova então:

( $\Rightarrow$ )

Caso a: Sabemos que  $v_1$  e  $v_n$  estão em regiões pretas. Logo,  $|R \cap (RP \cup CNC)| \geq 2$ . Se um terceiro vértice de  $R$ , digamos  $v$  pertence a uma região preta, então se  $v_1, v_n \in R_1$  e  $v \in R_2$  temos que  $v$  é testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$  e assim, se  $v$  pertence a uma região não coberta, então pelo Lema (3.3.4),  $v \in H[v_1, v_n]$ , admitindo  $v_1, v_n \in R_3$  e  $v \in R_4$  temos novamente  $v$  será testemunha de Radon da partição  $R = R_3 \cup R_4$ .

Caso b: Como  $v_1$  e  $v_n$  são vértices em regiões pretas e pelo Lema (3.3.3) se  $C'$  é uma região coberta  $C' \subset H[v, v_1, v_n]$ , com  $v \in C'$ , temos que se  $|R \cap C'| \geq 2$ , existe  $v' \in R \cap C'$ , com  $v \neq v'$ . Desta forma, se  $v_1, v_n, v \in R_1$  e  $v' \in R_2$  temos que  $v'$  será testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ .

Caso c: Basta utilizarmos o algoritmo guloso. Como de uma componente coberta  $CC_1$  não pode haver aresta para outra componente coberta  $CC_2$ , pois se houvesse seriam uma componente só, atribuindo  $u_1, u_2 \in R_2$  e  $v_1, v_n \in R_1$ , em algum momento na execução do algoritmo guloso o menor caminho de  $u_1$  para  $u_2$  terá que passar por um vértice  $v$  desta região preta, significando que tal  $v$  é testemunha de Radon da partição  $R = R_1 \cup R_2$ .

Caso d: Ao percorrermos um menor caminho de  $u_2$  para  $u_1$  em algum momento chegaremos ao último vértice da componente  $CC_1$ , ou seja, não haverá continuação de tais arestas cinzas, pois caso contrário  $CC_1$  e  $CC_2$  seriam uma única componente. Existe algum vértice de  $CC_1$  e de  $CC_2$  que pertencem a mesma região cinza, pois não existe região preta entre as duas regiões cinzas citadas.

Digamos que  $CC_1$  está mais à esquerda na ordenação canônica, sendo tal ordenação feita da esquerda para a direita. Seja  $RC_i$  a parte de região cinza que  $CC_1$  e  $CC_2$  tem em comum. Seja  $v_l$  o último vértice pertencente a  $RC_i$  na ordenação canônica, e  $X = \{v_a, v_{a+1}, \dots, v_p\}$ , uma região preta, com  $l < a < a + 1 < \dots < p$ . Tal  $X$  existe pois  $u_1$  e  $u_2$  estão em regiões cinzas diferentes e não existe região preta entre  $CC_1$  e  $CC_2$ . Não existe aresta de  $CC_1$  para  $(CC_2 - RC_i)$ , pois se existisse  $CC_2$  faria parte da componente  $CC_1$ . Assim de  $u_1$  para  $u_2$  podemos seguir o caminho mínimo  $u_1 \rightarrow x \rightarrow u_2$ , sendo  $x \in X$  e assim  $x$  será testemunha de Radon.

( $\Leftarrow$ )

Caso e1: Suponha por absurdo que existe uma testemunha de Radon  $x$ . Se  $v_n \in R_2$ , então  $R_1$  está contido em uma clique e, desta forma,  $R_1 = H[R_1]$ , logo  $x \in R_1$ . Então, existe  $R' \subset R$ , tal que  $x \notin R'$  mas  $x \in H[R']$ . Tomemos então  $R' = R - \{x\}$ , ou seja,  $R_1 = \{x\}$ . Se  $x$  for um vértice simplicial, pelo Lema (3.3.2),  $x$  é uma componente e não é gerado por nenhum subconjunto e também não gera nenhum outro vértice, não importa de qual subconjunto ele seja elemento. Se  $x$  não é simplicial e  $x$  pertence a uma componente  $C_1$  coberta, tal que  $R \cap C_1 = \{x\}$  (o caso em que  $|R \cap C_1| \geq 2$  foi analisado no item b), seja  $x = v_j$  e digamos que  $i < j$  e  $v_i \in R$ . Seguindo o algoritmo guloso de  $v_n$  para  $v_i$ , como  $x = v_j$  é uma testemunha de Radon,  $x$  deve pertencer a uma região preta, o que é absurdo, implicando que  $x \notin H[R']$ . Assim  $H[R_1] \cap H[R'] = \emptyset$ , o que é absurdo.

Caso e2: Se todos os vértices são simpliciais, então  $R$  é anti-Radon. Caso contrário, digamos por absurdo que existe  $x$  testemunha de Radon. Seja  $Y_1 = H[y_1, v_1] - H[v_1, v_n]$  e  $Y_2 = H[y_2, v_n] - H[v_1, v_n]$ , onde  $y_1, y_2 \in R$  são vértices não simpliciais. A Figura (3.24) nos dá um exemplo deste caso e suas possibilidades.

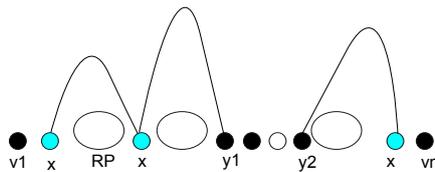


Figura 3.24: RP - região preta. Todas as outras são regiões cinzas. Os únicos vértices não simpliciais são  $y_1$  e  $y_2$ . Os vértices intermediários a  $y_1$  e  $y_2$  na ordenação canônica são simpliciais. Os vértices  $x$  exibidos na figura são possíveis localizações para a testemunha de Radon citada na redução ao absurdo.

Temos então que  $H[R] = H[v_1, v_n] \cup Y_1 \cup Y_2 \cup \text{SIMPLICIAIS}$ . Consideramos três casos:

- Se  $x \in Y_1$  ou  $x \in Y_2$

Sem perda de generalidade, digamos que  $x \in Y_1$ . Observe que  $x \notin H[R - \{y_1\}]$ . Então  $y_1$  deve pertencer a todo subconjunto para gerar  $x$  e assim,  $y_1 \in R_1 \cap R_2$ , contrariando o fato de que  $R$  foi particionado.

- Se  $x$  é simplicial, já foi tratado.

- Se  $x \in H[v_1, v_n]$ , então  $x$  pertence a uma região preta e não se aplica a este caso.

Logo, neste caso,  $R$  é anti-Radon.

■

**Corolário 3.3.1.** *O número de Radon de um grafo de intervalo unitário  $G$  é  $\max\{t_i\} + 3$ , onde  $t_i$  é o número de componentes cobertas de  $G$  que intersectam a região cinza  $i$ .*

Devido ao Corolário (3.3.1), podemos elaborar um algoritmo para encontrar o número de Radon de um grafo de intervalo unitário.

### **Algoritmo 3.3.2. Início**

*Passo 1: Encontrar uma ordenação canônica de  $G$ .*

*Passo 2: Para cada par  $v_i, v_j$  de vértices de  $G$ , com  $i < j$ , faça:*

*-Encontre as regiões cinzas e as componentes cobertas de  $G_{i,j}$ , sendo  $G_{i,j}$  o subgrafo induzido pelos vértices de  $v_i$  até  $v_j$ ;*

*-Aplique o Corolário (3.3.1) e encontre  $r(G)$ .*

**Fim**

A complexidade do Algoritmo (3.3.2) é  $O(n^3)$ , pois a ordenação canônica tem complexidade  $O(n)$  [5] e como tomaremos os vértices dois a dois, teremos  $O(n^2)$  combinações de pares de vértices. Para cada combinação desta, encontraremos as regiões cinzas e componentes cobertas, que custa  $O(n)$ . Logo  $O(n^2) \times O(n) = O(n^3)$ .

# Capítulo 4

## Convexidade $P_3$

Neste capítulo apresentaremos expressões analíticas para o número de Radon de algumas classes particulares de grafos, considerando-se a convexidade  $P_3$ . Também foi construído um algoritmo linear para determinar o número de Radon de um grafo de intervalo unitário biconexo. Iniciaremos o capítulo mostrando a NP-dificuldade para a classe dos grafos de partição.

Segue os resultados conseguidos resumidos na Tabela (4.1).

Classe de grafo	número de Radon na $P_3$
Caminhos	$\lceil \frac{2n+3}{3} \rceil$
Ciclos	$\lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$
Clique	3
Bipartidos completos	$\{3, 4\}$
Árvores	$l(T)+1$ (estritamente binárias)
Cografos	$\{3, 4\}$
Grafos de partição ( $\omega(G) \geq 3$ )	NP-difícil
Grafos estrelados ( $\omega(G) \geq 3$ )	NP-difícil
Grafos co-bipartidos	algoritmo $O(n^4)$
Grafos de intervalo unitário	algoritmo - $O(n)$ (biconexos)
Grafos Gerais	NP-difícil

Tabela 4.1: Resumo dos resultados do Capítulo 4.

## 4.1 NP-dificuldade para grafos de partição

PROBLEMA: CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$

ENTRADA: Um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ .

QUESTÃO:  $G$  contém um conjunto anti-Radon de tamanho  $\geq k$ ?

Mostraremos que computar o número de Radon de um grafo de partição na convexidade  $P_3$  é NP-difícil.

O Lema (4.1.1) será utilizado:

**Lema 4.1.1.** *Seja  $G$  um grafo,  $C \subset G$  uma clique, e  $v_1, v_2$  vértices distintos de  $C$ . Então  $C \subset H[v_1, v_2]$ .*

Antes de apresentar o teorema desta seção, vamos apresentar o problema SUBCONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO, que é conhecido por ser NP-completo[44], e o usaremos na redução, para mostrar que CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$  é NP-difícil.

