

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TERCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ADRIANO ALVES DE ALCÂNTARA

**ESTABILIZAÇÃO, ANÁLISE E
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA
EQUAÇÃO DE ONDAS COM
CONDIÇÃO DA ACÚSTICA NA
FRONTEIRA**

Rio de Janeiro
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ADRIANO ALVES DE ALCÂNTARA

**ESTABILIZAÇÃO, ANÁLISE E
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA
EQUAÇÃO DE ONDAS COM
CONDIÇÃO DA ACÚSTICA NA
FRONTEIRA**

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientador: Mauro Antônio Rincon

Co-orientador: Haroldo Rodrigues Clark

Rio de Janeiro
2015

AA347e Alcântara, Adriano Alves de
Estabilização, Análise e Simulação Numérica da
Equação de Ondas com Condição da Acústica na Fron-
teira / Adriano Alves de Alcântara. – Rio de Janeiro,
2015.

89 f.: il.

Orientador: Mauro Antônio Rincon.

Co-orientador: Haroldo Rodrigues Clark.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universi-
dade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemá-
tica, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas
Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Infor-
mática, Rio de Janeiro, 2015.

1. Equação de ondas. 2. Condições da Acústica.
3. Método de Faedo-Galerkin. 4. Método de Elementos
Finitos. 5. Método de Diferenças Finitas. – Teses.
I. Rincon, Mauro Antônio (Orient.). II. Clark, Haroldo
Rodrigues (Co-orient.). III. Universidade Federal do Rio
de Janeiro. IV. Título

CDD:

ADRIANO ALVES DE ALCÂNTARA

**ESTABILIZAÇÃO, ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA
DA EQUAÇÃO DE ONDAS COM CONDIÇÃO DA
ACÚSTICA NA FRONTEIRA**

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado em: Rio de Janeiro, ____ de _____ de _____.

Mauro Antônio Rincon (Orientador), D.Sc., UFRJ

Haroldo Rodrigues Clark (Co-orientador), Ph.D., UFF

Luiz Aduino da Justa Medeiros , Ph.D., UFRJ

Maria Darci Godinho da Silva, D.Sc., UFRJ

Daniel Gregório Alfaro Vigo, D.Sc., UFRJ

João Antonio Recio da Paixão, D.Sc., PUC

*Para minha mãe Antônia e meu pai Pedro.
E para minha namorada Kethellen.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Deus pela oportunidade de concluir mais esta etapa acadêmica da minha vida estudantil.

Sou grato aos meus pais, Pedro e Antônia, pelo apoio especial e incondicional aos meus estudos e por tudo o que fizeram e fazem por mim.

À minha namorada Kethellen pelo seu carinho, compreensão e apoio sempre especial.

Aos meus irmãos Pedro e Adriana e suas famílias. Em particular, à minha sobrinha Duda pelos momentos de descontrações.

A todos os meus familiares pelo apoio direto e indireto.

Um agradecimento muito especial aos meus orientadores, Mauro A. Rincon e Haroldo R. Clark, pela excelente e profícua orientação, competência, sapiência, boa vontade, pelo exemplo de dedicação à profissão, por todo apoio e conhecimento oferecido. Em particular, pela orientação acadêmica do professor Haroldo R. Clark desde a iniciação científica em introdução aos Métodos Variacionais na UFF.

Aos amigos(as) do mestrado e doutorado do PPGI-UFRJ pela parceria, convivência e amizade. Em particular, ao meu amigo Bruno Alves pela parceria de trabalho e contribuição computacional.

Ao secretário e à secretária do PPGI, Aníbal e Adriana, respectivamente, pela eficiência e assistência prestada durante todo o desenvolvimentismo do mestrado.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

RESUMO

ALCÂNTARA, Adriano Alves de. **Estabilização, Análise e Simulação Numérica da Equação de Ondas com Condição da Acústica na Fronteira**. 2015. 89 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Neste trabalho apresentamos um estudo teórico e numérico do modelo da equação de ondas com valores iniciais e condições de fronteira de Dirichlet e da Acústica. Primeiramente, apresentamos a ideia física do modelo, em seguida provamos a existência e unicidade de solução via o método construtivo de Faedo-Galerkin e provamos que a energia associada ao modelo decai assintoticamente com uma taxa exponencial. Para a simulação numérica nos casos uni e bidimensional, utilizamos o método dos Elementos Finitos na variável espacial, e o método das Diferenças Finitas na variável temporal com ordem dois de convergência. Para a verificação do erro numérico, construímos um par de solução para medirmos o erro nas normas estabelecidas e calculamos numericamente a velocidade de convergência do método utilizado.

Palavras-chave: Equação de ondas, Condições da Acústica, Método de Faedo-Galerkin, Método de Elementos Finitos, Método de Diferenças Finitas.

ABSTRACT

ALCÂNTARA, Adriano Alves de. **Estabilização, Análise e Simulação Numérica da Equação de Ondas com Condição da Acústica na Fronteira**. 2015. 89 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

In this work we present a theoretical and numerical study of an initial boundary value problem of the wave equation with Acoustic and Dirichlet boundary conditions. First, we present the physical idea of the model, then we prove the existence and uniqueness of the solution using the Faedo-Galerkin constructive method. We also prove that the energy associated to the model decays asymptotically with an exponential rate. In the numerical simulations, for uni and bidimensional cases, we use the Finite Element Method (FEM) for spatial coordinates, and the Finite Difference Method (FDM) for time. The finite difference scheme adopted has a second order of convergence. In order to verify the numerical error, we built a solution pair to measure the error in the established norms. Numerically, we calculate the method's convergence speed.

Keywords: Wave equation, Acoustic Conditions, Faedo-Galerkin, Finite Element Method, Finite Difference Method.

LISTA DE FIGURAS

6.1	Função base e malha 1d.	63
6.2	Elemento Finito Ω_e	64
6.3	Função base 2d.	64
6.4	Malha de elementos Ω_e quadrangulares.	65
6.5	Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 1, $h = \Delta t = 2^{-9}$, com erro absoluto e na norma $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$	75
6.6	Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 2, $h = \Delta t = 2^{-9}$, com erro absoluto e na norma $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$	77
6.7	Domínio Ω , fronteiras $\Gamma_0 = (2) \cup (3) \cup (4)$ e $\Gamma_1 = (1)$	78
6.8	Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 1, $h = \Delta t = 2^{-6}$, com erro absoluto e nas normas discretas $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, 1; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente.	79
6.9	Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 2, $h = \Delta t = 2^{-6}$, com erro absoluto e nas normas discretas $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, 1; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente.	81
6.10	Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 1, $h = \Delta t = 2^{-6}$, com erro absoluto e nas normas discretas $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, 1; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente. Consideramos neste caso a solução exata como a solução refinada com $h = \Delta t = 2^{-8}$	84
6.11	Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 2, $h = \Delta t = 2^{-6}$, com erro absoluto e nas normas discretas $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, 1; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente. Consideramos neste caso a solução exata como a solução refinada com $h = \Delta t = 2^{-8}$	85

LISTA DE TABELAS

6.1	Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p	74
6.2	Erro de (u_m, δ_m) com h fixado e Δt variando.	74
6.3	Erro de (u_m, δ_m) com Δt fixado e h variando.	74
6.4	Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $\Delta t = h$	76
6.5	Erro de (u_m, δ_m) com h fixado e Δt variando.	76
6.6	Erro de (u_m, δ_m) com Δt fixado e h variando.	76
6.7	Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$	78
6.8	Erro de (u_m, δ_m) com $h = \Delta x = \Delta y$ fixado e Δt variando.	79
6.9	Erro de (u_m, δ_m) com Δt fixado e $h = \Delta x = \Delta y$ variando.	79
6.10	Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y$	80
6.11	Erro de (u_m, δ_m) com $h = \Delta x = \Delta y$ fixado e Δt variando.	80
6.12	Erro de (u_m, δ_m) com Δt fixado e $h = \Delta x = \Delta y$ variando.	80
6.13	Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$	82
6.14	Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$	83
6.15	Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$	84
6.16	Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$	85

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MOTIVAÇÃO FÍSICA	14
2.1	CONDIÇÕES DE FRONTEIRA DA ACÚSTICA	14
2.2	EQUAÇÃO DE ONDAS COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA DA ACÚSTICA	15
3	RESULTADOS PRELIMINARES	18
3.1	TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL	18
3.1.1	Convergência Fraca e Fraca Estrela	18
3.1.2	Espaços Separáveis e Reflexivo	19
3.2	ESPAÇOS $L^P(\Omega)$	21
3.2.1	Desigualdade de Gronwall	22
4	EXISTÊNCIA E A UNICIDADE DE SOLUÇÃO	23
4.1	EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES APROXIMADAS	25
4.2	ESTIMATIVAS A PRIORI	28
4.2.1	Estimativa I	28
4.2.2	Estimativa II	32
4.3	PASSAGEM AO LIMITE DAS SOLUÇÕES APROXIMADAS	38
4.4	VERIFICAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS	41
4.5	UNICIDADE DAS SOLUÇÕES	44
5	DECAIMENTO UNIFORME DA ENERGIA	46
5.1	COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA ENERGIA	46
5.1.1	Identidade da Energia	46
5.1.2	Teorema do Decaimento da Energia com Taxa Exponencial	50
6	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	61
6.1	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA APROXIMADO	61
6.1.1	Método dos Elementos Finitos	61
6.1.2	Discretização do Domínio	62

6.1.3	Função Base	62
6.1.4	Retorno ao Problema Aproximado	66
6.1.5	Método das Diferenças Finitas	67
6.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA	71
6.2.1	Caso Unidimensional	73
6.2.2	Caso Bidimensional	77
7	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	86
7.1	CONCLUSÃO	86
7.2	TRABALHOS FUTUROS	86
	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

“ A introdução é aquilo que não pede nada antes, mas que exige algo depois. ” (Aristóteles)

As equações diferenciais são importantes ferramentas na construção de modelos matemáticos que descrevem muitos fenômenos físicos. Com o desenvolvimento da ciência e tecnologia, tem-se tornado bastante importante a análise teórica e numérica de equações diferenciais parciais por meio do estudo de modelos vinculados às aplicações matemáticas nas mais variadas áreas do conhecimento. A análise teórica de modelos matemáticos é feita por meio de um estudo qualitativo. Com isto, é de suma importância estabelecermos condições para existência e unicidade de soluções de tais modelos matemáticos, assim como conhecer o comportamento de sua solução, caso exista. Já no contexto numérico, como em geral não conhecemos as soluções analíticas dos modelos matemáticos, o objetivo é a elaboração de estudo de métodos numéricos que permitam obter, de forma efetiva, soluções numéricas para tais modelos.

É neste contexto da análise matemática e numérica que consiste o trabalho realizado nesta dissertação, com o propósito de dissertar sobre a existência e unicidade de solução, decaimento assintótico da energia, e simulações numéricas, nos casos uni e bidimensional, para um modelo matemático envolvendo uma equação diferencial parcial do tipo hiperbólica. Em que tal modelo está submetido à condição clássica de Dirichlet em uma parte da fronteira do seu domínio, e na outra parte, condições da Acústica introduzidas por J. T. Beale e S. I. Rosencrans [2]. Este modelo de estudo está apresentado na Seção 2.2 do capítulo 2, em (2.4).

No capítulo 2, apresentamos uma breve ideia dos aspectos físicos do modelo de estudo desta dissertação. Falamos também especificamente sobre as condições da Acústica, e trabalhos envolvendo equações de ondas relacionados a tal modelo (2.4).

No capítulo 3, apresentamos alguns resultados teóricos da análise funcional para uma preparação teórica demandada nos capítulos 4 e 5.

O capítulo 4 contém a prova da existência e unicidade de solução do modelo (2.4), via o método construtivo de Faedo-Galerkin, o qual consiste em resolver um problema cuja a solução pertence à espaços funcionais de dimensão infinita, projetando-o em espaço (aproximado) de dimensão finita (problema aproximado), para posteriormente fazer a passagem ao limite para obtenção da solução do problema original, como limite de uma sequência de soluções dos problemas aproximados. Para unicidade de solução usamos o método da energia.

No capítulo 5, tratamos da demonstração matemática do decaimento assintótico da energia associada ao modelo (2.4), baseada em [21], onde a energia tem decaimento uniforme e taxa de decaimento exponencial.

O capítulo 6 é dedicado a parte de simulações numéricas do modelo (2.4), nos casos uni e bidimensional. Para tal, utilizamos na parte espacial o método dos Elementos Finitos (via Galerkin) e na parte temporal usamos o método das Diferenças Finitas (em particular, de ordem quadrática) para resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias submetido às condições iniciais. Usamos várias discretizações espaciais e temporais nas simulações, com o intuito de ver o comportamento do erro da solução aproximada, dado que para validar o modelo, construímos soluções exatas para os casos uni e bidimensional, afim de verificarmos a magnitude de tal erro numérico utilizando as normas discretas de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1))$. Numericamente calculamos a ordem de convergência dos métodos numéricos utilizados e apresentamos tabelas com as informações dos erros numéricos relacionando Δt com h (discretização temporal e espacial, respectivamente). A linguagem computacional utilizada para as execuções das simulações foi o Matlab-2014.

No capítulo 7, temos a conclusão do que foi feito e trabalhos futuros.

2 MOTIVAÇÃO FÍSICA

A resolução de Equações Diferenciais Parciais torna-se motivante quando o modelo em estudo possui uma aplicação prática. As condições de fronteira da Acústica, introduzidas por Beale e Rosencrans [2], nos dá este suporte de aplicabilidade, pois a sua caracterização está relacionada ao estudo do movimento de ondas acústicas em fluidos. O objetivo deste capítulo é apresentar uma breve ideia física sobre o modelo de estudo que será apresentado em (2.4). Para um maior aprofundamento, veja Beale-Rosencrans [2] e Morse-Ingard [17].

2.1 Condições de Fronteira da Acústica

Em 1974, Beale e Rosencrans [2] foram os precursores das condições de fronteira da Acústica, no qual consiste no estudo de propagação de ondas acústicas. Para tal, consideraram a velocidade potencial de um fluido confinado no interior de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, sujeito a ondas acústicas que exercem pressão sobre a fronteira Γ do domínio Ω , de maneira que a fronteira *reage localmente*. Compreende-se por fronteira localmente reagente, superfícies em que cada um de seus pontos reage à pressão do som, de modo isolado cada ponto dos demais, como um oscilador harmônico.

Ondas acústicas são ondas de som, isto é, ondas longitudinais, onde as moléculas de um fluido movem-se na mesma direção de propagação da onda. Neste trabalho será considerado ondas de som planas, ou seja, ondas possuindo a mesma direção em todo o espaço. O fluido considerado foi ideal, uniforme em suas propriedades, em equilíbrio termodinâmico, exceto pelo movimento causado pelas ondas de som, e com movimento suficientemente pequeno para que efeitos não lineares sejam desprezados, como em Vicente [22].

A seguir, apresentaremos a formulação das condições de fronteira da Acústica.

Para isto, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado, com fluido em seu interior em repouso, exceto pela presença de ondas acústicas. Sendo $u = u(x, t)$ a velocidade potencial do fluido, $-\nabla u$ é a velocidade da partícula e u satisfaz a equação de onda

$$u'' - c^2 \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty),$$

onde $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ é o operador laplaciano. Suponhamos que a fronteira Γ de Ω não é rígida e que cada ponto de Γ *reage localmente* à pressão causada pela onda acústica, como uma mola. Daí,

$$a\delta'' + b\delta' + c\delta = -p \text{ sobre } \Gamma \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

onde $a, c \in \mathbb{R}^+$, $b \geq 0$ são constantes e $p = p(x, t)$ é a pressão acústica. Denotando por $\delta = \delta(x, t)$ o deslocamento na direção da normal à fronteira Γ e ρ_0 como a densidade uniforme do fluido em repouso, assim $p = \rho_0 u'$, em que u' é a derivada parcial de u em relação a t . Voltando à equação (2.1), concluímos que

$$a\delta'' + b\delta' + c\delta = -\rho_0 u' \text{ sobre } \Gamma \times (0, \infty). \quad (2.2)$$

Consideramos também a condição de impenetrabilidade da fronteira, ou seja, admitimos que existe compatibilidade entre a velocidade normal do som na fronteira, δ' , e a velocidade normal do fluido $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = -v \cdot \nu$, onde ν é o vetor normal unitário exterior a Γ e v a velocidade do fluido, assim

$$\delta' = \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ em } \Gamma \times (0, \infty). \quad (2.3)$$

O que significa $-\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ser a componente normal da velocidade do fluido. A equação diferencial (2.2) é chamada de condição de fronteira da Acústica.

2.2 Equação de Ondas com Condições de Fronteira da Acústica

Em [3], Beale provou que a presença do termo $a\delta''$ na condição da Acústica (2.2), para um modelo de ondas lineares, fez com que a energia associada a tal modelo não

decaia. Em Alber [1], foram também estudados problemas com condições de fronteira similares. Neste a presença do termo $a\delta''$ fez a solução explodir. Com isto, em [7], Frota e Larkin, provaram a existência e a unicidade de solução e o decaimento assintótico da energia para um problema associado a equação linear de ondas com condição de Dirichlet na parte da fronteira Γ_0 , e na outra parte Γ_1 , a condição de fronteira da Acústica (2.2) com a ausência do termo $a\delta''$. Considerou-se também $\alpha(t) = 1$, e as constantes reais a, b, c de (2.2) como funções contínuas positivas $f, g, h : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$.

Nossa proposta de trabalho nesta dissertação consiste em estudar um modelo de ondas com coeficiente $\alpha(t)$ variável, também com a presença do termo $a\delta''$ em (2.2), e para compensarmos tal feito colocamos a presença de um *damping*, $g(x)u'(x, t)$, no termo de compatibilidade em (2.3), onde a presença deste termo nos proporciona provarmos o decaimento da energia. Daí, para este novo modelo (2.4), inspirado por [7], provaremos a existência e a unicidade de solução e o decaimento assintótico da energia associada, como se pode ver nos capítulos 4 e 5, respectivamente. Na parte numérica, simularemos os casos uni e bidimensional das soluções aproximadas de tal modelo via Elementos Finitos na parte espacial e Diferenças Finitas na parte transiente, como se verifica no capítulo 6. Segue abaixo o modelo matemático (2.4), objeto de estudo desta dissertação.

Consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e conexo com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2 sendo Γ_0 e Γ_1 conexos e ambos possuindo medida de Lebesgue positiva, tal que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Queremos $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ e $\delta : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ solução do modelo de ondas abaixo com condição de Dirichlet e da Acústica. A saber

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x, t) - \alpha(t)\Delta u(x, t) = 0 \quad \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ u'(x, t) + f_1(x)\delta''(x, t) + f_2(x)\delta'(x, t) + f_3(x)\delta(x, t) = 0 \\ \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \delta'(x, t) - g(x)u'(x, t) \quad \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \\ \delta'(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) + g(x)u_1(x) \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \delta(x, 0) = \delta_0(x) \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

em que a equação $(2.4)_1$ é a equação de ondas com coeficiente $\alpha(t)$ variando no tempo. Em $(2.4)_4$ temos a condição de compatibilidade e, em $(2.4)_5 - (2.4)_7$, segue as condições iniciais. Sobre Γ_0 em $(2.4)_2$, temos a condição clássica de Dirichlet, na qual há absorção total do som. Em $(2.4)_3$ temos a condição da Acústica com coeficientes variáveis, onde sobre Γ_1 as ondas de som são refletidas na direção oposta à normal exterior de cada ponto de Γ_1 . Para melhor entendimento, imagine uma sala de auditório com uma fonte de som, onde há paredes em que o som é absorvido totalmente (fronteira Γ_0) e em outras (fronteira Γ_1) o som é refletido (eco).

Portanto, o par (u, δ) tem componentes que representam, respectivamente, o deslocamento de ondas e a propagação de ondas de som e, as funções $f_i(x), g(x) : \bar{\Gamma}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e positivas com $i = 1, 2, 3$.

A definição de solução para o modelo (2.4) , quanto às demais hipóteses para a prova do teorema de existência e unicidade de solução se encontram no capítulo 4.

3 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados teóricos fundamentais para que o leitor tenha uma melhor compreensão dos conteúdos abordados em especial nos capítulos 5 e 6.

3.1 Tópicos de Análise Funcional

Definição 1 (Espaço dual) *Seja U um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Chamamos de espaço dual topológico de U , o conjunto dos funcionais lineares contínuos $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$ e o denotamos por U^* , ou por U' .*

Notação: “ \rightharpoonup ” e “ $\xrightarrow{*}$ ” representam, respectivamente, as convergências fraca e fraca estrela. Também denotamos por $\sigma(E, E')$ a topologia fraca sobre E (*espaço de Banach*), isto é, a topologia menos fina sobre E , que torna contínua todas as aplicações $\varphi \in E'$.

3.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 2 (Convergência Fraca) *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de E . Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, para todo $\varphi \in E'$.*

Definição 3 (Convergência Fraca Estrela) *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de E' . Diz-se $\varphi_\nu \xrightarrow{*} \varphi$ fraca estrela se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, para todo $u \in E$.*

Proposição 4 *Seja E um espaço de Banach e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em E . Então:*

- (i) Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ então $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$;
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ forte então $x_n \rightharpoonup x$ fraco para $\sigma(E, E')$;
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em E' (isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$) então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Brezis ([4], p. 35). ■

3.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivo

Definição 5 Dizemos que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $A \subset E$ enumerável e denso.

Definição 6 Seja E um espaço de Banach e seja Y a injeção canônica de E em E'' . Dizemos que E é reflexivo se $Y(E) = E''$. Quando o espaço E é reflexivo identifica-se implicitamente E e E'' (por meio do isomorfismo Y).

Teorema 7 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). Sejam E um espaço de Banach e E' o seu dual topológico. Então o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \text{ é compacto na topologia fraca estrela}$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 42). ■

Teorema 8 Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \text{ é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: Brezis ([4], p.48). ■

O corolário abaixo é uma consequência do Teorema 7 e do Teorema 8.

Corolário 9 *Sejam E um espaço Banach separável e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em E' . Então existe uma subsucessão $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Brezis ([4], p. 50). ■

Teorema 10 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsucessão $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $u \in E$ tal que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Demonstração: Evans ([6], p. 639). ■

Lema 11 *Sejam X um espaço de Banach, $u \in L^p(0, T; X)$ e $u' \in L^p(0, T; X)$ com $p \in [1, \infty]$, então*

$$u \in C([0, T]; X),$$

possivelmente após uma redefinição sobre um conjunto de medida nula.

