

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

RODOLFO ALVES DE OLIVEIRA

**NÚMERO DE ITERAÇÃO GEODÉTICO EM
GRAFOS DE DISTÂNCIA HEREDITÁRIA E
ALGUNS RESULTADOS PARA CONJUNTOS
ESTRELA-CONVEXOS**

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Estudos Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

Orientadores : Dr. Mitre Costa Dourado
Dr. Fábio Protti

Rio de Janeiro
2014

O48 Oliveira, Rodolfo Alves de.

Número de iteração geodético em grafos de distância hereditária e alguns resultados para conjuntos estrela-convexos. / Rodolfo Alves de Oliveira. -- 2014.

84 f.: il.

Tese (Doutorado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Estudos Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. 2014.

Orientadores: Mitre Costa Dourado ; Fábio Protti.

1. Caminho Geodético. 2. Conjunto Convexo. 3. Conjuntos Estrelados.-Tese. I. Dourado, Mitre Costa (Orient.). II. Protti, Fábio (Orient.). III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Estudos Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. IV. Título.

CDD

**Número de Iteração Geodético em Grafos de Distância
Hereditária e Alguns Resultados para Conjuntos
Estrela-Convexos**

Rodolfo Alves de Oliveira

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

Aprovado por:

Dr. Mitre Costa Dourado (Orientador)

Dr. Fábio Protti (Orientador)

Dr. Jayme Luiz Szwarcfiter

Dra. Lilian Markenzon

Dr. Rudini Menezes Sampaio

Dr. Vinícius Fernandes dos Santos

Rio de Janeiro, Agosto de 2014

*Minha rainha, minha poesia
Minha mãe querida
Sonhando entre margaridas
Meu eterno amor em poucas linhas*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, eu gostaria de agradecer a Deus por todas as conquistas.

Aos meus pais, Nelsindo e Lucimar, meus eternos amores.

À minha amada Juliana, por toda paciência e compreensão nos momentos difíceis de nossa trajetória.

Aos meus orientadores e diletos amigos Fábio Protti e Mitre Costa Dourado, por toda dedicação, talento e sabedoria.

Ao Professor Dieter Rautenbach, da Universidade de Ulm, por toda sua contribuição expressiva neste trabalho.

Aos professores que me apoiaram nesses anos, em especial Lilian Markenzon, Jayme Luiz Szwarcfiter e Loana Tito Nogueira.

À minha irmã Rafaela, por sempre me apoiar.

A todos meus amigos da área acadêmica, sejam eles da Rural, do Fundão ou CEDERJ.

RESUMO

OLIVEIRA, Rodolfo Alves de. **Número de iteração geodético em grafos de distância hereditária e alguns resultados para conjuntos estrela-convexos.** 2014. 84 f. Tese (Doutorado em Informática)– Programa de Pós-graduação em Informática, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Estudos Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Nesta tese trabalhamos com alguns espaços de convexidade em grafos. Para o espaço de convexidade geodésica, definimos duas classes de grafos sobre os operadores *intervalo* e *fecho*. A primeira classe é definida por $\mathcal{I}_p^k = \{ G : H_g(W) = I_g^k[W], \text{ para todo } W \subseteq V(G) \text{ com } |W| \leq p \}$, onde k é número de aplicações do operador intervalo. A segunda classe é definida por $\mathcal{H} = \{ G : H_g(W) = \bigcup_{u,v \in W} H_g(\{u, v\}), \text{ para todo } W \subseteq V(G) \}$, onde, dado um subconjunto de vértices S , $H_g(S)$ é o operador de fecho geodesicamente convexo de S . Relacionamos essas duas classes com a classe dos grafos de distância hereditária \mathcal{DH} , para a qual conseguimos alguns resultados dos quais destacamos $\mathcal{DH} \subseteq \mathcal{H}$ e caracterizamos por subgrafos proibidos as classes $\mathcal{I}_2^k \cap \mathcal{DH}$ e $\mathcal{I}_\infty^k \cap \mathcal{DH}$. Além disso, reunimos alguns resultados de \mathcal{NP} -completude importantes que estão relacionados à convexidade de Steiner, mais precisamente ao intervalo (forte) de Steiner, e a conjuntos estrelados.

Palavras-chave: Geodésico, Steiner, conjunto convexo, intervalo, número de iteração geodético, conjuntos estrelados.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Rodolfo Alves de. **Número de iteração geodética em grafos de distância hereditária e alguns resultados para conjuntos estrela-convexos.** 2014. 84 f. Tese (Doutorado em Informática)– Programa de Pós-graduação em Informática, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Estudos Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

In this thesis we work with some convexity spaces in graphs. For the geodesic convexity space, we define two classes of graphs related to the interval and hull operators. The first class is defined as $\mathcal{I}_p^k = \{G : H_g(W) = I_g^k[W] \text{ for all } W \subseteq V(G) \text{ with } |W| \leq p\}$, where k is the number of applications of the interval operator. The second class is defined as $\mathcal{H} = \{G : H_g(W) = \bigcup_{u,v \in W} H_g(\{u,v\}) \text{ for all } W \subseteq V(G)\}$, where for a given a subset of vertices S , $H_g(S)$ is the geodesic hull set of S . We relate these two classes with the class of distance-hereditary graphs \mathcal{DH} , for which we obtain some results such as $\mathcal{DH} \subseteq \mathcal{H}$ and a characterization by forbidden subgraphs for the classes $\mathcal{I}_2^k \cap \mathcal{DH}$ and $\mathcal{I}_\infty^k \cap \mathcal{DH}$. In addition, we gather some \mathcal{NP} -completeness results related to the convexity of Steiner, more precisely on the (strong) Steiner interval and star-shaped sets.

Keywords: geodesic, Steiner, convex set, geodetic interval, geodetic iteration number, star-shaped sets.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Regiões num plano.	21
Figura 2.2: Exemplos de caminhos e ciclos com e sem cordas.	25
Figura 2.3: Subgrafos induzidos proibidos para grafos de distância hereditária.	26
Figura 2.4: Exemplo de determinação do número de iteração geodético.	30
Figura 2.5: (I) $H_g(\{u, v, w\})$, (II) $H_{St}(\{u, v, w\})$ e (III) $H_m(\{u, v, w\})$	32
Figura 3.1: Um grafo em \mathcal{I}_2^2 que não pertence a \mathcal{I}_3^2	36
Figura 3.2: Relação entre as classes deste capítulo.	39
Figura 3.3: Subgrafos proibidos para $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^1$	41
Figura 3.4: Construção do grafo F_3	45
Figura 3.5: Construção do grafo F_4	45
Figura 3.6: Construção do grafo F_5	46
Figura 3.7: Prova do Lema 3.7. Figura para a Afirmação 1. O índice de cada vértice está entre colchetes.	48
Figura 3.8: Prova do Lema 3.7. Figura para a Afirmação 2. O índice de cada vértice está entre colchetes.	50
Figura 4.1: Exemplos para algumas definições dadas neste capítulo.	59
Figura 4.2: Grafo G resultante da redução.	65
Figura 4.3: Grafo G resultante da redução – Teorema 4.3.	70
Figura 4.4: Grafo G resultante da redução – Teorema 4.4	72
Figura 5.1: Subgrafos proibidos para $\mathcal{Co} \cap \mathcal{I}_2^1$ e $\mathcal{Co} \cap \mathcal{H}$	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CGE	Problema do Conjunto Geodeticamente Estrelado.
$CGEC$	Problema do Conjunto Geodeticamente Estrela-Convexo.
$CGECB$	Problema do Conjunto Geodeticamente Estrela-Convexo de Brunn.
$CGME$	Problema do Conjunto Geodeticamente Multi-Estrelado.
$CGMEC$	Problema do Conjunto Geodeticamente Multi-Estrela-Convexo.
$CGMECB$	Problema do Conjunto Geodeticamente Multi-Estrela-Convexo de Brunn.
$CMEO$	Problema do Conjunto Multi-Estrelado Ótimo.
Co	Classe dos grafos cordais.
CUP	Propriedade de <i>Cone-union</i> .
$c(G, \mathcal{G})$	Número de Carathéodory para convexidade geodética.
$c(G, \mathcal{M})$	Número de Carathéodory para convexidade monofônica.
\mathcal{DH}	Classe dos grafos de distância hereditária.
$gin(G)$	Número de iteração geodético de um grafo G .
$gin(W)$	Número de iteração geodético de um subconjunto de vértices W .
$gn(G)$	Número geodético de um grafo G .
$ghn(G)$	Número de fecho geodético de um grafo G .
$gmn(G)$	Número de fecho monofônico de um grafo G .
\mathcal{H}	Classe de segmentos convexos.
$H_c(X)$	Fecho convexo de um subconjunto $X \subseteq V$ no espaço de convexidade (V, \mathcal{C}) .
$H_g(W)$	Fecho geodeticamente convexo de um subconjunto de vértices W .

$H_m(W)$	Fecho monofonicamente convexo de um subconjunto de vértices W .
$H_{St}(W)$	Fecho Steiner-convexo de um subconjunto de vértices W .
$i_G(u, W)$	Índice de iteração de u em relação ao subconjunto de vértices W de G .
\mathcal{I}_p^k	Classe de iteração (k, p) .
$I(u, v)$	Operador intervalar aplicado a u e v em V .
$I_g(u, v)$	Intervalo geodético entre u e v , podendo ser vértices ou pontos do plano.
$I_g^-(u, v)$	Intervalo geodético não extensível $(I_g(u, v) \setminus \{u, v\})$.
$I_g[W]$	Intervalo geodético sobre o conjunto W .
$I_g^k[W]$	Intervalo geodético sobre o conjunto W aplicado k vezes.
$I_m(u, v)$	Intervalo monofônico entre os vértices u e v .
$I_m[W]$	Intervalo monofônico sobre o conjunto W .
$I_s(u, v)$	Intervalo padrão entre u e v (pontos do plano).
JHC	<i>Join Hull Commutative.</i>
$Ker_g(W)$	Núcleo geodético de W .
$mn(G)$	Número monofônico de um grafo G .
\mathcal{NP}	Classe dos problemas de decisão.
\mathcal{P}	Classe dos problemas de decisão solúveis em tempo polinomial.
$P[u, v]$	Caminho geodético P do vértice u ao vértice v .
$Q[u, v]$	Caminho geodético Q do vértice u ao vértice v .
$R[u, v]$	Caminho geodético R do vértice u ao vértice v .
SSI	Problema do Intervalo Forte de Steiner.
SI	Problema do Intervalo de Steiner.
$st(G)$	Número de Steiner de um Grafo G .
$S(W)$	Intervalo de Steiner para o subconjunto de vértices W .
$S[W]$	Intervalo forte de Steiner para o subconjunto de vértices W .
$X3C$	Problema da Cobertura Exata por 3-Conjuntos.
(G, \mathcal{G})	Espaço de convexidade geodética.
(G, \mathcal{M})	Espaço de convexidade monofônica.

- (G, \mathcal{S}_t) Espaço de convexidade de Steiner.
- (V, \mathcal{C}) Espaço de convexidade.
- (V, I) Espaço intervalar.
- $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{Q})$ Problema de decisão com o conjunto de entradas \mathcal{E} e propriedade \mathcal{Q} .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	18
2.1	Conceitos Elementares Sobre Convexidade	18
2.2	Introdução Sucinta a Grafos	23
2.3	Convexidades em Grafos	28
3	NÚMERO DE ITERAÇÃO GEODÉTICO E SEGMENTOS CONVEXOS	33
3.1	Classes: definição e resultados	34
3.2	Intervalo Geodeticamente Monótono em \mathcal{DH}	39
3.3	As Classes \mathcal{DH} e \mathcal{I}_∞^k , $k \geq 3$	44
4	CONJUNTO ESTRELA-CONVEXO EM GRAFOS	57
4.1	Definições e Exemplos	58
4.2	Problemas, Algoritmos e Complexidade	61
4.3	Conjunto Multi-Estrela-Convexo e Árvore de Steiner	67
5	CONCLUSÃO	76
	REFERÊNCIAS	78
	APÊNDICE A – Algoritmos e complexidade	82

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho reunimos assuntos referentes a caminhos geodéticos (mínimos) em grafos e suas propriedades no espaço de convexidade. Ao longo dos anos, tenho estudado caminhos geodéticos em grafos e desenvolvido alguns trabalhos sobre este tema. Meu primeiro trabalho foi o de iniciação científica desenvolvido em 2006 sob a orientação da Profa. Loana Tito Nogueira, onde executamos um projeto dedicado à implementação dos algoritmos de Dijkstra (DIJKSTRA, 1959), Floyd (FLOYD, 1962) e Bellman-Ford (BELLMAN, 1958) (FORD JR.; FULKERSON, 1962). Em seguida, na monografia de conclusão do curso do Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional no DEMAT/UFRRJ, desenvolvida sob a orientação do Prof. Mitre Costa Dourado, implementamos novamente o algoritmo de Floyd para computar intervalos geodéticos e seus fechos convexos em grafos. Por último, na dissertação de mestrado no PPGI/UFRRJ, orientada pelos professores Fábio Protti e Mitre Costa Dourado, trabalhamos mais uma vez com caminhos geodéticos relacionados aos vértices de uma árvore de Steiner, e com isso construímos um algoritmo que gera todas as árvores de Steiner usando tempo de atraso (“delay”) $\mathcal{O}(n)$. Portanto, pode-se considerar esta tese como um trabalho continuado, no qual nos dedicamos a estudos sobre caminhos no espaço de convexidade geodética, incluindo resultados sobre problemas envolvendo a convexidade de Steiner.

Da tese de Parvathy (PARVATHY, 1995), destacamos:

“...o conceito de convexidade que foi basicamente definido e estudado em \mathbb{R}^d nos trabalhos pioneiros de Newton, Minkowski e outros, como descrito em (BERGER, 1990), agora encontra um lugar em várias outras estruturas matemáticas tais como espaços vetoriais, conjuntos parcialmente ordenados (“posets”), reticulados (“lattices”), espaços métricos e grafos. Este desenvolvimento é motivado não apenas pela necessidade de uma teoria abstrata de convexidade generalizando os teoremas clássicos em \mathbb{R}^d devidos a Helly, Carathéodory etc., mas também para unificar aspectos geométricos de todas essas estruturas matemáticas...”

Com isso temos uma definição mais abrangente, na qual uma *convexidade* sobre um conjunto não vazio V é uma família \mathcal{C} de subconjuntos de V , chamados *conjuntos convexos*, que segue os seguintes axiomas: (a) $\emptyset, V \in \mathcal{C}$; (b) os elementos de \mathcal{C} são estáveis nas operações de interseção e união aninhada. O par (V, \mathcal{C}) é chamado de *espaço de convexidade* e o menor conjunto convexo contendo $X \subseteq V$, denotado por $H_c(X)$, é chamado de *fecho convexo* de X . O fecho convexo de dois elementos, $H_c(\{u, v\})$, é chamado de *segmento entre u e v* . (VAN DE VEL, 1993)

Um espaço de convexidade associado a um grafo é um par ordenado (G, \mathcal{C}) formado por um grafo G , geralmente conexo, e uma convexidade \mathcal{C} sobre o conjunto de vértices $V(G)$. Existem dos espaços de convexidades famosos em grafos. Um deles é o *espaço de convexidade geodética* (G, \mathcal{G}) , que é constituído por uma família de conjuntos *geodeticamente convexos*, onde, para cada conjunto dessa família, os intervalos são constituídos por vértices que estão em caminhos geodéticos entre pares de vértices deste conjunto. O outro tipo de convexidade intervalar está relacionada aos *caminhos monofônicos* ou *induzidos*, equivalentes a caminhos minimais para grafos não ponderados. Desse modo temos o *espaço de convexidade monofônica* (G, \mathcal{M}) ,

que, de forma análoga, é constituído pela família dos conjuntos *monofonicamente convexos* (FARBER; JAMISON, 1986). Recentemente, surgiu uma nova estrutura convexa que utiliza árvores de Steiner em grafos, conhecida como *convexidade de Steiner* (G, \mathcal{S}_t) (CÁCERES; A.MÁRQUEZ; PUERTAS, 2008). Além das acima citadas, existem outras convexidades estudadas em grafos, tais como: “*path convexity*” (veja em (PFALTZ, 1971) e (NIEMINEN, 1981)), “*two-path convexity*” (veja em (VARLET, 1976), (ERDÖS et al., 1972), (ERDÖS; HAJNAL; MILNER, 1972) e (MOON, 1972)) e “*triangle path convexity*” (CHANGAT; MATHEWSS, 1999).

Um *uv-geodético* é um caminho geodético entre os vértices u e v num grafo conexo G . O *intervalo geodético* $I_g(u, v)$ é o conjunto de todos os vértices pertencentes a algum *uv-geodético*. Para um conjunto $W \subseteq V(G)$, o *intervalo geodético* $I_g[W]$ de W é a união de todos os intervalos geodéticos $I_g(u, v)$ para todos os pares $u, v \in W$. Defina $I_g^k[W]$, para k natural, como $I_g^0[W] = W$, $I_g^1[W] = I_g[I_g^0[W]]$, ..., $I_g^k[W] = I_g[I_g^{k-1}[W]]$. Um conjunto $W \subseteq V(G)$ é chamado de *geodeticamente convexo* ou *g-convexo* se $I_g[W] = W$. O *fecho g-convexo* de W é o menor conjunto *g-convexo* que contém W , e é denotado por $H_g(W)$. Para qualquer $W \subseteq V(G)$, $H_g(W) = I_g^k[W]$ se $I_g^{k+1}[W] = I_g^k[W]$. O *número de iteração geodético* $gin(W)$ é o menor número k tal que $I_g^k[W] = H_g(W)$. O *número de iteração geodético de G*, $gin(G)$, é definido como o máximo valor de $gin(W)$, para $W \subseteq V(G)$ (HARARY; NIEMINEN, 1981). No Capítulo 2, nos aprofundaremos em tais definições.

O restante desta tese estrutura-se da seguinte forma. No Capítulo 3, estudamos algumas classes em grafos definidas a partir de intervalos geodéticos, relacionando-as entre si. Consideramos as seguintes classes:

$$(i) \mathcal{I}_p^k = \{ G : H_g(W) = I_g^k[W] \text{ para todo } W \subseteq V(G) \text{ com } |W| \leq p \}; k, p \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \mathcal{H} = \{ G : H_g(W) = \bigcup_{\forall u, v \in W} H_g(\{u, v\}), \text{ para todo } W \subseteq V(G) \}$$

Denote por \mathcal{DH} a classe dos grafos de distância hereditária. Para as classes definidas, podemos destacar alguns resultados desta tese: (1) $\mathcal{I}_\infty^1 = \mathcal{I}_2^1 \cap \mathcal{H}$; (2) $\mathcal{DH} \subset \mathcal{H}$; (3) caracterização por subgrafos proibidos para a classe $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^k$, para $k \geq 1$; (4) $\mathcal{H} \cap \mathcal{I}_\infty^k = \mathcal{H} \cap \mathcal{I}_2^k$, para $k \geq 1$; (5) caracterização por subgrafos proibidos para a classe $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_\infty^k$, para $k \geq 1$. Além destes, outros resultados marginais também estão descritos no Capítulo 3.