PROBLEMA: CONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO

ENTRADA: Uma família  $\mathcal{S}'$  de subconjuntos  $S'_i \in \mathcal{S}'$  de algum conjunto base, e um inteiro  $k'$

QUESTÃO: Quando  $\mathcal{S}'$  contém  $k'$  ou mais subconjuntos  $S'_i$  mutuamente disjuntos?

Apresentemos o redução de CONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO para CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$ .

**Teorema 4.1.1.** *CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$  é NP-difícil, mesmo restrito para classe dos grafos de partição.*

*Demonstração.* Um certificado para “SIM” de uma instância de CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$  poderia certamente ser um anti-Radon de  $G$  de tamanho  $k$ . No artigo [28], foi mostrado que é NP-completo reconhecer se um conjunto dado é anti-Radon ou não, e assim um certificado para CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$  tem maior probabilidade de não ser checado eficientemente e não sabemos se está em NP. Como descrito anteriormente, para a redução, usaremos o problema SUBCONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO. Dados  $\mathcal{S}'$  e  $k'$ , vamos construir a seguinte instância de CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$ . Os elementos do conjunto base  $\cup S'_i$  dos subconjuntos  $S'_i \in \mathcal{S}'$  são todos vértices do grafo  $G$ .  $G$  também contem um par de novos vértices distintos  $w_i$  e  $z_i$ , para cada subconjunto  $S'_i \in \mathcal{S}'$ . As arestas de  $G$  são da seguinte forma: O conjunto de vértices de  $G$  correspondente ao conjunto base de  $\mathcal{S}'$ , junto com o conjunto de todos vértices  $z_i$  formam uma clique  $C$  de  $G$ . Adicionalmente, para cada vértice  $w_i$ , adicione uma aresta  $(w_i, z_i)$  e arestas  $(w_i, v)$ , para cada  $v \in S_i$ , que corresponde a um elemento do subconjunto  $S'_i \in \mathcal{S}'$ . Finalmente defina  $k = k'$ . A construção de entrada de CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$  está completa como exemplificam as Figuras (4.1) e (4.2). Observe que o conjunto de vértices  $w_i \in V(G)$  forma um conjunto independente  $I$  de  $G$ , e então  $G$  é um grafo de partição com bipartição  $V(G) = V(C) \cup V(I)$ . Finalmente, sem perda de generalidade, restringimos os valores  $k = k' \geq 4$ .

Provaremos que  $\mathcal{S}'$  contém  $k'$  subconjuntos mutuamente disjuntos se e somente se  $G$  possui um conjunto anti-Radon de tamanho  $k$ .

Suponha que  $\mathcal{S}'$  contém  $k'$  subconjuntos mutuamente disjuntos  $S'_1, S'_2, \dots, S'_{k'}$ . Mostraremos que o subconjunto  $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  de  $V(G)$  é um conjunto anti-Radon de  $G$ . Para  $i, j$ , onde  $1 \leq i \neq j \leq k'$ , sabemos que  $S'_i \cap S'_j = \emptyset$ , implicando que  $N[w_i] \cap N[w_j] = \emptyset$ . Consequentemente,  $d(w_i, w_j) > 2$ , implicando que  $H(W') = W'$ , para cada subconjunto  $W' \subset \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ . Isto significa que  $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  não possui partição de Radon e então é um conjunto anti-Radon.

Reciprocamente, por hipótese  $G$  possui conjunto anti-Radon  $R$  de tamanho  $k \geq 4$ . Primeiro, mostremos que  $R \subset I$ , exibindo uma partição de Radon  $R = R_1 \cup R_2$ , onde  $R$  contém vértices de  $C$ . Se  $R$  contém três vértices  $v_1, v_2, v_3 \in C$ , formemos uma partição de  $R$  onde  $v_1, v_2 \in R_1$  e  $v_3 \in R_2$ . Pelo Lema (4.1.1),  $C \subset H[v_1, v_2]$  e então  $v_3 \in R_1 \cap R_2$ . Se  $R$  contém exatamente dois vértices de  $C$  então existe algum  $w_i \in R \cap V(I)$ . Consequentemente, a atribuição  $v_1, v_2 \in R_1$ ,  $w_i \in R_2$ , pelo Lema (4.1.1) e do fato de que  $|N(w_i)| \geq 2$  implica que  $R_1 \cup R_2$  é uma partição de Radon de  $R$ . Finalmente, se  $R$  contém exatamente um vértice  $v_1 \in C$  então existe no mínimo dois vértices distintos  $w_i, w_j \in R \cap V(I)$ . Considere uma partição de  $R$  que atribui  $v_1, w_i \in R_1$  e  $w_j \in R_2$ . Pelo fato  $d(v_1, w_i) = 2$ ,  $H[v_1, w_i]$  contém um vizinho comum  $v_p \in V(C)$  de  $v_1$  e  $w_i$ . Pelo Lema (4.1.1), concluímos que  $C \subset H[v_1, w_i]$ . Além disso, como  $|N(w_j)| \geq 2$  e  $N(w_j) \subset C$ , nós concluímos que  $w_j \in H[v_1, w_i] \cap H[w_j]$ , isto é,  $R_1 \cup R_2$  é uma partição de Radon. Consequentemente, é verdadeiro para  $R \subset I$ .

Finalmente, escolha um par de vértices arbitrários distintos  $w_i, w_j \in R$  e vamos examinar  $N(w_i) \cap N(w_j)$ . Mostraremos que tal interseção é vazia. Suponha o contrário, e seja  $v_1 \in N(w_i) \cap N(w_j)$ . Como  $|R| \geq 4$ , existe  $w_p, w_q \in R$ , tal que  $w_i, w_j, w_p, w_q$  são distintos. Existe  $v_2 \in V(C)$ , tal que  $v_2$  é um vizinho comum de  $v_1$  e  $w_p$ . Então  $v_1, v_2 \in H[w_i, w_j, w_p]$ . Pelo Lema (4.1.1) e considerando que todos vértices de  $I$  possuem grau pelo menos dois, concluímos que se pusermos  $w_i, w_j, w_p \in R_1$  e  $w_q \in R_2$ , isto nos conduz a uma partição de Radon, o que é uma contradição. Consequentemente,  $N(w_i) \cap N(w_j) = \emptyset$ , para todo  $w_i, w_j \in R$  distintos. Como  $N(w_i)$  e  $N(w_j)$  são, respectivamente, os subconjuntos  $S'_i$  e  $S'_j$  de  $\mathcal{S}'$ , nós concluímos que  $\mathcal{S}'$  contém  $k'$  subconjuntos mutuamente disjuntos. Também é possível que  $w_i, w_j, w_p$  sejam adjacentes a  $v_1 \in C$ , sendo  $w_p$  adjacente a um  $v_3 \in C$ . Neste caso, também se  $w_i, w_j, w_p \in R_1$  e  $w_q \in R_2$ , temos que  $w_q \in H[R_1] \cap H[R_2]$ . O que completa a prova. ■

A Figura (4.1) nos mostra uma instância de CONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO e a Figura (4.2) nos mostra a transformação de tal instância para CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$ .

Como é NP-difícil computar o número de Radon de grafos de partição, também é NP-difícil computar o número de Radon de grafos estrelados, classe que foi discutida para a convexidade geodética. Também será, por consequência, NP-difícil encontrar o número de Radon para grafos gerais.

$S=\{S1,S2,S3\}$   
 $S1=\{a,b\}$   
 $S2=\{c,d\}$   
 $S3=\{e\}$

Figura 4.1: É dada uma instância de CONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO.

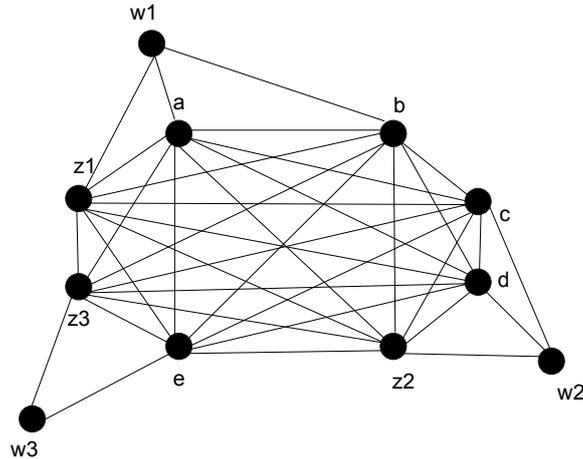


Figura 4.2: Transformação da instância de CONJUNTO EMPACOTADOR MÁXIMO para CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$ . Observe que trata-se de um grafo de partição.

## 4.2 Cálculo do número de Radon de algumas classes de grafos

### 4.2.1 Número de Radon de caminhos

Para cálculo do número de Radon de caminhos utilizaremos uma estratégia minimamente direta, contudo de grande valia: não podem existir três vértices consecutivos em nosso conjunto  $R$ , caso contrário já teremos uma partição de Radon. Tentaremos ao máximo evitar esta configuração na construção de nosso  $R$  máximo.

**Teorema 4.2.1.**  $r(P_n) = \lceil \frac{2n+3}{3} \rceil$ .

*Demonstração.* Tomemos um caminho  $P_n$  qualquer e  $R$  um conjunto anti-Radon. Um algoritmo simples para encontrar tal número de Radon é tomar os vértices cujos índices  $i$  são tais que  $i \equiv 1, 2 \pmod 3$  como elementos de  $R$  e os índices  $j$  que não pertencem a essas classes de congruência tomamos  $v_j$  não pertencente a  $R$ , sendo o caminho  $v_1 v_2 \cdots v_n$ . Assim, dividimos o problema em três casos.

