

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ALAN COSTA DE SOUZA

**ANÁLISE NUMÉRICA DA DINÂMICA E
ESTABILIDADE DOS PROBLEMAS DE
DOIS E TRÊS CORPOS**

Rio de Janeiro
2014



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Alan Costa de Souza

**ANÁLISE NUMÉRICA DA DINÂMICA E
ESTABILIDADE DOS PROBLEMAS DE DOIS
E TRÊS CORPOS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



Instituto de Matemática



Instituto Tércio Pacitti de Aplicações
e Pesquisas Computacionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ALAN COSTA DE SOUZA

**ANÁLISE NUMÉRICA DA DINÂMICA E
ESTABILIDADE DOS PROBLEMAS DE
DOIS E TRÊS CORPOS**

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Informática do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientadora: Juliana Vianna Valério

Co-orientador: Leonardo Navarro de Carvalho

Rio de Janeiro
2014

S729

Souza, Alan Costa de

Análise numérica da dinâmica e estabilidade dos problemas de dois e três corpos / Alan Costa de Souza. – 2014.

143 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2014.

Orientadora: Juliana Vianna Valério.

Coorientador: Leonardo Navarro de Carvalho.

1. Mecânica celeste. 2. Astrofísica. 3. Métodos numéricos. – Teses.
I. Valério, Juliana Vianna (Orient.). II. de Carvalho, Leonardo Navarro (Coorient.).
III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. IV. Título

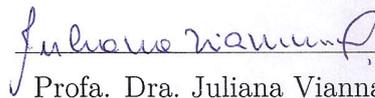
CDD

ALAN COSTA DE SOUZA

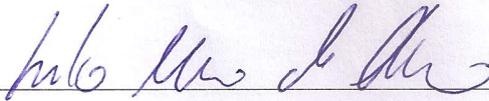
**Análise numérica da dinâmica e estabilidade dos problemas
de dois e três corpos**

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

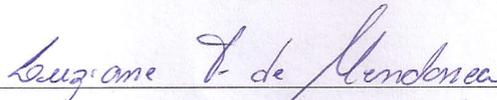
Aprovado em: Rio de Janeiro, 17 de setembro de 2014.



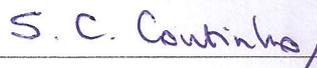
Profa. Dra. Juliana Vianna Valério (Orientadora)



Prof. Dr. Leonardo Navarro de Carvalho (Co-orientador)



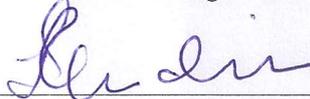
Profa. Dra. Luziane Ferreira de Mendonça



Prof. Dr. Severino Collier Coutinho



Prof. Dr. Daniel Gregório Alfaro Vigo



Profa. Dra. Teresinha de Jesus Stuchi

Agradeço à Deus, meus pais, meus orientadores, minha bolsa

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais Mirian Costa de Souza e Wilson de Souza por terem me dado a vida, e me ajudarem a chegar até o final do mestrado. Agradeço também a minha amiga Patrícia Zudio de Lima pelo apoio emocional em diversos momentos durante a conclusão do trabalho, a minha orientadora Juliana Vianna Valério e ao meu co-orientador Leonardo Navarro de Carvalho pela paciência e por terem aceito me orientar nesse trabalho. Agradeço também a professora Luziane Ferreira de Mendonça, que mesmo não tendo relação direta com esse trabalho, me ajudou muito durante a o projeto final da graduação, e algumas dicas foram importantes para a conclusão desse trabalho. Agradeço também aos professores Nicolás Maffione da Universidad Nacional de la Plata, Argentina; e Nicolas Delsate, da University of Namur, Bélgica; que me auxiliaram em algumas dúvidas sobre o MEGNO. Por fim, mas não menos importante, agradeço a CNPQ pela bolsa que financiou esse trabalho de mestrado.

RESUMO

Souza, Alan Costa de. **Análise numérica da dinâmica e estabilidade dos problemas de dois e três corpos**. 2014. 129 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Esse trabalho tem como objetivo fazer a simulação numérica e analisar a estabilidade do problema de três corpos. Inicialmente será feita uma comparação entre dois métodos numéricos, o método simplético de Ruth e o método de Runge Kutta de Quarta Ordem. Após a escolha do método, será simulado o problema de Kepler e o problema de dois corpos para validar o código implementado. Após isso, será simulado dois problemas de três corpos e verificado com as leis de conservação físicas. Logo após, implementaremos um método que verifica se um problema de três corpos é caótico, o MEGNO. Novamente utilizaremos os problemas de Kepler e dois corpos para verificar a implementação. Para terminar, aplicaremos o MEGNO a dois problemas de três corpos afim de verificar sua caoticidade.

Palavras-chave: Mecânica celeste, astrofísica, métodos numéricos.

ABSTRACT

Souza, Alan Costa de. **Análise numérica da dinâmica e estabilidade dos problemas de dois e três corpos**. 2014. 129 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

This work aims to make the numerical simulation and analyze the stability of the three body problem . Initially a comparison will be made between two numerical methods , the symplectic method of Ruth and the Runge Kutta Fourth Order. After choosing the method, the Kepler problem is simulated and the problem of two bodies to validate the implemented code. After that , it will be simulated two problems of three bodies and verified with the physical conservation laws . Soon after , we will implement a method that checks whether a three body problem is chaotic , the MEGNO . Again we will use the Kepler problems and two bodies to verify the implementation . Finally , we will apply the MEGNO the two problems of three bodies in order to verify your stability.

Keywords: celestial mechanics, astrophysics, numerical methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1:	Segunda Lei de Kepler	41
Figura 3.1:	Pseudo-código do Runge Kutta Quarta Ordem.	52
Figura 3.2:	Fórmulas do Runge Kutta Quarta Ordem.	52
Figura 3.3:	Erro método Ruth para Kepler.	60
Figura 3.4:	Erro método Ruth para Kepler.	60
Figura 3.5:	Erro método Runge Kutta para Kepler.	60
Figura 3.6:	Erro método Runge Kutta para Kepler.	60
Figura 3.7:	Erro método Ruth para 3 corpos.	60
Figura 3.8:	Erro método Ruth para 3 corpos.	60
Figura 3.9:	Erro método Runge Kutta para 3 corpos.	60
Figura 3.10:	Erro método Runge Kutta para 3 corpos.	60
Figura 3.11:	Teste de malha para a coordenada horizontal da posição.	63
Figura 3.12:	Teste de malha para a coordenada vertical da posição.	63
Figura 3.13:	Teste de malha para a coordenada horizontal do momento linear.	63
Figura 3.14:	Teste de malha para a coordenada horizontal do momento linear.	63
Figura 3.15:	Plano orbital da Terra.	64
Figura 3.16:	Distância da Terra ao Sol.	64
Figura 3.17:	Erro relativo da energia mecânica.	65
Figura 3.18:	Erro relativo do momento angular Z.	65
Figura 3.19:	Erro da primeira lei de Kepler.	67
Figura 3.20:	Erro da segunda lei de Kepler.	67
Figura 3.21:	Teste de malha para a coordenada horizontal da posição.	69
Figura 3.22:	Teste de malha para a coordenada vertical da posição.	69
Figura 3.23:	Teste de malha para a coordenada horizontal do momento linear.	69
Figura 3.24:	Teste de malha para a coordenada horizontal do momento linear.	69
Figura 3.25:	Solução numérica do problema de dois corpos.	70
Figura 3.26:	Evolução da coordenada x das estrelas.	70
Figura 3.27:	Evolução da coordenada y das estrelas.	70
Figura 3.28:	Erro relativo da energia mecânica.	71
Figura 3.29:	Erro relativo da componente normal do momento angular.	71
Figura 3.30:	Órbita problema de Kepler equivalente ao problema de dois corpos.	74
Figura 3.31:	Erro relativo da primeira lei de Kepler.	74
Figura 3.32:	Erro relativo da segunda lei de Kepler.	74
Figura 3.33:	Teste Malha Figura Oito.	76
Figura 3.34:	Solução numérica de cada estrela.	77

Figura 3.35: Defasagem coordenada X.	77
Figura 3.36: Defasagem coordenada Y.	77
Figura 3.37: Erro relativo da energia mecânica.	78
Figura 3.38: Erro absoluto da componente normal do momento angular.	78
Figura 4.1: Caos numa aplicação unidimensional.	84
Figura 4.2: $\lambda=0,5$	95
Figura 4.3: $\lambda=1$	95
Figura 4.4: $\lambda=2$	95
Figura 4.5: $\lambda=10$	95
Figura 4.6: Simulação 1 do MEGNO para o problema de Kepler.	99
Figura 4.7: Simulação 2 do MEGNO para o problema de Kepler.	99
Figura 4.8: Simulação 3 do MEGNO para o problema de Kepler.	99
Figura 4.9: Simulação 4 do MEGNO para o problema de Kepler.	99
Figura 4.10: Simulação 1 do MEGNO para a estrela dupla.	100
Figura 4.11: Simulação 2 do MEGNO para a estrela dupla.	100
Figura 4.12: Simulação 3 do MEGNO para a estrela dupla.	100
Figura 4.13: Simulação 4 do MEGNO para a estrela dupla.	100
Figura 4.14: Elementos orbitais.	101
Figura 4.15: Elementos orbitais.	101
Figura 4.16: MEGNO <i>v</i> Andromidae 1.	105
Figura 4.17: MEGNO <i>v</i> Andromidae 2.	105
Figura 4.18: MEGNO <i>v</i> Andromidae 3.	105
Figura 4.19: MEGNO <i>v</i> Andromidae 4.	105
Figura 4.20: Solução numérica da Figura Oito.	106
Figura 4.21: MEGNO para a Figura Oito.	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1:	Condições iniciais do problema de Kepler.	62
Tabela 3.2:	Condições iniciais da estrela dupla.	68
Tabela 3.3:	Condições iniciais da estrela tripla.	75
Tabela 4.1:	Dados sistema <i>v</i> Andromidae.	99
Tabela 4.2:	Coordenadas cartesianas do sistema <i>v</i> Andromidae.	104

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.	2
2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E ASPECTOS TEÓRICOS.	5
2.1	Problema.	5
2.1.1	Leis de Newton.	5
2.1.2	Força Gravitacional.	9
2.1.3	Problema.	11
2.2	Aspectos teóricos.	17
2.2.1	Unidades.	17
2.2.2	Leis de conservação.	17
2.2.3	Formulação Hamiltoniana e Formulação Newtoniana	32
2.2.4	Leis de Kepler.	34
3	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.	46
3.1	Escolha do método.	46
3.1.1	Método de Runge Kutta de quarta ordem.	47
3.1.2	Método de Ruth.	53
3.1.3	Testes.	58
3.2	Problema de Kepler.	61
3.2.1	Introdução.	61
3.2.2	Teste de malha.	61
3.2.3	Solução numérica.	63
3.2.4	Verificação.	64
3.2.5	Validação.	65
3.2.6	Conclusão.	67
3.3	Problema dos dois corpos.	67
3.3.1	Introdução.	67
3.3.2	Teste de malha.	68
3.3.3	Solução numérica.	69
3.3.4	Verificação.	71
3.3.5	Validação.	71
3.3.6	Conclusão.	74
3.4	Problema de três corpos.	75
3.4.1	Introdução.	75
3.4.2	Teste de malha.	76
3.4.3	Solução numérica.	76

3.4.4	Verificação.	77
3.4.5	Conclusão.	78
4	CAOS E EXEMPLOS.	79
4.1	Sistema dinâmico.	79
4.2	Número característico de Lyapunov.	83
4.3	Indicador MEGNO.	89
4.4	Exemplos analíticos do MEGNO.	90
4.4.1	Delta linear.	90
4.4.2	Delta com crescimento polinomial.	91
4.4.3	Delta exponencial.	92
4.4.4	MEGNO para um <i>Toy Problem</i>	93
4.5	Abordagem numérica do MEGNO.	95
4.5.1	Método de Gozdziwski.	96
4.5.2	Método de Breiter.	97
4.6	Exemplos numéricos do MEGNO.	98
4.6.1	MEGNO para o problema de Kepler.	98
4.6.2	MEGNO para o problema de dois corpos.	98
4.6.3	MEGNO para o problema de três corpos regular.	100
4.6.4	MEGNO para um problema de três corpos caótico.	105
5	CONCLUSÃO.	107
	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICE A EQUAÇÃO POLAR DAS CÔNICAS.	112
	APÊNDICE B TABELAS TESTES DE MALHA.	114
B.1	Problema de Kepler.	114
B.2	Problema de dois corpos.	119
	APÊNDICE C DEDUÇÃO DO VETOR TANGENTE.	124
	APÊNDICE D DEDUÇÃO DA VARIAÇÃO DO VETOR TANGENTE COM O TEMPO.	126

1 INTRODUÇÃO.

A tentativa de compreender os fenômenos que aconteciam no céu, pela humanidade, remonta à antiguidade, o que torna a Astronomia uma das ciências mais antigas. Com o objetivo de compreender o movimento dos corpos celestes foram elaborados diversos modelos durante a história:

- Os gregos elaboraram um modelo em que propunham que a Terra era o centro geométrico do Universo, um modelo chamado de geocentrismo. [7]
- Depois Nicolau Copérnico propôs outro modelo que considerava o Sol como sendo o centro do Universo, uma teoria que ficou conhecida como heliocentrismo. [3]
- Baseando-se no heliocentrismo e em anos de observação do astrônomo Tycho Brahe, Johannes Kepler propôs as conhecidas três leis de Kepler, que são discutidas no Capítulo 2.
- Com o objetivo de descobrir se as leis de Kepler são resultado de leis mais fundamentais, Isaac Newton elabora a lei da gravitação universal, da qual, junto com as leis de Newton da Mecânica, pode-se deduzir as três leis de Kepler como veremos no Capítulo 2. [3]

Pessoalmente, meu interesse em astronomia surgiu ainda antes da faculdade, pois sempre quis saber o que eram exatamente os planetas e porque se movem em torno do Sol, mesmo que na época não tivesse conhecimento nem mesmo das leis básicas da mecânica. Ao entrar na faculdade, tive um contato com a física básica durante o curso de Ciência da Computação, o que me fez compreender um pouco como eram os movimentos

planetários. Entre o final da faculdade e o início do mestrado, também tive contato com alguns assuntos da astronomia através de séries televisivas, o que despertou de vez meu interesse na área e influenciou esse trabalho de mestrado, já que resolvi aprender alguns conceitos de forma mais formal e detalhada. A soma desses fatores me levou ao interesse em compreender esse ramo fascinante da astronomia, a mecânica celeste, que trata dos movimentos não apenas dos planetas, mas de todos os corpos celestes como estrelas, cometas, asteróides, etc.

Dessa forma, esse trabalho tem o objetivo de compreender o chamado problema de N corpos, que é definido no Capítulo 2, que é uma formulação matemática baseada nas leis de Newton e da gravitação universal, que visa prever movimentos de um certo conjunto de corpos celestes. No Capítulo 2 também são discutidos alguns aspectos teóricos que são utilizados no trabalho, os quais são as leis de Kepler, as leis de Conservação, as leis de Newton e a lei da Gravitação. O problema de N corpos tem solução analítica apenas para o caso de dois corpos e alguns casos particulares de três corpos, ou seja, em geral não tem solução analítica o que leva à necessidade da adoção de uma abordagem numérica. Para resolvê-lo numericamente, foram testados dois métodos numéricos e os resultados encontram-se no Capítulo 3, onde também encontram-se as análises numéricas de alguns problemas. Para resolver o problema de três corpos, recorreu-se a artigos da área com o objetivo de encontrar dados para as simulações e para a validação dos códigos implementados e, nessa busca, foi encontrado o problema da caoticidade do problema de três ou mais corpos. Basicamente, uma solução numérica de um problema caótico não é confiável por menores que sejam os erros numéricos dos métodos utilizados, já que um erro pequeno pode gerar valores muito diferentes do valor real, e por isso é necessário saber se um método ou modelo é caótico ou não antes de resolvê-lo numericamente. Encontramos nas pesquisas dois métodos para detectar a caoticidade: um mais tradicional, que é o método de Lyapunov, e um mais recente, que é o MEGNO [5]. Escolhemos o MEGNO por razões computacionais, já que os métodos são equivalentes em termos do

objetivo. Mais detalhes podem ser encontrados no Capítulo 4. Finalmente no Capítulo 5 encontram-se as conclusões do trabalho.

2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E ASPECTOS TEÓRICOS.

2.1 Problema.

Nesse capítulo apresenta-se o problema que será analisado nesse trabalho. Na Subseção 2.1.1 enunciaremos as leis de Newton que são uma das bases teóricas para a formulação do problema, enquanto que o conceito de Força Gravitacional será apresentado na Subseção 2.1.2. Finalmente na Subseção 2.1.3 mostra-se a formulação do problema que será analisado nos capítulos restantes.

2.1.1 Leis de Newton.

Nessa subseção enunciam-se as Leis de Newton, que são um dos princípios teóricos do problema de N corpos, baseando-se no livro de [21].

Suponha inicialmente que se tem um corpo 1 isolado de qualquer outro corpo, localizado na posição \mathbf{r}_1 em relação a um sistema de coordenadas cartesianas inercial, que é um referencial que está em repouso ou se desloca com velocidade constante \mathbf{v}_1 e portanto com aceleração $\mathbf{a}_1 = 0$.

Suponha depois que, coloca-se um corpo 2, que esteja desconectado do corpo 1, na posição \mathbf{r}_2 e com velocidade constante \mathbf{v}_2 e portanto com aceleração $\mathbf{a}_2 = 0$. O termo desconectado é usado para imaginar um situação hipotética em que os corpos não exercem força sobre o outro.

Ao conectarmos os dois corpos, ambos não se deslocam mais com velocidade constante, ou seja, o corpo 1 se desloca com uma aceleração \mathbf{a}_{12} , devido a presença do corpo 2 e o corpo 2 se desloca com uma aceleração \mathbf{a}_{21} , devido a presença do corpo 1. Nota-se experimentalmente que a razão entre os módulos da aceleração:

$$\frac{a_{12}}{a_{21}},$$

é uma constante desse par de corpos, para várias condições de experimentos. Esse resultado é válido para qualquer par de corpos.

A generalização do problema acima para mais de dois corpos é a seguinte:

Suponha N corpos A, B, C,... mutualmente conectados no espaço, de forma que cada um dos corpos se mova no espaço com a aceleração que é uma soma vetorial das acelerações que o corpo sofre devido a presença de cada um dos outros corpos. Pode-se atribuir constantes m_A, m_B, m_C, \dots a cada corpo tal que para cada par de corpos AB, existe a razão

$$\frac{a_{AB}}{a_{BA}} = \frac{m_B}{m_A}.$$

A evidência que a afirmação acima é verdadeira, são os inúmeros cálculos realizados tomando-a como base e confrontando os resultados teóricos obtidos com resultados observados.

Note que o que se obtém são apenas as razões como constantes físicas, mas não o valor das constantes de cada corpo. Assim pode-se atribuir m_A o valor de 1 Kg, e tomar as outras constantes como múltiplos de m_A . Assim, cada uma das constantes é definida como a massa do corpo.

Agora pode-se definir o conceito de força:

Definição 2.1 (Conceito de Força). *Defini-se a força exercida sobre um corpo A devido a outro corpo B, como o produto da massa do corpo A pela aceleração que o corpo A sofre devido a B.*

Logo a força é um vetor que tem a mesma direção e sentido da aceleração, mas possui módulo igual ao módulo da aceleração vezes a massa.

No caso de várias partículas, cada uma sofre uma força devido a cada um dos outros corpos, de forma que a força resultante é a soma vetorial de cada força. A segunda lei de Newton afirma que:

Definição 2.2 (Segunda Lei de Newton). *A força resultante que atua sobre um corpo, é igual a sua massa vezes a aceleração que o corpo sofre devido aos outros corpos do sistema.*

E de forma matemática:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i,$$

$$\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij},$$

$$\mathbf{a}_i = \sum_j \mathbf{a}_{ij},$$

onde \mathbf{F}_i é a força resultante no corpo i , \mathbf{a}_i é a aceleração resultante no corpo i , \mathbf{F}_{ij} é a força resultante no corpo i devido ao corpo j , \mathbf{a}_{ij} é a aceleração resultante no corpo i devido ao corpo j e m_i é a massa do corpo i .

Viu-se que para cada par de corpos

$$\frac{a_{AB}}{a_{BA}} = \frac{m_B}{m_A},$$

logo

$$m_A a_{AB} = m_B a_{BA},$$

e portanto

$$F_{AB} = F_{BA},$$

ou seja, o módulo da força que um corpo A sofre devido a um corpo B é igual ao módulo da força que um corpo B sofre devido a um corpo A. As acelerações estão na direção da linha que conecta os dois corpos mas com sentidos opostos, logo:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA},$$

que é a terceira lei de Newton:

Definição 2.3 (Terceira Lei de Newton). *Se um corpo A exerce uma força num corpo B, o corpo B exerce uma força em A com mesmo módulo e direção, mas com sentido oposto*

Essas leis governam o problema a ser analisado no restante do trabalho.