Demonstração: Lions ([11], p. 7). ■

Lema 12 [Du Bois Raymond]. *Sejam $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω . Além disso, $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Medeiros, L. A e Milla, M. M. ([13], p. 13). ■

3.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 13 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$, assim é definido*

$$L^p(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ mensurável e } |\varphi|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach munido da norma

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Definição 14 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, define-se por*

$$L^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ mensurável e } \exists C \text{ constante tal que } |\varphi(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |\varphi(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\} = \sup_{x \in \Omega} \|\varphi(x)\|.$$

Teorema 15 (*Desigualdade de Hölder*). *Sejam as funções $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $u.v \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 56). ■

Teorema 16 (Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B compacta, B imerso continuamente em B_1 , $1 < p_0, p_1 < \infty$ e W o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

equipado da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Então, W é um espaço de Banach e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver em Lions [11] (p. 58). ■

Corolário 17 *Do Teorema de Aubin-Lions: se $(u_n)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_n)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada em $L^2(0,T;B_1)$, com $B_0 \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow B_1$, então (u_n) é limitada em W . Daí, segue que existe uma subsucessão $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \rightarrow \rightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.*

3.2.1 Desigualdade de Gronwall

Lema 1 *(Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial). Seja $g(\cdot)$ uma função não-negativa, absolutamente contínua em $[0,T]$.*

1. Se g satisfaz, para t quase sempre em $[0,T]$ a desigualdade diferencial

$$g'(t) \leq f(t) + h(t)g(t),$$

onde $f(t)$ e $h(t)$ são funções não-negativas e integráveis em $[0,T]$, então

$$g(t) \leq e^{\int_0^t h(s) ds} \left[g(0) + \int_0^t f(s) ds \right],$$

para todo $t \in [0,T]$.

2. Em particular, se $g' \leq hg$ em $[0,T]$ e $g(0) = 0$, temos

$$g \equiv 0 \quad \text{em} \quad [0,T].$$

Demonstração: Evans ([6], p. 708). ■

4 EXISTÊNCIA E A UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Neste capítulo o propósito é provar a existência e unicidade de soluções do problema misto apresentado em (2.4). Para tal, necessitamos dos seguintes espaços funcionais, além dos estabelecidos no capítulo anterior. Sejam os espaços de Hilbert

$$V = \{\varphi \in H^1(\Omega), \gamma_0(\varphi) = 0 \text{ em } \Gamma_0\} \quad \text{e} \quad H_\Delta(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\},$$

em que $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev de primeira ordem e em $H_\Delta(\Omega)$ temos a norma

$$\|\varphi\|_{H_\Delta(\Omega)} = \left[\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\Delta\varphi|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Note que, no espaço de V vale a desigualdade de Poincaré, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\varphi(x)|^2 \leq C \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx, \quad \forall \varphi \in V.$$

Daqui por diante denotaremos por (\cdot, \cdot) , $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_1}$, $|\cdot|$ e $|\cdot|_{\Gamma_1}$ os produtos escalares e as normas dos espaços de Lebesgue $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente.

Denotamos por $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e $\gamma_1 : H_\Delta(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ as aplicações traços de *ordem zero* e *Neumann*, respectivamente, em que

$$\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\Gamma} \quad \text{e} \quad \gamma_1(\varphi) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)|_{\Gamma}.$$

O conceito de solução global para o modelo (2.4) é dado pela definição a seguir.

Definição 18 *Uma solução global do problema misto (2.4) é um par de funções (u, δ) com $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ e $\delta : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ nas classes*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L_{loc}^\infty(0, \infty; V \cap H_\Delta(\Omega)), \quad u' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; V), \quad u'' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \\ \gamma_0(u'), \quad \gamma_0(u'') \in L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \\ \delta, \delta', \delta'' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \end{array} \right.$$

que satisfaz, para cada $t > 0$, as relações integrais

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \int_\Omega [u''\varphi + \alpha \nabla u \cdot \nabla \varphi] \, dx \, dt = \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} \alpha [\delta' - gu'] \varphi \, dx \, dt \\ \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} [u' + f_1 \delta'' + f_2 \delta' + f_3 \delta] \psi \, dx \, dt = 0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$\forall \varphi \in L^2(0, T; V)$ e $\forall \psi \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$. Além disso, u e δ satisfazem as condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \delta(x, 0) = \delta_0(x) \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \delta'(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + gu_1(x) \quad \text{sobre } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Para estabelecer a solução (u, δ) no sentido da definição 18, assumiremos as seguintes hipóteses sobre os objetos do problema (2.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) \in C^1([0, \infty)), \quad \alpha'(t) \in L^1(0, \infty) \cap L^\infty(0, \infty) \quad \text{e} \quad \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0, \\ g(x) \in C(\bar{\Gamma}_1, \mathbb{R}), \quad \text{tal que } g(x) \geq g_0 > 0, \\ f_i(x) > 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad f_i \in C(\bar{\Gamma}_1, \mathbb{R}). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Teorema 19 *Suponha $u_0 \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, $u_1 \in V$ e $\delta_0 \in L^2(\Gamma_1)$, tal que $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \delta'(x, 0) + gu_1 = 0$, e suponhamos as hipóteses (4.2). Então, existe um único par de funções (u, δ) solução do problema misto (2.4) no sentido da definição 18.*

Demonstração: Para provar o referido teorema aplicaremos o método de Faedo-Galerkin, o qual consiste das seguintes etapas:

- ◆ Existência de soluções aproximadas.
- ◆ Estimativas *a priori*.
- ◆ Passagem ao limite nas soluções aproximadas.
- ◆ Verificação dos dados iniciais.
- ◆ Unicidade das soluções.
- ◆ Interpretação das soluções.

4.1 Existência de Soluções Aproximadas

Para obtermos o problema aproximado do modelo (2.4), inicialmente determinamos a formulação variacional (forma integral e enfraquecida de (2.4)), depois a partir da formulação variacional, determinamos o problema aproximado (em espaços funcionais de dimensão finita) na qual o rescrevemos na forma matricial e com isto chegaremos em um sistema de EDO submetido as condições iniciais.

4.1.0.1 Formulação Variacional do Modelo (2.4)

Determinaremos formalmente a formulação variacional do modelo (2.4). Consideremos $\varphi \in V \cap H_{\Delta}(\Omega)$. Multiplicando (2.4)₁ por φ e integrando sobre Ω , temos:

$$(u''(t), \varphi) - \alpha(t)(\Delta u(t), \varphi) = 0. \quad (4.3)$$

Usando a Fórmula de Green em $L^2(\Omega)$, temos

$$-(\Delta u(t), \varphi) = - \int_{\Omega} \Delta u(t) \varphi \, dx = \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \varphi \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} \varphi \, dx. \quad (4.4)$$

Observe que,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} \varphi \, dx = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} \varphi \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} \varphi \, dx = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} \varphi \, dx,$$

pois do fato $\varphi \in V$, segue que $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} \varphi \, dx = 0$. Usando (2.4)₄ na identidade acima, resulta

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} \varphi \, dx = \int_{\Gamma_1} [\delta'(t) - gu'(t)] \varphi \, dx. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.4), segue

$$-(\Delta u(t), \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \varphi \, dx - \int_{\Gamma_1} [\delta'(t) - gu'(t)] \varphi \, dx. \quad (4.6)$$

Usando a igualdade (4.6) em (4.3), resulta

$$(u''(t), \varphi) + \alpha(t)[(\nabla u(t), \nabla \varphi) - (\delta'(t) - gu'(t), \varphi)_{\Gamma_1}] = 0, \quad \forall \varphi \in V. \quad (4.7)$$

De modo similar, multiplicando (2.4)₃ por $\psi \in L^2(\Gamma_1)$ e integrando sobre Γ_1 , temos

$$(\gamma_0(u'(t)) + f_1 \delta''(t) + f_2 \delta'(t) + f_3 \delta(t), \psi)_{\Gamma_1} = 0, \quad \forall \psi \in L^2(\Gamma_1). \quad (4.8)$$

De (4.7) e (4.8) temos a formulação variacional para o modelo misto (2.4), a saber

$$\begin{aligned}
& (u''(t), \varphi) + \alpha(t)[(\nabla u(t), \nabla \varphi) - (\delta'(t) - gu'(t), \varphi)_{\Gamma_1}] = 0 \text{ para todo } \varphi \in V, \\
& (\gamma_0(u'(t)) + f_1 \delta''(t) + f_2 \delta'(t) + f_3 \delta(t), \psi)_{\Gamma_1} = 0 \text{ para todo } \psi \in L^2(\Gamma_1), \\
& u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{q.s. em } \Omega, \\
& \delta(x, 0) = \delta_0(x) \quad \text{q.s. sobre } \Gamma_1, \\
& \delta'(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) + g(x)u_1(x) \quad \text{q.s. sobre } \Gamma_1.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

4.1.0.1.1 Problema Aproximado

Como $u_0 \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_1)$ e $V \cap H_\Delta(\Omega)$, $L^2(\Gamma_1)$ são espaços de Hilbert separáveis, então existem as bases hilbertianas $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, isto é, sistemas ortogonais e completos em $V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente. Daí,

- em particular, para todo $m \in \mathbb{N}$, os m primeiros vetores de $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são linearmente independentes (L.I) e, além disso, $\bigcup_{m=1}^{\infty} [w_1, \dots, w_m]$ é denso em $V \cap H_\Delta(\Omega)$;
- de modo semelhante, para todo $m \in \mathbb{N}$, os m primeiros vetores de $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são linearmente independentes (L.I) e, além disso, $\bigcup_{m=1}^{\infty} [z_1, \dots, z_m]$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$.

Como a sequência $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma base ortogonal e completa de $V \cap H_\Delta(\Omega)$, em especial, é ortonormal e completa em $L^2(\Omega)$, analogamente $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal e completa de $L^2(\Gamma_1)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $W_m = [w_1, \dots, w_m]$ o subespaço de $V \cap H_\Delta(\Omega)$ gerado pelos primeiros m vetores da base $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $Z_m = [z_1, \dots, z_m]$ o subespaço de $L^2(\Gamma_1)$ gerado pelos m primeiros vetores da base hilbertiana $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Gamma_1)$. Da formulação variacional em (4.9), o problema aproximado consiste em determinar funções $c_{jm}(t)$ e $d_{km}(t)$ definidas em $[0, t_m[$ com valores em \mathbb{R} , tais que

$$u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m c_{jm}(t) w_j(x), \quad \delta_m(x, t) = \sum_{k=1}^m d_{km}(t) z_k(x), \tag{4.10}$$

satisfazem o problema

$$\begin{aligned}
& (u_m''(t), w_i) + \alpha(t) [(\nabla u_m(t), \nabla w_i) - (\delta_m'(t) - g u_m'(t), w_i)_{\Gamma_1}] = 0, \quad \forall w_i \in W_m, \\
& (\gamma_0(u_m'(t)) + f_1 \delta_m''(t) + f_2 \delta_m'(t) + f_3 \delta_m(t), z_l)_{\Gamma_1} = 0, \quad \forall z_l \in Z_m, \\
& u_m(x, 0) = u_{0m}(x), \quad u_m'(x, 0) = u_{1m}(x), \quad \forall x \in \Omega, \\
& \delta_m(x, 0) = \delta_{0m}(x), \quad \delta_m'(x, 0) = \frac{\partial u_{0m}(x)}{\partial \nu} + g(x)u_{1m}(x), \quad \forall x \in \Gamma_1.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

A existência das sequências $\{u_m, \delta_m\}$ que satisfaz a condição de compatibilidade $\delta_m'(x, 0) = \frac{\partial u_{0m}(x)}{\partial \nu} + g(x)u_{1m}(x)$ é verificado em L. Aduato e M. Milla Miranda [15]. Do fato, para todo $m \in \mathbb{N}$, W_m e Z_m , serem densos em $V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$ respectivamente, então

$$\begin{aligned}
& u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ forte em } V \cap H_\Delta(\Omega), \\
& u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ forte em } V, \\
& \delta_{0m} \rightarrow \delta_0 \text{ forte em } L^2(\Gamma_1).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Substituindo (4.10)₁ e (4.10)₂ em (4.11)₁ e (4.11)₂, temos

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m c_{jm}''(t)(w_j, w_l) + \alpha(t) \sum_{j=1}^m c_{jm}(t)(\nabla w_j, \nabla w_l) - \alpha(t) \sum_{k=1}^m d_{km}'(t)(z_k, w_l)_{\Gamma_1} \\
& + \alpha(t) \sum_{j=1}^m c_{jm}'(g w_j, w_l)_{\Gamma_1} = 0, \\
& (\gamma_0(u_m'(t)), z_l)_{\Gamma_1} + \sum_{k=1}^m d_{km}''(t)(f_1 z_k, z_l)_{\Gamma_1} + \sum_{k=1}^m d_{km}'(t)(f_2 z_k, z_l)_{\Gamma_1} \\
& + \sum_{k=1}^m d_{km}(t)(f_3 z_k, z_l)_{\Gamma_1} = 0.
\end{aligned} \right.$$

Tal sistema acima pode ser reescrito na forma matricial como

$$\left\{ \begin{aligned}
& IC''(t) + \alpha(t)KC(t) - \alpha(t)MD'(t) + \alpha(t)H_4C'(t) = 0, \\
& N(C'(t)) + H_1D''(t) + H_2D'(t) + H_3D(t) = 0,
\end{aligned} \right. \tag{4.13}$$

em que

- ▶ $C(t) = [c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t)]^t$ e $D(t) = [d_{1m}(t), \dots, d_{mm}(t)]^t$.
- ▶ $K = [(\nabla w_i, \nabla w_j)]_{m \times m}$, $M = [(z_i, w_j)_{\Gamma_1}]_{m \times m}$, $H_4 = [(g w_i, w_j)_{\Gamma_1}]_{m \times m}$.
- ▶ $N(C'(t)) = [(\gamma_0(u_m'(t)), z_1)_{\Gamma_1}, \dots, (\gamma_0(u_m'(t)), z_m)_{\Gamma_1}]^t$.
- ▶ $H_1 = [(f_1 z_i, z_j)_{\Gamma_1}]_{m \times m}$, $H_2 = [(f_2 z_i, z_j)_{\Gamma_1}]_{m \times m}$, $H_3 = [(f_3 z_i, z_j)_{\Gamma_1}]_{m \times m}$.

► $I = [(w_i, w_j)]_{m \times m}$, $(w_i, w_j) = \delta_{ij}$, o que implica I a matriz identidade.

Note que o sistema de EDO (4.13) é linear de segunda ordem, e que os pares de soluções (u_m, δ_m) existem para todo $t > 0$, pois fazemos a redução de ordem e o transformamos em um problema de Cauchy de primeira ordem, em seguida o resolvemos via técnicas de resolução de sistemas de EDO's lineares.

4.2 Estimativas a priori

4.2.1 Estimativa I

A primeira estimativa, a seguir, das soluções aproximadas, nos dará limitações para as sequências $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\gamma_0(u'_m))_{m \in \mathbb{N}}$, $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\delta'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ para todo $t \geq 0$.

Multiplicando (4.11)₁ por $2c'_{im}(t)$ e somando de $i = 1$ até m , e multiplicando (4.11)₂ por $2d'_{im}(t)$ e somando de $i = 1$ até m , temos

$$\begin{aligned} & 2(u''_m(t), u'_m(t)) + 2\alpha(t) \left[(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) - (\delta'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} + \right. \\ & \left. (gu'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} \right] = 0, \\ & 2(u'_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1} + 2(f_1 \delta''_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1} + 2(f_2 \delta'_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1} + \\ & 2(f_3 \delta_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Observação 20 *Isolando o primeiro termo da equação (4.14)₂, temos:*

$$\begin{aligned} -2(u'_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1} &= -2(\delta'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} = 2(f_1 \delta''_m(t) + f_2 \delta'_m + \\ & f_3 \delta_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Substituindo a observação (20) em (4.14)₁, resulta

$$\begin{aligned} & 2(u''_m(t), u'_m(t)) + 2\alpha(t) \left[(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) + (f_1 \delta''_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1} + \right. \\ & \left. (f_2 \delta'_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1} + (f_3 \delta_m(t), \delta'_m(t))_{\Gamma_1} + (gu'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} \right] = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Reescrevendo os termos de (4.15), segue

$$\begin{aligned} 2(u_m''(t), u_m'(t)) &= 2 \int_{\Omega} u_m''(t) u_m'(t) dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} [u_m'(t)]^2 dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [u_m'(t)]^2 dx \\ &= \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

De forma análoga, obtemos

$$2(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) = \frac{d}{dt} |\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2. \quad (4.17)$$

Usando a hipótese (4.2),

$$2(gu_m'(t), u_m'(t))_{\Gamma_1} \geq 2g_0(u_m'(t), u_m'(t))_{\Gamma_1} = 2g_0|u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2, \quad (4.18)$$

Da hipótese (4.2) as funções f_i são positivas, então

$$\begin{aligned} 2(f_1 \delta_m''(t), \delta_m'(t))_{\Gamma_1} &= 2 \int_{\Gamma_1} f_1 \delta_m''(t) \delta_m'(t) dx = \int_{\Gamma_1} f_1 \frac{d}{dt} [\delta_m'(t)]^2 dx \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{d}{dt} [f_1^{1/2} \delta_m'(t)]^2 dx = \frac{d}{dt} |f_1^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

De modo análogo,

$$2(f_3 \delta_m(t), \delta_m'(t))_{\Gamma_1} = \frac{d}{dt} |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2. \quad (4.20)$$

$$2(f_2 \delta_m'(t), \delta_m'(t))_{\Gamma_1} = 2|f_2^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2.$$

Agora, usando (4.16)-(4.20) em (4.15), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2 + \alpha(t) \left[\frac{d}{dt} |\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \frac{d}{dt} |f_1^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2|f_2^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \right. \\ \left. \frac{d}{dt} |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2g_0|u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2 + \alpha(t) \frac{d}{dt} \left[|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right] \\ + 2\alpha(t) |f_2^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2g_0\alpha(t) |u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Usando a regra de derivação do produto de duas funções em (4.22), segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[|u_m'(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \right] \\ + 2\alpha(t) |f_2^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2g_0\alpha(t) |u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ \leq |\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} \left(|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Seja,

$$E_m(t) := |u'_m(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right). \quad (4.24)$$

Usando o fato de $|u'_m(t)|^2 \geq 0$, resulta

$$\alpha(t) \left(|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \leq E_m(t). \quad (4.25)$$

Daí, e da hipótese (4.2) sobre a função $\alpha(t)$, segue

$$|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{E_m(t)}{\alpha(t)} \leq \frac{E_m(t)}{\alpha_0}, \quad (4.26)$$

e portanto

$$|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} \left(|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \leq \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} E_m(t)}{\alpha_0}. \quad (4.27)$$

Substituindo a desigualdade (4.27) e a igualdade (4.24) em (4.23), temos

$$E'_m(t) + 2\alpha_0 |f_2^{1/2} \delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2g_0 \alpha_0 |u'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} E_m(t)}{\alpha_0}. \quad (4.28)$$

Seja $\varphi(t) := \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0}$. De (4.28) e $2\alpha_0 |f_2^{1/2} \delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2g_0 \alpha_0 |u'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \geq 0$, temos

$$E'_m(t) \leq \varphi(t) E_m(t), \text{ para todo } t \in [0, t_m]. \quad (4.29)$$

Afirmção: $E_m(0) = |u_{1m}|^2 + \alpha(0) \left(|\nabla u_{0m}|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta'_m(0)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_{0m}|_{\Gamma_1}^2 \right)$ é limitada.

De fato, como $u_{1m} \rightarrow u_1$ forte em V (logo, u_{1m} é limitada), $u_{0m} \rightarrow u_0$ forte em $V \cap H_{\Delta}(\Omega)$, o que acarreta $\nabla u_{0m} \rightarrow \nabla u_0$ forte em $L^2(\Omega)$ (logo, ∇u_{0m} é limitada), $\delta_{0m} \rightarrow \delta_0(x)$ forte em $L^2(\Gamma_1)$ (logo, δ_{0m} é limitada), $\delta'_m(0) = \frac{\partial u_{0m}}{\partial \nu} + g(x)u_{1m} \rightarrow \delta'(0)$ forte em $L^2(\Gamma_1)$ (logo, $\delta'_m(0)$ é limitada), como f_1, f_3 , são contínuas (logo limitadas no compacto Γ_1) e $\alpha \in C^1([0, \infty))$. Daí, existe uma constante $C_1 > 0$ que independe de m , tal que $E_m(0) \leq C_1$.

Pelo Lema de Gronwall 1, resulta que

$$E_m(t) \leq E_m(0) e^{\int_0^t \varphi(s) ds}, \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Como $\varphi \in L^1(0, \infty)$ em virtude de (4.2), então

$$E_m(t) \leq C_1 e^{\int_0^\infty \varphi(s) ds} = C_2. \quad (4.30)$$

Integrando (4.28) com relação a t , com $0 \leq t < +\infty$, tem-se:

$$E_m(t) + 2\alpha_0 \int_0^\infty \left(|f_2^{1/2} \delta'_m(s)|_{\Gamma_1}^2 + g_0 |u'_m(s)|_{\Gamma_1}^2 \right) ds \leq E_m(0) + \int_0^\infty \varphi(s) E_m(s) ds. \quad (4.31)$$

Afirmação: $E_m(0) + \int_0^\infty \varphi(s) E_m(s) ds \leq C_4$, tal que $C_4 > 0$.

Note, $\int_0^\infty \varphi(s) E_m(s) ds \leq \sup_{s \in [0, \infty)} E_m(s) \int_0^\infty \varphi(s) ds \leq C_2 C_3$, pois $\varphi \in L^1(0, \infty)$, daí $E_m(0) + \int_0^\infty \varphi(s) E_m(s) ds \leq C_1 + C_2 C_3 = C_4$. ■

Assim,

$$E_m(t) + 2\alpha_0 \int_0^\infty \left(|f_2^{1/2} \delta'_m(s)|_{\Gamma_1}^2 + g_0 |u'_m(s)|_{\Gamma_1}^2 \right) ds \leq C_4, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (4.32)$$

Lembrando que

$$E_m(t) = |u'_m(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right). \quad (4.33)$$

1. De (4.32) e (4.33), temos $|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \leq \frac{C_4}{\alpha_0}$, daí, $|\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n} < \overline{C}_4$, $\forall t \geq 0$.

Assim,

$$|\nabla u_m(t)|_{L^\infty(0, \infty; [L^2(\Omega)]^n)} = \sup_{t \in [0, \infty)} |\nabla u_m(t)|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq \overline{C}_4.$$

Logo, por Poincaré $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, \infty; V)$.

