UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

NATANAEL PEIXOTO QUINTINO

TEORIA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE ONDA

Rio de Janeiro
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

NATANAEL PEIXOTO QUINTINO

TEORIA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE ONDA

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientador: Mauro Antônio Rincon

Rio de Janeiro
2014

Q7 Quintino, Natanael Peixoto

Teoria e Simulação Numérica de uma Equação Não-Linear de Onda / Natanael Peixoto Quintino. – 2014.
103 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto de Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2014.

Orientador: Mauro Antônio Rincon.

1. Método de Galerkin. 2. Equação de Onda Não-linear. 3. Método de Newton Modificado. 4. Método dos Elementos Finitos. 5. Método de Newmark. 6. Simulação Numérica. – Teses. I. Rincon, Mauro Antônio (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto de Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. III. Título

CDD:

NATANAEL PEIXOTO QUINTINO

Teoria e Simulação Numérica de uma Equação Não-Linear de Onda

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado em: Rio de Janeiro, _____ de ______________ de _________.

Prof. Dr. Mauro Antônio Rincon (Orientador)

Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros

Profa. Dr. Maria Darci Godinho da Silva

Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes

Prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira

Prof. Dr. João Antônio Paixão

Ao meu grandioso Deus, à minha linda esposa Bianca e filha Ana Beatriz...

AGRADECIMENTOS

A meu Deus e Pai, por até os instantes finais dos preparativos desta dissertação esteve de perto me auxiliando a escrevê-la e por suprir todas as minhas necessidades derramando Graça e Paz em meu coração. Mais uma vez Te agradeço Deus... Obrigado!

À minha esposa, por tolerar os momentos onde eu me concentrava para fazer esta dissertação, pois minha atenção estava completamente voltada ao trabalho. Eu te amo meu amor!

À minha filha, pela felicidade e sorrisos expressos diariamente ao meu lado.

Aos meu pais, Edmilson e Mônica, por investirem nos meus estudo desde o ensino básico até o meado de meu mestrado, não só financeiramente mas, também, psicologicamente, não me deixando desanimar por alguns momentos de minha graduação.

À minha irmã pela parceria e cumplicidade.

Aos meus avós, Aventino e Maria, pela preocupação e prontidão para que nada faltasse e impedisse de continuar meus estudos, ressalto a doação de dinheiro para as passagens das conduções em certos momentos.

Aos amigos de mestrado que colocaram a disposição seus conhecimentos e seus trabalhos como uma base para a escrita deste trabalho.

Aos meus orientadores por se colocarem a disposição para saciar minhas dúvidas sempre que solicitados e por auxiliarem no aperfeiçoamento deste trabalho.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro, colocando a disposição uma bolsa que me permitiu dedicar tempo nos estudos e na escrita da dissertação.

MEMÓRIAS PÓSTUMAS

Em memória do doutor e professor Ivo Fernandez Lopez... Um pesquisador genial, um professor brilhante e uma pessoa generosa. Sempre disposto a ajudar, mesmo que isso o deixasse sobrecarregado. Foi uma das peças fundamentais na construção deste trabalho. Em memória deste, faço uma oração:

Venho ante a Ti, Deus vivo, rogar pela família de meu orientador e professor Ivo que veio a falecer por motivo qual ainda não conhecemos, que eles sejam consolados por Ti e que sintam a sua Paz que nunca se acaba e que conforta nossos corações nos momentos onde mais nos encontramos necessitados. Derrame a Sua graça e luz sobre eles e, em particular, sobre sua esposa Maria Darci, que suas forças não se acabem, mas pelo contrário, sejam renovadas para que possa dar continuidade aos ideais de seu querido esposo. Ele foi capaz de trocar um emprego por outro, cujo salário foi reduzido pela metade, pelo simples prazer de lecionar, e sem muitas pretenções, pois pensava somente em ajudar os outros. Peço sua benção, também, sobre todos aqueles que o conheceram e se tornaram seus amigos e todos os seus alunos que o consideraram e o respeitaram. Te agradeço meu Pai pois sei que estais ouvindo minha oração. Em nome de Jesus Cristo oro, amém.

RESUMO

Quintino, Natanael Peixoto. **Teoria e Simulação Numérica de uma Equação Não-Linear de Onda**. 2014. 103 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Nesse trabalho será apresentado um estudo teórico e numérico de uma equação de onda não-linear, considerando um termo fonte e condição de fronteira nula. A não-linearidade é dada pelo termo $|u|^\rho$, com $\rho > 1$. Os resultados teóricos consistem em estudar a existência e unicidade da solução fraca para o problema utilizando o Método de Faedo-Galerkin junto com argumentos de compacidade. Para obter a solução numérica aproximada serão utilizados o Método dos Elementos Finitos para a variável espacial e o Método das Diferenças Finitas para a variável temporal. O sistema não-linear, para cada passo de tempo, será resolvido pelo Método de Newton Modificado e o *Python* foi a linguagem computacional utilizada. Os resultados serão apresentados para os casos unidimensional e bidimensional.

Palavras-chave: Método de Galerkin, Equação de Onda Não-linear, Método de Newton Modificado, Método dos Elementos Finitos, Método de Newmark, Simulação Numérica.

ABSTRACT

Quintino, Natanael Peixoto. **Teoria e Simulação Numérica de uma Equação Não-Linear de Onda**. 2014. 103 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

In this work a theoretical and numerical study of a nonlinear wave equation with a source therm and zero boundary condition will be presented. The nonlinearity is given by the term $|u|^\rho$ with $\rho > 1$. The theoretical results are to study the existence and uniqueness of the weak solution to the problem using the Faedo-Galerkin Method with arguments of compactness. For the approximate numerical solution to the Finite Element Method to the space variable and the Finite Difference Method for the time variable the was used. The nonlinear system for each time step is solved by Modified Newton's Method and the *Python* was the computer language used. Results are presented for one-dimensional and two-dimensional cases.

Keywords: Galerkin's Method, Nonlinear Wave Equations, Modified Newton Method, Finite Elements Method, Newmark Method, Numerical Simulation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho objetiva dissertar sobre uma generalização da equação diferencial por mais tempo estudada, a equação de onda.

1.1 Histórico da Equação

A equação diferencial parcial base deste trabalho é a equação de onda que é representada na sua forma linear por

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

com $u = u(t, x)$, $t > 0$ e $x \in U$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Para que esta equação possua uma única solução é necessário conhecer alguns valores. Estes valores são chamados de condições iniciais e de fronteira, onde aquelas são dadas por $u_0(x) = u(0, x)$ e $u_1(x) = u_t(0, x)$, com $x \in U$, e estas por $u(t)\big|_{\partial\overline{U}} = u(t, x)$, com $x \in \partial\overline{U}$, ou seja, com x pertencente à fronteira do fecho de U. Estas condições serão dadas a priori.

Existe também a equação de onda não-homogênea, onde é acrescentado à equação (1.1) um termo $f = f(t, x)$, o qual será chamado de termo fonte. Sua representação é dada por

$$u_{tt} - \Delta u = f.$$

Este termo fonte $f : [0, \infty) \times U \to \mathbb{R}$ será dado, assim como as condições citadas anteriormente.

Fazendo uma interpretação física, a equação de onda (1.1) é um modelo simplificado para a vibração de uma corda, quando $n = 1$, membrana, quando $n = 2$, ou sólido elástico, quando $n = 3$. A solução $u(t, x)$ representa o deslocamento da onda em x no instante $t \geq 0$.

Uma família de modelos não-lineares desta equação pode ser representada pela equação de Klein-Gordon não-linear definida da seguinte forma:

$$u_{tt} - \Delta u + G(u) = f, \tag{1.2}$$

com $G(u)$ satisfazendo algumas restrições. Tais restrições podem ser encontradas no Artigo [9].

Algumas equações desta família de modelos não-lineares são bastante conhecidas e estudadas, como, por exemplo, a equação Sine-Gordon, quando toma-se $G(u) = \alpha \text{sen}(\lambda u)$, estudada nos Artigos [3] e [27], e a equação de Liouville modificada, quando $G(u) = \alpha e^{\beta u}$, estudada no Artigo [23], onde α, λ e β são constantes reais. Os Artigos [7], [16] e [8] estudam algumas outras possíveis definições para a função $G(u)$. Algumas outras definições para a função $G(u)$ podem ser encontradas no site [18].

Neste trabalho, tem-se por objetivo apresentar um estudo teórico e numérico da equação (1.2) considerando $G(u) = |u|^\rho$. Esta equação será denominada equação não-linear de onda e é dada por

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho = f, \tag{1.3}$$

com $\rho > 1$.

Um dos principais estudos relacionados à equação (1.3), foi realizado por *Jacques-Louis Lions*, ver o Livro [10] e o Artigo [11]. Existem, também, muitos outros estudos analíticos e aplicações de equações não-lineares da família (1.2), como por exemplo os Artigos [25],[24] e [17].

Existem, também, muitos trabalhos na área da física moderna estudando a Equação de Schröedinger não-linear cujo termo não-linear é igual ao mencionado no parágrafo anterior, como por exemplo os Artigos [2],[1] e [22]. Esta equação, desprezando o termo não-linear, possui como solução um vetor que contém informações quânticas de uma determinada partícula. Uma aplicação recente para esta equação, é na área de fibra ótica, assunto abordado no Artigo [1].

1.2 Proposta de Pesquisa

Neste trabalho será estudado o seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + |u|^{\rho} = f \quad \text{em} \quad Q, \quad \rho > 1, \\[2ex] u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\[2ex] u(0,x) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \quad \text{para} \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

onde $Q = (0,T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $T > 0$, com Ω sendo um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ possuindo fronteira Γ regular, e $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$. A solução u do problema (1.4) é uma função que depende das variáveis temporal t e espacial x, ou seja, $u = u(t,x)$.

Estuda-se nesta dissertação os aspectos teóricos e numéricos do sistema (1.4) com o objetivo de estabelecer existência e unicidade de solução fraca e também realizar simulações numéricas do comportamento da solução nos casos unidimensional e bidimensional.

Para o desenvolvimento teórico, aplica-se o Método de Faedo-Galerkin e resultados de compacidade para obter a convergência da solução aproximada para a solução exata e, para obter a solução numérica, aplica-se o Método dos Elementos Finitos para a variável espacial e o Método das Diferenças Finitas para a variável temporal. Com relação às ferramentas computacionais, utiliza-se a linguagem Python e suas bibliotecas para calcular e desenhar os gráficos das soluções.

2 ANÁLISE TEÓRICA

Neste capítulo será demonstrado a existência de solução para o problema (1.4), tomando por base o trabalho [15]. Vale citar de imediato que, embora a unicidade não seja demonstrada neste trabalho, sua demonstração poderá ser encontrada no mesmo Artigo [15] e no Livro [10].

2.1 Formulação Variacional

Tome $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Multiplicando a equação (1.4) por v e integrando em Ω, tem-se para quase todo $t \in (0,T)$

$$\int_\Omega u_{tt} v d\Omega - \int_\Omega (\Delta u) v d\Omega + \int_\Omega |u|^\rho v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.1}$$

Integrando a segunda parcela por partes, obtemos

$$\int_\Omega (\Delta u) v d\Omega = \int_\Gamma (\nabla u) v d\Gamma - \int_\Omega \nabla u \nabla v d\Omega, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.2}$$

Como $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se que $\displaystyle\int_\Gamma (\nabla u) v d\Gamma = 0$, logo, substituindo (2.2) em (2.1), obtemos

$$\int_\Omega u_{tt} v d\Omega + \int_\Omega \nabla u \nabla v d\Omega + \int_\Omega |u|^\rho v d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.3}$$

Adotando as seguintes notações,

$$(u,v) = \int_\Omega u v d\Omega \quad \text{e} \quad (\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega,$$

podemos reescrever a equação (2.3) da seguinte forma

$$(u_{tt}, v) + (\nabla u, \nabla v) + (|u|^\rho, v) = (f, v), \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.4}$$

Observe que, como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, por A.6, a igualdade (2.4) permanece válida para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$(u_{tt}, v) + (\nabla u, \nabla v) + (|u|^\rho, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

2.2 Método de Galerkin

Seja $\{\varphi_i; i \in \mathbb{N}\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que, ao considerar o espaço $V_m = [\varphi_1, \ldots, \varphi_m]$, tenha-se $V_m \subsetneq V_{2m}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, e $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_{2^j m}$ seja denso em $H_0^1(\Omega)$. Tal escolha está sendo feita para que os testes na validação do método numérico utilizado nas simulações seja coerente.

Ao se aplicar o Método de Galerkin ao problema (2.5), deseja-se encontrar uma função $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ que seja solução para este mesmo problema, por meio de uma sequência de funções $(u_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$, onde cada função $u_m(t) \in V_m$ é solução para o problema

$$\left| \begin{array}{l} (u_m'', v) + (\nabla u_m, \nabla v) + (|u_m|^\rho, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_m, \\ \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega), \\ \\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

onde $u_m'' = \dfrac{d^2 u_m}{dt^2}$, u_{0m} e u_{1m} projeções de u_0 e u_1, respectivamente, em V_m.

Ou seja, aplicar o Método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções, $H_0^1(\Omega)$, de dimensão infinita, por um subespaço V_m, de dimensão finita e mais ainda, obter estimativas adequadas que permitam passar o limite na solução aproximada de modo a obter uma solução para o problema original.

2.3 Existência de Solução

Nesta seção será visto que se as normas de f, u_0 e u_1 forem suficientemente pequenas, o problema (1.4) apresenta solução fraca para todo $t \in (0, \infty)$.

Teorema 2.1. *Existência de Solução Local*

Suponha $\rho > 1$, se $n = 1$ ou 2, e $1 < \rho < \frac{n}{n-2}$, se $n \geq 3$. Sejam $u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ dados. Então, existe T_0, com $0 < T_0 < T$, e uma única função $u : [0, T_0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ na classe:

$$u \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)),$$

satisfazendo (2.5), *solução fraca do problema no sentido das distribuições.*

Prova:

COnsiderando o problema aproximado em (2.6) e escolhendo $v = u'_m(t)$, então procedendo de maneira informal, assumindo que os termos têm a regularidade necessária, daremos sequência aos cálculos.

Nos cálculos a seguir considera-se $|.|$ e $||.||$ como sendo as normas de $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente.

Partindo da formulação variacional (2.6), escolha $v = u'_m(t)$ para obter:

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + (\bigtriangledown u_m(t), \bigtriangledown u'_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho, u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)).$$

Note que

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u'_m(t)) &= \frac{1}{2}(u''_m(t), u'_m(t)) + \frac{1}{2}(u'_m(t), u''_m(t)) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u'_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) &= \frac{1}{2}(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) + \frac{1}{2}(\nabla u'_m(t), \nabla u_m(t)) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}((u_m(t), u_m(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2.\end{aligned}$$

Observação:

$$(\nabla u, \nabla u') = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u'}{\partial x_i}\right)$$

Sendo assim, tem-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 + (|u_m(t)|^\rho, u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)).$$

Observe que $|u_m(t)|^\rho$ é simplesmente o valor absoluto da função $u_m(t)$ elevado a $\rho > 1$. Continuando a realizar operações algébricas obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|u'_m(t)|^2 + ||u_m(t)||^2\right] &= (f(t), u'_m(t)) - (|u_m(t)|^\rho, u'_m(t)) \\ &\leq \left|(f(t), u'_m(t))\right| + \left|(|u_m(t)|^\rho, u'_m(t))\right| \end{aligned} \tag{2.7}$$

Analisando o lado direito de (2.7)

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, conclui-se que

$$\left|(|u_m(t)|^\rho, u'_m(t))\right| \leq \left||u_m(t)|^\rho\right| \cdot \left|u'_m(t)\right|.$$

e

$$\left|(f(t), u'(t))\right| \leq |f(t)| \cdot |u'(t)|.$$

Visto que

$$\left||u_m(t)|^\rho\right|^2 = \int_\Omega \left(|u_m(t)|^\rho\right)^2 d\Omega = \int_\Omega |u_m(t)|^{2\rho} d\Omega = \left|u_m(t)\right|^{2\rho}_{L^{2\rho}(\Omega)}. \qquad (2.8)$$

Logo, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade (2.8), obtém-se que

$$\left||u_m(t)|^\rho\right|_{L^2(\Omega)} = \left|u_m(t)\right|^{\rho}_{L^{2\rho}(\Omega)}.$$

Note que, pelo Teorema de Imersão de Sobolev, apresentado em A.5, considerando-se $p = 2$ e $m = 1$, obtém-se que

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad q = \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Para $n = 1$, $H^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $C^0(\Omega)$, e, para $n = 2$, tem-se a imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ para qualquer real $q \geq 1$ fixado.

Sendo assim, segue o seguinte lema:

Lema 2.1. *Considerando ρ satisfazendo as condições do Teorema 2.1, tem-se que*

$$\begin{gathered} H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega) \\ e \\ H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+1}(\Omega). \end{gathered} \qquad (2.9)$$

Prova:

Segundo as restrições em relação a ρ no enunciado do Teorema 2.1, tem-se que:

- se $n = 1$, $\rho > 1$ e, portanto, $L^{2\rho}(\Omega)$ e $L^{\rho+1}(\Omega)$ estão contidos em $C^0(\Omega)$;

- se $n=2$, $\rho > q \geq 1$ e, portanto, $H^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{2\rho}(\Omega)$ e $L^{\rho+1}(\Omega)$, pois $L^{2\rho}(\Omega) \subset L^{\rho+1}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$;

- se $n \geq 3$,
$$1 < \rho < \frac{n}{n-2} \quad \Rightarrow \quad 2\rho < \frac{2n}{n-2} = q,$$
por outro lado, $\rho+1 < 2\rho$, logo, $L^{2\rho}(\Omega) \subset L^{\rho+1}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ e, por isso, $H^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^{2\rho}(\Omega)$ e $L^{\rho+1}(\Omega)$.