O Capítulo 4 trata de conjuntos estrelados induzidos por intervalos geodéticos. Um conjunto $W \subseteq V(G)$ é *geodeticamente estrelado* (*g-estrelado*) no vértice u se para todo $v \in W$ temos que $I_g(u, v) \subseteq W$. Diremos que um vértice u *enxerga* v em W , ou que v é *visto* por u em W , quando existe algum uv -geodético em G constituído apenas por vértices de W . Diremos que u *enxerga o conjunto* W se u enxerga todos os vértices de W . De forma análoga, diremos que um vértice u *enxerga totalmente* v em W , ou v é *visto totalmente* por u em W , se $I_g(u, v) \subseteq W$. Assim, por definição, se um vértice $u \in W$ enxerga totalmente W , então u é chamado de *vértice geodeticamente central* de W . O conjunto constituído por todos os vértices geodeticamente centrais de W será chamado de *núcleo geodético* de W , e denotado por $Ker_g(W)$. Além disso, definimos:

- Um conjunto W é *geodeticamente estrela-convexo* (*E_g -convexo*) se para todo vértice central $u \in W$ temos que $H_g(\{u, v\}) \subseteq W$, para todo $v \in W$.
- Para um conjunto E_g -convexo W , dizemos que W é *geodeticamente estrela-convexo de Brunn* (*E_g -convexo de Brunn*) se $Ker(W)$ for geodeticamente convexo.

Mostramos que pode ser verificado em tempo polinomial se um determinado conjunto de vértices satisfaz alguma dessas definições. No entanto, quando consideramos

aplicações destes problemas a conectividade de subconjuntos em grafos, obtemos variações que constituem problemas \mathcal{NP} -completos.

No Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões e trabalhos futuros. No Apêndice A, inserimos algumas definições sobre algoritmos com uma pequena introdução a complexidade.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo reunimos algumas definições e propriedades inerentes ao assunto abordado nesta tese. Primeiramente, na Seção 2.1, apresentamos o tema de convexidade em sua forma mais abrangente, e alguns conceitos relacionados a este assunto. A seguir, na Seção 2.2, apresentamos conceitos e propriedades importantes sobre grafos. Concluindo este capítulo, fornecemos na Seção 2.3 algumas definições sobre convexidade em grafos; em particular, sobre a convexidade geodética, que está intrinsecamente relacionada ao nosso objeto de estudo.

2.1 Conceitos Elementares Sobre Convexidade

De uma forma abrangente, de (VAN DE VEL, 1993) temos que uma **convexidade** sobre um conjunto não vazio V é uma família \mathcal{C} de subconjuntos de V , que segue os seguintes axiomas:

a_1 : $\emptyset, V \in \mathcal{C}$;

a_2 : interseções arbitrárias de conjuntos convexos são conjuntos convexos;

a_3 : qualquer união de conjuntos convexos aninhados por inclusão é um conjunto convexo.

O par ordenado (V, \mathcal{C}) é chamado de **espaço de convexidade (estrutura convexa, espaço alinhado)**, onde os membros de \mathcal{C} são chamados de **conjuntos convexos** e os seus complementos são chamados de **conjuntos côncavos**. O menor conjunto convexo contendo $X \subseteq V$ é denotado por $H_c(X)$ e chamado de **fecho convexo** de X . O fecho convexo de dois elementos, $H_c(\{u, v\})$, é chamado de **segmento convexo entre u e v** ¹.

Um espaço de convexidade é dito ser **“join hull commutative” (JHC)** se para todo conjunto convexo $X \subseteq V$ e para qualquer $p \in V$, vale:

$$H_c(X \cup \{p\}) = \bigcup \{H_c(\{u, p\}) : u \in X\}.$$

Um espaço de convexidade é dito ter a propriedade de **“cone-union” (CUP)** se para quaisquer conjuntos convexos $X, X_1, X_2, \dots, X_n \subseteq V$, tais que $X \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i$ e $p \in V$, temos:

$$H_c(X \cup \{p\}) \subseteq \bigcup \{H_c(X_i \cup \{p\}) : i = 1, \dots, n\}.$$

Proposição 2.1. (VAN DE VEL, 1993) *A propriedade JHC implica CUP.*

Um resultado famoso sobre conjuntos convexos em \mathbb{R}^d é o teorema de Carathéodory (CARATHÉODORY, 1911). Ele afirma que cada ponto p no fecho convexo de um

¹No livro de Van de Vel utiliza-se apenas “segmento entre u e v ”, mas para evitar possíveis ambiguidades de notação, definimos desta forma. (VAN DE VEL, 1993)

conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ pertence ao fecho convexo de um subconjunto F de S de ordem no máximo $d + 1$. Num espaço de convexidade (V, \mathcal{C}) , um subconjunto $X \subseteq V$ é dito ser um **conjunto de Carathéodory** de (V, \mathcal{C}) se $H_c(X) \setminus \bigcup \{H_c(X \setminus \{u\}) : u \in X\} \neq \emptyset$. O **número de Carathéodory** é definido como $c(V, \mathcal{C}) = \max\{|X| : X \text{ é um conjunto de Carathéodory de } (V, \mathcal{C})\}$.

Um subconjunto S de V é um **semi-espaço** (“*half space*”) se for convexo e côncavo, isto é, S e $V \setminus S$ são ambos convexos. Um espaço de convexidade tem uma **separação** se satisfaz os seguintes axiomas:

s_1 : todos os subconjuntos unitários de V são convexos;

s_2 : se $u \neq v \in V$, então existe um semi-espaço S de V com $u \in S$, $v \notin S$;

s_3 : se $X \subseteq S$ é convexo e se $x \in V \setminus X$, então existe um semi-espaço S de V com $X \subseteq S$, $x \notin S$;

s_4 : se $X, Y \subseteq V$ são conjuntos convexos disjuntos, então existe um semi-espaço S de V com $X \subseteq S$ e $Y \subseteq V \setminus S$.

Se V satisfaz o axioma S_i então V é chamado um s_i -**espaço de convexidade**, e a coleção dos seus conjuntos convexos é chamada de s_i -**convexidade**.

Denote por 2^V a coleção de todos os subconjuntos de V . Um **operador intervalar** $I : V \times V \rightarrow 2^V$ é uma aplicação que segue as seguintes propriedades para todo u e v em V :

i_1 : $u, v \in I(u, v)$ (Lei da Extensão);

i_2 : $I(u, v) = I(v, u)$ (Lei da Simetria).

O par ordenado (V, I) é chamado de **espaço intervalar**. Um subconjunto X de V é **(intervalo -)convexo** se $I(u, v) \subseteq X$, para todo $u, v \in X$.

Proposição 2.2. (VAN DE VEL, 1993) *O fecho convexo de um conjunto $X \subseteq V$ em um espaço intervalar é dado por*

$$H_c(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$$

onde $X_0 = X$ e, recursivamente, $X_{k+1} = \bigcup \{I(u, v) \text{ tal que } u, v \in X_k\}$.

A convexidade induzida por um operador intervalar é chamada de **convexidade intervalar**. Por exemplo, para um espaço vetorial de \mathbb{R}^2 , poderíamos adotar os seguintes intervalos para pontos u e v do plano:

Intervalo Padrão: $I_s(u, v) = \{t.u + (1 - t).v : 0 \leq t \leq 1\}$;

Intervalo Geodético: $I_g(u, v) = \{z : d'(u, z) + d'(z, v) = d'(u, v)\}^2$.

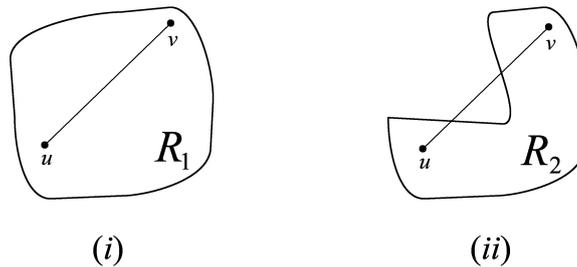


Figura 2.1: Regiões num plano.

²Denote d' como medida de distância no plano.

No plano, poderíamos adotar qualquer um dos dois tipos de intervalo para verificar se uma região é convexa, ou até mesmo usar esses intervalos para encontrar o fecho convexo conforme a Proposição 2.2. Na Figura 2.1-(i), podemos notar que a região R_1 é convexa usando intervalos para qualquer par de pontos u e v de R_1 . No entanto, na mesma figura (item (ii)), temos que a região R_2 não é convexa, como podemos notar pelo intervalo representado. Todavia, podemos encontrar o fecho convexo de R_2 usando, por exemplo, o intervalo geodético. Para isso, basta inserir todo $z \notin R_2$ em $I_g(u, v)$, para $u, v \in R_2$.

Um espaço intervalar (V, I) pode possuir algumas propriedades especiais:

1. **Propriedade de Pasch:** para quaisquer $u, v, p \in V$, vale que $u' \in I(u, p)$ e $v' \in I(v, p)$ implica $I(u, v') \cap I(u', v) \neq \emptyset$.
2. **Propriedade de Peano:** para quaisquer $a, b, c, u, v \in V$ tais que $u \in I(a, b)$ e $v \in I(c, u)$, existe v' em $I(b, c)$ tal que $v \in I(a, v')$.

Se (V, I) tem ambas as propriedades, é chamado de **espaço de Pasch-Peano**.

Um subconjunto $S \subseteq V$ de um espaço intervalar (V, I) é **estrelado** (“*starshaped*”) em um ponto $p \in S$ se para todo $u \in S$ temos que $I(p, u) \subseteq S$. O vértice p é chamado de **ponto central** de S . O conjunto de todos os pontos centrais de S é chamado de **núcleo** de S , e é denotado por $Ker(S)$. O conjunto S é dito ter a **propriedade de Brunn** se o seu núcleo é um conjunto convexo (CHEPOI, 1995)(PARVATHY, 1995).

2.2 Introdução Sucinta a Grafos

A fonte das definições encontradas nesta seção é (BONDY; MURTY, 1976).

Um grafo é uma noção simples, intuitiva e abstrata, usada para representar a ideia de alguma espécie de relação entre objetos. Graficamente, aparece representado por um diagrama com **nós** ou **vértices** (significando os objetos) unidos por traços denominados **arestas**, configurando a relação imaginada. Um grafo é definido como um par ordenado $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto (finito) de vértices, e $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ é um conjunto (finito) de arestas constituídas por pares não ordenados de elementos de V . Por exemplo, para $u, v \in V$, se existe uma aresta entre u e v temos que $uv \in E(G)$. Um grafo G é dito ser **nulo** se $V(G) = \emptyset$. A **cardinalidade do conjunto de vértices**, $|V(G)|$, é denotada por n , e a **cardinalidade do conjunto de arestas**, $|E(G)|$, é denotada por m . O **tamanho** de um grafo G , denotado por $|G|$, é o valor $n + m$. Um grafo G é um **grafo simples** quando não contém **arestas paralelas**, que são arestas que possuem os mesmos vértices extremos, e não possui **laços**, que são arestas que têm extremidades em um mesmo vértice.

Dois vértices de G são **adjacentes** ou **vizinhos** quando há uma aresta entre eles. A **vizinhança aberta** de um vértice u é o conjunto definido por $N(u) = \{v : v \text{ é adjacente a } u\}$. A **vizinhança fechada** de um vértice u é definida por $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. O **grau** de um vértice v , denotado por $d(v)$, é igual à cardinalidade de $N(v)$. Um vértice u de um grafo G é um **gêmeo verdadeiro** de outro vértice v em G se, e somente se, $N[u] = N[v]$. No entanto, u é chamado de **gêmeo falso** de v se, e somente se, $N(u) = N(v)$ e $uv \notin E(G)$. Dado $S \subseteq V(G)$, a vizinhança fechada de S é $N[S] = \bigcup_{u \in S} N[u]$, e a vizinhança aberta de S é $N(S) = N[S] \setminus S$. Se um vértice v de G possui grau $d(v) = 1$, o mesmo é chamado de **vértice pendente**. Um grafo com n vértices é chamado de **grafo completo** se para todo par de vértices existe

uma aresta entre eles. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

Um **subgrafo** de G é um grafo cujos vértices e arestas são também vértices e arestas de G . Para $S \subseteq V(G)$, o subgrafo de G com conjunto de vértices S e que contém todas as arestas de G que ligam cada par de vértices de S é chamado de **subgrafo induzido** de G , e é denotado por $G[S]$. Uma **clique** em um grafo é um subconjunto de vértices que induz num subgrafo completo. Uma **cobertura de vértices** de um grafo é um subconjunto de vértices tal que cada aresta do grafo é incidente a pelo menos um vértice desse subconjunto.

Um **passeio** corresponde a uma sequência de vértices $v_1v_2\dots v_k$ em G percorridos em um grafo, onde dois vértices consecutivos são adjacentes. Uma **trilha** (ou **trajeto**) é um passeio onde não há repetições de arestas. Um **caminho** é uma trilha onde todos os vértices são distintos. Um grafo é **conexo** se para cada par de vértices do grafo existe pelo menos um caminho entre eles. Uma **componente conexa** de G é um subgrafo maximal conexo de G . Um caminho é chamado de **caminho induzido**, também conhecido como **caminho monofônico**, se não possui nenhuma aresta ligando dois vértices não consecutivos do mesmo; tal aresta é chamada de **corda**. Dois caminhos são **disjuntos** se não possuem nenhum vértice em comum, exceto pelos vértices extremos dos caminhos. Um caminho induzido com k vértices é denotado por P_k . Dizemos que duas arestas v_iv_j e v_av_b são **cordas que se cruzam** no caminho $v_1v_2\dots v_k$, se apenas um vértice entre v_a (v_i) ou v_b (v_j) está na subsequência de $v_i\dots v_j$ ($v_a\dots v_b$), para $1 \leq a < b \leq k$ e $1 \leq i < j \leq k$. Um grafo que não contém P_4 induzido é chamado de **cografo**.

Se os vértices inicial e final de um caminho com k vértices são adjacentes, dizemos que o caminho é fechado, e nesse caso é chamado de **ciclo**, que denotaremos por C_k . A definição de corda também se estende a ciclos; assim, um **ciclo induzido** é um ciclo sem cordas. Na Figura 2.2, temos em (i) um exemplo de um caminho induzido

P_6 , em (ii) um caminho com duas cordas que se cruzam, em (iii) um ciclo induzido C_6 e em (iv) um ciclo C_6 com duas cordas que se cruzam.

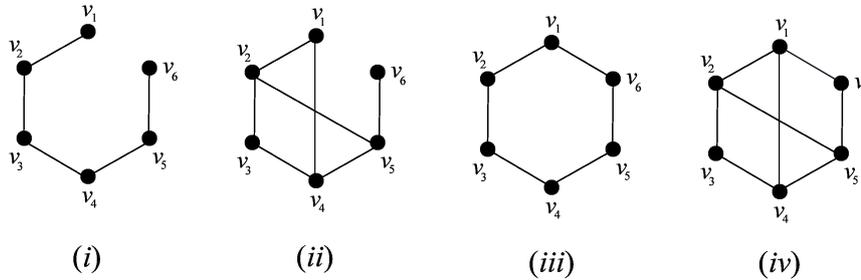


Figura 2.2: Exemplos de caminhos e ciclos com e sem cordas.

Chamamos de **diamante** ao grafo C_4 com uma corda, e de **buraco** (“hole”) todo ciclo induzido C_k , para $k \geq 5$. Um grafo **acíclico** é um grafo que não contém nenhum ciclo.

Um grafo é dito ser **cordal** se, e somente se, todo ciclo de comprimento no mínimo 4 possui uma corda. Denotaremos a classe dos grafos cordais por \mathcal{Co} .

Um grafo é **ponderado** quando suas arestas possuem pesos que podem ser positivos ou negativos, onde o peso de alguma aresta e é denotado por $w(e)$. Um grafo **não ponderado** é equivalente a um grafo ponderado onde todas as suas arestas possuem pesos unitários positivos. O custo de um caminho é a soma dos pesos de suas arestas, e quando esse custo é mínimo entre todos os caminhos ligando seus extremos (vértices inicial e final do caminho), o mesmo é um **caminho mínimo** ou **caminho geodético**. É óbvio que todo caminho mínimo em um grafo não ponderado é induzido. A métrica utilizada em grafos para designar a distância entre dois vértices é representada por $d(u, v)$, que indica o custo de um caminho mínimo entre os vértices u e v pertencentes ao grafo. Para $H \subseteq G$, denotaremos $d_H(u, v)$ como a distância entre os vértices u e v em $V(H)$. Dizemos que $H \subseteq G$ é **isométrico** a G se $d_H(u, v) = d(u, v)$, para todo $u, v \in V(H)$. A **matriz de distâncias de**

G , denotada por $D(G)$, é uma matriz $n \times n$ onde cada coordenada d_{ij} representa a distância do vértice i ao vértice j de G .

Um grafo G é de **distância hereditária** se, e somente se, todos os seus subgrafos induzidos e conexos são isométricos a G , isto é, a distância é preservada. Denotaremos por \mathcal{DH} a classe de grafos de distância hereditária. Existem diversas formas de caracterizar esta classe de grafos. Seguem os teoremas:

Teorema 2.1. (BANDELT; MULDER, 1986) $G \in \mathcal{DH}$ se, e somente se, todos os caminhos monofônicos são geodéticos.

Teorema 2.2. (BANDELT; MULDER, 1986) $G \in \mathcal{DH}$ se, e somente se, para quaisquer vértices u, v, x, y de G , temos que pelo menos duas das três somas de distâncias $d(u, v) + d(y, x)$, $d(u, y) + d(v, x)$ e $d(u, x) + d(v, y)$ são iguais.

Teorema 2.3. (BANDELT; MULDER, 1986) $G \in \mathcal{DH}$ se, e somente se, todo ciclo C_k em G têm duas ou mais cordas que se cruzam, para $k \geq 5$.

Teorema 2.4. (BANDELT; MULDER, 1986) $G \in \mathcal{DH}$ se, e somente se, G não possui buraco, casa, dominó ou gema como subgrafo induzido. (Veja Figura 2.3)

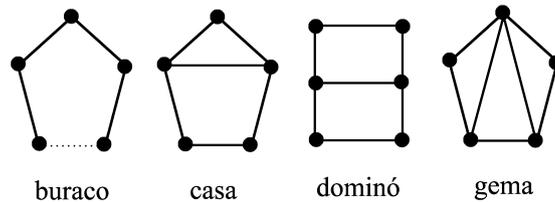


Figura 2.3: Subgrafos induzidos proibidos para grafos de distância hereditária.

Note que qualquer cografo não contém nenhum dos subgrafos induzidos da Figura 2.3.

Teorema 2.5. (BANDELT; MULDER, 1986) $G \in \mathcal{DH}$ se, e somente se, G pode ser construído a partir de um vértice inicial por uma sequência de operações assim definidas:

- i. Adição de um vértice pendente y a um vértice x de G ;*
- ii. Adição de um gêmeo falso y a um vértice x de G ;*
- iii. Adição de um gêmeo verdadeiro y a um vértice x de G .*

Um grafo G é **Ptolemaico** se para quaisquer $u, v, x, y \in V(G)$ temos que $d(u, v)d(x, y) \leq d(u, x)d(v, y) + d(u, y)d(v, x)$.

Proposição 2.3. (HOWORKA, 1981) *Um grafo G é Ptolemaico se, e somente se, $G \in \mathcal{DH} \cap \mathcal{Co}$.*

Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico, e os seus vértices pendentes são chamados de **folhas**. Algumas vezes, podemos denotar uma árvore arbitrária com n vértices por T_n . Uma propriedade importante de uma árvore é que $m = n - 1$. Um grafo acíclico, não necessariamente conexo, é chamado de **floresta**. Para um grafo conexo G , uma **árvore geradora** de G é uma árvore T_G que possui todos os vértices de G e é um subgrafo de G . O problema da **árvore de Steiner** em grafos guarda certa semelhança com o problema da árvore geradora mínima (árvores geradoras cuja soma dos pesos das arestas é mínimo); a diferença entre os dois é que, dado um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$, o problema da árvore de Steiner consiste em encontrar um subgrafo conexo de tamanho mínimo contendo os vértices de W . Claro, se W não induz um subgrafo conexo, são inseridos novos vértices que, juntamente com W , induzam um subgrafo conexo de tamanho mínimo que contém W . Esses vértices que promovem tal efeito são chamados de **vértices de Steiner**, e os vértices de W são chamados de **vértices terminais**. Dizemos que este subgrafo conexo mínimo T é uma **árvore de Steiner para W** . É óbvio que todas as folhas de T são terminais. A **distância de Steiner** $d_S(W)$ de W é a cardinalidade de arestas de uma árvore de Steiner para W (HERNANDO et al., 2005).

