

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TERCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

BRUNO ALVES DO CARMO

**ANÁLISE E SIMULAÇÃO
NUMÉRICA DE UM SISTEMA
DISSIPATIVO DO TIPO
TERMOELÁSTICO**

Rio de Janeiro
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

BRUNO ALVES DO CARMO

**ANÁLISE E SIMULAÇÃO
NUMÉRICA DE UM SISTEMA
DISSIPATIVO DO TIPO
TERMOELÁSTICO**

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientador: Mauro Antonio Rincon

Rio de Janeiro
2015

C287a Carmo, Bruno Alves do
Análise e simulação numérica de um sistema dissipativo do tipo termoelástico / Bruno Alves do Carmo. – Rio de Janeiro, 2015.
95 f.: il.

Orientador: Mauro Antonio Rincon.
Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2015.

1. Sistema termoelástico. 2. Existência e unicidade. 3. Análise numérica. 4. Simulação numérica. – Teses. I. Rincon, Mauro Antonio (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. III. Título

CDD:

BRUNO ALVES DO CARMO

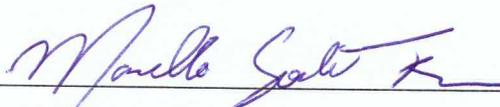
**ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM
SISTEMA DISSIPATIVO DO TIPO TERMOELÁSTICO**

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

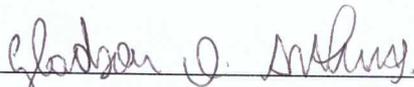
Aprovado em: Rio de Janeiro, 28 de Agosto de 2015.



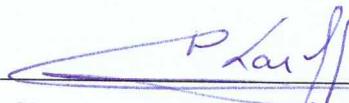
Mauro Antonio Rincon (Orientador), D.Sc., UFRJ



Marcello Goulart Teixeira, D.Sc., PUC-RJ



Gladson Octaviano Antunes, D.Sc., UFRJ



Haroldo Rodrigues Clark, D.Sc., UFRJ



Antonio André Novotny, D.Sc., LNCC

Para minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, pelo dom da vida e por ter me dado forças para concluir mais esta etapa de meus estudos.

À minha família, pelo apoio incondicional e por ter sempre me incentivado a seguir aquilo que eu queria.

Ao meu "irmão mais velho", Julio Reuther, que tive a sorte de conhecer e conviver. Obrigado por tudo.

Um agradecimento especial ao meu orientador professor Mauro Antonio Rincon por ter aceitado me orientar.

Aos amigos do mestrado e doutorado do PPGI-UFRJ, pela parceria e contribuições. Dentre eles, Gabriel, Romulo, Charles, Adriano, Daniele e outros.

Aos professores Marcello Goulart, Gladson Octaviano e Maria Darci pelos conhecimentos transmitidos e pelo exemplo de dedicação a profissão.

A secretária do PPGI, pela pronta assistência prestada.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

CARMO, Bruno Alves do. **Análise e simulação numérica de um sistema dissipativo do tipo termoelástico**. 2015. 95 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Neste trabalho serão estudados analítica e numericamente um modelo de pequenas vibrações verticais de uma membrana elástica acoplada com uma equação do calor e sujeita a condições de fronteira lineares mista. Será estabelecido condições para a existência e unicidade de soluções fortes para o sistema termoelástico dissipativo utilizando o método de Faedo-Galerkin e resultados de compacidade. Numericamente, será simulado, através do método dos elementos finitos no espaço e diferenças finitas no tempo, o sistema termoelástico para os casos uni e bidimensionais. Além disso, será feita uma análise da taxa de convergência dos métodos aplicados.

Palavras-chave: Sistema termoelástico, Existência e unicidade, Análise numérica, Simulação numérica.

ABSTRACT

CARMO, Bruno Alves do. **Análise e simulação numérica de um sistema dissipativo do tipo termoelástico.** 2015. 95 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

In this work will be studied analytically and numerically a model for small vertical vibrations of an elastic membrane coupled with a heat equation and subjected to linear mixed boundary condition. Using Faedo-Galerkin method and compactness results, will be established conditions to existence and uniqueness of the strong solution for the dissipative thermoelastic system. Using finite element method for space variable and finite difference method for time variable, will be simulated the thermoelastic system for the cases of one and two dimensions. Moreover, rate of convergence of the methods applied will be studied.

Keywords: Thermoelastic system, existence and uniqueness, numerical analysis, numerical simulation.