$\square$

Portanto, segue de (2.9) que existe $C_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|u_m(t)|^{\rho}_{L^{2\rho}(\Omega)} \leq C_0^{\rho}||u_m(t)||^{\rho}.$$

Então,

$$\big|\left(|u_m(t)|^{\rho}, u_m'(t)\right)\big| \leq |u_m(t)|^{\rho}_{L^{2\rho}(\Omega)} \cdot |u_m'(t)| \leq C_0^{\rho}||u_m(t)||^{\rho} \cdot |u_m'(t)|. \tag{2.10}$$

Retornando a (2.7) e utilizando a desigualdade (2.10), tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|u_m'(t)|^2 + ||u_m(t)||^2\right] \leq C_0^{\rho}||u_m(t)||^{\rho} \cdot |u_m'(t)| + |f(t)| \cdot |u_m'(t)|. \tag{2.11}$$

Considere
$$\varphi_m(t) = \frac{1}{2}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}||u_m(t)||^2, \tag{2.12}$$
agora, observe que

$$\varphi_m(t) \geq \frac{1}{2}|u_m'(t)|^2 \quad \text{e} \quad \varphi_m(t) \geq \frac{1}{2}||u_m(t)||^2,$$

pois $|u_m'(t)|^2 \geq 0$ e $||u_m(t)||^2 \geq 0$, e, por isso,

$$|u_m'(t)| \leq \sqrt{2\varphi_m(t)} \quad \text{e} \quad ||u_m(t)|| \leq \sqrt{2\varphi_m(t)}. \tag{2.13}$$

Substituindo (2.12) e (2.13) em (2.11), obtém-se

$$\begin{aligned} \varphi_m'(t) = \frac{d}{dt}\varphi_m(t) &\leq C_0^\rho (2\varphi_m(t))^{\frac{\rho}{2}} \cdot (2\varphi_m(t))^{\frac{1}{2}} + |f(t)|(2\varphi_m(t))^{\frac{1}{2}} \\ &= C_0^\rho (2\varphi_m(t))^{\frac{\rho+1}{2}} + |f(t)|(2\varphi_m(t))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Visto que $\rho > 1$, tem-se que $\dfrac{(\rho+1)}{2} > \dfrac{1}{2}$, logo

$$\big(\varphi_m(t)\big)^{\frac{1}{2}} \leq \big(\varphi_m(t)\big)^{\frac{\rho+1}{2}},$$

assim, de (2.14), obtém-se

$$\varphi_m'(t) \leq \left[C_0^\rho 2^{\frac{\rho+1}{2}} + |f(t)|\sqrt{2}\right]\varphi_m(t)^{\frac{\rho+1}{2}}. \tag{2.15}$$

Daí, como não se considera o caso onde a solução do Problema (1.4) é a solução trivial $u(t,x) = 0$, $\forall t \in [0,T]$ e $\forall x \in \Omega$, tem-se que $\varphi_m(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,T]$, logo, multiplicando $\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}$ em ambos os lados da desigualdade (2.15), obtém-se que

$$\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\varphi_m'(t) \leq \sqrt{2}|f(t)| + 2^{\frac{\rho+1}{2}} C_0^\rho. \tag{2.16}$$

Note que

$$\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\varphi_m'(t) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{2}{1-\rho}\right)\varphi_m(t)^{\left(\frac{1-\rho}{2}\right)}\right]. \tag{2.17}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} \varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\varphi_m'(t) &= \frac{2}{1-\rho}\left[\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\varphi_m'(t) - \left(\frac{\rho+1}{2}\right)\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)-1}\varphi_m'(t)\varphi_m(t)\right] \\ &= \frac{2}{1-\rho}\left[\left(1 - \left(\frac{\rho+1}{2}\right)\right)\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\varphi_m'(t)\right] \\ &= \frac{2}{1-\rho}\left[\left(\frac{1-\rho}{2}\right)\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\varphi_m'(t)\right] \\ &= \frac{2}{1-\rho}\left[\frac{d}{dt}\left(\varphi_m(t)^{\left(\frac{1-\rho}{2}\right)}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{2}{1-\rho}\right)\varphi_m(t)^{\left(\frac{1-\rho}{2}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo (2.17) em (2.16) e integrando de 0 a t, obtém-se

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[\Big(\frac{2}{1-\rho}\Big)\varphi_m(s)^{\left(\frac{1-\rho}{2}\right)}\right] ds \leq \sqrt{2}\int_0^t |f(s)|ds + 2^{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} C_0^\rho \int_0^t ds$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{2}{1-\rho}\left[\varphi_m(t)^{\left(\frac{1-\rho}{2}\right)} - \varphi_m(0)^{\left(\frac{1-\rho}{2}\right)}\right] \leq \sqrt{2}\int_0^t |f(s)|ds + 2^{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} C_0^\rho t. \tag{2.18}$$

Como $\rho > 1$, tem-se que $(1-\rho) < 0$. Assim, multiplicando a desigualdade (2.18) por $\left(\dfrac{1-\rho}{2}\right)$, obtém-se

$$\varphi_m(t)^{\left(\frac{1-\rho}{2}\right)} \geq \varphi_m(0)^{\left(\frac{1-\rho}{2}\right)} + \Big(\frac{1-\rho}{2}\Big)\sqrt{2}||f|| + \Big(\frac{1-\rho}{2}\Big)2^{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} C_0^\rho t,$$

onde $||f|| = ||f||_{L^1(0,t;L^2(\Omega))} = \displaystyle\int_0^t |f(s)|ds$. Tem-se, portanto, que

$$\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} \geq \varphi_m(0)^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} - \Big(\frac{\rho-1}{2}\Big)\sqrt{2}||f|| - \Big(\frac{\rho-1}{2}\Big)2^{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} C_0^\rho t. \tag{2.19}$$

Observe que para todo $m \in \mathbb{N}$, $||u_{0m}||$ e $|u_{1m}|$ são constantes positivas, uma vez que $u_m(0) \in V_m \subset H_0^1(\Omega)$, portanto existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\varphi_m(0) = \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}||u_{0m}||^2 \leq K. \tag{2.20}$$

Observando que $\dfrac{(\rho-1)}{2} > 0$, de (2.20), tem-se

$$\varphi_m(0)^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} \geq K^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)}.$$

Logo, por (2.19),

$$\varphi_m(t)^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} \geq K^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} - \Big(\frac{\rho-1}{2}\Big)\sqrt{2}||f|| - \Big(\frac{\rho-1}{2}\Big)2^{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} C_0^\rho t. \tag{2.21}$$

Escolhendo K suficientemente pequeno tal que

$$K^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} - \Big(\frac{\rho-1}{2}\Big)\sqrt{2}||f|| > 0,$$

ou seja,

$$K^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} = \frac{1}{K^{\left(\frac{\rho-1}{2}\right)}} > \left(\frac{\rho-1}{2}\right)\sqrt{2}||f||,$$

e, definindo

$$T^* = \frac{1}{\left(\frac{\rho-1}{2}\right)2^{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}C_0^\rho}\left(K^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} - \left(\frac{\rho-1}{2}\right)\sqrt{2}||f||\right), \tag{2.22}$$

com $T^* > 0$, uma vez que $\left(\dfrac{\rho-1}{2}\right) > 0$ e $C_0 > 0$, pode-se concluir que

$$K^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} - \left(\frac{\rho-1}{2}\right)\sqrt{2}||f|| - \left(\frac{\rho-1}{2}\right)2^{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}C_0^\rho t > 0, \quad \forall \quad 0 \leq t < T^*.$$

Seja T_0 fixo tal que $0 < T_0 < T^*$. Sendo assim, de (2.21) obtém-se

$$\varphi_m(t)^{\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} \leq \frac{1}{K^{-\left(\frac{\rho-1}{2}\right)} - \left(\frac{\rho-1}{2}\right)\sqrt{2}||f|| - \left(\frac{\rho-1}{2}\right)2^{\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}C_0^\rho T_0}, \quad \forall \quad t \in [0, T_0]. \tag{2.23}$$

Assim, tem-se que, $\forall t \in [0, T_0]$,

$$\begin{aligned} &(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \\ &(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Logo, tem-se que existem subsequências $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(u'_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergentes. Denotando estes limites por u e u', respectivamente, tem-se que

$$\begin{aligned} u_{m_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \\ u'_{m_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Para passar o limite no termo não-linear $|u_m(t)|^\rho$, aplica-se o Lema 3.2 do Livro [10] a fim de obter que

$$|u_m|^\rho \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^\rho \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)). \tag{2.25}$$

Note que, $u''_m(t) = \dfrac{d}{dt}u'(t)$, assim

$$\lim_{m\to\infty} u''_m(t) = \lim_{m\to\infty} \frac{d}{dt}u'_m(t) = \frac{d}{dt}\lim_{m\to\infty} u'_m(t). \tag{2.26}$$

Portanto, por (2.24), (2.25) e (2.26), passando o limite, com $m \to \infty$, em $(2.6)_1$, obtém-se que

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}(u''_m(t), v) + \lim_{m\to\infty}(\nabla u_m, \nabla v) + \lim_{m\to\infty}(|u_m|^\rho, v) = (f, v)\\
\Leftrightarrow\quad & \Big(\frac{d}{dt}\lim_{m\to\infty} u'(t), v\Big) + \Big(\lim_{m\to\infty}\nabla u_m, \nabla v\Big) + \Big(\lim_{m\to\infty}|u_m|^\rho, v\Big) = (f, v) \qquad (2.27)\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{dt}(u'(t), v) + (\nabla u, \nabla v) + (|u|^\rho, v) = (f, v).
\end{aligned}$$

Logo, $u_m(t)$, solução do problema aproximado (2.6), converge para a solução fraca $u(t)$, do problema (1.4), para todo t tal que $0 \le t < T_0$.

Quanto à unicidade de solução local, as demonstrações poderão ser encontradas no Livro [10] e no Artigo [15].

□

Teorema 2.2. *Existência de Solução Não-Local*

Sejam ρ e n como no Teorema 2.1 e $T > 0$. Para cada $(u_0, u_1, f) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$ denota-se:

$$\begin{aligned}
\gamma =& \Big(\frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{4}||u_0||^2\\
&+ \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_0(x)|^\rho u_0(x)dx + \frac{1}{2}||f||\Big)(1 + ||f||e^{||f||}),
\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $||f|| = ||f||_{L^1(0,\infty;L^2(\Omega))} = \displaystyle\int_0^\infty |f(s)|_{L^2(\Omega)} ds.$

Se

$$0 < ||u_0|| < \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}, \tag{2.29}$$

com C_0 *sendo a constante de imersão de* $H_0^1(\Omega)$ *em* $L^{\rho+1}$, *e*

$$\gamma < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\rho}{\rho-1}} \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{2(\rho+1)}{\rho-1}}, \tag{2.30}$$

então, existe uma única função $u : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, *na classe*

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

que seja solução fraca de (1.4).

Prova:

Tomando $v = u_m'(t)$ em $(2.6)_1$, obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 + \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t) dx = (f(t), u_m'(t)). \tag{2.31}$$

Note que, se $u_m(t, x) > 0$,

$$u_m^\rho u_m' = \frac{1}{\rho+1}\frac{d}{dt}\left(u_m^{\rho+1}\right) = \frac{1}{\rho+1}\frac{d}{dt}\left(|u_m|^\rho u_m\right),$$

e, se $u_m(t, x) < 0$,

$$(-u_m)^\rho u_m' = -\frac{1}{\rho+1}\frac{d}{dt}\left((-u_m)^{\rho+1}\right) = \frac{1}{\rho+1}\frac{d}{dt}\left(|u_m|^\rho u_m\right),$$

logo, tem-se que

$$\int_\Omega u_m^\rho(t) u_m'(t) dx = \frac{1}{\rho+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) dx. \tag{2.32}$$

Substituindo (2.32) em (2.31), obtém-se

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}||u_m(t)||^2 + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)dx\right] = (f(t), u'_m(t)). \qquad (2.33)$$

Observe que para $T > 0$ arbitrário fixo, existe $T_0 \in (0, T)$ tal que (2.33) esteja definido para todo $0 \leq t < T_0$, pelo Teorema 2.1.

Integrando (2.33) de 0 a t, com $0 \leq t < T_0$, obtém-se:

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}|u'_m(s)|^2 + \frac{1}{2}||u_m(s)||^2 + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_m(s)|^\rho u_m(s)dx\right] ds = \int_0^t (f(s), u'_m(s))ds$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{2}|u'_m(s)|^2 + \frac{1}{2}||u_m(s)||^2 + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_m(s)|^\rho u_m(s)dx\right]\Bigg|_{s=0}^{s=t} = \int_0^t (f(s), u'_m(s))ds.$$

Note que, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\int_0^t (f(s), u'_m(s))ds \leq \int_0^t |f(s)||u'_m(s)|dt,$$

e, como $u(0)$ e $u'(0)$ são dados como condições iniciais, podemos tomar $u_m(0)$ e $u'_m(0)$ de maneira que

$$||u_m(0)|| \leq ||u(0)|| = u_0 \quad \text{e} \quad |u'_m(0)| \leq |u'(0)| = u_1.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}||u_m(t)||^2 + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)dx \\ &\leq \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}||u_0||^2 + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u_0|^\rho u_0 dx + \int_0^t |f(s)||u'_m(s)|ds.\end{aligned}$$

Podemos reescrever a desigualdade anterior como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{4}||u_m(t)||^2 + J(u_m(t)) \leq \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{4}||u_0||^2 + J(u_0) \\ + \int_0^t |f(s)||u'_m(s)|ds,\end{aligned} \qquad (2.34)$$

onde $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é definido por:

$$J(u) = \frac{1}{4}||u||^2 + \frac{1}{\rho+1}\int_\Omega |u|^\rho u dx. \qquad (2.35)$$

O objetivo principal, desta parte da prova, é mostrar que, sob as hipóteses (2.29) e (2.30), pode-se controlar o sinal de $J(u_m(t))$, para $0 \leq t < T_0$, e $J(u_0)$, na desigualdade (2.34).

Observe que

$$\left|\int_\Omega |u|^\rho u dx\right| \leq \int_\Omega |u|^\rho |u| dx = \int_\Omega |u|^{\rho+1} dx = |u|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} \leq C_0^{\rho+1}||u||^{\rho+1}, \qquad (2.36)$$

onde C_0 é a constante de imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{\rho+1}(\Omega)$, dada em (2.9).

Note que, de (2.36),

$$\int_\Omega |u|^\rho u dx \geq -C_0^{\rho+1}||u||^{\rho+1}.$$

Retornando a (2.35), tem-se que

$$J(u) \geq \frac{1}{4}||u||^2 - \frac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}||u||^{\rho+1}, \qquad (2.37)$$

lembrando que será substituído u por $u_m(t,\cdot)$ e u_0.

Observe que os dois lados da desigualdade (2.34) dependem do sinal de $J(u)$, sendo assim considere a função a seguir:

$$P(\lambda) = \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}\lambda^{\rho+1}, \quad \text{para} \quad \lambda \geq 0. \qquad (2.38)$$

Note que $P(\lambda)$ é um limitante inferior para $J(u)$, basta tomar $\lambda = ||u||$ em (2.37). Agora, será analisado o sinal da função $P(\lambda)$.

Análise de $P(\lambda)$, $\lambda \geq 0$

Observe que:

i) $P(\lambda) = 0$ em $\lambda_0 = 0$ com ordem 2 e em $\lambda_1 = \left(\frac{\rho+1}{4C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$;

De fato, pois

$$\lambda^2 - \frac{4C_0^{\rho+1}}{\rho+1}\lambda^{\rho+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2\left(1 - \frac{4C_0^{\rho+1}}{\rho+1}\lambda^{\rho-1}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = \left(\frac{\rho+1}{4C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

ii) $\lambda_2 = \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$ é um ponto crítico e $P(\lambda)$ é crescente quando $0 \leq \lambda \leq \lambda_2$;

Com efeito,

$$P'(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\lambda - C_0^{\rho+1}\lambda^{\rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\left(1 - 2C_0^{\rho+1}\lambda^{\rho-1}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Além do mais, considerando $\lambda \leq \lambda_2$, tem-se que:

$$P'(\lambda) = \lambda\left(1 - 2C_0^{\rho+1}\lambda^{\rho-1}\right) \geq \lambda(1 - 2C_0^{\rho+1}\lambda_2^{\rho-1}) = \lambda\left(1 - 2C_0^{\rho+1}\left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho-1}}\right)$$
$$= \lambda(1-1) = 0.$$

Logo, se $0 \leq \lambda \leq \lambda_2$, $P'(\lambda) \geq 0$, o que implica que neste intervalo $P(\lambda)$ é crescente.

iii) $\lambda_M = \lambda_2$ é um ponto de máximo de $P(\lambda)$ em $[0, \lambda_1]$.

De fato, observe que, para $\lambda \geq \lambda_2$,

$$P'(\lambda) = \lambda\left(1 - 2C_0^{\rho+1}\lambda^{\rho-1}\right) \leq \lambda\left(1 - 2C_0^{\rho+1}\lambda_2^{\rho-1}\right) = \lambda\left(1 - 2C_0^{\rho+1}\left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho-1}}\right)$$
$$= \lambda(1-1) = 0.$$

Portanto, para $\lambda_2 \leq \lambda$, $P'(\lambda) \leq 0$, ou seja, $P(\lambda)$ é decrescente para tais λ's. Visto que, pelo item $(\boldsymbol{ii})$, $P(\lambda)$ é crescente para $\lambda \leq \lambda_2$ e, pela conclusão obtida acima, é decrescente para $\lambda \geq \lambda_2$, tem-se que λ_M é um ponto de máximo. Logo,

$$\lambda_M = \lambda_2 = \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \tag{2.39}$$

é um ponto de máximo, e o valor máximo de $P(\lambda)$ para $\lambda \in \left[0, \left(\frac{\rho+1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right]$ é

$$\begin{aligned}
P(\lambda_M) = \lambda_M^2\Big(\frac{1}{4} - \frac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}\lambda_M^{\rho-1}\Big) &= \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{2}{\rho-1}} \left(\frac{1}{4} - \frac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}\left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho-1}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{2}{\rho-1}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(\rho+1)}\right) = \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{2}{\rho-1}} \left(\frac{\rho+1-2}{4(\rho+1)}\right) \\
&= \frac{\rho-1}{4(\rho+1)}\left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{2}{\rho-1}}.
\end{aligned}$$

Assim sendo, esboça-se o gráfico para $P(\lambda)$ na Figura 2.1.

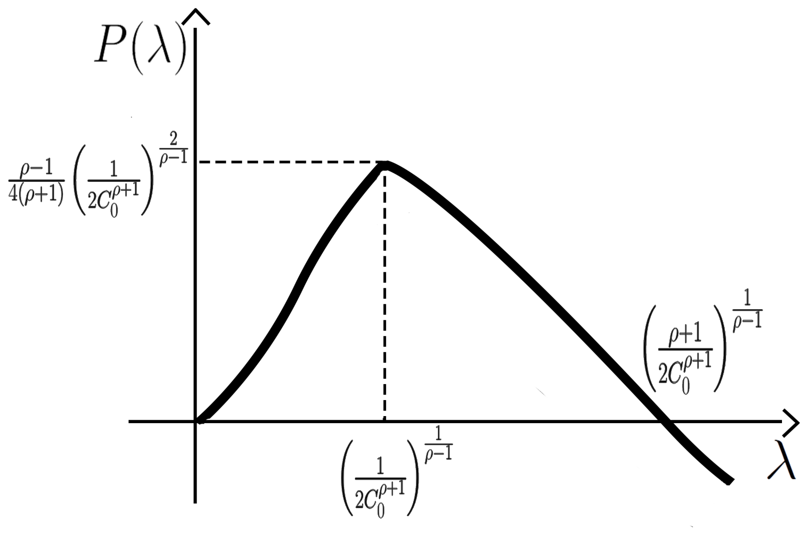


Figura 2.1: Esboço do gráfico de $P(\lambda)$

Voltando a analisar os termos de (2.34), de (2.37) tem-se que

$$J(u) \geq P(||u||), \tag{2.40}$$

uma vez que $P(\lambda)$ é definido como em (2.38).