2.3 Convexidades em Grafos

Como citado na Seção 2.1, podemos definir uma estrutura convexa em grafos. Um espaço de convexidade associado a um grafo é um par ordenado (G, \mathcal{C}) onde G é um grafo conexo e não ponderado, e \mathcal{C} uma convexidade sobre o conjunto vértices $V(G)$. Em grafos existem métricas sobre o conjunto de vértices, e a partir dessas métricas são definidos alguns espaços de convexidade. Dentre todos os espaços de convexidade existentes em grafos, os que se destacam desde os inícios dos estudos nessa área são o **espaço de convexidade geodética** (G, \mathcal{G}) e o **espaço de convexidade monofônica** (G, \mathcal{M}) (FARBER; JAMISON, 1986).

Um **uv -geodético** é um caminho geodético entre os vértices u e v em G ; de forma análoga, um **uv -caminho monofônico** é um caminho monofônico entre os vértices u e v em G . O **intervalo geodético** $I_g(u, v)$ é o conjunto de todos os vértices pertencentes a algum uv -geodético. Similarmente, o **intervalo monofônico** $I_m(u, v)$ é o conjunto de todos os vértices pertencentes a algum uv -caminho monofônico. Para um conjunto $W \subseteq V(G)$, o **intervalo geodético** $I_g[W]$ de W é a união dos intervalos geodéticos $I_g(u, v)$ para todos os pares $u, v \in W$. O **intervalo monofônico** de W é definido similarmente. Em outras palavras, temos:

$$I_g[W] = \bigcup_{u,v \in W} I_g(u, v) \text{ e } I_m[W] = \bigcup_{u,v \in W} I_m(u, v).$$

Um resultado conhecido e bem intuitivo é que para qualquer $W \subseteq V(G)$ vale que $I_g[W] \subseteq I_m[W]$.

Um conjunto $W \subseteq V(G)$ é chamado de **geodesicamente convexo** ou **g -convexo** se $I_g[W] = W$, e é chamado de **conjunto geodético** se $I_g[W] = V(G)$. O **número geodético** $gn(G)$ é a menor cardinalidade de um conjunto geodético de G . Do

mesmo modo, W é chamado de **monofonicamente convexo** ou **m -convexo** se $I_m[W] = W$, e é chamado de **conjunto monofônico** se $I_m[W] = V(G)$. O **número monofônico** $mn(G)$ é a menor cardinalidade de um conjunto monofônico de G . Um resultado importante é que $gn(G) \geq mn(G)$.

O **fecho g -convexo** de W é o menor conjunto g -convexo que contém W , e é denotado por $H_g(W)$. Podemos observar que $W \subseteq I_g[W] \subseteq H_g(W) \subseteq V(G)$. O conjunto de vértices W é um **conjunto de g -fecho** se $H_g(W) = V(G)$. O **número de fecho geodético**, $ghn(G)$, é a cardinalidade do menor conjunto de g -fecho de G . De forma análoga, o **fecho m -convexo** de W é o menor conjunto m -convexo que contém W , denotado por $H_m(W)$. Claramente, vale também que $W \subseteq I_m[W] \subseteq H_m(W) \subseteq V(G)$. O subconjunto de vértices W é um **conjunto de m -fecho** se $H_m(W) = V(G)$, e o **número de fecho monofônico** $mhn(G)$ é a cardinalidade do menor conjunto de m -fecho de G . Analogamente ao caso de intervalos, temos que $H_g(W) \subseteq H_m(W)$ e, conseqüentemente, $ghn(G) \geq mhn(G)$.

Um grafo G é **geodesicamente de intervalo monótono** se $I_g(u, v)$ é g -convexo para todo par de vértices u e v de $V(G)$. Analogamente, um grafo G é **monofonicamente de intervalo monótono** se $I_m(u, v)$ é m -convexo para todo par de vértices u e v de $V(G)$. Claramente, se G é monofonicamente de intervalo monótono, então G é geodesicamente de intervalo monótono

Teorema 2.6. (VAN DE VEL, 1993) *Um grafo conexo com a propriedade de Pasch é geodesicamente de intervalo monótono.*

Teorema 2.7. (VAN DE VEL, 1993) *Se um grafo conexo é uma s_3 -convexidade, então G é geodesicamente de intervalo monótono.*

Teorema 2.8. (VAN DE VEL, 1993) *Se G é um grafo Ptolemaico, então G é geodesicamente (monofonicamente) de intervalo monótono.*

Defina $I_g^k[W]$, para k natural, como:

- $I_g^0[W] = W$
- $I_g^1[W] = I_g[I_g^0[W]]$
- \vdots
- $I_g^k[W] = I_g[I_g^{k-1}[W]]$.

Pela Proposição 2.2, na iteração k onde $I_g^{k+1}[W] = I_g^k[W]$, temos $I_g^k[W] = H_g(W)$. O **número de iteração geodético** $gin(W)$ é o menor número k tal que $I_g^k[W] = H_g(W)$. O **número de iteração geodético de G** , $gin(G)$, é definido como o máximo valor de $gin(W)$, para $W \subseteq V(G)$ (HARARY; NIEMINEN, 1981). Na Figura 2.4 temos um grafo G onde $gin(G) = 2$: em (i) representa-se $I_g^0[\{a, b, c\}]$, em (ii) representa-se $I_g^1[\{a, b, c\}]$, e finalmente em (iii) representa-se $I_g^2[\{a, b, c\}]$, que é exatamente o conjunto de vértices de G .

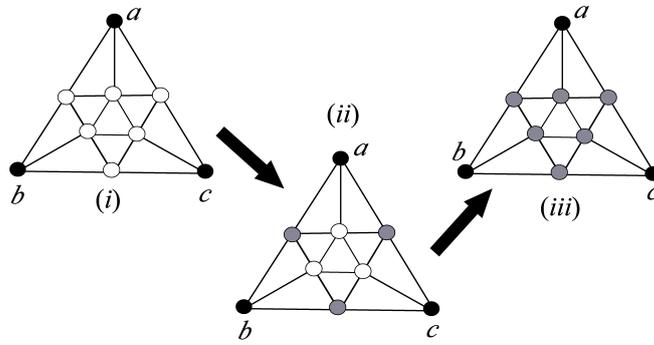


Figura 2.4: Exemplo de determinação do número de iteração geodético.

O problema de encontrar o intervalo geodético para um dado subconjunto de vértices W é da ordem de $\mathcal{O}(m \cdot |W|)$ (DOURADO et al., 2009). Portanto, o fecho g -convexo para W pode ser computado em $\mathcal{O}(m \cdot n \cdot k)$, onde k é o número de iteração geodético de G .

Definimos o **intervalo geodético não extensível** para o par de vértices u, v de G como $I_g^-(u, v) = I_g(u, v) \setminus \{u, v\}$.

O número de Carathéodory sobre o espaço de convexidade geodética é denotado por $c(G, \mathcal{G})$, e no espaço de convexidade monofônica é denotado por $c(G, \mathcal{M})$.

Teorema 2.9. (DUCHET, 1987) *Para um grafo G , temos que $c(G, \mathcal{M}) = 1$ para G completo ou $c(G, \mathcal{M}) = 2$ para qualquer outro tipo de grafo.*

O **intervalo de Steiner** $S(W)$ de um subconjunto de vértices W consiste de todos os vértices que pertencem a alguma árvore de Steiner para W^3 . Se $S(W) = V(G)$, W é chamado de **conjunto de Steiner** para G . O **número de Steiner** de G , $st(G)$, é definido como a menor cardinalidade de um conjunto de Steiner de G (CHARTRAND; ZHANG, 2002). O **intervalo forte de Steiner** $S[W]$ é o conjunto que contém todos os vértices pertencentes a alguma árvore de Steiner para $W' \subseteq W$, isto é:

$$S[W] = \bigcup_{W' \subseteq W} S(W').$$

Um subconjunto $W \subseteq V(G)$ é **Steiner convexo** ou **St-convexo** se $S[W] = W$. O **fecho convexo de Steiner** de W , $H_{St}(W)$, é menor conjunto St-convexo que contém W .

Teorema 2.10. (CÁCERES; A.MÁRQUEZ; PUERTAS, 2008) *Seja G um grafo conexo e seja $W \subseteq V(G)$. Valem as seguintes inclusões: $H_g(W) \subseteq H_{St}(W) \subseteq H_m(W)$.*

³Repare que este é um tipo de intervalo que não relaciona somente pares de vértices.

Na Figura 2.5 temos um exemplo referente ao Teorema 2.10.

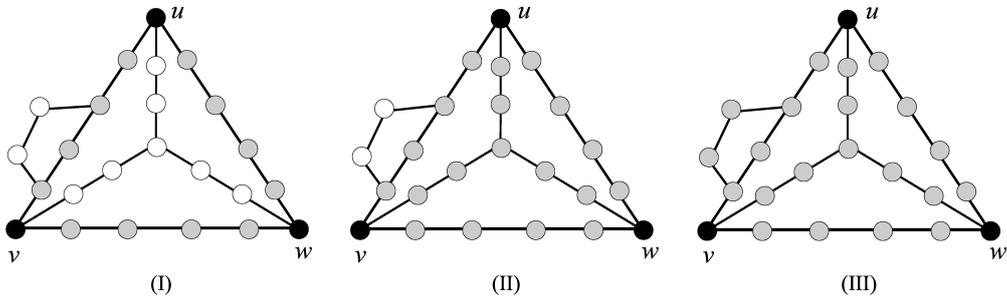


Figura 2.5: (I) $H_g(\{u, v, w\})$, (II) $H_{St}(\{u, v, w\})$ e (III) $H_m(\{u, v, w\})$

Denotamos por (G, \mathcal{S}_t) o espaço de convexidade de Steiner para conjuntos de vértices em $V(G)$.

3 NÚMERO DE ITERAÇÃO GEODÉTICO E SEGMENTOS CONVEXOS

Harary e Nieminen (1981) definiram o número de iteração geodético em grafos, com objetivo de determinar o número mínimo de vértices de um grafo G , tal que $gin(G)$ seja igual a k . Eles mostraram que:

Teorema 3.1. (HARARY; NIEMINEN, 1981) *Seja G^k um grafo não nulo com número mínimo de vértices, tal que $gin(G^k) = k$. Então $|V(G^0)| = 1$, $|V(G^1)| = 3$ e $|V(G^k)| = k + 3$, para $k \geq 2$.*

O interessante é que o número de iteração geodético pode ser usado como um *fator de medida de distância do fecho geodético* de $W \subseteq V(G)$. Por exemplo, se W for um conjunto g -convexo esse fator é zero, caso contrário será igual ao mínimo natural k tal que $H_g(W) = I_g^k[W]$. Os autores Polat e Sabidussi (2009) utilizaram $gin(W \cup \{u\})$ como fator de medida de distância do fecho geodético de $W \subseteq V(G)$ e $u \in V(G)$, e obtiveram resultados interessantes. Mais resultados sobre esse assunto podem ser encontrados em (PETERIN, 2012).

Neste capítulo faremos uso do número de iteração geodético na definição de classes de grafos. Nosso objetivo é dividir os grafos em famílias definidas pelo número de

iteração geodético e pelo tamanho máximo do subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ sobre o qual pretendemos encontrar o fecho g -convexo. Com isso, conseguimos uma classificação por níveis usando a distância máxima de qualquer subconjunto de G ao seu fecho. Todavia, limitaremos nossos esforços para as classes de grafos cordais (\mathcal{Co}) e grafos de distância hereditária (\mathcal{DH}), cuja interseção corresponde aos grafos ptolemaicos, que como mencionamos no Teorema 2.8 são de intervalo geodeticamente monótono.

Um resultado – de enunciado surpreendentemente conciso – que provaremos é que na classe \mathcal{DH} existe uma família $\{F_k\}$ de subgrafos proibidos tal que F_k é um subgrafo proibido para a classe \mathcal{I}_∞^{k-1} . Além disso, também faremos uso do segmento convexo definido na Seção 2.1 para a definição de uma classe que nos auxiliará nos resultados deste e do próximo capítulo.

Todos os resultados deste capítulo foram obtidos em parceria com o Prof. Dieter Rautenbach, da Universidade de Ulm, Alemanha.

3.1 Classes: definição e resultados

Para compreendermos melhor as estruturas convexas relacionadas ao intervalo geodético, utilizaremos as definições de número de iteração geodético e de segmento convexo para definir as seguintes classes:

Definição 3.1.

(i) *Classe de Iteração* (k, p)

$$\mathcal{I}_p^k = \{ G : H_g(W) = I_g^k[W], \text{ para todo } W \subseteq V(G) \text{ com } |W| \leq p \}$$

(ii) *Classe de Segmentos Convexos*

$$\mathcal{H} = \{G : H_g(W) = \bigcup_{\forall u,v \in W} H_g(\{u,v\}), \text{ para todo } W \subseteq V(G)\}$$

Na Definição 3.1-(i) dividimos os grafos por número de iteração geodético aplicado a subconjuntos de $V(G)$ de tamanho limitado por um número inteiro não negativo. Note que a classe \mathcal{I}_2^1 é a classe dos grafos de intervalo geodeticamente monótono; assim, podemos dizer que todos os grafos das hipóteses dos Teoremas 2.6, 2.7 e 2.8 pertencem à classe \mathcal{I}_2^1 . Na Definição 3.1-(ii) especificamos a família dos grafos tais que seus fechos convexos são exatamente a união dos segmentos convexos entre pares de vértices.

A seguinte observação é útil:

Observação 3.1. *Se $G \in \mathcal{I}_p^k$ então $G \in \mathcal{I}_p^{k'}$, para qualquer natural $k' > k$.*

A observação acima se prova da seguinte forma: se para todo subconjunto W de vértices de G com no máximo p vértices são necessárias k iterações para se encontrar o fecho geodético de W , então para tais subconjuntos o fecho também será encontrado para qualquer valor $k' > k$. No entanto, se $G \in \mathcal{I}_p^k$, temos que nem sempre $G \in \mathcal{I}_{p'}^k$, para $p' > p$. O grafo da Figura 3.1 pertence à classe \mathcal{I}_2^2 , mas não pertence a \mathcal{I}_3^2 , como podemos ver pela escolha de $W = \{u, v, x\}$: note que $z \in I^3[\{u, v, x\}] \setminus I^2[\{u, v, x\}]$.

Já no caso de $p' \leq p$, podemos ver facilmente que $\mathcal{I}_p^k \subseteq \mathcal{I}_{p'}^k$. Além disso, ainda na Figura 3.1, temos no item (ii) que $H_g(\{u, v, x\}) \neq H_g(\{u, v\}) \cup H_g(\{u, x\}) \cup H_g(\{v, x\})$. Portanto, o mesmo grafo não está em \mathcal{H} .

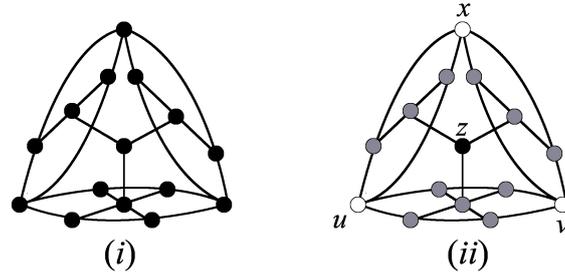


Figura 3.1: Um grafo em \mathcal{I}_2^2 que não pertence a \mathcal{I}_3^2 .

Agora vejamos alguns resultados referentes às classes. O primeiro resultado é sobre o espaço de convexidade geodética para grafos em \mathcal{H} .

Teorema 3.2. *O espaço de convexidade geodética (G, \mathcal{G}) em \mathcal{H} é JHC.*

Prova: Seja $G \in \mathcal{H}$. Então para $p \in V(G)$ e um conjunto g -convexo não vazio W temos que $H_g(W \cup \{p\}) = \bigcup \{H_g(\{x, y\}) : x, y \in W \cup \{p\}\}$. Disso podemos inferir que $\bigcup \{H_g(\{x, y\}) : x, y \in W \cup \{p\}\} = \bigcup \{H_g(\{u, p\}) : u \in H_g(W)\}$. Mas $H_g(W) = W$, pois W é g -convexo. Assim, temos que $\bigcup \{H_g(\{x, y\}) : x, y \in W \cup \{p\}\} = \bigcup \{H_g(\{u, p\}) : u \in W\}$.

Portanto, temos que $H_g(W \cup \{p\}) = \bigcup \{H_g(\{u, p\}) : u \in W\}$. \square

Corolário 3.1. *O espaço de convexidade geodética (G, \mathcal{G}) em \mathcal{H} satisfaz CUP.*

Prova: Segue da Proposição 2.1 e do Teorema 3.2. \square

Uma relação importante entre as classes \mathcal{I}_2^1 , \mathcal{I}_∞^1 e \mathcal{H} é dada no seguinte resultado:

Teorema 3.3. $\mathcal{I}_\infty^1 = \mathcal{I}_2^1 \cap \mathcal{H}$.

Prova:

(\Rightarrow) Seja $G \in \mathcal{I}_\infty^1$. Então $H_g(W) = I_g[W]$ para todo $W \subseteq V(G)$. Em particular, a igualdade vale para todos os subconjuntos de W com $|W| \leq 2$. Assim, $G \in \mathcal{I}_2^1$. Por definição temos que $I_g[W] = \bigcup \{I_g(u, v) : u, v \in W\}$. Do fato de que $G \in \mathcal{I}_2^1$, temos que $I_g(u, v) = H_g(\{u, v\})$ para todo u, v e, conseqüentemente, $I_g[W] = \bigcup \{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\}$. Portanto, para $G \in \mathcal{I}_\infty^1$, temos que $H_g(W) = I_g[W] = \bigcup \{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\}$, isto é, $G \in \mathcal{H}$. Logo, $\mathcal{I}_\infty^1 \subseteq \mathcal{I}_2^1 \cap \mathcal{H}$.

(\Leftarrow) Por outro lado, seja $G \in \mathcal{I}_2^1 \cap \mathcal{H}$. Considere $W \subseteq V(G)$. Para $G \in \mathcal{H}$, temos que $H_g(W) = \bigcup \{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\}$. No caso de $G \in \mathcal{I}_2^1$, temos que $H_g(\{u, v\}) = I_g(u, v)$. Reunindo estas igualdades, temos que $H_g(W) = \bigcup \{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\} = \bigcup \{I_g(u, v) : u, v \in W\} = I_g[W]$. Logo, $G \in \mathcal{I}_\infty^1$. \square

Corolário 3.2. *O espaço de convexidade geodética (G, \mathcal{G}) em \mathcal{I}_∞^1 é JHC e satisfaz CUP.*

Prova: Segue dos Teoremas 3.2 e 3.3 e do Corolário 3.1. \square

Proposição 3.1. *Um grafo G está em \mathcal{H} se, e somente se, $c(G, \mathcal{G}) = 2$.*

Prova:

(\Rightarrow) Sejam $G \in \mathcal{H}$ e $W \subseteq V(G)$ tais que $|W| = 3$. Escreva $W = \{u, v, w\}$. Então $H_g(W) = H_g(\{u, v\}) \cup H_g(\{u, w\}) \cup H_g(\{v, w\}) = H_g(W \setminus \{w\}) \cup H_g(W \setminus \{v\}) \cup H_g(W \setminus \{u\})$, isto é, W não é um conjunto de Carathéodory. Conseqüentemente, temos $c(G, \mathcal{G}) = 2$.