LISTA DE FIGURAS

4.1	Malha de elementos retangulares.	68
4.2	Função φ_A - caso unidimensional.	69
4.3	Numeração local dos nós no elemento retangular Ω_e	71
5.1	Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1. Comportamento do erro da solução numérica u^h para $\rho = 2$ com solução exata e demais funções de entrada definidas em (5.3). $Erro(u^h) = \ u - u^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	83
5.2	Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1. Comportamento do erro da solução numérica θ^h para $\rho = 2$ com solução exata e demais funções de entrada definidas em (5.3). $Erro(\theta^h) = \ \theta - \theta^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	84

LISTA DE TABELAS

5.1	Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1. Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.3). O erro pode ser visto na Tabela (5.2).	82
5.2	Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1. Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.3).	83
5.3	Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 2. Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.4). O erro pode ser visto na Tabela (5.4).	85
5.4	Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 2. Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.4).	85
5.5	Caso unidimensional - Modelo original - Exemplo 1. Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.5). O erro pode ser visto na Tabela 5.6.	86
5.6	Caso unidimensional - Modelo original - Exemplo 1. Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.5). $Erro(u^h)$ e $Erro(\theta^h)$ estão definidos em (5.2).	87
5.7	Caso unidimensional - Modelo original - Exemplo 2. Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.6). O erro pode ser visto na Tabela 5.8.	87
5.8	Caso unidimensional - Modelo original - Exemplo 2. Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.6). $Erro(u^h)$ e $Erro(\theta^h)$ estão definidos em (5.2).	88
5.9	Caso bidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1. Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.7). O erro pode ser visto na Tabela 5.10.	89
5.10	Caso bidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1. Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.7).	89
5.11	Caso bidimensional - Modelo alterado - Exemplo 2. Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.8). O erro pode ser visto na Tabela 5.12.	90
5.12	Caso bidimensional - Modelo alterado - Exemplo 2. Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.8).	90
5.13	Caso bidimensional - Modelo original - Exemplo 1. Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.9). O erro pode ser visto na Tabela 5.14.	91

5.14	Caso bidimensional - Modelo original - Exemplo 1. Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.9). . . .	91
5.15	Caso bidimensional - Modelo original - Exemplo 2. Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.10). O erro pode ser visto na Tabela 5.16. . . .	92
5.16	Caso bidimensional - Modelo original - Exemplo 2. Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.10). . . .	92

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	15
2.1	ESPAÇOS FUNCIONAIS	15
2.2	RESULTADOS BÁSICOS	18
3	EXISTÊNCIA E UNICIDADE	26
3.1	SOLUÇÃO DO PROBLEMA APROXIMADO	28
3.2	ESTIMATIVAS	31
3.2.1	Primeira estimativa	31
3.2.2	Segunda estimativa	36
3.3	PASSAGEM AO LIMITE	46
3.4	VERIFICAÇÃO DOS DADOS INICIAIS	55
3.5	UNICIDADE DAS SOLUÇÕES	59
4	SOLUÇÃO NUMÉRICA	65
4.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	67
4.1.1	Discretização do domínio	67
4.1.2	Definindo as funções bases	69
4.2	SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EDO	72
4.2.1	Solução do sistema não linear	76
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	79
5.1	CASO UNIDIMENSIONAL - MODELO ALTERADO	81
5.2	CASO UNIDIMENSIONAL - MODELO ORIGINAL	86
5.3	CASO BIDIMENSIONAL - MODELO ALTERADO	88
5.4	CASO BIDIMENSIONAL - MODELO ORIGINAL	90
6	CONCLUSÃO	93
	REFERÊNCIAS	94

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos os aspectos teóricos e numéricos de um sistema acoplado não-linear do tipo termoelástico, com não linearidade local e não local, descrito pelas equações

$$\begin{cases} u''(x, t) - \alpha(t)\Delta u(x, t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta(x, t) + \lambda|u(x, t)|^\rho u(x, t) = 0, \\ \theta'(x, t) - \beta\left(\int_{\Omega} \theta(x, t)dx\right)\Delta\theta(x, t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'(x, t) + \gamma(\theta(x, t)) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

com $(x, t) \in Q$ e condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \times]0, T[, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \eta(x)u'(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \theta(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times]0, T[, \end{cases} \quad (1.2)$$

em que u e θ são respectivamente, o deslocamento e a temperatura. O domínio Q é definido por $\Omega \times]0, T[$, sendo Ω um conjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira suave Γ e $T > 0$ um número real arbitrário. Suponha $\Gamma = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1}$, satisfazendo $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. O vetor normal unitário exterior a Γ é dado por ν , \mathbf{a} é um vetor constante do \mathbb{R}^n , λ e ρ são constantes reais positivas e α , β , γ e η são funções reais.