Substituindo u por u_0, obtém-se que $P(||u_0||) \geq 0$. De fato,

$$P(||u_0||) = ||u_0||^2\Big(\frac{1}{4} - \frac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}||u_0||^{\rho-1}\Big) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} - \frac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}||u_0||^{\rho-1} > 0.$$

Pela hipótese (2.29) do Teorema 2.2, tem-se que

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}||u_0||^{\rho-1}\right) > \left(\frac{1}{4} - \frac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}\left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho-1}}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(\rho+1)}\right)$$
$$= \frac{\rho-1}{4(\rho+1)} > 0,$$

esta última desigualdade é válida pois $\rho > 1$. E, se $||u_0|| = 0$, é fácil verificar que $P(||u_0||) = 0$. Portanto, $P(||u_0||) \geq 0$. Logo,

$$J(u_0) \geq P(||u_0||) \geq 0 \tag{2.41}$$

Assim, pode-se concluir que o lado direito de (2.37) é positivo. Agora, só resta provar que $J(u_m(t))$ é positivo, para isso será provado o seguinte resultado:

Lema 2.2. *Suponha u_0, u_1 e γ satisfazendo as condições do Teorema 2.2. Então, a sequência de soluções aproximada $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz*

$$||u_m(t)|| < \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}, \quad \forall \quad t \in [0, T_0] \quad e \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.42}$$

Prova (Lema):

Suponha, por contradição, que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ e algum $t_0 \in [0, T_0]$ tal que

$$||u_{m_0}(t)|| > \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}. \tag{2.43}$$

Sabe-se que $u_m(0) = u_{0m}$ é a projeção de u_0 em V_m, logo

$$0 \leq ||u_{m_0}(0)|| \leq ||u_0||.$$

Pela hipótese (2.29), tem-se que

$$||u_{m_0}(0)|| < \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Uma vez que $u_{m_0}(t)$ é contínua em $[0, T_0]$, existe $t_0 \in (0, T_0)$ tal que

$$0 < ||u_{m_0}(t)|| < \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}, \quad \forall \quad 0 \leq t < t_0. \tag{2.44}$$

Agora, considere o subconjunto τ de $(0, T_0)$ definido por:

$$\tau = \left\{ t \in (0, T_0); ||u_{m_0}(t)|| \geq \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right\}. \tag{2.45}$$

Propriedades do conjunto τ

- *É não vazio*;

  De fato, pois supomos, em (2.43), que existe um $t \in (0, T_0]$ tal que $||u_{m_0}(t)|| \geq \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$.

- *É um conjunto fechado*;

  Isto porque a função $u_{m_0}(t)$ é contínua em $[0, T_0]$, e, portanto, contínua em $[t_0, T_0]$.

- *Seu ínfimo é estritamente positivo.*

  Conclusão obtida a partir de (2.44), pois para algum $t \in (t_0, T]$, com $t_0 > 0$, $||u_{m_0}(t)|| \geq \left(\dfrac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$.

Assim, pelas propriedades de τ, existe um mínimo $t^* \in (0, T_0)$, tal que satisfaça:

$$\left| \begin{array}{l} ||u_{m_0}(t)|| < \left(\dfrac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}, \quad \forall \quad 0 \leq t < t^*, \\ ||u_{m_0}(t^*)|| = \left(\dfrac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}. \end{array} \right. \tag{2.46}$$

Agora, voltando para (2.34) e tomando em $t = t^*$, obtém-se

$$\frac{1}{2}|u'_{m_0}(t^*)|^2 + \frac{1}{4}||u_{m_0}(t^*)||^2 + J(u_{m_0}(t^*)) \leq \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{4}||u_0||^2 + J(u_0) + \int_0^{t^*} |f(s)||u'_m(s)|ds. \tag{2.47}$$

Observe que, por $(2.46)_2$,

$$J(u_{m_0}(t^*)) \geq P(||u_{m_0}(t^*)||) > 0, \tag{2.48}$$

uma vez que $\left(\dfrac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$ é o máximo da função $P(\lambda)$ estritamente positivo, pelo item ***(iii)*** da análise da mesma. Então, tem-se que $J(u_{m_0}(t^*)) > 0$.

Observe, também, que

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} |f(s)||u'_{m_0}(s)|ds &= \int_0^{t^*} |f(s)|^{\frac{1}{2}}|f(s)|^{\frac{1}{2}}|u'_{m_0}(s)|ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^{t^*} \left(|f(s)|^{\frac{1}{2}}\right)^2 ds + \int_0^{t^*} \left(|f(s)|^{\frac{1}{2}}|u'_{m_0}(s)|\right)^2 ds\right] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{t^*} |f(s)|ds + \frac{1}{2}\int_0^{t^*} |f(s)||u'_{m_0}(s)|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^{\infty} |f(s)|ds + \frac{1}{2}\int_0^{t^*} |f(s)||u'_{m_0}(s)|^2 ds, \end{aligned} \tag{2.49}$$

onde na primeira desigualdade foi aplicada a desigualdade elementar.

Voltando para (2.47), denotando $||f|| = ||f||_{L^1(0,\infty;L^2(\Omega))} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty |f(s)|ds$, obtém-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u'_{m_0}(t^*)|^2 + \frac{1}{4}||u_{m_0}(t^*)||^2 + J(u_{m_0}(t^*)) \leq \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{4}||u_0||^2 + J(u_0) + \frac{1}{2}||f|| \\ + \frac{1}{2}\int_0^{t^*} |f(s)||u'_m(s)|^2 ds.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Logo, como $||u_{m_0}(t^*)||^2$ e $J(u_{m_0}(t^*))$ são positivos, este último, por (2.48),

$$\frac{1}{2}|u'_{m_0}(t^*)|^2 \leq \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{4}||u_0||^2 + J(u_0) + \frac{1}{2}||f|| + \frac{1}{2}\int_0^{t^*} |f(s)||u'_m(s)|^2 ds. \tag{2.51}$$

Note que (2.51) é uma desigualdade do tipo:

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t a(s)\varphi(s)ds,$$

com $a(s) = |f(s)| \in L^1(0,\infty)$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}|u'_m(t^*)|$ e

$$K = \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{4}||u_0||^2 + J(u_0) + \frac{1}{2}||f|| \geq 0, \tag{2.52}$$

uma vez que $f \in L^1(0,\infty;L^2(\Omega))$, pelo enunciado do Teorema 2.2, e (2.41) é válido.

Uma vez que

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t |f(s)|\varphi(s)ds,$$

multiplica-se ambos os lados por $|f(t)|$ obtendo

$$|f(t)|\varphi(t) \leq |f(t)|\left(K + \int_0^t |f(s)|\varphi(s)ds\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{|f(t)|\varphi(t)}{K + \int_0^t |f(s)|\varphi(s)ds} \leq |f(t)|.$$

Integrando de 0 a t, obtém-se que

$$\int_0^t \frac{|f(\xi)|\varphi(\xi)}{K + \int_0^\xi |f(s)|\varphi(s)ds} d\xi \leq \int_0^t |f(s)|ds.$$

Note que

$$\frac{d}{dt}\left(K + \int_0^t |f(s)|\varphi(s)ds\right) = |f(t)|\varphi(t).$$

Logo, denotando

$$g(\xi) = K + \int_0^\xi |f(s)|\varphi(s)ds \tag{2.53}$$

e $dg(\xi) = \dfrac{d}{d\xi}g(\xi)$, tem-se que

$$\int_0^t \frac{|f(\xi)|\varphi(\xi)}{K + \int_0^\xi |f(s)|\varphi(s)ds}d\xi = \int_0^t \frac{dg(\xi)}{g(\xi)}d\xi = ln(g(\xi))\Big|_{\xi=0}^{\xi=t}.$$

Portanto,

$$ln(g(\xi))\Big|_{\xi=0}^{\xi=t} = ln(g(t)) - ln(g(0)) = ln(g(t)) - ln(K) \leq ||f||,$$

com $||f|| = ||f||_{L^1(0,t;L^2(\Omega))}$ e $g(0) = K + \displaystyle\int_0^0 |f(s)|\varphi(s)ds = K$.

Aplicando a função e^x em ambos os lados, obtém-se que

$$e^{ln(g(t))-ln(K)} \leq e^{||f||} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{ln(g(t))}}{e^{ln(K)}} \leq e^{||f||} \quad \Rightarrow \quad g(t) \leq Ke^{||f||}. \tag{2.54}$$

Portanto, denotando $\varphi(t^*) = \dfrac{1}{2}|u'_{m_0}(t^*)|^2$, da definição (2.53) e da desigualdade (2.54) obtém-se que

$$\frac{1}{2}|u'_{m_0}(t^*)|^2 = \varphi(t^*) \leq g(t^*) \leq Ke^{||f||}. \tag{2.55}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{t^*} |f(s)|\Big(\frac{1}{2}|u'_{m_0}(s)|^2\Big)ds \leq Ke^{||f||}\int_0^{t^*} |f(s)|ds \leq Ke^{||f||}\int_0^\infty |f(s)|ds \\ = Ke^{||f||}||f||.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Aplicando a desigualdade (2.56) em (2.50), obtém-se que

$$\frac{1}{2}|u'_{m_0}(t^*)|^2+\frac{1}{4}||u_{m_0}(t^*)||^2+J(u_{m_0}(t^*)) \leq \frac{1}{2}|u_1|^2+\frac{1}{4}||u_0||^2+J(u_0)+\frac{1}{2}||f||+Ke^{||f||}||f||.$$

Pela definição de K em (2.52), conclui-se que

$$\frac{1}{2}|u'_{m_0}(t^*)|^2+\frac{1}{4}||u_{m_0}(t^*)||^2+J(u_{m_0}(t^*)) \leq \left[\frac{1}{2}|u_1|^2+\frac{1}{4}||u_0||^2+J(u_0)+\frac{1}{2}||f||\right]\left(1+||f||e^{||f||}\right).$$

Pela definição de $J(u)$, em (2.35), e considerando γ, como em (2.28), e a hipótese (2.29), do Teorema 2.2, obtém-se que

$$\frac{1}{2}|u'_{m_0}(t^*)|^2 + \frac{1}{4}||u_{m_0}(t^*)||^2 + J(u_{m_0}(t^*)) \leq \gamma < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\rho}{\rho-1}}\left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{2(\rho+1)}{\rho-1}}. \qquad (2.57)$$

Como $|u'_{m_0}(t^*)|^2 \geq 0$ e $J(u_{m_0}(t^*)) \geq 0$, por (2.48), de (2.57), tem-se que

$$\frac{1}{4}||u_{m_0}(t^*)||^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\rho}{\rho-1}}\left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{2(\rho+1)}{\rho-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\rho-1}}\left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{2(\rho+1)}{\rho-1}}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por 4 e, depois, extraindo a raiz quadrada, obtém-se o seguinte resultado

$$||u_{m_0}(t^*)|| < \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

O que é um absurdo, pois contraria a hipótese (2.43). Logo,

$$||u_m(t)|| < \left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}, \quad \forall \quad t \in [0, T_0] \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Com isso, provamos o Lema 2.42

$\square$

Portanto, pelo Lema 2.42,

$$J(u_m(t)) \geq 0, \quad \forall \quad t \in [0, T_0] \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.58}$$

De fato, pois, por (2.40) e, pelo Lema 2.42, $||u_m(t)|| < \left(\dfrac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} = \lambda_M$ para todo $t \in [0, T_0]$ e $m \in \mathbb{N}$, onde λ_M é o máximo da função $P(\lambda)$, conclui-se que

$$J(u_m(t)) \geq P(||u_m(t)||) \geq 0.$$

Substituindo t^* por t em (2.50), de (2.56) e (2.58), obtém-se que

$$\frac{1}{2}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{4}||u_m(t)||^2 \leq C, \quad \forall \quad t \in [0, T_0),$$

onde

$$C = \left[\frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{4}||u_0||^2 + J(u_0) + \frac{1}{2}||f||\right]\left(1 + ||f||e^{||f||}\right). \tag{2.59}$$

Como $|u_m'(t)|^2 \geq 0$,

$$||u_m(t)|| \leq 4\overline{C},$$

com $\overline{C} = \sqrt{C}$. E de forma análoga,

$$|u_m'(t)| \leq 2\overline{C}.$$

Observe que, como C, em (2.59), não depende de T_0 nem de m, estendendo para $[0, T)$, $\forall \quad T > 0$, obtém-se que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$
$$(u_m')_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$\forall \quad T > 0.$

Logo, tem-se que existem subsequências $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(u'_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergentes. Denotando estes limites por u e u', respectivamente, tem-se que

$$\begin{aligned} u_{m_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u'_{m_k} &\overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Aplicando os mesmos argumentos que no Teorema 2.1 para u''_m e $|u_m|^\rho$, passando o limite, com $m \to \infty$, no problema aproximado $(2.6)_1$, obtém-se a versão fraca do Problema (1.4), assim como em (2.27).

Logo, $u_m(t)$, solução do problema aproximado (2.6), converge para a solução fraca $u(t)$, do Problema (1.4), para todo $t \geq 0$.

Quanto à unicidade de solução não-local, as demonstrações poderão ser encontradas no Livro [10] e no Artigo [15].

Quanto às condições iniciais podem ser obtidas seguindo o procedimento padrão.

$\square$

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão aplicados métodos numéricos para obter a solução u_m (2.6). O Método de Elementos Finitos será aplicado para discretizar o domínio espacial Ω e obter um sistema de m equações diferenciais ordinárias que será transformado em um sistema não-linear a partir da aplicação do Método das Diferenças Finitas, a saber, o Método de Newmark, que também irá discretizar o intervalo temporal $(0, 1)$, e, por fim, o Método de Newton Modificado para resolver o sistema não-linear resultante.

3.1 Problema Aproximado

Note que, como $u_m(t) \in V_m$, ver Seção 2.2,

$$u_m(t, x) = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\varphi_i(x),$$

onde $d_i(t)$ constante para t fixo. Derivando duas vezes no tempo, uma vez no espaço e aplicando a linearidade da derivação tem-se

$$u''_m(t, x) = \sum_{i=1}^{m} d''_i(t)\varphi_i(x),$$

$$\nabla u_m(t, x) = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\nabla\varphi_i(x).$$

Substituindo as igualdades acima na equação (2.6) e aplicando a linearidade da integração, obtém-se, para cada $v_m \in V_m$,

$$\sum_{i=1}^{m} [d_i''(t)(\varphi_i(x), v_m) + d_i(t)(\nabla\varphi_i(x), \nabla v_m)] + \Big(\Big|\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\varphi_i(x)\Big|^{\rho}, v_m\Big) = (f, v_m), \quad \forall v_m \in V_m.$$

Tomando, em particular, $v_m = \varphi_j(x)$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, e denotando os coeficientes

$$\begin{aligned} a_{ij} = (\varphi_i(x), \varphi_j(x)), \quad b_{ij} = (\nabla\varphi_i(x), \nabla\varphi_j(x)), \quad F_j(t) = (f, \varphi_j(x)), \\ q_j(d(t)) = \Big(\Big|\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\varphi_i(x)\Big|^{\rho}, \varphi_j(x)\Big), \end{aligned} \tag{3.1}$$

obtém-se o seguinte sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias

$$[d''(t)]^T A + [d(t)]^T B + [Q(d(t))]^T = [F(t)]^T. \tag{3.2}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}]_{m\times m}, & B &= [b_{ij}]_{m\times m} \\ F(t) &= [F_j(t)]_{m\times 1}, & Q(d(t)) &= [q_j(d(t))]_{m\times 1}, \\ d(t) &= [d_i(t)]_{m\times 1}, & d''(t) &= [d_i''(t)]_{m\times 1}. \end{aligned}$$

Note que A e B são simétricas, pois

$$a_{ij} = (\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = (\varphi_j(x), \varphi_i(x)) = a_{ji}$$

e, procedendo de igual modo, $b_{ij} = b_{ji}$, assim, transpondo a equação (3.2), obtem-se

$$Ad''(t) + Bd(t) + Q(d(t)) = F(t). \tag{3.3}$$

Para que o sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias (3.3) tenha uma única solução, serão acrescentadas condições iniciais, como condição e velocidade iniciais os vetores d_0 e d_1, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} d_0 &= (d_{01}, \ldots, d_{0m}) \\ d_1 &= (d_{11}, \ldots, d_{1m}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde, d_{0j} e d_{1j}, com $j = 1, \ldots, m$, são as $j_$ésimas coordenadas das projeções u_{0m} e u_{1m}, respectivamente. Considerando um caso particular onde a base $[\varphi_1, \ldots, \varphi_m]$ é ortonormal, tem-se que

$$d_0 = ((u_0, \varphi_1), \ldots, (u_0, \varphi_m))\,,$$
$$d_1 = ((u_1, \varphi_1), \ldots, (u_1, \varphi_m))\,.$$

Assim, acoplando as condições iniciais (3.4) a (3.3), obtêm-se

$$\left| \begin{array}{l} Ad''(t) + Bd(t) + Q(d(t)) = F(t), \\ d(0) = d_0, \\ d'(0) = d_1. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Vale lembrar que este sistema (3.5) será resolvido para todo $t \in (0, T]$.

3.2 Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas será aplicado para aproximar a derivação que aparece em (3.5).

Primeiramente, tome $P_{[0,T]} = [t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N]$ uma partição do intervalo temporal $[0, T]$ com N elementos, onde $t_{i+1} - t_i = \Delta t_i > 0$, $\forall i \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Para cada $t_n \in P_{[0,T]}$, denota-se $g^n := g(t_n)$. Fazendo $t = t_n$ no sistema $(3.5)_1$, para $n \in \{0, \ldots, N\}$, tem-se

$$Ad''(t_n) + Bd(t_n) + Q(d(t_n)) = F(t_n). \tag{3.6}$$

Aproximações

Considere as seguintes aproximações

$$d''(t_n) \approx \frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{(\Delta t)^2}, \tag{3.7}$$

mais conhecida como Diferença Central, com erro de aproximação de $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ para funções de classe C^2, ver os Livros [20] e [12], e

$$d(t_n) \approx d^{*n} = \theta d^{n+1} + (1 - 2\theta)d^n + \theta d^{n-1}, \tag{3.8}$$

uma média ponderada dos valores de $d(t)$, nos tempos adjacentes a t_n, com $\theta \geq 0$. Utilizando as aproximações (3.7) e (3.8) em (3.6) tem-se, para $n = 1, \ldots, N-1$,

$$A\left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{(\Delta t)^2}\right) + Bd^{*n} + Q(d^{*n}) = F^{*n}, \tag{3.9}$$

onde

$$F^{*n} = \theta F^{n+1} + (1 - 2\theta)F^n + \theta F^{n-1}$$

e, por definição,

$$\begin{aligned} Q(d^{*n}) &= \Big[\Big(\Big|\sum_{i=1}^{m} d^{*n}\varphi_i(x)\Big|^{\rho}, \varphi_j(x)\Big)\Big] \\ &= \Big[\Big(\Big|\sum_{i=1}^{m}(\theta d^{n+1} + (1-2\theta)d^n + \theta d^{n-1})\varphi_i(x)\Big|^{\rho}, \varphi_j(x)\Big)\Big] \end{aligned}$$

Fazendo algumas manipulações algébricas e multiplicando por $(\Delta t)^2$ a equação (3.9), tem-se

$$(A+(\Delta t)^2\theta B)d^{n+1}+(\Delta t)^2 Q(d^{*n}) = (\Delta t)^2 F^{*n}+(2A-(\Delta t)^2(1-2\theta)B)d^n-(A+(\Delta t)^2\theta B)d^{n-1}.$$

Definindo as matrizes

$$M = (A + (\Delta t)^2\theta B) \qquad \text{e} \qquad L = (2A - (\Delta t)^2(1 - 2\theta)B),$$

obtém-se o seguinte sistema

$$Md^{n+1} + (\Delta t)^2 Q(d^{*n}) = (\Delta t)^2 F^{*n} + Ld^n - Md^{n-1}. \tag{3.10}$$

Observe que para $\theta \neq 0$ o sistema (3.10) é não-linear, pois o vetor $Q(d^{*n})$ depende da incógnita d^{n+1}, de acordo com (3.10). Por outro lado, se $\theta = 0$, o sistema se torna linear, pois $Q(d^{*n}) = Q(d^n)$ e, por isso, poderá ser considerado constante, pois só dependerá de d^n, que por sua vez será conhecido.