2. De (4.32) e (4.33), $|u'_m(t)|^2 \leq C_4$, daí $|u'_m(t)| \leq \overline{C}_4$, $\forall t \geq 0$. Assim

$$|u'_m|_{L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))} = \sup_{t \in [0, +\infty)} |u'_m(t)| \leq \overline{C}_4.$$

Logo $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$.

3. De (4.32), temos $\int_0^\infty |u'_m(s)|_{\Gamma_1}^2 ds \leq \frac{C_4}{2\alpha_0 g_0}$, de onde segue por definição que $(\gamma_0(u'_m))_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$.

Da hipótese (4.2) sobre a função $f_i \in C^0(\overline{\Gamma}_1)$, $f_i > 0$ e $\overline{\Gamma}_1$ ser compacto, temos que

$$0 < \overline{f}_i = \inf_{x \in \Gamma_1} f_i(x). \quad (4.34)$$

De (4.26) e (4.32), resulta que

$$|f_1^{1/2}\delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2}\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{E_m(t)}{\alpha_0} \leq \frac{C_4}{\alpha_0}.$$

Daí e de (4.34), temos

$$\overline{f_1}|\delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + \overline{f_3}|\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{C_4}{\alpha_0}.$$

Portanto,

$$\min\{\overline{f_1}, \overline{f_3}\} \left[|\delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right] \leq \overline{f_1}|\delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + \overline{f_3}|\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{C_4}{\alpha_0}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$|\delta'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{C_4}{\alpha_0 \min\{\overline{f_1}, \overline{f_3}\}} := C_5, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.35)$$

4. De (4.35), segue que $|\delta_m(t)|_{\Gamma_1} \leq \overline{C_5}$ e $|\delta'_m(t)|_{\Gamma_1} \leq \overline{C_5}$, daí $|\delta_m(t)|_{L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))} = \sup_{t \in [0, \infty)} |\delta_m(t)| \leq \overline{C_5}$ e $|\delta'_m(t)|_{L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))} = \sup_{t \in [0, \infty)} |\delta'_m(t)| \leq \overline{C_5}$. Logo (δ_m) e (δ'_m) são limitadas em $L^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$.

Dos itens de 1 a 4 acima, conclui-se:

$$\begin{aligned} (u_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, \infty; V), \\ (u'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \\ (\gamma_0(u'_m))_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \\ (\delta_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ e } (\delta'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ são limitadas em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1)). \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.2.2 Estimativa II

Para mostrarmos que o modelo (2.4) tem solução global, necessitamos também estimar e encontrar limitações para as sequências $(u''_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\delta''_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\nabla u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\gamma_0(u''_m))_{m \in \mathbb{N}}$.

Derivando em relação ao tempo as equações (4.11)₁ e (4.11)₂, segue

$$\begin{aligned} & (u_m'''(t), w_i) + \alpha'(t) \left[(\nabla u_m(t), \nabla w_i) - (\delta_m'(t) - gu_m'(t), w_i)_{\Gamma_1} \right] \\ & + \alpha(t) \left[(\nabla u_m'(t), \nabla w_i) - (\delta_m''(t) - gu_m''(t), w_i)_{\Gamma_1} \right] = 0, \quad \forall w_i \in W_m, \\ & (u_m''(t) + f_1 \delta_m'''(t) + f_2 \delta_m''(t) + f_3 \delta_m'(t), z_l)_{\Gamma_1} = 0, \quad \forall z_l \in Z_m. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Multiplicando (4.37)₁ por $2c_{im}''(t)$ e somando de $i = 1$ até m , e multiplicando (4.37)₂ por $2d_{lm}''(t)$ e somando de $l = 1$ até m , temos

$$\begin{aligned} & 2(u_m'''(t), u_m''(t)) + 2\alpha'(t) \left[(\nabla u_m(t), \nabla u_m''(t)) - (\delta_m'(t) - gu_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} \right] \\ & + 2\alpha(t) \left[(\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) - (\delta_m''(t) - gu_m''(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} \right] = 0, \\ & 2(u_m''(t) + f_1 \delta_m'''(t) + f_2 \delta_m''(t) + f_3 \delta_m'(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Observação 21 *Note que,*

$$-2(u_m''(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} = -2(\delta_m''(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} = 2(f_1 \delta_m'''(t) + f_2 \delta_m''(t) + f_3 \delta_m'(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1}.$$

Usando a observação 21 e a majoração (4.18) em (4.38), temos

$$\begin{aligned} & 2(u_m'''(t), u_m''(t)) + 2\alpha(t)(\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) + 2\alpha(t) \left[(f_1 \delta_m'''(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} + \right. \\ & \left. (f_2 \delta_m''(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} + (f_3 \delta_m'(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} \right] + 2\alpha(t)g_0(u_m''(t), u_m''(t)) \leq \\ & -2\alpha'(t) \left[(\nabla u_m(t), \nabla u_m''(t)) - (\delta_m'(t) - gu_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Observe que,

- ▶ $2(u_m'''(t), u_m''(t)) = 2 \int_{\Omega} u_m'''(t) u_m''(t) dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_m''(t)|^2 dx = \frac{d}{dt} |u_m''(t)|^2.$
- ▶ $2(\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) = \frac{d}{dt} |\nabla u_m'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2.$
- ▶ $2(f_1 \delta_m'''(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} = \frac{d}{dt} |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2.$

Analogamente, aplicando o mesmo raciocínio acima a outros termos de (4.39), segue

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} |u_m''(t)|^2 + \alpha(t) \frac{d}{dt} \left(|\nabla u_m'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \\
& + 2\alpha(t) \left(g_0 |u_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_2^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \\
& \leq -2\alpha'(t) \left[(\nabla u_m(t), \nabla u_m''(t)) - (\delta_m'(t) - g u_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} \right].
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Multiplicando (4.11)₁ por $2c_{im}''(t)$, somando de $i = 1$ até m e depois multiplicando por $\frac{-\alpha'(t)}{\alpha(t)}$, segue que

$$2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} (u_m''(t), u_m''(t)) = -2\alpha'(t) \left[(\nabla u_m(t), \nabla u_m''(t)) - (\delta_m'(t) - g u_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} \right]. \tag{4.41}$$

Substituindo (4.41) em (4.40) e usando a regra de derivação do produto de duas funções, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[|u_m''(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla u_m'(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \right] \\
& + 2\alpha(t) \left(g_0 |u_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_2^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \\
& \leq 2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} |u_m''(t)|^2 + \alpha'(t) \left(|\nabla u_m'(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Definindo,

$$F_m(t) := |u_m''(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla u_m'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right). \tag{4.43}$$

Usando (4.43) em (4.42) e tomando o módulo do seu lado direito, resulta

$$\begin{aligned}
& F_m'(t) + 2\alpha(t) \left(g_0 |u_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_2^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \\
& \leq 2 \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(t)} |u_m''(t)|^2 + |\alpha'(t)| \left(|\nabla u_m'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Observação 22 Usando (4.43) e (4.2), segue que

$$|u_m''(t)|^2 \leq F_m(t), \text{ assim } 2 \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(t)} |u_m''(t)|^2 \leq 2 \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(t)} F_m(t) \leq 2 \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0} F_m(t)$$

e novamente de (4.43) e (4.2), segue

$$|\alpha'(t)| \frac{\alpha(t)}{\alpha(t)} \left(|\nabla u_m'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \leq \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0} F_m(t). \tag{4.45}$$

Agora, utilizando a observação 22 em (4.44), resulta

$$\begin{aligned} & F'_m(t) + 2\alpha(t) \left(g_0 |u''_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_2^{1/2} \delta''_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \\ & \leq 2 \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0} F_m(t) + \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0} F_m(t) = \left(\frac{2}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0} \right) |\alpha'(t)| F_m(t) = \frac{3}{\alpha_0} |\alpha'(t)| F_m(t). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Seja $\phi(t) = \frac{3}{\alpha_0} |\alpha'(t)|$. Verificando que $2\alpha(t) \left(g_0 |u''_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_2^{1/2} \delta''_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \geq 0$, segue

$$F'_m(t) \leq \phi(t) F_m(t). \quad (4.47)$$

Afirmação: $F_m(0) := |u''_m(0)|^2 + \alpha(0) \left(|\nabla u'_m(0)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta''_m(0)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta'_m(0)|_{\Gamma_1}^2 \right)$ é limitada.

- Tomando o problema aproximado na equação (4.3) e fazendo nesta $\varphi = u''_m(t)$ com $t = 0$, segue $(u''_m(0), u''_m(0)) - \alpha(0)(\Delta u_m(0), u''_m(0)) = 0$, e usando Cauchy-Schwarz, resulta

$$|u''_m(0)|^2 = \alpha(0)(\Delta u_m(0), u''_m(0)) \leq \alpha(0) |\Delta u_{0m}| |u''_m(0)|. \quad (4.48)$$

Daí, como $u_{0m} \in V \cap H_\Delta$, então $\Delta u_m(0) \in L^2(\Omega)$ e assim $|\Delta u_m(0)| \leq C$. Portanto, $|u''_m(0)| \leq \bar{C}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

- Do fato de $u_{1m} \rightarrow u_1$ em V por (4.12), implica $\nabla u_{1m} \rightarrow \nabla u_1$ em $L^2(\Omega)$. Assim, $|\nabla u'_m(0)|_{L^2(\Omega)} = |\nabla u_{1m}|_{L^2(\Omega)} \rightarrow |\nabla u_1|_{L^2(\Omega)}$ em \mathbb{R}^+ , e como $\alpha(0)$ é constante, daí segue por resultado de análise real que $\alpha(0) |\nabla u'_m(0)|$ é limitado.

- Tomando $z_l = \delta''_m(t)$ em (4.11)₂ e fazendo $t = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} & (f_1 \delta''_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1} = -(\gamma_0(u'_m(0)) + f_2 \delta'_m(0) + f_3 \delta_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1} \leq \\ & |(\gamma_0(u'_m(0)) + f_2 \delta'_m(0) + f_3 \delta_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}| \leq \underset{c-s}{| \gamma_0(u'_m(0)) + f_2 \delta'_m(0) + f_3 \delta_m(0) |_{\Gamma_1}} |\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} \\ & \leq \underset{d-t}{(|\gamma_0(u'_m(0))|_{\Gamma_1} + |f_2 \delta'_m(0)|_{\Gamma_1} + |f_3 \delta_m(0)|_{\Gamma_1})} |\delta''_m(0)|_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

De (4.36), $\{\gamma_0(u'_m(0)), \delta'_m(0), \delta_m(0)\}$ são limitadas, e de (4.34) $f_i(x) \geq \bar{f}_i > 0$, com $i = 1, 2, 3$. Assim, $|\delta''(0)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{1}{\bar{f}_1} C |\delta''_m(0)|_{\Gamma_1}$, o que resulta $|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} \leq \bar{C}$. Disto e do fato de $f_1 \in C(\Gamma_1, \mathbb{R})$, segue que $\alpha(0) |f_1^{1/2} \delta''_m(0)|_{\Gamma_1}$ é limitada.

- De (4.36)₄, sabemos que $\delta'_m(0)$ é limitada. Daí e dos itens acima, concluímos que $F_m(0)$ é limitado. ■

Agora, usando o Lema de Gronwall 1 em (4.47), e do fato de $\phi \in L^1(0, \infty)$ por (4.2), segue que

$$F_m(t) \leq F_m(0) e^{\int_0^{+\infty} \phi(t) dt} := C_6, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (4.49)$$

Integrando (4.46) com relação a t com $0 \leq t < +\infty$, obtemos

$$F_m(t) + 2\alpha_0 g_0 \int_0^\infty |u_m''(s)|_{\Gamma_1}^2 ds + 2\alpha_0 \int_0^\infty |f_2^{1/2} \delta_m''(s)|_{\Gamma_1}^2 ds \leq F_m(0) + \int_0^\infty \phi(s) F_m(s) ds. \quad (4.50)$$

Note,

$$F_m(0) + \int_0^\infty \phi(s) F_m(s) ds \leq C_6 + \sup_{t \in [0, \infty)} F_m(t) \int_0^\infty \phi(t) dt := C_7. \quad (4.51)$$

De (4.51) em (4.50), segue

$$F_m(t) + 2\alpha_0 g_0 \int_0^\infty |u_m''(s)|_{\Gamma_1}^2 ds + 2\alpha_0 \int_0^\infty |f_2^{1/2} \delta_m''(s)|_{\Gamma_1}^2 ds \leq C_7, \quad \forall t \geq 0 \text{ e } m \in \mathbb{N}. \quad (4.52)$$

Assim, da igualdade (4.43) em (4.52), resulta

$$|u_m''(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla u_m'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \leq C_7. \quad (4.53)$$

Daí e da hipótese (4.2) sobre a função $\alpha(t)$, e como $|u_m''(t)|^2 \geq 0$, segue

$$|\nabla u_m'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{C_7}{\alpha(t)} \leq \frac{C_7}{\alpha_0}. \quad (4.54)$$

1. De (4.53), $|u_m''(t)|^2 \leq C_7$, o que acarreta $u_m''(t)$ é limitada em $L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$.
2. De (4.52), $2\alpha_0 g_0 \int_0^\infty |u_m''(s)|_{\Gamma_1}^2 ds \leq C_7$, o que por definição resulta $\gamma_0(u_m'')$ ser limitada em $L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$.
3. De (4.53), $|\nabla u_m'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \leq C_7$, daí $\nabla u_m'(t)$ é limitada em $L^\infty(0, \infty; [L^2(\Omega)]^n)$.
4. De (4.53) e das hipóteses sobre $\alpha(t)$ e $f_i(x)$ em (4.2), segue

$$\overline{f_1} |\delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq |f_1^{1/2} \delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{C_7}{\alpha_0}, \text{ o que implica, } |\delta_m''(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{C_7}{\overline{f_1} \alpha_0}.$$

Logo, δ_m'' é limitada em $L^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$.

Dos itens 1, 2, 3 e 4 acima, segue

$$\begin{aligned}
(u''_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \\
(\gamma_0(u''_m))_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \\
(\nabla u'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \\
(\delta''_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1)).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Dentre as limitações de (4.36) e (4.55), tomando-as para $T > 0$ fixo arbitrário, as seguintes são suficientes para a passagem ao limite quando $m \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
(u_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V), \\
(u'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V), \\
(u''_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
(\gamma_0(u'_m))_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}}, (\delta'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ e } (\delta''_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Usando o Corolário 9 e o Teorema 10, podemos extrair de (4.56) subsequências de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(u''_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\delta'_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(\delta''_m)_{m \in \mathbb{N}}$, onde serão igualmente denotadas por simplicidade pelas mesmas notações, tais que

$$\begin{aligned}
u_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u && \text{ em } L^\infty(0, T; V), \\
u'_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u' && \text{ em } L^\infty(0, T; V), \\
u''_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u'' && \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
\gamma_0(u'_m) &\rightharpoonup \gamma_0(u') && \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
\delta_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \delta && \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
\delta'_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \delta' && \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
\delta''_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \delta'' && \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

4.3 Passagem ao Limite das Soluções Aproximadas

► De (4.57)₃, $u_m'' \xrightarrow{*} u''$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, significa que

$$\langle u_m'', v \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))} \rightarrow \langle u'', v \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))},$$

para todo $v \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$.

Como $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0, T; L^2(\Omega))$ então

$$\int_0^T (u_m''(t), v(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u''(t), v(t)) dt \quad (4.58)$$

► De (4.57)₁ temos que $u_m \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T; V)$, e daí $\nabla u_m \xrightarrow{*} \nabla u$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Logo,

$$\langle \nabla u_m, v \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))} \rightarrow \langle \nabla u, v \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Repetindo o procedimento análogo em (4.58), e como $v \in V \subset L^2(\Omega)$, então

$$\int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla v(t)) dt \rightarrow \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v(t)) dt. \quad (4.59)$$

► De (4.57)₇ temos que $\delta_m \xrightarrow{*} \delta$, $\delta_m' \xrightarrow{*} \delta'$ e $\delta_m'' \xrightarrow{*} \delta''$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1))$, o que significa respectivamente,

$$\begin{aligned} \langle \delta_m, z \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))} &\rightarrow \langle \delta, z \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))}, \\ \langle \delta_m', z \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))} &\rightarrow \langle \delta', z \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))}, \\ \langle \delta_m'', z \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))} &\rightarrow \langle \delta'', z \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

para todo $z \in L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Como $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))$, assim

$$\begin{aligned} \int_0^T (\delta_m(t), z(t))_{\Gamma_1} dt &\rightarrow \int_0^T (\delta(t), z(t))_{\Gamma_1} dt, \\ \int_0^T (\delta_m'(t), z(t))_{\Gamma_1} dt &\rightarrow \int_0^T (\delta'(t), z(t))_{\Gamma_1} dt, \\ \int_0^T (\delta_m''(t), z(t))_{\Gamma_1} dt &\rightarrow \int_0^T (\delta''(t), z(t))_{\Gamma_1} dt, \end{aligned} \quad (4.61)$$

De (4.57)₄ temos que $u'_m \rightharpoonup u'$ em $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$, isto significa

$$\int_0^T (u'_m(t), z(t))_{\Gamma_1} dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), z(t))_{\Gamma_1} dt.$$

Sabemos por (4.2) que f_i e g são contínuas no compacto $\bar{\Gamma}_1$ (logo, limitadas em $\bar{\Gamma}_1$), e analogamente $\alpha(t)$ é contínua em $[0, T]$ (portanto, limitada em $[0, T]$).

Em cada convergência anterior, multiplicando-as por $\theta \in L^2(0, T)$, e usando o fato que $\bigcup_{k=1}^{\infty} w_k = V \cap H_{\Delta}(\Omega)$ e $\bigcup_{k=1}^{\infty} z_k = L^2(\Gamma_1)$, segue que

$$\int_0^T \left((u''_m(t), v) + \alpha(t) \left[(\nabla u_m(t), \nabla v) - (\delta'_m(t) - gu'_m(t), v)_{\Gamma_1} \right] \right) \theta(t) dt = 0, \quad \forall v \in W_m,$$

$$\int_0^T (\gamma_0(u'_m(t)) + f_1 \delta''_m(t) + f_2 \delta'_m(t) + f_3 \delta_m(t), z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt = 0, \quad \forall z \in Z_m,$$

converge quando $m \rightarrow \infty$ para

$$\int_0^T \left((u''(t), v) + \alpha(t) \left[(\nabla u(t), \nabla v) - (\delta'(t) - gu'(t), v)_{\Gamma_1} \right] \right) \theta(t) dt = 0, \quad (4.62)$$

$$\int_0^T (\gamma_0(u'(t)) + f_1 \delta''(t) + f_2 \delta'(t) + f_3 \delta(t), z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt = 0,$$

para todo $v \in V$ e $z \in L^2(\Gamma_1)$. Em (4.62), se $\varphi(x, t) = v(x)\theta(t)$ e $\psi(x, t) = z(x)\theta(t)$, tal que $v \in V$, $z \in L^2(\Gamma_1)$ e $\theta \in L^2(0, T)$, então temos a identidade integral (4.1) da Definição 18 (sentido da solução). ■

Agora de (4.62) queremos voltar ao problema na forma pontual em (2.4), verificando o sentido das igualdades.

► Em particular, tomando $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V \cap H_{\Delta}(\Omega)$ em (4.62)₁, segue que os termos sobre Γ são nulos. Daí,

$$\int_0^T ((u''(t), v) + \alpha(t)(\nabla u(t), \nabla v), v)) \theta(t) dt = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.63)$$

Aplicando a Fórmula de Green, temos

$$\int_0^T \alpha(t)(\nabla u(t), \nabla v)\theta(t) dt = - \int_0^T \alpha(t)(\Delta u(t), v)\theta(t) dt, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Substituindo a identidade acima em (4.63), segue

$$\int_0^T ((u''(t), v) - \alpha(t)(\Delta u(t), v)) \theta(t) dt = 0, \quad (4.64)$$

para todo $\theta \in L^2(0, T)$ e $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Usando o Lema de Du Bois Raymond 12 em (4.64), por meio de identificação à distribuições, temos

$$(u''(t) - \alpha(t)\Delta u(t), v) = 0, \text{ q.s em } (0, T), \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.65)$$

Assim,

$$u'' - \alpha(t)\Delta u = 0 \text{ q.s em } \Omega \times (0, T), \quad (4.66)$$

Note que, por (4.2), $\alpha(t)$ é contínua em $[0, \infty)$, em particular, $\alpha(t)$ é contínua em $[0, T]$ para $T > 0$ fixo, o que implica $\alpha(t)$ limitada em $[0, T]$, daí $\alpha(t) \in L^\infty(0, T)$.

De (4.57), segue que $u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, e usando (4.66), temos que

$$-\Delta u = f := -\frac{u''}{\alpha} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.67)$$

► De (4.62)₂, temos

$$\int_0^T (\gamma_0(u'(t)) + f_1\delta''(t) + f_2\delta'(t) + f_3\delta(t), z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt = 0, \forall z \in L^2(\Gamma_1).$$

Aplicando o Lema de Du Bois Raymond na equação acima, de modo análogo o que foi feito para a identidade (4.62)₁, segue

$$\gamma_0(u') + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta = 0 \text{ q.s sobre } \Gamma_1 \times [0, T].$$

em $L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$, por (4.57).

► Agora, multiplicando a equação (4.65)₁ por $\theta \in L^2(0, T)$ e integrando de 0 até T , temos

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta(t) dt - \int_0^T \alpha(t)(\Delta u(t), v)\theta(t) dt = 0. \quad (4.68)$$

Aplicando a forma de Green, segue que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \alpha(t)(\Delta u(t), v)\theta(t) dt \\ &= \int_0^T \alpha(t)(\nabla u(t), \nabla v)\theta(t) dt - \int_0^T \alpha(t) \left(\frac{\partial u(t)}{\partial \nu}, v \right)_{\Gamma_1} \theta(t) dt. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Substituindo (4.69) em (4.68) e subtraindo com (4.62)₁, resta

$$\int_0^T \alpha(t) \left(\frac{\partial u(t)}{\partial \nu} - \delta'(t) + gu'(t), v \right)_{\Gamma_1} \theta(t) dt = 0, \forall \theta \in L^2(0, T).$$

Aplicando o Lema de Du Bois Raymond, segue que

$$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial \nu} - \delta'(t) + gu'(t), v \right)_{\Gamma_1} = 0, \quad \text{q.s em } [0, T], \quad \forall v \in V \cap H_\Delta(\Omega).$$

Assim,

$$\frac{\partial u(t)}{\partial \nu} - \delta'(t) + gu'(t) = 0, \quad \text{q.s em } \Gamma_1 \times [0, T].$$

Agora usaremos o Teorema da Regularização Elíptica para concluir que $u(t) \in V \cap H^2(\Omega)$.