(\Leftarrow) Por outro lado, seja G tal que $c(G, \mathcal{G}) = 2$. Seja $W \subseteq V(G)$. Se $|W| = 2$, é fácil observar que $H_g(W) = \bigcup \{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\}$. Agora assumamos $|W| \geq 3$. Uma vez que $|W| > c(G, \mathcal{G})$ e que W é um conjunto de Carathéodory, temos que $H_g(W) = \bigcup \{H_g(W \setminus \{x\}) : x \in W\}$. Por indução, $H_g(W \setminus \{x\}) = \bigcup \{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\}$. Reunindo todas estas observações, temos que $H_g(W) = \bigcup \{ \bigcup \{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\} : x \in W\}$. É fácil notar que todo subconjunto $\{u, v\} \subseteq W$ satisfaz $\{u, v\} \subseteq W \setminus \{x\}$ para algum $x \in W$. Assim, $H_g(W) = \bigcup \{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\}$, isto é, $G \in \mathcal{H}$. \square

Teorema 3.4. $\mathcal{DH} \subset \mathcal{H}$.

Prova: Seja $G \in \mathcal{DH}$. Pela Proposição 2.1, sabemos que todo caminho monofônico de G é caminho geodético. Disso, temos que qualquer conjunto g -convexo de G também é m -convexo. Assim, pelo Teorema 2.9, o número de Carathéodory de G é 2. Mas sabemos que o número de Carathéodory de qualquer grafo em \mathcal{H} também é 2, como vimos na Proposição 3.1. Então temos que $G \in \mathcal{H}$. Portanto $\mathcal{DH} \subset \mathcal{H}$. \square

Corolário 3.3. *O espaço de convexidade geodética (G, \mathcal{G}) em \mathcal{DH} é JHC e satisfaz CUP.*

Prova: Resultado direto da combinação dos Teoremas 3.4 e 3.2 e do Corolário 3.1. \square

Corolário 3.4. $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_\infty^1 = \mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^1$.

Prova: Segue do Teorema 3.3 e do Teorema 3.4. \square

Na Figura 3.2 temos a seguinte relação entre os classes estudadas neste capítulo:

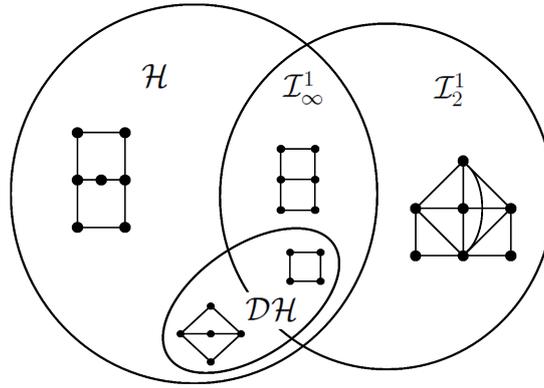


Figura 3.2: Relação entre as classes deste capítulo.

3.2 Intervalo Geodeticamente Monótono em \mathcal{DH}

Para um subconjunto W de vértices de um grafo G e para um vértice u de G , defina o índice de iteração $i_G(u, W)$ do vértice u em relação ao conjunto W como $\min\{k \in \mathbb{N}_0 : u \in I_g^k[W]\}$ se $u \in H_g(W)$, e ∞ se $u \notin H_g(W)$. Para um caminho $P : u_0 u_1 \dots u_l$ num grafo G e índices i e j com $0 \leq i \leq j \leq l$, denote por $P[u_i, u_j]$ o caminho $u_i u_{i+1} \dots u_j$, e por $P[u_j, u_i]$ o caminho $u_j u_{j-1} \dots u_i$. Vejamos o seguinte resultado:

Lema 3.1. *Seja G um grafo e sejam $u, v, z \in V(G)$, onde $i_G(z, \{u, v\}) = 2$. Então não existe $x \in V(G)$ de modo que $i_G(x, \{u, v\}) = 1$ e $z \in I_g(u, x)$.*

Prova: Suponha que exista x tal que $i_G(x, \{u, v\}) = 1$ e $z \in I(u, x)$. Como $i_G(x, \{u, v\}) = 1$ temos que $x \in I_g(u, v)$, isto é, $d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)$. Como $z \in I(u, x)$, temos que $d(u, z) + d(z, x) = d(u, x)$. Com isso, temos que:

$$d(u, z) + d(z, x) + d(x, v) = d(u, v).$$

Absurdo, pois $i_G(z, \{u, v\}) = 2$. \square

Seguem dois lemas auxiliares na determinação dos subgrafos proibidos para a classe $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^1$.

Lema 3.2. *Sejam G um grafo em \mathcal{DH} e u, a, b três vértices distintos de G . Sejam P um ab -caminho monofônico, Q um au -caminho monofônico, e R um bu -caminho monofônico, tais que P , Q e R são internamente disjuntos. Seja w um vértice interno de P e $P : a \dots w_a w w_b \dots b$. Se*

$$d(u, w) + d(w, a) > d(u, a) \text{ e}$$

$$d(u, w) + d(w, b) > d(u, b),$$

então $V(Q) \setminus \{a\}$ contém um vértice x tal que $w_a w w_b x w_a$ é um ciclo.

Prova: Mostraremos por indução em $|V(Q)| + |V(R)|$.

Se Q e R são ambos de comprimento 1, então aub é um caminho de comprimento 2 entre a e b . Como G está em \mathcal{DH} , temos que $a = w_a$, $b = w_b$ e $awbua$ é o ciclo desejado. Consequentemente, podemos assumir que ao menos Q ou R tem comprimento mínimo 2.

Primeiro assumiremos que u e b são adjacentes, isto é, R é de comprimento 1; então, Q é de comprimento mínimo 2. Denote por a' o vértice em P que está mais perto de a e que seja vizinho de u . Note que $uP[a', a]$ é um ua -caminho monofônico. Como w não pertence a um ua -caminho monofônico por hipótese, o vértice a' pertence a $P[a, w_a]$. Agora, $a'ub$ é um caminho de comprimento 2 entre a' e b . Como G está em \mathcal{DH} , temos que $a' = w_a$, $b = w_b$ e $a'wbua'$ é o ciclo desejado.

Agora assumiremos que u e b não são adjacentes, isto é, R possui comprimento mínimo 2. Denote por b' o vértice em P que está mais próximo de b e que possui um vizinho em $V(Q)$. Denote por u' o vértice em Q que está mais próximo de u e que é vizinho de b' . Note que $Q[u, u']P[b', b]$ é um ub -caminho monofônico.

Como w não pertence a um ub -caminho monofônico, temos que o vértice b' está em $P[w_b, b]$. Além disso, ao menos $u \neq u'$ ou $b \neq b'$, pois o comprimento de R é maior ou igual a 2. Claramente, $d(u', w) + d(w, b') \geq 2 > 1 = d(u', b')$. Se $d(u', w) + d(w, a) = d(u', a)$, então, como u' está em Q , temos que $d(u, w) + d(w, a) \leq d(u, u') + d(u', w) + d(w, a) = d(u, u') + d(u', a) = d(u, a)$, o que é uma contradição. Consequentemente, $d(u', w) + d(w, a) > d(u', a)$. Por indução aplicada aos vértices u' , a e b' nos caminhos $P' = P[a, b']$, $Q' = Q[u', a]$ e $R' : u'b'$, e no vértice interno w de P' , obtemos a existência de um vértice $x \in V(Q') \setminus \{a\}$ tal que $w_a w w_b x w_a$ é um ciclo. Com isso, concluímos a prova. \square

Considere os grafos a seguir:

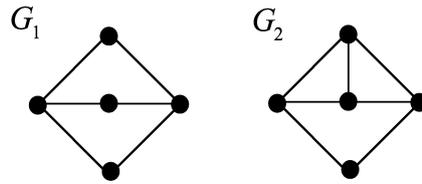


Figura 3.3: Subgrafos proibidos para $\mathcal{DH} \cap I_2^1$.

Segue uma importante observação:

Observação 3.2. *Sejam G um grafo e $u, v \in V(G)$, $u \neq v$. Considere $z \in V(G)$ tal que $i_G(z, \{u, v\}) = k$ para $k \in \mathbb{Z}^+$. Então existe um caminho geodético $P : x_0 x_1, \dots, x_l$, com $z \in V(P)$, $i_G(x_0, \{u, v\}) \leq k - 1$, $i_G(x_l, \{u, v\}) = k - 1$ e $i_G(x_j, \{u, v\}) = k$ para $1 \leq j \leq l - 1$.*

O argumento para a observação acima é bem simples. Se $z \in I_g^k[\{u, v\}] \setminus I^{k-1}[\{u, v\}]$, z pertence a um caminho geodético P entre dois vértices em $I^{k-1}[\{u, v\}]$. Sejam eles x_0 e x_l . Pelo menos um dentre x_0 e x_l tem que possuir índice $k - 1$, pois se os dois tiverem índices menores que $k - 1$ isto implicaria $i_G(z, \{u, v\}) \leq k - 2$. Assumindo

$i_G(z, \{u, v\}) = k - 1$ e escolhendo P de menor comprimento possível, a observação segue.

Lema 3.3. *Sejam G um grafo em \mathcal{DH} e u, v dois vértices distintos de G . Defina $i(x) = i_G(x, \{u, v\})$ para todo x de G . Se $P : x_0x_1 \dots x_l$ é um caminho monofônico tal que $l \geq 2$, $i(x_0) = i(x_l) = 1$ e $i(x_j) = 2$ para $j \in \{1, \dots, l-1\}$, então G contém os subgrafos induzidos G_1 ou G_2 como na Figura 3.3. Além disso, $l = 2$, $\{x_0, x_1, x_2\} \subseteq V(G')$, e existem $x, y \in V(G')$ tais que $i_{G'}(x_1, \{x, y\}) = 2$ e $I_g(x, y) \subseteq I_g(u, v)$.*

Prova: Pelo Lema 3.1 temos que os índices de x_0 e x_l são iguais a 1. Assim, considere que x_0 pertence a um caminho geodético Q entre u e v , e x_l pertence a um caminho geodético R entre u e v . Denote por u' o vértice em $Q[x_0, u]$ que está mais próximo de x_0 e pertence a $R[x_l, u]$. Similarmente, denote por v' o vértice em $Q[x_0, v]$ que está mais próximo de x_0 e pertence a $R[x_l, v]$. Como todos os vértices internos de P têm índice 2, temos que os caminhos P , $Q[u', x_0]$, $Q[v', x_0]$, $R[u', x_l]$, e $R[v', x_l]$ são internamente disjuntos. Além disso,

$$d(u', x_1) + d(x_1, x_0) > d(u', x_0),$$

$$d(u', x_1) + d(x_1, x_l) > d(u', x_l),$$

$$d(v', x_1) + d(x_1, x_0) > d(v', x_0) \text{ e}$$

$$d(v', x_1) + d(x_1, x_l) > d(v', x_l).$$

Agora, duas aplicações do Lema 3.2 implicam a existência de dois vértices $x \in V(Q[u', x_0]) \setminus \{x_0\}$ e $y \in V(Q[v', x_0]) \setminus \{x_0\}$ tais que $x_0x_1x_2xx_0$ e $x_0x_1x_2yx_0$ são ciclos. Como $Q[x, y]$ é um caminho geodético e contém x_0 como um vértice interno, os vértices x e y não são adjacentes. Se x_1 é adjacente a ambos x e y , então $Q[u, x]x_1Q[y, v]$ é um caminho geodético entre u e v que contém x_1 , o que implica a contradição de que o índice de x_1 é 1. Consequentemente, x_1 não é simultaneamente adjacente a x e a y . Portanto, $G' = G[x_0, x_1, x_2, x, y]$ é um dos dois grafos G_1 e

G_2 . Para concluir a prova, observe que $\{x_0, x_1, x_2\} \subseteq V(G')$, $i_{G'}(x_1, \{x, y\}) = 2$ e $I_g(x, y) \subseteq I_g(u, v)$. \square

Lema 3.4. *Sejam G um grafo em \mathcal{DH} e u, v dois vértices distintos de G . Seja $z \in V(G)$ tal que $i(z) = 2$. Então existe um subgrafo induzido G' de G tal que: (a) G' é isomorfo a G_1 ou G_2 ; (b) $z \in V(G')$; (c) existem $x, y \in V(G')$ tais que $i_{G'}(z, \{x, y\}) = 2$ e $I_g(x, y) \subseteq I_g(u, v)$.*

Prova: Pela Observação 3.2, z pertence a um caminho geodético $P : x_0x_1 \dots x_l$ tal que $i(x_0) = 1$, $i(x_l) \leq 1$ e $i(x_j) = 2$ para $1 \leq j \leq l - 1$. Pelo Lema 3.1 temos que $i(x_l) = 1$, e pelo Lema 3.3 temos que G contém um subgrafo induzido G' isomorfo a G_1 ou G_2 . Além disso, $l = 2$, $x_1 = z$, $\{x_0, x_1, x_2\} \subseteq V(G')$ e existem $x, y \in V(G')$ tais que $i_{G'}(z, \{x, y\}) = 2$ e $I_g(x, y) \subseteq I_g(u, v)$. \square

Teorema 3.5. *Para um grafo G em \mathcal{DH} , as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $G \in \mathcal{I}_2^1$.

(ii) G não contém G_1 ou G_2 como subgrafo induzido.

Prova:

[[i) \Rightarrow (ii)] Se G contém um subgrafo induzido G' isomorfo a G_1 ou G_2 , a escolha de u como um vértice de grau 2 em G' e de v como um vértice que dista 2 de u em G' resulta em um par de vértices com $H_g(\{u, v\}) \neq I_g(u, v)$. Consequentemente (i) implica (ii).

[[ii) \Rightarrow (i)] Por contrapositiva, assumiremos que (i) não vale para G . Sejam u e v dois vértices de G com $H_g(\{u, v\}) \neq I_g(u, v)$. Isto implica que $H_g(\{u, v\})$ contém

vértices de índice 2. Pelo Lema 3.4, temos que G contém o subgrafo induzido G' isomorfo a G_1 ou G_2 . Consequentemente (ii) implica (i). \square

Corolário 3.5. *Para um grafo G em \mathcal{DH} , as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $G \in \mathcal{I}_\infty^1$.

(ii) G não contém G_1 ou G_2 como subgrafo induzido.

Prova: Resultado direto da combinação do Teorema 3.5 e do Corolário 3.4. \square

Note que esse resultado reafirma o Teorema 2.8, já que os grafos Ptolemaicos estão exatamente em $\mathcal{Co} \cap \mathcal{DH}$.

3.3 As Classes \mathcal{DH} e \mathcal{I}_∞^k , $k \geq 3$

Nosso objetivo nesta seção é mostrar uma caracterização por subgrafos proibidos para a classe $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_\infty^k$. Primeiramente, faremos análises para grafos na classe $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^k$. Note que na Figura 3.4 temos a construção de um grafo F_3 por uma sequência de adições de vértices satisfazendo a Proposição 2.5; logo F_3 está em \mathcal{DH} .

Além disso, o fecho g -convexo do par de vértices com rótulo zero é computado em 3 iterações; assim, $F_3 \notin \mathcal{I}_2^2$. Portanto, $F_3 \notin \mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^2$.

Assuma que os vértices de rótulo zero são os vértices “mais externos” de F_3 . A partir de F_3 , construiremos um grafo proibido para a classe $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^3$. Para isso, basta selecionar o vértice u mais externo de F_3 com grau 2 e, em seguida, fazer

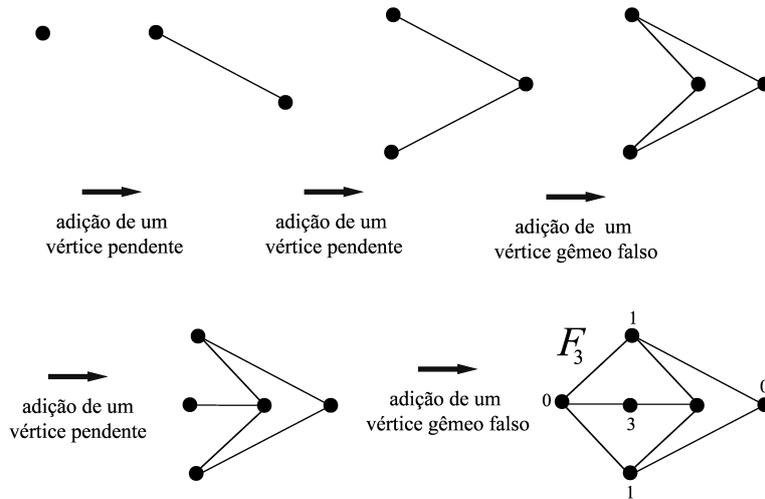


Figura 3.4: Construção do grafo F_3 .

a adição de um vértice pendente a u e de um gêmeo falso de u , respectivamente, como mostra a Figura 3.5. Assim, temos um grafo F_4 que não pertence a $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^3$, pois por construção não perde a propriedade de pertencer a \mathcal{DH} , e para computar o fecho g -convexo para o par de vértices de rótulo zero são necessárias 4 iterações do intervalo geodético.

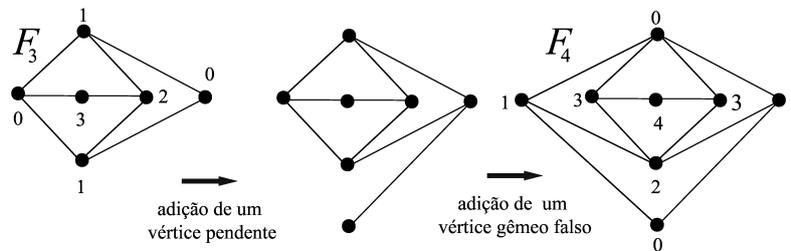


Figura 3.5: Construção do grafo F_4 .

Com o mesmo raciocínio de construção, temos na Figura 3.6 o grafo $F_5 \notin \mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^4$.

Assim, conhecendo o grafo F_{k-1} , podemos construir um grafo $F_k \notin \mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^{k-1}$ selecionando o vértice u mais externo de F_{k-1} de grau 2, e fazendo a adição de um vértice pendente a u e de um gêmeo falso de u , consecutivamente. Com isso, temos

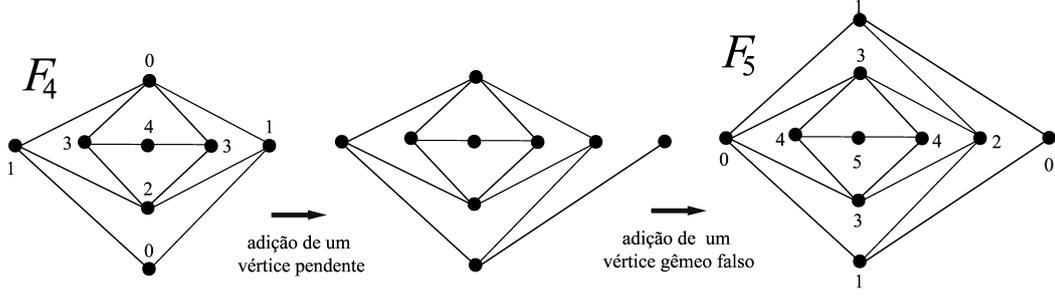


Figura 3.6: Construção do grafo F_5 .

o seguinte resultado:

Lema 3.5. $F_k \in \mathcal{DH} \cap (\mathcal{I}_2^k \setminus \mathcal{I}_2^{k-1})$, para $k \geq 3$.

Prova: Como vimos pela construção apresentada, temos que $F_k \in \mathcal{DH}$, mas $F_k \notin \mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^{k-1}$. É fácil notar que $F_k \in \mathcal{I}_2^k$. Logo $F_k \in \mathcal{DH} \cap (\mathcal{I}_2^k \setminus \mathcal{I}_2^{k-1})$, para $k \geq 3$.