Considerando o caso onde $\theta \neq 0$ e tomando $n = 0$ em (3.10), tem-se uma situação especial que será tratada da seguinte forma

$$Md^1 + (\Delta t)^2 Q(d^{*0}) = (\Delta t)^2 F^{*0} + Ld^0 - Md^{-1}, \tag{3.11}$$

onde

$$Q(d^{*0}) = \Big[\Big(\Big|\sum_{i=1}^{m}(\theta d^1 + (1-2\theta)d^0 + \theta d^{-1})\varphi_i(x)\Big|^{\rho}, \varphi_j(x)\Big)\Big],$$

$$F^{*0} = \theta F^1 + (1-2\theta)F^0 + \theta F^{-1},$$

sendo $F^{-1} = F(-t_1) = F(-\Delta t)$ e o termo d^{-1} dado a partir da Diferença Central

$$d'(t_n) = \frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t}.$$

De fato, fazendo $n = 0$, tem-se

$$d'(t_0) = d'(0) = \frac{d^1 - d^{-1}}{2\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad d^{-1} = d^1 - (2\Delta t)d'(0).$$

Mas, de (3.5), $d'(0) = d_1$ e, por isso,

$$d^{-1} = d^1 - (2\Delta t)d_1. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) em (3.11) tem-se

$$2Md^1 + (\Delta t)^2 Q(d^{*0}) = (\Delta t)^2 F^{*0} + Ld^0 + (2\Delta t)Md_1.$$

Finalmente, dividindo ambos os lados por 2,

$$Md^1 + \frac{(\Delta t)^2}{2}Q(d^{*0}) = \frac{(\Delta t)^2}{2}F^{*0} + \frac{1}{2}Ld^0 + \Delta t M d_1. \tag{3.13}$$

Enfim, acoplando os sistemas (3.13) e (3.10), se obtém sistemas não-lineares que podem ser resolvidos de forma sequencial em n, para $n = 0, 1, \ldots, N$. Não-linear, pois foi considerado $\theta \neq 0$.

Afim de resolver os sistemas em (3.10) será utilizado o Método de Newton Modificado. Vale ressaltar que as dissertações [6] e [26] resolveram seus sistemas não-lineares, resultante da aplicação do Método de Elementos Finitos e das Diferenças Finitas, linearizando-os.

3.3 Resolução do Sistema Não-Linear

A ferramenta escolhida para resolver os sistemas em (3.10), como foi dito, será o Método de Newton Modificado, seu algoritmo pode ser encontrado no Livro [21] e os resultados que garantem sua convergência no Livro [5]. Abaixo será apresentada uma teoria a respeito do Método de Newton.

3.3.1 Método de Newton

O método mais amplamente estudado e conhecido para resolver sistemas de equações não-lineares é o Método de Newton.

Restringindo-se ao caso de uma equação não-linear de uma variável para melhor introduzir o método, tem-se que: supondo $f \in C^2(a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq b$, e que existe $p \in (a,b)$ que seja uma raiz de $f(x)$, seja $\overline{x} \in (a,b)$ uma aproximação de p tal que $f'(\overline{x}) \neq 0$ e $|p - \overline{x}|$ seja pequeno. Considere o polinômio de Taylor, de ordem 1, em torno de $\overline{x}$ para $f(x)$,

$$f(x) = f(\overline{x}) + (x - \overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(x - \overline{x})^2}{2} f''(\xi(x)), \tag{3.14}$$

onde $\xi(x)$ está entre x e $\overline{x}$. Uma vez que $f(p) = 0$, tomando $x = p$ em (3.14) obtém-se

$$0 = f(\overline{x}) + (p - \overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(x - \overline{x})^2}{2} f''(\xi(p)).$$

Como foi tomado $\overline{x}$ de forma que $|p - \overline{x}|$ fosse pequeno, tem-se que o termo que envolve $(p - \overline{x})^2$ é muito menor, então

$$0 \approx f(\overline{x}) + (p - \overline{x})f'(\overline{x}).$$

Isolando p obtém-se

$$p \approx \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}. \tag{3.15}$$

Traduzindo a relação (3.15) para o Método de Newton, iniciando com uma aproximação p_0 de p, será gerada uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, de forma que

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad n \geq 0. \tag{3.16}$$

Voltando para o caso de um sistema de equações não-lineares, considerando $F(X) = (f_1(X), \ldots, f_n(X))$, com $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, como sendo o vetor que armazena cada equação não-linear de um sistema., tem-se por objetivo obter $P \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(P) = 0$.

Fazendo analogia ao Método de Newton dado por (3.16), restringindo-se somente a uma linha do vetor $F(X)$ e tomando $\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ próximo de P, de (3.15), obtém-se

$$\nabla^T f_i(\overline{X})(P-\overline{X}) \approx -f_i(\overline{X}), \quad \text{para} \quad i=1,\ldots,n, \tag{3.17}$$

onde $\nabla^T f_i(\overline{X})$ é o vetor gradiente de f_i calculado em $\overline{X}$.

Como (3.17) é válido para todo i, tem-se que

$$\begin{bmatrix} \nabla^T f_1(\overline{X}) \\ \nabla^T f_2(\overline{X}) \\ \vdots \\ \nabla^T f_n(\overline{X}) \end{bmatrix} (P-\overline{X}) \approx - \begin{bmatrix} f_1(\overline{X}) \\ f_2(\overline{X}) \\ \vdots \\ f_n(\overline{X}) \end{bmatrix} = -F(\overline{X})$$

Daí, o Método de Newton aplicado a um sistema de equações não-lineares, consiste em iniciar com uma aproximação $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e gerar uma sequência $(P_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, de forma a satisfazer o sistema linear a seguir:

$$J(P_k)s_k = -F(P_k), \quad k \geq 0, \tag{3.18}$$

onde $s_k = P_{k+1} - P_k$ e

$$J(P_k) = \begin{bmatrix} \nabla^T f_1(\overline{X}) \\ \nabla^T f_2(\overline{X}) \\ \vdots \\ \nabla^T f_n(\overline{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\overline{X})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\overline{X})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

A matriz J é chamada de matriz jacobiana.

Resolvendo o sistema (3.18), será obtido o vetor s_k, de onde se poderá obter o próximo termo da sequência P_{k+1} através da operação $P_{k+1} = s_k + P_k$. Para que este sistema tenha uma única solução, é necessário que a matriz jacobiana calculada no ponto P_k, $\forall k$, seja não singular, ou seja, é necessário que $\det(J(P_k)) \neq 0$, $\forall k$.

O método que será utilizado para resolver o sistema não-linear (3.10), não foi exatamente o método apresentado acima, mas uma variação dele, a saber, o Método de Newton Modificado.

Este método consiste em, ao invés de se calcular $J(P_k)$ no sistema (3.18) a cada iteração k, é calcular somente $J(P_0)$, onde P_0 é a aproximação inicial escolhida, e assim, resolver o sistema

$$J(P_0)s_k = -F(P_k), \quad \forall \quad k. \tag{3.19}$$

Observação: Para resolução do sistema (3.10) foi escolhido tal método devido à redução no custo computacional, assunto a ser abordado no capítulo 4 seção 4.2.

A seguir será apresentado como foi aplicado o Método de Newton Modificado no sistema não-linear (3.10).

3.3.2 Aplicação

Observe que o sistema iterativo (3.10), para n fixado, pode ser escrito na forma:

$$Mx + \alpha Q(x) = s,$$

com $x = d^{n+1}$, $\alpha = (\Delta t)^2$ e $s = (\Delta t)^2 F^{*n} + Ld^n - Md^{n-1}$.

Sendo assim, denotando

$$G(x) = Mx + \alpha Q(x) - \beta, \tag{3.20}$$

a fim de se obter a solução do sistema (3.10), basta aplicar o Método de Newton Modificado à função $G(x)$. Para isso, segundo (3.19), serão necessários os termos $G(x_k)$ e $J(x_0)$.

Quanto ao termo $G(x_k)$ não há muito a ser feito, pois basta substituir $x = x_k$ em (3.20). Mas, quanto à matriz jacobiana $J(x_0)$, será necessário utilizar o Método das Diferenças Finitas para aproximar as derivadas parciais de cada função g_i, função da i-ésima linha do vetor G, em relação às variáveis x_j, com $j = 1, \ldots, m$. O método utilizado foi o Método de Euler Progressivo, que consiste em aproximar uma derivada parcial da seguinte forma, assumindo $\Delta x > 0$,

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0) \approx \frac{g_i(x_0 + \overrightarrow{\Delta x}) - g_i(x_0)}{\Delta x},$$

onde $\overrightarrow{\Delta x} = \Delta x e_j$, com e_j sendo o j-ésimo vetor canônico do $\mathbb{R}^n$.

Aproximando todas as derivadas parciais $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)$, $\forall i, j$, será obtida a matriz jacobiana.

Assim, obtendo $J(x_0)$ e $F(x_0)$, basta substituir no sistema (3.19) e o resolver através de um método numérico e, enfim, obter s_0, de onde será extraído o vetor x_1, assim, sucessivamente, até o k que permita a condição abaixo ser satisfeita para algum $\epsilon > 0$ dado

$$|x_{k+1} - x_k| < \epsilon.$$

Voltando à resolução do sistema (3.10), note que suas matrizes são dependentes das funções da base φ_i, $\forall i$, que até o presente instante não foram definidas. A fim de defini-las, será aplicado o Método de Elementos Finitos.

3.4 Método de Elementos Finitos

Antes de definir as funções da base, será escolhida uma partição para o domínio Ω de forma a dividi-lo em sub-regiões Ω_e abertas, satisfazendo as condições:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{m} \overline{\Omega}_e \quad \text{e} \quad \Omega_e \cap \Omega_k = \emptyset, \quad \text{se} \quad e \neq k. \tag{3.21}$$

As sub-regiões Ω_e serão chamadas de elementos do domínio Ω.

Nesta partição adotada em (3.21) serão definidos os nós globais $x_j \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, m$, onde m será o número total de nós da malha, ou seja, da partição. Em particular, neste trabalho os domínios Ω_e serão segmentos de retas, no caso unidimensional, e quadrados, no caso bidimensional. Em ambos os casos, os nós globais x_j serão vértices dos domínios Ω_e. Como a condição de fronteira do problema alvo deste texto é nula em todo tempo t, então o número de nós globais x_j é igual à dimensão do espaço V_m.

Uma vez que o domínio Ω foi particionado, serão escolhidas como na subseção a seguir as funções base, $\varphi(x)$.

3.4.1 Função Base

A escolha das funções base será feita com o intuito de tornar as matrizes do Sistema não-linear (3.10) esparsas, para reduzir o custo computacional dos cálculos. Para isso, serão escolhidas funções base de tal maneira que a i_ésima função base satisfaça a condição abaixo para cada nó x_j de Ω.

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j, \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{3.22}$$

Função base do caso unidimensional

Partindo da condição (3.22), será definido como função base do caso unidimensional, um polinômio linear por partes, definido da seguinte forma:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{se} \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{se} \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \\ \\ 0, & \text{se} \quad x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{3.23}$$

Considerando uma partição de Ω em m elementos, de tal forma que Ω_e seja um intervalo de comprimento fixo h para todo e, o gráfico da função (3.23) será:

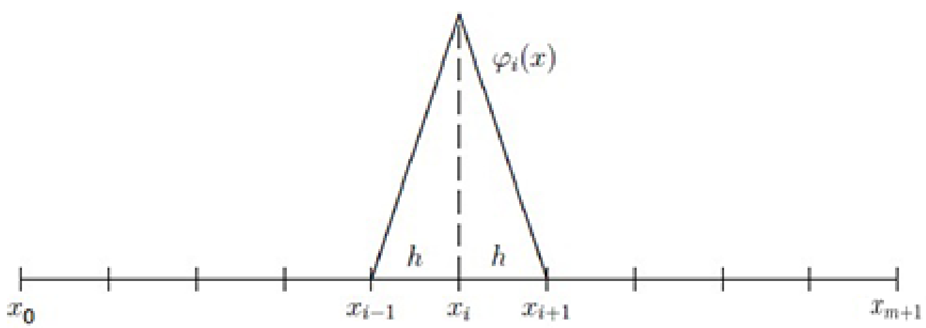


Figura 3.1: Função base global do caso unidimensional

Função base do caso bidimensional

Para se definir a função base para este caso será necessário restringir o domínio Ω ao seu e_ésimo elemento Ω_e, com $e = 1, \ldots, m$. Supondo que este elemento seja um quadrilátero, seus vértices serão enumerados no sentido anti-horário começando no vértice inferior esquerdo, e denotados como

$$p_1^e = (x_1^e, y_1^e), \quad p_2^e = (x_2^e, y_1^e), \quad p_3^e = (x_2^e, y_2^e) \quad \text{e} \quad p_4^e = (x_1^e, y_2^e),$$

assim como na Figura (3.2).

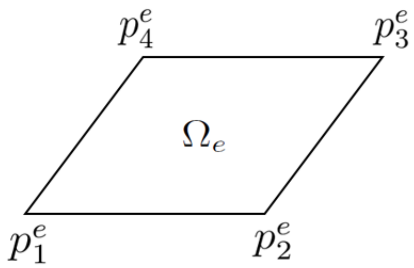


Figura 3.2: Elemento Ω_e

Agora, da mesma forma que no caso unidimensional, a função base precisará satisfazer a condição (3.22), portanto, denotando por $\varphi_a^e(x,y)$, com $a = 1,2,3,4$, como sendo a função base restrita ao domínio Ω_e tal que $\varphi_a^e(p_a^e) = 1$, serão consideradas como funções base as superfícies a seguir:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^e(x,y) &= \frac{(x - x_2^e)(y - y_2^e)}{(x_1^e - x_2^e)(y_1^e - y_2^e)}, \\
\varphi_2^e(x,y) &= \frac{(x - x_1^e)(y - y_2^e)}{(x_2^e - x_1^e)(y_1^e - y_2^e)}, \\
\varphi_3^e(x,y) &= \frac{(x - x_1^e)(y - y_1^e)}{(x_2^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e)}, \\
\varphi_4^e(x,y) &= \frac{(x - x_2^e)(y - y_1^e)}{(x_1^e - x_2^e)(y_2^e - y_1^e)}.
\end{aligned}$$

Graficamente, a função φ_3^e, por exemplo, pode ser representada pela Figura (3.3).

Uma vez conhecidas as funções base φ_i's, para todo i, pode-se determinar os termos do sistema não-linear (3.10).

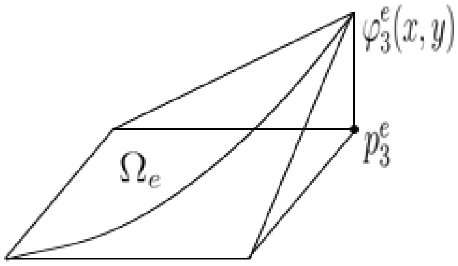


Figura 3.3: Função base local do caso bidimensional

Estudados estes assuntos, será iniciado o capítulo com as simulações, onde será solucionado o sistema (3.10) para diferentes combinações de f, u_0 e u_1 em (1.4).

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo serão realizadas as simulações numéricas, aplicando o método (3.10), mas para isso serão verificadas algumas condições a fim de validá-lo.

Para os resultados e validações serão utilizados os programas implementados em *Python* com uso dos pacotes *numpy*, disponibilizando ferramentas numéricas, e *matplotlib*, para desenho dos gráficos das soluções.

4.1 Validação do Método

Para validação do método, será escolhida uma solução $u(t,x)$ como solução exata do problema. Assim, a partir desta solução, serão definidas a função fonte $f(t,x)$, como sendo o resultado da operação $u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + |u(t,x)|^{\rho}$, uma vez que $u(t,x)$ será conhecida, e as condições iniciais u_0 e u_1, dadas respectivamente por $u(0,x)$ e $u_t(0,x)$, a fim de gerarmos um problema, no qual será aplicado o método (3.10) com o objetivo de se obter a solução aproximada $u_m(t,x)$. Após obtê-la, será calculado o erro de aproximação entre as soluções $u(t,x)$ e $u_m(t,x)$ na norma discreta de $L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, dado por:

$$E_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} = \max_{0<t<T} \left(\sum_{i=1}^{m} |u(t,x_i) - u_m(t,x_i)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

A seguir serão apresentadas duas escolhas para a função $u(t,x)$ e tabelas com os erros de aproximação para cada $u_m(t,x)$ obtida a partir de algumas combinações dos parâmetros $\Delta t, h$ e θ.

Exemplo 1

Considerando

$$u(t,x) = \operatorname{sen}(6\pi x)\cos(\pi t),$$

ao se calcular $f = u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho$, obtém-se

$$f(t,x) = |\operatorname{sen}(6\pi x)\cos(\pi t)|^\rho + 35\pi^2(\operatorname{sen}(6\pi x)\cos(\pi t)),$$

e, tomando $u_0 = u(0,x)$ e $u_1 = u_t(0,x)$,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \operatorname{sen}(6\pi x) \\ u_1(x) &= 0. \end{aligned}$$

Assim sendo, a seguir serão apresentados os erros de aproximação das soluções aproximadas $u_m(t,x)$, obtidas pelo método (3.10), considerando diferentes combinações dos parâmetros $\Delta t, h$ e θ.

O expoente ρ do termo não-linear será fixado em $\rho = 2$ pois, para $\rho \neq 2$, os erros de aproximação serão semelhantes.

Para o caso unidimensional, será tomado o domínio $\Omega_{1D} = (0,1)$ e, para o bidimensional, será tomado o domínio $\Omega_{2D} = (0,1) \times (0,1)$. Em ambos os casos será considerado $T = 1$.

Caso unidimensional

Nas tabelas 4.1 e 4.2 são apresentadas a dependência do erro de aproximação em relação aos parâmetros de discretização h e Δt, fixado $\theta = 1$.

Nota 4.1. *Em cada uma das tabelas apresentadas observa-se que os parâmetros* h

ou Δt reduzem pela metade a cada variação. Devido a isto precisa-se que $V_m \subsetneq V_{2m}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, e $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_{2^j m}$ seja denso em $H_0^1(\Omega)$.

	h	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{1D}))}$
	0.1	0.327579
$\Delta t = 0.0015625$	0.05	0.102512
$\theta = 1$	0.025	0.026694
	0.0125	0.006735

Tabela 4.1: Tabela de erro com $E(h)$ para o exemplo 1 no caso unidimensional

	Δt	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{1D}))}$
	0.1	0.012154
$h = 0.0015625$	0.05	0.006226
$\theta = 1$	0.025	0.003122
	0.0125	0.001558

Tabela 4.2: Tabela de erro com $E(\Delta t)$ para o exemplo 1 no caso unidimensional

Utilizando a fórmula dada em (A.4), a Tabela 4.3 mostra que a ordem de convergência do método utilizado é, aproximadamente, quadrática fixado $\theta = 1$.