De fato, seja u solução do modelo (2.4). Assim,

$$\begin{cases} -\Delta u = f := -\frac{1}{\alpha} u'' \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = q := \delta' - gu' \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0, T). \end{cases} \quad (4.70)$$

De (4.67) temos que $f \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$, e das conclusões (4.57), segue que $q \in L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$. Sendo $f(t) \in L^2(\Omega)$ e $q(t) \in L^2(\Gamma_1)$, então por resultados de regularidade de um problema elíptico, veja Teoremas 9.25 e 9.26 de Brezis ([4], p. 298), segue que a função u solução do modelo (2.4) pertence a $V \cap H_\Delta(\Omega)$.

4.4 Verificação das Condições Iniciais

Agora, verificaremos os dados iniciais do modelo (2.4). Primeiramente mostraremos que

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ q.s. em } \Omega. \quad (4.71)$$

Por (4.57)_{1,2} segue que u e $u' \in L^\infty(0, T; V)$. Daí, pelo Lema 11, $u \in C([0, T], V)$. Além disso, as convergências vistas em (4.57)_{1,2} constituem,

$$\int_0^T (u_m(t), \mu(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), \mu(t)) dt \quad \text{e} \quad \int_0^T (u'_m(t), \mu(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), \mu(t)) dt,$$

para todo $\mu \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Tomando em particular, $\mu(x, t) = v(x)\phi(t)$ com $\phi \in C^1([0, T])$, $\phi(T) = 0$, $\phi(0) = 1$ e

$v \in L^2(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m(t), v) \phi'(t) dt &\rightarrow \int_0^T (u(t), v) \phi'(t) dt, \\ \int_0^T (u'_m(t), v) \phi(t) dt &\rightarrow \int_0^T (u'(t), v) \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Adicionando as duas convergências acima, temos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [(u_m(t), v) \phi(t)] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} [(u(t), v) \phi(t)] dt,$$

o que resulta

$$(u_m(T), v) \phi(T) - (u_m(0), v) \phi(0) \rightarrow (u(T), v) \phi(T) - (u(0), v) \phi(0),$$

assim

$$(u_m(0), v) \rightarrow (u(0), v) \text{ para todo } v \in L^2(\Omega) \quad (4.72)$$

Por outro lado, de (4.12)₁, temos que $u_m(0) \rightarrow u_0$ forte em $V \cap H_\Delta(\Omega)$, o que implica em convergência fraca, deste fato e de (4.72), temos que

$$(u_0 - u(0), v) = 0, \text{ para todo } v \in L^2(\Omega).$$

Logo,

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ q.s. em } \Omega.$$

Mostraremos agora que $u'(x, 0) = u_1(x)$ q.s. em Ω . De (4.11) para cada $v \in W_m$, temos que

$$(u''_m(t), v) + \alpha(t) [(\nabla u_m(t), \nabla v) - (\delta'_m(t) - gu'_m(t), v)_{\Gamma_1}] = 0. \quad (4.73)$$

Multiplicando (4.73) por $\phi(t)$, e integrando de 0 até T , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''_m(t), v) \phi(t) dt + \int_0^T \alpha(t) (\nabla u_m(t), \nabla v) \phi(t) dt - \\ \int_0^T \alpha(t) (\delta'_m(t) - gu'_m(t), v)_{\Gamma_1} \phi(t) dt = 0 \quad \forall v \in W_m. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Integrando por partes a primeira integral da igualdade acima e usando novamente a condição estabelecida para a função $\phi(t)$, isto é, $\phi(t) \in C^1([0, T])$, $\phi(T) = 0$, $\phi(0) = 1$, daí

$$\int_0^T (u''_m(t), v) \phi(t) dt = - \int_0^T (u'_m(t), v) \phi'(t) dt - (u_{1m}, v),$$

e substituindo esta igualdade na anterior, segue que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u'_m(t), v) \phi'(t) dt - (u'_{1m}, v) + \int_0^T \alpha(t) (\nabla u_m(t), \nabla v) \phi(t) dt \\ & - \int_0^T \alpha(t) (\delta'_m(t) - gu'_m(t), v)_{\Gamma_1} \phi(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Usando as convergências (4.12)₂ e (4.57) (após passagem ao limite) na identidade acima, resulta

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u'(t), v) \phi'(t) dt - (u_1, v) + \int_0^T \alpha(t) (\nabla u(t), \nabla v) \phi(t) dt \\ & - \int_0^T \alpha(t) (\delta'(t) - gu'(t), v)_{\Gamma_1} \phi(t) dt = 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira integral da identidade anterior, segue

$$\begin{aligned} & -(u_1, v) + (u'(0), v) + \int_0^T (u''(t), v) \phi(t) dt + \int_0^T \alpha(t) (\nabla u(t), \nabla v) \phi(t) dt \\ & - \int_0^T \alpha(t) (\delta'(t) - gu'(t), v)_{\Gamma_1} \phi(t) dt = 0, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Daí e do fato de u satisfazer a equação (4.62)₁, resulta $-(u_1, v) + (u'(0), v) = 0$ para todo $v \in V$. Logo, pelo Teorema de Du Bois Raymond, $u'(x, 0) = u_1(x)$ q.s em Ω .

Agora resta mostrar que $\delta(x, 0) = \delta_0(x)$ q.s. em Γ_1 . De (4.57)_{6,7}, temos que $\delta, \delta' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1))$. Assim, pelo Lema 11, resulta que $\delta \in C([0, T], L^2(\Gamma_1))$. Além disso, as convergências (4.57)_{6,7}, significam

$$\int_0^T (\delta_m(t), \mu(t))_{\Gamma_1} dt \rightarrow \int_0^T (\delta(t), \mu(t))_{\Gamma_1} dt \quad \text{e} \quad \int_0^T (\delta'_m(t), \mu(t))_{\Gamma_1} dt \rightarrow \int_0^T (\delta'(t), \mu(t))_{\Gamma_1} dt,$$

para toda $\mu \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$. Se tomarmos $\mu(x, t) = v(x)\phi(t)$ com $\phi \in C^1([0, T])$, $\phi(T) = 0$, $\phi(0) = 1$ e $v \in L^2(\Gamma_1)$, resulta que

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\delta_m(t), v)_{\Gamma_1} \phi'(t) dt \rightarrow \int_0^T (\delta(t), v)_{\Gamma_1} \phi'(t) dt, \\ & \int_0^T (\delta'_m(t), v)_{\Gamma_1} \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T (\delta'(t), v)_{\Gamma_1} \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Somando as duas convergências acima, obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [(\delta_m(t), v)_{\Gamma_1} \phi(t)] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} [(\delta(t), v)_{\Gamma_1} \phi(t)] dt,$$

o que implica

$$(\delta_m(T), v)_{\Gamma_1} \phi(T) - (\delta_m(0), v)_{\Gamma_1} \phi(0) \rightarrow (\delta(T), v)_{\Gamma_1} \phi(T) - (\delta(0), v)_{\Gamma_1} \phi(0).$$

Assim,

$$(\delta_m(0), v)_{\Gamma_1} \rightarrow (\delta(0), v)_{\Gamma_1} \quad \forall v \in L^2(\Gamma_1).$$

De (4.12)₃, $\delta_m(0) \rightarrow \delta_0$ forte em $L^2(\Gamma_1)$ e do fato de convergência forte implicar em convergência fraca, resulta que

$$(\delta_0 - \delta(0), v)_{\Gamma_1} = 0 \text{ para todo } v \in L^2(\Gamma_1).$$

Portanto,

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x) \text{ q. s. em } \Gamma_1.$$

4.5 Unicidade das Soluções

Nesta seção, será mostrado que o modelo (2.4) possui uma única solução. Para isto, suponha que (u, δ) e $(\hat{u}, \hat{\delta})$ sejam duas soluções de (2.4). Considere $v = u - \hat{u}$ e $\varphi = \delta - \hat{\delta}$. Assim, v e φ satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in L_{loc}^\infty(0, \infty; V \cap H_\Delta(\Omega)), \quad v' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; V), \\ v'' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \\ \varphi, \varphi', \varphi'' \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \\ v'' - \alpha \Delta v = 0 \text{ em } L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \\ v' + f_1 \varphi'' + f_2 \varphi' + f_3 \varphi = 0 \text{ em } L_{loc}^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} - \varphi' + g v' = 0 \text{ em } L_{loc}^2(0, \infty; H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_1)), \\ v(x, 0) = 0, \quad v'(x, 0) = 0 \text{ e } \varphi(x, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (4.75)$$

Note que, para cada $t \geq 0$ fixo, $v'(t) \in V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ q.s e $v''(t) \in L^2(\Omega)$, então o produto interno $(v''(t), v'(t))$, está bem definido. De modo análogo, de (4.75), $(\varphi''(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1}$ está bem definido. De (4.75), seguindo de modo similar a formulação variacional (4.9), obtemos

$$(v''(t), \tau) + \alpha(t) [(\nabla v(t), \nabla \tau) - (\varphi'(t), \tau)_{\Gamma_1} + (g v'(t), \tau)_{\Gamma_1}] = 0,$$

$$(v'(t) + f_1\varphi''(t) + f_2\varphi'(t) + f_3\varphi(t), \sigma)_{\Gamma_1} = 0.$$

Tomando, $\tau = 2v'$ e $\sigma = 2\varphi'$, de modo análogo ao procedimento aplicado para obter (4.23), podemos inferir que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(|v'(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla v(t)|^2 + |f_1^{1/2}\varphi'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2}\varphi(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \right) \\ & \quad + 2\alpha(t)|f_2^{1/2}\varphi'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2\alpha(t)|g^{1/2}v'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ & = \alpha'(t) \frac{\alpha(t)}{\alpha(t)} \left(|\nabla v(t)|^2 + |f_1^{1/2}\varphi'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2}\varphi(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Usando em (4.76) que $|\alpha'(t)|_{L^\infty(0,T)} \leq C$, $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0$ (veja (4.2)), e o fato de $2\alpha(t)|f_2^{1/2}\varphi'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2\alpha(t)|g^{1/2}v'(t)|_{\Gamma_1}^2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(|v'(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla v(t)|^2 + |f_1^{1/2}\varphi'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2}\varphi(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \right) \\ & \leq \frac{C}{\alpha_0} \alpha(t) \left(|\nabla v(t)|^2 + |f_1^{1/2}\varphi'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2}\varphi(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \end{aligned}$$

Definindo $\Lambda(t) := |v'(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla v(t)|^2 + |f_1^{1/2}\varphi'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2}\varphi(t)|_{\Gamma_1}^2 \right)$, e voltando na desigualdade anterior, segue $\Lambda'(t) \leq C\Lambda(t)$, agora pela desigualdade de Gronwall 1, resulta

$$\Lambda(t) \leq e^{tc}\Lambda(0) = 0,$$

o que implica

$$\Lambda(0) = \left(|v'(0)|^2 + \alpha(0) \left(|\nabla v(0)|^2 + |f_1^{1/2}\varphi'(0)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2}\varphi(0)|_{\Gamma_1}^2 \right) \right) = 0.$$

De fato, por (4.75)₇ os dados iniciais $v(x, 0)$, $v'(x, 0)$, $\varphi(x, 0)$ são nulos. De $v(x, 0) = 0$, para todo x , implica $|\nabla v(0)| = |\nabla v(x, 0)| = 0$, o que também acarreta $\frac{\partial v(x, 0)}{\partial \nu} = 0$, pois $\frac{\partial v(x, 0)}{\partial \nu} = N \cdot \nabla v(x, 0) = 0$. Disto e de $v'(x, 0) = 0$, segue que

$$\varphi'(x, 0) = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial \nu} + g(x)v'(x, 0) = 0.$$

Com isto fica justificado que $\Lambda(0) = 0$, e daí $\Lambda(t) = 0$. Lembrando que $\Lambda(t) = \left(|v'(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla v(t)|^2 + |f_1^{1/2}\varphi'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2}\varphi(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \right)$, segue abaixo a unicidade de solução, pois

- $|\nabla v(t)| = 0$ e da desigualdade de Poincaré, $|v(t)| \leq C|\nabla v(t)| = 0$, segue $|v(t)| = 0$, o que resulta $v = 0$, logo $u = \hat{u}$.
- $|f_3^{1/2}\varphi(t)|_{\Gamma_1}^2 = 0$ implica $|\varphi(t)|_{\Gamma_1} = 0$, o que resulta $\varphi = 0$, logo $\delta = \hat{\delta}$.

5 DECAIMENTO UNIFORME DA ENERGIA

5.1 Comportamento Assintótico da Energia

O principal objetivo deste capítulo é a estabilização uniforme da energia do sistema (2.4), em intervalos de tempo muito grande. Ou seja, provaremos que a energia total de (2.4) decai uniformemente à uma taxa exponencial.

5.1.1 Identidade da Energia

Tomando o produto escalar de $L^2(\Omega)$ entre a equação (2.4)₁ e u' , temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'(t)|^2 - \alpha(t) (\Delta u(t), u'(t)) = 0. \quad (5.1)$$

Usando a Fórmula de Green e as equações (2.4)₂ e (2.4)₃ na segunda parcela da igualdade acima, segue

$$\begin{aligned} -\alpha(t) (\Delta u(t), u'(t)) &= \alpha(t) \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla u'(t) \, dx - \alpha(t) \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} u'(t) \, ds \\ &= \frac{\alpha(t)}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u(t)|^2 - \alpha(t) \left(\frac{\partial u(t)}{\partial \nu}, u'(t) \right)_{\Gamma_1} \\ &= \frac{\alpha(t)}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u(t)|^2 + \alpha(t) (\delta'(t), f_1 \delta''(t) + f_2 \delta'(t) + f_3 \delta(t))_{\Gamma_1} \\ &\quad + \alpha(t) (g u'(t), u'(t))_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} -\alpha(t) (\Delta u(t), u'(t)) &= \frac{\alpha(t)}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \\ &\quad + \alpha(t) |f_2^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t) |g^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Substituindo (5.2) em (5.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'(t)|^2 + \frac{\alpha(t)}{2} \frac{d}{dt} \left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \\ + \alpha(t) |f_2^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t) |g^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2 = 0. \end{aligned}$$

Agora, usamos a regra de derivada do produto de duas funções, para obter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|u'(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \right] \\ & + \alpha(t) |f_2^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t) |g^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ & = \frac{\alpha'(t)}{2} \left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Seja $E : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ a função **energia** definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} \left[|u'(t)|^2 + \alpha(t) \left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right) \right]. \quad (5.4)$$

De (5.4) em (5.3), resulta que

$$\begin{aligned} & E'(t) + \alpha(t) |f_2^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t) |g^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ & = \frac{\alpha'(t)}{2} \left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Supondo que

$$|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} \leq \frac{\varepsilon \alpha_0}{2} \quad \text{tal que} \quad \varepsilon = \min \left\{ 1, \frac{2\bar{f}_2}{\hat{f}_1(1+2a_4)}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{4K_2} \right\} \quad (5.6)$$

e substituindo esta hipótese em (5.5), e usando o fato de que $0 < \alpha_0 \leq \alpha(t)$, segue

$$\begin{aligned} & E'(t) + \alpha(t) |f_2^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t) |g^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ & \leq \frac{\varepsilon}{4} \alpha(t) \left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para atingirmos o nosso objetivo é também necessário considerarmos hipóteses geométricas sobre as fronteiras Γ_0 e Γ_1 . Ao longo deste capítulo suponhamos que Γ_0 e Γ_1 são conjuntos fechados, conexos e disjuntos com $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$. Daí, seja $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função linear $m(x) := x - x_0$ com $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixo, e definimos

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) > 0\}, \quad (5.8)$$

onde o símbolo ponto, isto é, “ \cdot ” denota o produto escalar euclidiano de \mathbb{R}^n e ν é a normal unitária exterior definida sobre cada ponto de Γ . Agora, a função $g : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ da equação (2.4)₄ é específica e definida por

$$g(x) := m(x) \cdot \nu(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \Gamma_1. \quad (5.9)$$

Pelo fato de Γ_1 ser um conjunto fechado, e a função g ser contínua, existe um número real positivo, g_0 , tal que

$$0 < g_0 := \inf_{x \in \Gamma_1} g(x). \quad (5.10)$$

De (4.2), hipóteses sobre f_i para $i = 1, 2, 3$, temos que cada f_i é contínua e positiva sobre Γ_1 , onde Γ_1 é fechado. Logo, existem os números reais \bar{f}_i e \hat{f}_i tais que

$$0 < \bar{f}_i := \inf_{x \in \Gamma_1} f_i(x) \leq \sup_{x \in \Gamma_1} f_i(x) =: \hat{f}_i \quad \text{com } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Assim, para todo $x \in \Gamma_1$ resulta que

$$0 < \bar{f}_i \leq f_i(x) \leq \hat{f}_i \quad \iff \quad \begin{cases} 1 \leq \frac{f_i(x)}{\bar{f}_i} \leq \frac{\hat{f}_i}{\bar{f}_i}, \\ 1 \geq \frac{f_i(x)}{\hat{f}_i} \geq \frac{\bar{f}_i}{\hat{f}_i}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_1} |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 &= \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_1} \int_{\Gamma_1} |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\mathbb{R}}^2 \Gamma_1 = \bar{f}_2 \int_{\Gamma_1} \frac{f_1}{\bar{f}_1} |\delta'(t)|_{\mathbb{R}}^2 d\Gamma_1 \\ &\leq \bar{f}_2 \int_{\Gamma_1} 1 |\delta'(t)|_{\mathbb{R}}^2 d\Gamma_1 = \bar{f}_2 |\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq |f_2^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Usando (5.9), (5.12) em (5.7), segue que

$$\begin{aligned} E'(t) + \alpha(t) \frac{\bar{f}_2}{\bar{f}_1} |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t) |(m \cdot \nu)^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ \leq \frac{\varepsilon}{4} \alpha(t) \left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Observação 23 *É conhecido que a seguinte aplicação traço de ordem zero, $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ é contínua e que a imersão de $H^{1/2}(\Gamma)$ em $L^2(\Gamma)$ é densa e contínua. Portanto, conclui-se que existe uma constante real, $C > 0$, tal que $|z|_{\Gamma}^2 \leq C |\nabla z|^2$ para todo $z \in H^1(\Omega)$.*

Para vêr a demonstração do resultado acima, consulte Medeiros e Milla [14].

Mostraremos a seguir, um caso particular o qual será útil para estabelecer o principal resultado desta seção.

Proposição 24 (*Caso particular da observação 28*) *Existe uma constante real $a_1 > 0$, tal que*

$$|(m \cdot \nu)^{1/2} v(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{a_1}{2} |\nabla v(t)|^2 \quad \text{para todo } v \in V. \quad (5.14)$$

Demonstração: Observe que

$$|(m\nu)^{1/2} v(t)|_{\Gamma}^2 = \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) v^2 dx = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} m_k \nu_k v^2 dx. \quad (obs_1)$$

Pelo teorema da divergência de Gauss e derivação do produto, resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} m_k \nu_k v^2 ds &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (m_k v^2) dx \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} v \left(m_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) dx + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial m_k}{\partial x_k} v^2 dx. \end{aligned} \quad (obs_2)$$

Como $v|_{\Gamma_0} = 0$ então de (obs_1) e (obs_2) ,

$$\int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) v^2 ds = 2 \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} v \left(m_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) dx + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial m_k}{\partial x_k} v^2 dx.$$

Seja $\widehat{m} = \widehat{m}(x_0) = \sup_{x \in \Gamma} |m(x)|_{\mathbb{R}^n}$. Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young,

Poincaré e que $\frac{\partial m_k}{\partial x_k} = 1$ (nesta ordem) podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) v^2 ds &= 2 \int_{\Omega} v(m \cdot \nabla v) dx + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} v^2 dx \\ &= 2 \int_{\Omega} v(m \cdot \nabla v) dx + n|v|^2 \leq 2\widehat{m} \int_{\Omega} |v|_{\mathbb{R}} |\nabla v|_{\mathbb{R}} dx + n|v|^2 \\ &\leq \widehat{m}|v|^2 + \widehat{m}|\nabla v|^2 + n|v|^2 = (\widehat{m} + n)|v|^2 + \widehat{m}|\nabla v|^2 \\ &\leq C_0(\widehat{m} + n)|\nabla v|^2 + \widehat{m}|\nabla v|^2 = \frac{a_1}{2} |\nabla v|^2, \end{aligned}$$

onde $a_1 = 2C_0(\widehat{m} + n) + 2\widehat{m}$. Logo, a desigualdade (5.14) é verdadeira. ■

Além das hipóteses fixadas acima consideraremos ainda que

$$\frac{1}{\sigma} = \alpha_0 \leq \alpha(t) \leq \alpha_1 \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^+. \quad (5.15)$$

5.1.2 Teorema do Decaimento da Energia com Taxa Exponencial

Teorema 25 *Considere que o par de funções (u, δ) seja solução do modelo (2.4). Se as hipóteses (5.6), (5.8), (5.9) e (5.15) são consideradas então*

$$E(t) \leq 3E(0) e^{-\left(\varepsilon/6\right)t}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (5.16)$$

A demonstração deste teorema, feita a seguir, é baseada nas ideias contidas no artigo Braz e Silva em [21].

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$ (o escolhido em (5.6)) e

$$E_\varepsilon(t) := E(t) + \varepsilon\rho(t), \quad (5.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho(t) &= 2(u'(t), (m \cdot \nabla)u(t)) + (n - 1/2)(u'(t), u(t)) \\ &\quad + [2\alpha(t) - 3\alpha_1](f_1\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A derivada de ρ é,

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= 2(u''(t), (m \cdot \nabla)u(t)) + 2(u'(t), (m \cdot \nabla)u'(t)) \\ &\quad + (n - 1/2)(u''(t), u(t)) \\ &\quad + (n - 1/2)|u'(t)|^2 + [2\alpha(t) - 3\alpha_1](f_1\delta''(t), \delta(t))_{\Gamma_1} \\ &\quad + [2\alpha(t) - 3\alpha_1]|f_1^{1/2}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2\alpha'(t)(f_1\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Substituindo (2.4)₁ e (2.4)₃ na igualdade acima, segue

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= 2\alpha(t)(\Delta u(t), (m \cdot \nabla)u(t)) + 2(u'(t), (m \cdot \nabla)u'(t)) \\ &\quad + (n - 1/2)\alpha(t)(\Delta u(t), u(t)) + (n - 1/2)|u'(t)|^2 \\ &\quad - [2\alpha(t) - 3\alpha_1]\left[(u'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} + (f_2\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1}\right. \\ &\quad \left. + (f_3\delta(t), \delta(t))_{\Gamma_1}\right] + [2\alpha(t) - 3\alpha_1]|f_1^{1/2}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ &\quad + 2\alpha'(t)(f_1\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} =: P_1 + \dots + P_9. \end{aligned} \quad (5.20)$$

O propósito agora é majorar superiormente as **parcelas** P_1, \dots, P_9 . Para facilitar a notação omitiremos, a seguir, a variável temporal t em todas as parcelas P_j .