□

Seguindo o mesmo raciocínio do Lema 3.4, temos:

Lema 3.6. $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_\infty^k = \mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^k$, para $k \geq 3$.

Prova: A relação $\mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_\infty^k \subseteq \mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^k$ é trivial. Agora, considere $G \in \mathcal{DH} \cap \mathcal{I}_2^k$. Pelo Teorema 3.4, temos que $G \in \mathcal{H}$. Assim, $H_g(W) = \cup\{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\}$, para todo $W \subseteq V(G)$. Como $G \in \mathcal{I}_2^k$, temos que $H_g(\{u, v\}) = I_g^k[\{u, v\}]$. Destas igualdades, vem $H_g(W) = \cup\{H_g(\{u, v\}) : u, v \in W\} = \cup\{I_g^k[\{u, v\}) : u, v \in W\} \subseteq I_g^k[W]$. Mas, trivialmente, sabemos que $I_g^k[W] \subseteq H_g(W)$. Consequentemente, $H_g(W) = I_g^k[W]$, isto é, $G \in \mathcal{I}_\infty^k$. □

Observação 3.3. Sejam $G \in \mathcal{DH}$ e $u, v, x, y \in V(G)$ onde $I_g(x, y) \setminus \{x, y\} \subseteq I_g(u, v) \setminus \{u, v\}$. Se existe $z \in V(G)$ tal que $i_G(z, \{x, y\}) = k$ então $i_G(z, \{u, v\}) \leq k$.

A observação acima vale pelo fato de que para todos os vértices $c \in I_g(x, y)$ temos $c \in I_g(u, v)$, isto é, $i_G(c, \{x, y\}) = i_G(c, \{u, v\}) = 1$. Portanto, são necessárias no máximo k iterações para que tenhamos $z \in H_g(\{u, v\})$.

Lema 3.7. *Sejam $G \in \mathcal{DH}$ e $u, v \in V(G), u \neq v$. Considere $i(w) = i_G(w, \{u, v\})$ para todo $w \in V(G)$, e seja $z \in V(G)$ de modo que $i(z) = k$, para algum natural $k \geq 3$. Então existe um subgrafo induzido G^* de G e vértices $x, y \in V(G^*)$ tais que: (i) G^* é isomorfo a F_k ; (ii) $z \in V(G^*)$; (iii) $i_{G^*}(z, \{x, y\}) = k$; (iv) $d(x, y) = 2$; (v) $d(x, z) = k$; (vi) $d(y, z) = k - 2$; (vii) $I_g^-(x, y) \subseteq I_g^-(u, v)$.*

Prova: Pela Observação 3.2, existe um caminho geodético $P : x_0x_1 \dots x_l$ com $z \in V(P)$, $i(x_0) \leq k - 1$, $i(x_l) = k - 1$ e $i(x_j) = k$ para $1 \leq j \leq l - 1$. Claramente, $z = x_j$ para algum $j \in \{1, \dots, k - 1\}$. Sem perda de generalidade, assuma que P é escolhido da forma que o valor de $i(x_0)$ é mínimo.

Agora apresentaremos duas afirmações que serão usadas para a prova deste lema.

Afirmção 1: *Suponha que $i(x_0) < k - 1$ e existem $a, b \in V(G) \setminus V(P)$ como mostrado na Figura 3.7, onde ax_1b é um caminho geodético, $i(a) = k - 2$ e $i(b) \leq k - 2$. Então:*

- (a) $l = 2$ e $\{x_0a, x_0b\} \subseteq E(G)$.
- (b) *Se existem dois vértices distintos e não adjacentes $x', y' \notin \{a, b\}$ $i(x') < k - 1$, $i(y') < k - 1$, $\{x'a, x'b, y'a, y'b\} \subseteq E(G)$ e $d(x_l, y') = 2$, então ao menos uma das condições abaixo é verdadeira:*
 - (1) $G(x') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, x'\}]$ é isomorfo a F_3 ;
 - (2) $G(y') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, y'\}]$ é isomorfo a F_3 .

Prova. Para a parte (a), note que $P[x_0, x_l]a$ não é um caminho geodético, caso

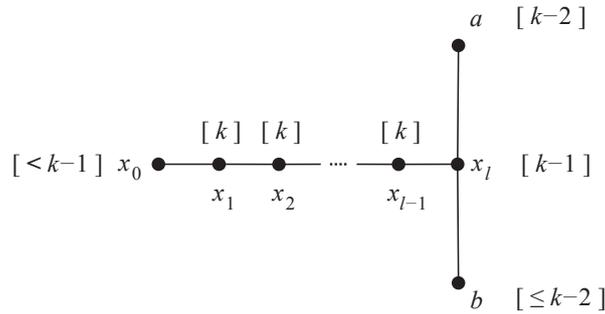


Figura 3.7: Prova do Lema 3.7. Figura para a Afirmação 1. O índice de cada vértice está entre colchetes.

contrário $i(z)$ não satisfaria $i(z) = k$. Isso implica que obrigatoriamente existe uma corda $x_p a$ com $p \in \{0, \dots, l-1\}$. Seja $q = \min\{p : x_p a \in E(G)\}$. Note que $P[x_0, x_q]a$ é um caminho geodético. Se $q > 0$ então $i(x_q) < k$, uma contradição. Consequentemente $q = 0$, i.e., $x_0 a \in E(G)$. Usando o mesmo argumento, podemos provar que $x_0 b \in E(G)$. Logo, $d(x_0, x_l) = 2$. Como $G \in \mathcal{DH}$, isso implica $l = 2$. Assim, completamos a prova da parte (a).

Para parte (b), temos da parte (a) que $z = x_1$, e por hipótese $x_2 y' \notin E(G)$. Além disso, como $x' \neq y'$, no máximo um deles é igual a x_0 . Dividimos a prova desta parte em três casos.

Caso 1. Suponha $x' = x_0$. Então $y \neq x_0$ e $x_0 y' \notin E(G)$. Note que $x_1 y' \notin E(G)$, pois caso contrário $x_1 \in I_g(x_0, y')$ e $i(x_1) < k$, uma contradição. Assim, $2 \leq d(x_1, y') \leq 3$. Continuando, também podemos observar que x_1 não pode ser adjacente a ambos a e b , porque isto implica novamente $i(x_1) < k$. Agora, se x_1 é adjacente a a mas não a b , então temos que $d(x_1, y') = 2$, mas também que $x_1 x_2 b y'$ é um caminho monofônico, o que contraria $G \in \mathcal{DH}$. De forma análoga, o caso $x_1 b \in E(G)$ e $x_1 a \notin E(G)$ também é impossível. Portanto, $G(y') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, y'\}]$ é isomorfo a F_3 .

Caso 2. Suponha $x' \neq x_0$ e $y' = x_0$. Então $x_0x' \notin E(G)$ e $d(x_0, x') = 2$. Note que $x_1x' \notin E(G)$, caso contrário $x_1 \in I_g(x_0, x')$ e $i(x_1) < k$, uma contradição. Além disso, se $x_2x' \in E(G)$, $x_0x_1x_2x'$ é um caminho monofônico contradizendo $d(x_0, x') = 2$; logo, $x_2x' \notin E(G)$. O restante da prova para esse caso segue trocando os papéis entre x' e y' , e usando o mesmo argumento do Caso 1 para mostrar que $G(x') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, x'\}]$ é isomorfo a F_3 .

Caso 3. Suponha $x' \neq x_0$ e $y' \neq x_0$. Se $x_0y' \notin E(G)$ então podemos aplicar o mesmo argumento usado no Caso 1. Se $x_0y' \in E(G)$ então $x_1y' \in E(G)$, caso contrário $y'x_0x_1x_2$ é um caminho monofônico contradizendo $d(x_2, y') = 2$. Se $x'x_1 \in E(G)$ então $x'x_1y'$ seria um caminho monofônico, uma contradição porque $i(x_1) = k$. Assim, $x'x_1 \notin E(G)$. Além disso, $x'x_2 \notin E(G)$, caso contrário $x'x_2x_1y'$ é um caminho monofônico contradizendo $d(x', y') = 2$. Podemos então concluir que $d(x', x_2) = 2$, e isso implica $x'x_0 \notin E(G)$ (caso contrário $x'x_0x_1x_2$ é um caminho monofônico, o qual é impossível). Como no caso anterior, podemos inferir que $x_1a, x_1b \notin E(G)$. Portanto, $G(x') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, x'\}]$ é isomorfo a F_3 . Assim, concluímos a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2: Suponha que $i(x_0) = k - 1$ e existem $a, b, a', b' \in V(G) \setminus V(P)$ como na Figura 3.8, onde $a'x_0b'$ e ax_1b são caminhos geodéticos, $i(a) = i(a') = k - 2$, $i(b) \leq k - 2$ e $i(b') \leq k - 2$. Então:

(a) $l = 2$ e a seguinte condição vale: $\{x_0a, x_0b\} \subseteq E(G)$ ou $\{x_2a', x_2b'\} \subseteq E(G)$.

(b) Se existem vértices x', y', x'', y'' tais que

$$d(x', y') = 2 \text{ e } d(x'', y'') = 2,$$

$$\{x'a, y'a, x'b, y'b\} \subseteq E(G) \text{ e } \{x''a', y''a', x''b', y''b'\} \subseteq E(G),$$

todos os valores $i(x'), i(y'), i(x''), i(y'')$ são estritamente menores que $k-1$,

e

$$d(x_l, y') = 2 \text{ e } d(x_0, y'') = 2,$$

então ao menos uma das condições abaixo é verdadeira:

- (1) $G(y') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, y'\}]$ é isomorfo a F_3 ;
- (2) $G(y'') = G[\{x_0, x_1, x_2, a', b', y''\}]$ é isomorfo a F_3 .

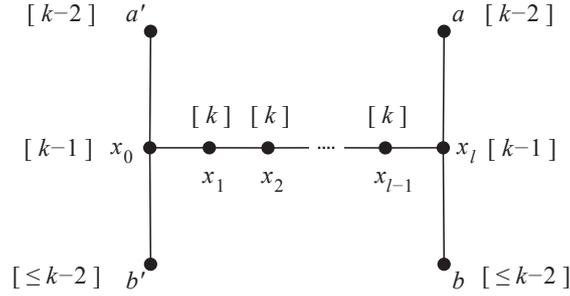


Figura 3.8: Prova do Lema 3.7. Figura para a Afirmação 2. O índice de cada vértice está entre colchetes.

Prova. Para a parte (a), primeiramente provaremos que $l = 2$ e a seguinte condição é verdadeira: $x_0a \in E(G)$ ou $x_2a' \in E(G)$.

Se $a = a'$ então $d(x_0, x_l) = 2$, o qual implica $l = 2$; além disso, $x_0a, x_2a' \in E(G)$.

Se $a \neq a'$ então $a'P[x_0, x_l]a$ não é um caminho geodético, caso contrário $i(z)$ não satisfaria $i(z) = k$. Agora analisaremos a existência da aresta aa' . Se $a'a \notin E(G)$, um argumento similar ao da Afirmação 1 pode ser usado para mostrar que, no caminho $a'P[x_0, x_l]a$, existe uma corda x_0a ou x_la' , i.e., $d(x_0, x_l) = 2$. Conseqüentemente, $l = 2$; além disso, $x_0a \in E(G)$ ou $x_2a' \in E(G)$. Caso contrário, se $a'a \in E(G)$, então $2 \leq d(x_0, x_l) \leq 3$. Se $d(x_0, x_l) = 3$ então $l = 3$ e $z \in \{x_1, x_2\}$. Além disso, $x_0a, x_la' \notin E(G)$ e $d(x_0, a) = d(a', x_l) = 2$. Assuma $z = x_1$ (o caso $z = x_2$ é similar por simetria). Então $x_1a \notin E(G)$, caso contrário o caminho $P' : ax_1x_0$ contradiz a escolha de P . Isso implica que $d(x_1, a) \geq 2$ e, conseqüentemente, $d(x_0, a) \geq 3$, uma

contradição. Podemos então concluir que $d(x_0, x_1) = 2$, isto é, $l = 2$. Além disso, $x_0a'ax_2$ não é um caminho geodético; assim, $x_0a \in E(G)$ ou $x_2a' \in E(G)$.

Aplicando similarmente os argumentos acima ao subgrafo induzido por x_0, x_1, x_2, b, b' , também podemos concluir que $x_0b \in E(G)$ ou $x_2b' \in E(G)$.

Para concluir a parte (a), mostraremos que $\{x_0a, x_0b\} \subseteq E(G)$ ou $\{x_2a', x_2b'\} \subseteq E(G)$. Sabemos que $x_0a \in E(G)$ ou $x_2a' \in E(G)$. Assuma sem perda de generalidade $x_0a \in E(G)$. Se $x_0b \in E(G)$ então $\{x_0a, x_0b\} \subseteq E(G)$, e a parte (a) segue. Assuma então $x_0b \notin E(G)$ e $x_2b' \in E(G)$. Observe que $a'x_0x_1x_2b$ não é um caminho geodético (caso contrário $i(z) = i(x_1) < k$, o qual é impossível). Se $x_2a' \notin E(G)$ então $a'b \in E(G)$, e assim $x_0a'bx_2$ é um caminho monofônico, contradizendo $d(x_0, x_2) = 2$. Portanto, $x_2a' \in E(G)$ e $\{x_2a', x_2b'\} \subseteq E(G)$. Isso completa a parte (a) da prova.

Agora provaremos (b). De (a) sabemos que $\{x_0a, x_0b\} \subseteq E(G)$ ou $\{x_2a', x_2b'\} \subseteq E(G)$. Suponha primeiramente que $\{x_0a, x_0b\} \subseteq E(G)$. Observe que $x_1y' \notin E(G)$, caso contrário, como $i(y') < i(x_0)$, o caminho $y'x_1x_2$ contradiria a escolha de P . Além disso, $x_0y' \notin E(G)$, caso contrário o caminho $y'x_0x_1x_2$ é monofônico e contradiz $d(x_2, y') = 2$. Novamente, temos que $x_1a, x_1b \notin E(G)$, e, portanto, (1) vale. Se $\{x_2a', x_2b'\} \subseteq E(G)$, um argumento análogo mostra que (2) também vale. Isto completa a prova da Afirmação 2.

Agora estamos preparados para prosseguir com a prova do lema. Usaremos indução em $k = i(z)$.

Base de Indução: $k = 3$.

Neste caso, $i(x_0) \leq 2$, $i(x_l) = 2$, e $i(x_j) = 3$ para $1 \leq j \leq l - 1$. Pelo Lema 3.4,

existe um subgrafo induzido G' de G contendo x_l e isomorfo a G_1 ou G_2 , e existem $x', y' \in V(G')$ tais que $i_{G'}(x_l, \{x', y'\}) = 2$ e $I_g(x', y') \subseteq I_g(u, v)$. Assuma sem perda de generalidade que $d(x_l, y') = 2$, e seja $\{a, b\} = V(G') \setminus \{x_l, x', y'\}$. Temos que $i(x') \leq 1$ e $i(y') \leq 1$, porque $I_g(x', y') \subseteq I_g(u, v)$. Além disso, como $a, b \in I_g(x', y')$, segue que $a, b \in I_g(u, v)$ e, portanto, também temos $i(a) \leq 1$ e $i(b) \leq 1$. Como $ax_l b$ é um caminho monofônico, $i(a)$ e $i(b)$ não podem ser ambos iguais a zero. Assuma $i(a) = 1$. Então, pelo Lema 3.1, temos que $i(b) = 1$.

Se $i(x_0) < 2$, então todas as hipóteses da Afirmação 1 estão satisfeitas para os vértices $x_0, x_1, \dots, x_l, a, b, x', y'$. Portanto, $l = 2$, $z = x_1$, e ao menos uma das seguintes condições é verdadeira: $G(x') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, x'\}]$ é isomorfo a F_3 , ou $G(y') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, y'\}]$ é isomorfo a F_3 . O lema segue neste caso tomando G^*, x, y como $G(x'), x', x_0$ ou $G(y'), y', x_0$. Podemos observar analisando o grafo F_3 que os itens de (i) a (vi) valem, e que o item (vii) também vale pelo fato de que $i(a) = i(b) = 1$.

Se $i(x_0) = 2$ então, usando novamente o Lema 3.4, existe um subgrafo induzido G'' de G contendo x_0 e isomorfo a G_1 ou G_2 , e existem $x'', y'' \in V(G'')$ tais que $i_{G''}(x_0, \{x'', y''\}) = 2$ e $I_g(x'', y'') \subseteq I_g(u, v)$. Assuma sem perda de generalidade que $d(x_0, y'') = 2$, e seja $\{a', b'\} = V(G'') \setminus \{x_0, x'', y''\}$. Raciocinando da mesma maneira como no parágrafo anterior, temos que $i(x'') \leq 1$, $i(y'') \leq 1$, $i(a') = 1$ e $i(b') = 1$. Agora, todas as hipóteses da Afirmação 2 estão satisfeitas para os vértices $x_0, x_1, x_2, a, b, a', b', x', y', x'', y''$. Então ao menos uma das seguintes condições é verdadeira: $G(y') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, y'\}]$ é isomorfo a F_3 , ou $G(y'') = G[\{x_0, x_1, x_2, a', b', y''\}]$ é isomorfo a F_3 . O lema segue tomando G^*, x, y como $G(y'), y', x_0$ ou $G(y''), y'', x_2$. Assim como no caso anterior, todos os itens do lema estão satisfeitos. Isso conclui a prova da base de indução.

Passo de Indução: $k > 3$.

Lembremos que $i(x_0) \leq k - 1$, $i(x_l) = k - 1$ e $i(x_j) = k$ para $1 \leq j \leq l - 1$. Usando indução no vértice x_l , existe um subgrafo induzido G' de G e existem $x, y \in V(G')$ tais que: (i) G' é isomorfo a F_{k-1} ; (ii) $x_l \in V(G')$; (iii) $i_{G'}(x_l, \{x, y\}) = k - 1$; (iv) $d(x, y) = 2$; (v) $d(x, x_l) = k - 1$; (vi) $d(y, x_l) = k - 3$; (vii) $I_g^-(x, y) \subseteq I_g^-(u, v)$.

Sejam $a, b, x', y' \in V(G') \setminus \{x, y\}$ tais que $i_{G'}(a, \{x, y\}) = i_{G'}(b, \{x, y\}) = k - 2$ e $i_{G'}(x', \{x, y\}) = i_{G'}(y', \{x, y\}) = k - 3$. Então $d(x, x') = d(x, y') = k - 3$ e $d(y, x') = d(y, y') = k - 5$. Como $I_{G'}^-(\{x, y\}) \subseteq I_G^-(\{u, v\})$, $i(a) \leq i_{G'}(a, \{x, y\})$ e $i(b) \leq i_{G'}(b, \{x, y\})$. Portanto, $i(a) \leq k - 2$ e $i(b) \leq k - 2$. Mas como x_l pertence a um caminho geodético entre a, b e $i(x_l) = k - 1$, os índices $i(a)$ e $i(b)$ não podem ser ambos estritamente menores que $k - 2$. Podemos então assumir sem perda de generalidade que $i(a) = k - 2$. Além disso, usando argumento semelhante àquele usado para os vértices a e b , temos que $i(x') \leq i_{G'}(x', \{x, y\})$ e $i(y') \leq i_{G'}(y', \{x, y\})$. Assim, isso é fácil ver que $i(x') < k - 1$ e $i(y') < k - 1$.