	$\Delta t = h$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{1D}))}$	p
$\theta = 1$	0.1	0.260268	–
	0.05	0.097327	1.42
	0.025	0.024356	1.99
	0.0125	0.006394	1.93

Tabela 4.3: Tabela com a ordem de convergência para o exemplo 1 no caso unidimensional

Em especial, a Tabela (4.4), apresentará que quando, em particular, $\theta = 0$, mas também para todo $\theta \in [0, 0.25]$, é necessário ser satisfeita uma relação entre h e Δt para haver convergência do método (3.10), ou seja, para $\theta \in [0, 0.25]$ o método (3.10) é condicionalmente convergente e a condição é dada pela seguinte relação: $\Delta t \leq h/2$.

	h	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{1D}))}$
$\theta = 0$	0.1	0.326335
$\Delta t = 0.01$	0.05	0.102365
	0.025	0.026697
	0.0125	**diverge**

Tabela 4.4: Tabela especial considerando $\theta = 0$.

Observe que quando $h \leq 0.025$ o método apresenta uma possível convergência, mas quando $h = 0.0125 < \Delta t$, o método gera um erro de aproximação muito alto, o que caracteriza a divergência.

Caso bidimensional

Para este caso só será apresentada a Tabela 4.5, onde será exibida a ordem de convergência do método.

	$\Delta t = h$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{2D}))}$	p
$\theta = 1$	0.04	0.007237	$-$
	0.01	0.003570	0.51
	0.0025	0.001682	0.54

Tabela 4.5: Tabela com a ordem de convergência para o exemplo 1 no caso bidimensional

Observe que para este caso a taxa de convergência é aproximadamente 0.55.

Exemplo 2

Considerando como solução exata

$$u(t, x) = \operatorname{sen}(6\pi x)\operatorname{sen}(\pi t),$$

semelhante à do exemplo anterior só que com $\operatorname{sen}(\pi t)$ na parte temporal. O termo fonte será

$$f(t, x) = |\operatorname{sen}(6\pi x)\operatorname{sen}(\pi t)|^\rho + 35\pi^2(\operatorname{sen}(6\pi x\ )\operatorname{sen}(\pi t)),$$

e as condições iniciais serão

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0 \\ u_1(x) &= \pi \operatorname{sen}(6\pi x). \end{aligned}$$

Os erros de aproximação serão calculados na mesma norma discreta (4.1). O expoente ρ do termo não-linear será mantido com $\rho = 2$. Os domínios espaciais serão Ω_{1D}, para o caso unidimensional, e Ω_{2D}, para o caso bidimensional, e o limitante superior do intervalo temporal será fixado $T = 1$.

Caso unidimensional

Nas tabelas 4.6 e 4.7 são apresentadas a dependência do erro de aproximação em relação aos parâmetros de discretização h e Δt fixado $\theta = 1$.

	h	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{1D}))}$
$\Delta t = 0.0015625$ $\theta = 1.$	0.1	0.194835
	0.05	0.058921
	0.025	0.015266
	0.0125	0.003866

Tabela 4.6: Tabela de erro com $E(h)$ para o exemplo 2 no caso unidimensional

	Δt	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{1D}))}$
$h = 0.0015625$ $\theta = 1.$	0.1	0.009071
	0.05	0.005871
	0.025	0.003081
	0.0125	0.001567

Tabela 4.7: Tabela de erro com $E(\Delta t)$ para o exemplo 2 no caso unidimensional

A Tabela 4.8 mostra que a ordem de convergência do método utilizado, fixado $\theta = 1$, é aproximadamente quadrática.

	$\Delta t = h$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{1D}))}$	p
$\theta = 1$	0.1	0.237933	–
	0.05	0.057711	2.04
	0.025	0.015562	1.89
	0.0125	0.004253	1.87

Tabela 4.8: Tabela com a ordem de convergência para o exemplo 2 no caso unidimensional

Caso Bidimensional

Novamente para o caso bidimensional só será apresentada a Tabela 4.9, onde será exibida a ordem de convergência do método.

	$\Delta t = h$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega_{2D}))}$	p
$\theta = 1$	0.04	0.006035	–
	0.01	0.002624	0.60
	0.0025	0.001189	0.57

Tabela 4.9: Tabela com a ordem de convergência para o exemplo 2 no caso bidimensional

A taxa de convergência apresentou-se aproximadamente 0.6.

Tendo apresentado uma validação para o método definido em (3.10), será apresentado, na seção a seguir, o porquê da escolha do Método de Newton Modificado para a resolução do sistema não-linear em questão.

4.2 Custo Computacional

Nesta seção será avaliado o custo computacional quanto à velocidade em que se obtém a solução do sistema não-linear (3.10) na aplicação dos métodos de Newton e Newton Modificado, ou seja, serão contabilizados quantos segundos cada método precisa para calcular a solução.

Considerando-se o caso unidimensional do exemplo 1 da seção anterior e fixados $\theta = 1$, $T = 1$ e $\rho = 2$, foram obtidos os resultados expressos na Tabela 4.10.

$\Delta t = h$	Newton	Newton Modificado
0.1	1.227s	0.590s
0.05	6.955s	2.565s
0.025	44.421s	18.341s
0.0125	237.343s	135.219s

Tabela 4.10: Tabela com o custo computacional dos métodos de Newton e Newton Modificado

Este resultado nos garante que o método de Newton Modificado obtém a solução do sistema não-linear (3.10) mais rapidamente. Agora basta verificar se há perda de precisão nas soluções.

Afim de avaliar a diferença de precisão entre os métodos de Newton e Newton Modificado, defini-se E_N e E_{NM} como sendo os erros de aproximação das soluções obtidas pelos métodos de Newton e Newton Modificado, respectivamente. A Tabela 4.11 apresenta o módulo da diferença entre os erros de aproximação E_{N} e E_{NM} nos mesmos casos da Tabela 4.10.

Conclui-se pela Tabela 4.11 que o módulo da diferença entre os erros de aproximação das soluções obtidas pelos métodos diminuem proporcionalmente com Δt e h.

$\Delta t = h$	$\lvert E_{\text{N}} - E_{\text{NM}} \rvert$
0.1	4.17×10^{-10}
0.05	1.83×10^{-11}
0.025	9.08×10^{-11}
0.0125	9.71×10^{-12}

Tabela 4.11: Tabela com o módulo da diferença entre os erros de aproximação dos métodos de Newton e Newton Modificado

Sendo assim, pode-se concluir que ao se escolher o método de Newton Modificado para resolver o sistema não-linear (3.10) não há uma perda considerável de precisão em relação ao método de Newton e ainda ganha-se uma aceleração na resolução do mesmo.

Uma vez que o método foi validado e justificada a escolha do Método de Newton Modificado, será calculada, na seção a seguir, a solução numérica do problema (2.6) assumindo-se $f \equiv 0$ e será relacionado o seu comportamento com diferentes condições iniciais u_0 e u_1.

4.3 Resultados

Nesta seção será relacionado o comportamento da solução numérica quando o termo fonte é identicamente nulo, ou seja, quando $f \equiv 0$, considerando algumas condições iniciais particulares, com o Teorema 2.2.

Antes de dar início aos resultados, serão definidos dois conceitos. Diz-se que as condições iniciais $u_0(x)$ e $u_1(x)$ são *pequenas* se a solução numérica obtida for definida para $t > 0$, caso contrário serão ditas *grandes*.

Para os resultados a seguir serão considerados os domínios Ω_{1D} e Ω_{2D}, definidos anteriormente, e, como foi dito, termo fonte $f \equiv 0$.

Na subseção a seguir será apresentado o comportamento da solução numérica considerando-se condições iniciais que serão chamadas de *grandes*, ou seja, condições iniciais tais que a solução numérica obtida só pode ser definida localmente, ou seja, para todo $t \in [0, T]$, para algum $T > 0$ fixado.

4.3.1 Soluções numéricas ilimitadas

As simulações desta seção serão realizadas considerando-se as seguintes combinações de condições iniciais para o caso unidimensional:

$$\begin{array}{lccl} \textbf{I} & u_0(x) & = & 25 \times \mathrm{sen}(\pi x) \\ & u_1 & \equiv & 0 \\ \\ \textbf{II} & u_0(x) & = & 0.05 \times \mathrm{sen}(\pi x) \\ & u_1 & \equiv & 25 \\ \\ \textbf{III} & u_0(x) & = & 0.05 \times \mathrm{sen}(\pi x) \\ & u_1 & \equiv & -25 \end{array}$$

Para o caso bidimensional, será considerada a seguinte combinação:

$$\begin{array}{lccl} \textbf{IV} & u_0(x,y) & = & 50 \times \mathrm{sen}(\pi x)\mathrm{sen}(\pi y) \\ & u_1 & \equiv & 0 \end{array}$$

Caso unidimensional

Fixando $\theta = 1$ e $h = \Delta t = 0.0015625$ obteve-se os resultados que seguem tomando $\rho = 2, 3$ e 4. As figuras 4.1 e 4.2 representam os gráficos das posições iniciais em **I** e em **II** e **III**, respectivamente.

Para $\rho = 2$:

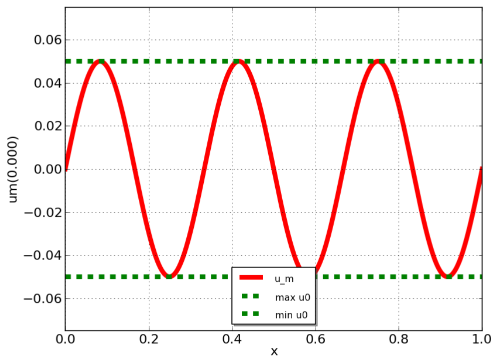


Figura 4.1: Gráfico da posição inicial u_0 *pequena* para o caso unidimensional

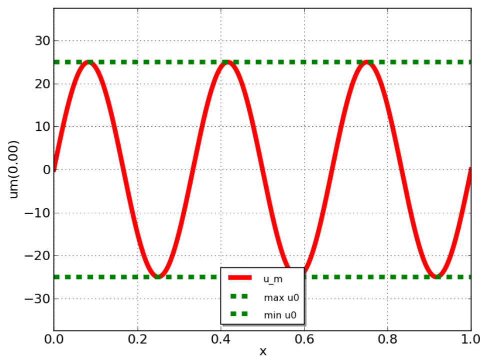


Figura 4.2: Gráfico da posição inicial u_0 *grande* para o caso unidimensional

- Para a combinação **I**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 1.031]$. Ver gráfico da solução numérica na Figura 4.3.

- Para a combinação **II**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 2.183]$. Ver Figura 4.4.

- Para a combinação **III**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 1.406]$. Ver Figura 4.5.

Para $\rho = 3$:

• Para a combinação **I**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 0.122]$. Ver Figura 4.6.

• Para a combinação **II**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 0.961]$. Ver Figura 4.7.

• Para a combinação **III**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 0.456]$. Ver Figura 4.8.

Para $\rho = 4$:

• Para a combinação **I**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 0.02]$. Ver Figura 4.9.

• Para a combinação **II**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 0.659]$. Ver Figura 4.10.

• Para a combinação **III**, obteve-se solução numérica para todo $t \in [0, 0.283]$. Ver Figura 4.11.

Observa-se nos resultados considerando-se as condições iniciais em **I** que, quando $\rho = 2$, a solução numérica evolui oscilando inicialmente e, aos poucos, se torna predominantemente negativa apresentando pouca oscilação e com norma crescendo a taxas cada vez maiores. Já quando $\rho = 3$ e $\rho = 4$, as oscilações iniciais são menores e sua norma decresce mais rapidamente. Ver figuras 4.3, 4.6 e 4.9.

Observa-se, também, nos resultados considerando-se as condições iniciais em **II** que, para todos os ρ's, a velocidade inicial positiva faz com que a solução numérica seja predominantemente positiva, mas a partir de um certo instante de tempo se torna predominantemente negativa tendo, sua norma, taxa de crescimento diretamente proporcional ao expoente ρ. Ver figuras 4.4, 4.7 e 4.10.

E nos resultados considerando-se as condições iniciais em **III** observa-se que, ainda que a velocidade inicial negativa torne a solução numérica predominantemente negativa inicialmente, demora um certo tempo para a norma da solução numérica começar a crescer a taxas grandes. Ver figuras 4.5, 4.8 e 4.11.

Caso bidimensional

Fixando $\theta = 1, h = h_x \times h_y = 0.000625$ e $\Delta t = 0.0015625$ e considerando a combinação **IV** das condições iniciais, obteve-se o resultado a seguir tomando $\rho = 2$. A Figura 4.12 representa o gráfico da posição inicial tomada em **IV**.

A solução numérica foi obtida para todo $t \in [0, 0.703]$. Ver Figura 4.13.

Uma vez que verificaram-se casos onde a solução numérica está definida somente de forma local, serão apresentadas algumas soluções numéricas obtidas a partir de condições iniciais que serão chamadas de *pequenas*, ou seja, soluções numéricas definidas de forma global, isto é, para todo $t \in [0, \infty)$.

4.3.2 Soluções numéricas limitadas

As simulações desta seção serão realizadas considerando, para o caso unidimensional, as condições iniciais

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0.05 \times \mathrm{sen}(\pi x), \\ u_1 &\equiv 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

E, para o caso bidimensional,

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= 0.05 \times \operatorname{sen}(\pi x) \cdot \operatorname{sen}(\pi y), \\ u_1 &\equiv 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Caso unidimensional

Tomando $T = 1, \theta = 1$ e $h = 0.0015625 = \Delta t$, a solução numérica foi obtida para $\rho = 2, 3$ e 4. Em todos os três casos comportamento apresentado foi o mesmo.

A Figura 4.14 apresenta o gráfico das soluções numéricas obtidas para $\rho = 2$, mas este mesmo resultado vale para $\rho = 3$ e $\rho = 4$.

Caso bidimensional

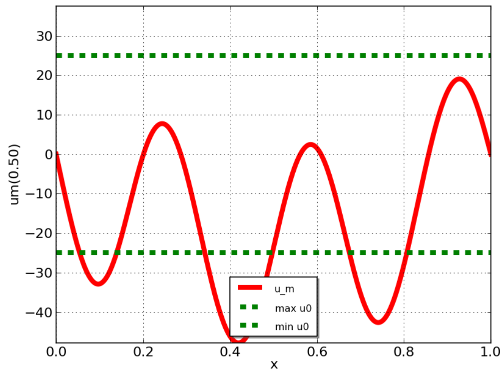
Tomando $T = 1, \theta = 1, h = h_x \times h_y = 0.000625$ e $\Delta t = 0.01$, a solução numérica foi obtida somente para $\rho = 4$ devido ao alto custo computacional mencionado na seção **??**. A Figura 4.15 apresenta o gráfico da solução numérica obtida.

Observe que as soluções numéricas considerando condições iniciais *pequenas*, tanto para o caso unidimensional quanto para o caso bidimensional, mantiveram-se na faixa $[-0.05, 0.05]$ para todo $t \in [0, 1]$.

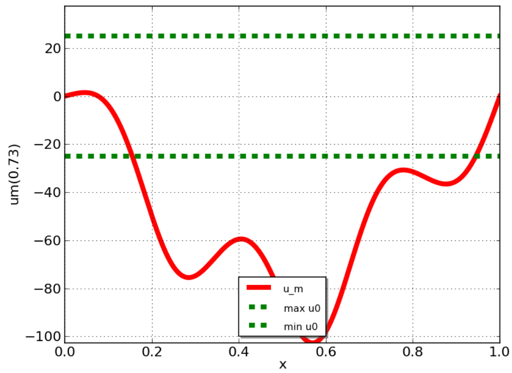
Em uma outra simulação para o caso unidimensional com estas mesmas condições iniciais tomou-se $T = 10$ e verificou-se que o comportamento se manteve semelhante ao representado na Figura 4.14.

Deduzindo que o comportamento da solução numérica para o caso bidimensional quando $T = 10$ também se mantém como na Figura 4.15, conclui-se que a solução numérica pode ser definida para todo $t \in [0, \infty)$ em ambas as dimensões.

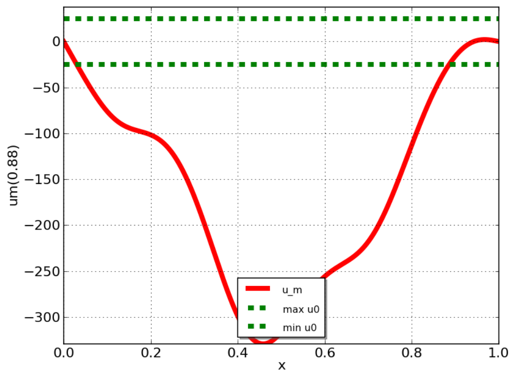
Sendo assim, associando estes resultados com o Teorema 2.2, pode-se dizer que as condições iniciais em (4.2) e em (4.3) satisfariam as hipóteses (2.29) e (2.30) deste mesmo teorema.