5.1.2.0.2 Parcela 1

$P_1 = 2\alpha(\Delta u, (m \cdot \nabla)u)$. Pela Fórmula de Green segue

$$2(\Delta u, (m \cdot \nabla)u) = 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} (m \cdot \nabla)u \, dx - 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla((m \cdot \nabla)u) \, dx. \quad (5.21)$$

Passando da forma vetorial para a forma componente, segue que $\sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = (m \cdot \nabla)u$, daí

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla[(m \cdot \nabla)u] &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial[(m \cdot \nabla)u]}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial[(m \cdot \nabla)u]}{\partial x_n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} [(m \cdot \nabla)u] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial u}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Voltando em (5.21) e substituindo a conta acima, resulta

$$2(\Delta u, (m \cdot \nabla)u) = 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \, dx - 2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx.$$

Aplicando a regra de derivada do produto e o fato $\frac{\partial m_j}{\partial x_k} = 1$ quando $j = k$, e $\frac{\partial m_j}{\partial x_k} = 0$ quando $k \neq j$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial m_j}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2(\Delta u, (m \cdot \nabla)u) &= 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \, dx - 2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \, dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \, dx \quad (5.22) \\ &= 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \, dx - 2|\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \, dx. \end{aligned}$$

Sabendo que $\frac{\partial u}{\partial x_k} = \nu_k \frac{\partial u}{\partial \nu}$ sobre Γ_0 ,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \, dx &= 2 \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, dx \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \, dx \quad (5.23) \\ &= 2 \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (m \cdot \nu) \, dx + 2 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \, dx. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} m_j \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(m_j \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} m_j \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Novamente pela Fórmula de Green e derivada do produto, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dx &= - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(m_j \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx \\ + \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx &= - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \frac{\partial m_j}{\partial x_j} dx \\ - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dx &+ \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx. \end{aligned}$$

O que acarreta em

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dx &= - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \frac{\partial m_j}{\partial x_j} dx \\ + \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx &= -n \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \quad (5.24) \\ + \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx &= -n |\nabla u|^2 + \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx. \end{aligned}$$

Novamente usando $\frac{\partial u}{\partial x_k} = \nu_k \frac{\partial u}{\partial \nu}$ sobre Γ_0 , segue

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx &= \int_{\Gamma_0} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \nu_k^2 m_j \nu_j dx \\ + \int_{\Gamma_1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx &= \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (m \cdot \nu) dx \quad (5.25) \\ + \int_{\Gamma_1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx. \end{aligned}$$

Substituindo (5.23)-(5.25) em (5.22), temos que

$$\begin{aligned} 2\alpha(\Delta u, (m \cdot \nabla)u) &= \alpha(n-2)|\nabla u|^2 + 2\alpha \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (m \cdot \nu) dx \\ + 2\alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx &- \alpha \int_{\Gamma_1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx. \end{aligned}$$

Agora, voltando a definição de Γ_0 em (5.8), temos $m \cdot \nu \leq 0$, o que acarreta

$$2\alpha \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (m \cdot \nu) dx \leq 0. \quad (5.26)$$

De (5.26),

$$\begin{aligned}
2\alpha(\Delta u, (m \cdot \nabla)u) &\leq \alpha(n-2)|\nabla u|^2 + 2\alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx \\
&- \alpha \int_{\Gamma_1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 m_j \nu_j dx.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

De (2.4)₄ e (5.9), segue que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta' - (m \cdot \nu)u'$. Assim,

$$\begin{aligned}
2\alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx &= 2\alpha \int_{\Gamma_1} \delta' \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx \\
&- 2\alpha \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu)u' \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Usando as desigualdades usuais de Cauchy-Schwarz, Young e (5.10) (nesta seqüência), resulta

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_1} \delta' \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx \right|_{\mathbb{R}} &\leq \int_{\Gamma_1} |\delta'|_{\mathbb{R}} |m|_{\mathbb{R}} |\nabla u|_{\mathbb{R}} dx \\
&\leq \int_{\Gamma_1} \frac{\widehat{m}\sqrt{2}|\delta'|_{\mathbb{R}}}{\sqrt{(m \cdot v)}} \frac{\sqrt{(m \cdot v)}}{\sqrt{2}} |\nabla u|_{\mathbb{R}} dx \leq \frac{\widehat{m}^2}{g_0} |\delta'|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{4} \int_{\Gamma_1} (m \cdot v) |\nabla u|_{\mathbb{R}}^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Do fato $|\delta'|_{\Gamma_1}^2 \leq \frac{|f_1^{1/2} \delta'|_{\Gamma_1}^2}{f_1}$ (onde, tal desigualdade pode ser obtida analogamente ao que foi feito em (5.12)), segue

$$\left| \int_{\Gamma_1} \delta' \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx \right|_{\mathbb{R}} \leq \frac{\widehat{m}^2}{f_1 g_0} |f_1^{1/2} \delta'|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{4} \int_{\Gamma_1} (m \cdot v) |\nabla u|_{\mathbb{R}}^2 dx. \tag{5.30}$$

Procedendo de modo análogo ao caso acima,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu)u' \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx \right|_{\mathbb{R}} &\leq \widehat{m} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |u'|_{\mathbb{R}} |\nabla u|_{\mathbb{R}} dx \\
&\leq \widehat{m}^2 |(m \cdot \nu)^{1/2} u'|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{4} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\nabla u|_{\mathbb{R}}^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Usando (5.30), (5.31) em (5.28), segue

$$\begin{aligned}
2\alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx &\leq \frac{2\alpha \widehat{m}^2}{f_1 g_0} |f_1^{1/2} \delta'|_{\Gamma_1}^2 + 2\alpha \widehat{m}^2 |(m \cdot \nu)^{1/2} u'|_{\Gamma_1}^2 \\
&+ \alpha \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\nabla u|_{\mathbb{R}}^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Agora, usando (5.32) em (5.27),

$$\begin{aligned} 2\alpha(\Delta u, (m \cdot \nabla)u) &\leq \alpha(n-2)|\nabla u|^2 \\ &+ \frac{2\alpha\widehat{m}^2}{\bar{f}_1 g_0} |f_1^{1/2} \delta'|_{\Gamma_1}^2 + 2\alpha\widehat{m}^2 |(m \cdot \nu)^{1/2} u'|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.1.2.0.3 Parcela 2

$P_2 = 2(u', (m \cdot \nabla)u')$. Para majoração de P_2 usaremos a Fórmula de Green, regra da derivada do produto, $u|_{\Gamma_0} = 0$, e por (4.2), $1 \leq \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}$. Com isto,

$$\begin{aligned} P_2 &= 2(u', (m \cdot \nabla)u') = 2 \int_{\Omega} u' \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u'}{\partial x_k} dx = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial (u')^2}{\partial x_k} dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_k}{\partial x_k} (u')^2 dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{k=1}^n m_k \nu_k (u')^2 dx_1 \\ &= -n|u'(t)|^2 + |(m \cdot \nu)^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ &\leq -n|u'(t)|^2 + \frac{\alpha(t)}{\alpha_0} |(m \cdot \nu)^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.1.2.0.4 Parcela 3

$P_3 = (n-1/2)\alpha(\Delta u, u)$. Pela Fórmula de Green e de (2.4)_{1,4},

$$\begin{aligned} (\Delta u, u) &= \int_{\Omega} \Delta u u dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dx \\ &= -|\nabla u|^2 + \int_{\Gamma_1} \delta' u dx - \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) u' u dx. \end{aligned}$$

Por meio da desigualdade de Young, das desigualdades (5.10), (5.12) e da Proposição (5.14), podemos escrever que

$$\begin{aligned} &(n-1/2)\alpha \left| \int_{\Gamma_1} \delta' u dx \right|_{\mathbb{R}} \\ &\leq \int_{\Gamma_1} (n-1/2) \frac{\sqrt{\alpha 4a_1}}{\sqrt{(m \cdot \nu)}} |\delta'|_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{\alpha(m \cdot \nu)}}{\sqrt{4a_1}} |u|_{\mathbb{R}} dx \\ &\leq \frac{2(n-1/2)^2 a_1 \alpha}{g_0} |\delta'|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\alpha}{8a_1} |(m \cdot \nu)^{1/2} u'|_{\Gamma_1}^2 \\ &\leq \frac{2(n-1/2)^2 a_1 \alpha}{\bar{f}_1 g_0} |f_1^{1/2} \delta'|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\alpha}{16} |\nabla u(t)|^2 \end{aligned}$$

Percebendo que $-(n - 1/2) \leq (n - 1/2)$, segue

$$\begin{aligned}
-(n - 1/2)\alpha \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) u \cdot u' dx &\leq \int_{\Gamma_1} (n - 1/2) \sqrt{\alpha(m \cdot \nu) 4a_1} |u'|_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\alpha(m \cdot \nu)}{4a_1}} |u|_{\mathbb{R}} dx \\
&\leq 2a_1(n - 1/2)^2 \alpha |(m \cdot \nu)^{1/2} u'|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\alpha}{8a_1} |(m \cdot \nu)^{1/2} u|_{\Gamma_1}^2 \\
&\leq 2a_1(n - 1/2)^2 \alpha |(m \cdot \nu)^{1/2} u'|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\alpha}{16} |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
P_3 = (n - 1/2)\alpha(\nabla u, u) &\leq -(n - 5/8)\alpha |\nabla u|^2 \\
+ \frac{2(n - 1/2)^2 a_1 \alpha}{\bar{f}_1 g_0} |f_1^{1/2} \delta'|_{\Gamma_1}^2 &+ 2a_1(n - 1/2)^2 \alpha |(m \cdot \nu)^{1/2} u'|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

5.1.2.0.5 Parcela 4

$P_4 = (n - 1/2)\alpha |u'|^2$ não necessita de majoração, pois o termo $|u'|^2$ está presente na identidade da energia (5.4).

5.1.2.0.6 Parcelas 5 a 9

Considere as parcelas abaixo

$$\begin{aligned}
P_5 + \dots + P_9 &:= -[2\alpha(t) - 3\alpha_1] [(u'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} + (f_2 \delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} \\
&\quad + (f_3 \delta(t), \delta(t))_{\Gamma_1}] + [2\alpha(t) - 3\alpha_1] |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&\quad + 2\alpha'(t) (f_1 \delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1}.
\end{aligned}$$

Agora, limitaremos superiormente cada termo da identidade acima.

► Usando a desigualdade de Young, (5.10), (5.12) e (4.2), podemos escrever

$$\begin{aligned}
(u'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} &\leq \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (m \cdot \nu)^{1/2} |u'(t)| \frac{\sqrt{\sigma} |\delta(t)|}{(m \cdot \nu)^{1/2}} dx \\
&\leq \frac{1}{2\sigma} |(m \cdot \nu)^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\sigma}{2\bar{f}_3 g_0} |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned}$$

Como $-[2\alpha(t) - 3\alpha_1] \leq 2\alpha(t) + 3\alpha_1 \leq 2\alpha(t) + 3\alpha_1 \frac{\alpha(t)}{\alpha_0} = \alpha(t) \left[2 + 3 \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right]$ então

$$\begin{aligned} P_5 = -[2\alpha(t) - 3\alpha_1](u'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} &\leq \alpha(t) \left[\frac{1}{\sigma} + \frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0} \right] |(m \cdot \nu)^{1/2} u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ &\quad + \sigma\alpha(t) \left[\frac{1}{\bar{f}_3 g_0} + \frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3 g_0 \alpha_0} \right] |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2, \end{aligned}$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante a ser escolhida.

► Novamente da desigualdade de Young, e (5.12),

$$\begin{aligned} (f_2 \delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} &\leq \frac{1}{2\sigma} |f_2^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\sigma}{2} |\delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ &\leq \frac{\hat{f}_2}{\bar{f}_1 2\sigma} |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\sigma}{2\bar{f}_3} |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_6 = -[2\alpha(t) - 3\alpha_1](f_2 \delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} &\leq \alpha(t) \left[\frac{\hat{f}_2}{\sigma \bar{f}_1} + \frac{3\hat{f}_2 \alpha_1}{2\sigma \bar{f}_1 \alpha_0} \right] |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ &\quad + \sigma\alpha(t) \left[\frac{1}{\bar{f}_3} + \frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3 \alpha_0} \right] |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned}$$

► Da desigualdade de Young, (5.12) e (5.6), segue

$$\begin{aligned} P_7 = 2\alpha'(t)(f_1 \delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} &\leq |\alpha'(t)| \frac{1}{\sigma} |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |\alpha'(t)| \frac{\sigma}{\bar{f}_3} |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ &\leq \frac{1}{\sigma} \alpha(t) |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \sigma\alpha(t) \frac{1}{\bar{f}_3} |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned}$$

► Usando que $\sigma = 1/\alpha_0$ e (4.2),

$$\begin{aligned} P_8 = -[2\alpha(t) - 3\alpha_1] |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 &\leq -2\alpha(t) |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 + 3\alpha_1 \frac{\alpha(t)}{\alpha_0} |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ &= -2\alpha(t) |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 + 3\sigma\alpha_1 \alpha(t) |f_3^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned}$$

► De (5.15)

$$P_9 = [2\alpha(t) - 3\alpha_1] |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq [2\alpha(t) - 3\alpha(t)] |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 = -\alpha(t) |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_5 + \dots + P_9 &\leq \alpha(t) \left[\frac{1}{\sigma} + \frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0} \right] \left| (m \cdot \nu)^{1/2} u'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 \\
&+ \alpha(t) \left[\frac{\widehat{f}_2}{\sigma \widehat{f}_1} + \frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\sigma \widehat{f}_1\alpha_0} + \frac{1}{\sigma} \right] \left| f_1^{1/2} \delta'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 - \alpha(t) \left| f_1^{1/2} \delta'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 \\
&- \alpha(t) \left[2 - \sigma \left(\frac{1}{\overline{f}_3 g_0} + \frac{3\alpha_1}{2\overline{f}_3 g_0 \alpha_0} + \frac{1}{\overline{f}_3} + \frac{3\alpha_1}{2\overline{f}_3 \alpha_0} + \frac{1}{\overline{f}_3} + 3\alpha_1 \right) \right] \left| f_3^{1/2} \delta(t) \right|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Substituindo (5.33) - (5.36) em (5.20), segue

$$\begin{aligned}
\rho'(t) &\leq -\frac{1}{2}\alpha(t)|\nabla u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \\
&+ \alpha(t)a_2 \left| (m \cdot \nu)^{1/2} u'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t)a_3 \left| f_1^{1/2} \delta'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 \\
&- \alpha(t) \left| f_1^{1/2} \delta'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 - \alpha(t) [2 - \sigma a_4] \left| f_3^{1/2} \delta(t) \right|_{\Gamma_1}^2,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

onde

$$\begin{aligned}
a_2 &:= 2\widehat{m}^2 + \frac{1}{\alpha_0} + 2a_1(n-1/2)^2 + \frac{1}{\sigma} + \frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0}; \\
a_3 &:= \frac{2\widehat{m}^2}{g_0 \widehat{f}_1} + \frac{2a_1(n-1/2)^2}{g_0 \widehat{f}_1} + \frac{\widehat{f}_2}{\sigma \widehat{f}_1} + \frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\sigma \widehat{f}_1\alpha_0} + \frac{1}{\sigma}; \\
a_4 &:= \frac{1}{\overline{f}_3 g_0} + \frac{3\alpha_1}{2\overline{f}_3 g_0 \alpha_0} + \frac{2}{\overline{f}_3} + \frac{3\alpha_1}{2\overline{f}_3 \alpha_0} + 3\alpha_1,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

e na primeira parcela da última desigualdade acima (no coeficiente do $|\nabla u(t)|^2$) usamos que $-11/8 < -1/2$.

Em (5.37) multiplicando a desigualdade por $\varepsilon > 0$ (ε escolhido em (5.6)), adicionando-a a desigualdade (5.13), e usando (5.17) que diz $E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon\rho(t)$, assim

$$\begin{aligned}
E'_\varepsilon(t) &\leq -\frac{\varepsilon}{4}|u'(t)|^2 - \alpha(t)\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u(t)|^2 - \alpha(t)\varepsilon \left| f_1^{1/2} \delta'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 \\
&- \alpha(t) \left| f_1^{1/2} \delta'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 \left(\frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1} - \frac{\varepsilon}{2}(1 + 2a_3) \right) \\
&- \alpha(t) \left| (m \cdot \nu)^{1/2} u'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 (1 - a_4\varepsilon) \\
&- \alpha(t)\varepsilon \left[\frac{3}{2} - \sigma a_4 \right] \left| f_3^{1/2} \delta(t) \right|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned}$$

Usando (5.6) que diz $\varepsilon = \min \left\{ 1, \frac{2\bar{f}_2}{\widehat{f}_1(1+2a_4)}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{4K_2} \right\}$, segue

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) &\leq -\frac{\varepsilon}{4}|u'(t)|^2 - \alpha(t)\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u(t)|^2 - \alpha(t)\varepsilon \left| f_1^{1/2}\delta'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 \\ &\quad - \alpha(t)\varepsilon \left[\frac{3}{2} - \sigma a_4 \right] \left| f_3^{1/2}\delta(t) \right|_{\Gamma_1}^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Neste momento, necessitamos fazer a escolha adequada para σ . Para tal, sejam

$$p = \frac{1}{f_3 g_0} + \frac{2}{f_3} + 3\alpha_1 \quad \text{e} \quad q = \frac{3\alpha_1}{2f_3 g_0} + \frac{3\alpha_1}{2g_0 f_3}.$$

Assim, de (5.38)₃ segue que $a_4 = p + q/\alpha_0$. Escolhendo σ de modo que $\sigma a_4 \leq 1$ e sabemos que $\sigma = 1/\alpha_0$ (veja (5.15)) então $(1/\alpha_0)(p + q/\alpha_0) \leq 1$. Daí, $\alpha_0^2 - p\alpha_0 - q \geq 0$. Desta desigualdade temos que α_0 deve satisfazer

$$\alpha_0 \leq \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha_0 \geq \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Como α_0 tem que ser positivo, descartamos a primeira possibilidade acima. Assim, sendo $\alpha_0 = 1/\sigma$ então

$$0 < \sigma \leq \frac{2}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}, \quad \text{o que acarreta} \quad \sigma a_4 \leq 1. \quad (5.40)$$

Daí, sendo $\sigma a_4 \leq 1$ segue $3/2 - \sigma a_4 \geq 1/2$, logo

$$-\varepsilon \alpha(t) \left[\frac{3}{2} - \sigma a_4 \right] \left| f_3^{1/2}\delta(t) \right|_{\Gamma_1}^2 \leq -\frac{\varepsilon \alpha(t)}{2} \left| f_3^{1/2}\delta(t) \right|_{\Gamma_1}^2. \quad (5.41)$$

Inserindo (5.41) em (5.39), chegamos que

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) &\leq -\frac{\varepsilon}{4}|u'(t)|^2 \\ &\quad - \alpha(t)\frac{\varepsilon}{2} \left(|\nabla u(t)|^2 + \left| f_1^{1/2}\delta'(t) \right|_{\Gamma_1}^2 + \left| f_3^{1/2}\delta(t) \right|_{\Gamma_1}^2 \right). \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{4}E(t). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Agora, necessitamos majorar os termos da expressão (5.18) para $\rho(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 2(u'(t), (m \cdot \nabla)u(t)) &= 2 \int u'(t) \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} dx \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n \widehat{m} \int u'(t) \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} dx \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n \widehat{m} |u'(t)| \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x_k} \right| \leq 2\widehat{m}n |u'(t)| |\nabla u(t)| \\ &\leq |u'(t)|^2 + \widehat{m}^2 n^2 \frac{\alpha(t)}{\alpha_0} |\nabla u(t)|^2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Das desigualdades usuais de Cauchy-Schwarz, Young, Poincaré e (4.2), segue que

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright (n - 1/2)(u'(t), u(t)) &\leq (n - 1/2)|u'(t)| |u(t)| \\
&\leq (n - 1/2)^2 \frac{|u'(t)|^2}{2} + \frac{|u(t)|^2}{2} \\
&\leq \frac{1}{2}(n - 1/2)^2 |u'(t)|^2 + \frac{C}{2\alpha_0} \alpha(t) |\nabla u(t)|^2.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

De (5.12), resulta

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright (f_1 \delta(t)', \delta(t))_{\Gamma_1} &= \int_{\Gamma_1} f_1^{1/2} \delta'(t) f_1^{1/2} \delta(t) d\Gamma_1 \\
&\leq |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1} |f_1^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1} \\
&\leq \frac{1}{2} \left\{ |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_1^{1/2} \delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \right\} \\
&\leq \frac{1}{2} \left\{ |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\widehat{f}_1}{f_3} |f_3^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Usando (5.43)-(5.45) e (5.18), obtemos

$$\begin{aligned}
|\rho(t)|_{\mathbb{R}} &\leq \left(1 + \frac{(n - 1/2)^2}{2}\right) |u'(t)|^2 + \alpha(t) \left(\frac{\widehat{m}^2 n^2}{\alpha_0} + \frac{C}{2\alpha_0}\right) |\nabla u(t)|^2 \\
&\quad + \alpha(t) \left(1 + \frac{3\alpha_1}{2\alpha_0}\right) \left(|f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\widehat{f}_1}{f_3} |f_3^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2\right) \\
&\leq K_2 |u'(t)|^2 + K_2 \alpha(t) \left[|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{1/2} \delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \right] \\
&\leq 2K_2 E(t),
\end{aligned} \tag{5.46}$$

o que significa

$$-2K_2 E(t) \leq \rho(t) \leq 2K_2 E(t), \tag{5.47}$$

em que,

$$\begin{aligned}
K_1 &= \max \left\{ 1, \frac{\widehat{f}_1}{f_3} \right\}, \\
K_2 &= \max \left\{ 1, 1 + \frac{(n - 1/2)^2}{2}, \frac{\widehat{m}^2 n^2}{\alpha_0} + \frac{C}{2\alpha_0}, K_1 \left(1 + \frac{3\alpha_1}{2\alpha_0}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Multiplicando (5.47) por $\varepsilon > 0$ e depois somando $E(t)$ em ambos lados, obtemos

$$E(t) - 2\varepsilon K_2 E(t) \leq E(t) + \varepsilon \rho(t) \leq E(t) + 2K_2 E(t).$$

Ou seja,

$$(1 - 2\varepsilon K_2)E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq (1 + 2\varepsilon K_2)E(t).$$

De (5.6) temos que $\varepsilon < \frac{1}{4K_2}$, e daí

$$\frac{1}{2}E(t) \leq E_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}E(t). \quad (5.49)$$

De (5.49) temos que $-\frac{\varepsilon}{4}E(t) \leq -\frac{\varepsilon}{6}E_\varepsilon(t)$ e conseqüentemente de (5.42) resulta que $E'_\varepsilon(t) + \frac{\varepsilon}{6}E_\varepsilon(t) \leq 0$ (*funcional de Lyapunov*) para todo $t \geq 0$. Daí,

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0)e^{-(\varepsilon/6)t} \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (5.50)$$

De (5.50) e (5.49) obtemos (5.16). Daí, concluímos a prova do Teorema 25. ■

6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo discutiremos os aspectos computacionais referente a simulação numérica do modelo de ondas (2.4) com condições da Acústica em parte da fronteira. Para tal, utilizaremos na parte elítica do modelo o método de elementos finitos via Galerkin, no qual consiste em aproximar o espaço de soluções por subespaço de dimensão finita. E na parte temporal usaremos o método de diferenças finitas de segunda ordem, como será apresentado no corrente capítulo.