2.1.2 Força Gravitacional.

Na Subseção 2.1.1, apresentamos as leis de Newton e a definição de força. Nessa subseção, será apresentado um tipo de força indispensável para o problema: a Força Gravitacional.

Suponha que existam dois corpos A e B, com massas m_A e m_B . A Força Gravitacional que o corpo A sofre devido ao corpo B é

$$\mathbf{F}_{AB} = \frac{Gm_A m_B (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|^3}.$$

onde \mathbf{r}_{corpo} é o vetor posição de cada corpo e m_{corpo} é a massa de cada corpo.

A constante G é chamada de Constante Gravitacional Universal e no sistema in-

ternacional de unidades tem o valor de

$$G = 6,67384 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}.$$

Nesse trabalho serão usados sistemas de unidades mais adequados a mecânica celeste, e serão usados outros valores de G . Antes de apresentá-los, serão definidos algumas unidades que serão usadas no trabalho.

Definição 2.4. *A unidade Astronômica (UA) é definida como a distância média entre o Sol e a Terra, ou seja, uma média aritmética entre o periélio da Terra, que é a menor distância da Terra ao Sol e o Afélio, que é a maior distância entre a Terra e o Sol. 1 UA equivale a 1.4960×10^{11} m.*

Definição 2.5. *Massa Solar (M_{\odot}) é definida como a massa do Sol. 1 M_{\odot} equivale a aproximadamente $1,98 \times 10^{30}$ kg.*

A partir das unidades apresentadas anteriormente, obtém-se dois valores de G em dois sistemas de unidades. O primeiro é no sistema unidade astronômica-massa solar-ano, para o qual o valor de G é:

$$G = 4\pi^2(UA)^3 M_{\odot}^{-1} ano^{-2},$$

enquanto que para o sistema unidade astronômica-massa solar-dia, o valor de G é:

$$G = 2.959572553206070 * 10^{-4}(UA)^3 M_{\odot}^{-1} dia^{-2}.$$

2.1.3 Problema.

Nessa subseção apresenta-se o problema que será analisado nesse trabalho.

Suponha inicialmente que se tem dois corpos com massas m_1 e m_2 , localizados na posição \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 de um sistema de coordenadas inercial e com velocidades $\dot{\mathbf{r}}_1$ e $\dot{\mathbf{r}}_2$ e que o único tipo de interação entre os corpos seja de origem gravitacional.

A força sofrida pelo corpo de massa m_1 devido a presença do corpo de massa m_2 é

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_1m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Pela segunda lei de Newton

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (2.1)$$

De forma análoga, obtém-se

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (2.2)$$

Com isso define-se um sistema de equações diferenciais ordinárias, que ao ser solucionado, descreve a posição dos corpos de massa m_1 e m_2 em cada instante de tempo.

O sistema de EDOs apresentado nas equações (2.1) e (2.2), é chamado de problema de dois corpos: duas massas pontuais m_1 e m_2 que sofrem apenas ação da força gravitacional do outro corpo. Esse modelo pode ser empregado para resolver, por exemplo, a dinâmica de uma estrela dupla, que consiste em duas estrelas orbitando o centro de massa comum.

Uma forma alternativa de resolver o problema de dois corpos, é reduzi-lo ao problema de Kepler equivalente. O problema de Kepler é um modelo matemático que consiste de uma massa orbitando uma massa central, que é fixa na origem do centro de coordenadas. O problema de Kepler possui solução analítica. Interessante perceber que o problema de Kepler aproxima muito bem a situação em que uma das massas é significativamente maior que a segunda massa, de forma que seu deslocamento seja desprezível. Nesse caso, o problema de Kepler é uma ótima aproximação do problema real, e não é necessário a redução do problema de dois corpos ao problema de Kepler equivalente, bastando considerar a massa maior como fixa e resolver o problema de Kepler. Abaixo, exhibe-se como pode ser definido o problema de Kepler quando uma das massas é muito maior que a outra. Nos próximos capítulos mostra-se como definir o problema de Kepler equivalente a um problema de dois corpos genérico.

Suponha que a massa $m_2 \gg m_1$ e que seja fixa no espaço. Repare que, dessa forma, o centro de massa fica muito próximo do corpo 2, com isso define-se um sistema de coordenadas inercial com a massa m_2 sendo a origem, logo:

$$\mathbf{r}_2^h = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$$

e

$$\mathbf{r}_1^h = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (2.3)$$

Observe também que:

$$\mathbf{F}_2 = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

e

$$m_2 \gg m_1,$$

e portanto

$$\ddot{r}_2 \ll \ddot{r}_1,$$

onde \ddot{r}_2 é o módulo do vetor $\ddot{\mathbf{r}}_2$ e onde \ddot{r}_1 é o módulo do vetor $\ddot{\mathbf{r}}_1$.

Isto mostra que a aceleração do corpo de massa m_2 é praticamente nula, e o referencial é aproximadamente inercial. Nos próximos capítulos, mostra-se uma simulação

numérica entre a diferença do problema de Kepler e um problema de dois corpos com os mesmos corpos, para mostrar que a aproximação é de fato pertinente.

Substituindo a Equação (2.3) na Equação (2.1), obtém-se

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1^h}{|\mathbf{r}_1^h|^3}.$$

Como r_2 é desprezível, tem-se

$$\ddot{\mathbf{r}}_1^h \approx -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1^h}{|\mathbf{r}_1^h|^3}.$$

Com o sistema acima, calcula-se a posição apenas do corpo de massa m_1 , já que, nesse sistema de coordenadas, o corpo m_2 está sempre fixo na origem. De fato, esse sistema de coordenadas não é inercial, porque o corpo de massa m_2 sofre aceleração gravitacional da massa m_1 , mas como se a massa do corpo 2 for muito maior que a massa do corpo 1, aproximação é de ótima qualidade.

Até agora discutiu-se o problema de duas massas pontuais que se atraem mutuamente apenas devido à ação da força gravitacional. Mas pode-se generalizar o problema para mais corpos.

Suponha que se tenham três corpos, de massas m_1 , m_2 e m_3 , localizadas nas posições \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 num sistema de coordenadas inercial com velocidades $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$ e $\dot{\mathbf{r}}_3$. Logo a força gravitacional que o corpo de massa m_1 sofre devido a cada um dos outros

dois corpos é

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

e

$$\mathbf{F}_{13} = \frac{Gm_1m_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Portanto a força gravitacional total sofrida pelo corpo devido aos outros corpos é:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_1m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{Gm_1m_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Pela Segunda Lei de Newton

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_1m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{Gm_1m_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1. \quad (2.4)$$

Simplificando a Equação (2.4), obtém-se

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (2.5)$$

Analogamente para as outras massas, obtém-se

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + \frac{Gm_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (2.6)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} + \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3}. \quad (2.7)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (2.5), (2.6) e (2.7), com as respectivas posições e velocidades iniciais de cada corpo, obtém-se a posição de cada corpo em cada instante de tempo. Esse problema é conhecido como problema de três corpos e em geral não tem solução analítica, com a exceção de quando o terceiro corpo se localiza nos chamados pontos de Lagrange L_4 e L_5 , sendo necessário resolvê-lo numericamente, como veremos nos próximos capítulos.

Até aqui foram apresentadas as equações do problema de Kepler, e dos problemas de dois e três corpos. Mas pode-se definir um problema geral de N corpos usando a mesma ideia acima. Segue então o sistema de EDO's que descreve a dinâmica do problema de N corpos.

Seja um sistema de N corpos com massas m_1, m_2, \dots, m_N ; localizados nas posições $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ e com velocidades $\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N$.

Logo o problema de N corpos é definido pela Equação (2.8)

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{Gm_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

A Equação (2.8) é obtida aplicando-se a segunda lei de Newton a cada corpo, e usando-se o fato de que as forças que atuam entre cada par de corpos é a força gravitacional.

2.2 Aspectos teóricos.

2.2.1 Unidades.

Nessa subseção apresentamos algumas unidades físicas que serão usadas durante esse trabalho.

Definição 2.6. *A unidade Astronômica (UA) é definida como a distância média entre o Sol e a Terra, ou seja, uma média aritmética entre o periélio da Terra, que é a menor distância da Terra ao Sol e o afélio, que é a maior distância entre a Terra e o Sol. Portanto, 1 UA equivale a 1.4960×10^{11} m.*

Definição 2.7. *Massa Solar (M_{\odot}) é definida como a massa do Sol. Temos que 1 M_{\odot} equivale a aproximadamente $1,98 \times 10^{30}$ kg.*

2.2.2 Leis de conservação.

2.2.2.1 Uma partícula.

Aqui serão apresentadas as leis de conservação que são usadas nesse trabalho, tomando por base os livros de [10] e [14].

Inicialmente desenvolvem-se as leis de conservação para uma única partícula, e

logo em seguida estendem-se os resultados para um sistema físico constituído de várias partículas.

Considerando um sistema de referências inercial na origem \mathbf{O} , e uma partícula localizada num ponto \mathbf{P} , define-se o vetor posição \mathbf{r} da partícula como

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{O}.$$

O vetor velocidade de uma partícula com posição $\mathbf{r}(t)$ é definido como

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}},$$

ou seja, a velocidade de uma partícula é igual a taxa de variação de sua posição com o tempo.

O momento linear de uma partícula é definido como

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

onde m é a massa da partícula.

Se a partícula sofre a ação de uma força externa resultante \mathbf{F} , então aplicando a segunda lei de Newton à partícula tem-se

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}.$$

No caso em que a massa da partícula é constante em relação ao tempo, a fórmula acima se reduz a

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{x}},$$

que, é o mesmo resultado encontrado no capítulo anterior.

Se a força externa resultante \mathbf{F} sobre a partícula for nula, tem-se o primeiro teorema de conservação

Teorema 2.1. *Se a força externa resultante sobre uma partícula for nula, então*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0},$$

ou seja, o momento linear da partícula se conserva ao longo do tempo.

Defini-se o momento angular de uma partícula em relação ao ponto \mathbf{O} como

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{2.9}$$

e o torque de uma partícula em relação a um ponto \mathbf{O} como

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

O torque pode ser interpretado como o análogo angular de uma força. Enquanto uma força resulta na variação da velocidade de uma partícula, o torque causa uma variação na velocidade angular de uma partícula, que é a taxa de variação do ângulo percorrido em relação a um eixo de referência.

Da segunda lei de Newton aplicada a uma partícula tem-se

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}),$$

e aplicando o produto vetorial com \mathbf{r} , tem-se

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{T} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}),$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}m\mathbf{v}\right) = \left(\mathbf{r} \times \frac{d}{dt}m\mathbf{v}\right),$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{l}}. \quad (2.10)$$

A Equação (2.10) é a versão angular da segunda lei de Newton.

Logo, se o torque externo resultante for nulo, o momento angular da partícula se conserva ao longo do tempo. Tem-se, assim, a segunda lei de conservação para partículas.

Teorema 2.2. *Se o torque externo resultante sobre uma partícula for nulo, então*

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{0},$$

ou seja, o momento angular da partícula se conserva ao longo do tempo.

Na Subseção 2.2.4 será realizada a dedução da segunda lei de Kepler, que está diretamente relacionada com esse teorema.

A próxima lei de conservação a ser deduzida é a de conservação de energia mecânica.

Agora fornece-se algumas definições e resultados de cálculo vetorial de [19] que auxiliarão na dedução de lei de conservação de energia mecânica.

Definição 2.8 (Campo Vetorial). *Um campo vetorial é uma função que associa cada ponto do domínio a um vetor*

No nosso trabalho, o campo vetorial usado é um campo gravitacional, o qual é criado por uma partícula que possua massa, e cada vetor desse campo é definido como a força gravitacional que uma partícula de massa unitária sofrerá se for colocada nessa posição do espaço devido à presença da primeira partícula no espaço. A chamada força

gravitacional nesse ponto sobre uma partícula é igual ao vetor do campo nesse ponto vezes a massa da partícula localizada nesse ponto.

Definição 2.9 (Gradiente de uma função). *Seja uma função escalar diferenciável $f(x,y,z)$, o gradiente de f é um campo vetorial definido por*

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))^T,$$

onde $f_{variável}$ representa a derivada parcial de f em relação àquela variável.

O gradiente de uma função escalar é um campo vetorial, em que cada componente do vetor definido num ponto é o valor de uma das derivadas parciais da função no ponto.

Definição 2.10 (Campo Conservativo). *Um campo vetorial \mathbf{F} é conservativo se*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z),$$

para alguma função escalar $f(x,y,z)$.

O campo gravitacional é um campo conservativo porque é o gradiente de uma função escalar chamada de função potencial gravitacional, que é definida como a energia potencial que uma massa unitária possui por estar localizada nesse ponto do espaço. A energia potencial gravitacional é definida como o valor dessa função no ponto multiplicada pela massa da partícula localizada no ponto.

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental para as Integrais de Linha). *Seja \mathbf{F} um campo vetorial conservativo tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, então a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de um caminho C que liga os pontos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 pode ser calculada como*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1).$$

O trabalho de um campo \mathbf{F} é uma integral de linha ao longo de um caminho C . Como o campo gravitacional é um campo conservativo, pode-se aplicar o teorema. Desse teorema, é que se deduz que o trabalho de um campo conservativo é independente do caminho.

Seja \mathbf{g} , o campo gravitacional, e $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$, a força gravitacional que uma partícula de massa m sofre em cada ponto do espaço devido à presença do campo gravitacional \mathbf{g} , então o trabalho da força externa \mathbf{F} sobre a partícula durante um caminho que liga os pontos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 é definido como

$$W_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Usando a segunda lei de Newton e considerando que a massa m seja constante

$$W_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r},$$

e realizando uma transformação de coordenadas adequada, de forma que a variável de integração se torne o tempo, tem-se

$$W_{12} = m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt,$$

onde t_1 é o instante de tempo em que a partícula está na posição \mathbf{r}_1 e t_2 é o instante de tempo em que a partícula está na posição \mathbf{r}_2 .

Sabendo que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2,$$

$$W_{12} = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} v^2 dt,$$

$$W_{12} = \frac{m}{2} (v(t_2)^2 - v(t_1)^2) = K_2 - K_1, \quad (2.11)$$

onde

$$K_i = \frac{mv(t_i)^2}{2},$$

é chamada de energia cinética da partícula no instante t_i .

Logo o trabalho realizado por uma força numa partícula durante o caminho que liga \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 é igual a diferença de energia cinética da partícula nos pontos extremos do caminho.

Se \mathbf{g} é conservativo, então

$$\mathbf{g} = -\nabla V,$$

onde V é a função potencial gravitacional.

Logo

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -m\nabla V(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}),$$

onde U é a energia potencial da partícula de massa m adquirida por estar localizada na posição \mathbf{r} .

Logo o trabalho que \mathbf{F} exerce sobre a partícula ao longo de um caminho C que liga os pontos \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) = U_1 - U_2, \quad (2.12)$$

Note que a Equação (2.11) exhibe o trabalho entre os instantes t_1 e t_2 enquanto que a Equação (2.12) expressa o trabalho entre os extremos da curva C . Sabendo que U_1 é o

valor da função potencial na posição \mathbf{r}_1 e que a partícula atinge essa posição no instante t_1 e U_2 é o valor da função potencial na posição \mathbf{r}_2 e que a partícula atinge essa posição no instante t_2 , tem-se que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}(t_1)) - U(\mathbf{r}(t_2)) = U_1 - U_2. \quad (2.13)$$

Igualando a Equação (2.13) com a Equação (2.11)

$$U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \therefore E_1 = E_2,$$

onde

$$E(t) = K(t) + U(t), \quad (2.14)$$

é chamada de energia mecânica do sistema, a qual é a soma da energia cinética no instante t com a energia potencial no instante t . Mais adiante na Subseção 3.1.2, será apresentada a forma hamiltoniana do problema de N corpos, de forma que $T(p(t)) = K(t)$, $V(q(t)) = U(t)$ e a energia mecânica $E(t)$ equivale ao hamiltoniano $H(q(t), p(t)) = T(p(t)) + V(q(t))$.

Logo conclui-se o seguinte resultado (Teorema 2.4)

Teorema 2.4 (Teorema de Conservação de Energia Mecânica). *Se as forças que agem sobre uma partícula são conservativas, então a energia mecânica da partícula se conserva ao longo do tempo.*

2.2.2.2 Sistema de partículas.

Aqui estenderemos a discussão anterior a um sistema composto de N partículas.

Aplicando a segunda lei de Newton para a i -ésima partícula tem-se

$$\sum_{j=0, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{ext} = \dot{\mathbf{p}}_i,$$

onde \mathbf{F}_{ij} é a força que a partícula j exerce sobre a partícula i , \mathbf{F}_i^{ext} é a força externa que partículas externas ao sistema exercem sobre a partícula i e $\dot{\mathbf{p}}_i$ é o momento linear da partícula i .

Somando a expressão acima para todas as partículas, tem-se

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=0}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{p}}_i.$$

Pela terceira lei de Newton, para cada força \mathbf{F}_{ij} que a partícula j exerce sobre a partícula i , existe uma reação \mathbf{F}_{ji} que a partícula i exerce sobre a partícula j , de forma que $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ e o somatório duplo se anula.

$$\sum_{i=0}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{p}}_i.$$

A variação do momento linear total de um sistema de N partículas é definido como

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{p}}_i,$$

de forma que

$$\sum_{i=0}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \dot{\mathbf{P}}.$$

Se a força resultante externa ao sistema for nula, chega-se à primeira lei de conservação de um sistema de N partículas, que é apresentada no Teorema 2.5.

Teorema 2.5 (Teorema de Conservação de Momento Linear para um sistema de N Partículas). *Se a força externa total aplicada a um sistema de N partículas é nula, então o momento linear total é conservado ao longo do tempo, ou seja,*

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}.$$

Com o objetivo de se obter a versão angular, como no caso de uma partícula, toma-se a expressão da segunda lei de Newton para a i -ésima partícula e faz-se o produto vetorial com o vetor posição \mathbf{r}_i , então tem-se

$$\sum_{j=0, j \neq i}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i.$$

Somado para todas as partículas tem-se

$$\sum_{i,j=0,j \neq i}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) + \sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i.$$

Se \mathbf{F}_{ij} for uma força central, ou seja, atua ao longo de uma reta que une os corpos e seu módulo só depende da distância em relação a um ponto central; para cada expressão $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$ existe uma expressão $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$ de forma que $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$, logo

$$\sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i.$$

A expressão à esquerda da igualdade é o torque externo total que o sistema sofre devido a partículas externas ao sistema, enquanto que a expressão a direita representa o momento angular total, pois como já foi visto

$$\sum_{i=0}^N \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=0}^N \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{L}}_i = \dot{\mathbf{L}},$$

onde \mathbf{L} é o momento angular total do sistema, logo

$$\mathbf{T}^{ext} = \dot{\mathbf{L}}. \quad (2.15)$$

A Equação (2.15) é versão angular da segunda lei de Newton para um sistema de N partículas. Se o torque externo for nulo, então tem-se o segundo teorema de conservação para um sistema de N partículas.

Teorema 2.6 (Teorema de conservação do momento angular para um sistema de N partículas). *Se o torque externo resultante for nulo, então o momento angular total do sistema se conserva ao longo do tempo, ou seja,*

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}.$$

Note que se a força externa resultante for nula, tanto o momento linear total quanto o momento angular total do sistema se conservam.

A seguir provaremos a conservação de energia para um sistema de N partículas.

O trabalho que a força \mathbf{F} exerce sobre uma partícula i ao longo de caminho C_i entre os pontos $\mathbf{r}_i(t_1)$ e $\mathbf{r}_i(t_2)$ é dado pela Equação (2.16)

$$W_i = \int_{C_i} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_i} m \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = m \int_{C_i} \frac{v_i^2}{2} dt = K_{2,i} - K_{1,i}. \quad (2.16)$$

Logo o trabalho que a força F realiza sobre todas as partículas do sistema é

$$W = \sum_{i=0}^N W_i = \sum_{i=0}^N (K_{2,i} - K_{1,i}) = K_2 - K_1,$$

onde K_2 é a soma da energia cinética de todas as partículas do sistema no instante t_2 e onde K_1 é a soma da energia cinética de todas as partículas do sistema no instante t_1 .

Como visto anteriormente, como \mathbf{g} é um campo conservativo, então

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -\nabla mV = -\nabla U.$$

Logo o trabalho total é

$$W = \sum_{i=0}^N W_i = \sum_{i=0}^N \int_{C_i} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=0}^N - \int_{C_i} \nabla U_i \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=0}^N (U_{1,i} - U_{2,i}) = U_1 - U_2,$$

onde $U_{1,i}$ é a energia potencial da partícula i no instante t_1 , $U_{2,i}$ é a energia potencial da partícula i no instante t_2 , U_1 é a energia potencial de todo o sistema no instante t_1 e U_2 é a energia potencial de todo o sistema no instante t_2 .