Para situar este trabalho com outros, relativo a existência e unicidade, é de suma importância citar a dissertação de mestrado RONALD (2012) e o artigo SILVA; CLARK; FROTA (2015). Em RONALD (2012), as equações possuem as mesmas não linearidades, porém, as condições de fronteira são do tipo Dirichlet. Já em SILVA; CLARK; FROTA (2015), além das mesmas não linearidades, o sistema é sujeito a condição de acústica não linear sobre parte da fronteira. Ambos os trabalhos foram de grande importância para o desenvolvimento da existência e unicidade do modelo em estudo, dado em (1.1)-(1.2). Existem, também, muitos

outros estudos analíticos de equações parecidas com (1.1)-(1.2), como por exemplo os artigos CLARK; JUTUCA; MIRANDA (1998), APOLAYA; CLARK; FEITOSA (2000) e CLARK et al. (2015).

O objetivo deste trabalho é estabelecer a existência e unicidade de soluções global e desenvolver, e implementar, a solução numérica do problema (1.1) com as condições iniciais e de fronteira (1.2) para os casos em que o domínio Ω seja uni ou bidimensional.

A existência será estabelecida pelo Método de Faedo-Galerkin e resultados de Compacidade. Para a unicidade das soluções, vamos utilizar o Método da Energia. Numericamente, utiliza-se o método dos elementos finitos na parte espacial, resultando em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) não-linear. Aplicando-se esquemas de diferenças finitas de ordem dois no sistema de EDO, resolve-se o sistema não-linear resultante para cada passo de tempo pelo método de Newton.

Esse trabalho está dividido em seis capítulos. No capítulo 2 apresentamos definições e resultados essenciais para melhor entendimento deste trabalho.

No capítulo 3 será feito uma análise teórica sobre condições para a existência e unicidade do sistema termoelástico em estudo. Para este fim será utilizado o Método de Faedo-Galerkin, resultados de Compacidade e o Método da Energia.

No capítulo 4 é desenvolvido a solução numérica, para os casos uni e bidimensionais, aplicando o método de elementos finitos na variável espacial e diferenças finitas na variável temporal resultando em um sistema não linear. Tal sistema será resolvido utilizando o método de Newton para sistemas não lineares.

No capítulo 5 será validada a implementação realizada. Neste capítulo também será realizado um estudo sobre a taxa de convergência dos métodos implementados.

No capítulo 6 as conclusões e sugestões para trabalhos posteriores serão apresentadas.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados os resultados essenciais para o desenvolvimento do capítulo 3, que estabelece condições para a existência e unicidade de soluções forte do modelo estudado.

2.1 Espaços Funcionais

Seja E um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial normado completo. Denotamos por E' o espaço dual de E formado pelo conjunto de todas as aplicações $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas. Quando a norma é induzida pelo produto interno, dizemos que E é um espaço de Hilbert.

A menos que seja especificado, consideraremos sempre Ω um subconjunto aberto limitado de \mathbb{R}^n .

Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções continuamente indefinidamente deriváveis em Ω , com suporte compacto em Ω . O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da topologia da convergência uniforme de todas as derivadas em compactos contidos em Ω é denotado por $D(\Omega)$ e $D'(\Omega)$, o dual topológico de $D(\Omega)$, é dito o espaço das distribuições em Ω .

Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis a Lebesgue tais que $\int_\Omega |u(x)|_{\mathbb{R}}^p dx < \infty$, se $1 \leq p < \infty$, ou

$\sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|_{\mathbb{R}} < \infty$, se $p = \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u(x)|_{\mathbb{R}}^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|_{\mathbb{R}}, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$, temos que o espaço $L^2(\Omega)$ é Hilbert, sendo este, munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Neste trabalho, denotamos o produto interno e norma em $L^2(\Omega)$, respectivamente, por (\cdot, \cdot) e $|\cdot|$.

Denominamos por multi-índices as n-uplas constituídas por números inteiros não negativos. Dado α um multi-índice, ou seja, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, tomando $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

o operador de derivação de ordem $|\alpha|$.

Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ em $L^p(\Omega)$ tais que $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

Para $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$. Além disto, $H^m(\Omega)$ é espaço de Hilbert munido do produto interno e a correspondente norma induzida

dadas, respectivamente, por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sejam p e p' índices conjugados, isto é, $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq p' \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Representamos por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. No caso em que $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$ e seu dual topológico por $H^{-m}(\Omega)$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e E espaço de Banach. Denotamos por $L^p(a, b; E)$, com $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach das (classe de) funções $u :]a, b[\rightarrow E$ mensuráveis tais que $\int_a^b \|u(t)\|_E^p dt < \infty$, se $1 \leq p < \infty$, ou $\sup_{t \in]a, b[} \text{ess} \|u(t)\|_E < \infty$, se $p = \infty$. O espaço $L^p(a, b; E)$ é um espaço completo munido da norma

$$\|u\|_{L^p(a, b; E)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|u(t)\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t \in]a, b[} \text{ess} \|u(t)\|_E, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$ e E um espaço de Hilbert, $L^2(a, b; E)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v)_{L^2(a, b; E)} = \int_a^b (u(t), v(t))_E dt.$$

Quando E é reflexivo, separável e $1 < p < \infty$, $L^p(a, b; E)$ é um espaço reflexivo e separável cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^{p'}(a, b; E')$, em que, p e p' são índices conjugados. Para $p = 1$, o dual topológico de $L^1(a, b; E)$ se identifica ao espaço $L^\infty(a, b; E)$.

Denotamos por $C([a, b]; E)$ o espaço de Banach das funções $u : [a, b] \rightarrow E$ contínuas munido da norma de $L^\infty(a, b; E)$.

2.2 Resultados Básicos

Definição 2.1 (*Convergência Fraca*). Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E . Então, $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, para todo $\varphi \in E'$.

Definição 2.2 (*Convergência Fraca Estrela*). Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E' . Diz-se $\varphi_\nu \xrightarrow{*} \varphi$ converge fraca estrela se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, para todo $u \in E$.

Definição 2.3 (*Separável*). Diz-se que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ numerável e denso.

Definição 2.4 (*Reflexivo*). Seja E um espaço de Banach e seja J a injeção canônica de E em E'' . Diz-se que E é reflexivo se $J(E) = E''$.

Teorema 2.1 (*Banach-Alaoglu-Bourbaki*). Sejam E um espaço de Banach e E' o seu dual topológico. Então, o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \text{ é compacto na topologia fraca estrela}$$

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.2 Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então, o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \text{ é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela, então, E é separável.

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

O corolário a seguir é uma consequência do Teorema 2.1 e Teorema 2.2.

Corolário 2.1 *Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E' . Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.3 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então, existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: Ver EVANS (2010).

Teorema 2.4 *(Desigualdade de Hölder). Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p , ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Observação 2.1 *(Extensão da Desigualdade de Hölder). Sejam f_1, f_2, \dots, f_k funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \text{ para } 1 \leq i \leq k \text{ com } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então, o produto $f = f_1 f_2 f_3 \dots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.5 (Teorema da convergência dominada, Lebesgue). Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em L^1 que satisfazem:

- (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre Ω ,
- (b) existe uma função $g \in L^1$ tal que, para todo n tem-se $|f_n(x)| \leq g(x)$, em q.t.p de Ω .

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.6 Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de L^p e $f \in L^p$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$.

Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p$ tal que

- (a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ em q.t.p de Ω
- (b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k e em q.t.p de Ω .

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.7 Seja $\gamma \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$, e I limitado ou ilimitado. Então, existe uma função $\tilde{\gamma} \in C(\bar{I})$ tal que

$$\gamma = \tilde{\gamma} \quad \text{quase sempre em } I$$

e

$$\tilde{\gamma}(x) - \tilde{\gamma}(y) = \int_y^x \gamma'(t) dt \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.8 A função $\gamma \in L^\infty(I)$ pertence a $W^{1,\infty}(I)$ se, e somente se, existe uma constante C tal que

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| \leq C |x - y| \quad \text{para quase todo } x, y \in I.$$

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.9 (Rellich-Kondrachov). *Suponha Ω um subconjunto de \mathbb{R}^n limitada e de classe C^1 . Então, tem-se as seguintes injeções compactas*

$$\begin{aligned} \text{Se } p < n \quad W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [1, p^*) \text{ com } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \\ \text{Se } p = n \quad W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [p, +\infty), \\ \text{Se } p > n \quad W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow C(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo n).

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Observação 2.2 *A injeção $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ nunca é compacta, mesmo que Ω seja limitado e suave. No entanto, veja MEDEIROS; MIRANDA (2010), esta injeção é contínua.*

Observação 2.3 *Se $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, vale a identidade*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) dx = \int_{\Gamma} uv \nu_i d\Gamma,$$

em que, $\nu_i = \cos(x_i, \nu)$ e ν normal unitária externa a Γ . Portanto

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv \nu_i d\Gamma,$$

para todo par de funções $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, por densidade, estende-se este resultado para funções $u, v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Ver MEDEIROS; MIRANDA (2010).