6.1 Resolução do Problema Aproximado

No capítulo 4, foi construído o problema aproximado do problema (2.4), e para este foi determinado a existência de um par de soluções (u_m, δ_m) nos subespaços de Hilbert de dimensões finitas W_m e Z_m , respectivamente, como se verifica em (4.11). O que queremos agora é simular numericamente este par de soluções. Onde para tal, definiremos a seguir o método dos Elementos Finitos e mais adiante o método das Diferenças Finitas.

6.1.1 Método dos Elementos Finitos

O método dos Elementos Finitos consiste na escolha apropriada das funções w_j e z_j pertencendo aos subespaços de dimensão finita do problema aproximado (4.11), de tal forma que estas funções e suas derivadas sejam de suporte compacto em pequena parte do seu domínio. Este fato proporciona dois benefícios, tais quais:

- O cálculo da integral no domínio fica reduzida a uma integral na parte do domínio onde as funções ou suas derivadas são de suporte compacto simultaneamente. O que simplifica o processo de integração.

- As matrizes formadas em geral são esparsas, o que facilita computacionalmente na resolução do sistema linear.

6.1.2 Discretização do Domínio

Considere uma partição do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em sub-regiões Ω_e , de maneira que

$$\Omega = \left(\bigcup_{e=1}^m \overline{\Omega}_e \right)^\circ \quad \text{e} \quad \Omega_e \cap \Omega_k = \emptyset, \quad \text{se} \quad e \neq k,$$

onde m é o número total de elementos. As sub-regiões Ω_e são chamadas de elementos finitos do domínio Ω . Definimos nós globais x_j da partição do domínio, como pontos isolados, tal que $j = 1, \dots, Nno$, onde Nno é o número total de nós da malha. A geração da malha para os casos uni e bidimensional mencionaremos adiante neste capítulo.

Neste trabalho, por simplicidade as sub-regiões Ω_e serão consideradas segmentos de retas, no caso unidimensional, e quadrados, no caso bidimensional. Em ambos os casos, os nós globais são vértices dos sub-domínios Ω_e .

E consideramos para simulação dos casos uni e bidimensional o intervalo de tempo $[0, T] = [0, 1]$ com a seguinte partição temporal, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, tendo espaçamento uniforme $\Delta t = 1/n$, de modo que se n for suficientemente grande $\Delta t \rightarrow 0$.

6.1.3 Função Base

Para a resolução do problema aproximado (4.11) vamos tomar bases especiais para os subespaços W_m e Z_m , com o propósito de aplicar o método dos Elementos Finitos e de tornar as matrizes do sistema linear que será resolvido esparsas, reduzindo com isso o custo computacional. Daí, usamos funções de tal forma que a i -ésima função base contemple a condição a seguir, que para cada nó global x_j da partição de Ω , tem-se:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (6.1)$$

Função Base no Caso Unidimensional

Considerando para o caso unidimensional uma partição de Ω , com m elementos finitos $\Omega_e = [x_i^e, x_{i+1}^e]$ e $m + 1$ nós, tal como, $x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1}$, com espaçamento uniforme $h = h_{i-1} = h_i = x_{i+1} - x_i$, de forma que m muito grande, temos $h \rightarrow 0$. Da definição em (6.1), segue a lei de formação da função base para o caso unidimensional, isto é, um polinômio linear por partes, tal qual

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Geometricamente, as funções $\varphi_i(x)$ podem ser representadas por

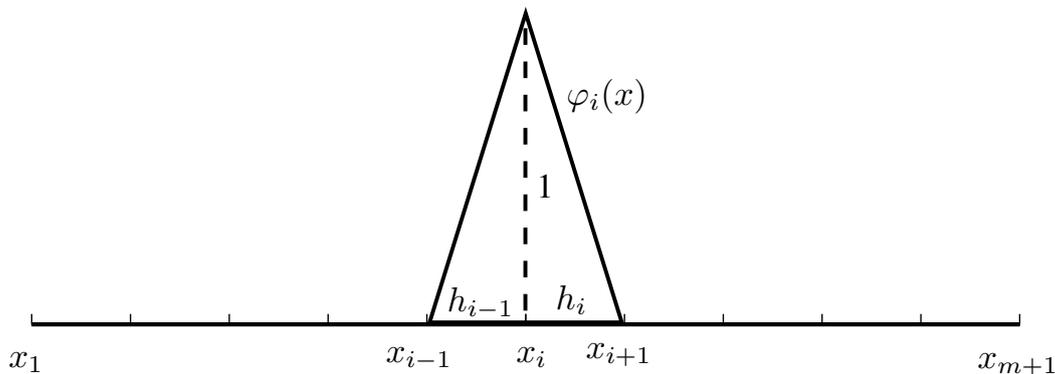


Figura 6.1: Função base e malha 1d.

Função Base no Caso Bidimensional

A função base para este caso será definida em cada elemento Ω_e , que o chamaremos por e , com $e = 1, \dots, m$, sub-região de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Supondo que Ω_e seja um quadrilátero, que em particular consideraremos um quadrado, com numeração de seus vértices (nós) no sentido anti-horário iniciando do vértice inferior esquerdo, onde cada vértice será

denotado por $\mathbf{x}_1^e = (x_1^e, y_1^e)$, $\mathbf{x}_2^e = (x_2^e, y_2^e)$, $\mathbf{x}_3^e = (x_3^e, y_3^e)$ e $\mathbf{x}_4^e = (x_4^e, y_4^e)$, como na Figura 6.2.

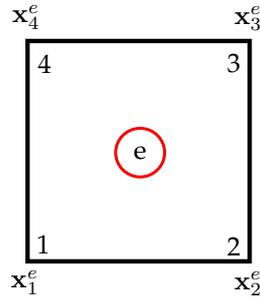


Figura 6.2: Elemento Finito Ω_e .

Agora, usando a definição em (6.1), definiremos para o caso bidimensional a função base bilinear para cada elemento e , denotada por $\varphi_a^e(x, y)$, com $a = 1, 2, 3$ e 4 (nós de Ω_e), onde $\varphi_a^e(\mathbf{x}_a^e) = 1$. Usando o polinômio de Lagrange (ver [5]), temos

$$\begin{aligned}\varphi_1^e(x, y) &= \frac{(x - x_2^e)(y - y_3^e)}{(x_1^e - x_2^e)(y_1^e - y_3^e)}, \\ \varphi_2^e(x, y) &= \frac{(x - x_1^e)(y - y_3^e)}{(x_2^e - x_1^e)(y_2^e - y_3^e)}, \\ \varphi_3^e(x, y) &= \frac{(x - x_1^e)(y - y_2^e)}{(x_3^e - x_1^e)(y_3^e - y_2^e)}, \\ \varphi_4^e(x, y) &= \frac{(x - x_2^e)(y - y_2^e)}{(x_4^e - x_2^e)(y_4^e - y_2^e)}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

A função φ_a^e em (6.2), para o caso bidimensional, pode ser representada graficamente abaixo.

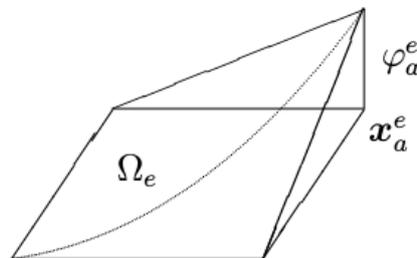


Figura 6.3: Função base 2d.

Para construção da malha 2D, por simplicidade, consideremos Ω um quadrado da forma $(a, b) \times (a, b)$. A seguir considere o seguinte procedimento para geração da malha uniforme: seja $h = \Delta x = \Delta y = (b-a)/Nx = (b-a)/Ny$, onde $Nx = Ny$ são os números de elementos nas direções x e y , respectivamente. Assim,

$$x_i = x_1 + (i - 1)h, \quad i = 1, 2, \dots, Nx + 1, \quad \text{com } x_1 = a, \quad x_{Nx+1} = b,$$

$$y_j = y_1 + (j - 1)h, \quad j = 1, 2, \dots, Ny + 1, \quad \text{com } y_1 = a, \quad y_{Ny+1} = b.$$

Portanto,

$$[a, b] \times [a, b] = \bigcup_{i=1}^{Nx+1} [x_i, x_{i+1}] \times \bigcup_{j=1}^{Ny+1} [y_j, y_{j+1}].$$

Veja na Figura 6.4 um exemplo de malha quadrangular que foi usada na simulação, que por simplicidade daremos uma quantidade pequena de *elementos* e *nós globais*, isto é, 16 e 25, respectivamente, apenas para ilustrar. A numeração global de seus *nós* é exatamente como na Figura 6.4, começando do vértice do canto esquerdo da borda inferior do domínio, cada quadrado da malha 6.4 é o *elemento finito* com numeração começando do primeiro *elemento* no canto esquerdo da borda inferior.

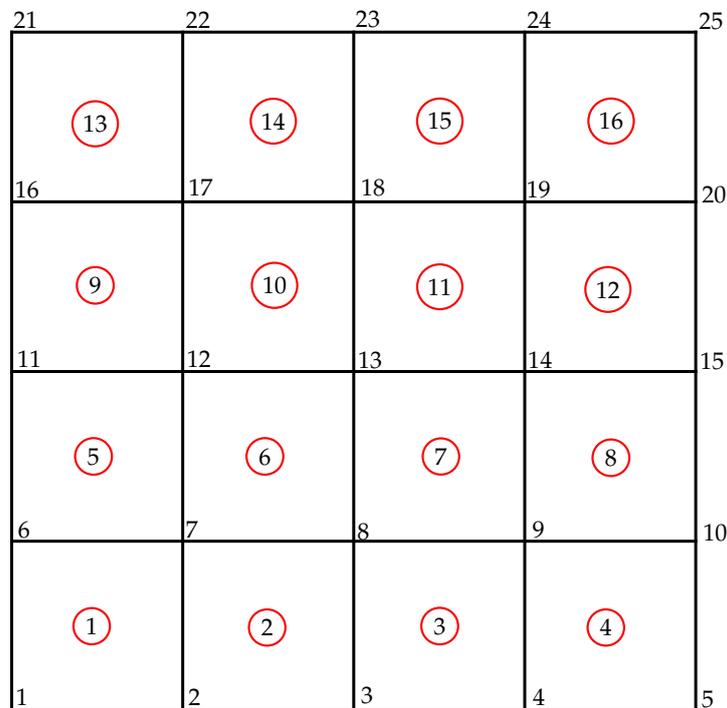


Figura 6.4: Malha de elementos Ω_e quadrangulares.

Agora, dado que já conhecemos as funções bases a serem utilizadas na simulação numérica, iremos para a resolução do problema aproximado (4.11), onde para tal, definiremos as matrizes que serão construídas resolvendo o método dos elementos finitos, e em seguida chegaremos em um sistema de EDO, onde este será resolvido via o método de diferenças finitas.

6.1.4 Retorno ao Problema Aproximado

No capítulo 4, foi provado a existência de soluções $u_m(x, t)$ e $\delta_m(x, t)$ do problema aproximado (4.11). Daí, em particular em (4.11), tomando $w_i(x)$ e $z_l(x)$ funções $\varphi_j(x)$, onde $\varphi_j(x)$ é a base definida em (6.3), e por simplicidade em (4.10) denotaremos $c_{im}(t)$ e $d_{im}(t)$ por $c_i(t)$ e $d_i(t)$, respectivamente, assim

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) \varphi_i(x) \quad \text{e} \quad \delta_m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x). \quad (6.3)$$

Substituindo (6.3) em (4.11), e colocando $f(x, t)$ e $h(x, t)$ do lado direito da equação (2.4)₁ e (2.4)₃, respectivamente, para validação do modelo (2.4), tem-se

$$\left| \begin{aligned} & \sum_{i=1}^m c_i''(t) (\varphi_i, \varphi_j) + \alpha(t) \sum_{i=1}^m c_i(t) (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) + \alpha(t) \sum_{i=1}^m c_i'(t) (g \varphi_i, \varphi_j)_{\Gamma_1} \\ & - \alpha(t) \sum_{i=1}^m d_i'(t) (\varphi_i, \varphi_j)_{\Gamma_1} = (f, \varphi_j) \quad \text{e} \quad , \quad j = 1, \dots, m. \\ & \sum_{i=1}^m d_i''(t) (f_1 \varphi_i, \varphi_j)_{\Gamma_1} + \sum_{i=1}^m d_i'(t) (f_2 \varphi_i, \varphi_j)_{\Gamma_1} + \sum_{i=1}^m d_i(t) (f_3 \varphi_i, \varphi_j)_{\Gamma_1} \\ & + \sum_{i=1}^m c_i'(t) (\varphi_i, \varphi_j)_{\Gamma_1} = (h, \varphi_j)_{\Gamma_1}, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \right. \quad (6.4)$$

Formulação Matricial

Definindo as matrizes de (6.4) como:

$$\begin{aligned}
A &= (\varphi_i(x), \varphi_j(x)), \quad K = (\nabla\varphi_i(x), \nabla\varphi_j(x)), \quad E_1 = (\varphi_i(x), \varphi_j(x))_{\Gamma_1}, \\
H_1 &= (f_1(x)\varphi_i(x), \varphi_j(x))_{\Gamma_1}, \quad H_2 = (f_2(x)\varphi_i(x), \varphi_j(x))_{\Gamma_1}, \\
H_3 &= (f_3(x)\varphi_i(x), \varphi_j(x))_{\Gamma_1}, \quad H_4 = (g(x)\varphi_i(x), \varphi_j(x))_{\Gamma_1} \\
F &= (f(x, t), \varphi_j(x)), \quad G = (h(x, t), \varphi_j(x))_{\Gamma_1} \text{ com } i, j \in \{1, \dots, m\}.
\end{aligned}$$

Sistema de EDO

Com as matrizes definidas anteriormente, reescrevemos (6.4) em um sistema de EDO para todo $t > 0$. A saber

$$\left\{ \begin{array}{l}
Ac''(t) + \alpha(t)Kc(t) + \alpha(t)H_4c'(t) - \alpha(t)E_1d'(t) = F(t) \\
H_1d''(t) + H_2d'(t) + H_3d(t) + E_1c'(t) = G(t) \\
c(0) = u_0(x), \quad c'(0) = u_1(x) \\
d(0) = \delta_0(x), \quad d'(0) = \delta'(x, 0)
\end{array} \right. \quad (6.5)$$

6.1.5 Método das Diferenças Finitas

O método das Diferenças Finitas é um método para resolver sistema de equações diferenciais ordinárias numericamente. Como analiticamente em geral não sabemos resolver o sistema de EDO (6.5) para todo $t > 0$, daí resolveremos tal sistema para cada passo de tempo, $t_k = t_0 + (k - 1)\Delta t$, via o método de Diferenças Finitas, onde $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ com $k = 1, \dots, N$, em que N é o número de nós da malha temporal.

Fazendo $t = t_k$ em (6.5), usamos a seguinte estratégia para resolução do sistema (6.5): tomamos cada equação de (6.5) no passo de tempo $k + 1$ e $k - 1$ e fizemos a média com intento de ter ordem dois de convergência no tempo, isto é, $O(\Delta t^2)$. Daí,

$$\begin{aligned}
& A \frac{c''(t_{k+1}) + c''(t_{k-1})}{2} + K \frac{\alpha(t_{k+1})c(t_{k+1}) + \alpha(t_{k-1})c(t_{k-1})}{2} \\
& + H_4 \frac{\alpha(t_{k+1})c'(t_{k+1}) + \alpha(t_{k-1})c'(t_{k-1})}{2} - E_1 \frac{\alpha(t_{k+1})d'(t_{k+1}) + \alpha(t_{k-1})d'(t_{k-1})}{2} \\
& = \frac{F(t_{k+1}) + F(t_{k-1})}{2}; \\
& H_1 \frac{d''(t_{k+1}) + d''(t_{k-1})}{2} + H_2 \frac{d'(t_{k+1}) + d'(t_{k-1})}{2} + H_3 \frac{d(t_{k+1}) + d(t_{k-1})}{2} \\
& + E_1 \frac{c'(t_{k+1}) + c'(t_{k-1})}{2} = \frac{G(t_{k+1}) + G(t_{k-1})}{2}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Aproximações Utilizadas

Denotaremos em (6.6), $c(t_k) = c^k$, $c'(t_k) = c'^k$ e de modo análogo a todos os demais termos.

Utilizamos os seguintes métodos numéricos dentro do escopo dos métodos de Diferenças Finitas para resolução do sistema (6.6), que podem ser vistos em [5] e [18]:

1. Diferença central, com ordem de convergência $O(\Delta t^2)$. Assim

$$\begin{aligned}
c''(t_k) &\approx \frac{(c^{k+1} - 2c^k + c^{k-1}))}{(\Delta t)^2}, & c'(t_k) &\approx \frac{(c^{k+1} - c^{k-1}))}{2(\Delta t)}. \\
d''(t_k) &\approx \frac{(d^{k+1} - 2d^k + d^{k-1}))}{(\Delta t)^2}, & d'(t_k) &\approx \frac{(d^{k+1} - d^{k-1}))}{2(\Delta t)}.
\end{aligned}$$

2. Diferença atrasada e adiantada, respectivamente, com ordem de convergência $O(\Delta t^2)$.

Ver [20] e [5].

$$\begin{aligned}
c'^{k+1} &\approx \frac{(3c^{k+1} - 4c^k + c^{k-1}))}{2(\Delta t)}; \\
c'^{k-1} &\approx \frac{(-c^{k+1} + 4c^k - 3c^{k-1}))}{2(\Delta t)}.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

A seguir justificaremos outras aproximações usadas em (6.6).

► Aproximação para o termo $\frac{c''^{k+1} + c''^{k-1}}{2}$. Pelo Teorema de Taylor, temos

$$\begin{aligned} c''^{k+1} &= c''^k + (\Delta t)c'''^k + \frac{(\Delta t)^2 c^{(iv)k}}{2!} + \frac{(\Delta t)^3 c^{(v)k}}{3!} + O(\Delta t)^4 \\ c''^{k-1} &= c''^k - (\Delta t)c'''^k + \frac{(\Delta t)^2 c^{(iv)k}}{2!} - \frac{(\Delta t)^3 c^{(v)k}}{3!} + O(\Delta t)^4 \\ \text{Assim, } \frac{c''^{k+1} + c''^{k-1}}{2} &= c''^k + \frac{(\Delta t)^2 c^{(iv)k}}{2} + O(\Delta t)^4. \text{ Daí,} \\ \frac{c''^{k+1} + c''^{k-1}}{2} &= \frac{(c^{k+1} - 2c^k + c^{k-1})}{(\Delta t)^2} + O(\Delta t)^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

► A aproximação para o termo $\frac{d''^{k+1} + d''^{k-1}}{2}$ é análoga ao que foi feita acima.

► Aproximação para o termo $\frac{(\alpha^{k+1}c'^{k+1} + \alpha^{k-1}c'^{k-1})}{2}$. Usando as aproximações (6.7), temos que

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha^{k+1}c'^{k+1} + \alpha^{k-1}c'^{k-1})}{2} &= \frac{1}{2} \left[\alpha^{k+1} \frac{(3c^{k+1} - 4c^k + c^{k-1})}{2(\Delta t)} + \alpha^{k-1} \frac{(-c^{k+1} + 4c^k - 3c^{k-1})}{2(\Delta t)} \right] + O(\Delta t)^2 \\ &= \frac{1}{2(\Delta t)} \left[\frac{(3\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})}{2} c^{k+1} - 2(\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})c^k + \frac{(\alpha^{k+1} - 3\alpha^{k-1})}{2} c^{k-1} \right] + O(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

► A aproximação para o termo $\frac{(\alpha^{k+1}d'^{k+1} + \alpha^{k-1}d'^{k-1})}{2}$ é análoga ao que foi feito acima.

► Aproximação para o termo $\frac{c'^{k+1} + c'^{k-1}}{2}$. Usando as aproximações (6.7), segue

$$c'^{k+1} + c'^{k-1} = \frac{(3c^{k+1} - 4c^k + c^{k-1})}{2(\Delta t)} + \frac{(-c^{k+1} + 4c^k - 3c^{k-1})}{2(\Delta t)} + O(\Delta t)^2.$$

Daí,

$$\frac{c'^{k+1} + c'^{k-1}}{2} = \frac{c^{k+1} - c^{k-1}}{2(\Delta t)} + O(\Delta t)^2.$$

► A aproximação para o termo $\frac{d'^{k+1} + d'^{k-1}}{2}$ é análoga ao que foi feito acima.