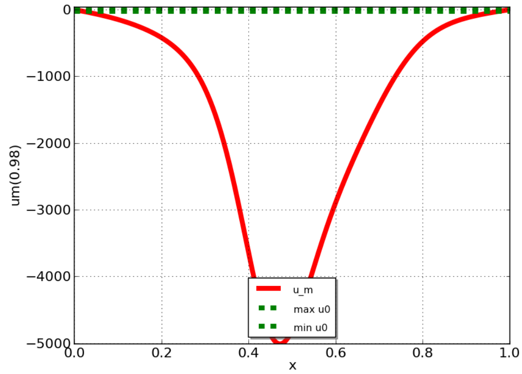
(a) Instante $t = 0.5$



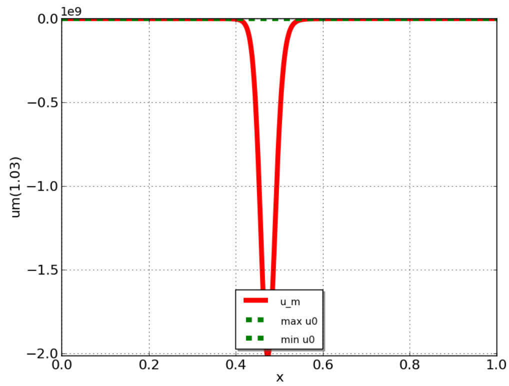
(b) Instante $t = 0.734$



(c) Instante $t = 0.875$

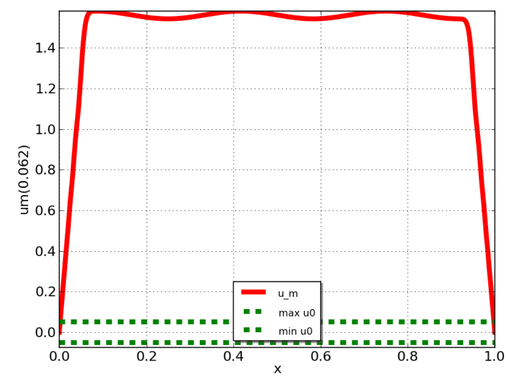


(d) Instante $t = 0.984$

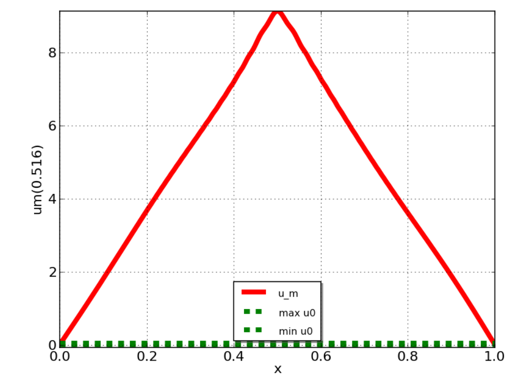


(e) Instante $t = 1.031$

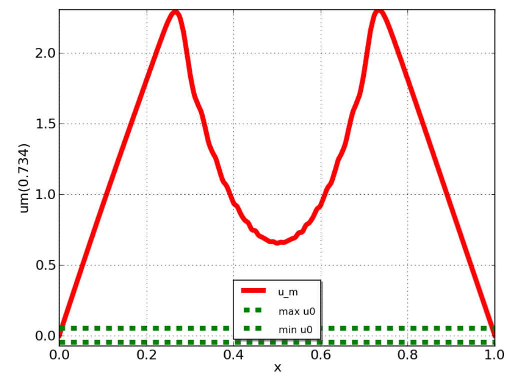
Figura 4.3: Gráfico da solução numérica com $\rho = 2$ e condições iniciais *grandes*, combinação **I**



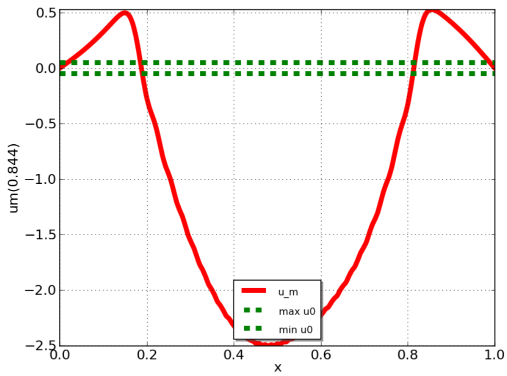
(a) Instante $t = 0.063$



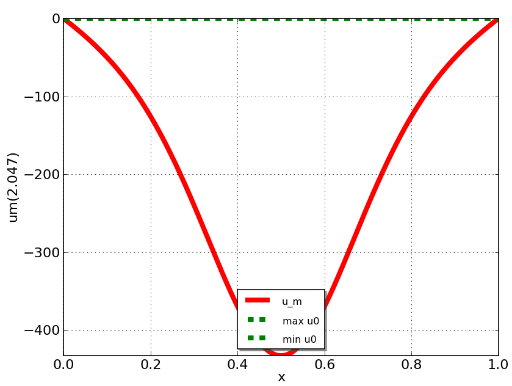
(b) Instante $t = 0.516$



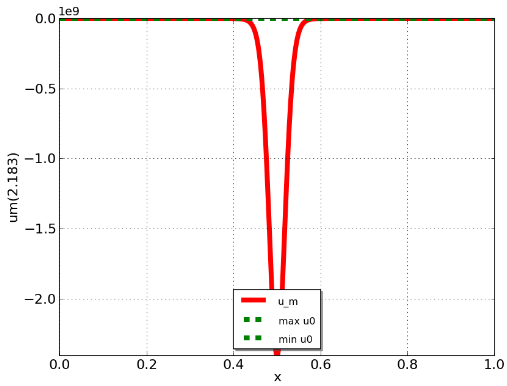
(c) Instante $t = 0.734$



(d) Instante $t = 0.844$

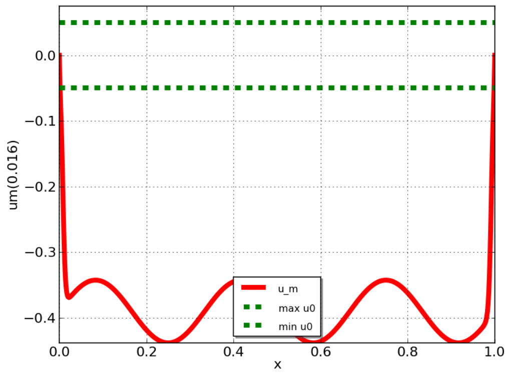


(e) Instante $t = 2.047$

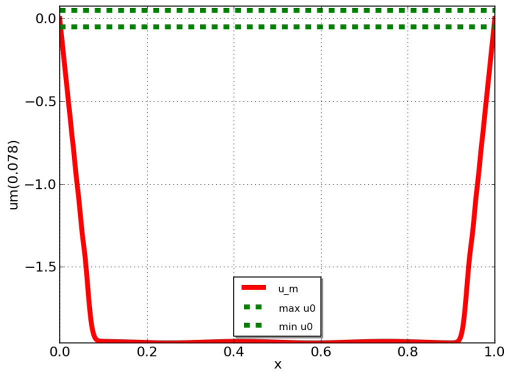


(f) Instante $t = 2.183$

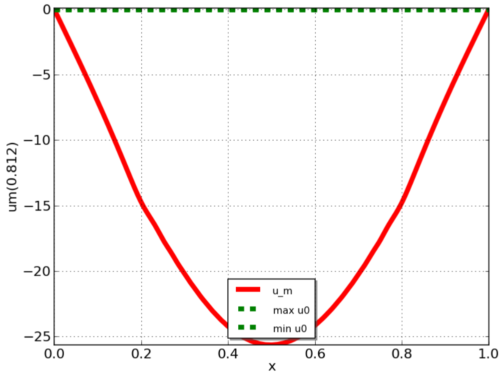
Figura 4.4: Gráfico da solução numérica com $\rho = 2$ e condições iniciais *grandes*, combinação **II**



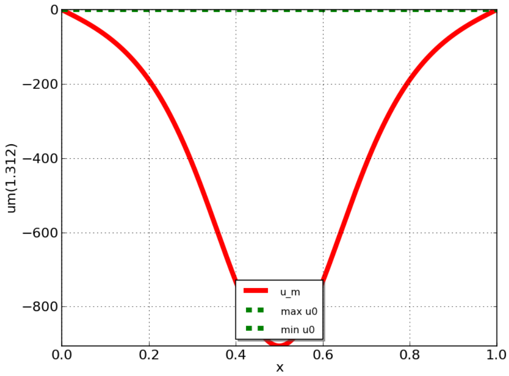
(a) Instante $t = 0.016$



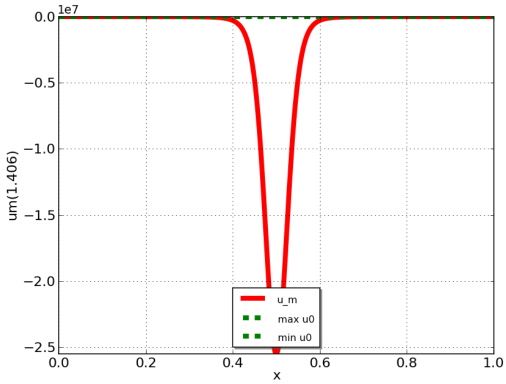
(b) Instante $t = 0.078$



(c) Instante $t = 0.813$

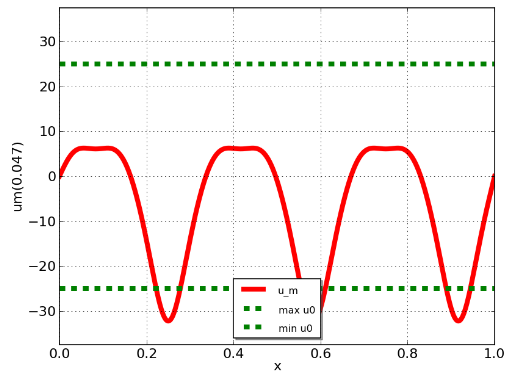


(d) Instante $t = 1.313$

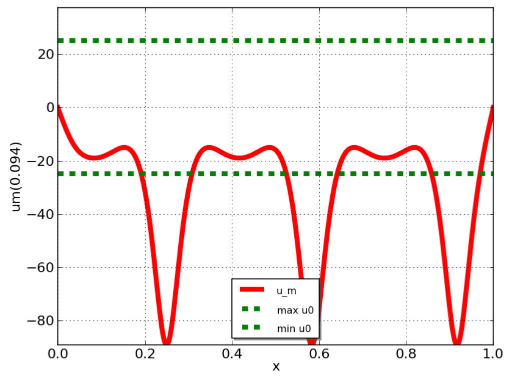


(e) Instante $t = 1.406$

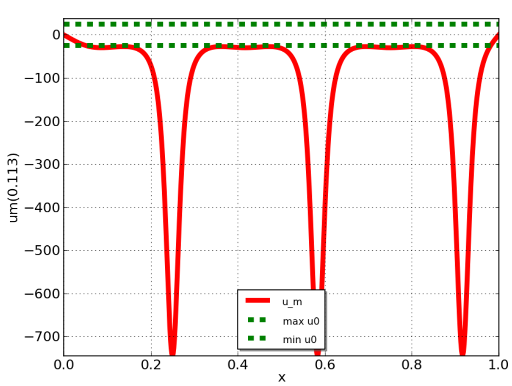
Figura 4.5: Gráfico da solução numérica com $\rho = 2$ e condições iniciais *grandes*, combinação **III**



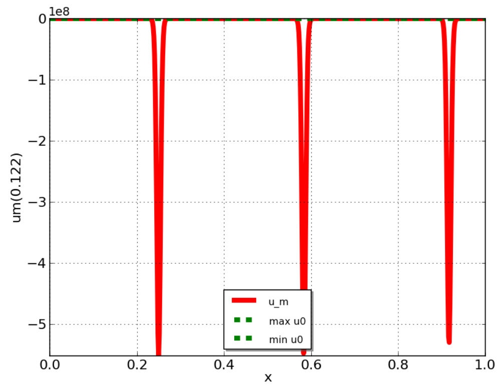
(a) Instante $t = 0.047$



(b) Instante $t = 0.094$

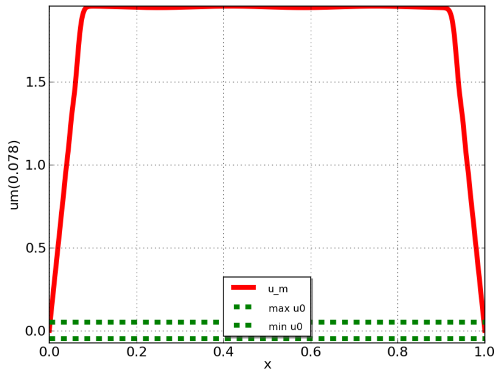


(c) Instante $t = 0.113$

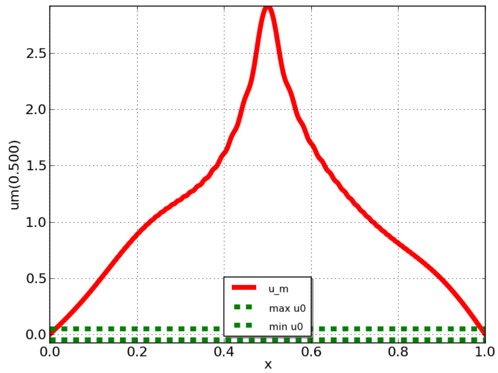


(d) Instante $t = 0.122$

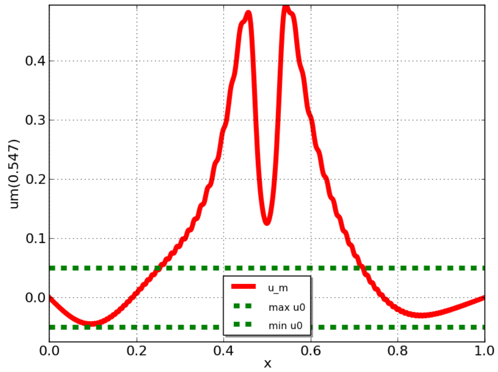
Figura 4.6: Gráfico da solução numérica com $\rho = 3$ e condições iniciais *grandes*, combinação **I**



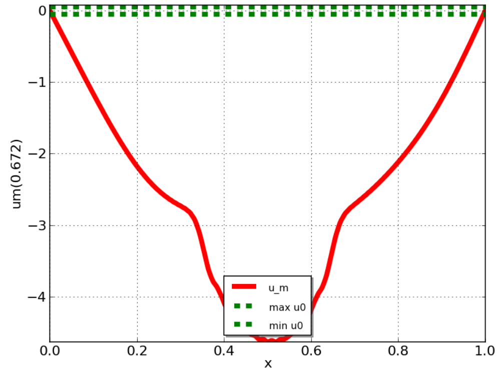
(a) Instante $t = 0.078$



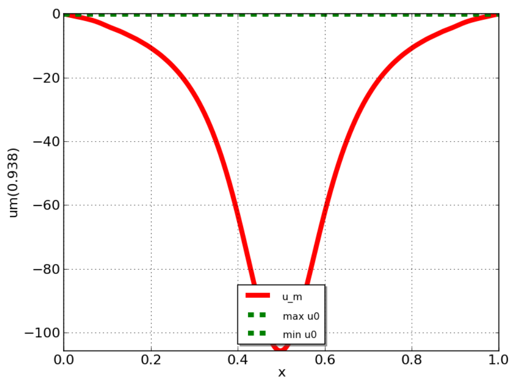
(b) Instante $t = 0.5$



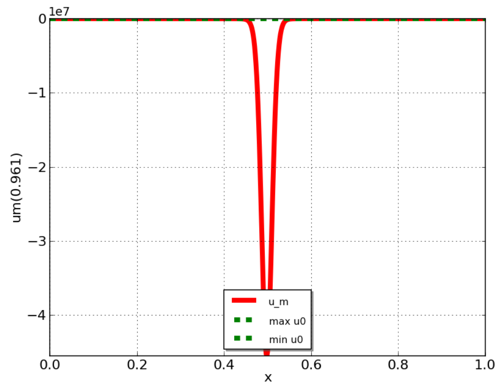
(c) Instante $t = 0.547$



(d) Instante $t = 0.672$

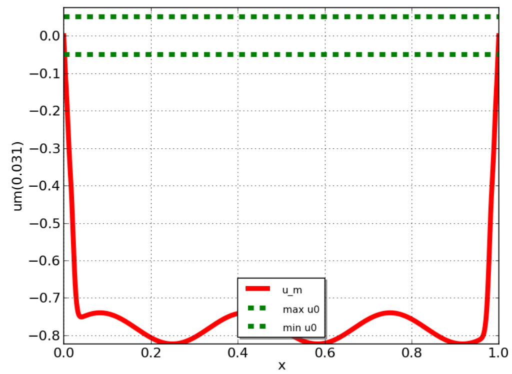


(e) Instante $t = 0.938$

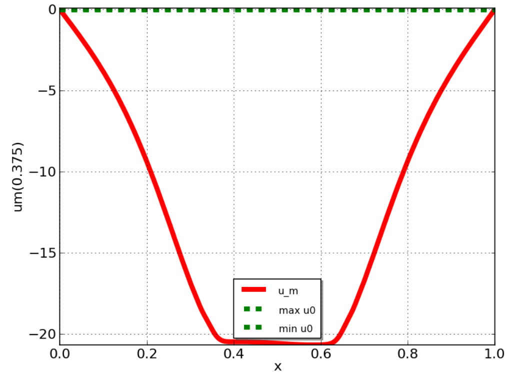


(f) Instante $t = 0.961$

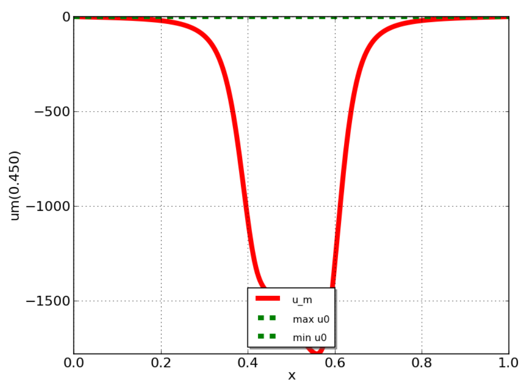
Figura 4.7: Gráfico da solução numérica com $\rho = 3$ e condições iniciais *grandes*, combinação **II**



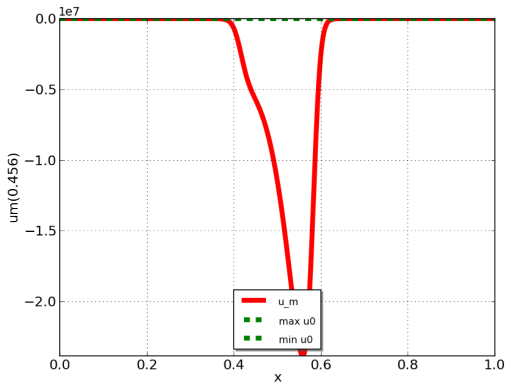
(a) Instante $t = 0.031$



(b) Instante $t = 0.375$

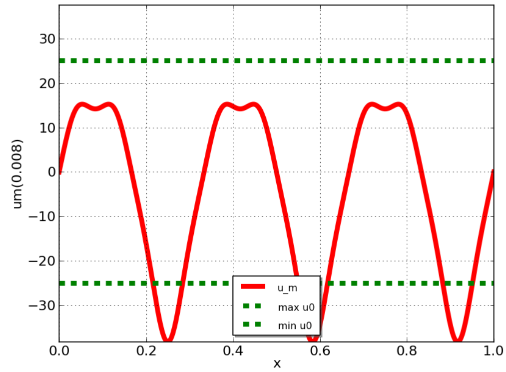


(c) Instante $t = 0.45$

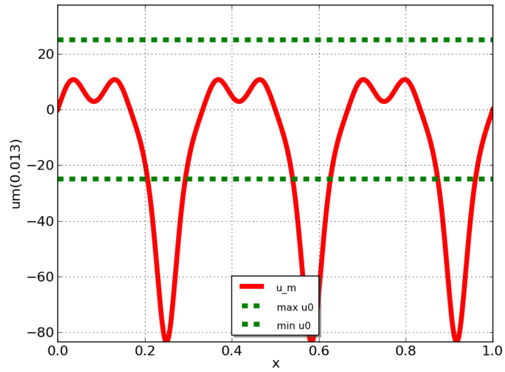


(d) Instante $t = 0.456$

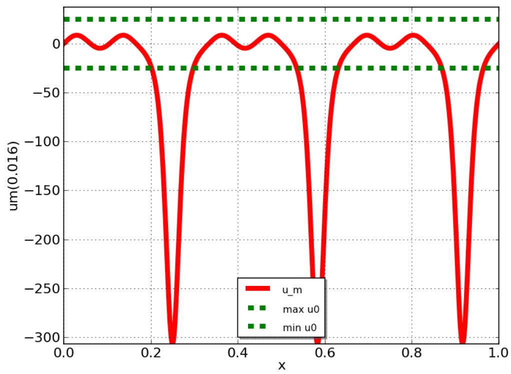
Figura 4.8: Gráfico da solução numérica com $\rho = 3$ e condições iniciais *grandes*, combinação **III**