Logo

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \therefore E_1 = E_2,$$

onde E_i é energia mecânica do sistema no instante t_i . Logo tem-se a terceira lei de conservação para um sistema de N partículas, que é apresentada no Teorema 2.7.

Teorema 2.7 (Teorema de Conservação de Energia Mecânica para um sistema com N Partículas). *Se as partículas de um sistema estão sujeitas somente a campos de força conservativos, então a energia mecânica do sistema se conserva.*

2.2.3 Formulação Hamiltoniana e Formulação Newtoniana

Nessa subseção, mostra-se a relação que existe entre a formulação newtoniana e a formulação hamiltoniana. Vamos usar como exemplo o problema de Kepler, mas o resultado é análogo para o problema de mais corpos.

Suponha que uma partícula de massa m , esteja na posição \mathbf{r} com momento linear \mathbf{p} e sob ação do campo gravitacional de uma massa M . Logo a formulação newtoniana para o movimento dessa partícula é

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{GM\hat{\mathbf{r}}}{r^3}, \quad (2.17)$$

que é obtida a partir da segunda lei de Newton e da Lei da gravitação universal.

O hamiltoniano no nosso trabalho será equivalente a energia mecânica, cuja formula é:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - \frac{GMm}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}},$$

onde $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

A formulação hamiltoniana obtida é

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{r}_z) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}, \frac{\partial H}{\partial p_z} \right) \quad (2.18)$$

e

$$\dot{\mathbf{p}} = (\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \left(-\frac{\partial H}{\partial r_x}, -\frac{\partial H}{\partial r_y}, -\frac{\partial H}{\partial r_z} \right) \quad (2.19)$$

Desenvolvendo-se a Equação (2.19), tem-se

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \left(-\frac{\partial H}{\partial r_x}, -\frac{\partial H}{\partial r_y}, -\frac{\partial H}{\partial r_z} \right) = \frac{GMm\hat{\mathbf{r}}}{r^3}, \quad (2.20)$$

onde $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$.

e fazendo o mesmo com a Equação (2.18), tem-se

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}, \frac{\partial H}{\partial p_z} \right) = \frac{\mathbf{p}}{m}.$$

Logo

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m}. \quad (2.21)$$

Substituindo a Equação (2.20) na Equação (2.21) tem-se

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m} = \frac{GM\hat{\mathbf{r}}}{r^3}, \quad (2.22)$$

A Equação (2.22) é igual a formulação newtoniana apresentada na Equação (2.17). Portanto a formulação newtoniana e a formulação hamiltoniana são equivalentes.

2.2.4 Leis de Kepler.

As três leis de Kepler para nosso sistema planetário são: [8],[3]

- Primeira Lei: As órbitas dos planetas são elípticas, com o Sol localizado num dos focos.
- Segunda Lei: O vetor distância entre cada planeta e o Sol percorre uma área proporcional ao intervalo de tempo considerado.
- Terceira Lei: O quadrado do período de um planeta é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita. Mais tarde usando-se as leis de Newton, essa lei teve uma pequena correção, já que a constante de proporcionalidade depende da massa da Estrela.

Agora faremos a dedução das leis de Kepler a partir das leis básicas da mecânica newtoniana [16].

Suponha que:

- A estrela esteja centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- A estrela esteja fixa na origem do sistema de coordenadas.
- As forças gravitacionais interplanetárias sejam desprezíveis.

Essas suposições são razoáveis num sistema de N corpos, quando um dos corpos é muito mais massivo que os demais, como é o caso do sistema do nosso trabalho. Já para

sistemas com estrelas duplas ou triplas o modelo não dá uma boa aproximação.

A Força Gravitacional, a qual também é a força resultante, que a estrela exerce sobre um planeta é definida como

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}, \quad (2.23)$$

onde M é a massa da estrela, m é a massa do planeta e \mathbf{r} é a posição do corpo em movimento em relação a estrela de massa M .

De acordo com a segunda lei de Newton temos

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (2.24)$$

Igualando as equações (2.23) e (2.24) chegamos a

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}. \quad (2.25)$$

Resolvendo a EDO apresentada na Equação (2.25), com a posição e velocidade inicial do corpo, chega-se na órbita do planeta de massa m .

Realizando o produto vetorial de \mathbf{r} pela Equação (2.25) tem-se

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times \frac{GM}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Como

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}},$$

tem-se que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0},$$

e que

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{l}_m.$$

Logo o vetor posição \mathbf{r} é sempre perpendicular ao vetor \mathbf{l}_m e o movimento é planar, por isso a partir desse momento trataremos o problema de forma planar. Note também que \mathbf{l}_m é o momento angular por unidade de massa.

Definiremos agora um sistema de coordenadas polares a partir do sistema de coordenadas cartesianas para deduzir as leis. Inicialmente definimos dois vetores unitários

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

e

$$\hat{\theta} \cdot \hat{r} = 0,$$

onde o vetor $\hat{\theta}$ é um vetor perpendicular ao vetor unitário \hat{r} .

Nesse sistema, o vetor posição do planeta será

$$\mathbf{r} = r\hat{r},$$

e a velocidade

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}. \quad (2.26)$$

Em coordenadas cartesianas temos

$$\hat{r} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

e

$$\hat{\theta} = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)).$$

Então

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = (-\sin(\theta)\dot{\theta}, \cos(\theta)\dot{\theta}) = \dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (2.27)$$

Substituindo a Equação (2.27) na Equação (2.26) temos

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}.$$

De forma análoga obtemos a aceleração

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}. \quad (2.28)$$

A derivada de $\hat{\theta}$ é

$$\dot{\hat{\theta}} = (-\cos(\theta)\dot{\theta}, -\sin(\theta)\dot{\theta}) = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.29)$$

Substituindo as equações (2.27) e (2.29) na Equação (2.28), temos

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}. \quad (2.30)$$

Usando a Equação (2.30) na Equação (2.25) temos

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.31)$$

que é a forma polar do problema de Kepler. Da Equação (2.31), temos a componente tangencial e radial que serão usadas para deduzir as leis de Kepler.

2.2.4.1 Segunda lei de Kepler.

Aqui será deduzida a segunda lei de Kepler a partir da componente tangencial do movimento obtida na Equação (2.31).

Observando a Equação (2.31), temos que

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0, \quad (2.32)$$

já que a componente tangencial do lado direito é nula.

Multiplicando a Equação (2.32) por r , temos

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0. \quad (2.33)$$

Note que a Equação (2.33) equivale a

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

E portanto

$$r^2\dot{\theta} = C, \quad (2.34)$$

onde C é uma constante arbitrária.

O momento angular de um corpo foi definido na Equação (2.9) como

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (2.35)$$

Sabendo que

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m[r\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}})] = mr^2\dot{\theta}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

O módulo do momento angular definido na Equação (2.35) é

$$l = m|r^2\dot{\theta}||\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}| = mr^2\dot{\theta}, \quad (2.36)$$

Derivando a Equação (2.36) em relação ao tempo, temos que

$$\dot{l} = m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = m \frac{d}{dt} C = 0.$$

Portanto o módulo do momento angular se conserva.

Observe a Figura 2.1, onde $\delta\theta$ é um deslocamento angular infinitesimal.

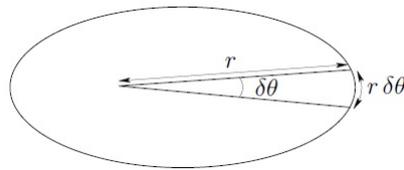


Figura 2.1: Segunda Lei de Kepler

Note que a subárea da elipse percorrida pelo planeta num intervalo de tempo infinitesimal $\delta\theta$ pode ser aproximado por um triângulo, cuja altura é r e a base é uma reta de comprimento igual ao arco percorrido $r\delta\theta$. Quando $\lim_{\delta\theta \rightarrow 0}$, a aproximação é exata. Com o auxílio da Equação (2.34), temos que

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta A}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{r^2 \delta\theta}{2\delta t} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2} = C_2. \quad (2.37)$$

Portanto a variação da subárea percorrida por unidade de tempo é constante, como enuncia a segunda lei de Kepler.

2.2.4.2 Primeira lei de Kepler.

Vamos agora deduzir a primeira lei de Kepler.

O módulo do momento angular por unidade de massa de um corpo é

$$l_m = r^2 \dot{\theta}, \quad (2.38)$$

e combinando com a componente radial da aceleração obtido na Equação (2.31), tem-se que

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2},$$

obtemos

$$\ddot{r} - \frac{l_m^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (2.39)$$

Supondo que $r = \frac{1}{u}$, temos

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -r^2 \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -l_m \frac{du}{d\theta}, \quad (2.40)$$

e usando a Equação (2.40), temos que a segunda derivada é

$$\ddot{r} = -l_m \frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = -l_m \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -l_m^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (2.41)$$

Substituindo a Equação (2.41) na Equação (2.39) e cancelando os termos comuns, temos

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{l_m^2}. \quad (2.42)$$

Resolvendo a EDO definida na Equação (2.42), obtemos a função

$$u(\theta) = \frac{GM}{l_m^2} [1 - e \cos(\theta - \theta_0)].$$

Sabendo que $u = \frac{1}{r}$ e considerando $\theta_0=0$, temos

$$r(\theta) = \frac{r_c}{1 - e \cos(\theta)}, \quad (2.43)$$

onde $r_c = \frac{l_m^2}{GM}$ e e é a excentricidade.

Como pode ser visto no Apêndice A, a Equação (2.43) é a equação polar das cônicas. A Equação(2.43) pode representar uma uma elipse, como afirma a primeira lei, assim como pode ser outras cônicas como uma parábola ou uma hipérbole, dependendo do valor da excentricidade. Como os planetas tem excentricidade entre zero e um, as órbitas planetárias são sempre elipses como afirma a primeira lei de Kepler. No entanto,

a lei pode ser estendida também para outros corpos em que as órbitas são parabólicas ou hiperbólicas como cometas e asteróides.

2.2.4.3 Terceira lei de Kepler.

Aqui vamos deduzir a terceira lei de Kepler.

A área de uma elipse é igual a

$$A = \pi ab,$$

onde a é o comprimento do semi-eixo maior e b é o comprimento do semi-eixo menor.

Usando as equações (2.38) e (2.37) deduzimos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{l_m}{2}.$$

Logo temos que

$$A = \frac{dA}{dt} \mathcal{T},$$

onde \mathcal{T} é o período, ou seja, o tempo que o corpo faz uma revolução completa em torno da estrela.

Então

$$\mathcal{T} = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = \frac{2\pi ab}{l_m} \rightarrow \mathcal{T}^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{l_m^2}.$$

Sabendo que

$$a = \frac{r_c}{1 - e^2}$$

e

$$b = \frac{r_c}{\sqrt{1 - e^2}},$$

temos

$$\mathcal{T}^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{l_m^2} = \frac{4\pi^2 a^2 r_c^2}{(1 - e^2)GM r_c} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 = K a^3.$$

O que prova a terceira lei de Kepler.

3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.

3.1 Escolha do método.

Muitos problemas físicos são modelados por sistemas de equações diferenciais, que descrevem a evolução no tempo do estado do sistema. Muitos deles têm a propriedade de conservar uma grandeza ao longo do tempo, como, por exemplo, a energia mecânica do sistema de equações do problema de N corpos. Tais problemas são chamados conservativos ou hamiltonianos. Para a grande maioria desses sistemas, não existe solução analítica, ou então, a solução é difícil de encontrar, e se recorre a métodos numéricos para encontrar as soluções desse sistemas. Segundo [20], quando é desejado encontrar a solução numérica de um sistema hamiltoniano com métodos padrões, ainda que bem definidos, não se tem informação alguma da geometria natural do sistema hamiltoniano. O que geralmente se faz, é monitorar a conservação de energia mecânica e utilizar técnicas que forçam a solução numérica a permanecer numa faixa de energia escolhida. De forma a valorizar a geometria natural dos sistemas hamiltonianos, foram criados os Algoritmos Integradores Simpléticos que objetivam preservar a estrutura geométrica dos sistemas hamiltonianos, e que têm geralmente uma melhor performance em longas simulações, preservando a energia mecânica em média. Essa estrutura geométrica é chamada de área simplética, e é calculada da seguinte forma:

- Para cada par de vetores de posição e momento linear, define-se um plano. Por exemplo, em cada instante de tempo temos o vetor posição r_1 e momento linear p_1 para o corpo 1 e obtém-se a área do plano definido por esses dois vetores.
- Chama-se de área simplética a soma das áreas dos planos definidos por cada corpo em cada instante de tempo.

Um método simplético, portanto, visa preservar a área simplética ao longo do tempo.

Nas subseções 3.1.1 e 3.1.2 serão introduzidos dois métodos para resolver numericamente o problema de N corpos: o método de Runge Kutta de Quarta Ordem, que é um método padrão, muito utilizado na solução de sistemas de equações diferenciais em geral, e um método simplético de Quarta Ordem chamado de método de Ruth. Após a apresentação destes métodos, serão exibidos na subseção 3.1.3 os testes que evidenciam que o método simplético apresenta melhores resultados, como era esperado.

3.1.1 Método de Runge Kutta de quarta ordem.

O problema originalmente é constituído por equações diferenciais de segunda ordem, mas é convertido para um sistema de equações de primeira ordem para podermos usar o método. O método para uma equação é equivalente ao método para o sistema. Nessa seção deduz-se o método de Runge Kutta de segunda ordem, mas pode-se obter de forma análoga o método de quarta ordem que foi usado no trabalho, bastando usar o polinômio de Taylor com ordem mais elevada.

Seja a Equação (3.1) uma equação diferencial ordinária de primeiro grau

$$y'(t) = f(t, y). \quad (3.1)$$

Para iniciar a dedução, utiliza-se o Teorema 3.1

Teorema 3.1 (Teorema de Taylor). [2] *Seja $y(t) \in C^m[a, b]$, tal que $\exists y^{(n+1)}(t)$ em $[a, b]$ com t e $t+\Delta t \in [a, b]$,*

então $\exists \xi \in [t, t + \Delta t]$, tal que

$$y(t + \Delta t) = P_n + E_n,$$

com

$$P_n = \sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(t)}{i!} (\Delta t)^i$$

e

$$E_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\Delta t)^{n+1}.$$

Para $n = 2$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + y'(t)\Delta t + \frac{y''(t)}{2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3). \quad (3.2)$$

Substituindo a Equação(3.1) na Equação (3.2)

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y)\Delta t + \frac{f'(t, y)}{2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3). \quad (3.3)$$

Sabendo que

$$f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t), \quad (3.4)$$

e substituindo a Equação (3.4) na Equação (3.3), tem-se

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y) \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t) + O(\Delta t^3). \quad (3.5)$$

A Equação (3.5) equivale a

$$y(t + \Delta t) = y(t) + a f(t + \alpha, y + \beta) + O(\Delta t^3),$$

para algum a, α e β . Para encontrá-los, usaremos o Teorema 3.2.

Teorema 3.2 (Teorema de Taylor para duas variáveis). [2] *Suponha que $f(t, y)$ e todas as suas derivadas parciais de grau menor que $(n+1)$ são contínuas em $D = \{(t, y), a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$ e que $(t, y) \in D$. Então $\forall (t, y) \in D, \exists \xi \in [t, t + \Delta t]$ e $\exists \mu \in [y, y + \Delta y]$, tais que*

$$f(t + \Delta t, y + \Delta y) = P_n + E_n,$$

com

$$P_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (\Delta t)^{i-j} (\Delta y)^j \frac{\partial^i f(t, y)}{\partial t^{(i-j)} \partial y^j}$$

e

$$E_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (\Delta t)^{n+1-i} (\Delta y)^i \frac{\partial^{n+1} f(\xi, \mu)}{\partial t^{(n+1-i)} \partial y^i}.$$

Para $n = 1$

$$af(t+\alpha, y+\beta) = af(t, y) + a\alpha \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + a\beta \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + O(\Delta t^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta t \Delta y).$$

Para a $f(t+\alpha, y+\beta)$ ser igual à Equação (3.5), os valores tem que ser

$$a = \Delta t,$$

$$\alpha = \frac{\Delta t}{2}$$

e

$$\beta = \frac{\Delta t}{2} f(t, y).$$

Logo

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y)\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t) + O(\Delta t^3).$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + \frac{\Delta t}{2} f(t, y)\right) + O(\Delta t^2) + O(\Delta y^2) + O(\Delta t \Delta y) + O(\Delta t^3).$$

Como y é uma função de t , então

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + \frac{\Delta t}{2} f(t, y)\right) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t^3).$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, y + \frac{\Delta t}{2} f(t, y)\right) + O(\Delta t^2). \quad (3.6)$$

A Equação (3.6) é a fórmula do método de Runge Kutta de Segunda Ordem.

O que foi feito nessa seção, foi usar uma estimativa de Taylor para a função $y(t)$ de ordem $n + 1$, aproximar a segunda derivada através de Taylor de Ordem N para uma função de duas variáveis, e com isso obter um método que só depende da primeira derivada de ordem N . De forma análoga, o Runge Kutta de Quarta ordem estima o valor da função usando um polinômio de Taylor de Quinta Ordem, aproxima as derivadas através de Taylor para duas variáveis com Ordem 4 e obtém um método de Ordem 4.

O pseudo-código do Runge Kutta de Quarta é apresentado na Figura 3.1, enquanto que as fórmulas estão apresentadas na Figura 3.2.

```

a,b,n,y0

% a= inicio da malha,
% b= fim da malha,
% n= numero de intervalos
% y0 = valor inicial

h=(b-a)/n;
t=a;
y=y0;

for i=1:N
    K1=h*f(t,y);
    K2=h*f(t+h/2,y+K1/2);
    K3=h*f(t+h/2,y+K2/2);
    K4=h*f(t+h,y+K3/2);

    y=y+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
    t=a+i*h;
end

```

Figura 3.1: Pseudo-código do Runge Kutta Quarta Ordem.

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \alpha, \\
 k_1 &= hf(t_i, w_i), \\
 k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\
 k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\
 k_4 &= hf(t_{i+1}, w_i + k_3), \\
 w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),
 \end{aligned}$$

Figura 3.2: Fórmulas do Runge Kutta Quarta Ordem.

[2]

3.1.2 Método de Ruth.

Nessa seção aborda-se um método simplético de quarta ordem, o método de Ruth [9] [23].

Considere inicialmente um sistema de equações diferenciais em forma hamiltoniana

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.7)$$

e

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.8)$$

onde \mathbf{q} é o vetor posição, \mathbf{p} é o vetor momento linear e H é o hamiltoniano do sistema. O sistema formado pelas equações (3.7) e (3.8) é equivalente ao problema apresentado na Equação (2.8). O hamiltoniano H pode representar, por exemplo, a energia mecânica E definida na Equação (2.14).

Seja \mathbf{z} um vetor constituído pelos vetores posição \mathbf{q} e momento linear \mathbf{p} , ou seja,

$$\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p});$$

logo sua variação no tempo é

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}}.$$

Usando as equações (3.7) e (3.8), obtém-se

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}},$$

$$\dot{\mathbf{z}} = D_H \mathbf{z},$$

onde

$${}^1D_G F = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}.$$

E a solução formal exata do problema é:

$$\mathbf{z} = e^{D_H t} \mathbf{z}_0,$$

onde \mathbf{z}_0 é a condição inicial do problema.

¹é um operador bilinear chamado de parênteses de Poisson, definido para quaisquer duas funções F e G no espaço de fase.

Suponha que o hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ seja separável, ou seja, constituído de uma soma de parcelas de forma que cada parcela só dependa de uma das variáveis, logo

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}),$$

onde T pode representar, por exemplo, a energia cinética e V a energia potencial U , definidas na Equação (2.14).

Neste caso o operador D_H também é separável e portanto

$$D_H = D_T + D_V.$$

Substituindo esses resultados na solução formal, tem-se

$$\mathbf{z} = e^{(D_T + D_V)t} \mathbf{z}_0. \quad (3.9)$$

Segundo [23], existem escalares k , c_i e d_i , de forma que

$$e^{(D_T + D_V)t} = \prod_{i=1}^k e^{c_i D_T t} e^{d_i D_V t} + O(t^{n+1}). \quad (3.10)$$

Substituindo a Equação (3.10) na Equação (3.9), tem-se

$$\mathbf{z} \approx \prod_{i=1}^k e^{c_i D_T t} e^{d_i D_V t} \mathbf{z}_0.$$

Sabendo que

$$e^{d_i D_V t} \mathbf{z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d_i t D_V)^n}{n!} \right) \mathbf{z} = (1 + d_i t D_V) \mathbf{z},$$

$$D_V^n \mathbf{z} = 0, \forall n > 1,$$

$$e^{c_i D_T t} \mathbf{z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c_i t D_T)^n}{n!} \right) \mathbf{z} = (1 + c_i t D_T) \mathbf{z},$$

$$D_T^n \mathbf{z} = 0, \forall n > 1,$$

portanto

$$\mathbf{z} \approx \prod_{i=1}^k (1 + c_i t D_T)(1 + d_i t D_V) \mathbf{z}_0.$$

Para cada fator do produtório que contém d_i , tem-se que

$$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p} - t d_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}},$$

enquanto \mathbf{q} não se altera, e para cada fator do produtório que contém c_i , tem-se que

$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} + tc_i \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}},$$

enquanto \mathbf{p} não se altera.