Resolução do Sistema de EDO

Usando em (6.6) as aproximações anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{aligned}
 & A \frac{(c^{k+1} - 2c^k + c^{k-1})}{(\Delta t)^2} + K \frac{(\alpha^{k+1}c^{k+1} + \alpha^{k-1}c^{k-1})}{2} \\
 & + \frac{1}{2(\Delta t)} H_4 \left[\frac{(3\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})}{2} c^{k+1} - 2(\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})c^k + \frac{(\alpha^{k+1} - 3\alpha^{k-1})}{2} c^{k-1} \right] \\
 & - \frac{1}{2(\Delta t)} E_1 \left[\frac{(3\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})}{2} d^{k+1} - 2(\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})d^k + \frac{(\alpha^{k+1} - 3\alpha^{k-1})}{2} d^{k-1} \right] \\
 & = \frac{(F^{k+1} + F^{k-1})}{2}; \\
 & H_1 \frac{(d^{k+1} - 2d^k + d^{k-1})}{(\Delta t)^2} + H_2 \frac{(d^{k+1} - d^{k-1})}{2\Delta t} + H_3 \frac{(d^{k+1} + d^{k-1})}{2} \\
 & + E_1 \frac{(c^{k+1} - c^{k-1})}{2(\Delta t)} = \frac{(G^{k+1} + G^{k-1})}{2}.
 \end{aligned} \right. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Agora, multiplicando (6.10)₁ e (6.10)₂ por $2(\Delta t)^2$, e reagrupando os termos comuns, segue o sistema acoplado:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{aligned}
 & \left[2A + (\Delta t)^2 \alpha^{k+1} K + (\Delta t) \frac{(3\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})}{2} H_4 \right] \mathbf{c}^{k+1} - \left[(\Delta t) \frac{(3\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})}{2} E_1 \right] \mathbf{d}^{k+1} \\
 & = \left[4A + 2(\Delta t)(\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})H_4 \right] c^k - \left[2A + (\Delta t)^2 \alpha^{k-1} K + (\Delta t) \frac{(\alpha^{k+1} - 3\alpha^{k-1})}{2} H_4 \right] c^{k-1} \\
 & - \left[2(\Delta t)(\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})E_1 \right] d^k + \left[(\Delta t) \frac{(\alpha^{k+1} - 3\alpha^{k-1})}{2} E_1 \right] d^{k-1} + (\Delta t)^2 (F^{k+1} + F^{k-1}); \quad (6.10) \\
 & (\Delta t) E_1 \mathbf{c}^{k+1} + \left[2H_1 + (\Delta t)H_2 + (\Delta t)^2 H_3 \right] \mathbf{d}^{k+1} = 4H_1 d^k + \\
 & \left[-2H_1 + (\Delta t)H_2 - (\Delta t)^2 H_3 \right] d^{k-1} + (\Delta t) E_1 c^{k-1} + (\Delta t)^2 (G^{k+1} + G^{k-1}).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Por simplicidade denotaremos o lado direito da igualdade das equações de (6.11) por L_1

e L_2 , respectivamente. E denotemos as matrizes do lado esquerdo da igualdade por

$$\begin{aligned} M_1 &= \left[2A + (\Delta t)^2 \alpha^{k+1} K + (\Delta t) \frac{(3\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})}{2} H_4 \right], \\ M_2 &= -\left[(\Delta t) \frac{(3\alpha^{k+1} - \alpha^{k-1})}{2} E_1 \right], \\ M_3 &= (\Delta t) E_1 \quad \text{e} \quad M_4 = \left[2H_1 + (\Delta t) H_2 + (\Delta t)^2 H_3 \right]. \end{aligned}$$

Note que o sistema (6.11) é acoplado, com isso o reescreveremos na forma de bloco de matrizes, tal como

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{k+1} \\ \mathbf{d}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Condições Iniciais

Do sistema (6.5) temos as condições iniciais, e usando nestas o método da Diferença Central para $k = 1$, segue

$$\left\{ \begin{array}{l} c^1 = u_0(x_j), \quad d^1 = \delta_0(x_j) \\ c'^1 = u_1(x_j), \quad d'^1 = \delta'(0, x_j) \\ c'^1 \approx \frac{c^2 - c^0}{2(\Delta t)} \Rightarrow c^0 \approx c^2 - 2(\Delta t)c'^1 \\ d'^1 \approx \frac{d^2 - d^0}{2(\Delta t)} \Rightarrow d^0 \approx d^2 - 2(\Delta t)d'^1 \end{array} \right. \quad (6.12)$$

Fazendo $k = 1$ em (6.11) e usando as condições iniciais acima, conheceremos L_1 e L_2 e acharemos c_2 e d_2 . E assim sucessivamente.

6.2 Solução Numérica

Neste capítulo, apresentaremos as soluções numéricas aplicando o método estabelecido em (6.11) para os casos uni e bidimensional. Como a priori não conhecemos o par de solução exata do modelo (2.4), introduzimos uma força externa suficientemente regular $f(x, t)$ e $h(x, t)$ no lado direito das equações (2.4)₁ e (2.4)₃, respectivamente, de modo que

o par de solução exata (u, δ) submetida as condições iniciais e de contorno seja conhecida, afim de validarmos o método utilizado medindo o erro e a ordem de convergência. Em seguida retornaremos ao modelo original (2.4), isto é, fazendo f e h nulas, onde neste caso não conhecemos mais a solução exata e consideremos como “solução exata” uma solução numérica com discretização no tempo e no espaço bem refinada, com o objetivo análogo ao caso anterior de calcularmos o erro e a ordem de convergência. Estes dois casos mencionados acima, denominaremos de modelo não-homogêneo (f e h não-nulas) e modelo homogêneo (f e h nulas).

Modelo Não - Homogêneo.

$$\begin{cases}
 u''(x, t) - \alpha(t)\Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\
 u(x, t) = 0 & \text{sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\
 u'(x, t) + f_1(x)\delta''(x, t) + f_2(x)\delta'(x, t) + f_3(x)\delta(x, t) = h(x, t) \\
 \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \\
 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \delta'(x, t) - g(x)u'(x, t) & \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \\
 \delta'(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) + g(x)u_1(x) & \text{sobre } \Gamma_1, \\
 \delta(x, 0) = \delta_0(x) & \text{sobre } \Gamma_1, \\
 u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega,
 \end{cases} \tag{6.13}$$

Dado que o erro encontrado no modelo não-homogêneo (6.14) entre a solução aproximada e a exata seja pequeno, podemos afirmar que o método escolhido é adequado, e com isto faremos f e h iguais a zero no problema (6.14), retornando ao problema original (2.4) (modelo homogêneo).

Para verificarmos a velocidade de convergência do método usado na resolução numérica, é fundamental definirmos ordem de convergência, a qual nos informará qual a velocidade de convergência dos métodos numéricos que foram utilizados.

Ordem de Convergência

Considerando uma sucessão de soluções aproximadas u_m , tal qual $\{u_{m_1}, \dots, u_{m_n}\}$, onde u_{m_i} será a solução numérica relacionada a malha com espaçamento uniforme h_i , de modo que $h_{i+1} < h_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Com isto, será calculado o erro de aproximação $E_i(t)$ referente à malha com espaçamento h_i , ou seja,

$$E_i = \max_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_{m_i}(t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.14)$$

Daí, calcularemos a ordem de convergência do par de solução aproximada u_m, δ_m , a qual será denotada por $p \simeq \frac{\ln(E_i/E_{i+1})}{\ln(2)}$. Para uma melhor identificação chamaremos ordem de convergência de u_m e δ_m por p_{u_m} e p_{δ_m} , respectivamente. A dedução de p pode ser vista em [18].

A seguir apresentaremos exemplos com resultados numéricos mostrando (discretizações, erros, ordens de convergências) para os casos uni e bidimensional do modelo modificado (6.14). E posteriormente, de modo análogo apresentaremos tais resultados para o modelo original (2.4), isto é, considerando f e g identicamente nulas.

Para o modelo não homogêneo construímos pares de soluções exatas (u, δ) que satisfazem as condições de fronteiras, e à partir delas, construímos os dados de entrada $\{u_0, u_1, \delta_0, \delta'(0)\}$ e $\{f, h\}$.

6.2.1 Caso Unidimensional

Para este caso, consideramos $\Omega = (0, 1)$ e $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde $\Gamma_0 = \{0\}$ e $\Gamma_1 = \{1\}$ e o tempo final $T = 1$. Para ambos os exemplos a seguir consideremos o erro $E_{L^\infty}^{u_m} = \|u - u_m\|_{L^\infty(0,1; L^2(\Omega))}$ e $E_{abs}^{\delta_m} = |\delta - \delta_m|$.

Exemplo 1

Consideramos $u(x, t) = \gamma x(x - 1)e^t$ e $\delta(1, t) = 1 - \gamma + \gamma e^t$,

$$f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = \alpha(t) = 1 \quad e \quad \gamma = -4.$$

A Tabela 6.1 mostra a ordem de convergência e o erro em relação aos parâmetros de discretização espacial e temporal, quando estes são iguais.

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}^{u_m}$	$E_{abs}^{\delta_m}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-5}	6.87226×10^{-4}	0.001375228	-	-
2^{-6}	1.69775×10^{-4}	0.000344433	2.0171	1.9973
2^{-7}	0.42186×10^{-4}	0.000086181	2.0087	1.9987
2^{-8}	0.10514×10^{-4}	0.000021554	2.0044	1.9994
2^{-9}	0.02620×10^{-4}	0.000005389	2.0022	1.9997

Tabela 6.1: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p .

As Tabelas 6.2 e 6.3 apresentam a dependência do erro em relação aos parâmetros de discretização espacial e temporal, isto é, h e Δt , respectivamente.

	Δt	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}^{u_m}$	$E_{abs}^{\delta_m}$
$h = 2^{-5}$	2^{-5}	6.87226×10^{-4}	0.001375228
	2^{-6}	3.68042×10^{-4}	0.000381775
	2^{-7}	2.89876×10^{-4}	0.000132789
	2^{-8}	2.70548×10^{-4}	0.000070470
	2^{-9}	2.65736×10^{-4}	0.000054884

Tabela 6.2: Erro de (u_m, δ_m) com h fixado e Δt variando.

	h	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}^{u_m}$	$E_{abs}^{\delta_m}$
$\Delta t = 2^{-5}$	2^{-5}	6.87226×10^{-4}	0.001375228
	2^{-6}	4.88307×10^{-4}	0.001337752
	2^{-7}	4.38271×10^{-4}	0.001328377
	2^{-8}	4.25493×10^{-4}	0.001326032
	2^{-9}	4.22152×10^{-4}	0.001325446

Tabela 6.3: Erro de (u_m, δ_m) com Δt fixado e h variando.

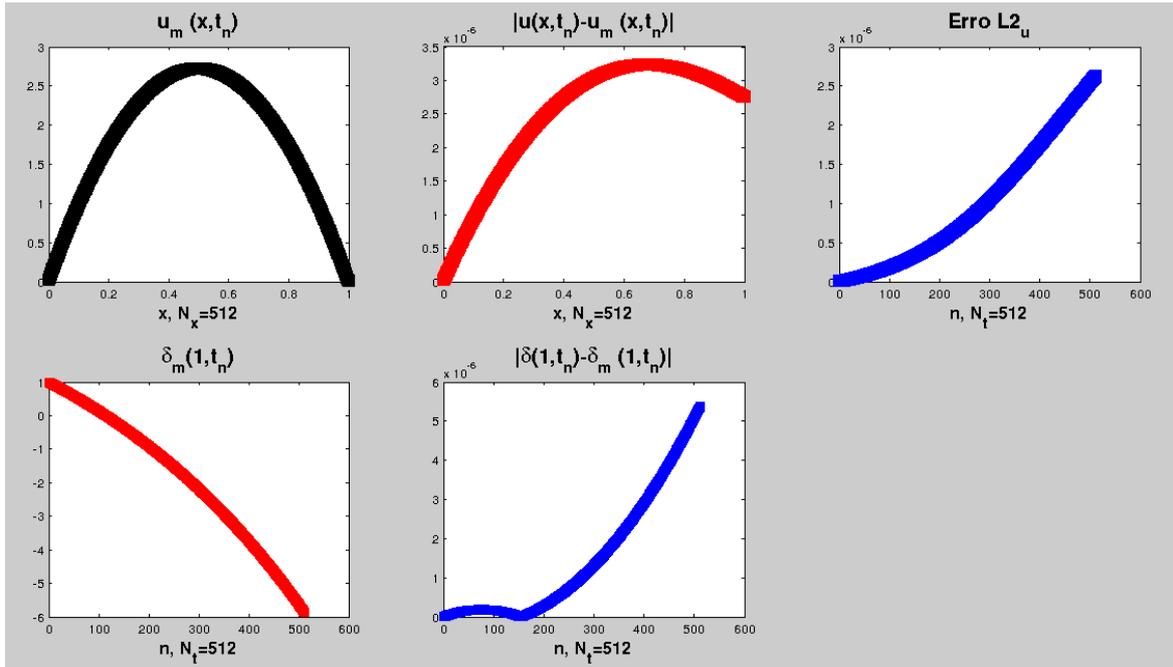


Figura 6.5: Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 1, $h = \Delta t = 2^{-9}$, com erro absoluto e na norma $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$.

Exemplo 2

Para este exemplo, consideramos o par de solução exata (u, δ) como

$$u(x, t) = \text{sen}(4\pi x)\cos(t/2) \text{ e } \delta(1, t) = 1 + 8\pi\text{sen}(t/2)$$

e as seguintes situações

$$f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1 \text{ e } \alpha(t) = t + 1.$$

Analogamente ao exemplo 1, a Tabela 6.4 mostra a ordem de convergência e o erro em relação aos parâmetros de discretização espacial e temporal, quando estes são iguais.

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1);L^2(0,1)}^{u_m}$	$E_{abs}^{\delta_m}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-5}	3.57881×10^{-4}	2.12949×10^{-4}	-	-
2^{-6}	0.88153×10^{-4}	0.53678×10^{-4}	2.0214	1.9880
2^{-7}	0.21857×10^{-4}	0.13475×10^{-4}	2.0118	1.9939
2^{-8}	0.05440×10^{-4}	0.03376×10^{-4}	2.0062	1.9969
2^{-9}	0.01357×10^{-4}	0.00844×10^{-4}	2.0031	1.9984

Tabela 6.4: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $\Delta t = h$.

As Tabelas 6.5 e 6.6 apresentam a dependência do erro em relação aos parâmetros de discretização espacial e temporal, isto é, h e Δt , respectivamente.

	Δt	$E_{L^\infty(0,1);L^2(0,1)}^{u_m}$	$E_{abs}^{\delta_m}$
$h = 2^{-5}$	2^{-5}	3.57881×10^{-4}	2.12949×10^{-4}
	2^{-6}	1.30338×10^{-4}	0.74849×10^{-4}
	2^{-7}	0.74535×10^{-4}	0.39856×10^{-4}
	2^{-8}	0.60801×10^{-4}	0.31050×10^{-4}
	2^{-9}	0.57394×10^{-4}	0.28843×10^{-4}

Tabela 6.5: Erro de (u_m, δ_m) com h fixado e Δt variando.

	h	$E_{L^\infty(0,1);L^2(0,1)}^{u_m}$	$E_{abs}^{\delta_m}$
$\Delta t = 2^{-5}$	2^{-5}	3.57881×10^{-4}	2.12949×10^{-4}
	2^{-6}	3.14904×10^{-4}	1.91608×10^{-4}
	2^{-7}	3.03744×10^{-4}	1.86276×10^{-4}
	2^{-8}	3.00687×10^{-4}	1.84943×10^{-4}
	2^{-9}	2.99784×10^{-4}	1.84610×10^{-4}

Tabela 6.6: Erro de (u_m, δ_m) com Δt fixado e h variando.

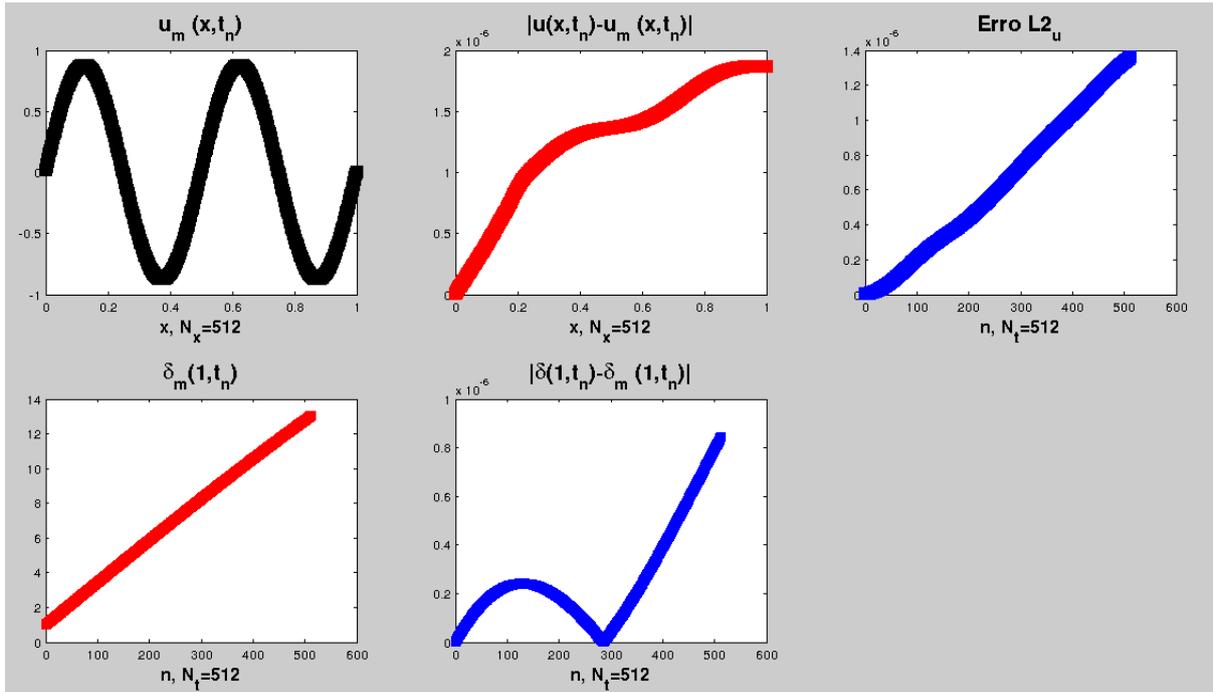


Figura 6.6: Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 2, $h = \Delta t = 2^{-9}$, com erro absoluto e na norma $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$.

6.2.2 Caso Bidimensional

Neste caso, consideramos para a simulação o tempo final $T = 1$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde $\Gamma_0 = (2) \cup (3) \cup (4)$ e $\Gamma_1 = (1)$, na qual

$$(1) = \{(x, 0) \in \partial\Omega; 0 \leq x \leq 1\},$$

$$(2) = \{(1, y) \in \partial\Omega; 0 \leq y \leq 1\},$$

$$(3) = \{(x, 1) \in \partial\Omega; 0 \leq x \leq 1\},$$

$$(4) = \{(0, y) \in \partial\Omega; 0 \leq y \leq 1\},$$

como na figura a seguir.

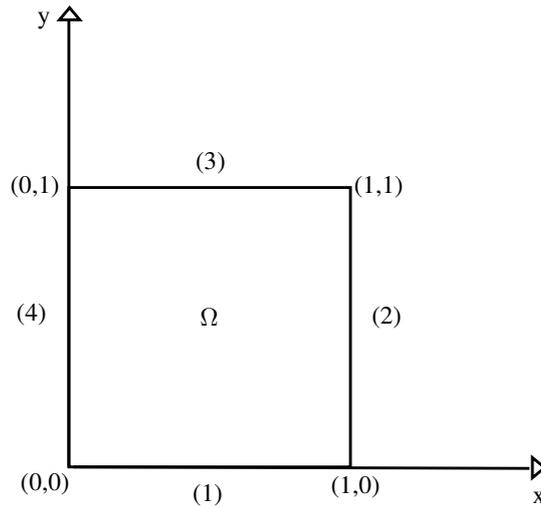


Figura 6.7: Domínio Ω , fronteiras $\Gamma_0 = (2) \cup (3) \cup (4)$ e $\Gamma_1 = (1)$.

Construímos pares de soluções exatas (u, δ) para o modelo (2.4), que satisfazem as condições de fronteiras, como se ver nos exemplos 1 e 2. Para ambos os exemplos a seguir considere os erros $E_{L^\infty}^{u_m} = \|u - u_m\|_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}$ e $E_{L^\infty}^{\delta_m} = \|\delta - \delta_m\|_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}$.

Exemplo 1

Consideramos $u(x, y, t) = \gamma x(x-1)(y-1)^2 e^t$ e $\delta(x, t) = (2+g)\gamma x(x-1)(e^t - 1)$.

$$f_1 = f_2 = f_3 = g = 1, \quad \alpha(t) = t + 1 \quad \text{e} \quad \gamma = -2.$$

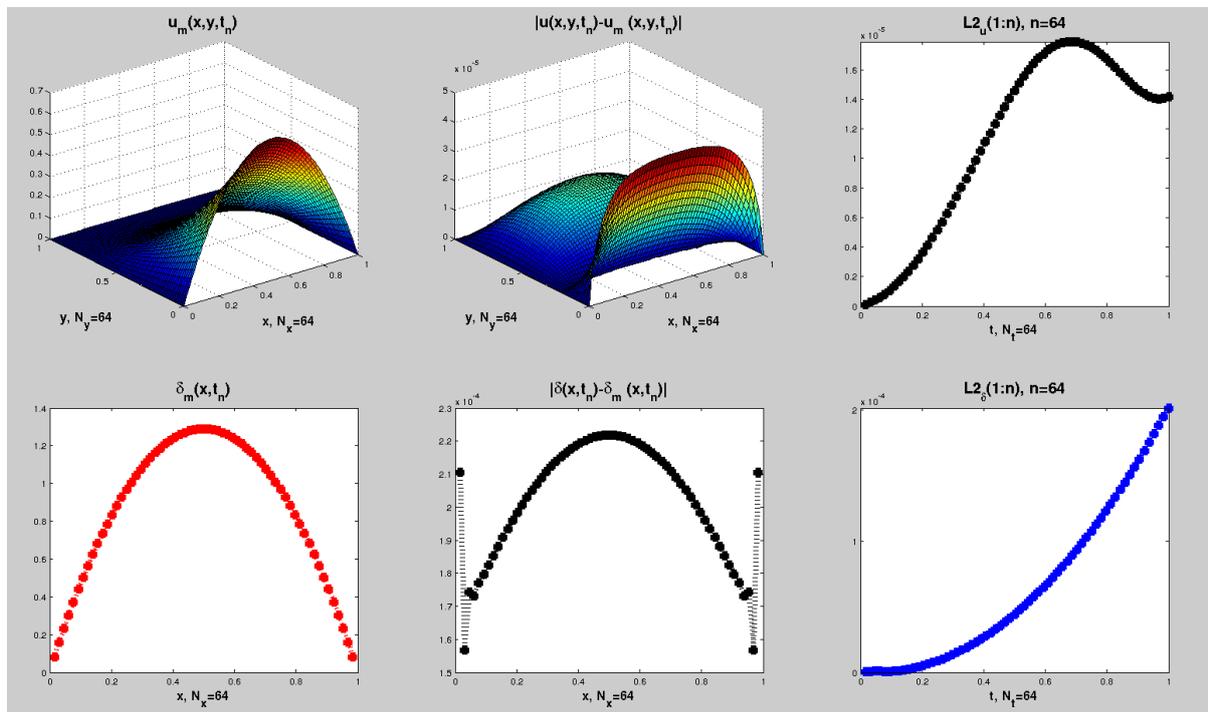
$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}^{u_m}$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}^{\delta_m}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-4}	0.58130×10^{-3}	0.00643957	-	-
2^{-5}	0.14379×10^{-3}	0.00161052	2.0153	1.9994
2^{-6}	0.03577×10^{-3}	0.00040275	2.0070	1.9995
2^{-7}	0.00892×10^{-3}	0.00010070	2.0032	1.9997
2^{-8}	0.00222×10^{-3}	0.00002517	2.0014	1.9998

Tabela 6.7: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$.