Primeiro Caso: Se  $n \equiv 0 \pmod{3}$ . Tomando  $R_1 = \{v_{6i+1}\} \cup \{v_{6i+2}\}$  e  $R_2 = \{v_{6i+4}\} \cup \{v_{6i+5}\}$ , onde  $R = R_1 \cup R_2$ , com  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , conseguimos tal  $x = \{\max\{R\} + 1$ , sendo  $R$  um conjunto anti-Radon}. Como tomamos  $\frac{2}{3}$  do total de vértices, segue que  $r(P_{3k}) = x + 1$ , ou seja

$$r(P_{3k}) = \frac{2n}{3} + 1.$$

Logo,  $r(P_{3k}) = \lceil \frac{2n+3}{3} \rceil$ . A Figura (4.3) nos mostra a execução do algoritmo em que os vértices azuis pertencem a  $R_1$  e os vértices verdes pertencem a  $R_2$ .



Figura 4.3: Se  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , segue que um anti-Radon máximo possui exatamente  $\frac{2}{3}$  do total de vértices.

Observe que temos o seguinte problema equivalente:

*Mostre que de um conjunto de  $3k$  elementos  $(1, 2, \dots, n)$  todo subconjunto  $S$ , com  $|S| \geq 2k + 1$  possui pelo menos 3 elementos consecutivos.*

Usaremos o princípio das casas dos pombos. Observe que é possível construir  $S'$  com  $|S'| = 2k, k \in \mathbb{N}$ , sem que tal propriedade ocorra. Nossas gavetas serão conjuntos de três elementos  $\{3k' + 1, 3k' + 2 \text{ e } 3k' + 3\}, 0 \leq k' \leq \frac{n-3}{3}$ . Pelo princípio das gavetas generalizado [35], tendo  $2k + 1$  objetos, 1 gaveta terá 3 objetos, já que temos  $\frac{n}{3} = k$  gavetas. Isto dá a corretude do algoritmo.

Segundo Caso: Se  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Seguindo o mesmo algoritmo que o caso anterior, temos que  $(n - 1) \equiv 0 \pmod{3}$ . Então tomamos  $\frac{2(n-1)}{3} + 1$  vértices pertencentes a  $R$  (segundo o algoritmo descrito anteriormente), e conseqüentemente  $r(P_{3k+1}) = \frac{2(n-1)}{3} + 1 + 1 = \frac{2(n+2)}{3} = \lceil \frac{2n+3}{3} \rceil$ . A corretude neste caso segue o mesmo raciocínio do caso anterior. Observe a Figura (4.4), em que  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , e o algoritmo seguido é o mesmo para  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .

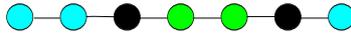


Figura 4.4: Se  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , segue que um anti-Radon máximo possui exatamente  $\frac{2(n-1)}{3} + 1$  vértices.

Terceiro Caso: Se  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Fazendo construção análoga às anteriores, teremos que  $r(P_{3k+2}) = \frac{2(n-2)}{3} + 2 + 1 = \frac{2n+5}{3} = \lceil \frac{2n+3}{3} \rceil$ . A corretude também é análoga à feita no primeiro caso.

Segue que  $r(P_n) = \lceil \frac{2n+3}{3} \rceil$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

■

É fácil perceber que dado  $k$  inteiro, é possível se construir um grafo com número de Radon igual a  $k$  para convexidade  $P_3$ , bastando tomar  $G = P_{\frac{3k-3}{2}}$  se  $k$  for ímpar e maior que 1, e  $G = P_{\frac{3k-4}{2}}$  se  $k$  for par e maior que 2.

## 4.2.2 Número de Radon de ciclos

O modo de se calcular o número de Radon de ciclos é análogo ao feitos para caminhos. Apresentamos o resultado através do Teorema (4.2.2).

**Teorema 4.2.2.**  $r(C_n) = \lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$ .

*Demonstração.* Analogamente a caminhos, tomemos os três seguintes casos.

Primeiro Caso: Se  $n \equiv 0 \pmod{3}$ . Tomando  $R_1 = \{v_{6i+1}\} \cup \{v_{6i+2}\}$  e  $R_2 = \{v_{6i+4}\} \cup \{v_{6i+5}\}$ , onde  $R = R_1 \cup R_2$ , com  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , e segue que  $r(C_{3k}) = \frac{2n}{3} + 1 = \lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$ .

Segundo Caso: Se  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Seguindo o mesmo algoritmo do caso anterior teremos que  $r(C_{3k+1}) = \frac{2(n-1)}{3} + 1 = \frac{2n+1}{3} = \lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$ .

Terceiro Caso: Se  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Fazendo construção análoga às anteriores, com a única diferença de que o vértice  $v_{3k+1} \in R$ , sendo  $R$  um conjunto anti-Radon de cardinalidade máxima. Segue que  $r(C_{3k+2}) = \frac{2(n-2)}{3} + 1 + 1 = \frac{2(n+1)}{3} = \lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$ .

Segue que  $r(C_n) = \lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

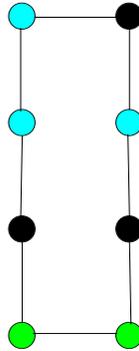


Figura 4.5: Os vértices azuis pertencem a  $R_1$  e os vértices verdes a  $R_2$ , da partição  $R = R_1 \cup R_2$ . Observe que o anti-Radon máximo tem exatamente 5 vértices e o número de Radon é  $\lfloor \frac{2 \cdot 8 + 3}{3} \rfloor = 6 = 5 + 1$ .

■

### 4.2.3 Número de Radon de grafos bipartidos completos

Para o cálculo do número de Radon de grafos bipartidos completos usaremos a estratégia análoga à apresentada para a mesma classe relativa à convexidade geodética.

**Teorema 4.2.3.**

$$r(K_{1,n-1}) = \begin{cases} 3, & n \in \{2, 3\}, \\ 4, & n \geq 4, \end{cases}$$

e para  $n, m \geq 2$ , temos  $r(K_{n,m}) = 3$ .

*Demonstração.* Temos que

$$r(K_{1,n-1}) = \begin{cases} 3, & n \in \{2, 3\}, \\ 4, & n \geq 4, \end{cases}$$

pois  $r(K_{1,2-1}) = r(P_2) = r(K_{1,3-1}) = r(P_3) = 3$ . No caso  $n \geq 4$ , podemos tomar  $v_1, v_2$  e  $v_3 \in R$  pertencentes à mesma partição de  $G$  que não teremos partição de Radon, mas tomando uma quarto vértice  $v_4 \in R$ , teremos testemunha de Radon (basta tomar  $v_1, v_2 \in R_1$  e  $v_3, v_4 \in R_2$ , e desta forma o vértice da outra partição pertence a  $H[R_1] \cap H[R_2]$ ).

Temos também que para  $n, m \geq 2$ ,  $r(K_{n,m}) = 3$ , pois como  $|R| = 3 = 2 + 1$  e temos duas partições, segue que existem dois vértices de  $R$ , digamos  $a$  e  $b$ , na mesma partição. Desta forma,  $\{a, b\}$  é um conjunto envoltória e assim o terceiro vértice  $c \in R$  será testemunha de Radon.

■

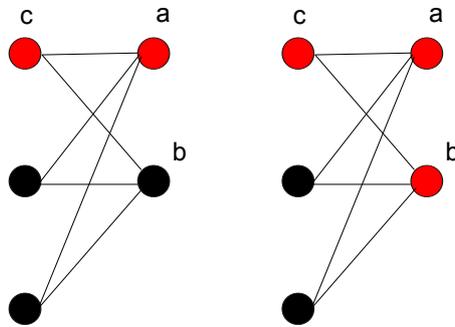


Figura 4.6: Observe que em qualquer grafo bipartido completo em que as partições são compostas por pelo menos dois vértices, teremos número de Radon igual a 3.

O parâmetro  $r(K_n)$  pode ser calculado facilmente e este sempre é igual a 3, para  $n \geq 2$  e 2 para  $n = 1$ .

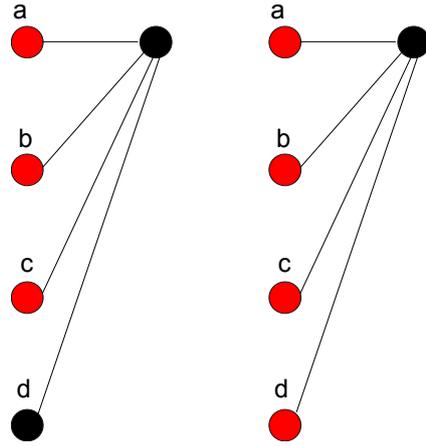


Figura 4.7: Observe que em qualquer grafo bipartido completo em que uma das partições é unitária, teremos número de Radon igual a 4.

#### 4.2.4 Número de Radon de árvores estritamente binárias

Para a classe das árvores estritamente binárias temos uma expressão analítica simples para o seu número de Radon, ao contrário de árvores gerais, como pode ser consultado em [25].

**Teorema 4.2.4.** *Se  $T$  é uma árvore estritamente binária, com  $n \geq 3$  então  $r(T) = l(T) + 1$ , onde  $l(T)$  é o número de folhas da árvore  $T$ .*

*Demonstração.* Seja  $R$  um conjunto anti-Radon de uma árvore estritamente binária. Então,  $R$  não possui partição de Radon. Seja  $T$  tal árvore estritamente binária com  $n$  elementos. Temos que  $r(G) = \frac{n+3}{2}$ . De fato, provemos a afirmação anterior por indução sobre  $n$ .

a) Para  $n = 3$ , a afirmação é trivialmente verdadeira, pois já verificamos o  $r(P_3) = 3 = \frac{3+3}{2}$  anteriormente.

b) Por hipótese de indução, vamos assumir que  $r(R') \leq \frac{n-1}{2}$  para uma árvore estritamente binária  $T'$  com  $n - 2$  vértices e  $R' \subset T'$ .