Para cada k , pode ser obtido um método simplético.

- Para $k = 1$, tem-se $c_1 = d_1 = 1$ e obtém-se o chamado método de Euler simplético [13].

- Para $k = 2$, tem-se o chamado método de Stömer-Verlet [17].

$$c_1 = \frac{1}{2} \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad d_1 = 1 \quad d_2 = 0.$$

- Para $k = 3$, tem-se

$$c_1 = 1 \quad c_2 = -\frac{2}{3} \quad c_3 = \frac{2}{3} \quad d_1 = -\frac{1}{24} \quad d_2 = \frac{3}{4} \quad d_3 = \frac{7}{24}.$$

- Para $k = 4$, que é o método de Ruth, tem-se:

$$c_1 = c_4 = \frac{1}{2(2-2^{\frac{1}{3}})} \quad c_2 = c_3 = \frac{1-2^{\frac{1}{3}}}{2(2-2^{\frac{1}{3}})} \quad d_1 = d_3 = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{3}}}$$

$$d_2 = -\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2-2^{\frac{1}{3}}} \quad d_4 = 0.$$

O cálculo dos coeficientes para $k = 3$ e para $k = 4$ podem ser encontrados em [9].

3.1.3 Testes.

Nessa subseção apresentam-se os testes que foram utilizados para auxiliar na escolha do método numérico usado para resolver os problemas no restante do trabalho. Como já dito nessa seção, foram testados dois candidatos: o Runge Kutta de quarta ordem e o método de Ruth.

O primeiro teste foi realizado para um problema de Kepler, que consiste no movimento de um planeta sob a ação de um potencial gravitacional gerado por uma massa pontual localizada no centro do sistema de coordenadas, como apresentado na Subseção 2.2.4. Nesse exemplo o planeta é a Terra sob a ação do potencial gravitacional solar, inicialmente no periélio, que é a posição mais próxima ao Sol. Primeiramente, resolveu-se o problema através de cada método para um período de 10 anos, com uma malha de 2^{10} pontos, e a seguir resolveu-se o mesmo problema para um período de 6400 anos com a mesma malha, afim de medir a evolução do erro com o aumento do tempo de simulação. A medida de erro escolhida foi o erro relativo da energia mecânica em relação à energia mecânica nas condições iniciais.

As figuras 3.3 e 3.4 mostram o erro para o teste feito para o método de Ruth. Note que o erro relativo da energia mecânica oscila com o passar do tempo, mas a ordem do erro fica limitada na ordem de 10^{-5} tanto para a simulação de 25 anos quanto para a simulação de 6400 anos. As figuras 3.5 e 3.6 mostram o erro usando o método de Runge Kutta. Note que ao contrário do teste anterior, quando o tempo de simulação aumenta de 25 para 6400 anos, o erro aumenta da ordem de 10^{-4} para 10^{-1} . Portanto, os testes indicam que para o problema de Kepler, o método de Ruth teve melhor resultado que o método de Runge Kutta, já que o erro relativo à energia mecânica ficou limitado para as simulações, enquanto o método de Runge Kutta apresentou um erro aumentando de forma

crescente em relação ao tempo de simulação.

Portanto, para o problema de Kepler, os testes indicaram que o método de Ruth é melhor. Ele conserva a energia em média enquanto o método de Runge Kutta não a conserva. E o que ocorre com mais corpos? Para observar o comportamento dos métodos em problemas mais complexos, fez-se um teste semelhante para um problema de 3 corpos para verificar se o método de Ruth continua apresentando melhores resultados.

Os dados foram extraídos de [12]. O modelo consiste de 3 corpos, uma estrela de massa solar estacionária no centro, um planeta jupiteriano (massa da ordem de Júpiter) com órbita circular de período de 4 dias e um planeta com massa igual à Terra orbitando a estrela numa órbita elíptica com excentricidade 0.7 e com semi-eixo maior 0.05 UA. Inicialmente simulou-se o modelo para um período de 10 dias com uma malha de 10^{14} pontos e a seguir foi simulado para 10240 dias com a mesma malha. As figuras 3.7 e 3.8 mostram os erros usando o método de Ruth. Note que o erro relativo à energia mecânica inicial, para simulação de 10 dias, foi da ordem de 10^{-13} e aumentou para a ordem de 10^{-12} quando aumentou-se o período de simulação para 10240 dias. As figuras 3.9 e 3.10 exibem os erros nos testes para o método de Runge Kutta. Note que o erro relativo à energia mecânica inicial para simulação de 10 dias foi da ordem de 10^{-13} e aumentou para 10^{-11} quando aumentou-se o período de simulação para 10240 dias.

Portanto, assim como no exemplo de Kepler comparado anteriormente, o método de Ruth obteve maior sucesso em conservar a energia mecânica do sistema ao longo do tempo e será o método escolhido para resolver os problemas nos próximos estudos.

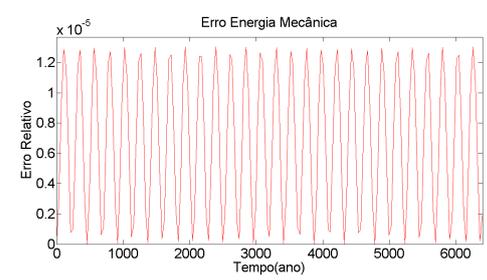
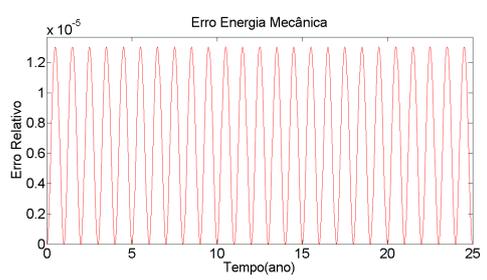


Figura 3.3: Erro método Runge Kutta para Kepler. Figura 3.4: Erro método Runge Kutta para Kepler.

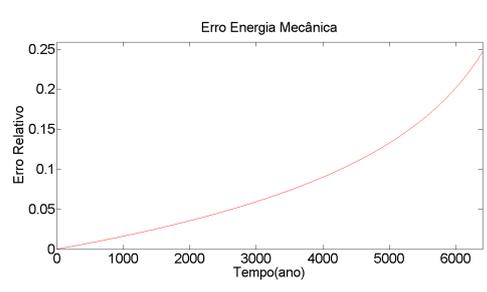
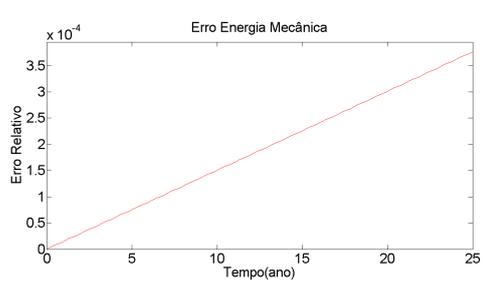


Figura 3.5: Erro método Runge Kutta para Kepler. Figura 3.6: Erro método Runge Kutta para Kepler.

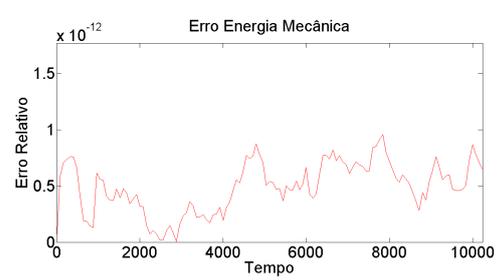
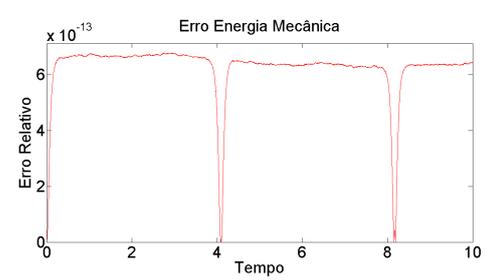


Figura 3.7: Erro método Runge Kutta para 3 corpos. Figura 3.8: Erro método Runge Kutta para 3 corpos.

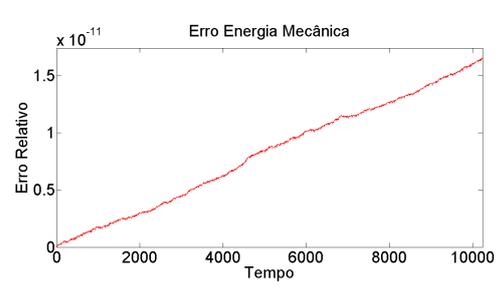
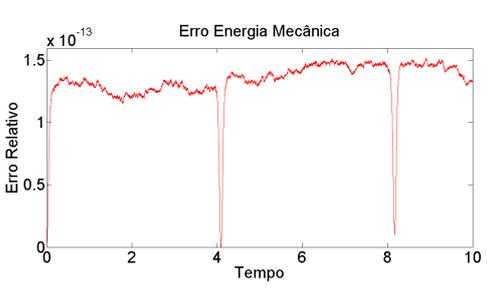


Figura 3.9: Erro método Runge Kutta para 3 corpos. Figura 3.10: Erro método Runge Kutta para 3 corpos.

3.2 Problema de Kepler.

3.2.1 Introdução.

Nessa seção será apresentada a análise numérica do problema de Kepler, que é o problema de N corpos mais simples. Como definida na Subseção 2.2.4, o problema consiste de duas massas pontuais m_1 e m_2 , com $m_1 \gg m_2$. Suporemos também que a massa m_1 está na origem do sistema de coordenadas e fixa, enquanto a massa m_2 orbita a massa m_1 numa órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica, com m_1 localizada num dos focos. O problema é modelado, a partir da segunda lei de Newton, pela EDO

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3},$$

onde \mathbf{r}_2 é a posição da massa m_2 no instante t , r_2 é o módulo do vetor \mathbf{r}_2 , G é a constante gravitacional universal, m_1 é a massa do corpo fixo num dos focos.

Nas próximas subseções, simula-se o sistema Terra Sol, com o Sol sendo a massa m_1 e a Terra a massa m_2 . O Sol está inicialmente localizado na origem, enquanto que a Terra está localizada no eixo x no periélio, que é sua posição mais próxima ao Sol. Os dados iniciais estão resumidos na Tabela 3.1.

3.2.2 Teste de malha.

Nessa subseção exibiremos o teste de malha do problema. O intervalo total de simulação é de 4 anos, e a malha inicial contém apenas dois nós, que são o ponto inicial

	Terra	Sol
massa(M_{\odot})	$3.003 * 10^{-6}$	1
x(UA)	0.9832	0
y(UA)	0	0
p_x (M_{\odot} UA/ano)	0	0
p_y (M_{\odot} UA/ano)	$1.918 * 10^{-5}$	0

Tabela 3.1: Condições iniciais do problema de Kepler.

e o nó que representa 4 anos. Depois obtemos uma segunda malha, cujo espaçamento é a metade do intervalo anterior; e obtemos um vetor cujas componentes são as diferenças dos nós que têm correspondentes nas duas malhas. Nesse primeiro caso a primeira malha tem dois nós: o primeiro é $t = 0$, que representa o nó inicial, e o segundo representa o instante de tempo de 4 anos. Na segunda malha, temos três nós: o nó inicial representa o instante $t = 0$, o segundo nó representa o instante $t = 2$ anos, e o final representa o instante $t = 4$ anos. Portanto, os nós que possuem correspondentes nas duas malhas são $t = 0$ e $t = 4$. Faz-se a subtração dos valores da variável que possuem correspondentes nas duas malhas, os nós $t=0$ e $t=4$; guardam-se os resultados num vetor e calcula-se a norma do vetor. À medida que o processo é realizado para malhas cada vez menores, se a solução numérica obtida pelo método convergir para algum resultado, a norma tende a zero.

As figuras 3.11 a 3.14 mostram o erro obtido, em escala logarítmica, ao refinar a malha para cada uma das variáveis usando o método de Ruth. A variável N no gráfico representa a malha com 2^n intervalos. Note que, o erro aumenta até a malha 6 e depois decresce até a malha 15, onde se estabiliza. Tabelas exibindo mais detalhes do teste podem ser encontradas no Apêndice B.1. Note que os resultados indicam que a solução numérica, obtida utilizando o método de Ruth, está convergindo.

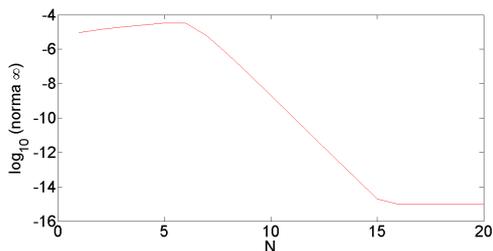


Figura 3.11: Teste de malha para a coordenada horizontal da posição.

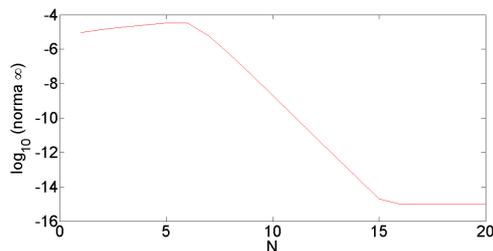


Figura 3.12: Teste de malha para a coordenada vertical da posição.

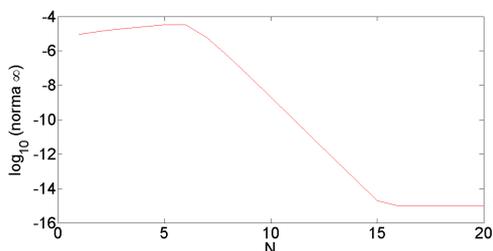


Figura 3.13: Teste de malha para a coordenada horizontal do momento linear.

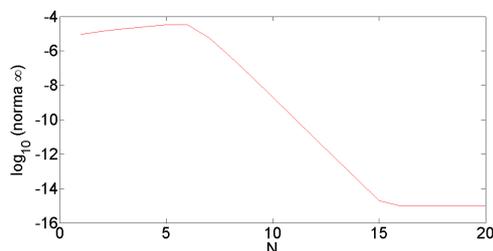


Figura 3.14: Teste de malha para a coordenada vertical do momento linear.

3.2.3 Solução numérica.

Apresenta-se nessa subseção uma simulação numérica do problema de Kepler durante um tempo de simulação bem mais longo que 4 anos. Novamente temos o sistema Terra-Sol com condições iniciais apresentadas na Tabela 3.1, porém num tempo de simulação de 10^6 anos com intervalo de tempo de $9,313 \cdot 10^{-4}$ ano (≈ 8 horas). Nas figuras 3.15 e 3.16 apresentam-se a órbita e a distância da Terra ao longo do tempo. Note que a distância da Terra ao Sol varia, aproximadamente, entre o periélio da Terra (0,98 UA), e o afélio da Terra (1,02 UA), como era previsto e a órbita é elíptica, o que concorda com a primeira lei de Kepler. Nas próximas subseções verifica-se se a solução obedece às leis de conservação físicas e estima-se o erro através das leis de Kepler.

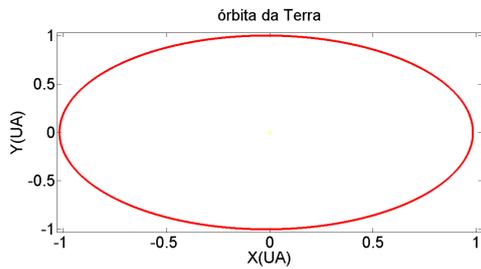


Figura 3.15: Plano orbital da Terra.

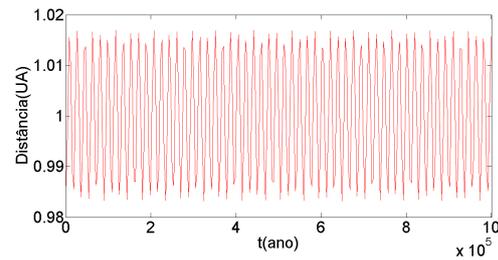


Figura 3.16: Distância da Terra ao Sol.

3.2.4 Verificação.

Nessa subseção verificaremos se a solução numérica exibida na seção anterior obedece às leis físicas. O problema de Kepler, apesar de ser um problema de dois corpos, é resolvido como um problema de um corpo, que sofre a ação de uma força externa, que é a força gravitacional, pela massa fixa. O momento angular se conserva como foi visto na Subseção 2.2.2, porque apesar de existir uma força externa, ela é central, o que resulta num torque externo nulo. A energia mecânica também se conserva, porque só estão agindo forças conservativas, no caso a força gravitacional. Seguem nas Figuras 3.17 e 3.18 os resultados dos testes. Nos testes usam-se como métricas o erro relativo definido na Equação (3.11) para a energia mecânica e o momento angular.

$$E_r(t) = \frac{|M(t) - M(0)|}{M(0)}, \quad (3.11)$$

onde M é a variável analisada, $M(t)$ é o valor da variável no instante t e $M(0)$ é o valor da variável no instante inicial $t = 0$.

Note que, nos testes de energia mecânica e da componente perpendicular ao plano orbital do momento angular, apresentados nas figuras 3.17 e 3.18, o erro relativo ficou

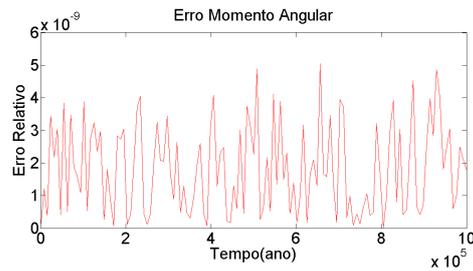
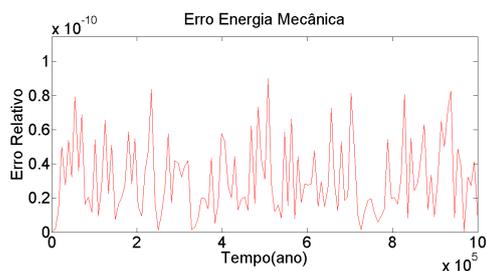


Figura 3.17: Erro relativo da energia mecânica- Figura 3.18: Erro relativo do momento angular Z.

na ordem de 10^{-10} e 10^{-9} respectivamente, mostrando que a solução obedeceu satisfatoriamente às leis de conservação previstas. Quanto às outras componentes do momento angular, os gráficos ficaram exatamente nulos, o que também era previsto teoricamente, já que o problema é planar.

3.2.5 Validação.

Nesta subseção, validaremos a solução encontrada através das leis de Kepler. O erro em relação a primeira lei de Kepler foi computado usando a equação em coordenadas cartesianas da elipse, que é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde a é o semi-eixo maior, b é o semi-eixo menor, e x e y são as coordenadas da solução exata num determinado instante de tempo. Usando as coordenadas x e y na parte esquerda da equação, o resultado deve ser sempre 1 como afirma a equação. Porém, ao usar as coordenadas calculadas numericamente, o resultado difere da unidade, e definimos o erro como

$$E = \left| \frac{r_x^2}{a^2} + \frac{r_y^2}{b^2} - 1 \right|,$$

onde r_x e r_y são as coordenadas calculadas numericamente.

A segunda lei de Kepler afirma que a área percorrida em intervalos de tempos iguais é constante. A área percorrida num intervalo de tempo dt é calculada como

$$\frac{rp}{2m},$$

onde r é o módulo do vetor posição, p é o módulo do vetor momento linear e m é a massa. Para estimar o erro, inicialmente calculamos a área percorrida no primeiro intervalo. Depois para cada instante de tempo, calculamos o erro como:

$$E = |A(t) - A_0|,$$

onde $A(t)$ é a área percorrida entre os instantes $t - dt$ e t , e $A(0)$ é a área percorrida no primeiro intervalo.

Os resultados encontram-se nas figuras 3.19 e 3.20. Note que, mais uma vez, os erros relativos apresentados são baixos, o que sugere que a solução numérica encontrada é confiável para uma aproximação de ordem 10^{-4} .