	Δt	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}^{u_m}$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}^{\delta_m}$
$h = 2^{-6}$	2^{-4}	0.09542×10^{-3}	0.0017980
	2^{-5}	0.04416×10^{-3}	0.0006772
	2^{-6}	0.03577×10^{-3}	0.0004027
	2^{-7}	0.03399×10^{-3}	0.0003363
	2^{-8}	0.03357×10^{-3}	0.0003200

Tabela 6.8: Erro de (u_m, δ_m) com $h = \Delta x = \Delta y$ fixado e Δt variando.

	h	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}^{u_m}$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}^{\delta_m}$
$\Delta t = 2^{-6}$	2^{-4}	0.54586×10^{-3}	0.0051192
	2^{-5}	0.13657×10^{-3}	0.0013452
	2^{-6}	0.03577×10^{-3}	0.0004027
	2^{-7}	0.01098×10^{-3}	0.0001694
	2^{-8}	0.00570×10^{-3}	0.0001129

Tabela 6.9: Erro de (u_m, δ_m) com Δt fixado e $h = \Delta x = \Delta y$ variando.Figura 6.8: Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 1, $h = \Delta t = 2^{-6}$, com erro absoluto e nas normas discretas $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, 1; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente.

Exemplo 2

Consideramos

$$u(x, y, t) = \gamma \operatorname{sen}(4\pi x) \cos((5\pi y)/2) e^t \text{ e } \delta(x, t) = \gamma \operatorname{sen}(4\pi x) (e^t - 1),$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = g = 1, \quad \alpha(t) = t + 1 \text{ e } \gamma = 1/64.$$

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}^{u_m}$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}^{\delta_m}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-4}	0.0007129	0.0006864	-	-
2^{-5}	0.0001786	0.0001632	1.9968	2.0717
2^{-6}	0.0000431	0.0000402	2.0508	2.0189
2^{-7}	0.0000106	0.0000100	2.0158	2.0043
2^{-8}	0.0000026	0.0000025	2.0050	2.0010

Tabela 6.10: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y$.

	Δt	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}^{u_m}$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}^{\delta_m}$
$h = 2^{-6}$	2^{-4}	0.00004231	0.00005971
	2^{-5}	0.00004440	0.00004417
	2^{-6}	0.00004311	0.00004028
	2^{-7}	0.00004275	0.00003932
	2^{-8}	0.00004266	0.00003909

Tabela 6.11: Erro de (u_m, δ_m) com $h = \Delta x = \Delta y$ fixado e Δt variando.

	h	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}^{u_m}$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}^{\delta_m}$
$\Delta t = 2^{-6}$	2^{-4}	0.00069855	0.00064235
	2^{-5}	0.00017338	0.00015841
	2^{-6}	0.00004311	0.00004028
	2^{-7}	0.00001075	0.00001094
	2^{-8}	0.00000270	0.00000362

Tabela 6.12: Erro de (u_m, δ_m) com Δt fixado e $h = \Delta x = \Delta y$ variando.

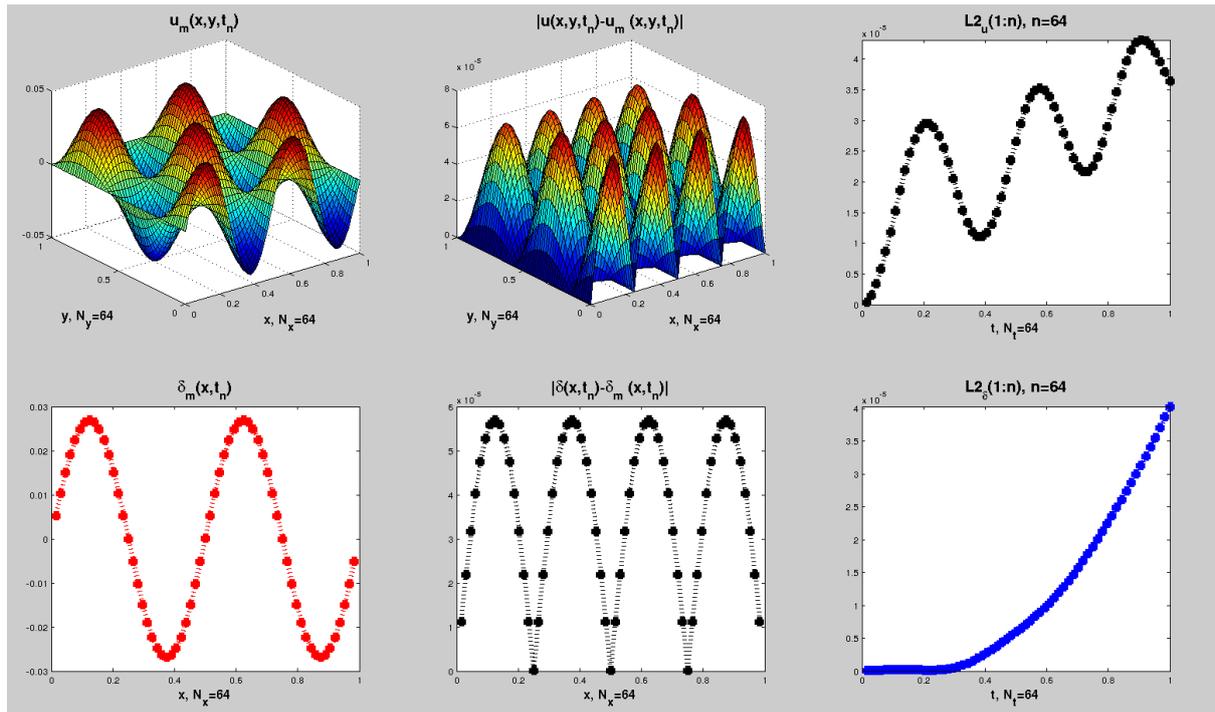


Figura 6.9: Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 2 , $h = \Delta t = 2^{-6}$, com erro absoluto e nas normas discretas $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, 1; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente.

Modelo Original (modelo homogêneo)

Como agora não conhecemos mais o par de solução exata (u, δ) , um procedimento adotado em [18], considera-se em seu lugar o par de solução numérica (u_N, δ_N) como “solução exata”, de modo que N é suficientemente grande (ou equivalentemente a discretização h muito pequena), onde N é o número de nós da malha. Com isto, construiremos uma sequência de soluções numéricas $\{u_i, \delta_i\}$ associada a diversas discretizações h_i com respectivos erros

$$E_{L^\infty}^{u_m} = \|u_N - u_m\|_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))},$$

$$E_{L^\infty}^{\delta_m} = \|\delta_N - \delta_m\|_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}.$$

Caso Unidimensional

Consideramos para os dois exemplos a seguir as mesmas condições do caso unidimensional dos exemplos 1 e 2 anterior, exceto agora f e h nulas (modelo original). Daí,

$\Omega = (0, 1)$ e $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde $\Gamma_0 = \{0\}$ e $\Gamma_1 = \{1\}$.

Também para ambos os exemplos a seguir consideramos a “solução exata” como a solução numérica refinada com $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t = 2^{-10}$.

Exemplo 1

$$u_0(x) = \gamma x(x - 1), \quad u_1(x) = \gamma x(x - 1), \quad \delta_0(1) = 1 \text{ e } \delta'(1, 0) = \gamma.$$

$$f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = \alpha(t) = 1 \quad \text{e} \quad \gamma = -4.$$

As Tabelas 6.13 e 6.14 mostram para os exemplos 1 e 2, a relação do erro quando a discretização do espaço é igual a do tempo, isto é, $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$ e que a ordem de convergência do erro associado aos métodos usados é quadrática no tempo e no espaço.

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}^{u_m}$	$E_{abs}^{\delta_m}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-5}	0.0042506	0.71807×10^{-3}	-	-
2^{-6}	0.0014246	0.17965×10^{-3}	1.5770	1.9988
2^{-7}	0.0004654	0.04478×10^{-3}	1.6138	2.0041
2^{-8}	0.0001490	0.01106×10^{-3}	1.6432	2.0174
2^{-9}	0.0000458	0.00263×10^{-3}	1.7002	2.0707

Tabela 6.13: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$.

Exemplo 2

$$u_0(x) = \text{sen}(4\pi x), \quad u_1(x) = 0, \quad \delta_0 = 1 \text{ e } \delta'(1, 0) = 4\pi.$$

$$f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha(t) = t + 1.$$

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}^{u_m}$	$E_{abs}^{\delta_m}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-5}	0.0979407	0.0512267	-	-
2^{-6}	0.0247761	0.0134200	1.6395	1.9319
2^{-7}	0.0060962	0.0032684	1.9209	2.0382
2^{-8}	0.0013916	0.0007860	1.9991	2.0559
2^{-9}	0.0002121	0.0001838	2.0628	2.0960

Tabela 6.14: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$.

Caso Bidimensional

Consideramos para os dois exemplos a seguir as mesmas condições do caso bidimensional dos exemplos 1 e 2 anteriores, exceto agora f e h nulas (modelo original). Daí, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde $\Gamma_0 = (2) \cup (3) \cup (4)$ e $\Gamma_1 = (1)$, na qual $(1) = \{(x, 0) \in \partial\Omega; 0 \leq x \leq 1\}$, $(2) = \{(1, y) \in \partial\Omega; 0 \leq y \leq 1\}$, $(3) = \{(x, 1) \in \partial\Omega; 0 \leq x \leq 1\}$ e $(4) = \{(0, y) \in \partial\Omega; 0 \leq y \leq 1\}$.

Também para ambos os exemplos a seguir consideramos a “solução exata” como a solução refinada com $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t = 2^{-8}$.

Exemplo 1

$$u_0(x, y) = u_1(x, y) = \gamma x(x-1)(y-1)^2, \quad \delta_0(x) = 0, \quad \text{e} \quad \delta'(x, 0) = \gamma x(x-1)(2+g).$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = g = 1, \quad \alpha(t) = t + 1 \quad \text{e} \quad \gamma = -2.$$

As Tabelas 6.15 e 6.16 mostram para os exemplos 1 e 2, a relação do erro quando a discretização do espaço é igual a do tempo, isto é, $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$ e que a ordem de convergência do erro associado aos métodos usados é quadrática no tempo e no espaço.

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}^{u_m}$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}^{\delta_m}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-3}	0.0050778	0.0024890	-	-
2^{-4}	0.0020319	0.0006882	1.3213	1.8546
2^{-5}	0.0006588	0.0001819	1.6248	1.9193
2^{-6}	0.0002172	0.0000451	1.6003	2.0107
2^{-7}	0.0000618	0.0000092	1.8116	2.2884

Tabela 6.15: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$.

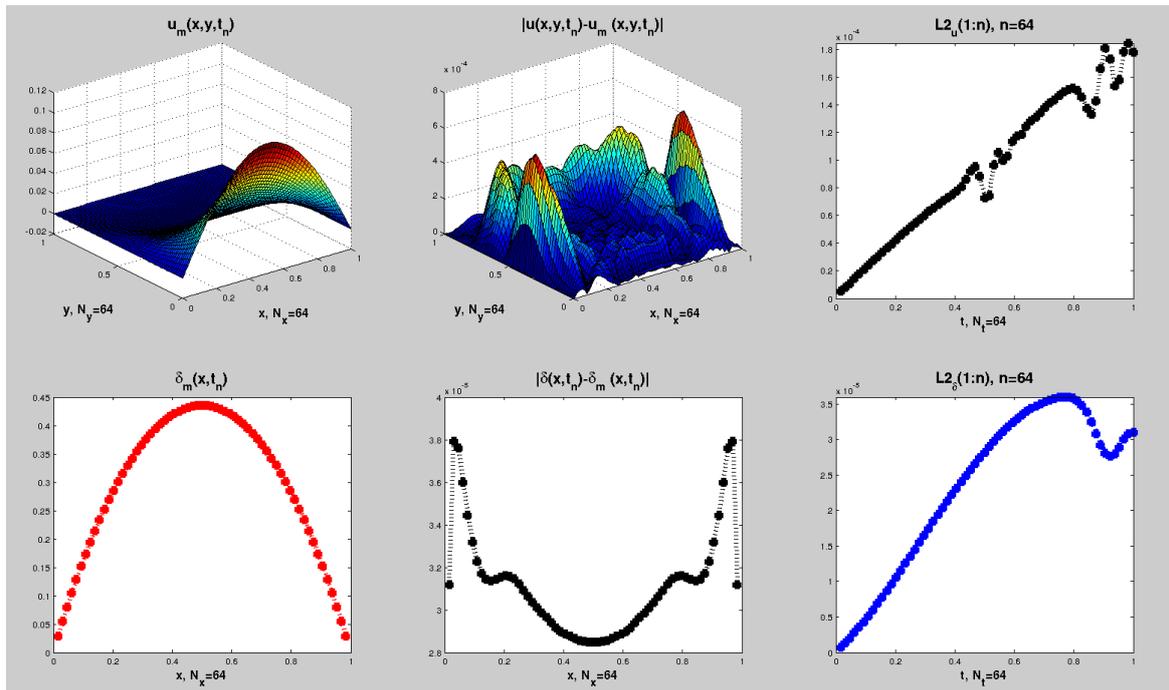


Figura 6.10: Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 1, $h = \Delta t = 2^{-6}$, com erro absoluto e nas normas discretas $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, 1; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente. Consideramos neste caso a solução exata como a solução refinada com $h = \Delta t = 2^{-8}$.

Exemplo 2

$$u_0(x, y) = u_1(x, y) = \gamma \text{sen}(4\pi x) \cos((5\pi/2)y), \quad \delta_0(x) = 0, \quad \text{e} \quad \delta'(x, 0) = \gamma \text{sen}(4\pi x).$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = g = 1, \quad \alpha(t) = t + 1 \quad \text{e} \quad \gamma = 1/64.$$

$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}^{u_m}$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}^{\delta_m}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-3}	0.0112463	0.0017174	-	-
2^{-4}	0.0091231	0.0009401	1.1018	1.1693
2^{-5}	0.0041335	0.0003409	1.1421	1.4633
2^{-6}	0.0011256	0.0000889	1.8766	1.9390
2^{-7}	0.0002385	0.0000182	2.2380	2.2839

Tabela 6.16: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$.

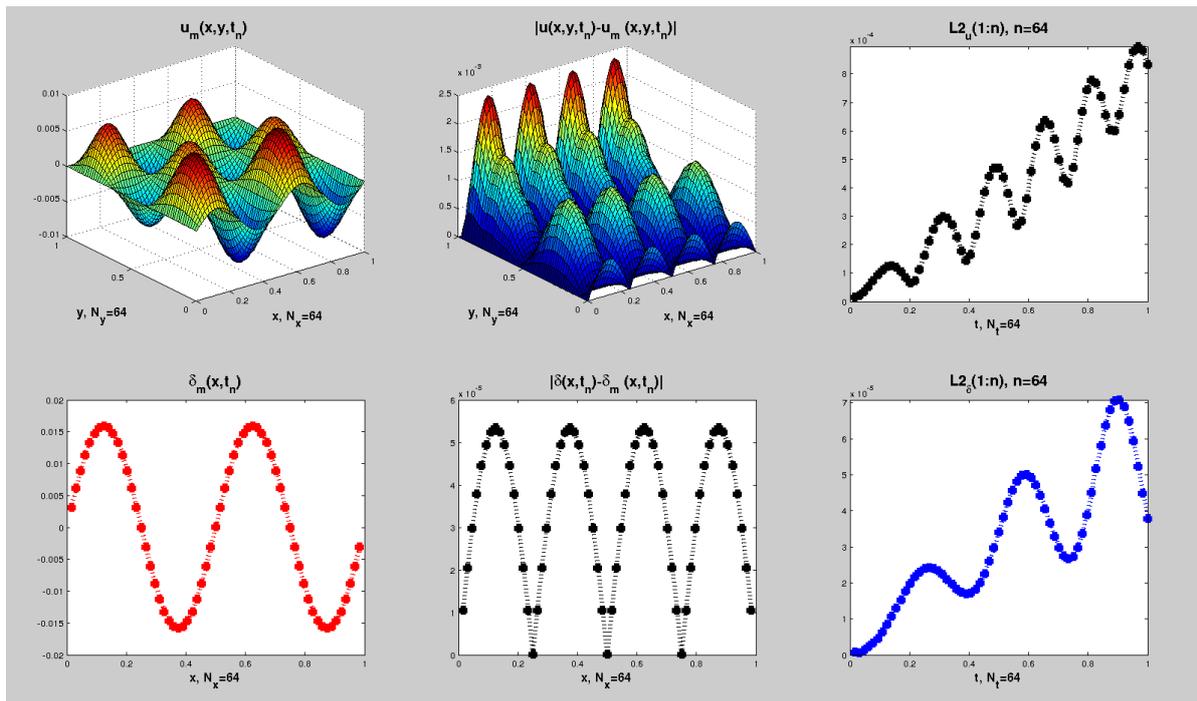


Figura 6.11: Par de solução numérica (u_m, δ_m) do exemplo 2, $h = \Delta t = 2^{-6}$, com erro absoluto e nas normas discretas $L^\infty(0, 1; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, 1; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente. Consideramos neste caso a solução exata como a solução refinada com $h = \Delta t = 2^{-8}$.

7 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

7.1 Conclusão

Na contexto da análise matemática e numérica, concluímos assim a proposta deste trabalho com ênfase teórica e computacional para a resolução do modelo de ondas (2.4) com condições da Acústica em parte da Fronteira, onde provamos a existência e unicidade de soluções, também demonstramos que a energia associada a tal modelo decai uniformemente com uma taxa exponencial quando $t \rightarrow \infty$. Já no contexto das simulações numéricas, usando na parte espacial o método dos Elementos Finitos e na parte transiente Diferenças Finitas de ordem quadrática, obtivemos resultados numéricos satisfatórios que validam os métodos aplicados.

7.2 Trabalhos Futuros

Pretendemos dar continuidade ao estudo apresentado neste trabalho, realizando a simulação numérica do decaimento assintótico da energia associada ao modelo de estudo (2.4) e uma análise do erro, para obtermos uma validação teórica das hipóteses numéricas alcançadas sobre as taxas de convergências neste trabalho. Outra possibilidade é introduzir no modelo (2.4) uma não linearidade do tipo u^3 e $|u|^p u$, e simular este novo modelo considerando as condições de fronteiras, como em (2.4)₃ e (2.4)₄.

REFERÊNCIAS

- [1] ALBER, H. D.; COOPER, J. Quasilinear hyperbolic 2×2 systems with a free, damping boundary condition. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 406, p. 10-43, 1990.
- [2] BEALE, J. T.; ROSENCRANS, S. I. Acoustic Boundary Conditions. **Bulletin of the american mathematical society**, v. 80, n. 6, p. 1276-1278, 1974.
- [3] BEALE, J. T. Spectral properties of an acoustic boundary condition. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 25, n. 9, p. 895-917, 1976.
- [4] BREZIS, H. **Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2011. (Universitext).
- [5] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical analysis**. 9. ed. Boston: Cengage Learning, 2011.
- [6] EVANS, L. C. **Partial differential equations**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics , 19).
- [7] FROTA, C. L.; LARKIN, N. A. Uniform stabilization for a hyperbolic equation with acoustic boundary conditions in simple connected domains. In: CASENAVE, T. et al. (Ed.). **Contributions to nonlinear analysis**. Basileia: Birkhäuser, 2006, p. 297-312. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 66).
- [8] FROTA, C. L.; GOLDSTEIN, J. A. Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions. **Journal of Differential Equations**, v. 164, n. 1, p. 92-109, 2000.
- [9] ISNARD, C. **Introdução à medida e integração**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Projeto Euclides).
- [10] KESAVAN, S. **Topics in functional analysis and applications**. New York: Wiley, 1989.

- [11] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires**. Paris: Dunod, 1969. xx, 554 p. (Etudes mathématiques).
- [12] MEDEIROS, L. A. da; MILLA MIRANDA, M. A. **Introdução às equações diferenciais parciais não lineares**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 1997.
- [13] MEDEIROS, L. A. da; MILLA MIRANDA, M. A. **Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 1989.
- [14] MEDEIROS, L. A. da; MILLA MIRANDA, M. A. **Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 1999.
- [15] MEDEIROS, L. A. da; MILLA MIRANDA, M. A. On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness-asymptotic behavior. **Revista de Matemáticas Aplicadas**, Santiago, v. 17, p. 47-73, 1996.
- [16] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H. **Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 1975. (Textos de Métodos Matemáticos, 75-79).
- [17] MORSE, P. M.; INGARD, K. U. **Theoretical acoustics**. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [18] RINCON, M. A.; LIU, I-S. **Introdução ao método dos elementos finitos**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2013.
- [19] RONALD, R. G. **Aspectos teóricos sobre um sistema termoelástico dissipativo não linear**. 2012. 63 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2012.
- [20] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1988.
- [21] SILVA, P. Braz e; CLARK, H. R.; FROTA, C. L. On a nonlinear coupled system of thermoelastic type with acoustic boundary conditions. **Computational and Applied Mathematics**, p. 1-18, 2015.

- [22] VICENTE, A. **Equações de ondas com condições de fronteira da acústica.** 2010. 95 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)-Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 2010.