Se $i(x_0) < k - 1$ então as hipóteses da Afirmação 1 estão satisfeitas para os vértices $x_0, x_1, \dots, x_l, a, b, x', y'$. Assim, $l = 2$, $z = x_1$ e $G(x') = G[x_0, x_1, x_2, a, b, x']$ é isomorfo a F_3 ou $G(y') = G[x_0, x_1, x_2, a, b, y']$ é isomorfo a F_3 . Assuma que $G(x')$ seja isomorfo a F_3 (a prova para o caso $G(y')$ usa os mesmos argumentos). Observe que $d(x', z) = 3$. Considere o caminho $R : r_0 r_1 \dots r_{k-1}$ em G' tal que $r_0 = x$, $r_{k-3} = x'$, $r_{k-2} \in \{a, b\}$, $r_{k-1} = x_2$ e $i_{G'}(r_t, \{x, y\}) = t$ para $0 \leq t \leq k - 1$. Note que o caminho zR é geodético, pois $d(x', z) = 3$ e não existe aresta $x'r_j$ para $j \in \{0, \dots, k - 4\}$ (caso contrário G contém um buraco). Então podemos concluir que $d(x, z) = k$. Além disso, x_0 não é adjacente a qualquer vértice em $\{r_0, \dots, r_{k-4}\}$, caso contrário $d(x, z) < k$. Aplicando o mesmo argumento a um caminho $Q : q_0 q_1 \dots q_{k-3}$ de $q_0 = y$ a $q_{k-3} = x_2$ em G' passando por $q_{k-5} = x'$, concluímos que $d(y, z) = k - 2$. Seja G^* o subgrafo induzido por $V(G') \cup \{x_0, z\}$. Usando argumento semelhante àquele usado para o vértice x' , é fácil verificar que y' não é adjacente a ambos x_0 e z . Portanto, G^* é isomorfo a F_k e satisfaz as condições (ii) a (vii) do lema.

Considere agora o caso $i(x_0) = k - 1$. Podemos aplicar a hipótese de indução novamente em x_0 . Então existe um subgrafo induzido G'' de G e existem vértices $\bar{x}, \bar{y} \in V(G'')$ tais que: (i) G'' é isomorfo a F_{k-1} ; (ii) $x_0 \in V(G'')$; (iii) $d(\bar{x}, \bar{y}) = 2$; (iv) $d(\bar{x}, x_0) = k - 1$; (v) $d(\bar{y}, x_0) = k - 3$; (vi) $I_{G''}^-(\{\bar{x}, \bar{y}\}) \subseteq I_G^-(\{u, v\})$. Similarmente como acima, sejam $a', b', x'', y'' \in V(G'') \setminus \{\bar{x}, \bar{y}\}$ tais que $i_{G''}(a', \{\bar{x}, \bar{y}\}) = i_{G''}(b', \{\bar{x}, \bar{y}\}) = k - 2$ e $i_{G''}(x'', \{\bar{x}, \bar{y}\}) = i_{G''}(y'', \{\bar{x}, \bar{y}\}) = k - 3$. Então $d(\bar{x}, x'') = d(\bar{x}, y'') = k - 3$ e $d(\bar{y}, x'') = d(\bar{y}, y'') = k - 5$. Usando exatamente os mesmos argumentos usados acima para a, b, x', y' , podemos inferir $i(a') = k - 2$, $i(b') \leq k - 2$, $i(x'') < k - 1$ e $i(y'') < k - 1$. Portanto, as hipóteses da Afirmação 2 estão satisfeitas para $x_0, x_1, \dots, x_l, a, b, a', b', x', x'', y', y''$, e assim $G(y') = G[\{x_0, x_1, x_2, a, b, y'\}]$ ou $G(y'') = G[\{x_0, x_1, x_2, a', b', y''\}]$ é isomorfo a F_3 . A parte final da prova segue os mesmos argumentos usados acima, para cada um desses subgrafos. Assim, pelo menos um dentre $G^* = G[V(G') \cup \{x_0, z\}]$ e $G^{**} = G[V(G'') \cup \{x_2, z\}]$ é isomorfo a F_k e satisfaz as condições (ii) a (vi) do lema. Isso conclui a prova. \square

Teorema 3.6. *Para um grafo em \mathcal{DH} e $k \geq 2$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $H_g(\{u, v\}) = I_g^k[\{u, v\}]$ para quaisquer vértices u e v de G .
- (ii) G não contém F_{k+1} como subgrafo induzido.

Prova. (\Rightarrow) Assuma por contradição que (i) é válida e G contém um subgrafo induzido G' isomorfo a F_{k+1} . Assuma que $i_{G'}(z, \{x, y\}) = k + 1$ para certos vértices $z, x, y \in V(G')$. Pela construção de F_{k+1} , podemos assumir $d(x, y) = 2$, $d(x, z) = k + 1$ e $d(y, z) = k - 1$. Como (i) é válida, $i_G(z, \{u, v\}) = j \leq k$, para todo par de vértices $u, v \in V(G)$. Pelo Lema 3.7, existe um subgrafo induzido G'' isomorfo a F_j e contendo um vértice z tal que:

$$i_{G''}(z, \{x', y'\}) = j, \quad d(x', y') = 2, \quad d(x', z) = j, \quad d(y', z) = j - 2,$$

$$\text{e } I_g^-(x', y') \subseteq I_g^-(x, y),$$

para algum par de vértices distintos $x', y' \in V(G'')$.

Seja $x'' \in V(G'')$ tal que $i_{G''}(x'', \{x', y'\}) = 1$. Então $i_G(x'', \{x, y\}) = 1$, e como $d(x, y) = 2$, temos que

$$d(x, x'') = d(y, x'') = d(x', x'') = d(y', x'') = 1.$$

Pela construção de F_j , x'' pertence a um caminho geodético entre x' e z . Portanto,

$$d(x', z) = j = d(x', x'') + d(x'', z) = d(x, x'') + d(x'', z) \geq d(x, z) = k + 1,$$

o que é uma contradição, uma vez que $j \leq k$.

(\Leftarrow) Agora, assumamos que (ii) é válida. Isso implica que G não contém vértices distintos z, u, v com $i_G(z, \{u, v\}) = k + 1$, caso contrário, pelo Lema 3.7, existiria um subgrafo induzido de G isomorfo a F_{k+1} . Portanto, (i) é válida. \square

Corolário 3.6. *Para $G \in \mathcal{DH}$ e $k \geq 2$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $H_g(S) = I_g^k[S]$ para todo $S \subseteq V(G)$.

(ii) G não contém F_{k+1} como subgrafo induzido.

Prova. Segue do Lema 3.6 e do Teorema 3.6. \square

Voltando ao problema original do número de iteração geodético, podemos concluir facilmente o seguinte resultado:

Teorema 3.7. *Seja $G^k \in \mathcal{DH}$ um grafo não nulo com número mínimo de vértices, tal que $gin(G^k) = k$. Então $|V(G^0)| = 1$, $|V(G^1)| = 3$, $|V(G^2)| = 5$ e $|V(G^k)| = 2k$, para $k \geq 3$.*

Prova. Para G^0 , G^1 e G^2 seguem do Teorema 3.1. Agora no caso de G^k com $k \geq 3$, temos pelo Corolário 3.6 que G^k contém F_k . Então, como G^k é mínimo em número de vértices, podemos concluir que G^k é isomorfo a F_k . Logo, por construção, $|V(G^k)| = |V(F_k)| = 2k$, para $k \geq 3$. \square

Teorema 3.8. *Seja $G \in \mathcal{DH}$, então podemos identificar $gin(G)$ em $\mathcal{O}(m.n^4)$.¹*

Prova. Como já mencionamos no Capítulo 2, o fecho g -convexo para um $W \subseteq V(G)$ pode ser computado em $\mathcal{O}(m.n.k)$, onde k é o número de iteração geodético de G . Pelo Corolário 3.6, poderíamos aplicar o fecho para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ para verificar a existência de algum dos subgrafos induzidos G_1 , G_2 ou F_k , para $k \geq 3$. Com $W = \{u, v\}$ e como $k \leq n$, temos que o fecho g -convexo de W pode ser computado em $\mathcal{O}(m.n^2)$. Portanto, aplicando a todo par de vértices de G , temos que $gin(G)$ pode ser identificado em $\mathcal{O}(m.n^4)$. \square

Além disso, destacamos um resultado interessante para os cografos. Uma caracterização importante para essa classe de grafos é que não possui P_4 como subgrafo induzido. Portanto, também não possui F_4 como subgrafo induzido. Assim:

Corolário 3.7. *Se G é um cografo então $gin(G) \leq 3$.*

¹Para mais esclarecimento sobre a notação \mathcal{O} sugerimos o APÊNDICE A.

4 CONJUNTO ESTRELA-CONVEXO EM GRAFOS

Na Seção 2.1 apresentamos a definição de conjunto estrelado. Existem diversas aplicações para essa definição, como, por exemplo, no **Problema da Galeria de Arte**, também conhecido como **Problema do Museu**, que consiste em alocar o menor número de sentinelas de modo que cubram toda a região, no sentido de que toda parte da galeria esteja no campo de visão de algum sentinela (O'ROURKE, 1987). Outra aplicação está relacionada à **segmentação de imagens**, que consiste na divisão de uma imagem em regiões de interesse; esse processo é importante em diversas áreas, tais como análise de imagens médicas e edição de imagens (RUEDA, 2007)(GULSHAN et al., 2010). Existem também outros problemas interessantes de visibilidade associados ao problema de segmentação (O'ROURKE, 1993)(GHOSH, 2007).

Em alguns artigos, um conjunto estrelado também é chamada de **conjunto estrela-convexo** (“*star-convex set*”) ou domínio estrela (“*star domain*”). Definiremos conjunto estrela-convexo em grafos utilizando segmentos convexos entre pares de vértices, e mostraremos algumas propriedades para essa definição. É importante ressaltar que nem todo conjunto estrela-convexo é convexo, embora a recíproca seja

verdadeira. Existem alguns estudos que tentam mostrar em que casos isso acontece. Por exemplo, alguns resultados para \mathbb{R}^2 que caracterizam os conjuntos estrelados que são conjuntos convexos; veja por exemplo (BREEN, 1989), (BREEN; ZAMFIRESCU, 1987) e (TORANZOS; CUNTO, 2004). Utilizaremos os resultados do capítulo anterior com esse mesmo propósito, mas com as definições que veremos a seguir.

Para alguns termos desta seção sugiremos uma leitura do APÊNDICE A, caso seja necessário.

4.1 Definições e Exemplos

Assim como na Seção 2.1, chamaremos um conjunto $W \subseteq V(G)$ de **geodeticamente estrelado** (g -estrelado) no vértice u se para todo $v \in W$ temos que $I_g(u, v) \subseteq W$. Diremos que um vértice u **enxerga** v em W , ou v é **visto** por u em W , quando existe algum uv -geodético em G constituído apenas por vértices de W . Diremos que u **enxerga o conjunto** W se u enxerga todos os vértices de W . De forma análoga, diremos que um vértice u **enxerga totalmente** v em W , ou v é **visto totalmente** por u em W , se $I_g(u, v) \subseteq W$. Então, por definição, se um vértice $u \in W$ enxerga totalmente W , então u é chamado de **vértice geodeticamente central** de W . O conjunto constituído por todos os vértices geodeticamente centrais de W será chamado de **núcleo geodético** de W , denotado por $Ker_g(W)$. Na sequência, definimos:

Definição 4.1. *Um conjunto W é **geodeticamente estrela-convexo** (E_g -convexo) se existe um vértice geodeticamente central $u \in W$ tal que $H_g(\{u, v\}) \subseteq W$, para cada $v \in W$.*

Se um conjunto W é E_g -convexo, onde $Ker_g(W)$ é g -convexo, dizemos que W é um conjunto **geodeticamente estrela-convexo de Brunn** (E_g -convexo de Brunn), pois satisfaz a propriedade de Brunn.

Na Figura 4.1 temos exemplos que mostram a diferença entre as definições citadas e conjuntos g -convexos. Em (i) temos um conjunto g -estrelado $W_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{14}\}$ com $Ker_g(W_1) = \{v_1, v_9, v_{10}\}$; em (ii) um conjunto E_g -convexo $W_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{14}\}$ com $Ker_g(W_2) = \{v_1, v_9, v_{10}\}$; em (iii) um conjunto E_g -convexo de Brunn $W_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{14}\}$ com $Ker_g(W_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$; em (iv), com todos os vértices, temos um conjunto g -convexo, que é um conjunto E_g -convexo de Brunn.

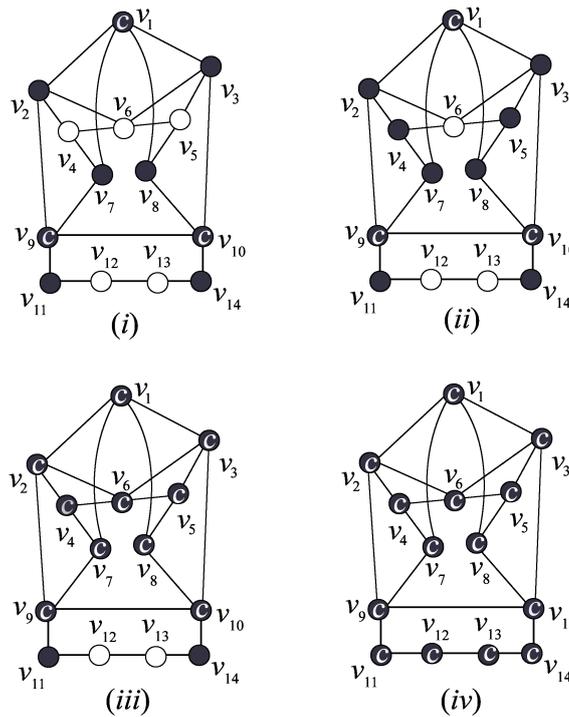


Figura 4.1: Exemplos para algumas definições dadas neste capítulo.

Por definição, temos que um conjunto E_g -convexo é um conjunto g -estrelado. Um outro fato importante é que todo conjunto g -convexo é E_g -convexo, assim como

também é g -estrelado. No entanto, a recíproca não é verdadeira para grafos em geral. Então, para não nos restringirmos apenas a árvores, mostramos o teorema a seguir:

Teorema 4.1. *Se G é um grafo Ptolemaico sem diamantes como subgrafos induzidos, todo conjunto E_g -convexo em G é g -convexo.*

Prova. Seja G um grafo Ptolemaico sem diamantes como subgrafos induzidos. Considere que exista um subconjunto de vértices E_g -convexo S em G tal que S não seja g -convexo. Então existe um vértice u em S tal que $H_g(S) \neq \bigcup\{H_g(\{u, v\}) : v \in S \setminus \{u\}\}$. Assim, podemos garantir que existe um vértice w em $H_g(S)$ tal que $w \notin \bigcup\{H_g(\{u, v\}) : v \in S \setminus \{u\}\}$. Mas como G é Ptolemaico, pelo Teorema 2.8 temos que $G \in \mathcal{I}_2^1$, e pelos Teoremas 2.3 e 3.4, temos que G está em \mathcal{H} . Assim:

$$H_g(S) = \bigcup\{H_g(\{x, y\}) : x, y \in S\} = \bigcup\{I_g(x, y) : x, y \in S\}.$$

Portanto, existe um par de vértices a e b em S tais que $w \in I_g(a, b)$. Considere $u' \in I_g(u, a) \cap I_g(u, b)$ tal que a soma $d(u', a) + d(u', b)$ seja mínima. Desta forma, temos três caminhos disjuntos $P_{u'a}$, $P_{u'b}$ e P_{ab} , onde $P_{ab} : a \dots w_a w w_b \dots b$. Com isso, temos as seguintes relações entre distâncias:

$$d(u', w) + d(w, a) > d(u', a);$$

$$d(u', w) + d(w, b) > d(u', b).$$

Assim, pelo Lema 3.2, $P_{u'a} \setminus \{a\}$ contém um vértice x tal que $w_a w w_b x w_a$ é um ciclo. Impossível, pois G é um grafo Ptolemaico sem diamantes como subgrafos induzidos. \square

Pela prova do teorema anterior, é fácil observar que a hipótese do mesmo é válida para conjuntos g -estrelados. Então:

Corolário 4.1. *Se G é um grafo Ptolemaico sem diamantes como subgrafos induzidos, todo conjunto g -estrelado em G é g -convexo.*

4.2 Problemas, Algoritmos e Complexidade

Nesta seção apresentaremos algoritmos relacionados às definições citadas anteriormente, e analisaremos suas complexidades. Nosso primeiro passo é construir um algoritmo que, dados um vértice u e um subconjunto de vértices W , verifica se u enxerga todos os vértices de W (i.e., enxerga W). Considerando $D(G)$ a matriz de distâncias de G , a descrição dos passos deste algoritmo é simples. Basta construir a matriz de distâncias $D(G[W])$ e verificar se as distâncias a partir de u em $D(G[W])$ são idênticas às distâncias a partir de u em $D(G)$.

Proposição 4.1. *Dados G um grafo conexo, W um subconjunto de vértices de G e um vértice $u \in W$, podemos verificar em tempo $\mathcal{O}(n^3)$ se u enxerga W .*

Prova. Basta aplicar o Algoritmo de Floyd (FLOYD, 1962) para construir $D(G)$ e $D(G[W])$, o que possui um custo $\mathcal{O}(n^3)$. Em seguida, em tempo linear, podemos verificar se as distâncias a partir de u em G ou $G[W]$ são as mesmas, comparando as linhas correspondentes a u nas duas matrizes. Portanto, temos um tempo total $\mathcal{O}(n^3)$. É óbvio que o algoritmo funciona, já que responde afirmativamente que u enxerga W quando u mantém as mesmas distâncias em G e $G[W]$. Logo, vale a proposição. \square

Com o mesmo raciocínio, podemos verificar se um vértice u é central em W : basta construir $D(G[W])$ e, além de verificar se u enxerga W , verificar se $I_g(u, v) \subseteq W$

para todo $v \in W$. Repare que o tempo de execução permanece inalterado, isto é, $\mathcal{O}(n^3)$.

Proposição 4.2. *Dados G um grafo conexo e W um subconjunto de vértices de G , podemos identificar em tempo $\mathcal{O}(n^3)$ os vértices geodeticamente centrais de W , caso haja algum.*

Prova. Basta identificar vértices centrais para todo $u \in W$. Como vimos na Proposição 4.1, podemos construir $D(G)$ e $D(G[W])$ em tempo $\mathcal{O}(n^3)$. Podemos comparar as duas matrizes assim como na proposição anterior em tempo $\mathcal{O}(n \cdot |W|)$. Logo podemos verificar os vértices centrais em tempo $\mathcal{O}(n^3 + n \cdot |W|) = \mathcal{O}(n^3)$. \square

Com algumas modificações apropriadas no procedimento do algoritmo acima, podemos verificar em tempo polinomial se um dado conjunto finito W é estrelado, E_g -convexo ou E_g -convexo de Brunn.

Proposição 4.3. *Dados G um grafo conexo e W um subconjunto de vértices de G , podemos verificar em tempo polinomial se W é E_g -convexo.*

Proposição 4.4. *Dados G um grafo conexo e W um subconjunto de vértices de G , podemos verificar em tempo polinomial se W é E_g -convexo de Brunn.*

No entanto, até o momento, apenas estamos verificando para um dado subconjunto de vértices se ele satisfaz alguma propriedade, e determinando o seu núcleo. Se quisermos ir além, podemos, por exemplo, formular questões do tipo: dado um subconjunto de vértices qualquer, é possível encontrar o menor conjunto g -estrelado ou E_g -convexo (de Brunn) que o contém em tempo polinomial? Sabemos que, para conjuntos g -convexos, esta questão pode ser resolvida em tempo polinomial, pois, como já mencionamos, podemos computar o fecho g -convexo em tempo $\mathcal{O}(m \cdot n)$. Considere então as seguintes variantes de problemas de conectividade entre vértices:

Problema 4.1. CONJUNTO GEODETICAMENTE ESTRELADO - CGE

Instância: Grafo conexo G , subconjunto de vértices W de G e um inteiro k positivo.

Pergunta: Existe um conjunto estrelado que contém W com no máximo k vértices?