Primeiro caso: Se dois irmãos  $x, y \in R$

Então se  $z$  é o pai de  $x, y$  então  $z \notin R$ . Seja

$$T' = T - \{x, y\}$$

e

$$R' = (R - \{x, y\}) \cup \{z\}.$$

Então temos que:

$$|R'| \leq \frac{n(T')+1}{2} = \frac{n-2+1}{2} = \frac{n-1}{2}, \text{ e assim } |R| \leq |R'| + 1 \leq \frac{n+1}{2}$$

Segundo caso: O complementar do primeiro caso

Seja  $L$  o conjunto de folhas. Temos que  $|R \cap L| \leq \frac{|L|}{2}$ ,  $T' = T - L$  e  $R' = R - L$  e

$$|R'| \leq \frac{n(T') + 1}{2} = \frac{n - |L| + 1}{2}$$

e temos finalmente que

$$|R| \leq |R'| + \frac{|L|}{2} \leq \frac{n + 1}{2}.$$

Assim  $|R| \leq \frac{n+1}{2}$ , e de [47], sabemos que o número de folhas em uma árvore estritamente binária com  $n$  vértices é exatamente  $\frac{n+1}{2}$ . Segue que

$$r(T) = l(T) + 1.$$

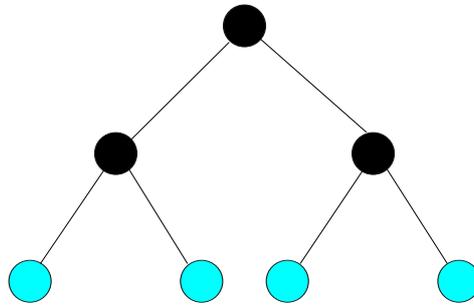


Figura 4.8: Não importa como particionamos o conjunto de vértices azuis, tal partição não é partição de Radon.

■

No artigo [25] foi mostrado um algoritmo polinomial para encontrar um conjunto anti-Radon máximo de uma árvore qualquer dada. Em tal artigo é mostrado que, mesmo para classe dos grafos bipartidos, é NP-completo reconhecer se um conjunto dado de qualquer cardinalidade é anti-Radon ou não.

## 4.2.5 Número de Radon de cografos

**Teorema 4.2.5.** *Se  $G$  é cografo que não é uma clique, então*

$$r(G) = \begin{cases} 4, & \text{se } V(G) = V(G_1) \cup \{x\} \\ 3, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

*Demonstração.* De fato, construindo  $G$  recursivamente, para que  $G$  resulte em um grafo conexo, precisamos aplicar a operação de união junta. Vamos dividir o problema em casos:

- Se  $V(G) = V(G_1) \cup \{x\}$ . Neste caso, o número de Radon não é 3, como mostra a Figura (4.9).

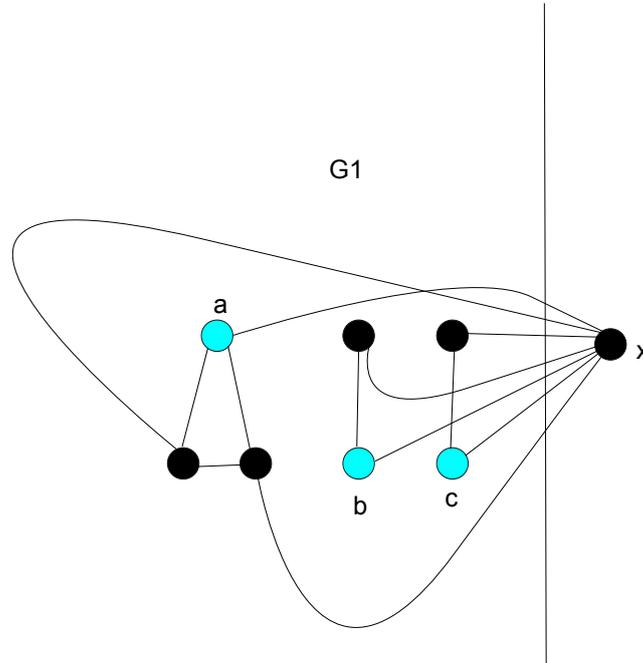


Figura 4.9: Se  $R = \{a, b, c\}$ , não existe partição de Radon neste cografo.

Para este tipo de cografo  $G$ ,  $r(G) = 4$ , pois se  $R = \{a, b, c, d\}$  temos que  $l$  será testemunha de Radon, bastando admitir  $R_1 = \{a, b\}$  e  $R_2 = \{c, d\}$ .

- Se existem  $u \in G_i$ ,  $v \in G_j$  e  $w \in G_k$ ,  $i \neq j, i \neq k, j \neq k$ , e  $u, v, w \in R$  então existem em  $G$  as arestas  $(u, v)$ ,  $(u, w)$  e  $(v, w)$ . Basta tomar  $R_1 = \{u, v\}$  e  $R_2 = \{w\}$ , pois assim  $w \in H[R_1]$ . Assim  $w \in H[R_1] \cap H[R_2]$ .
- Se existem  $u, w, v \in G_i$  basta tomarmos  $R_1 = \{u, v\}$  e  $R_2 = \{w\}$  e desta forma existirá  $l \in G_j, i \neq j$  e outro  $t \in G_m, i \neq m$  tal que  $l \in H[R_1]$  e  $t \in H[R_1]$ . Iterativamente, como existem as arestas  $(w, l)$  e  $(w, t)$ , segue que  $w \in H[R_1]$  e assim  $w \in H[R_1] \cap H[R_2]$ .
- Se  $u, v \in G_i$  e  $w \in G_j$ , tomando  $R_1 = \{u, v\}$  e  $R_2 = \{w\}$  teremos que  $w \in H[R_1]$  e consequentemente  $w \in H[R_1] \cap H[R_2]$ , já que existem as arestas  $(u, v)$  e  $(v, w)$ .

Devido aos últimos três itens, concluímos que se  $G$  é um cografo que não é uma clique e  $V(G)$  não é da forma  $V(G_1) \cup \{x\}$ , então  $r(G) = 3$ .

■

### 4.3 Algoritmo eficiente para o cálculo do número de Radon de grafos de intervalo unitário biconexos

Dado um grafo de intervalo unitário biconexo  $G$ , queremos descobrir um conjunto anti-Radon máximo de  $G$ . Seja  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a ordenação canônica de  $G$ .

**Teorema 4.3.1.** *Se  $G$  possui vértices à distância 3 em sua ordenação canônica, então  $R \subset V(G)$  é anti-Radon máximo se e somente se todo vértice de  $R$  está à distância pelo menos três um do outro e se a subsequência da ordenação canônica  $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_{|R|}\}$  é o conjunto de todos os vértices de  $R$ , com  $v'_i$  e  $v'_{i+1}$  estando à distância exatamente três um do outro, com  $1 \leq i \leq |R| - 1$ . Se não existirem vértices à distância 3 em  $G$  então  $R$  é máximo quando  $|R| = 2$ .*

*Demonstração.* Primeiramente observe os seguintes fatos:

- Se não existe um par de vértices à distância 3 em  $G$  então quaisquer dois vértices que pertencem a  $R$  será um conjunto envoltória.

- Se existe apenas um par de vértices à distância 3 um do outro, seja então  $\{a, c\}$  este par. Se pusermos  $d(a, b) = 2$ , com  $a, b \in R$ , geraremos todo o grafo, devido à biconexidade de  $G$ . Se  $\{a, c\} \subset R$ , mas  $\{a, b\} \not\subset R$  ao invés de  $a, b$ , também teremos um anti-Radon máximo e  $|R| = 2$ .

Vamos agora realizar a prova.

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $\{a, b\}$  e  $\{b, c\}$  dois pares de vértices à distância 3 um do outro. Observe que se existe um par de vértices qualquer  $\{b', c'\}$  com  $d(b', c') \leq 2$  então  $b'$  e  $c'$  não podem pertencer a  $R$  neste caso pois  $\{a, b, c\}$  formam um anti-Radon de cardinalidade maior que a de  $\{b', c'\}$ . Assim sendo, devemos então, para construir um conjunto anti-Radon máximo, não atribuir par de vértices algum que estejam à distância 2 um do outro a  $R$ . Desta forma, sendo  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a ordenação canônica de  $G$ , podemos atribuir  $v_1 = a$  a  $R$ , depois  $b$ , sendo  $b$  o primeiro vértice na ordenação canônica à distância 3 de  $a$ . Analogamente inserimos  $c$  em  $R$ , sendo  $c$  o primeiro vértice na ordenação canônica com a propriedade  $d(a, c) = 6 = 3 \times 2$  e assim sucessivamente até não haver mais vértices à uma distância múltipla de 3 de  $a$  na ordenação canônica. Observe que se não começarmos tomando  $v_1$  em  $R$ , seguindo tal procedimento o conjunto anti-Radon construído desta forma terá cardinalidade menor ou igual do que se tivéssemos começado por  $v_1$ . De fato, façamos o seguinte: Ligue os vértices que estão à distância exatamente 3 por uma aresta. Começando em  $v_1$ , observe que este procedimento nos remete a um algoritmo guloso semelhante ao desenvolvido para a convexidade geodética. Se  $v_1, b_2, b_3, \dots, b_{|R|}$  são os vértices de  $R$  e  $v'_1, b'_2, b'_3, \dots, x$  são os vértices à distância 3 com  $v_1 \leq v'_1$  na ordenação canônica, então pelo mesmo argumento lá feito, teremos que  $b_i \leq b'_i$ , para todo  $1 \leq i \leq |R|$ . De fato, se para algum  $i$  temos que  $b_i > b'_i$  e

$$d(b_1, b_i) = 3 + 3 + 3 + \dots + 3 = 3 \cdot (i - 1)$$

porém

$$d(b'_1, b'_i) = d(b'_1, b'_2) + d(b'_2, b'_3) + \dots + d(b'_{i-1}, b'_i) = 3 \cdot (i - 2) + d(b'_{i-1}, b'_i) < 3 \cdot (i - 1)$$

o que é absurdo. Desta forma, todo  $b_i$  está à esquerda de  $b'_i$  na ordenação canônica de  $G$  e assim  $R$  é o anti-Radon máximo construído.