Teorema 2.10 (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos Ω é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n e $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Observação 2.4 Em particular a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; em $H_0^1(\Omega)$ tem-se o produto interno

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.11 (Aubin-Lions). Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1 , $1 < p_0$, $p_1 < \infty$ e W o espaço

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

equipado da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Então, W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Ver LIONS (1969).

Observação 2.5 Uma consequência do Teorema de Aubin-Lions: se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então, $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W . Daí, segue-se que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \rightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$.

Lema 2.1 (Lema de Lions). Sejam Q um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$, satisfazendo

$$\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C \text{ e } g_m \rightarrow g \text{ quase sempre em } Q.$$

Então,

$$g_m \rightharpoonup g \text{ em } L^q(Q)$$

Demonstração: Ver LIONS (1969).

Lema 2.2 *Sejam X um espaço de Banach, $f \in L^p(0, T; X)$ e $f' \in L^p(0, T; X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$f \in C([0, T]; X).$$

(Possivelmente redefinidas sobre um conjunto de medida nula.)

Demonstração: Ver LIONS (1969).

Lema 2.3 *(Lema de Gronwall). Sejam $\varphi \in L^\infty(0, T)$ e $\psi \in L^1(0, T)$ tais que $\psi(t) > 0$ e $\varphi(t) \geq 0$, e $K \geq 0$ constante. Se*

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t \psi(s)\varphi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

então, tem-se,

$$\varphi(t) \leq Ke^{\int_0^t \psi(s)ds}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Demonstração: Ver CARROLL (1969).

Teorema 2.12 *(Teorema da Representação de Riesz). Seja $1 < p < \infty$ e $\phi \in (L^p)^*$. Então, existe uma única função $u \in L^p$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p.$$

Além disto,

$$\|u\|_{p'} = \|u\|_{(L^p)^*}.$$

Demonstração: Ver BREZIS (2011).

Teorema 2.13 (*Teorema da Representação de Riesz*). *Seja H um espaço de Hilbert. Dado alguma $\phi \in H^*$, existe uma única $u \in H$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = (u, f) \quad \forall f \in H.$$

Além disto,

$$|u| = \|u\|_{H^*}.$$

Demonstração: *Ver BREZIS (2011).*

Lema 2.4 *Seja Ω uma aberto limitado do \mathbb{R}^n , com fronteira Γ bem regular. Então, a aplicação*

$$v \rightarrow \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

define em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente à norma $H^2(\Omega)$.

Demonstração: *Ver MEDEIROS; MIRANDA (2011).*

Definição 2.5 (*Condições de Carathéodory*). *Sejam D um subconjunto do \mathbb{R}^{n+1} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory se*

- (a) *$f(x, t)$ é mensurável em t , para cada x fixo;*
- (b) *$f(x, t)$ é contínua em x , para cada t fixo;*
- (c) *para cada compacto U em D , existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que*

$$|f(x, t)| \leq m_U(t), \quad \forall (x, t) \in U.$$

Teorema 2.14 (*Carathéodory*). *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaça as condições de Carathéodory apresentadas na definição (2.5). Então, existe uma solução $x(t)$ do problema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, com $\beta > 0$.

Demonstração: *Ver MEDEIROS; RIVERA (1975).*

Teorema 2.15 (*Prolongamento de Soluções*). Sejam $D = [0, T] \times B$, com $0 < T < \infty$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b, b > 0\}$, e f satisfazendo as duas primeiras condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0, \quad |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ esteja definida, se tenha $|\varphi(t)| \leq M, \forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então, $\varphi(t)$ tem um prolongamento até $[0, T]$.

Demonstração: Ver MEDEIROS; RIVERA (1975).

Teorema 2.16 Assumimos Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n . Existe uma sequência de números reais $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

e

$$\lambda_m \rightarrow \infty \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Existe uma base Hilbertiana $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ tais que, $e_m \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta w_j = \lambda_j w_j & \text{em } \Omega \\ w_j = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Diz-se que os números λ_m são os autovalores de $-\Delta$ (com a condição de Dirichlet) e que as e_m são as funções próprias associadas.

Demonstração: Ver EVANS (2010).