Problema 4.2. CONJ. GEODETICAMENTE ESTRELA-CONVEXO - CGEC

Instância: Grafo conexo G , subconjunto de vértices W de G e um inteiro k positivo.

Pergunta: Existe um conjunto E_g -convexo que contém W com no máximo k vértices?

Problema 4.3. CONJUNTO GEODETICAMENTE ESTRELA-CONVEXO DE BRUNN - CGECB

Instância: Grafo conexo G , subconjunto de vértices W de G e um inteiro k positivo.

Pergunta: Existe um conjunto E_g -convexo de Brunn que contém W com no máximo k vértices?

Todos os problemas de decisão acima citados são \mathcal{NP} -completos, como mostramos nos teoremas a seguir. Mas antes considere o seguinte problema:

Problema 4.4. COBERTURA EXATA POR 3-CONJUNTOS - X3C

Instância: Um conjunto finito X com $|X| = 3q$ e uma coleção \mathcal{C} de subconjuntos de X com 3 elementos cada, isto é; $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$, $C_i \subseteq X$, $|C_i| = 3 \forall 1 \leq i \leq n$.

Pergunta: A coleção \mathcal{C} contém uma *cobertura exata* para X , isto é, uma subcoleção $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que todo elemento de X ocorre em exatamente um membro de \mathcal{C}' ?

Note que se \mathcal{C}' é uma subcoleção para a qual a instância $\langle X, \mathcal{C} \rangle$ de X3C produz resposta ‘sim’ então:

- os membros da coleção \mathcal{C}' formam uma partição do conjunto X ;
- $|\mathcal{C}'| = q$.

Esse problema é conhecido por ser \mathcal{NP} -completo (GAREY; JOHNSON, 1990). Assim, provaremos que CGE é \mathcal{NP} -completo reduzindo X3C para CGE.

Teorema 4.2. *O problema CGE é \mathcal{NP} -completo.*

Prova. Pela Proposição 4.2 podemos identificar vértices centrais, caso estes existam, num conjunto dado. Então, podemos verificar em tempo polinomial se um dado conjunto é estrelado. Logo problema está em \mathcal{NP} .

Seja $\langle X, \mathcal{C} \rangle$ uma entrada genérica para a qual se deseja verificar se existe uma cobertura exata por 3-conjuntos¹, onde X é um conjunto finito de tamanho $3q$ e \mathcal{C} uma coleção $\{C_j\}$ de 3-conjuntos de X , para $1 \leq j \leq n'$. Façamos a construção de um grafo G da seguinte maneira:

1. Defina o conjunto de vértices $V(G)$:

$$V(G) = \{v_{ij}, u_{ii} \mid x_i \in C_j\} \cup \{x, x', x'', y, y', y'', z, z', z''\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\} \cup \{c_1, \dots, c_{n'}, c'\} \cup \{r_1, \dots, r_{3q}\}.$$

2. Defina o conjunto de arestas $E(G)$:

$$E(G) = \{x_i u_{ii}, u_{ii} r_i, r_i x', r_i y', r_i z' \mid 1 \leq i \leq 3q\} \cup \{x_i v_{ij}, v_{ij} c_j \mid x_i \in C_j\} \cup \{c' x'', c' y'', c' z'', x x', y y', z z', x x'', y y'', z z''\} \cup \{c_i c_j \mid 1 \leq i, j \leq n' \text{ e } i \neq j\} \cup \{c_j c' \mid 1 \leq j \leq n'\}.$$

3. Defina $W = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}, x, y, z\}$.

4. Defina $k = 7(q + 1)$.

¹Uma cobertura por conjuntos de cardinalidade 3.

Repare que os vértices $\{c_1, \dots, c_{n'}, c'\}$ formam uma clique de tamanho $n' + 1$ em G , e que também temos as seguintes distâncias em G : $d(x_i, x) = d(x_i, y) = d(x_i, z) = 4$; $d(x_i, c_j) = 2$, se $x_i \in C_j$, e $d(x_i, c_j) = 3$, caso contrário. Veja na Figura 4.2 o grafo resultante.

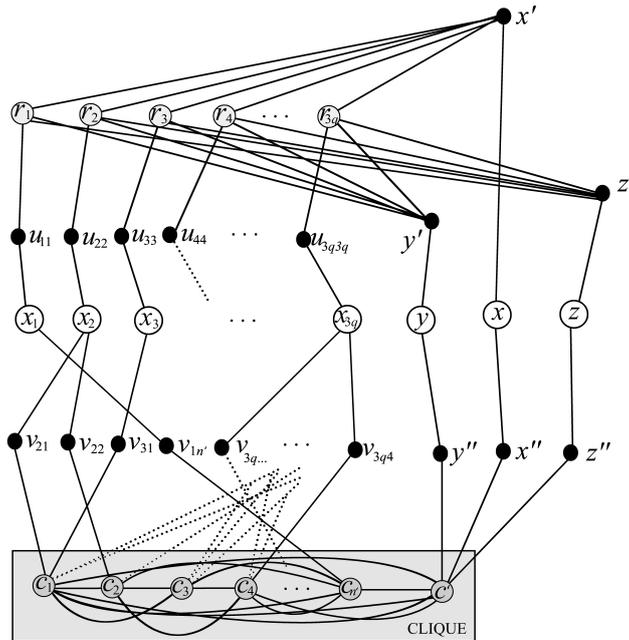


Figura 4.2: Grafo G resultante da redução.

Primeiramente, vamos mostrar que não há como conectar os vértices de W com menos do que $7(q+1)$ vértices. Repare que $|W| = 3q+3$. Não é possível conectar os vértices de W utilizando apenas os vértices do conjunto $N[W]$, pois pela construção de G , temos que $\bigcap\{N[u] : u \in W\} = \emptyset$. Assim, para alcançar os vértices de W é necessário passar por $3q+3$ vértices, totalizando até o momento $6q+6$ vértices necessários para conectar W . No entanto, mesmo assim, temos um subgrafo induzido desconexo com $3q+3$ componentes conexas que são isomorfas a K_2 . Para conectar os vértices de $W \setminus \{x, y, z\}$, devemos escolher no mínimo q vértices c_i mais o vértice c' para conectar os vértices $\{x, y, z\}$, já que esses vértices já estão conectados por formarem uma clique. Assim, conseguiremos conectar os vértices de W com $7(q+1)$

vértices. Claro que, para $W \setminus \{x, y, z\}$, a melhor conexão é feita com os vértices c_i ; no entanto, ao retirarmos c' e substituí-lo por algum r_j para conectar $\{x, y, z\}$ ao resto do conjunto, teremos uma nova conexão para W com $7(q+1) + 1$ vértices. Logo, não conseguiremos conectar com menos do que $7(q+1)$ vértices.

Agora, mostraremos que existe um conjunto estrelado que contém W com no máximo $7(q+1)$ vértices se e somente se X possui uma cobertura exata em \mathcal{C} .

(\Rightarrow) Suponha que $\langle X, \mathcal{C} \rangle$ gera uma resposta ‘sim’ para o problema X3C, isto é, \mathcal{C} contém uma cobertura exata para X . Então podemos escolher exatamente q vértices c_j correspondentes a essa cobertura G que conecta $W \setminus \{x, y, z\}$ com $7q$ vértices. Então, com os vértices $\{c', x, x'', y, y'', z, z''\}$ conseguimos conectar W . Como os conjuntos C_i da cobertura são disjuntos, temos que $d(x_i, c_j) = 2$, se $x_i \in C_j$ em \mathcal{C} , e $d(x_i, c_j) = 3$, caso contrário. Além disso, temos que $d(x_i, x_j) = 4$ ou $d(x_i, x_j) = 5$ em G . Tal distância igual a 5 também ocorre nos caminhos dos vértices x_i a qualquer vértice do conjunto $\{x, y, z\}$. Logo, temos um conjunto estrelado com $7(q+1)$ vértices, onde o núcleo desse conjunto é constituído pelos vértices $V(G) \setminus W$.

(\Leftarrow) Suponha que $\langle G, W, k \rangle$ gera uma resposta ‘sim’ para o problema CGE; então, em G , para o dado conjunto W , temos que existe um conjunto estrelado que contém W com no máximo $7(q+1)$ vértices. Como já discutimos acima, com menos do que $7(q+1)$ não conseguimos conectar W . Logo, são necessários exatamente $7(q+1)$ vértices. Além disso, para conectá-los, vimos que são necessários q vértices c_j . Mas estes q vértices c_j são conectados aos vértices x_i passando por v_{ij} . Então, pelo modo como construímos o grafo G , temos que $x_i \in C_j$, para todo $1 \leq i \leq 3q, 1 \leq j \leq n$. Logo temos uma cobertura exata para X em \mathcal{C} .

Logo, pelo resultado acima, podemos concluir que o problema é \mathcal{NP} -completo. \square

Corolário 4.2. *O problema CGEC é \mathcal{NP} -completo.*

Prova. Pela Proposição 4.3 temos que o problema está em \mathcal{NP} . Pela redução do Teorema 4.2, temos que se S é um conjunto estrelado que contém W com $7(q+1)$ vértices, então existe uma cobertura exata. Além disso, $Ker_g(S) = \{c_j : \forall C_j \in \mathcal{C}'\} \cup \{c'\}$, onde \mathcal{C}' é a subcoleção de \mathcal{C} formada pela cobertura exata de X . Então $H_g(\{x_i, c_j\}) = \{x_i, v_{ij}, c_j\}$ e $H_g(\{c_j, c_l\}) = \{c_j, c_l\}$. Portanto, a redução também mostra que o problema CGEC é \mathcal{NP} -completo. \square

Corolário 4.3. *O problema CGECB é \mathcal{NP} -completo.*

Prova. Usando a Proposição 4.4, a redução do Teorema 4.2, o Corolário 4.2 e o fato de os c_j 's com o vértice c' formam uma clique, temos que o problema CGECB é \mathcal{NP} -completo. \square

4.3 Conjunto Multi-Estrela-Convexo e Árvore de Steiner

Definição 4.2. *Um subconjunto de vértices W de G é **geodeticamente multi-estrelado em relação a W'** , para $W' \subseteq W$, se W é conexo e todo vértice $v \in W$ é visto totalmente por algum vértice $u \in W'$, isto é, para todo $v \in W$ existe algum vértice $u \in W'$ tal que $I_g(u, v) \subseteq W$.*

O conjunto W' é um **multi-núcleo geodético** de W , e denotado por $\mathcal{MKer}_g(W)$, se W' é mínimo com propriedades da definição acima. Analogamente, temos:

Definição 4.3. *Um conjunto W é **geodeticamente multi-estrela-convexo** (\mathcal{ME}_g -convexo) em relação a W' se W é conexo e para todo $v \in W$ existe algum $u \in W' = \mathcal{MKer}_g(W)$ tal que $H_g(\{u, v\}) \subseteq W$.*

Definição 4.4. *Seja W um conjunto \mathcal{ME}_g -convexo. Se $\mathcal{MKer}_g(W)$ for g -convexo,*

dizemos que W é *geodeticamente multi-estrela-convexo de Brunn* (\mathcal{ME}_g -convexo de Brunn).

Assim como fizemos no capítulo anterior, analisaremos variantes de problemas de conectividade em grafos baseados nas definições acima. Listamos a seguir estas variantes:

Problema 4.5. CONJ. GEODETICAMENTE MULTI-ESTRELADO - CGME

Instância: Um grafo G conexo, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ e um inteiro k positivo.

Pergunta: Existe um conjunto geodeticamente multi-estrelado (g -multi-estrelado) que contém W com no máximo k vértices?

Problema 4.6. CONJUNTO GEODETICAMENTE MULTI-ESTRELA-CONVE-XO - CGMEC

Instância: Um grafo G conexo, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ e um inteiro k positivo.

Pergunta: Existe um conjunto \mathcal{ME}_g -convexo que contém W com no máximo k vértices?

Problema 4.7. CONJUNTO GEODETICAMENTE MULTI-ESTRELA-CONVE-XO DE BRUNN - CGMECB

Instância: Um grafo G conexo, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ e um inteiro k positivo.

Pergunta: Existe um conjunto \mathcal{ME}_g -convexo de Brunn que contém W com no máximo k vértices?

Claro que para todas as definições vale que: (i) W é g -estrelado $\Rightarrow W$ é g -multi-estrelado; (ii) W é E_g -convexo $\Rightarrow W$ é \mathcal{ME}_g -convexo; (iii) W é E_g -convexo de Brunn $\Rightarrow W$ é \mathcal{ME}_g -convexo de Brunn.

Teorema 4.3. *CGME é \mathcal{NP} -completo.*

Prova. Se $G[W]$ for conexo, também será g -multi-estrelado, pois poderíamos tomar W' como uma cobertura de vértices para $G[W]$. Então o problema está em \mathcal{NP} . Usaremos novamente X3C para a redução. Construíamos um grafo G da seguinte forma:

1. Defina o conjunto de vértices $V(G)$:

$$V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\} \cup \{c_1, \dots, c_n\};$$

2. Defina o conjunto de arestas $E(G)$:

$$E(G) = \{x_i c_j \mid x_i \in C_j\} \cup \{c_i c_j \mid 1 \leq i, j \leq r \text{ e } i \neq j\};$$

3. Defina $W = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$;

4. Defina $k = 4q$.

O grafo G da redução está na Figura 4.3.

(\Rightarrow) Suponha que $\langle X, \mathcal{C} \rangle$ gera uma resposta ‘sim’ para o problema X3C, isto é, \mathcal{C} contém uma cobertura exata para X . Então podemos escolher exatamente q vértices c_j correspondentes a essa cobertura G que conecta W . Considere W' este conjunto de tamanho q . Como o tamanho de W é $3q$, temos que $G[W \cup W']$ conecta W com $4q$ vértices. É fácil notar que $G[W \cup W']$ é g -multi-estrelado, com W' sendo seu multi-núcleo geodético.

(\Leftarrow) Suponha que $\langle G, W, k \rangle$ gera uma resposta ‘sim’ para o problema CGME; então, em G , para o dado conjunto W , temos que existe um conjunto estrelado que

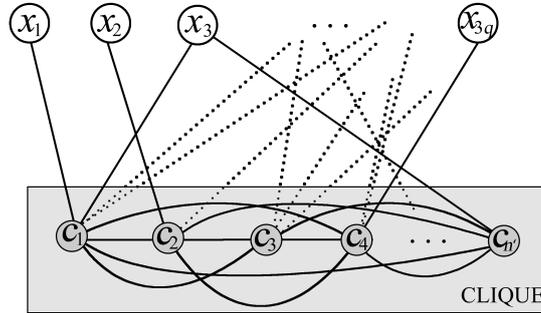


Figura 4.3: Grafo G resultante da redução – Teorema 4.3.

contém W com no máximo $4q$ vértices. Temos que o tamanho de W é $3q$. Então precisamos de $q' \leq q$ vértices de $\{c_j : \forall 1 \leq j \leq n'\}$ para conectar W . Como cada vértice de $\{c_j : \forall 1 \leq j \leq n'\}$ é adjacente a três vértices de W , e como W não induz um subgrafo conexo, temos que são precisos $q' = q$ vértices de $\{c_j : \forall 1 \leq j \leq n'\}$ para conectar W . Seja $C' \subseteq \{c_j : \forall 1 \leq j \leq n'\}$ de tamanho q' que conecta W . Então \mathcal{C}' correspondente a C' é uma cobertura exata.

Logo, pelo exposto acima, podemos concluir que o problema é \mathcal{NP} -completo. \square

A redução acima pode ser facilmente adaptada para os seguintes resultados.

Corolário 4.4. CGMEC é \mathcal{NP} -completo.

Corolário 4.5. CGMECB é \mathcal{NP} -completo.

Na Seção 2.2 introduzimos o problema da árvore de Steiner em grafos. Dado um grafo G e subconjunto de vértices W , uma W -árvore de Steiner é um subconjunto de vértices que contém W , induz num grafo conexo e tem tamanho é mínimo. Além disso, vimos na Seção 2.3 que o intervalo de Steiner $S(W)$ de um subconjunto

de vértices W consiste de todos os vértices que pertencem a alguma W -árvore de Steiner, e o intervalo forte de Steiner, $S[W]$, é o conjunto que contém todos os vértices pertencentes a alguma W' -árvore de Steiner para $W' \subseteq W$. O problema da árvore de Steiner já é conhecido por ser \mathcal{NP} -completo (GAREY; JOHNSON, 1990). No entanto, os problemas referentes ao intervalo de Steiner e ao intervalo forte de Steiner estavam em aberto até o momento. Assim, considere os seguintes problemas:

Problema 4.8. INTERVALO FORTE DE STEINER - SSI

Instância: Um grafo G conexo, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ e um vértice $x \notin W$.

Pergunta: Existe alguma árvore de Steiner para W' contendo x , para $W' \subseteq W$?

Problema 4.9. INTERVALO DE STEINER - SI

Instância: Um grafo G conexo, um subconjunto de vértices $W \subseteq V(G)$ e um vértice $x \notin W$.

Pergunta: Existe alguma árvore de Steiner para W contendo x ?

Teorema 4.4. *O problema SSI é \mathcal{NP} -difícil.*

Prova. Seja $\langle X, \mathcal{C} \rangle$ uma entrada para X3C, com $X = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$. Defina o grafo G como uma instância de SI da seguinte maneira:

- Defina o conjunto de vértices $V(G)$:

$$V(G) = \{x, v, v_1\} \cup \{x_1, \dots, x_{3q}\} \cup \{c_1, \dots, c_n\} \\ \cup \{c'_1, \dots, c'_{3q}\} \cup \{c_{h,k,\ell} \mid 1 \leq h < k < \ell \leq 3q\}$$

- Defina o conjunto de arestas $E(G)$:

$$E(G) = \{vx, v_1x\} \cup \{vc'_i \mid 1 \leq i \leq 3q\} \cup \{v_1c_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{c_ix_j \mid x_j \in C_i\} \\ \cup \{x_j c_{h,k,\ell} \mid j \in \{h, k, \ell\}\} \cup \{c'_i c_{h,k,\ell} \mid i \notin \{h, k, \ell\}\}.$$

- Defina $W = \{v, x_1, \dots, x_{3q}\}$.

Veja o grafo resultante na Figura 4.4. A área em cinza se refere às arestas c_ix_j correspondentes à relação entre conjuntos de \mathcal{C} e elementos de X .

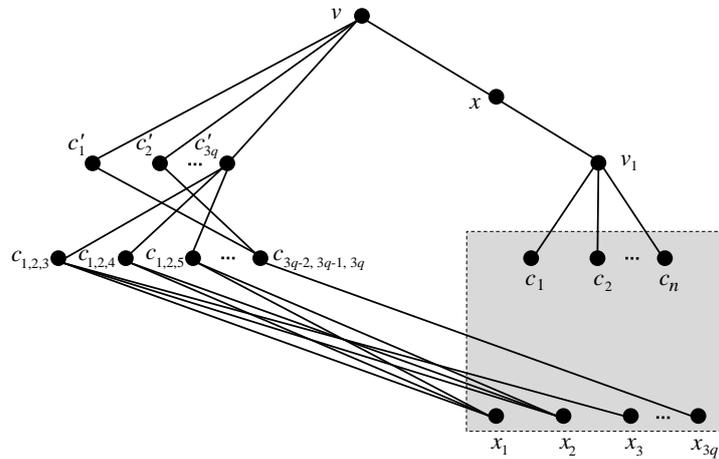


Figura 4.4: Grafo G resultante da redução – Teorema 4.4

Fazemos a seguir algumas observações.

Observação 1: Qualquer subgrafo conexo T de G satisfazendo $W \subseteq V(T)$ deve conter pelo menos $4q + 2$ arestas.