( $\Rightarrow$ ) Se  $R$  é anti-Radon máximo, então todos os vértices de  $R$  estão à distância pelo menos três um do outro. Suponha que algum par de vértices de um outro conjunto  $R'$  com índices consecutivos esteja à distância maior ou igual que quatro um do outro. Seja  $x_1, x_2, \dots, x_{|R'|}$  os vértices de  $R'$  com  $d(x_i, x_{i+1}) > 3$ . Desta forma, pelo prova da suficiência, temos que  $b_{i+1} \leq x_{i+1}$ . Seguindo o raciocínio, removendo-se os vértices à esquerda de  $b_{i+1}$  e executando o mesmo procedimento, o número de vértices em  $R$  será maior ou igual aos de  $R'$ . ■

Um simples algoritmo para encontrar o conjunto anti-Radon máximo é colocar  $v_1$  em  $R$ , logo após atribuir  $v_h$  a  $R$  (com  $v_h$  sendo o primeiro vértice na ordenação canônica a distância  $3 = 3 \times 1$  de  $v_1$ ), e depois atribuir  $v_j$  a  $R$  (com  $v_j$  sendo o primeiro vértice na ordenação canônica a distância  $6 = 3 \times 2$  de  $v_1$ ), e assim sucessivamente, até que exista um último  $k$  natural e um  $l \leq n$  natural tal que  $v_l$  está a distância  $3k$  de  $v_1$ . O conjunto  $R = \{v_1, v_j, \dots, v_l\}$  será um anti-Radon máximo e  $r(G) = |R| + 1$ . A complexidade do algoritmo será  $O(n)$ , já que percorremos toda a ordenação canônica uma única vez, nos perguntando quais os valores das distâncias de cada vértice ao vértice  $v_1$ .

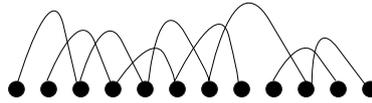


Figura 4.10: Vejamos como o algoritmo faria para encontrar um conjunto anti-Radon máximo do grafo de intervalo unitário acima. Cada aresta desenhada forma uma clique maximal. Encontre-se a ordenação canônica do grafo.

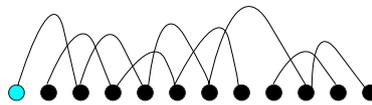


Figura 4.11: Coloca-se o primeiro vértice da ordenação canônica  $v_1$  em  $R$ .

As figuras (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13) dão exemplo do funcionamento do algoritmo para grafos de intervalo unitário biconexos.

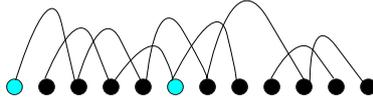


Figura 4.12: O primeiro vértice que está à distância 3 de  $v_1$  é posto em  $R$ .

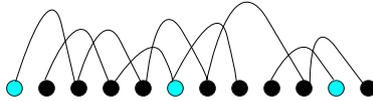


Figura 4.13: Coloca-se o primeiro vértice na ordenação canônica que esteja à distância  $6 = 3 \times 2$  de  $v_1$  em  $R$ . Verifica-se que não existe mais vértices a uma distância múltipla de 3 de  $v_1$  e o algoritmo acaba. O número de Radon do grafo de intervalo unitário do exemplo é  $3 + 1 = 4$ .

### 4.3.1 Outras classes discutidas na convexidade geodética

Para um grafo co-bipartido  $G$ , de cliques  $A$  e  $B$ , observe que  $3 \leq r(G) \leq 5$ , já que se tivermos a garantia de que existem cinco vértices em  $R$ , pelo princípio das casas dos pombos, pelo menos três destes cinco vértices pertencem a  $A$  ou a  $B$ , e como  $A$  e  $B$  são cliques, obrigatoriamente existirá partição de Radon. Então existe um algoritmo,  $O(n^4)$  no pior caso para encontrar o número de Radon de um grafo co-bipartido, bastando testar na força bruta, todos os  $C_{n,3} + C_{n,4}$  se os subconjuntos de 3 e 4 elementos possuem ou não partição de Radon. Na prática teremos menos testes, pois em alguns casos já sabemos haver partição de Radon, como no caso em que três dos vértices pertencerem à mesma clique ( $A$  ou  $B$ ).

# Capítulo 5

## Conclusão e trabalhos futuros

A partir do problema do número de Radon no espaço  $\mathbb{R}^d$  foi proposto o estudo do número de Radon em grafos para as convexidades geodética e  $P_3$ . Além dos aspectos teóricos há o interesse neste estudo pela sua crescente aplicabilidade em assuntos gerais, tais como: redes sociais, marketing, entre outros.

Uma análise dos estudos já realizados sobre o número de Radon evidencia que o assunto foi estudado para convexidade geral, e algumas convexidades em grafos, mas não para as convexidades geodética e  $P_3$  para grafos não direcionados.

Relativo à convexidade geodética foram encontradas soluções polinomiais para o número de Radon de caminhos, ciclos, grafos bipartidos completos, árvores, cografos, grafos bloco, grafos de intervalo unitário, grafos co-bipartidos, grafos de partição e grafos estrelados. Também foi mostrado que trata-se de um problema NP-completo, reconhecer se dado um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , se  $G$  contém um conjunto anti-Radon de cardinalidade maior ou igual a  $k$ .

Considerando a convexidade  $P_3$ , foram encontradas soluções polinomiais para o número de Radon de caminhos, ciclos, grafos bipartidos completos, cografos e árvores estritamente binárias, cliques, grafos co-bipartidos e grafos de intervalo unitário biconexos. Também foi mostrado que trata-se de um problema NP-difícil, reconhecer se dado um grafo de partição  $G$  e um inteiro  $k$ , se  $G$  contém um conjunto anti-Radon de cardinalidade maior ou igual a  $k$ .

Dos resultados obtidos especificamente pelo autor da tese, foram publicados a NP-dificuldade de CONJUNTO ANTI-RADON MÁXIMO  $P_3$  para grafos de partição em [28] e o algoritmo para cálculo do número de Radon geodético de grafos de intervalo unitário em [27]. Os artigos [23, 25], são sobre temas não abordados na tese, mas [23] apresenta um limite superior para o número de Radon relativo à convexidade  $P_3$ . Em [23] mostra-se um limite superior para o número de Radon na convexidade  $P_3$  e em [25] mostra-se um algoritmo eficiente para encontrar o número de Radon de uma árvore qualquer e que dado um conjunto qualquer, é NP-completo reconhecer se este conjunto é anti-Radon para a convexidade  $P_3$ , mesmo para a classe dos grafos bipartidos. Segue a Tabela (5.1) com o resumo das contribuições desta tese.

Classe de grafo	Convexidade geodética	Convexidade $P_3$
Caminhos	3	$\lceil \frac{2n+3}{3} \rceil$
Ciclos	$\{3, 4\}$	$\lceil \frac{2n+3}{3} \rceil$
Clique	$\omega(G) + 1$ [6]	3
Bipartidos completos	$\{3, 4\}$	$\{3, 4\}$
Árvores	4 (que não é caminho)	$l(T) + 1$ (estritamente binária)
Cografos ( $\omega(G) \geq 3$ )	$\omega(G) + 1$	$\{3, 4\}$
Grafos bloco ( $\omega(G) \geq 3$ )	$\omega(G) + 1$	?
Grafos de partição ( $\omega(G) \geq 3$ )	$\{\omega(G) + 1, \omega(G) + 2\}$	NP-difícil [25]
Grafos estrelados ( $\omega(G) \geq 3$ )	$\{\omega(G) + 1, \omega(G) + 2\}$	NP-difícil (subclasse de partição)
Grafos co-bipartidos	$\{\omega(G) + 1, \omega(G) + 2\}$	algoritmo (força bruta - $O(n^4)$ )
Grafos de intervalo unitário	algoritmo - $O(n^3)$ [27]	algoritmo - $O(n)$ (biconexos)
Grafos Gerais	NP-completo	NP - difícil

Tabela 5.1: Resumo dos resultados desenvolvidos na tese .

Um grafo polar  $G$  (que é uma extensão de um grafo co-bipartido) é aquele em que o conjunto de vértices pode ser particionado  $V(G) = V(A) \cup V(B)$  de forma que  $A$  é um grafo multipartido completo e  $B$  é o complemento de um grafo multipartido completo. Também seria interessante fazer o reconhecimento de conjuntos anti-Radon de um grafo polar no caso em que  $B$  é uma clique, para a convexidade geodética. Um exemplo de um grafo polar é dado na Figura (5.1):  $A$  é um grafo 3-partido completo e  $B$  é o complemento de um grafo bipartido completo.