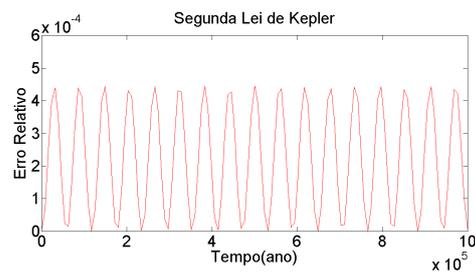
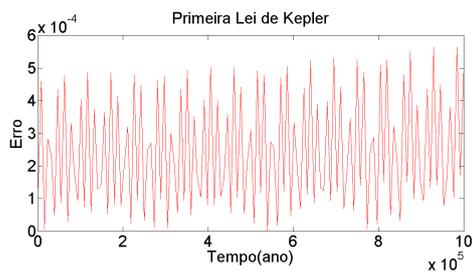


Figura 3.19: Erro da primeira lei de Kepler. Figura 3.20: Erro da segunda lei de Kepler.

3.2.6 Conclusão.

Nesta seção resolvemos através do método de Ruth, um método simplético de quarta ordem, o problema de Kepler num período de 10^6 anos, um período de tempo curto astronomicamente, mas bastante longo em termos computacionais, verificamos e validamos a solução numérica encontrada através das leis de conservação físicas e das leis de Kepler. O objetivo foi verificar se o método de Ruth e o código implementado são adequados para resolver problemas de N corpos, já que nesse caso especial, a solução analítica era conhecida e pode-se avaliar o erro exatamente. Nas próximas seções, usaremos o mesmo método para resolver casos mais complexos, em que não teremos mais uma solução analítica para verificar o erro, mas o estimaremos através das leis físicas.

3.3 Problema dos dois corpos.

3.3.1 Introdução.

Nesta seção apresenta-se uma solução numérica para o problema de dois corpos e avalia-se a qualidade da solução através das leis de conservação físicas e das leis de Kepler. O problema analisado nas próximas subseções, consiste de uma estrela dupla, ou seja, duas estrelas que orbitam o centro de massa comum e a mesma massa. As condi-

	Estrela 1	Estrela 2
massa(M_{\odot})	1	1
x(UA)	1	-1
y(UA)	0	0
p_x (M_{\odot} UA/ano)	0	0
p_y (M_{\odot} UA/ano)	$\sqrt{\frac{G}{4}}$	$-\sqrt{\frac{G}{4}}$

Tabela 3.2: Condições iniciais da estrela dupla.

ções iniciais estão resumidas na Tabela 3.2. Na próximas seções faz-se um teste de malha para avaliar se a solução numérica converge. A seguir, exibi-se a solução numérica para um período de 10^6 anos. Na seção de verificação, usam-se novamente as leis de conservação físicas, enquanto que na validação usam-se as leis de Kepler para o problema de Kepler equivalente, o qual será explicado com mais detalhes na seção para medir o erro. Finalmente, na última subseção, mostram-se as conclusões.

3.3.2 Teste de malha.

Nessa subseção exibe-se um teste de malha de forma semelhante à seção anterior, para avaliar se a solução numérica com o método de Ruth converge neste caso. A diferença para o teste anterior, é que dessa vez avalia-se a convergência para cada uma das componentes de posição e velocidade de cada corpo, enquanto que anteriormente o teste foi realizado apenas para o corpo em movimento. Os resultados são exibidos nas figuras 3.21 a 3.24 em escala logarítmica, para uma das estrelas. A variável N em cada gráfico representa a malha de 2^n intervalos. Os resultados para a outra estrela são iguais e, por isso, omitimos os resultados. Tabelas exibindo mais detalhes do teste podem ser encontradas no Apêndice B.2. Como pode ser notado, para todas as variáveis o erro tende a decrescer até a malha 15 e depois se estabiliza entre -10 e -15, ou seja, quando o erro está entre a décima e a décima quinta casa decimal.

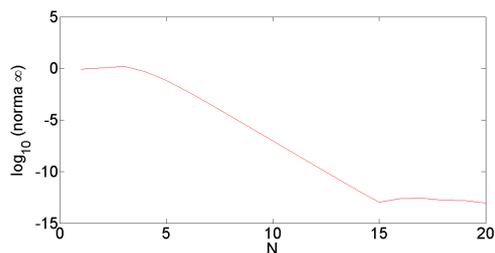


Figura 3.21: Teste de malha para a coordenada horizontal da posição.

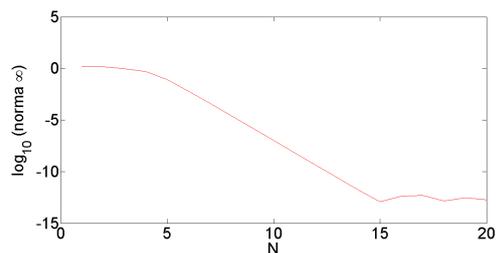


Figura 3.22: Teste de malha para a coordenada vertical da posição.

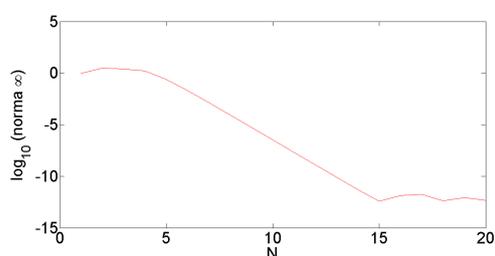


Figura 3.23: Teste de malha para a coordenada horizontal do momento linear.

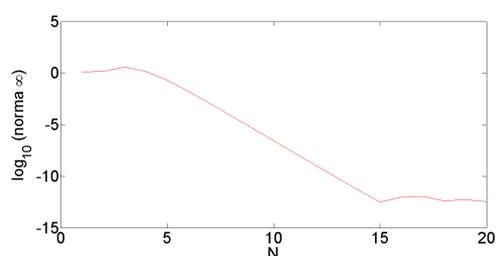


Figura 3.24: Teste de malha para a coordenada vertical do momento linear.

3.3.3 Solução numérica.

Nessa subseção exibe-se a solução numérica usando o método de Ruth, para a estrela dupla com dados iniciais exibidos na Tabela 3.2, num período de 10^6 anos. As duas estrelas apresentaram a mesma órbita, um círculo de raio unitário centrado na origem, sendo que a diferença é que estavam em posições diferentes no círculo em cada instante de tempo. A defasagem é mostrada nas figuras 3.26 e 3.27. Na Figura 3.26 por exemplo, note que no instante inicial a estrela 1 está na coordenada $x=1$ enquanto que a estrela 2 está na coordenada $x=-1$, o que concorda com a Tabela 3.2. Na Figura 3.27 é exibida a defasagem na coordenada y das estrelas, que inicialmente estão em $y=0$.

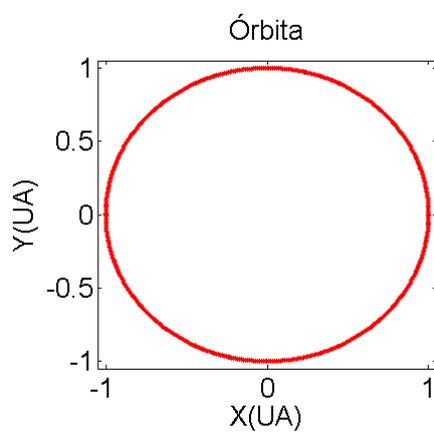


Figura 3.25: Solução numérica do problema de dois corpos.

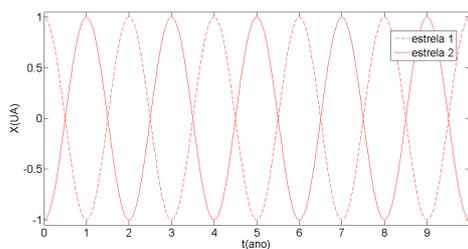


Figura 3.26: Evolução da coordenada x das estrelas.

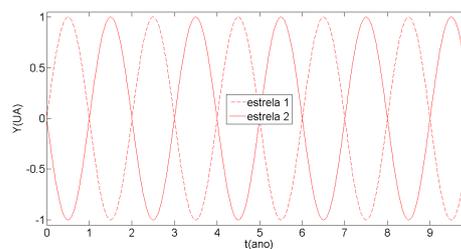


Figura 3.27: Evolução da coordenada y das estrelas.

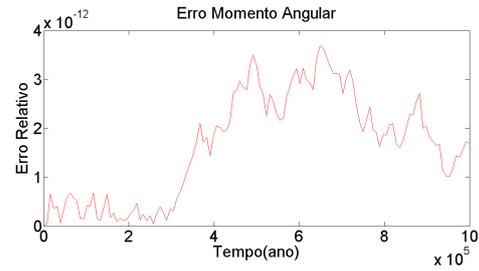
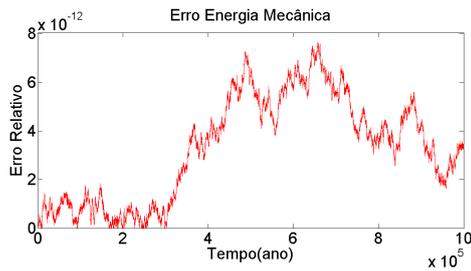


Figura 3.28: Erro relativo da energia mecânica- Figura 3.29: Erro relativo da componente normal do momento angular.

3.3.4 Verificação.

Nessa subseção apresentaremos os testes com as leis de conservação físicas para a solução exibida na seção anterior. Os resultados são apresentados nas figuras 3.28 e 3.29. Note que o erro da energia mecânica e o da componente normal ao plano do momento angular são da ordem de 10^{-12} . Já o valor das outras componentes do momento angular, assim como todas as componentes do momento linear permaneceram nulas.

3.3.5 Validação.

Nessa subseção apresenta-se o erro relativo em relação às leis de Kepler. De fato, o problema de dois corpos não satisfaz as hipóteses das leis de Kepler, mas pode-se encontrar um problema de Kepler equivalente e avaliar o erro nesse problema. O procedimento usado para encontrar o problema equivalente será apresentado nessa seção.

Inicialmente temos a segunda lei de Newton para cada corpo

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \quad (3.12)$$

e

$$\mathbf{F}_{21} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2. \quad (3.13)$$

Pela terceira lei de Newton, tem-se

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}.$$

Define-se a aceleração relativa entre os dois corpos como

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2.$$

Isolando-se a aceleração nas equações (3.12) e (3.13), usando a terceira lei na Equação (3.13) tem-se

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} = \mathbf{F}_{12} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

Logo

$$\mathbf{F}_{12} = \ddot{\mathbf{r}}\mu,$$

onde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

é chamada de massa reduzida.

Note que

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{G m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3} = \frac{G \mu (m_1 + m_2) \mathbf{r}}{r^3},$$

e portanto

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{G \mu (m_1 + m_2) \mathbf{r}}{r^3} = \mu \ddot{\mathbf{r}}.$$

Ou seja, o problema de dois corpos equivale ao problema de Kepler de um corpo com massa μ , orbitando um corpo fixo de massa $M = m_1 + m_2$, cujo vetor posição é igual à distância dos dois corpos.

Usando então a posição relativa, a velocidade relativa e a massa reduzida; podemos avaliar o problema de dois corpos usando as leis de Kepler. Só para ilustrar, na Figura 3.30 apresenta-se a órbita do problema de Kepler equivalente ao problema de dois corpos apresentado na Tabela 3.2, que é igual a um círculo de raio 2 centrado na origem. Nas figuras 3.31 e 3.32 exibem-se os testes com as leis de Kepler. Observe que o erro pela primeira lei é da ordem de 10^{-10} enquanto que o erro pela segunda lei é da ordem de 10^{-11} , o qual é um erro extremamente baixo. Cabe destacar que na avaliação através das

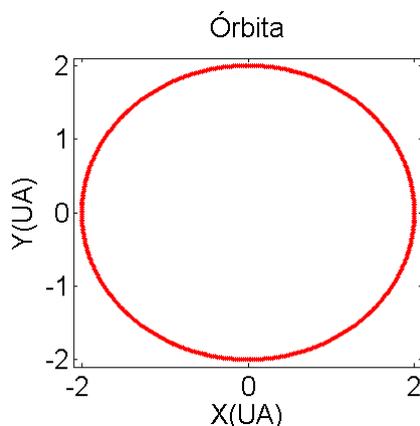


Figura 3.30: Órbita problema de Kepler equivalente ao problema de dois corpos.

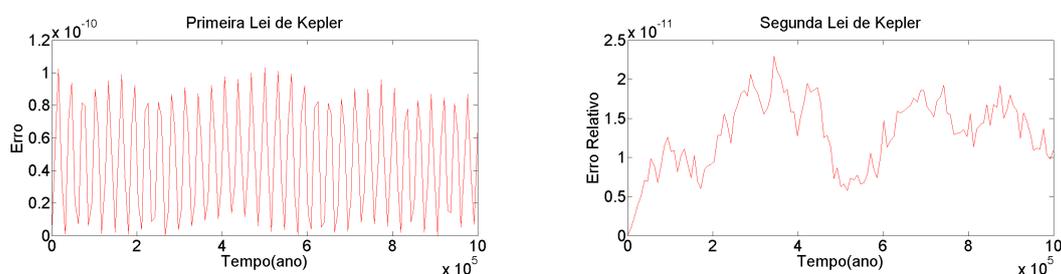


Figura 3.31: Erro relativo da primeira lei de Kepler. Figura 3.32: Erro relativo da segunda lei de Kepler.

leis de Kepler, estamos avaliando a posição dos corpos através da primeira lei de Kepler e o momento linear dos corpos através da segunda lei de Kepler.

3.3.6 Conclusão.

Nesta seção solucionamos numericamente um problema de dois corpos consistindo de uma estrela dupla, cujas componentes têm massas iguais. Fez-se o teste de malha e mostrou-se que a solução converge para um número de intervalos suficientemente grande. Após isso, exibe-se uma simulação numérica para um período total de 10^6 anos, que é verificada pelas leis de conservação físicas e validada através das leis de Kepler

	Estrela 1	Estrela 2	Estrela 3
massa(M_{\odot})	1.000000	1.000000	1.000000
x(UA)	0.970043	-0.970043	0.000000
y(UA)	-0.243087	0.243087	0.000000
p_x (M_{\odot} UA/ano)	0.466203	0.466203	-0.932407
p_y (M_{\odot} UA/ano)	0.432365	0.432365	-0.864731

Tabela 3.3: Condições iniciais da estrela tripla.

aplicadas no problema de Kepler equivalente. Portanto, assim como no capítulo anterior, mostra-se que o método de Ruth é adequado para solucionar o problema de dois corpos.

3.4 Problema de três corpos.

3.4.1 Introdução.

Nesta seção apresenta-se uma solução numérica para o problema de três corpos. O problema analisado nas próximas subseções, consiste de uma estrela tripla, ou seja, três estrelas com a mesma massa que orbitam o centro de massa comum. Nas condições iniciais estão resumidas na Tabela 3.3 e foram extraídas de [4]. Na próximas subseções faz-se um teste de malha para avaliar se a solução numérica converge. A seguir, exibi-se a solução numérica para um período de 10^6 unidades de tempo.² A partir do problema de três corpos, não é possível aplicar as leis de Kepler para validar a solução, mas as leis de conservação físicas continuam válidas e serão utilizadas para verificar a qualidade da solução. Finalmente na última subseção mostram-se as conclusões.

²Utilizamos o termo unidades de tempo, porque a constante gravitacional usada no problema é igual a 1, e ao usar a unidade de massa como a massa solar e de comprimento como a UA, isso só é possível quando a unidade de tempo é igual a $\frac{ano}{2\pi}$

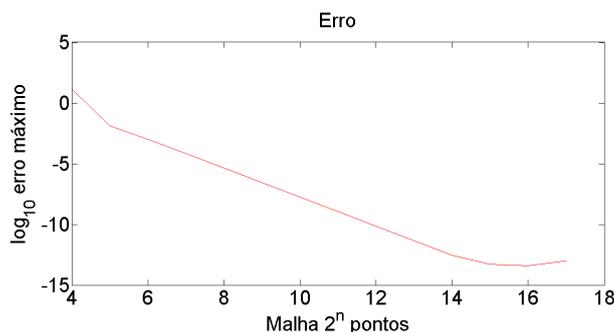


Figura 3.33: Teste Malha Figura Oito.

3.4.2 Teste de malha.

Nessa subseção será realizada o teste de malha para o problema de três corpos dessa seção. O teste será semelhante aos anteriores, mas cada malha será avaliada através do erro da energia mecânica. Para cada nó de uma malha, nós calcularemos o erro relativo a energia mecânica em relação à energia mecânica do instante inicial. A qualidade da malha será equivalente ao maior erro entre todos os seus pontos. Os resultados são exibidos na Figura 3.33. O período de simulação total foi de 10 unidades de tempo.

3.4.3 Solução numérica.

Nessa subseção exibe-se a solução numérica usando o método de Ruth, para a estrela tripla com dados iniciais exibidos na Tabela 3.3, num período de 10^6 unidades de tempo com uma malha de 2^{30} pontos. As órbitas das estrelas são iguais e têm a forma de um oito, por isso essa configuração também é chamada de Figura Oito. As estrelas apresentam a mesma órbita, mas estão em posições diferentes na órbita em cada instante de tempo. Isso está representado nas figuras 3.35 e 3.36, que mostram a defasagem das coordenadas em cada instante de tempo. As órbitas são exibidas na Figura 3.34.

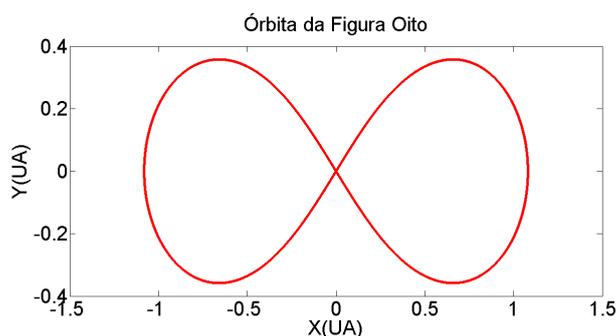


Figura 3.34: Solução numérica de cada estrela.

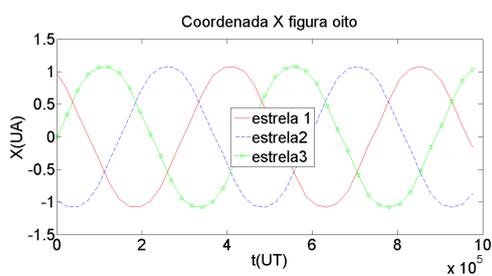


Figura 3.35: Defasagem coordenada X.

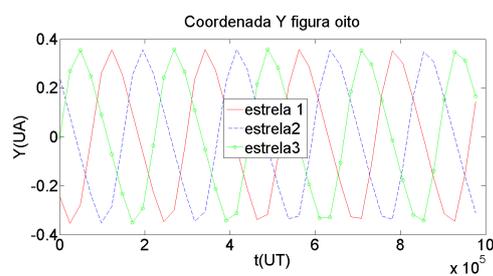


Figura 3.36: Defasagem coordenada Y.

3.4.4 Verificação.

Nessa subseção apresentaremos os testes com as leis de conservação físicas para a solução exibida na seção anterior. Os resultados são apresentados nas figuras 3.37 e 3.38. Note que o erro da energia mecânica ficou da ordem de 10^{-10} e o da componente normal ao plano do momento angular ficou da ordem de 10^{-12} . Já o valor das outras componentes do momento angular, assim como todas as componentes do momento linear permaneceram nulas. Nesse exemplo foi usado o erro absoluto do momento angular total por simplicidade, já que o momento angular total inicial era nulo.

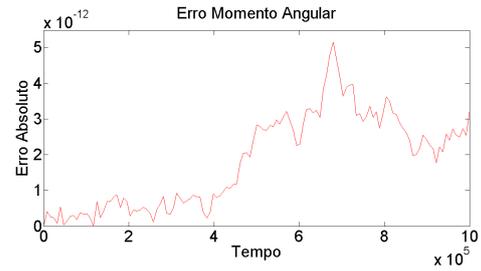
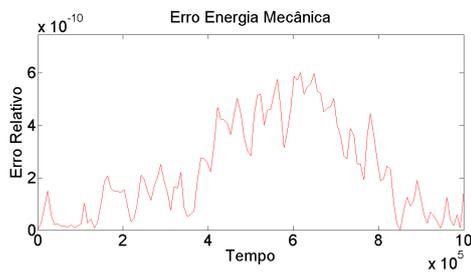


Figura 3.37: Erro relativo da energia mecânica- Figura 3.38: Erro absoluto da componente normal do momento angular.

3.4.5 Conclusão.

Nessa seção foi exibida e analisada uma solução numérica de um problema de três corpos chamado de Figura Oito. Primeiro foi realizado um teste de malha para determinar qual seria uma malha de boa qualidade para resolver nosso problema e logo após uma simulação de 10^6 unidades de tempo através do método Simplético de Quarta Ordem de Ruth. A seguir foi exibido o gráfico da órbita de cada estrela e foi analisado o erro da solução através das leis de conservação físicas. O cálculo do erro mostrou que a solução numérica aproxima na ordem de 10^{-10} a solução esperada e, portanto, a solução numérica é uma boa aproximação.