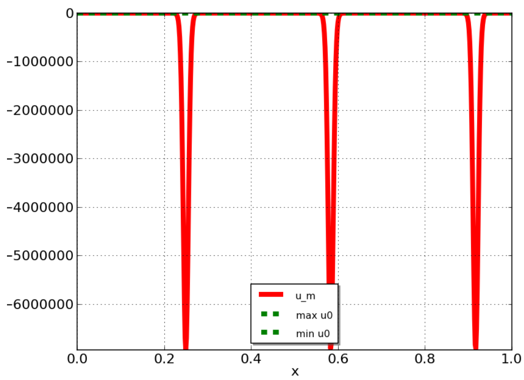
(a) Instante $t = 0.008$



(b) Instante $t = 0.013$

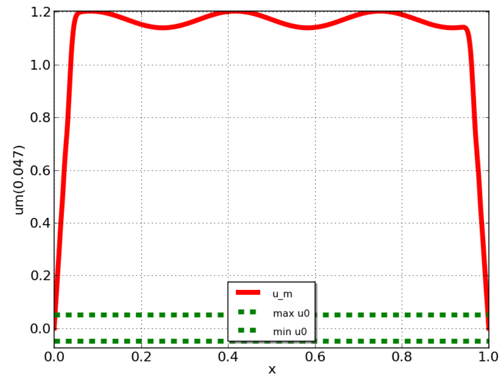


(c) Instante $t = 0.016$

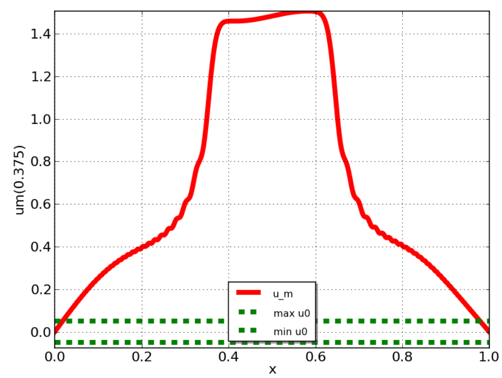


(d) Instante $t = 0.02$

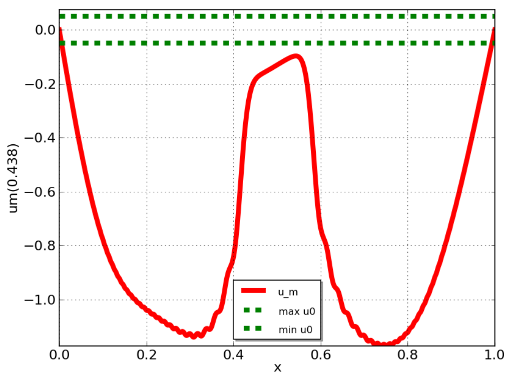
Figura 4.9: Gráfico da solução numérica com $\rho = 4$ e condições iniciais *grandes*, combinação **I**



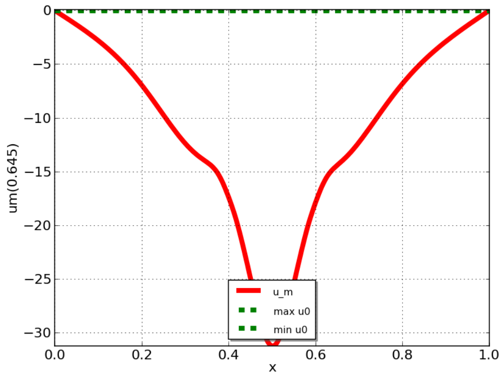
(a) Instante $t = 0.047$



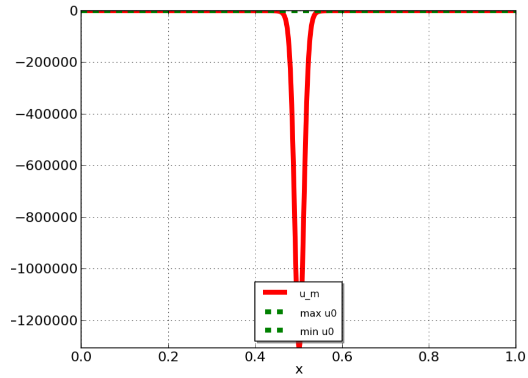
(b) Instante $t = 0.375$



(c) Instante $t = 0.438$

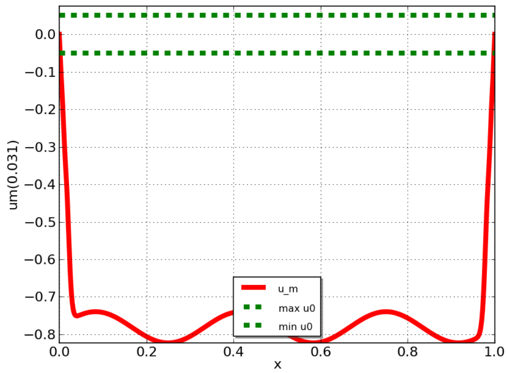


(d) Instante $t = 0.645$

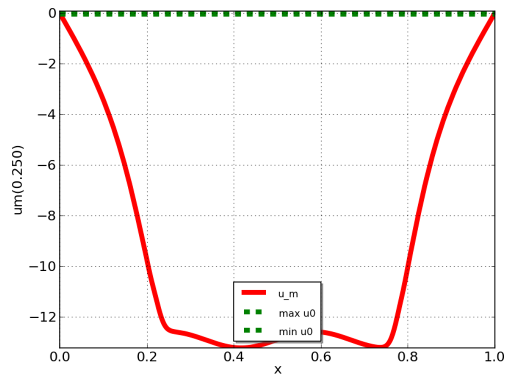


(e) Instante $t = 0.659$

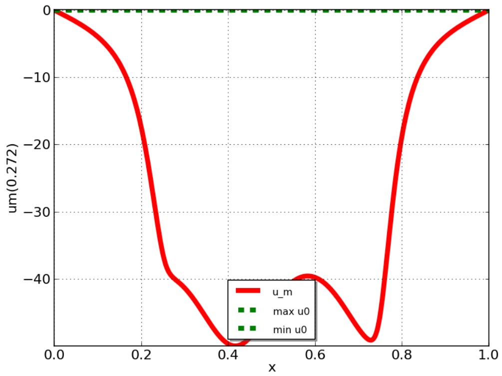
Figura 4.10: Gráfico da solução numérica com $\rho = 4$ e condições iniciais *grandes*, combinação **II**



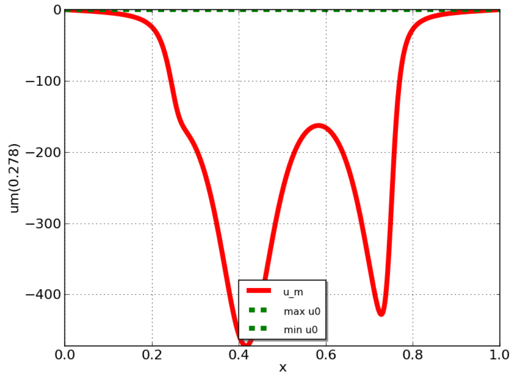
(a) Instante $t = 0.031$



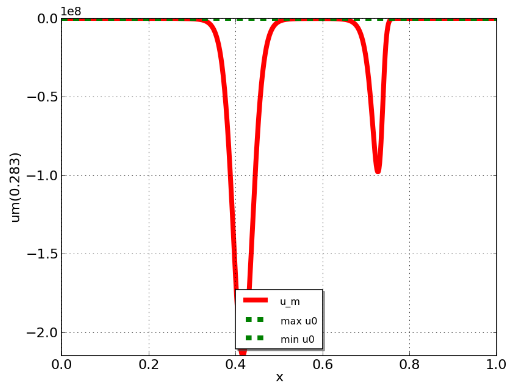
(b) Instante $t = 0.25$



(c) Instante $t = 0.272$



(d) Instante $t = 0.278$



(e) Instante $t = 0.283$

Figura 4.11: Gráfico da solução numérica com $\rho = 4$ e condições iniciais *grandes*, combinação **III**

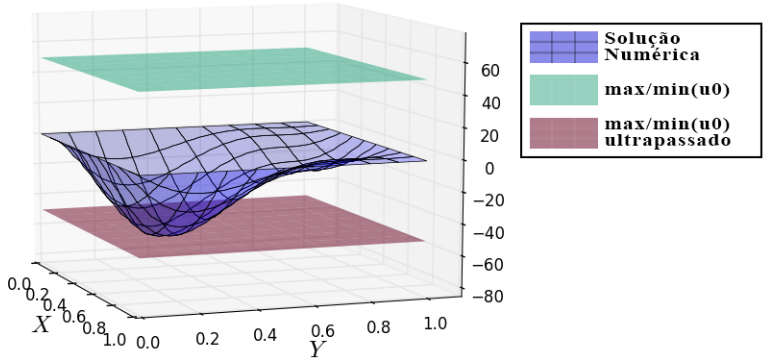
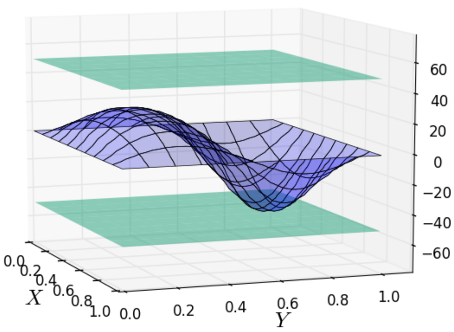
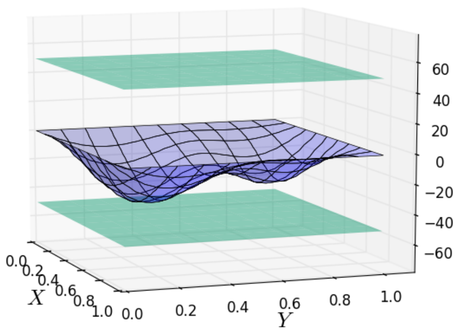


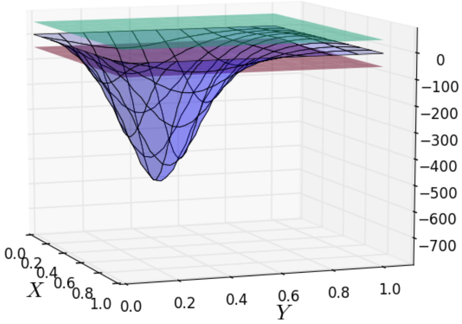
Figura 4.12: Gráfico da posição inicial u_0 *grande* para o caso bidimensional



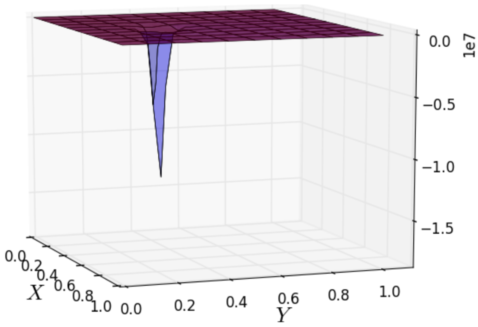
(a) Instante $t = 0.109$



(b) $t = 0.266$

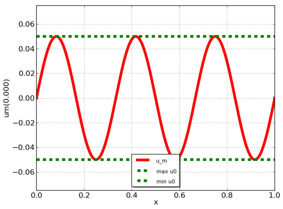


(c) $t = 0.578$

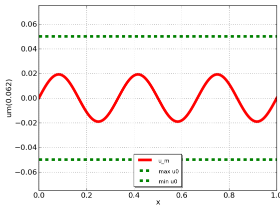


(d) $t = 0.703$

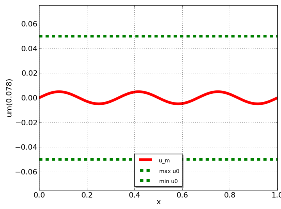
Figura 4.13: Gráfico da solução numérica com $\rho = 2$ e condições iniciais *grandes*, combinação **IV**



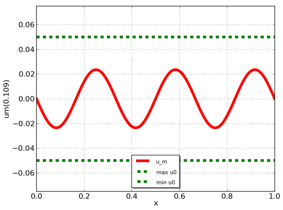
(a) Instante $t = 0$



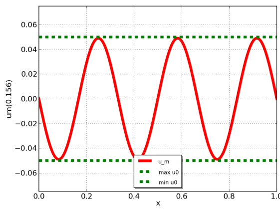
(b) Instante $t = 0.063$



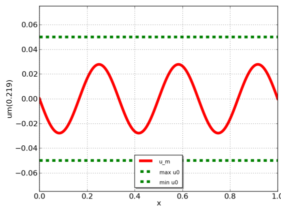
(c) Instante $t = 0.078$



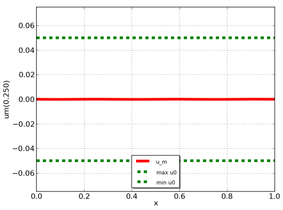
(d) Instante $t = 0.109$



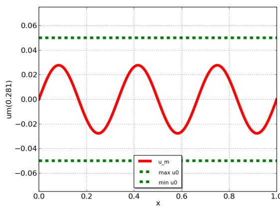
(e) Instante $t = 0.156$



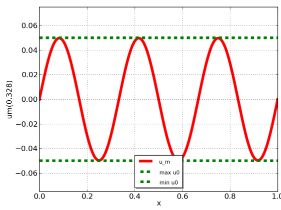
(f) Instante $t = 0.219$



(g) Instante $t = 0.25$

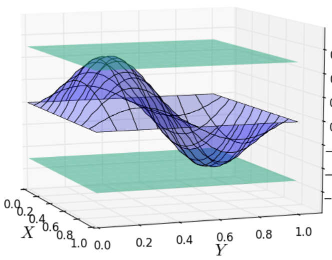


(h) Instante $t = 0.281$

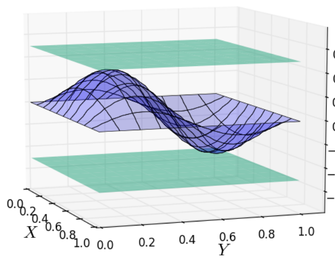


(i) Instante $t = 0.328$

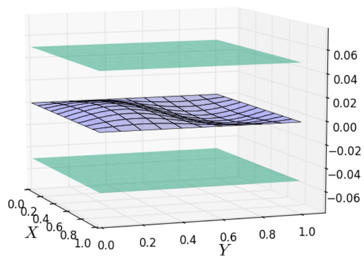
Figura 4.14: Gráfico da solução numérica com condições iniciais *pequenas*



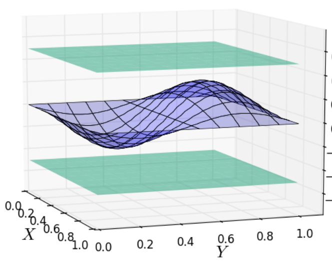
(a) Instante $t = 0$



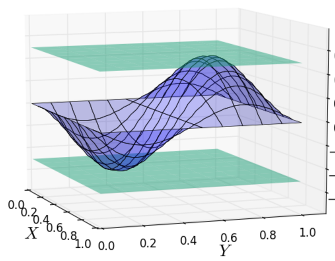
(b) Instante $t = 0.1$



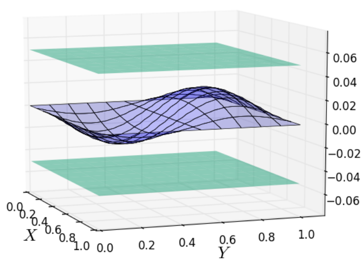
(c) Instante $t = 0.2$



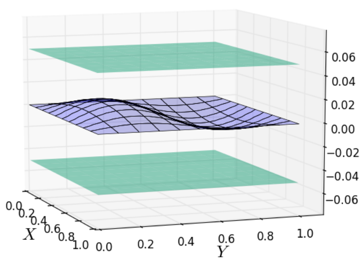
(d) Instante $t = 0.3$



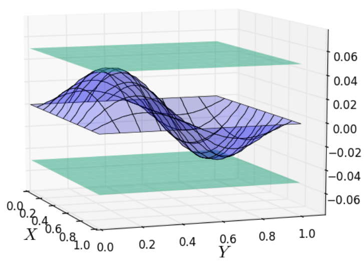
(e) Instante $t = 0.4$



(f) Instante $t = 0.6$



(g) Instante $t = 0.7$



(h) Instante $t = 0.8$

Figura 4.15: Gráfico da solução numérica com condições iniciais *pequenas*

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho buscou-se investigar se, da mesma forma que nos resultados analíticos citados, obteria-se soluções numéricas limitadas em tempo finito quando as respectivas normas de u_0 e u_1 fossem menores que uma dada restrição e, também, verificar se, quando estas normas fossem maiores, a solução se comportaria como não limitada.

Na seção de métodos numéricos obteve-se um método eficiente para resolução, de forma aproximada, do problema (1.4) com ordem de convergência quadrática. Convencionalmente o mesmo problema poderia ser resolvido linearizando-o, mas neste trabalho foi resolvido tratando-o como não-linear.

Nos experimentos numéricos, obteve-se que a solução numérica foi limitada no intervalo $[0, T]$, $\forall T > 0$, considerando as condições inicias u_0 e u_1 cujas normas foram caracterizadas como *pequenas*. Por outro lado, para as condições inicias u_0 e u_1 cujas normas foram denominadas como *grandes*, a solução numérica evolui oscilando inicialmente e, aos poucos, se torna predominantemente negativa apresentando pouca oscilação e com norma crescendo a taxas cada vez maiores.

No programa implementado, pode-se resolver outros problemas além do tratado como, por exemplo, os problemas correspondentes à substituição do termo não-linear $|u|^\rho$ pelos termos não-lineares u^ρ, com $\rho \in \mathbb{N}$, e $u|u|^\rho$, considerando ρ nas condições do problema (1.4). Simulações destes outros problemas já foram feitas e obteve-se como o resultado do problema considerando-se como termo não-linear u^ρ, foi que dependendo se o expoente ρ for ímpar, independente do tamanho das respectivas normas de u_0 e u_1 a solução numérica obtida é limitada no intervalo

$[0, T]$, $\forall T > 0$, já se o expoente for par, a solução numérica se comporta como o problema tratado neste trabalho, já como o resultado do problema considerando-se como termo não-linear $u|u|^\rho$, a solução numérica é limitada no intervalo $[0, T]$, $\forall T > 0$, independente do tamanho das normas das condições iniciais. Por motivos de prazo não foi possível incluí-los na elaboração deste texto.

REFERÊNCIAS

[1] ALAZARD, T.; CARLES, R. Super-Critical Geometric Optics for Nonlinear Schrodinger Equations. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, [S.l.], v. 194, p. 315-347, 2009.

[2] ANTOINE, X.; BESSE, C.; KLEIN, P. Numerical Solution of Time-Dependent Nonlinear Schrodinger Equations Using Domain Truncation Techniques Coupled With Relaxation Scheme. **Laser Physics**, [S.l.], v. 21, p. 1-12, 2011.

[3] BOBENKO, A. I.; KIKSIN, S. B. The Nonlinear Klein-Gordon Equation On An Interval as a Pertubed Sine-Gordon Equation. **Commentarii Mathematici Helvetici**,[S.l.], v.70, p.63-112, 1995.

[4] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle**. Paris: Masson Editeur, 1983.

[5] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 9 ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2010.

[6] CASTANON, J. X. Análise e Computação do Modelo Não Linear da Equação de Korteweg-de Vries. 2012. 123 f. Dissertação - Programa de Pós Graduação em Informática, **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro. 2012.