Prova da observação 1: Uma maneira de construir tal subgrafo T consiste nos seguintes passos: (i) particione $\{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ em q subconjuntos de três elementos

cada; (ii) para cada subconjunto Y de (i), selecione um vértice c_Y da forma $c_{h,k,\ell}$ tal que $x_j \in Y$ se e somente se $j \in \{h, k, \ell\}$, com arestas $x_j c_Y$ para todo $x_j \in Y$; (iii) escolha dois vértices c'_r e c'_t tal que nenhum vértice c_Y dos passos anteriores é da forma $\{x_r, x_t\} \subseteq Y$, e conecte cada c_Y a outro c'_r (desde que $x_r \notin Y$) ou c'_t (desde $x_t \notin Y$); (iv) tome as arestas vc'_r e vc'_t . Essa construção produz no mínimo $4q + 2$ arestas. Outra maneira de construção de T consiste em considerar a área cinza da Figura 4.4, havendo $3q$ arestas ligando vértices x_j aos vértices c_i (se \mathcal{C} contém uma cobertura exata) ou no mínimo $3q + 1$ arestas (caso contrário), mais q arestas da forma $v_1 c_i$, mais as arestas vx e $v_1 x$; em qualquer caso, da maneira como o subgrafo T foi construído, temos no mínimo $4q + 2$ arestas. Isso completa a prova da Observação 1.

Observação 2: Seja $W' \subseteq W$ tal que $x_r \notin W'$ para algum r . Então qualquer subgrafo conexo mínimo T' de G com $W' \subseteq V(T')$ satisfaz $x \notin V(T')$.

Prova da Observação 2: Consideramos dois casos.

Caso 1: $v \notin W'$. Então um subgrafo conexo mínimo T' de G satisfazendo $W' \subseteq V(T')$ pode ser construído de duas maneiras:

Caso 1(a): Usando uma construção similar à da Observação 1: (i) particione os vértices de W' em $\lceil \frac{|W'|}{3} \rceil$ subconjuntos; (ii) para cada um desses subconjuntos Y , selecione um vértice c_Y da forma $c_{h,k,\ell}$ tal que $x_j \in Y$ implica $j \in \{h, k, \ell\}$, com arestas $x_j c_Y$ para todo $x_j \in Y$; (iii) finalmente, selecione o vértice c'_r (lembre que $x_r \notin W'$), com arestas da forma $c'_r c_{h,k,\ell}$ para todos os vértices da forma $c_{h,k,\ell}$ selecionados no passo anterior. Isso nos dá um total de $|W'| + \lceil \frac{|W'|}{3} \rceil$ arestas. Note que, nessa construção, $x \notin V(T')$.

Caso 1(b): Escolhendo um subgrafo bipartido apropriado B na área cinza da Fi-

gura 4.4, no qual todo vértice de W' é ligado a um vértice c_i de $V(B) \setminus W'$, mais as arestas v_1c_i para cada $c_i \in V(B) \setminus W'$. Nessa construção, ainda temos que $x \notin V(T')$.

Caso 2: $v \in W'$. Então um subgrafo conexo mínimo T' de G satisfazendo $W' \subseteq V(T')$ pode ser construído pela aplicação da mesma construção apresentada no Caso 1(a) a $W' \setminus \{v\}$, e depois adicionando a aresta vc'_1 . Novamente, note que $x \notin V(T')$. Isso completa a prova da Observação 2.

Agora mostraremos que a entrada $\langle X, \mathcal{C} \rangle$ de X3C produz uma resposta ‘**sim**’ se e somente se a entrada $\langle G, W, x \rangle$ de SI produz uma resposta ‘**sim**’.

(\Rightarrow) Se \mathcal{C} contém uma cobertura exata $\mathcal{C}' = \{C_{i_1}, \dots, C_{i_q}\}$ para X , considere o subgrafo conexo e acíclico T_1 de G induzido pelos vértices $v, x, v_1, c_{i_1}, \dots, c_{i_q}, x_1, \dots, x_{3q}$. Note que $|E(T_1)| = 4q + 2$. Pela Observação 1, T_1 é mínimo, e portanto é uma W -árvore de Steiner. Uma vez que $x \in V(T_1)$, segue que $x \in S(W)$, isto é, $x \in S[W]$.

(\Leftarrow) Por outro lado, se $x \in S[W]$, seja $W' \subseteq W$ tal que x está numa W' -árvore de Steiner T_1 . Pela Observação 2, $\{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\} \subseteq W'$. Se $v \notin V(T_1)$ então x seria vértice pendente em T_1 , contradizendo a “otimalidade” de T_1 . Assim $v \in V(T_1)$, isto é, T_1 é uma W -árvore de Steiner. Pela Observação 1, $|E(T_1)| = 4q + 2$. Desconsiderando as arestas vx, v_1x e v_1c_i ($1 \leq i \leq n$), existem $3q$ arestas em T_1 da forma c_ix_j . Assim, exatamente q vértices de $\{c_1, \dots, c_n\}$ pertencem a $V(T_1)$, isto é, \mathcal{C} contém em cobertura exata para X . \square

Corolário 4.6. SI é \mathcal{NP} -difícil.

Prova. Usando a mesma redução da prova do Teorema 4.4, observamos que: (a) a parte “somente se” da prova nos mostra que se \mathcal{C} contém uma cobertura exata para X então $x \in S(W)$; (b) se $x \in S(W)$ então $x \in S[W]$, e podemos usar a parte “se”

acima para concluir que \mathcal{C} contém uma cobertura exata para X . \square

Nosso objetivo agora é analisar o problema de conjuntos multi-estrelados de tamanho ótimo, no sentido de que o número de vértices seja mínimo. Então, considere o seguinte problema:

Problema 4.10. CONJUNTO MULTI-ESTRELADO ÓTIMO - CMEO

Instância: Um grafo G conexo, subconjunto de vértices W e um vértice $x \notin W$.

Pergunta: Existe algum conjunto multi-estrelado de tamanho mínimo que contém W , onde x pertença a esse conjunto?

Relacionaremos este problema com o problema da árvore de Steiner. Considere uma árvore T . Para uma cobertura de vértices S de $V(T)$, temos que $I_g(u, v) = H_g(u, v)$ para $u \in S$ e $v \in N[u]$. Então, por definição, podemos dizer que $V(T)$ é um conjunto multi-estrelado. Assim, dado um subconjunto de vértices W , encontrar uma árvore de Steiner equivale a encontrar um conjunto multi-estrelado ótimo. A partir deste argumento e do Teorema 4.4, concluímos:

Corolário 4.7. CMEO é \mathcal{NP} -difícil.

Note que esse resultado também seria válido se quiséssemos verificar se x pertence a um conjunto multi-estrelado-convexo de tamanho mínimo que contém W .

5 CONCLUSÃO

Acreditamos que os resultados apresentados neste trabalho atingem os objetivos que nós havíamos proposto no início do doutorado. Destacamos os resultados apresentados no Capítulo 3, que foram reunidos num artigo recentemente submetido para o periódico *Discrete Mathematics*, com o título “*On the Geodetic Iteration Number of Distance-Hereditary Graphs*”.

Embora tenhamos nos dedicado apenas à convexidade geodética, alguns resultados apresentados no Capítulo 3 podem ser estendidos para a convexidade monofônica ou para a convexidade de Steiner, pois dos Teoremas 2.1 e 2.10 segue-se o seguinte resultado:

Teorema 5.1. *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo conexo em \mathcal{DH} e seja $W \subseteq V(G)$. Então $H_g(W) = H_{St}(W) = H_m(W)$.*

No Capítulo 4, abordamos um assunto intrinsecamente relacionado aos espaços de convexidade “*join hull commutative*” e com a propriedade de “*cone-union*”, e isto nos remeteu diretamente a problemas referentes a intervalos de Steiner que havíamos deixado em aberto no trabalho de Mestrado. A resolução destes problemas resultou no artigo intitulado “*Algorithmic aspects of Steiner convexity and enumeration of*

Steiner trees”, que foi recentemente aceito para publicação no periódico *Annals of Operations Research*.

Com relação a trabalhos futuros, propomos buscar uma caracterização por subgrafos proibidos para a classe dos grafos cordais com número de iteração geodético no máximo k . Como vimos, os grafos Ptolemaicos estão precisamente na interseção dos grafos cordais com os grafos de distância hereditária, e para tais grafos os intervalos entre pares de vértices são geodesicamente monótonos pela Proposição 2.3. Assim, procuraremos entender o que acontece com os grafos cordais que não são de distância hereditária.

Até o exato momento, sabemos nem todo grafo cordal está em \mathcal{I}_2^1 ou \mathcal{H} . Considerando um grafo cordal G conforme a Figura 5.1-(i), temos que $i_G(c, \{a, b\}) = 2$. Já na Figura 5.1-(ii), temos que $w \in H_g(\{x, y, z\})$, mas $w \notin H_g(\{x, y\}) \cup H_g(\{x, z\}) \cup H_g(\{y, z\})$.

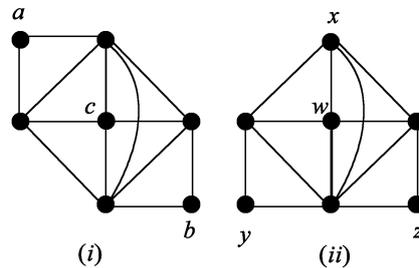


Figura 5.1: Subgrafos proibidos para $\mathcal{Co} \cap \mathcal{I}_2^1$ e $\mathcal{Co} \cap \mathcal{H}$.

Além disso, o número de iteração relacionado às outras convexidades também pode ser uma fonte de pesquisa. Por exemplo, em (BENEVIDES et al., 2013) encontra-se resultados interessantes referentes à complexidade de encontrar o número de iteração máximo associado à convexidade P_3 em algumas classes de grafos. Assim, também propomos para trabalhos futuros uma análise do número de iteração associado à convexidade P_3 e para as outras convexidades geradas por seus respectivos operadores intervalares.

REFERÊNCIAS

BANDELT, H.-J.; MULDER, H. M. Distance-hereditary graphs. **J. Comb. Theory, Ser. B**, v.41, n.2, p.182–208, 1986.

BELLMAN, R. On a Routing Problem. **Quarterly of Applied Mathematics**, v.16, p.87–90, 1958.

BENEVIDES, F.; CAMPOS, V.; DOURADO, M.; SAMPAIO, R.; SILVA, A. The maximum time of 2-neighbour bootstrap percolation: algorithmic aspects. In: NETRIL, J.; PELLEGRINI, M. (Ed.). **The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications**. Scuola Normale Superiore, 2013. p.135–139. (CRM Series, v.16).

BERGER, M. Convexity. **Amer. Math. Monthly**, v.97, n.8, p.650–701, 1990.

BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory With Applications**. 2th.ed. New York, Oxford: North Holland, 1976.

BREEN, M. Unions of three starshaped sets in \mathbb{R}^2 . **Journal of Geometry**, v.36, p.8–16, 1989.

BREEN, M.; ZAMFIRESCU, T. A characterization theorem for certain unions of two starshaped sets in \mathbb{R}^2 . **Geometriae Dedicata**, v.22, 1987.

CÁCERES, J.; A.MÁRQUEZ; PUERTAS, M. Steiner distance and convexity in graphs. **Eur. J. Comb.**, v.29, n.3, p.726–736, 2008.

- CARATHÉODORY, C. Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. **Rend. Circ. Mat. Palermo**, v.32, p.193–217, 1911.
- CHANGAT, M.; MATHEWSS, J. On triangle path convexity in graphs. **Discrete Mathematics**, v.206, n.1-3, p.91–95, 1999.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. The Steiner number of a graph. **Discrete Mathematics**, v.242, p.41 – 54, 2002.
- CHEPOI, V. On starshapedness in products of interval spaces. **Archiv der Mathematik**, v.64, p.264–268, 1995.
- DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. **Numerische Mathematik**, v.1, p.269–271, 1959.
- DOURADO, M. C.; GIMBEL, J. G.; KRATOCHVÍL, J.; PROTTI, F.; SZWARC-FITER, J. L. On the computation of the hull number of a graph. **Discrete Mathematics**, v.309, n.18, p.5668–5674, 2009.
- DUCHET, P. Convexity in combinatorial structures. **Circ. Math. palermo**, v.14, p.261–293, 1987.
- ERDÖS, P.; FRIED, E.; HAJNAL, A.; MILNER, E. Some remarks on simple tournaments. **Algebra Universalis**, v.2, p.238–245, 1972.
- ERDÖS, P.; HAJNAL, A.; MILNER, E. Simple one-point extensions of tournaments. **Mathematika**, v.19, p.57–62, 1972.
- FARBER, M.; JAMISON, R. E. Convexity in graphs and hypergraphs. **SIAM J. Algebraic Discrete Methods**, Philadelphia, PA, USA, v.7, n.3, p.433–444, 1986.
- FLOYD, R. W. Algorithm 97: shortest path. **Communications of the Association for Computing Machinery**, v.5, p.345, 1962.

FORD JR., L. R.; FULKERSON, D. R. **Flows in Networks**. Princeton University Press, 1962.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness**. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1990.

GHOSH, S. **Visibility Algorithms in the Plane**. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007.

GULSHAN, V.; ROTHER, C.; CRIMINISI, A.; BLAKE, A.; ZISSERMAN, A. Geodesic Star Convexity for Interactive Image Segmentation. IEEE CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION. **Proceedings** 2010.

HARARY, F.; NIEMINEN, J. Convexity in graphs. **J. Differential Geom**, v.16, n.2, p.185–190, 1981.

HERNANDO, C.; T. JIANG, M. M.; PELAYO, I.; SEARA, C. On the steiner, geodetic and hull numbers of graphs. **Discrete Mathematics**, v.293, p.139–154, 2005.

HOWORKA, E. A characterization of ptolemaic graphs. **Journal of Graph Theory**, v.5, n.3, p.323–331, 1981.

MOON, J. Embedding tournaments in simple tournaments. **Discrete Math**, v.2, p.389–395, 1972.

NIEMINEN, J. On path- and geodesic-convexity in digraphs. **Glasnik Matematicki**, v.16, p.193–197, 1981.

O'ROURKE, J. **Art gallery theorems and algorithms**. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1987.

O'ROURKE, J. Computational geometry column 18. **Internat. J. Comput. Geom. Appl.**, v.3, n.1, p.107–113, 1993. Also in *SIGACT News* 24:1 (1993), 20–25.

PARVATHY, K. **Studies on Convex Structures with Emphasis on Convexity in graphs**. 1995. Tese de Doutorado — University of Science and Technology of Kochi.

PETERIN, I. The pre-hull number and lexicographic product. **Discrete Mathematics**, v.312, n.14, p.2153–2157, 2012.

PFALTZ, J. Convexity in directed graphs. **J. Combinatorial Theory**, v.10, 1971.

RUEDA, R. **Ferramenta para Segmentação Interativa de Imagens**. 2007. Monografia — Instituto de Matemática e Estatística, USP, São Paulo, SP, Brasil.

SZWARFITER, J. L. **Grafos e algoritmos computacionais**. 2a.ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: CAMPUS, 1984.

SZWARFITER, J.; MARKENZON, L. **Estrutura de Dados e seus Algoritmos**. 3a.ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: LTC, 2010.

TORANZOS, F. A.; CUNTO, A. F. Sets expressible as finite unions of starshaped sets. **Journal of Geometry**, v.79, p.190–195, 2004.

VAN DE VEL, M. **Theory of Convex Structures**. Amsterdam: North Holland, 1993.

VARLET, J. Convexity in tournaments. **Societe Royale des Sciences de Liège**, v.45, p.570–586, 1976.

APÊNDICE A – Algoritmos e complexidade

Por razões de termos usados nesta tese, fez-se necessário essa seção extra para uma breve concepção de algoritmo e métodos de avaliação de tempo de execução do mesmo na resolução de problemas. Para um estudo mais aprofundado sugerimos (SZWARFITER, 1984) e (SZWARFITER; MARKENZON, 2010).

Um **problema** é uma condição que requer uma determinada solução sobre seus parâmetros. Tais parâmetros são chamados de **entradas** do problema e cada entrada em particular é chamada de **instância**. Um **algoritmo** é uma sequência de comandos ou tarefas que *resolve* um problema, isto é, encontra a solução desejada do problema.

Uma forma de avaliar a complexidade de um algoritmo utiliza a chamada **notação** \mathcal{O} . Sejam duas funções f e g reais positivas de variável inteira não negativa η . Diz-se que f é $\mathcal{O}(g)$, ou $f = \mathcal{O}(g)$, quando existir uma constante $c > 0$ e um valor inteiro η_0 tais que:

$$\eta > \eta_0 \Rightarrow f(\eta) \leq c.g(\eta).$$

A notação \mathcal{O} exprime que g limita superiormente f para valores assintóticos de η ($\eta \rightarrow \infty$). Existem duas propriedades importantes para essa notação. Para duas funções reais positivas g e h e uma constante k , temos que:

$$i : \mathcal{O}(g + h) = \mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(h);$$

$$ii : \mathcal{O}(k.g) = k\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(g).$$

Considere um problema onde uma entrada genérica é expressa pela sequência de variáveis $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \rangle$. Dizemos que o problema é **resolvido em tempo linear** se, para qualquer entrada, temos que existe um algoritmo que o resolve com número de passos $\mathcal{O}(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_\ell|)$. Dizemos que o problema é **resolvido em tempo polinomial** se, para qualquer entrada, temos que existe um algoritmo que resolve o problema com número de passos $\mathcal{O}(|\alpha_1|^{k_1} \times |\alpha_2|^{k_2} \times \dots \times |\alpha_\ell|^{k_\ell})$, onde k_1, k_2, \dots, k_ℓ são números reais constantes.

Um **problema de decisão** $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{Q})$ tem como objetivo decidir se uma determinada instância de um conjunto de entradas \mathcal{E} possui uma resposta ‘sim’ ou ‘não’ para uma dada questão \mathcal{Q} , onde \mathcal{Q} é uma propriedade a ser verificada. A classe \mathcal{NP} é a classe de todos os problemas $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{Q})$ para os quais é possível *verificar* qualquer instância ‘sim’ de $I \in \mathcal{E}$ para a questão \mathcal{Q} em tempo polinomial. A classe \mathcal{P} é a classe de todos os problemas de decisão que compreende precisamente os problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial.

Uma **transformação** ou **redução polinomial** de um problema de decisão $\mathcal{P}_1(\mathcal{E}_1, \mathcal{Q}_1)$ ao problema de decisão $\mathcal{P}_2(\mathcal{E}_2, \mathcal{Q}_2)$ é uma função $\phi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$a : \phi \text{ pode ser computada em tempo polinomial};$$

b : para toda instância $I \in \mathcal{E}_1$ do problema \mathcal{P}_1 tem-se: $\mathcal{P}_1(I)$ possui resposta ‘sim’ se e somente se $\mathcal{P}_2(\phi(I))$ possui resposta ‘sim’.

Denota-se $\mathcal{P}_1 \propto \mathcal{P}_2$ para indicar que \mathcal{P}_1 pode ser transformado em tempo polinomial em \mathcal{P}_2 .

Um problema de decisão \mathcal{P} é **\mathcal{NP} -completo** se as seguintes condições são satisfeitas:

- 1: $\mathcal{P} \in \mathcal{NP}$;
- 2: todo problema de decisão $\mathcal{P}' \in \mathcal{NP}$ satisfaz $\mathcal{P}' \propto \mathcal{P}$.

Até o presente momento, desconhecemos qualquer algoritmo polinomial que resolva algum problema \mathcal{NP} -completo, pois isso implicaria que $\mathcal{NP} = \mathcal{P}$.

Se somente a condição (2) da definição de problema \mathcal{NP} -completo for considerada para um problema \mathcal{P} (independente da condição (1)), temos que \mathcal{P} é um problema **\mathcal{NP} -difícil**.