4 CAOS E EXEMPLOS.

4.1 Sistema dinâmico.

Segundo [15], um sistema dinâmico é definido como uma descrição matemática determinística que faz o estado de um sistema evoluir para um estado seguinte à medida que o tempo passa. No problema de N corpos, o estado do sistema consiste num vetor que contém a posição e o momento de cada um dos corpos, que se modificam com o tempo, segundo as leis de Newton, para outro estado, em cada instante de tempo. Um exemplo de sistema dinâmico contínuo é o sistema de equações diferenciais de primeira ordem que representa o movimento de cada um dos N corpos. De forma compacta, esse sistema pode ser representado como

$$\dot{\mathbf{z}} = F(\mathbf{z}),$$

onde \mathbf{z} é vetor que contém todas as coordenadas de posição e momento de cada um dos N corpos.

Pode-se reduzir um sistema dinâmico contínuo a um tipo de sistema dinâmico discreto chamado de aplicação discreta usando a seguinte técnica. Primeiro considere uma malha discreta no tempo onde $t_n = n\Delta t, \forall n = 0, \dots, N$; onde t_0 representa o instante inicial e t_N o instante final. Depois para cada instante t_n pode-se encontrar o estado do sistema z_n , resolvendo o sistema de equações contínuos usando z_{n-1} como condição inicial. Dessa forma tem-se

$$\mathbf{z}_n = M(\mathbf{z}_{n-1}),$$

onde M é uma aplicação discreta e é uma função que equivale ao processo de resolver o sistema de equações com condição inicial \mathbf{z}_{n-1} .

Para começar considera-se uma aplicação unidimensional da forma

$$z_n = M(z_{n-1}),$$

onde z_n e z_{n-1} são grandezas escalares e a aplicação M é uma função que gera o ponto z_n a partir de z_{n-1} .

Chama-se órbita de um ponto z , o conjunto de pontos que se obtém ao iterar a aplicação a partir do ponto z . Por exemplo, sendo z_0 o ponto que representa a condição inicial do sistema dinâmico, o ponto seguinte da órbita é obtido por

$$z_1 = M(z_0),$$

e o ponto seguinte a z_1 por

$$z_2 = M(z_1) = M(M(z_0)) = M^2(z_0),$$

onde M^2 é a composta $M \circ M$. Portanto, a órbita de um ponto z também pode ser definida como uma sequência z_n de iterações da aplicação a partir do ponto z .

A partir daqui serão enunciados alguns conceitos e teoremas que serão importantes no restante do capítulo.

A órbita de um ponto z é chamada de ponto fixo se todos os pontos da órbita forem iguais ao próprio ponto, logo

$$z_f = M(z_f).$$

Uma órbita é periódica se algum ponto da sequência é igual ao ponto inicial da órbita, logo

$$z_f = M^n(z_f),$$

onde n é chamado de período e M^n representa a aplicação de n vezes da aplicação no ponto z_f . O ponto periódico pode ser interpretado também como um ponto fixo da aplicação M^n e um ponto fixo como sendo um ponto periódico de período 1.

Um ponto fixo pode ser classificado como atrativo ou repulsivo. Um ponto z é chamado de atrativo, se existir um intervalo I tal que para qualquer elemento $z^* \in I$, a órbita do ponto z^* fatalmente passará por z e um ponto z é chamado de repulsivo, se existir um intervalo I tal que para qualquer elemento $z^* \in I$, a órbita do ponto z^* se afasta

cada vez mais do ponto z .

Teorema 4.1. *Se $|\frac{dM}{dz}| < 1$ então o ponto fixo é atrativo e se $|\frac{dM}{dz}| > 1$ é repulsivo.*

A prova desse teorema pode ser encontrada nas páginas 43 e 44 de [6].

Sendo M uma aplicação unidimensional, viu-se anteriormente que um ponto periódico através de M também pode ser considerado um ponto fixo de uma aplicação M^n que representa a aplicação de n vezes da aplicação no ponto periódico. Logo pode-se usar o critério acima para a aplicação M^n e um ponto periódico pode ser classificado também como atrativo ou repulsivo. Mas como se calcula a derivada de M^n ?

Inicialmente começa-se com o caso mais simples. Seja z_0 um ponto periódico de período 2, logo

$$\frac{d}{dz}M^2(z_0) = \frac{d}{dz}M(M(z_0))\frac{d}{dz}M(z_0) = \frac{d}{dz}M(z_1)\frac{d}{dz}M(z_0).$$

Como z_0 é de período 2, sua órbita se resume em alternar entre os pontos z_0 e z_1 . Note então que a derivada de M^2 é o produto das derivadas de M definida em todos os pontos da órbita antes da segunda ocorrência de z_0 . Segundo [6], isso vale para qualquer n e que portanto

$$\frac{dM^n}{dz}(z_0) = \prod_{z \in O} \frac{dM}{dz}(z_i), \quad (4.1)$$

onde O é o conjunto de todos os pontos da órbita de z_0 .

Agora pode-se deduzir a fórmula para determinar o número característico de Lyapunov.

4.2 Número característico de Lyapunov.

Na Seção 4.1 viu-se o que é um sistema dinâmico e alguns conceitos relacionados a ele. Nessa seção deduz-se um método que determina se um sistema é caótico, ao obter o número característico de Lyapunov. Um sistema dinâmico é considerado caótico se alguma perturbação nas condições iniciais do sistema resulta numa órbita completamente diferente da órbita original. Um exemplo será exibido abaixo:

Seja M uma aplicação discreta definida por

$$M(z) = z^2 - 2.$$

Considere agora duas órbitas com condições iniciais bem próximas, uma iniciando em $z_0 = 0$ e outra em $z_0 = 10^{-6}$. Como pode ser visto na Figura 4.1 até a vigésima iteração, a diferença é praticamente imperceptível, mas a partir dessa iteração a órbita de $z_0 = 10^{-6}$ se torna completamente diferente da órbita de $z_0 = 0$, mesmo os pontos iniciais sendo muito próximos. Esse comportamento é chamado de sensibilidade às condições iniciais e é a principal característica de um sistema caótico. O problema de Kepler e de dois corpos não são caóticos, mas alguns sistemas de três corpos podem ser caóticos. Consideramos um sistema de três corpos como o conjunto das equações de movimento

em conjunto com as condições iniciais do problema. Como a abordagem é numérica, a qual está sujeita a erros de arredondamento por menores que sejam, uma pequena alteração nas condições iniciais do problema pode produzir um resultado completamente diferente da solução real, o que resulta na não confiabilidade da resposta numérica. Por isso é necessário algum meio de determinar se um sistema é caótico antes de solucioná-lo numericamente. No restante desta seção serão apresentados dois métodos para determinar se um sistema dinâmico é caótico: o número característico de Lyapunov, o qual será tratado nessa seção e o MEGNO, que será abordado a partir da próxima seção.

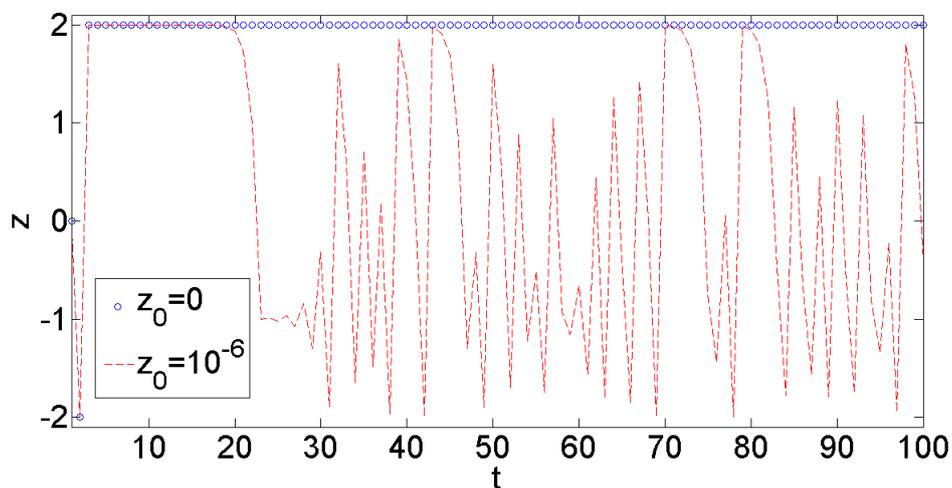


Figura 4.1: Caos numa aplicação unidimensional.

Agora deduz-se o método de determinar o número característico de Lyapunov para aplicações unidimensionais. Inicialmente considere uma aplicação unidimensional M e um ponto periódico z_f dessa aplicação de período n , de forma que

$$z_f = M^n(z_f).$$

Considere um ponto z_n como o ponto no instante n de uma órbita ligeiramente perturbada,

de forma que

$$z_n = z_f + \delta(n),$$

onde $\delta(n)$ é uma pequena perturbação em relação ao ponto fixo z_f em cada instante n .

Suponha que a órbita perturbada se distancia exponencialmente da órbita do ponto fixo, ou seja,

$$|\delta(n)| = \epsilon e^{\lambda n},$$

onde ϵ é o módulo da perturbação inicial ($\delta(0) = \epsilon$) e λ é o chamado número característico de Lyapunov. Note que se $\lambda > 0$, $|\delta z_n|$ cresce enquanto o tempo avança, o que indica que a pequena separação das órbitas inicialmente aumenta exponencialmente com o tempo, enquanto que se $\lambda < 0$ acontece o contrário, a perturbação tende a zero e portanto a órbita perturbada tende à órbita original.

Pode-se isolar o λ para cada instante n com simples operações algébricas de forma que

$$\lambda(n) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta(n)}{\epsilon} \right|.$$

Como a perturbação inicial é pequena então

$$\lambda(n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta(n)}{\epsilon} \right| \right).$$

Sabendo que

$$\delta(n) = z_n - z_f = M^n(z_0) - M^n(z_f) = M^n(z_f + \delta(0)) - M^n(z_f) = M^n(z_f + \epsilon) - M^n(z_f),$$

tem-se

$$\lambda(n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n} \ln \left| \frac{M^n(z_f + \epsilon) - M^n(z_f)}{\epsilon} \right| \right).$$

Note que essa é uma fórmula para a derivada de M^n em z_f e, portanto

$$\lambda(n) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dM^n}{dz}(z_f) \right|.$$

Usando o resultado obtido na Equação (4.1), tem-se

$$\lambda(n) = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{\forall z \in O} \frac{dM}{dz}(z_i) \right|,$$

onde, mais uma vez, O é o conjunto de todos os pontos que aparecem na órbita de z_f .

Usando a propriedade dos logaritmos, tem-se

$$\lambda(n) = \frac{1}{n} \sum_{\forall z \in O} \ln \left| \frac{dM}{dz}(z_i) \right|,$$

e o $\lambda(n)$ pode ser visto como uma média aritmética dos logaritmos dos módulos das derivadas de todos os pontos da órbita de z_f , em notação compacta

$$\lambda(n) = \langle \ln |M'(z_i)| \rangle .$$

E o máximo número característico de Lyapunov é obtido com

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(n).$$

Através do máximo número característico de Lyapunov, pode-se saber se o sistema é caótico. Se $\lambda > 0$, o sistema dinâmico é caótico, mas se $\lambda < 0$ o sistema não é caótico.

De forma análoga pode-se obter o máximo número característico para aplicações multidimensionais

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(n) = \langle \ln |J(\mathbf{z}_i)| \rangle ,$$

onde J é a matriz jacobiana da aplicação multidimensional M . Também se pode obter, de forma análoga, a fórmula para um sistema contínuo

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \langle \ln |J(\mathbf{z}(t))| \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t \ln |J(z(s))| ds.$$

Uma fórmula equivalente pode ser obtida conforme descrita a seguir. Suponha novamente que

$$\delta(t) = \delta(0)e^{\lambda(t)t}.$$

Isolando-se o λ obtém-se

$$\lambda(t) = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right).$$

Como $|\delta(0)|$ é uma perturbação pequena tem-se

$$\lambda(t) = \lim_{\delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right).$$

Isso equivale a

$$\lambda(t) = \lim_{\delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{ds} \ln \delta(s) ds.$$

Resolvendo a parte interna tem-se

$$\lambda(t) = \lim_{\delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} ds, \quad (4.2)$$

onde $\dot{\delta}(s)$ é o módulo da variação do vetor tangente $\delta(s)$. A definição do vetor tangente pode ser encontrada no apêndice C.

Pode ser provado que $\dot{\delta}(t) = J\delta$ (ver apêndice D), e dessa forma a fórmula obtida na Equação (4.2), se torna

$$\lambda(t) = \lim_{\delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{|J(\mathbf{z}(s))\delta(s)|}{\delta(s)} ds.$$

Dessa forma, pode-se calcular o máximo número característico de Lyapunov através da Jacobiana da aplicação e do vetor tangente ao fluxo em cada instante de tempo, e determinar se o sistema é caótico a partir das condições iniciais. Mas se verá na próxima seção um método alternativo, chamado de MEGNO (*Mean Exponential Growth Factor of Nearby Orbits*), que também determina se um sistema dinâmico é caótico, mas de modo computacionalmente mais eficiente.

4.3 Indicador MEGNO.

Outra alternativa para descobrir se um sistema dinâmico é caótico, é o MEGNO [5]. Segundo [11], o MEGNO consegue determinar se o sistema é caótico com tempo de simulação menor que o método de Lyapunov, e por isso escolheu-se o MEGNO para determinar se um determinado sistema dinâmico é caótico no nosso trabalho.

O MEGNO em cada instante de tempo é definido como

$$y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds, \quad (4.3)$$

onde $\delta = |\delta|$.

A sua média em cada instante é definida como

$$Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds. \quad (4.4)$$

Como será apresentado na seção a seguir, quando o problema é regular, ou seja, não caótico a média do MEGNO tende a 2 enquanto que para sistemas caóticos, o MEGNO tende a ∞ quando t tende a ∞ .

4.4 Exemplos analíticos do MEGNO.

Nessa seção calcula-se o MEGNO de forma analítica, supondo que a função $\delta(s)$ seja conhecida. Em geral, não é prático calcular o MEGNO de forma analítica, e recorre-se a métodos numéricos, que serão discutidos na próxima subseção, mas para alguns casos simples (como mostrados nessa seção) é possível calculá-lo analiticamente. Nas subseções a seguir calcula-se o MEGNO para dois casos especiais, quando o δ é linear e quando o δ é exponencial, para ilustrar como funciona o método.

4.4.1 Delta linear.

Suponha que δ é linear, ou seja, \exists a tal que

$$\delta(s) = as.$$

Logo

$$y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{a}{as} s ds = \frac{2}{t} \int_0^t ds = \frac{2}{t} t = 2,$$

e conseqüentemente

$$Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t 2 ds = \frac{2}{t} \int_0^t ds = \frac{2}{t} t = 2.$$

4.4.2 Delta com crescimento polinomial.

Suponha que $\exists a$ tal que

$$\delta(s) = as^n.$$

Logo

$$y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{ans^{n-1}}{as^n} s ds = \frac{2n}{t} \int_0^t ds = \frac{2n}{t} t = 2n,$$

e conseqüentemente

$$Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t 2nds = \frac{2n}{t} \int_0^t ds = \frac{2n}{t}t = 2n.$$

4.4.3 Delta exponencial.

Suponha que δ é exponencial, ou seja, $\exists a$ tal que

$$\delta(s) = ae^{\lambda s}.$$

Logo

$$y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(s)}{\delta(s)} s ds = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{a\lambda e^{\lambda s}}{ae^{\lambda s}} s ds = \frac{2}{t} \int_0^t \lambda s ds = \frac{2\lambda}{t} \int_0^t s ds = \frac{2\lambda}{t} \frac{t^2}{2} = \lambda t,$$

e portanto

$$Y(t) = \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda s ds = \frac{\lambda}{t} \int_0^t s ds = \frac{\lambda}{t} \frac{t^2}{2} = \frac{\lambda t}{2}.$$

onde λ é chamado de número característico de Lyapunov. Essa é a situação modelo do caso caótico.

4.4.4 MEGNO para um *Toy Problem*.

Nessa subseção calcula-se numericamente o valor do MEGNO para um *Toy Problem*. O problema é definido por

$$\dot{x} = 1,$$

$$\dot{y} = \lambda y.$$

É um problema caótico, se λ for positivo. É fácil de se calcular o MEGNO analiticamente para esse problema e por isso é um bom exemplo para se validar o código numérico.

Sua Jacobiana é

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Da equação da variação do δ , obtida no Apêndice D, tem-se

$$\dot{\delta}(t) = J\delta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda\delta_y \end{pmatrix},$$

onde $\delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix}$.

Note que a primeira coordenada da variação do MEGNO é nula independentemente do valor da primeira coordenada de δ . Para simplificar os cálculos, considera-se a primeira coordenada do delta inicial como nula e conseqüentemente a primeira coordenada de todos os δ também como zero, já que a primeira coordenada da variação do δ é sempre nula. Assim

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_y \end{pmatrix}.$$

Os módulos da variação de delta e de sua derivada em cada instante de tempo são, respectivamente

$$|\delta(t)| = \delta_y$$

e

$$|\dot{\delta}(t)| = \lambda\delta_y.$$

O MEGNO em cada instante de tempo é portanto

$$Y(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\delta}(t)}{|\delta(t)|} s ds = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\lambda\delta_y}{\delta_y} s ds = \frac{2\lambda}{t} \int_0^t s ds = \frac{2\lambda}{t} \frac{t^2}{2} = \lambda t,$$

e sua média é

$$\langle Y(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t Y(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda s ds = \frac{\lambda t^2}{t \cdot 2} = \frac{\lambda t}{2}.$$

Nas figuras 4.2 a 4.5 exibem-se alguns resultados usando o método de Breitner, para alguns valores de λ positivos. Note que o valor da média do MEGNO é igual a $\frac{\lambda t}{2}$ em cada instante como era previsto. Em exemplos mais reais, em geral não é obtida uma reta com esse valor exato em cada instante de tempo, mas sim algo que se aproxime desse valor nos sistemas caóticos, como pode ser visto em [11].

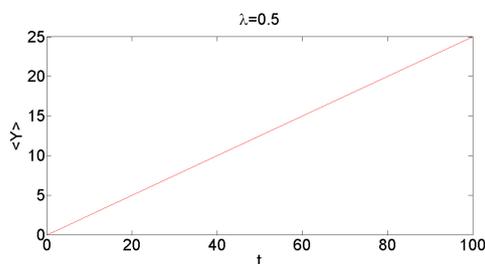


Figura 4.2: $\lambda=0,5$.

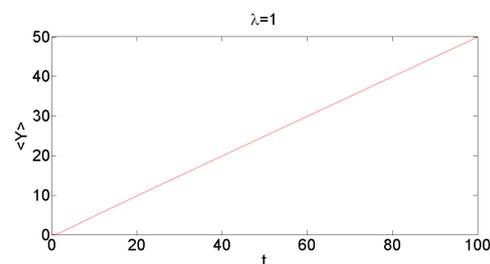


Figura 4.3: $\lambda=1$.

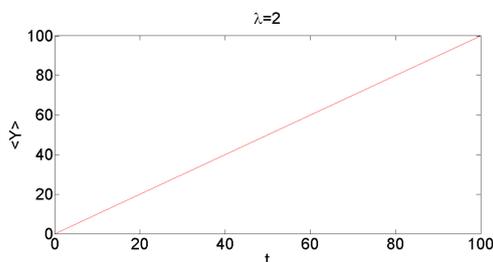


Figura 4.4: $\lambda=2$.

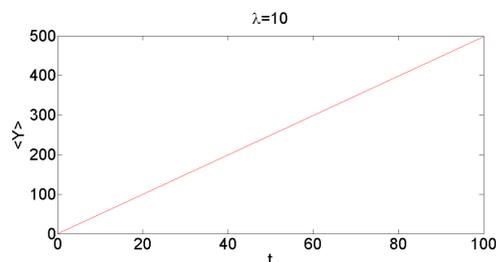


Figura 4.5: $\lambda=10$.

4.5 Abordagem numérica do MEGNO.

Como mencionado na seção anterior, em geral não é possível, ou pelo menos é difícil, calcular o MEGNO de forma analítica, por isso faz-se uso de métodos numéricos

para seu cálculo. Nessa seção serão apresentadas duas abordagens para o cálculo do MEGNO: o método de Gozdziwski e o método de Breiter.

4.5.1 Método de Gozdziwski.

O método de Gozdziwski é apresentado em [11]. Consiste em substituir as fórmulas apresentadas nas equações (4.3) e (4.4) pelas fórmulas

$$\dot{v} = \frac{\dot{\delta} \cdot \delta}{\delta \cdot \delta} t$$

e

$$\dot{w} = 2 \frac{v}{t}.$$

Após obter o valor das variáveis auxiliares v e w em cada instante de tempo, pode-se obter o valor do MEGNO e de sua média através de

$$y(t) = \frac{2v(t)}{t}$$

e

$$Y(t) = \frac{w(t)}{t},$$

e dessa forma calcula-se o MEGNO através da fórmula de Gozdziwski. Em termos de programação, o que se faz é resolver um sistema acoplado, formado pelas equações que determinam a posição e momento de cada corpo, pelas equações que determinam o δ e pelas duas equações do método, e ao final de cada passo temos a posição, momento, o δ , o MEGNO e sua média no instante atual.