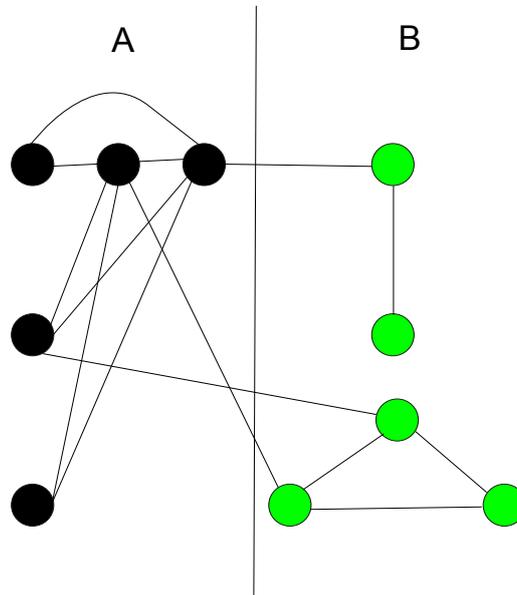


Figura 5.1: Exemplo de grafo polar.

Além desses trabalhos descritos, temos interesse em determinar o número de Radon de algumas classes de grafos direcionados em ambas as convexidades: geodética e  $P_3$ .

Também temos interesse em determinar o número de Radon de grafos de intervalo unitário quaisquer, relativo à convexidade  $P_3$

O **número de Caratheodory** de  $G$  é o menor inteiro  $c$  tal que, para todo conjunto  $S$  e todo vertice  $u \in H[S]$ , existe um conjunto  $F \subset S$  com  $|F| \leq c$  e  $u \in H[F]$ . O **número de Helly**  $h(C)$  de uma convexidade  $C$  é o menor inteiro  $k$  para o qual toda família de conjuntos convexos  $F$  de  $C$  satisfaz  $\bigcap_{S \in F} S \neq \emptyset$  se todas as subfamílias  $F'$  de  $F$  de tamanho  $k$  satisfazem  $\bigcap_{S' \in F'} S' \neq \emptyset$ .

Relativo as desigualdades apresentadas em [45] temos que  $c(G)h(G) + 1 \geq r(G) \geq h(G) + 1$ , que são desigualdades aplicadas ao contexto de convexidade geral, pretendemos observar o que ocorre se  $G$  é um grafo de uma determinada classe, relativo a uma convexidade específica - conjectura-se que as desigualdades apresentadas ficarão muito mais restritas neste caso.

# Referências Bibliográficas

- [1] ARTIGAS, D. ; DANTAS, S. ; DOURADO, M. C. ; SZWARCFITER, J. L. Convex covers of graphs. **Matematica Contemporanea**, Rio de Janeiro, v. 39, p. 31 - 38, 2010.
- [2] ARTIGAS, D. ; DANTAS, S. ; DOURADO, M. C. ; SZWARCFITER, J. L. Partitioning a graph into convex sets. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 311, p. 1968 - 1977, 2011.
- [3] BARBOSA, R. M. ; COELHO E. M. M. ; DOURADO M. C. ; SZWARCFITER, J. L. On the Carathéodory number for the convexity of paths of order three. **SIAM J. Discrete Math.**, Philadelphia, v. 26, n. 3, p. 929 - 939, 2012.
- [4] BIRKHOFF, G. Carathéodory and Harvard. In: RASSIAS, T. M.(Ed.). **Constantin Carathéodory - an international tribute**. 1991. v. 1., p. 65 - 75.
- [5] BRAVO R. S. F. **Cografos-(K,L): caracterização e reconhecimento**. 2006. Dissertação (Mestrado em Sistemas de Computação) - COPPE Sistemas e Computação - UFRJ, Rio de Janeiro.
- [6] BUCKLEY F. ; HARARY, F. **Distance in graphs** - Perseus Press, 1990.
- [7] CÁCERES, J. ; HERNANDO, M. C. ; MORA. M. On geodetic sets formed by boundary vertices. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 306, n. 2, p. 188 - 198, 2006.
- [8] CHANGAT, M. ; MATHEW, J. On triangle path convexity in graphs. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 206, p. 91 - 95, 1999.
- [9] CARATHÉODORY, C. **Gesammelte mathematische schriften**. Munich: C. H. Beck'sche Verlagbuchhandlung, 1955.
- [10] CENTENO C. C. ; DANTAS, S. ; DOURADO, M. C. ; RAUTENBACH, D. ; SZWARCFITER, J. L. Convex partitions of graphs induced by paths of order three. **Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science**, [S.I.] v. 12, p. 175 - 184, 2010.
- [11] CENTENO C. C. ; DOURADO, M. C. ; PENSO, L. D. ; RAUTENBACH, D. ; SZWARCFITER, J. L. Irreversible conversion of graphs. **Theoretical Computer Science**, Amsterdam, v. 412, p. 3693 - 3700, 2011.

- [12] CHEPOI, V. ; SOLTAN, V. P. Conditions for invariance of set diameters under  $d$ -convexification in a graph. **Cybernetics and Systems Analysis**, New York, v. 19, n. 6, p. 750 - 756, 1984.
- [13] CHEPOI, V. Separation of two convex sets in convex structures. **Journal of Geometry**, Basel, v. 50, p. 30 - 51 1994.
- [14] CORNEIL, D. G. ; LERCHS, H. ; BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Amsterdam, v. 3, p. 163 - 174, 1981.
- [15] COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. **In: ANNUAL SYMPOSIUM ON THEORY OF COMPUTING**, Shaker Heights, OH, Proceedings of 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, New York, ACM, 1971, p. 151 - 158, 1971.
- [16] DELIRE, J. M. Graphs with high Radon number. **Acad. Royal Belg. Bull. Cl. Sci.**, Bruxelles, v. 70, p. 14 - 24, 1984.
- [17] DENG, X. ; HELL, P. ; HUANG, J. Linear-time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs. **SIAM Journal on Computing**, Philadelphia, v. 25, n. 2, p. 390 - 403, 1996.
- [18] DOURADO, M. C. **Caracterizações e algoritmos para generalizações da propriedade de Helly**. Tese (Doutorado em Sistemas de Computação) - COPPE Sistemas e Computação, UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.
- [19] DOURADO, M. C. ; PROTTI, F. ; SZWARCFITER, J. L. On the computation of some parameters related to convexity of graphs **In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON DISCRETE MATHEMATICS**, 2006, Bangalore, India, Proceedings of International Conference on Discrete Mathematics. Lectures Notes of the Ramanujan Mathematical Society, p. 102-112, 2006.
- [20] DOURADO, M. C. ; GIMBEL, J. G. ; KRATOCHVÍL, J. ; PROTTI, F. ; SZWARCFITER, J. L. On the computation of the hull number of a graph. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 309, p. 5668 - 5674, 2009.
- [21] DOURADO, M. C. ; PROTTI, F. ; SZWARCFITER, J. L. Complexity results related to monophonic convexity. **Discrete Applied Mathematics**, Amsterdam, v. 158, p. 1268 - 1274, 2010.
- [22] DOURADO, M. C. ; PROTTI, F. ; SZWARCFITER, J. L. Some remarks on the geodetic number of a graph. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 310, p. 832 - 837, 2010.
- [23] DOURADO, M. C. ; RAUTENBACH, D. ; SANTOS, V. F. ; SCHÄFER, P. M. ; SZWARCFITER, J. L. ; TOMAN, A. An upper bound on  $P_3$ -Radon number. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 312, p. 2433-2437, 2012.

- [24] DOURADO, M. C. ; RAUTENBACH, D. ; SANTOS, V. F. ; SZWARCFITER, J. L. Characterization and recognition of Radon-independent sets in split graphs. **Information Process Letters**, Amsterdam, v. 112, n. 24, p. 948 - 952, 2012.
- [25] DOURADO, M. C. ; RAUTENBACH, D. ; SANTOS, V. F. ; SCHÄFER, P. M. ; SZWARCFITER, J. L. ; TOMAN, A. On the Radon number for  $P_3$ -convexity. In: **LATIN-2012, theoretical informatics**, p. 267-278, 2012.
- [26] DOURADO, M. C. ; PROTTI, F. ; RAUTENBACH, D. ; SZWARCFITER, J. L. On the convexity number of graphs. **Graphs and Combinatorics**, Tokyo, v. 28, p. 333 - 345, 2012.
- [27] DOURADO, M. C. ; SZWARCFITER, J. L. ; TOMAN, A. The Radon number on graphs. In: **LATIN AMERICAN WORKSHOP ON CLIQUES IN GRAPHS**, 5., 2012. Buenos Aires. Proceedings. Buenos Aires: IOOCG/Universidade de Buenos Aires, 2012.
- [28] DOURADO, M. C. ; RAUTENBACH, D. ; SANTOS, V. F. ; SCHÄFER, P. M. ; SZWARCFITER, J. L. ; TOMAN, A. Algorithmic and structural aspects of the  $P_3$ -Radon number. **Annals of Operations Research**, v. 206, p. 75 - 91, 2013.
- [29] DOURADO, M. C. ; RAUTENBACH, D. ; SANTOS, V. F. ; SZWARCFITER, J. L. On the geodetic Radon number of grids. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 313, p. 111-121, 2013.
- [30] DUCHET, P. The convex sets in graphs II. Minimal path convexity. **J. Combin. Theory**, Duluth, Ser. B 44, p. 307 - 316, 1988.
- [31] EDELMAN, P. H. ; JAMISON, R. E. The theory of convex geometries. **Geometriae Dedicata**, Dordrecht, v. 19, p. 247 - 270, 1985.
- [32] ERDÖS, P. ; FRIED, E. ; HAJNAL, A. Some remarks on simple tournaments. **Algebra Universalis**, Cambridge, v. 2, p. 238 - 245, 1972.
- [33] FARBER, M. ; JAMISON, R. E. On the local convexity in graphs. **Discrete Mathematics**, v. 66, p. 231 - 247, 1987.
- [34] GAREY, M. R. ; JOHNSON, D. D. **Computers and intractability: a guide to the theory of the NP- completeness**. San Francisco, CA: Freeman, 1979.
- [35] GAVRÍLOV, G. P. ; SAPOZHENKO, A. A. **Problemas de matemática discreta**. Moscow: MIR, 1980.
- [36] GOLUBIC, M. C. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**. Boston: Academic Press, 1980. (Computer Science and Applied Mathematics).
- [37] GRÖTSCHEL, M. ; LOVÁSZ, L. ; SCHRIJVER, A. Polynomial algorithms for perfect graphs. **Annals of Discrete Mathematics**, Amsterdam, v. 21, p. 325 - 356, 1984.
- [38] HARARY, F. ; NIEMIMEM, J. Convexity in graphs. **Journal of Differential Geometry**, Bethelhem, v. 16, p. 185 - 190, 1981.