3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Neste capítulo, vamos demonstrar a existência e unicidade de soluções global do sistema não linear acoplado (1.1)-(1.2). Reescrevemos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} u''(x, t) - \alpha(t)\Delta u(x, t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta(x, t) + \lambda|u(x, t)|^\rho u(x, t) = 0, \\ \theta'(x, t) - \beta\left(\int_{\Omega} \theta(x, t)dx\right)\Delta\theta(x, t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'(x, t) + \gamma(\theta(x, t)) = 0, \end{cases}$$

com $(x, t) \in \Omega \times]0, T[$ e condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{em } \Omega, \\ u(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \times]0, T[, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \eta(x)u'(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \theta(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times]0, T[, \end{cases}$$

Para estabelecer resultados de existência e unicidade de solução, considere as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} \alpha \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}) \text{ com } \alpha' \in L^1(0, \infty) \cap L^\infty(0, \infty) \text{ e } \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0; \\ \beta \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}) \text{ e } \beta(t) \geq \beta_0 > 0; \quad \gamma \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}) \text{ e } \gamma(0) = 0; \\ 0 < \rho < \infty \text{ se } n = 1, \quad \frac{1}{2} \leq \rho < \infty \text{ se } n = 2 \text{ ou} \\ \frac{1}{n} \leq \rho \leq \frac{2}{n-2} \text{ se } n \geq 3; \quad \eta \in W^{1, \infty}(\Gamma_1) \text{ e } \eta(x) \geq \eta_0 > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

A constante β_0 deve ser considerada de forma que $\beta_0 \geq \frac{L}{\gamma_1}$, em que as constantes L e γ_1 serão apresentadas em (3.8).

Sendo a função $u(x, t)$ nula apenas em uma parte da fronteira, vamos denotar o espaço $V = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0(v) = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$. Dado que a desigualdade de Poincaré também é válida em V , conseqüentemente, temos que as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$

e $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes em V . Consideramos também o espaço $H_\Delta(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega)\}$ no qual faz sentido o traço da derivada normal em (1.2)₃.

Nessas condições temos o seguinte resultado de existência e unicidade de solução:

Teorema 3.1 *Suponha que temos (3.1), que $u_0 \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, $u_1 \in V$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \eta u_1 = 0$ em Γ_1 . Então, existe um único par de funções $\{u, \theta\}$, para $T > 0$ arbitrário, solução de (1.1) - (1.2), satisfazendo*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; V \cap H_\Delta(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\ u'' &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\ \theta &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad \theta' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

e as equações (1.1) e (1.2)₃ são verificadas no seguinte sentido

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega [u'' \phi + \alpha \nabla u \cdot \nabla \phi + \lambda |u|^\rho u \phi + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \theta \phi] dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \alpha \eta u' \phi dx dt &= 0, \\ \int_0^T \left[\int_\Omega \theta' \varphi dx + \beta \left(\int_\Omega \theta dx \right) \int_\Omega \nabla \theta \nabla \varphi dx + \int_\Omega (\mathbf{a} \cdot \nabla) u' \varphi dx + \int_\Omega \gamma(\theta) \varphi dx \right] dt &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo $\phi \in L^2(0, T; V)$ e $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Demonstração: A demonstração é baseada no Método de Faedo-Galerkin e resultados de Compacidade, sendo organizada nos seguintes passos:

1. Solução do problema aproximado;
2. Estimativas;
3. Passagem ao limite;
4. Verificação dos dados iniciais;

5. Unicidade das soluções.

Para cada passo, faremos inicialmente uma breve descrição dos objetivos a serem cumpridos. Em todo o trabalho, utilizaremos (\cdot, \cdot) e $|\cdot|$ como o produto interno e norma de $L^2(\Omega)$, respectivamente.

3.1 Solução do Problema Aproximado

Obtém-se problemas aproximados considerando a formulação variacional do problema original em subespaços de dimensão finita. Para cada dimensão m , o problema aproximado recai em uma equação diferencial ordinária. Fixado m , utiliza-se o Teorema de Carathéodory para obter a existência do par de solução local $\{u_m, \theta_m\}$, definidas em $[0, t_m[$, com $t_m < T$. Nas próximas etapas vamos estabelecer resultados que nos permitam provar que as sucessões $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergem para a solução do sistema (1.1)-(1.2) no sentido dado em (3.3).

Considere $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana de $V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma base de autovetores do operador de Laplace em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

- $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$, que é um sistema ortogonal e completo em $V \cap H_\Delta(\Omega)$;
- $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$, que é um sistema ortogonal e completo em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, constituída pelas soluções do problema de autovalores $(\nabla w_j, \nabla w) = \lambda_j(w_j, w)$, para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere $V_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ e $W_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$,

os subespaços de dimensão finita gerados pelos m primeiros vetores das bases anteriormente descritas.