4.5.2 Método de Breiter.

O método de Breiter é apresentado em [1]. Diferentemente do método anterior, o método utiliza uma fórmula analítica para o cálculo do MEGNO em cada passo. As fórmulas são as seguintes

$$y(n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)y(n-1) + 2 \ln \left(\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)$$

e

$$Y(n) = \frac{(n-1)Y(n-1) + y(n)}{n},$$

onde $\delta(n)$ é a norma do delta no instante n .

Em cada instante calculam-se as equações de movimento e as equações que determinam o δ , aplica-se o resultado nas fórmulas de Breiter para obter o valor do MEGNO.

4.6 Exemplos numéricos do MEGNO.

Nessa seção apresentaremos alguns exemplos usando a abordagem numérica do MEGNO. Decidimos usar a abordagem de Breiter por ser computacionalmente mais eficiente que a de Gozdziwski, já que é mais rápido usar uma fórmula algébrica do que ter resolver um sistema de equações diferenciais em cada instante de tempo para calcular o MEGNO. Nas subseções seguintes serão apresentados alguns exemplos.

4.6.1 MEGNO para o problema de Kepler.

Nessa subseção apresenta-se o teste do MEGNO para o problema de Kepler. Os resultados são exibidos nas figuras 4.6-4.9, onde a reta horizontal representa a reta $Y = 2$, que é a reta que se espera que o gráfico tenda, caso o problema não seja caótico. Foi simulado quatro exemplos com diferentes δ_0 e com a mesma malha ($dt = 2,384 \times 10^{-3}$ ano). Note que em todos os exemplos o gráfico do megno tende a dois, como é previsto para problemas não caóticos. Cabe destacar também que em alguns exemplos a convergência foi por valores maiores que dois e outros por valores menores que dois, o que se deve ao delta inicial utilizado na simulação. Foi simulado até o período de 10^4 anos, porque corresponde a 10^4 períodos característicos do sistema ¹, como é recomendado em [5].

4.6.2 MEGNO para o problema de dois corpos.

Nessa subseção apresenta-se o teste do MEGNO para o problema de dois corpos apresentado na Seção 3.3. Os resultados são exibidos nas figuras 4.10-4.13, onde a reta horizontal é a reta $Y = 2$, que é a reta que se espera que o gráfico tenda caso o problema

¹Período do corpo mais exterior. No caso de Kepler é órbita do corpo que orbita a massa fixa.

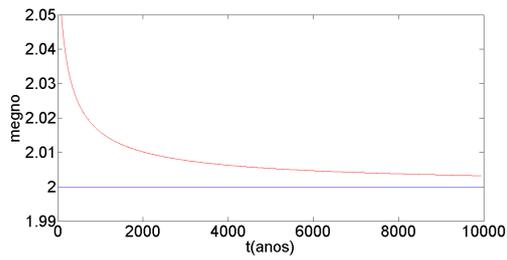


Figura 4.6: Simulação 1 do MEGNO para o problema de Kepler.

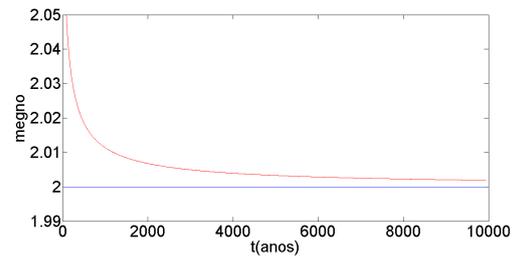


Figura 4.7: Simulação 2 do MEGNO para o problema de Kepler.

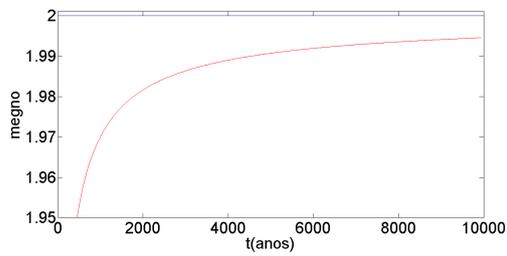


Figura 4.8: Simulação 3 do MEGNO para o problema de Kepler.

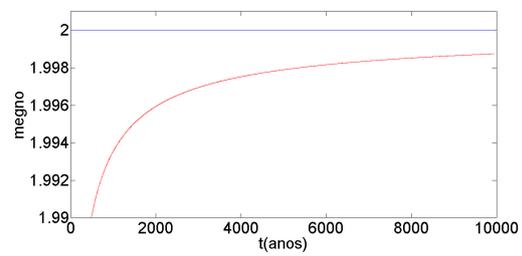


Figura 4.9: Simulação 4 do MEGNO para o problema de Kepler.

não seja caótico. O tempo de simulação utilizado foi de 2×10^4 ano, que corresponde a 10^4 períodos de cada estrela. Note que da mesma forma que o exemplo de Kepler na subseção anterior, os resultados tendem a 2 como é previsto para problemas não caóticos como o problema de dois corpos.

Dados	massa(M_J)	a(AU)	Período(dia)	e	Ω (graus)	ω (graus)	M(graus)
planeta C	10^{-5}	0,8282	242	0,3478	0	248,21	123,13
planeta D	10^{-5}	2,5334	1269	0,2906	0	242,99	354,78

Tabela 4.1: Dados sistema v Andromidae.

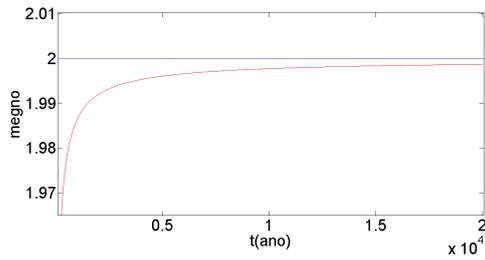


Figura 4.10: Simulação 1 do MEGNO para a estrela dupla.

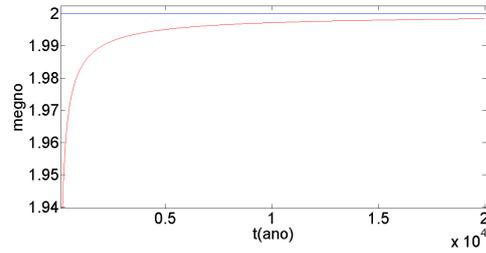


Figura 4.11: Simulação 2 do MEGNO para a estrela dupla.

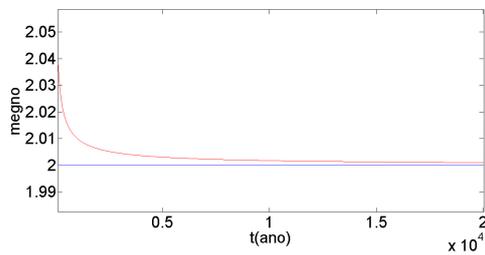


Figura 4.12: Simulação 3 do MEGNO para a estrela dupla.

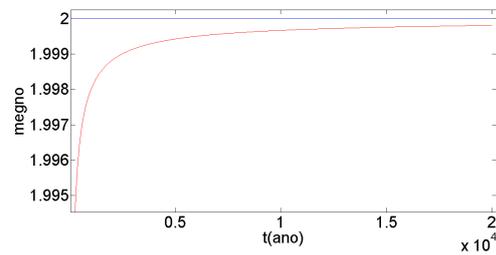


Figura 4.13: Simulação 4 do MEGNO para a estrela dupla.

4.6.3 MEGNO para o problema de três corpos regular.

Nessa seção mostra-se um exemplo de sistema de três corpos que não é caótico. O sistema é constituído por uma estrela, a ν Andromidae, uma estrela de $1,3 M_{\odot}$ da constelação de Andrômeda, e dois de seus planetas que chamaremos de planeta C e planeta D com massas da ordem de $10^{-5} M_J$, onde M_J é a massa de Júpiter. Os dados foram extraídos de [11] e [18] e estão resumidos na Tabela 4.1.

Os dados estão em elementos orbitais, que são a excentricidade da órbita (e), o semi-eixo maior da órbita (a), a anomalia média (M), a inclinação (I), a longitude do nó ascendente (Ω) e o argumento do periélio (ω) que são exibidos nas figuras 4.14 e 4.15.

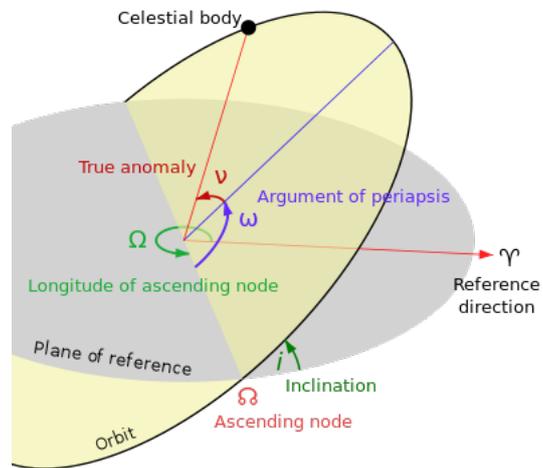


Figura 4.14: Elementos orbitais.
[22]

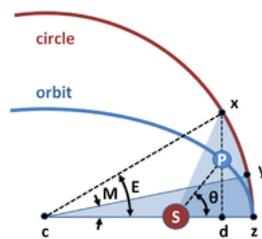


Figura 4.15: Elementos orbitais.
[22]

Primeiramente

- Longitude do nó ascendente (Ω): A interseção da órbita do planeta com o plano de referência (plano azul na Figura 4.14 é chamada de semi-reta dos nós. O extremo dessa semi-reta em que o planeta cruza o plano de referência na direção norte-sul, é chamado de nó ascendente. A longitude do nó ascendente é o ângulo entre uma reta que liga a estrela ao eixo x do plano de referência e a reta que liga o nó ascendente e a estrela.
- Argumento do Periélio (ω): É o ângulo entre a reta que liga a estrela ao nó ascendente e a reta que liga a estrela ao periélio do planeta.
- Inclinação da órbita (I): É o ângulo entre o vetor normal ao plano de referência e o vetor normal da órbita.
- excentricidade da órbita (e) e semi-eixo maior (a): definem o formato da órbita.

Além desses cinco parâmetros existem mais três parâmetros angulares que servem para identificar a posição do planeta em sua órbita em cada instante de tempo. Esses parâmetros são:

- Anomalia Verdadeira (v): É o ângulo compreendido entre um dos focos da órbita, o periélio e a posição do planeta na órbita.
- Anomalia Excêntrica (E): É o ângulo compreendido entre o centro do círculo concêntrico com a órbita do planeta de raio igual ao semi eixo maior da órbita, o periélio e a projeção vertical da posição do planeta no círculo.

- Anomalia Média (M): Imagine um círculo concêntrico à órbita do planeta e com raio igual ao semi eixo maior. A anomalia média é o ângulo compreendido entre o centro do círculo, o periélio e a posição do planeta se sua órbita fosse o círculo, com velocidade angular constante e de mesmo período que a órbita original.

Para resolver numericamente o problema converteram-se os elementos orbitais para coordenadas cartesianas seguindo o seguinte procedimento:

1. Obter a anomalia excêntrica através da anomalia média a partir da equação

$$M = E - e \operatorname{sen}(E).$$

A equação foi resolvida através do método de Newton para encontrar raízes da função

$$f(E) = E - \operatorname{sen}(E) - M.$$

2. Obter a anomalia verdadeira através da equação

$$v = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}} \tan \left(\frac{E}{2} \right) \right).$$

3. Obter a distância do planeta à estrela através da equação polar da elipse

$$r_c = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(v)}.$$

4. Obter as coordenadas cartesianas no referencial do plano orbital da posição e do momento

	$r_x(UA)$	$r_y(UA)$	$r_z(UA)$	$p_x(M_\odot UA/dia)$	$p_y(M_\odot UA/dia)$	$p_z(M_\odot UA/dia)$
planeta C	0.824728	0.630454	0	-0.00653×10^{-5}	0.01529×10^{-5}	0
planeta D	-1.083024	-1.441785	0	0.01363×10^{-5}	-0.00943×10^{-5}	0

Tabela 4.2: Coordenadas cartesianas do sistema v Andromidae.

$$\mathbf{R} = r_c \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \text{sen}(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{P} = \frac{\sqrt{GMa}}{r_c} m \begin{pmatrix} -\text{sen}(E) \\ \sqrt{1 - e^2} \cos(E) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Transformar as coordenadas cartesianas do referencial orbital para o referencial no plano de referência através das seguintes operações de rotação

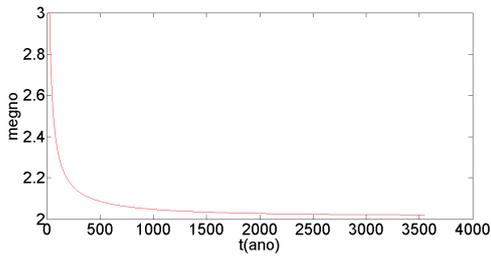
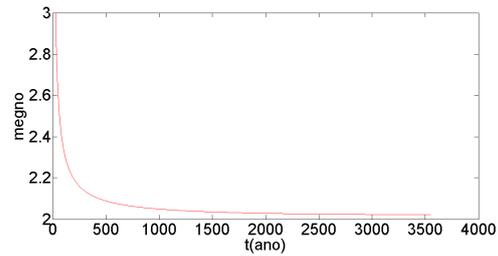
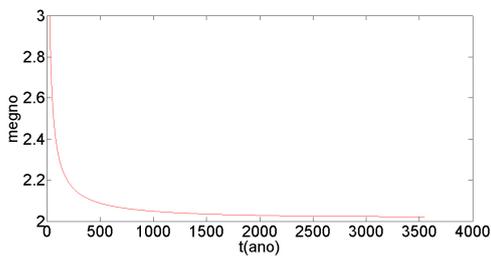
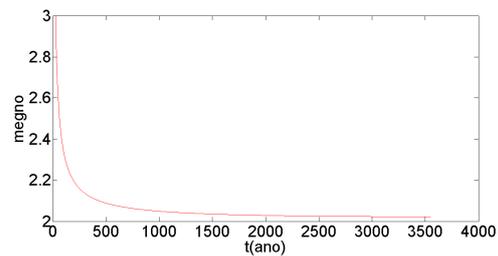
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega) & -\text{sen}(\Omega) & 0 \\ \text{sen}(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\text{sen}(i) \\ 0 & \text{sen}(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\text{sen}(\omega) & 0 \\ \text{sen}(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}.$$

6. Fazer as mesmas rotações para o momento linear de forma que

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega) & -\text{sen}(\Omega) & 0 \\ \text{sen}(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\text{sen}(i) \\ 0 & \text{sen}(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\text{sen}(\omega) & 0 \\ \text{sen}(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}.$$

Com isso obtém-se as condições iniciais em coordenadas cartesianas de posição e momento que são resumidas na Tabela 4.2.

A seguir resolveu-se o sistema numericamente com as condições iniciais mencionadas anteriormente para um período de 10^3 períodos característicos do sistema, o que

Figura 4.16: MEGNO v Andromidae 1.Figura 4.17: MEGNO v Andromidae 2.Figura 4.18: MEGNO v Andromidae 3.Figura 4.19: MEGNO v Andromidae 4.

equivale a 10^3 períodos do planeta mais externo ($1,296 \cdot 10^6$ dias), pelo método de Breiter. Nas figuras 4.16 a 4.19, exibem-se os resultados para quatro δ_0 diferentes. Note que sempre o gráfico converge para 2 por valores maiores que 2, indicando que o sistema não é caótico. Os resultados estão de acordo com [11].

4.6.4 MEGNO para um problema de três corpos caótico.

Nessa subseção será mostrado um problema de três corpos caótico. O problema apresentado é o *Figura Oito* [4], com numa malha de 2^{22} pontos com as mesmas condições iniciais apresentadas na Tabela 3.3. O programa foi executado para um tempo de simulação total de aproximadamente 10^4 períodos característicos do sistema como é recomendado em [5]. A solução numérica é exibida na Figura 4.20, enquanto que o gráfico do MEGNO é exibido na Figura 4.21. Como o gráfico é uma reta, o problema é caótico

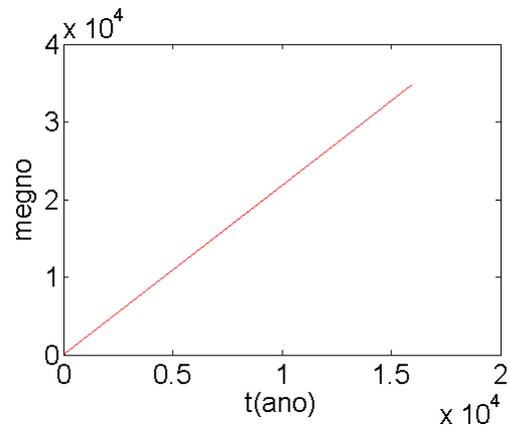
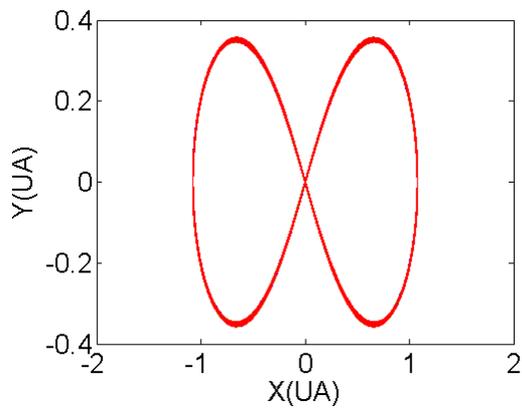


Figura 4.20: Solução numérica da Figura Oito.

Figura 4.21: MEGNO para a Figura Oito.

porque tende ao infinito com o passar do tempo. Pode-se estimar o número característico de Lyapunov através da equação

$$\lambda = \frac{2Y(t)}{t}.$$

5 CONCLUSÃO.

O objetivo desse trabalho foi resolver numericamente alguns casos do problema de N corpos e analisar sua estabilidade. Como em geral o problema não tem solução analítica, resolveu-se adotar uma abordagem numérica para solucioná-lo. Para isso foram testados dois métodos numéricos, o Runge Kutta que é bem conhecido na área de métodos numéricos e de fácil implementação e Ruth, um método simplético, que visa conservar a energia em média e que promete preservar a área simplética e por isto acumular pouco erro em longas simulações. Nos testes foi verificado que o método de Ruth era a melhor escolha, e por isso foi utilizado para resolver o problema de Kepler, de dois corpos e três corpos. A solução de Kepler e de dois corpos visava estimar o erro do método comparando-o com suas soluções analíticas e após obter uma confiança no método e no código implementado, encontrar a solução de um problema de três corpos. Vale comentar também que inicialmente o código foi construído no software MATLAB do laboratório de Combinatória e Computação Científica (LC3) da Universidade Federal do Rio de Janeiro, devido à facilidade de implementação, mas desenvolvemos posteriormente um código em linguagem C que teve desempenho de até 1000 vezes mais rápido que a implementação anterior, sendo concluído portanto que para longas simulações, onde o desempenho é crítico, o código em C é mais adequado. Na busca por dados para simulação de três corpos em artigos, nos deparamos com o problema da caoticidade do problema de N corpos e resolvemos analisá-lo. Encontramos duas abordagens: o tradicional método de Lyapunov e um método mais atual chamado MEGNO. Escolheu-se o MEGNO por ter melhor performance computacional em detrimento do método de Lyapunov, apesar de ambos chegarem à mesma conclusão.

Como trabalhos futuros, esperamos poder simular problemas com mais de três

corpos, através de métodos como o SPH(Smoothed-particle hydrodynamics), para obter simulações mais reais que ocorrem no universo e encontrar aplicações para o problema.

REFERÊNCIAS

- [1] BREITER, S. et al. Synchronous motion in the Kinoshita problem application to satellites and binary asteroids. **Astronomy and Astrophysics**, Les Ulis, v.437, n.2, p.753–764, July 2005.
- [2] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 7.ed. Boston: Brooks/Cole, 2001. 841p.
- [3] CAROLL, B. W.; OSTLIE, D. A. **An introduction to modern astrophysics**. 2.ed. São Francisco: Addison-Weasley, 2007. 1358p.
- [4] CHENCINER, A.; MONTGOMERY, R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. **Annals of Mathematics**, Princeton, v.152, n.3, p.881–901, Nov. 2000.
- [5] CINCOTTA, P.; SIMÓ, C. Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I. **Astronomy and Astrophysics Supplement Series**, Les Ulis, v.147, n.2, p.205–228, Dec. 2000.
- [6] DEVANEY, R. L. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment**. 2.ed. Boulder: Westview Press, 1992. 320p.
- [7] FERNANDES, A. C. **Sobre configurações centrais do problema de n corpos. Configurações centrais planares, espaciais e empilhadas**. 2011. 276p. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [8] FITZPATRICK, R. **An introduction to celestial mechanics**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 456p.
- [9] FOREST, E.; RUTH, R. D. Fourth-order symplectic integration. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Amsterdã, v.43, n.1, p.105–117, May 1990.