- [39] HELLY, E. Über lineare funktionaloperationen. **S.-B. Akad. Wiss. Wien** 121, p. 265-297, 1912.
- [40] HELLY, E. Über reihenentwicklungen nach funktionen eines orthogonalensystems. **S.-B. Akad. Wiss. Wien** 121, p. 1539-1549, 1912.
- [41] HELLY, E. Über systeme linearer gleichungen mit unendlich vielen unbekanntem. **Monatsh. Math.**, New York, v. 31, n. 1, p. 60 - 91, 1921.
- [42] HELLY, E. Über mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen punkten. **Jber. Deutsch. Math. Verein.**, Stlittgard, v. 32, p. 175-176 , 1923.
- [43] HELLY, E. Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen punkten. **Monatsh. Math.**, New York, v. 37, p. 281 - 302, 1930.
- [44] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: MILLER, R. E; THATCHER, J. W. (Eds). - **Complexity of Computer Computations**. New York: Plenum, 1982. p. 85 - 103.
- [45] KAY, D. ; WOMBLE, E. W. Axiomatic convexity theory and relationships between the Carathéodory, Helly and Radon numbers. **Pacific J. Math.**, Carmel Valley, v. 38, p. 471 - 485, 1971.
- [46] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 1981.
- [47] MARKENZON, L. ; SZWARCFITER, J. L. **Estruturas de dados e seus algoritmos, terceira edição**. Rio de Janeiro, LTC, 2010.
- [48] PARKER, D. B. ; WESTHOFF, R. F. ; WOLF, M. J. On two-path convexity in multipartite tournaments. **European J. Combinatorics**, London, v. 29, p. 641 - 651, 2008.
- [49] RADON, J. Theorie und anwendungen der absolut addtiven mengenfunktionen. **Sitzungsber, Kaiserl. Akad. Wiss. Wien Math.-Natur. Kl.** 122, p. 1295 - 14380, 1913.
- [50] RADON, J. Über eine erweiterung des begriffes der konvexen funktionen mit einer anwendung auf die theorie der konvexen körper. **Sitzungsber, Kaiserl. Akad. Wiss. Wien Math.-Natur. Kl.** 125, p. 241 - 258, 1916.
- [51] RADON, J. Über eine besondere art ebener konvexer kurven. **Ber. Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Kaiserl** 68, p. 123 - 128, 1916.
- [52] RADON, J. Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. **Ber. Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Kaiserl** 69, p. 262 - 277, 1917.
- [53] RADON, J. Mengen konvexer körper, die einen gemeinsamen punkt enthalten. **Math. Ann.**, Berlim, v. 83, n. 1/2, p. 113 - 115, 1921.
- [54] RADON, J. Annäherung konvexer körper durch analytisch begrenzte. **Monatsh. Math. Physik**, Wien, v. 43, n. 1, p. 340 - 344, 1936.

- [55] RADON, J. Über geschlossene Extremalen und eine einfache herleitung der isoperimetrischen ungleichung. **Ann. Mat. Pura Appl.**, Bologna, v. 29, n. 1, p. 315 - 320, 1949.
- [56] RADON, J. ; GRUBER, P. **Collected works / Johann Radon - v. 1.** Vienna, Verlag der Wissenschaften, 1987.
- [57] RADON, J. ; GRUBER, P. **Collected works / Johann Radon - v. 2.** Vienna, Verlag der Wissenschaften, 1987.
- [58] ROBERTS, F. S. Indifference Graphs: In: HARARY, F. (Ed.). **Proof techniques in graph theory.** Boston: Academic Press, 1969.
- [59] VEL, M. L. J. Van de. **Theory of Convex Structures.** Amsterdam, North-Holland, 1993.
- [60] Disponível em: <http://ptmat.fc.ul.pt/> (Acesso em 18/08/2011).
- [61] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk> (Acesso em 15/05/2011).
- [62] Disponível em: <http://apprendre-math.info> (Consulta em 01/05/2011).
- [63] Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk> (Consulta em 12/12/2011).

# Apêndice A

## Epílogo - Constantin Carathéodory

Constantin Carathéodory (1873-1950) teve ascendência grega, porém nasceu na Alemanha. Em 1886 entrou para Athénée Royal d'Ixelles, estudando lá até se graduar. Neste interim, Carathéodory começou o treinamento para ser engenheiro militar. Trabalhou na organização de Universidades Gregas durante a guerra entre a Turquia e a Grécia, que teve seu estopim em 1897. Tinha o costume de estudar com alguns livros clássicos de matemática tais como *Cours d'Analyse* de Jordan. Carathéodory recebeu o título de doutor em 1904 pela Universidade de Göttingen por sua tese *Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung*. Em 1908 começou a lecionar em Göttingen. Em 1909 se casou-se com Euphrosyne Carathéodory. Os anos da Primeira Guerra Mundial foram bastante difíceis para Carathéodory e sua família, pois ficaram isolados em Göttingen<sup>1</sup>.

Em 1919 decidiu viajar até a Grécia com sua esposa e seus dois filhos Stephanos e Despina, onde foi editor de dois periódicos mais importantes da matemática (até hoje) - *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* e *Mathematische Annalen*. Começou a lecionar em 1920 na Universidade de Atenas. Em 1928 visitou a *American Mathematical Society* e a Universidade de Harvard. Influenciou uma grande leva de matemáticos de Harvard, tais como Élie Cartan, G. D. Birkhoff e Marshall Stone.

Carathéodory foi fortemente influenciado por David Hilbert. Obteve resultados fundamentais em diversos ramos da matemática, em especial na teoria das equações diferenciais parciais, análise complexa (métrica de Carathéodory), e na teoria da medida e da integração. Suas contribuições para o Cálculo Variacional, Análise Complexa, Óptica Geométrica e Termodinâmica, bem como Física Teórica, influenciaram muitos matemáticos famosos. De suas correspondências com Albert Einstein, conclui-se que ele forneceu fundamentais esclarecimentos matemáticos ao pai da Teoria da Relatividade. Carathéodory deduziu uma desigualdade, que 20 anos depois, conhecida entre outros nomes como equação ou desigualdade de Bellman, serve de base para o princípio da otimização dinâmica, e desde então tem sido muito utilizada além da matemática pura. Suas pesquisas sobre integrais simples no cálculo variacional não se limitam ao plano, pois

---

<sup>1</sup>Epílogo escrito baseado nas fontes [4, 61]

ele as desenvolveu para o espaço tridimensional. Além disso ele trabalhou também com integrais múltiplas, Óptica, Mecânica. Um lugar especial foi dedicado à termodinâmica. Já em 1909 sua publicação sobre o tema *Erste axiomatisch strenge Begründung der Thermodynamik* recebeu grande atenção de Max Planck e Max Born.

Em 1926 ele chegou à conclusão de que nenhum sistema de lentes e espelhos existe sem aberração óptica, com exceção do caso trivial de espelhos planos. Em 1940 publicou juntamente com Bernhard Schmidt a teoria de um telescópio refletor sobre Câmara de Schmidt, cujo primeiro exemplar foi construído em Hamburgo e ao qual outros imediatamente se seguiram, por exemplo no Observatório de Monte Palomar.

Carathéodory descobriu vários princípios matemáticos, incluindo o princípio do máximo. O seu teorema sobre mensurabilidade ainda é objeto de numerosos estudos matemáticos. Retornou a Munique em setembro do mesmo ano. Carathéodory fez contribuições significativas em Teoria da Medida, Cálculo das Variações, Teoria Ergódica, Teoria das Funções de uma Variável, Termodinâmica, Relatividade Especial, Mecânica e Óptica Geométrica. Carathéodory escreveu vários livros incluindo *Lectures of Real Functions*(1918), *Conformal Representation* (1932), *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* (1935) e *Geometric Optics* (1937).



Figura A.1: Carathéodory - Foto retirada de [9].

# Apêndice B

## Epílogo - Johann Radon

Johann Radon foi filho de Anton Radon e Anna Schmiedeknecht. Anton trabalhava em um banco local, tinha sido casado antes e teve filhas com sua primeira esposa. Johann, foi criado, com as irmãs em Tetschen (até os dez anos de idade). Lá ele frequentou a escola primária, onde concluiu o curso que possuía duração de cinco anos em apenas quatro anos<sup>1</sup>.