[7] DEHGHAN, M.; SHOKRI A. Numerical Solution of The Nonlinear Klein-Gordon Equation Using Radial Basis Functions. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], v. 230, p. 400-410, 2009.

[8] FAOU, E.; SCHRATZ, K. Asymptotic Preserving Schemes for The Klein-Gordon Equation In The Non-relativistic Limit Regime. **Numerische Mathematik**, [S.l.], v. 126, p. 441-469, 2014.

[9] KIRBY, R. C.; KIEU, T. T. Galerkin Finite Element Methods for Nonlinear Klein-Gordon Equations. **Mathematische Zeitschrift**, [S.l.], v. 189, n. 4, p. 487-505, 1985.

[10] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problêmes Aux Limites Non Linéares**. 1 ed. Paris: Dunod-Gauthier Villars, 1969.

[11] LIONS, J. L.; STRAUSS, W. A. Some Non-linear Evolution Equations. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, [S.l.], v. 93, p. 43-96, 1965.

[12] LOGAN, D. L. **A First Course In The Finite Lements Method**. 4 ed. Toronto: Thomson, 2007.

[13] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. **A Integral de Lebesgue**. Rio de Janeiro: Editora IM/UFRJ, 1985.

[14] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: Editora IM/UFRJ, 1983.

[15] MEDEIROS, L. A.; LIMACO, J.; FROTA, C. L. On Wave Equations Without Global a Priori Estimates. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, v. 30, n. 3, p. 19-32, 2012.

[16] NAKAMURA M.; OZAWA, T. The Cauchy Problem for Nonlinear Klein-Gordon Equations in The Sobolev Spaces. **Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences**, Kyoto University, v. 37, p. 255-293, 2001.

[17] NAKAO, M. Global and Periodic Solutions for Nonlinear Wave Equations With Some Localized Nonlinear Dissipation. **Journal of Differential Equations**, [S.l.], v. 190, p. 81-107, 2003.

[18] POLYANIN, A. D. **EqWorld - The World of Mathematical Equations**. Disponível em:<http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/npde/npde-toc2.htm>. Acesso em: mar. 2014.

[19] QUARTERONI, A. M.; VALLI, A. **Numerical Approximation of Partial Differential Equations**. [S.l.]: Springer, 2008.

[20] RINCON, M. A.; LIU, I. S. **Introdução ao Método de Elementos Finitos**: computação e análise em equações diferenciais parciais. 3 ed. Rio de Janeiro: Editora IM/UFRJ, 2013.

[21] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Pearson, 1988.

[22] RYSKIN, N. M. Coupled Nonlinear Schrödinger Equations for Multifrequency Wave Packets in a Dispersive Nonlinear Medium. **Experimental and Theoretical Physics**, [S.l.], v. 106, n. 5, p. 1542-1546, 1994.

[23] SALAM, Md. A. Traveling-Wave Solution of Modified Liouville Equation by Means of Modified Simple Equation Method. **International Scholarly Research Network**, [S.l.], v. 2012, 4 p., 2012.

[24] SERRA, E.; TILLI, P. Nonlinear Wave Equations as Limits of Convex Minimization Problems: proof of a conjecture by De Giorgi. **Annal of Mathematics**, [S.l.], v. 175, p. 1551-1574, 2012.

[25] SHATAH, J. Stable Standing Waves of Nonlinear Klein-Gordon Equations. **Communications in Mathematical Physics**, [S.l.], v. 91, p. 313-327, 1983.

[26] SILVA, A. Análise da Equação de Burges com Fronteira Móvel. 2007. 100 f. Dissertação - Programa de Pós Graduação em Informática, **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro. 2007.

[27] YULUKLU, E.; YILDIRIM, A.; KHAN Y. A Taylor Series Based Method for Solving Nonlinear Sine-Gordon e Klein-Gordon Equations. **World Applied Sciences Journal**, [S.l.], v.12, n. 1, 21-27, 2011.

APÊNDICE A NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

Neste apêndice serão apresentados os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos 2 e 3.

A.1 Preliminares

Seja E um espaço vetorial normado completo, isto é, um espaço de Banach. Dado o funcional linear $\varphi : E \to \mathcal{R}$, denota-se $\varphi(u)$ por $\langle \varphi, u \rangle$. O conjunto dos funcionais lineares contínuos sobre E é denotado E'.

Def. A.1 (Convergência Fraca). *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então u_ν converge fracamente a $u \in E$, denotado $u_\nu \rightharpoonup u$, se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu \rangle \longrightarrow \langle \varphi, u \rangle$, $\forall \varphi \in E'$.*

Def. A.2 (Convergência Fraca Estrela). *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Diz-se $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ fraco estrela se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u \rangle \longrightarrow \langle \varphi, u \rangle$, $\forall u \in E$.*

Teorema A.1 (Banach-Steinhaus: Teorema da Limitação Uniforme). *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $(T_i)_{i \in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F. Suponha que $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$. Então $\sup \|T_i\|_{(E,F)} < \infty$. Noutras palavras, existe uma constante C tal que $\|T_i(x)\| \leq C\|x\|$, $\forall x \in E$ e $\forall i \in I$.*

Prova: Ver [4].

Proposição A.1. *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequência em* E*, espaço de Banach. Então*

i) *Se* $x_n \longrightarrow x$ *fortemente, então* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente,*

ii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente, então* $\|x_n\|$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$*,*

iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente e se* $f_n \longrightarrow f$ *fortemente em* E' *(isto é,* $\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0$*), então* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$*.*

Prova: Ver [4].

Obs A.1. *A parte **(ii)** da proposição é uma consequência do Teorema de Banach-Steinhaus.*

Teorema A.2. *Seja* E *um espaço de Banach separável e seja* (f_n) *uma sucessão limitada em* E'*. Então existe uma subsucessão* (f_{n_k}) *que converge fracamente para* $f \in E'$*.*

Prova: Ver [4].

A.2 Espaço das distribuições escalares

Def. A.3. *Dada uma função contínua* $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, onde* Ω *é um aberto, denomina-se* suporte *de* φ *ao fecho em* Ω *do conjunto dos pontos* x *tais que* $\varphi(x) \neq 0$*. Simbolicamente*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω, com suporte compacto em Ω.

A.3 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha\varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em Ω para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência definida acima, será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, para toda sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ que converge, em $\mathcal{D}(\Omega)$, para φ, tem-se

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi\rangle$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω. No restante desta subseção será considerado que duas funções distintas f_1 e f_2 pertencem a mesma classe de equivalência se diferem em um conjunto de medida nula.

Dado um aberto Ω do $\mathbb{R}^N$ denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de *Lebesgue* em Ω, equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = \infty$ denota-se por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em Ω, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega,$$

onde *quase sempre* significa a *menos de um conjunto de medida nula.*

Neste espaço considera-se a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \mathrm{ess} |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, é um *espaço de Banach.* Em particular, quando $p = 2$, tem-se que $L^2(\Omega)$ é um *espaço de Hilbert* cuja *norma* e *produto interno* serão definidos e denotados, respectivamente, por

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Ver [13] para maiores detalhes sobre Integral de Lebesgue.

Lema A.1 (Du Bois Raymond). *Dada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, seja a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{A.1}$$

Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Prova: Ver [14].

Desta forma, pode-se usar a expressão (A.1) para identificar toda função de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ com uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$, considerando classes de equivalência como definidas anteriormente.

A.4 Convergência e derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

A sequência de distribuições escalares $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando

$$\langle T_\nu, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e pode-se mostrar que as seguintes cadeias de imersões são contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < \infty.$$

Isto significa, por exemplo, que toda sequencia φ_n convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ implica que converge também em $L^p(\Omega), L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e as distribuições identificadas convergem em $\mathcal{D}'(\Omega)$. A recíproca não é verdadeira.

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Desta forma, toda distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ tem todas as derivadas possíveis.

A expressão acima foi escolhida de forma que se T puder ser identificada com uma função em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se identifica com a derivada clássica em $\mathcal{D}(\Omega)$ pela integração por partes.

A.5 Espaços de Sobolev

A.5.1 Convergência em L^p e no dual de L^p

Diz-se que uma sequência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será denotado por $\left[L^p(\Omega)\right]'$, é identificado com o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, é reflexivo. Para demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços $L^p(\Omega)$ consulte [4].

Teorema A.3. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge quase sempre para f em Ω, e existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ quase sempre em Ω.

Prova: Ver [4].

Def. A.4. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma sequência de elementos (ω_n) de H tais que*

i) $\|\omega_n\|_H = 1, \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0, \forall n, m, m \neq n$, *onde $(\cdot,\cdot)$ representa o produto interno em H;*

ii) *O espaço gerado pela* $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é denso em* H.

Proposição A.2. *Todo espaço de Hilbert separável tem uma base Hilbertiana.*

Prova: Ver [4].

Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O *espaço de Sobolev de ordem* m, modelado sobre $L^p(\Omega)$, aqui denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, é por definição o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^p(\Omega)$ para as quais suas derivadas até a ordem α, no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

e quando $p = \infty$, define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposição A.3. *Os espaços lineares* $W^{m,p}(\Omega)$ *equipados com as respectivas normas acima são espaços de Banach.*

Prova: Ver [4].

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, que é denotado por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

cuja norma e produto interno são dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}} \text{ e } ((u,v)) = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

O espaço $H^m(\Omega)$ com a estrutura topológica acima, é um espaço de *Hilbert*, continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

Define-se $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ e seu dual topológico é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q sendo índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ então $\varphi\Big|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é o espaço denotado por $H^{-m}(\Omega)$.

A caracterização de $W^{-m,p}(\Omega)$ é dada por:

Teorema A.4. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Prova: Ver [4].

Teorema A.5 (Teorema de Imersão de Sobolev)**.** *Seja $f \in W^{m,p}(\Omega)$. Então*

$$\begin{aligned} &se \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0, \quad então \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega), \\ &se \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0, \quad então \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \geq 1, \end{aligned}$$

onde n é a dimensão de Ω.

No caso particular em que $p = 2$, tem-se que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Prova: Ver [4].

Teorema A.6. *Seja Ω um aberto limitado, bem regular, do $\mathbb{R}^n$. Então, se $m > \frac{n}{2}$ resulta que $H^m(\Omega)$ está continuamente imerso em $C^0(\overline{\Omega})$.*

Prova: Ver [14].

Def. A.5. *Diz-se que a imersão $\tau : V \to H$ é compacta, quando a imagem dos limitados de V, por τ, são conjuntos relativamente compactos de H, isto é, conjuntos cujo fecho é compacto em H.*

Teorema A.7 (Rellich). *Seja Ω um aberto, limitado, bem regular do $\mathbb{R}^n$. Então, a imersão do $H^1(\Omega)$ no $L^2(\Omega)$ é compacta*

Prova: Ver [14].

Lema A.2 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado em alguma direção. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

Prova: Ver [4] ou [14].

Obs A.2. *Usando a desigualdade de Poincaré conclui-se que em $H^1_0(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.*

A.6 Espaços $L^p(0,T;X)$ e distribuições vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E. Uma função vetorial

$\varphi : (0, T) \to X$ é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \to X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0, T)$ é mensurável com a medida de *Lebesgue*, $i = 1, 2, \cdots, k$, dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \cdots, k$. Define-se a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\varphi_i.$$

Diz-se que uma função vetorial $u : (0, T) \to X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B}$ - *integrável*) se existir uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s. em $(0, T)$;

ii) $\lim_{k,m \to \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0.$

A integral de *Bochner* de u é dada por $\int_0^T u(t)dt = \lim_{\nu \to \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t)dt$, e independe da escolha da sequência φ_ν.

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \to X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X. Diz-se que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à *Lebesgue*.

Denota-se por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \to X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lesbegue* em $(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \to X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Além disso, u é *Bochner* integrável e, portanto $\int_0^T u(t)dt$ está definido.

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, mostra-se que para cada $u \in [L^p(0,T;X)]'$, existe $\widetilde{u} \in L^{p'}(0,T;X')$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle \widetilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Diz-se que a aplicação $\Gamma \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ é contínua quando, para toda sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que $D^\alpha\varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ e existe K compacto contido em $(0,T)$ tal que supp$\varphi_\nu \in K$, $\forall\nu \in \mathbb{N}$, tem-se que $(\Gamma,\varphi_\nu) \longrightarrow (\Gamma,\varphi)$.

Def. A.6. *Seja $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\langle\frac{d^nT}{dt^n},\varphi\rangle = (-1)^n\langle T,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\rangle,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Observa-se que a distribuição vetorial é uma generalização da distribuição escalar envolvendo uma imagem em um espaço de Banach restritos a um domínio contido em $\mathbb{R}$.

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$ representa-se o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0,T] \to X$ munido da norma da *convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C^0_w([0,T];X)$ denota-se o *espaço das funções $u : [0,T] \to X$ fracamente contínuas*, isto é, tais que a aplicação $t \mapsto \langle v,u(t)\rangle_{X',X}$ é contínua em $[0,T], \forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t),v)_H$ para $\forall v \in H$.

Teorema A.8 (Aubin-Lions). *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em*

B_1, $1 < p_0$, $p_1 < \infty$, e, W o espaço

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Prova: Ver [4].

Obs A.3. *Como consequência do Teorema de Aubin-Lions tem-se: se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.*

Proposição A.4. *Sejam V e H espaços de Hilbert, V continuamente imerso em H, $u \in L^p(0,T;V)$ e $u' \in L^p(0,T;H)$, com $1 \leq p < \infty$, então*

$$u \in C^0([0,T];H).$$

A.7 Outros resultados úteis

Def. A.7. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ e $F : D \to \mathbb{R}^N$. Diz-se que F satisfaz as condições de Carathéodory sobre D quando*

- *$F(t,\Upsilon)$ é mensurável em t, para cada Υ fixo;*
- *$F(t,\Upsilon)$ é contínua em Υ, para cada t fixo;*
- *Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $\|F(t,\Upsilon)\| \leq m_K(t)$, para todo $(t,\Upsilon) \in D$ e $\Upsilon \in K$.*

Def. A.8. *Uma solução no sentido estendido do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} X' &= F(t, X) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

é uma função $\Phi = \Phi(t)$ absolutamente contínua tal que, para algum β real, tenha-se

i) $(t, \Phi(t)) \in D$, $\forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*;*

ii) $\Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*, exceto em um conjunto de medida nula;*

iii) $\Phi(t_0) = X_0$.

Considere o subconjunto fechado $R = \{(t, \Upsilon) \in \mathbb{R}^{N+1};\ \|t - t_0\| \leq a,\ \|\Upsilon - \Upsilon_0\| \leq b\}$, com $a, b > 0$. Então valem:

Teorema A.9 (Carathéodory)**.** *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R, então sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$ existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' &= F(t, X) \\ X(t_0) &= \Upsilon_0. \end{cases}$$

Corolário A.1. *Sejam $D = [0, \omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \{\Upsilon \in \mathbb{R}^N; \|\Upsilon\| \leq b\}$, $b > 0$ e F nas condições de Carathéodory. Seja $\Phi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} X' &= F(t, X) \\ X(0) &= X_0,\ |X_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde $\Phi(t)$ está definida, se tenha, $\|\Phi(t)\| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então Φ tem um prolongamento até $[0, \omega]$.

Lema A.3. *Sejam Q um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, g_m e g funções de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, tal que $\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C$, $g_m \longrightarrow g$ quase sempre em Q. Então $g_m \rightharpoonup g$ na topologia fraca de $L^q(Q)$.*

Lema A.4 (Gronwall - Forma Diferencial)**.** *Seja $\eta(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$.*

i) *Se η satisfaz*

$$\eta'(t) \leq \psi(t) + \phi(t)\eta(t), \ \ q.s. \ \ em \ [0, T] \tag{A.2}$$

onde $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas e integráveis em $[0, T]$, então

$$\begin{aligned} \eta(t) \quad &\leq \left[\eta(0) + \textstyle\int_0^t \psi(s) e^{-\int_0^s \phi(r)dr} ds\right] e^{\int_0^t \phi(s)ds} \\ &\leq \left[\eta(0) + \textstyle\int_0^t \psi(s) ds\right] e^{\int_0^t \phi(s)ds} \end{aligned} \tag{A.3}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) *Em particular, se $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t)$ em $[0, T]$ e $\eta(0) = 0$, então*

$$\eta \equiv 0 \ \ em \ [0, T].$$

Prova: Ver [14] ou [19].

Lema A.5 (Gronwall - Forma Integral)**.** *Sejam u, ϕ, ψ funções reais não negativas em $[0, T]$ satisfazendo*

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \psi(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

para todo $t \in [0, T]$. Então para todo $t \in [0, T]$ tem-se

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \psi(s)\phi(s)e^{\int_s^t \psi(\tau)d\tau} ds.$$

Em particular, se $\phi(t) \equiv 0$, então $u \equiv 0$.

Prova: Ver [14] ou [19].

A.8 Definições e notações utilizadas

Def. A.9 (Notação). *Dada uma discretização uniforme* $\{0 = t_0, \cdots, t_N = T\}$, *escreve-se* $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. *Dada uma função* w *com domínio em* $[0, T]$, *define-se por* w^n *o valor que* w *assume no ponto* $t_n = n\Delta t$, *isto é,* $w^n = w(t_n)$. *Assim, também se define:*

$$w^{*n} = \theta w^{n+1} + (1 - 2\theta)w^n + \theta w^{n-1}.$$

onde $\theta \in [0, 1]$.

Def. A.10 (Norma discreta). *Seja a discretização uniforme de* $[0, L]$ *dada por* $\{x_1 = 0, x_2, \cdots, x_m = L\}$, *com* $h = x_{i+1} - x_i$. *Dada função* $w \in L^2(0, L)$, *define-se a norma discreta em* $L^2(0, L)$ *por:*

$$\|w\|^2_{L^2(0,L)} = h\sum_{i=1}^{m} |w(x_i)|$$

Def. A.11 (Norma discreta em Distribuições Vetoriais). *Seja a função* $w \in L^\infty(0, T; H)$, *onde* H *é um Espaço de Sobolev. Define-se a norma discreta em* $w \in L^\infty(0, T; H)$ *por:*

$$\|w\|^2_{L^\infty(0,T;H)} = \max\{\|w^n\|_H, n = 1, \cdots, N\}.$$

Def. A.12 (Ordem de Convergência). *Considerando uma sucessão de soluções aproximadas* $(u_{m_1}, u_{m_2}, \ldots, u_{m_k})$, *onde* u_{m_i} *será a solução aproximada relacionada a uma malha com espaçamento uniforme* h_i, *de maneira que* $h_i < h_{i+1}$, $\forall\ i \in 1, \ldots, k$. *Assim sendo, será calculado o erro de aproximação* $E_i(t)$ *relacionado à malha com espaçamento* h_i *da seguinte forma*

$$E_i = \max_{t\in[0,1]} ||u(t) - u_{m_i}(t)||_{L^2(0,1)}.$$

Portanto, afim de calcular a ordem de convergência do método, será utilizada a fórmula

$$p = \frac{ln(E_i/E_{i+1})}{ln(2)}. \tag{A.4}$$

Lema A.6. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ na norma do $H^1(\Omega)$.*

Prova: Ver [4].