- [10] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. 3.ed. São Francisco: Addison-Wesley, 2002. 638p.
- [11] GOZDZIEWSKI, K. et al. Global dynamics of planetary systems with the MEGNO criterion. **Astronomy and Astrophysics**, Les Ulis, v.378, n.2, p.569–586, Nov. 2001.
- [12] HAGHIGHIPOUR, N.; CAPEN, S.; HINSE, T. Detection of Earth-mass and super-Earth Trojan planets using transit timing variation method. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Berlim, v.117, n.1, p.75–89, Sept. 2013.
- [13] HAIRER, E.; LUBICH, C.; WANNER, G. **Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations**. 2.ed. Berlim: Springer, 2006. 515p.
- [14] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: mecânica**. 5.ed. São Paulo: Blücher, 2013. 394p. v.1.
- [15] OTT, E. **Chaos in dynamical systems**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [16] POLLARD, H. **Celestial mechanics**. 1.ed. Washington: Mathematical Association of America, 1976. 144p.
- [17] PRESS, W. H. et al. **Numerical recipes : the art of scientific computing**. 3.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 1235p.
- [18] STEPINSKI, T.; MALHOTRA, R.; BLACK, D. The ν Andromedae system: models and stability. **The Astrophysical Journal**, [S.l.], v.545, p.1044–1057, Dec. 2000.
- [19] STEWART, J. **Cálculo**. 5.ed. São Paulo: Pioneira Thomson, 2006. 1164p. v.2.
- [20] STUCHI, T. Symplectic integrators revisited. **Brazilian Journal of Physics**, São Paulo, v.32, n.4, p.958 – 979, Dec. 2002.

- [21] WHITTAKER, E. T. **A treatise on the analytical dynamics of particules and the rigid bodies**. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1917. 456p.
- [22] WIKIPÉDIA, . Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements>. Acesso em: 27 fev. 2015.
- [23] YOSHIDA, H. Construction of higher order symplectic integrators. **Physics Letters A**, Amsterdã, v.150, n.5-7, p.262–268, Nov. 1990.

APÊNDICE A EQUAÇÃO POLAR DAS CÔNICAS.

A dedução da equação polar das cônicas foi baseada nas anotações do apêndice de [8].

Usaremos nesse apêndice, o mesmo sistema de coordenadas polares definido na subseção 2.2.4. Inicialmente definimos como foco um ponto fixo no plano xy e como diretriz uma reta paralela ao eixo y . Na nossa dedução definimos o foco como a origem e a diretriz como a reta $x=-d$. Uma cônica é definida como um conjunto de pontos P em que a razão da distância entre o ponto e o foco e a distância entre o ponto e reta diretriz é constante. Chama-se essa constante de proporcionalidade de excentricidade.

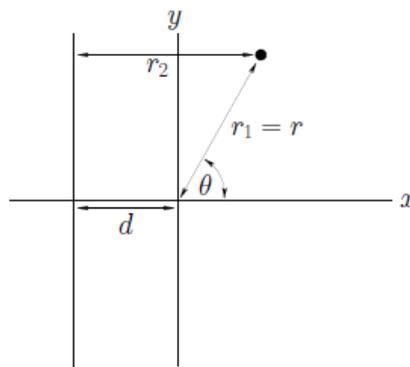


Figura A.1: Foco e reta diretriz da cônica.

Logo tem-se

$$\frac{r_1}{r_2} = e, \quad (\text{A.1})$$

onde r_1 é a distância entre o ponto P e o foco, r_2 é a distância entre o ponto P e a reta diretriz e e é a excentricidade.

A distância entre o ponto $P = (x, y)$ e a o foco $F = (0, 0)$ é

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad (\text{A.2})$$

enquanto que a distância entre o onto P e a reta diretriz é

$$r_2 = x + d = r \cos \theta + d. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo as equações A.2 e A.3 na Equação A.1, tem-se

$$\frac{r}{r \cos \theta + d} = e. \quad (\text{A.4})$$

Isolando o r na Equação A.4, tem-se

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}, \quad (\text{A.5})$$

que é a equação das geral das cônicas em coordenadas polares. Se $e < 0$ a cônica é uma elipse, se $e = 0$ a cônica é uma parábola e se $e > 0$ a cônica é uma hipérbole.

APÊNDICE B TABELAS TESTES DE MALHA.

B.1 Problema de Kepler.

Nesse apêndice exibe-se os testes de malha para o problema de Kepler de forma mais detalhada através de tabelas, dos resultados encontrados na Subseção 3.2.2 .

As tabelas B.1 a B.4 mostram o teste de malha realizado para cada uma das variáveis usando o método de Ruth. Cada tabela representa uma das variáveis, enquanto que a primeira coluna representa uma malha, a segunda coluna exibe o espaçamento entre os pontos da malha e a terceira coluna mostra a norma infinito do vetor diferença.

As tabelas B.1 a B.2 mostram o teste de malha realizado para as variáveis da posição. Note que o erro alcança a ordem de 10^{-12} para ambas as variáveis na malha 15, e a partir desse ponto a ordem permanece inalterada, já que mesmo que matematicamente o erro tenda a diminuir, o aumento do número de cálculos eleva o erro acumulado das operações da máquina o que leva a estabilização e seu possível aumento.

As tabelas B.3 a B.4 mostram o teste de malha realizado para as variáveis do momento linear. Note que o erro alcança a ordem de 10^{-17} para ambas as variáveis na malha 16, e a partir desse ponto a ordem permanece inalterada.

Portanto, os resultados indicam que a solução numérica utilizando o método de Ruth está convergindo.

intervalos= 2^n	dt(anos)	norma
0	4.000000	2.5734747319838194
1	2.000000	3.5465005411409285
2	1.000000	3.5345819044127023
3	0.500000	2.5257460457327574
4	0.250000	2.2809055446616391
5	0.125000	1.8337169990345250
6	0.062500	0.3177545027799056
7	0.031250	0.0259907212711600
8	0.015625	0.0017314931314371
9	0.007813	0.0001099818040590
10	0.003906	0.0000069013170546
11	0.001953	0.0000004317693204
12	0.000977	0.0000000269921886
13	0.000488	0.0000000016873219
14	0.000244	0.0000000001047058
15	0.000122	0.0000000000062836
16	0.000061	0.0000000000011204
17	0.000031	0.0000000000037611
18	0.000015	0.0000000000018832
19	0.000008	0.0000000000036403

Tabela B.1: Posição horizontal da Terra.

intervalos= 2^n	dt(anos)	norma
0	4.000000	9.4866603639824199
1	2.000000	8.2957707967731231
2	1.000000	3.1382267031841011
3	0.500000	2.1371321483116512
4	0.250000	2.1153958247869982
5	0.125000	1.8063394138380433
6	0.062500	0.3186934266087797
7	0.031250	0.0261905607630090
8	0.015625	0.0017420326292204
9	0.007813	0.0001105551697565
10	0.003906	0.000006936040141
11	0.001953	0.000000433914994
12	0.000977	0.000000027126129
13	0.000488	0.000000001695820
14	0.000244	0.000000000105012
15	0.000122	0.000000000006333
16	0.000061	0.000000000001145
17	0.000031	0.000000000003784
18	0.000015	0.000000000002170
19	0.000008	0.000000000004029

Tabela B.2: Posição vertical da Terra.

intervalos= 2^n	dt(anos)	norma
0	4.000000	0.00000178915496296713
1	2.000000	0.00000398999538635177
2	1.000000	0.00002692773948062508
3	0.500000	0.00002731891434770013
4	0.250000	0.00003339384455289654
5	0.125000	0.00003063003915410705
6	0.062500	0.00000621419143311014
7	0.031250	0.00000051236064966499
8	0.015625	0.00000003410488711977
9	0.007813	0.00000000216485071126
10	0.003906	0.00000000013582609585
11	0.001953	0.00000000000849732034
12	0.000977	0.00000000000053121003
13	0.000488	0.00000000000003320894
14	0.000244	0.00000000000000205689
15	0.000122	0.00000000000000012487
16	0.000061	0.00000000000000002147
17	0.000031	0.00000000000000007151
18	0.000015	0.00000000000000003890
19	0.000008	0.00000000000000007582

Tabela B.3: Momento linear horizontal da Terra.

intervalos= 2^n	dt(anos)	norma
0	4.000000	0.00000932611373599692
1	2.000000	0.00001439635609749537
2	1.000000	0.00001990618534231831
3	0.500000	0.00002506589587066159
4	0.250000	0.00003309648462717839
5	0.125000	0.00003407469661603593
6	0.062500	0.00000594287209062025
7	0.031250	0.00000048043098925641
8	0.015625	0.00000003214052767492
9	0.007813	0.00000000204040309563
10	0.003906	0.00000000012803743784
11	0.001953	0.00000000000801033291
12	0.000977	0.00000000000050077175
13	0.000488	0.00000000000003130404
14	0.000244	0.00000000000000194141
15	0.000122	0.00000000000000011700
16	0.000061	0.00000000000000002051
17	0.000031	0.00000000000000006976
18	0.000015	0.00000000000000003618
19	0.000008	0.00000000000000006807

Tabela B.4: Momento linear vertical da Terra.

B.2 Problema de dois corpos.

Nessa seção exibe-se os testes de malha para o problema de dois corpos de forma mais detalhada através de tabelas, dos resultados encontrados na Subseção 3.3.2.

As tabelas B.5 a B.8 mostram o teste de malha para as coordenadas de posição e momento linear de uma das estrelas. Note que em todas elas o erro se reduz até um certa malha, o que indica que a solução numérica está convergindo e se estabiliza. Em teoria, o erro deveria continuar diminuindo, mas devido aos erros de arredondamento dos computadores o erro se estabiliza, pois a redução do erro com o refinamento da malha é anulado com o aumento do número de cálculos do gerado pelas operações nos computadores.

intervalos= 2^n	dt(anos)	norma
0	2.000000	0.88101249636957246000
1	1.000000	1.13248844866576400000
2	0.500000	1.56795624245330470000
3	0.250000	0.48074765061052360000
4	0.125000	0.07215996991955231400
5	0.062500	0.00582061466537472930
6	0.031250	0.00038943636119662117
7	0.015625	0.00002472479126996996
8	0.007813	0.00000155135833268538
9	0.003906	0.00000009705465991994
10	0.001953	0.00000000606742467379
11	0.000977	0.00000000037922967544
12	0.000488	0.00000000002364430873
13	0.000244	0.00000000000153309310
14	0.000122	0.00000000000015895618
15	0.000061	0.00000000000014938051
16	0.000031	0.00000000000010952697
17	0.000015	0.00000000000006566969
18	0.000008	0.000000000000031052938
19	0.000004	0.000000000000092814645

Tabela B.5: Convergência para a posição horizontal da estrela 1.

intervalos= 2^n	dt(anos)	norma
0	2.000000	1.50995358794070310000
1	1.000000	1.42596277996716130000
2	0.500000	0.93680537706399547000
3	0.250000	0.52034574439932513000
4	0.125000	0.08061302546788057200
5	0.062500	0.00652099352963021740
6	0.031250	0.00043433185950764869
7	0.015625	0.00002757399944398886
8	0.007813	0.00000173009736610143
9	0.003906	0.00000010823615409494
10	0.001953	0.00000000676646561720
11	0.000977	0.00000000042290120364
12	0.000488	0.00000000002636117496
13	0.000244	0.00000000000163577788
14	0.000122	0.00000000000033485497
15	0.000061	0.000000000000036732477
16	0.000031	0.000000000000007449596
17	0.000015	0.000000000000008633366
18	0.000008	0.000000000000039920844
19	0.000004	0.000000000000196421227

Tabela B.6: Convergência para a posição vertical da estrela 1.

intervalos= 2^n	dt(anos)	norma
0	2.000000	0.92185703155347531000
1	1.000000	2.88184116320458680000
2	0.500000	2.50167543453915360000
3	0.250000	1.59830259866742550000
4	0.125000	0.25326309690762450000
5	0.062500	0.02048975564189775600
6	0.031250	0.00136461676614102470
7	0.015625	0.00008663349155729749
8	0.007813	0.00000543571154278111
9	0.003906	0.00000034006208451953
10	0.001953	0.00000002125923483781
11	0.000977	0.00000000132868751244
12	0.000488	0.00000000008279779076
13	0.000244	0.00000000000516739689
14	0.000122	0.00000000000112324755
15	0.000061	0.00000000000118822096
16	0.000031	0.00000000000024380498
17	0.000015	0.00000000000023303581
18	0.000008	0.00000000000084821039
19	0.000004	0.000000000000638345410

Tabela B.7: Convergência para o momento linear horizontal da estrela 1.

intervalos= 2^n	dt(anos)	norma
0	2.000000	1.35509147151606910000
1	1.000000	1.44871018692137790000
2	0.500000	3.82078658552658770000
3	0.250000	1.40964833282424660000
4	0.125000	0.21162385556458774000
5	0.062500	0.01732600638963399700
6	0.031250	0.00115423896300514970
7	0.015625	0.00007328207113288521
8	0.007813	0.00000459874601810295
9	0.003906	0.00000028770890758700
10	0.001953	0.00000001798652637941
11	0.000977	0.00000000112418108156
12	0.000488	0.00000000007009337555
13	0.000244	0.00000000000445976589
14	0.000122	0.00000000000069833028
15	0.000061	0.00000000000071409545
16	0.000031	0.00000000000028638203
17	0.000015	0.00000000000017541524
18	0.000008	0.00000000000085953467
19	0.000004	0.000000000000396416233

Tabela B.8: Convergência para o momento linear vertical da estrela 1.

APÊNDICE C DEDUÇÃO DO VETOR TANGENTE.

Nesse apêndice, será deduzido o vetor tangente $\delta(t)$. Considere mais uma vez o sistema

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = F(\mathbf{z}(t)),$$

com condição inicial \mathbf{z}_0 e sendo \mathbf{z} um vetor de um espaço de fase de dimensão $6n$ que representa as posições e momentos de todos os n corpos do problema de n corpos.

Pode-se definir uma curva chamada de fluxo, representada por $\Phi(t, \mathbf{z}_0)$, que representa a solução do sistema em cada instante t com condições iniciais \mathbf{z}_0 . Assim tem-se

$$t \mapsto \mathbf{z}(t) = \Phi(t, \mathbf{z}_0).$$

Para $t = 0$ tem-se

$$\mathbf{z}(0) = \Phi(0, \mathbf{z}_0).$$

Considere agora um vetor qualquer σ_0 de $6n$ coordenadas e um escalar u de tal forma que obtem-se um perturbação

$$\mathbf{z}^*(0) = \mathbf{z}_0^* = \mathbf{z}(0) + u\sigma_0$$

e um fluxo perturbado

$$t \mapsto \mathbf{z}^*(t) = \Phi(t, \mathbf{z}_0^*).$$

Para um instante t_1 qualquer, pode-se pegar os valores dos fluxos $\Phi(t_1, \mathbf{z}_0^*)$ e $\Phi(t_1, \mathbf{z}_0)$ e tomar sua diferença

$$\Phi(t_1, \mathbf{z}_0^*) - \Phi(t_1, \mathbf{z}_0),$$

que é um vetor cuja direção é a mesma de uma reta secante que passa pelos pontos $\mathbf{z}^*(t_1)$ e $\mathbf{z}(t_1)$.

Se dividir esse vetor secante pelo escalar u e tomar o limite quando u tende a zero, obtem-se

$$\boldsymbol{\delta}(t_1) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(t_1, \mathbf{z}_0^*) - \Phi(t_1, \mathbf{z}_0)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(t_1, \mathbf{z}_0 + u\sigma_0) - \Phi(t_1, \mathbf{z}_0)}{u},$$

onde $\boldsymbol{\delta}(t_1)$ é o vetor tangente ao fluxo $\Phi(t, \mathbf{z}_0)$ no instante t_1 .

APÊNDICE D DEDUÇÃO DA VARIAÇÃO DO VETOR TANGENTE COM O TEMPO.

Nessa seção será deduzida a variação do vetor $\delta(t)$ com o tempo. Para isso precisa-se de dois lemas auxiliares:

Lema D.1.

$$\delta(0) = \sigma_0.$$

Lema D.2.

Fixado t seja $G(\mathbf{z}) = \phi_t(\mathbf{z}) = \Phi(t, \mathbf{z})$. Seja $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} = DG: \mathbb{R}^{6n} \rightarrow \mathbb{R}^{6n}$ a derivada da aplicação G . Então

$$\delta(t) = DG \cdot \delta(0) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \cdot \delta(0).$$

Proposição D.1.

Sejam $\mathbf{z}(t) = \phi_t(\mathbf{z}_0)$ solução da equação.

$$\dot{\mathbf{z}} = F(\mathbf{z}).$$

Considere a jacobiana $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}(t))$ em cada estado $\mathbf{z}(t)$. Então

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\delta}(t).$$

Provas:

Lema D.1)

Segue de fluxo: ϕ_0 é a identidade, logo

$$\boldsymbol{\delta}(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\phi_0(\mathbf{z}_0^*) - \phi_0(\mathbf{z}_0)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u\boldsymbol{\sigma}_0}{u} = \boldsymbol{\sigma}_0.$$

Lema D.2)

Definição da derivada da G .

Proposição D.1)

Vamos iniciar apresentando outra formulação para o caminho de vetores $\boldsymbol{\delta}(t)$, mais conveniente para obter a fórmula desejada. Uma ferramenta importante será a regra da cadeia.

Dado o vetor $\boldsymbol{\delta}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0$ tangente no ponto \mathbf{z}_0 o realizamos como um “vetor veloci-

dade” de um caminho $s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^{6n}$ de estados no espaço de fase. Mais precisamente, $\gamma(s)$ é caminho de classe C^∞ em \mathbb{R}^{6n} definido em algum intervalo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ em torno de $s = 0$, com $\gamma(0) = \mathbf{z}_0$ e $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{\delta}(0)$.

Entendemos agora cada $\gamma(s)$ como uma condição inicial do sistema $\dot{\mathbf{z}} = F(\mathbf{z})$ e obtemos aplicação de dois parâmetros

$$\mathbf{y}(t, s) = \Phi(t, \gamma(s)).$$

É imediato da definição de $\mathbf{y}(t, s)$:

1. $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t, 0) = \Phi(t, \mathbf{z}_0)$ é solução do sistema com condição inicial \mathbf{z}_0 ;
2. $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}(t, s) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \gamma(s)) = F(\mathbf{y}(t, s))$;
3. \mathbf{y} é de classe C^∞ , pois Φ e γ o são. Portanto suas derivadas parciais mistas comutam (podemos trocar a ordem): $\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t \partial s}$ em todo (t, s) .

Além disso afirmamos que

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}(t, 0),$$

a derivada parcial sendo avaliada no instante t e com $s = 0$. Vamos provar a afirmação no que se segue.

De fato, diretamente da definição do \mathbf{y} , em um instante $t = t_0$, e usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}(t_0, 0) = \frac{\partial}{\partial s} [\Phi(t, \gamma(s))] \Big|_{(t=t_0, s=0)} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} \right) \Big|_{(t=t_0, s=0)},$$

onde consideramos $\mathbf{z} = \mathbf{z}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s)$ na composição, portanto $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} = \boldsymbol{\delta}(0)$ quando $s = 0$. Além disso observamos que $\frac{\partial t}{\partial s} = 0$, logo obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}(t_0, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} \Big|_{(t=t_0, s=0)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial s} \Big|_{(t=t_0, s=0)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{z}}(t_0, \boldsymbol{\gamma}(0)) \cdot \boldsymbol{\delta}(0).$$

Comparando com a formulação obtida no lema D.2, demonstramos a afirmação:

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}(t, 0).$$

Desejamos $\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)$. Pelas propriedades 2 e 3 obtidas mais acima segue:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t \partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial s \partial t} \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \right] \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} [F(\mathbf{y}(t, s))] \Big|_{s=0}.$$

Notemos que na última igualdade temos $F(\mathbf{z})$ onde $\mathbf{z} = \mathbf{y}(t, s)$ (com $s = 0$) e que

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}(t, 0) = \boldsymbol{\delta}(t).$$

Portanto, prosseguindo nas contas de $\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)$, mais uma vez usando a regra da cadeia:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = \frac{\partial}{\partial s} [F(\mathbf{y}(t, s))] \Big|_{s=0} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\delta}(t),$$

Isso completa a demonstração da Proposição.