Em seguida, frequentou a escola secundária em Leitmeritz (agora Litomerice) na Boêmia, entre 1897 e 1905. Durante seus estudos, seu pai se aposentou do banco em Tetschen e toda a família se mudou para Leitmeritz. Seus temas favoritos nesta escola foram matemática e línguas clássicas. Teve desempenho excelente em todas as disciplinas e por um momento pensou que poderia estudar línguas clássicas na universidade, mas depois seu amor pela matemática o levou a escolher esse curso. Ele repetiu a sétima série na escola devido a problemas de saúde e, além da asma que começou a incomodá-lo naquele momento, ele também teve que passar por uma cirurgia. Seu pai contratou um professor particular para se certificar de que Johann seria capaz de entrar na oitava série, após sua recuperação. Como escrito anteriormente, ele foi atraído pelas línguas clássicas, mas fez também considerar outras direções, como filosofia. Era um cantor talentoso e, em um estágio, também considerou treinar para se tornar um cantor de ópera.

Entrou na Universidade de Viena em 1905, tendo se mudado para aquela cidade com seus pais. O seu curso de graduação foi amplo em estudos nas áreas de matemática, física, química, lógica, filosofia. Também incluiu alguns cursos de palestras sobre música. Na matemática, fez cursos com Hans Hahn - um de aritmética teórica e um sobre os fundamentos da geometria - com Wilhelm Wirtinger - sobre equações diferenciais ordinárias - e com Franz Mertens - um sobre Álgebra e outro sobre teoria dos números - entre outros. Ele obteve o doutorado em 1910 com uma dissertação sobre o cálculo das variações realizado sob supervisão de Gustav von Escherich. Sua tese foi examinada pelo Wirtinger e von Escherich.

Os invernos de 1911-12 Radon passou em Göttingen, onde assistiu a palestras de Hilbert, tornou-se assistente na Universidade de Brünn (hoje Brno) por um ano e, em seguida, mudou-se para a Technische Hochschule de Viena para se tornar assistente do matemático atuarial

---

<sup>1</sup>Epílogo escrito baseado nas fontes [63, 56, 57].

Emanuel Czuber. Em 1913 apresentou sua tese de “Teoria e aplicações de funções absolutamente aditivas” definidas para a Universidade de Viena, com o intuito de satisfazer as exigências de sua habilitação para tornar-se professor. Von Escherich examinou esta dissertação de habilitação e escreveu:

“Ao criar uma teoria de funções absolutamente aditivas que, até então, quase não tinha sido investigada, o autor consegue com o desenvolvimento, uma teoria que contém equações integrais, formas lineares e bilineares em variáveis infinitas, como caso especial. Radon superou obstáculos consideráveis, através de uma combinação de Stieltjes, Lebesgue e conceitos Hellinger de uma integral. O trabalho está cheio de ideias originais e significativas.”

Johann casou com Maria - professora de ciências de uma escola secundária - em 1916. Eles tiveram quatro filhos, dos quais o primeiro nasceu em 1917, mas viveu apenas 18 dias. Eles, então, tiveram logo após um filho chamado Hermann, que nasceu em 1918, um filho Ludwig que nasceu em 1919, e uma filha, Brigitte, nascida em 1924. Hermann morreu de uma doença em 1939, Ludwig foi morto na frente russa em 1943. Brigitte obteve o grau de doutora em Matemática e se casou com o matemático Erich Bukovics em 1950.

Em 1919, Radon tornou-se um professor extraordinário em Hamburgo, logo após ser promovido a professor extraordinário em Viena. A Universidade de Hamburgo era nova (aberta em maio 1919). Embora feliz em Hamburgo, ele deixou a cidade para se tornar um professor catedrático em Greifswald, em 1922, onde sucedeu Hausdorff. Radon tinha uma vida social agradável em Greifswald, e gostava bastante de velejar.

Ele se mudou para Erlangen em 1925. Assim como em Greifswald, Radon e sua esposa tiveram uma vida social agradável em Erlangen. Eles organizavam festas à fantasia e Radon gostava de tocar violino em um trio.

Em 1928 Radon mudou-se novamente, desta vez para a Universidade de Breslau. Depois de momentos felizes em Greifswald e Erlangen, o destino foi cruel a ele em Breslau. Seu filho Hermann foi diagnosticado como tendo uma doença incurável e, apesar das tentativas árduas para que ele recuperasse a saúde, ele lentamente se deteriorou. Devido a preocupações com sua família, Radon recusou a oferta de uma Cadeira de Professor em Viena, no ano de 1938. O próprio Radon adoeceu e foi operado em 1939. Estava se recuperando no hospital, quando foi informado da morte de Hermann. Em 1939, marco do início da II Guerra Mundial, seu filho Ludwig serviu no exército alemão, morrendo em 1943 após ser ferido mortalmente na frente russa. Como a ofensiva russa varreu rapidamente o oeste europeu, o centro de Breslau foi bombardeada em 07 outubro de 1944, mas o Instituto de Matemática de lá ficou essencialmente intacto (apenas 4 painéis de vidro foram quebrados). Em janeiro de 1945 o exército russo estava avançando para Breslau e foi tomada uma decisão para mover os matemáticos da cidade. Em fevereiro, de Feigl e seus colegas do Instituto de Matemática mudaram-se de Breslau para Schönburg - Castelo de Wechselburg. Radon se juntou a eles em Wechselburg onde não havia livros, anotações de aula, ou recursos de qualquer espécie. Radon deu um curso sobre Análise Complexa completamente de memória já que não tinha materiais disponíveis para ajudá-lo.

Como Johann tinha parentes em Innsbruck, ele fez um lance ousado para se deslocar para

aquela cidade. Ele e sua família fizeram uma viagem tortuosa através da Europa devastada pela guerra, chegando a Innsbruck depois de muitas dificuldades. Lá começou a ensinar imediatamente, e permaneceram até o verão de 1946. Depois de um desentendimento inicial, quando os colegas de Viena pensavam que ele não estava interessado em uma das duas vagas para professor, ele foi nomeado para iniciar as suas funções em 1 de Outubro de 1946. Permaneceu ali pelo resto de sua vida, servindo como reitor durante 1951-52, e 1954.

Radon estudou o cálculo das variações em Geometria Diferencial, que o levou realizar aplicações em Teoria dos Números. Foi enquanto ele estudava aplicações do Cálculo das Variações em Geometria Diferencial que descobriu curvas agora chamadas curvas de Radon. Seus melhores resultados conhecidos envolvem a combinação das teorias da integração de Lebesgue e Stieltjes, que apareceu pela primeira vez em sua tese de habilitação (já mencionada anteriormente) e, em seguida, em uma importante segunda obra intitulada *Über Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen* (1919).

Ele assumiu uma importância fundamental para a Análise Funcional e tornando-se de igual importância para a aplicação do potencial logarítmico. Em seguida, escreveu um artigo sobre funções convexas e conjuntos (foco desta tese) e na determinação de funções a partir dos valores de suas integrais em variedades determinadas (*Über die Bestimmung von durch ihre Funktionen Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten* (1917)), que contém a transformada de Radon que desempenha um papel importante hoje, especialmente na medicina e geofísica.

Durante 1918-1919, trabalhou em Geometria Diferencial Afim. Em seguida, em 1926, em Geometria Diferencial Conformada. Estudou também a Geometria Riemanniana, assim como problemas geométricos, que surgiram no estudo da relatividade.

Radon teve uma longa associação com a Academia Austríaca de Ciências. Sua tese de doutorado e sua tese de habilitação foram ambas publicados pela Academia. Ele foi eleito membro correspondente da Academia em 1939, e membro de pleno direito em 1947. Foi presidente da Secção de Matemática e Física da Academia entre 1952 e 1956. Serviu também o presidente da Sociedade Austríaca de Matemática de 1948 a 1950.

Radon mostrou um grande interesse em convexidade. Tendo publicado 4 artigos nesta área ([50, 51, 53, 54]). O artigo [55] possui uma forte interrelação entre convexidade e seus trabalhos sobre Teoria da Medida [49] e a Transformada de Radon [52]. As curvas e partições de Radon [51, 53] foram suas maiores contribuições para a convexidade.

Em 1956 sua saúde começou a ficar abalada, vindo a falecer em vinte e cinco de maio deste mesmo ano.



*D. J. Radon*

Figura B.1: Radon - Foto retirada de [57].

# Apêndice C

## Epílogo - Eduard Helly

1

Nascido primeiro de junho de mil oitocentos e oitenta e quatro, na cidade de Viena, Áustria, o matemático Eduard Helly se graduou e obteve seu Ph.D em 1907. Durante alguns anos seguintes pesquisou e ensinou em Göttingen, publicando 4 volumes [39, 40, 41, 42] contendo soluções de problemas de geometria e aritmética. O primeiro artigo [39] trata de alguns tópicos de análise funcional. Seu famoso teorema sobre a interseção de conjuntos convexos, chamado de “teorema de Helly” foi descoberto por ele em 1913 e comunicado a Radon.

Helly se alistou no exército Austríaco em 1914 (pertencente à Tríplice Aliança). Foi ferido por russos (pertencentes à Tríplice Entente), sendo tomado como prisioneiro na Sibéria. Ele retornou à Viena em 1920. Em 1921 se casou e começou a trabalhar na Universidade de Viena. Ele deu importantes contribuições na área atuarial. O “teorema de Helly” foi publicado em 1923 no artigo [42], após a publicação de Radon e König, e a sua extensão para conjuntos gerais em 1930 [43]. Dentro de Teoria dos Grafos, podemos encontrar um trabalho bastante significativo envolvendo a propriedade de Helly para hipergrafos [18]. Helly se mudou para os Estados Unidos em 1938, falecendo em 1943. Sua esposa Elizabeth era matemática e seu filho Walter físico Ph.D. pelo M.I.T.



Figura C.1: Helly - Foto retirada de [62].

---

<sup>1</sup>Epílogo escrito baseado nas fontes citadas durante o texto.