Procedendo formalmente, o problema aproximado consiste em determinar $u_m : [0, T[\rightarrow V_m$ e $\theta_m : [0, T[\rightarrow W_m$, representados por

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m c_{im}(t)v_i \quad \text{e} \quad \theta_m(t) = \sum_{i=1}^m d_{im}(t)w_i, \quad (3.4)$$

tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_m''(t), v) + \alpha(t) [(\nabla u_m(t), \nabla v) + (\eta(x)u_m'(t), v)_{\Gamma_1}] + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), v) \\ \quad + \lambda(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^p u_m(t), v) = 0, \quad \forall v \in V_m; \\ (\theta_m'(t), w) + \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla w) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)u_m'(t), w) \\ \quad + (\gamma(\theta_m(t)), w) = 0, \quad \forall w \in W_m; \\ u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ em } V \cap H_{\Delta}(\Omega); \\ u_m'(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ em } V; \\ \theta_m(0) = \theta_{0m} \longrightarrow \theta_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.5)$$

A existência das seqüências $(u_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ e $(u_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$, satisfazendo a condição de compatibilidade $\frac{\partial u_{0m}}{\partial \nu} + \eta u_{1m} = 0$ sobre Γ_1 , pode ser verificada seguindo as ideias contidas em MEDEIROS; MIRANDA (1996).

Quanto a seqüência $(\theta_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$, dado que $\theta_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$, então $\theta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (\theta_0, w_i)w_i$. Deste modo, obtemos que

$$\theta_{0m} := \sum_{i=1}^m (\theta_0, w_i)w_i \rightarrow \theta_0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Portanto, fazendo $\theta_m(0) = \theta_{0m}$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^m d_{im}(0)w_i = \sum_{i=1}^m (\theta_0, w_i)w_i,$$

sendo $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$, segue que

$$d_{jm}(0) = \sum_{i=1}^m d_{im}(0)(w_i, w_j) = \sum_{i=1}^m (\theta_0, w_i)(w_i, w_j) = (\theta_0, w_j), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Assim,

$$\theta_m(0) = \theta_{0m} \rightarrow \theta_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

pois,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{(-\Delta\theta_0, -\Delta w_j)w_j}{\|w_j\|_{\mathcal{D}(-\Delta)}^2} &= \sum_{j=1}^m \frac{(-\Delta\theta_0, \lambda_j w_j)w_j}{\|-\Delta w_j\|_{L^2(\Omega)}^2} = \\ \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j(-\Delta\theta_0, w_j)w_j}{\lambda_j^2} &= \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j(\theta_0, -\Delta w_j)w_j}{\lambda_j^2} = \sum_{j=1}^m (\theta_0, w_j)w_j \rightarrow \theta_0. \end{aligned}$$

Todas as parcelas do sistema (3.5) estão bem definidas devido as hipóteses consideradas em (3.1) e as especificações dos espaços V_m e W_m . Para a parcela $(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), v)$, observando que $|u_m^{\rho+1}(t)| = \|u_m(t)\|_{L^{2\rho+2}(\Omega)}^{\rho+1}$ e que $V \hookrightarrow L^{2\rho+2}(\Omega)$ (esta imersão sera justificada posteriormente nas estimativas), aplicando Hölder, obtemos

$$|(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), v)|_{\mathbb{R}} \leq \int_{\Omega} |u_m^{\rho+1}(t)|_{\mathbb{R}} |v|_{\mathbb{R}} dx \leq |u_m^{\rho+1}(t)| |v(t)| = \|u_m(t)\|_{L^{2\rho+2}(\Omega)}^{\rho+1} |v(t)|.$$

Daí, utilizando novamente que $V \hookrightarrow L^{2\rho+2}(\Omega)$, segue que $(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), v)$ está bem definido.

Substituindo (3.4) em (3.5), reescrevemos o problema aproximado (3.5) como um sistema de EDO's de segunda ordem. Reduzindo a ordem deste sistema, obtemos um problema de valor inicial nas condições do Teorema de Carathéodory. Resultando assim, na existência do par de solução local $\{u_m(t), \theta_m(t)\}$ do problema (3.5) definidas em $[0, t_m]$, para algum $0 < t_m < T$.

3.2 Estimativas

Na etapa anterior obtivemos as sequências $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $\{\theta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ das soluções aproximadas. Para provar que tais sequências convergem para a solução do problema (1.1)-(1.2), precisamos inicialmente estabelecer resultados a fim de garantir a convergência. Neste sentido, o objetivo desta etapa é buscar estimativas uniformes (independentes de m e de t) para garantir a convergência. Além disto, lembrando que as soluções aproximadas obtidas, $\{u_m, \theta_m\}$, são soluções locais, tais estimativas garantem o prolongamento a todo o intervalo $[0, T]$, onde $T > 0$ arbitrário. A primeira estimativa a seguir nos garante este resultado de prolongamento.

3.2.1 Primeira estimativa

Tomando $v = 2u'_m(t)$ e $w = 2\theta_m(t)$ no problema aproximado, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(u''_m(t), u'_m(t)) + 2\alpha(t) [(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) + (\eta(x)u'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1}] \\ \quad + 2((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), u'_m(t)) + 2\lambda(\int_{\mathbb{R}} u_m(t) |u_m(t)|^p) = 0, \\ 2(\theta'_m(t), \theta_m(t)) + 2\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla \theta_m(t)) \\ \quad + 2((\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m(t), \theta_m(t)) + 2(\gamma(\theta_m(t)), \theta_m(t)) = 0. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Estabelecemos a seguir diversas identidades e desigualdades a fim de preparar o sistema (3.6) para aplicarmos a desigualdade de Gronwall. Observe as seguintes

identidades

$$\begin{aligned}
(i) \quad & 2(u_m''(t), u_m'(t)) = \frac{d}{dt}(u_m'(t), u_m'(t)) = \frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2, \\
(ii) \quad & 2(\theta_m'(t), \theta_m(t)) = \frac{d}{dt}(\theta_m(t), \theta_m(t)) = \frac{d}{dt}|\theta_m(t)|^2, \\
(iii) \quad & (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), u_m'(t)) = \int_{\Omega} |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t) u_m'(t) dx \\
& = \int_{\Omega} |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho |u_m(t)|_{\mathbb{R}} \frac{u_m(t)}{|u_m(t)|_{\mathbb{R}}} u_m'(t) dx = \int_{\Omega} |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^{\rho+1} \frac{d}{dt} |u_m(t)|_{\mathbb{R}} dx \\
& = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^{\rho+2} dx \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\rho+2} \|u_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \right\}, \\
(iv) \quad & 2((\mathbf{a} \cdot \nabla) u_m'(t), \theta_m(t)) + 2(u_m'(t), (\mathbf{a} \cdot \nabla) \theta_m(t)) = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sendo $\theta_m(t)$ igual a zero sobre Γ , pois $w_j = 0$ sobre Γ para $j = 1, 2, \dots, m$, pela identidade de Gauss, obtemos que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m'(t) \theta_m(t)) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e, assim, pela equação anterior, temos a igualdade:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i} \theta_m(t) dx = - \int_{\Omega} u_m'(x) \frac{\partial \theta_m}{\partial x_i}(t) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Daí, pelo fato de que $(\mathbf{a} \cdot \nabla) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, segue de imediato a identidade (3.7)₄.

Na identidade (3.7)₃, temos que $u_m(t) \in L^{\rho+2}(\Omega)$, pois $(V \cap H_{\Delta}(\Omega)) \hookrightarrow V \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$. A última injeção contínua segue das hipóteses feitas sobre ρ e das imersões de espaços de Sobolev (veja Teorema 2.9). Mostraremos esta imersão contínua analisando os três casos segundo as hipóteses feitas sobre ρ .

Se $n = 1$, temos $H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$. O resultado segue de $C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ ser válido para $0 < \rho < \infty$.

Se $n = 2$ e $1/2 \leq \rho < \infty$, obtemos que $5/2 \leq \rho + 2$. Assim, utilizando que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [2, \infty[$, segue o resultado para $q = \rho + 2$.

Se $n \geq 3$ e $\rho \in [1/n, 2/(n-2)]$, obtemos que $\rho+2 \in [2+1/n, (2n-2)/(n-2)]$. Neste caso, sendo $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, 2n/(n-2)]$, segue o resultado para $q = \rho + 2$.

Utilizando as hipóteses dadas em (3.1), temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
(i) \quad & 2\beta_0 |\nabla \theta_m(t)|^2 \leq 2\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla \theta_m(t)), \\
(ii) \quad & \alpha_0 \eta_0 |u'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq 2\alpha(t) (\eta(x) u'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1}, \\
(iii) \quad & 2|(\gamma(\theta_m(t)), \theta_m(t))|_{\mathbb{R}} \leq 2|\gamma(\theta_m(t))| |\theta_m(t)| \\
& = 2|\gamma(\theta_m(t)) - \gamma(0)| |\theta_m(t)| \leq 2L |\theta_m(t) - 0| |\theta_m(t)| \\
& = 2L |\theta_m(t)|^2 \leq \frac{2L}{\lambda_1} |\nabla \theta_m(t)|^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Na desigualdade (3.8)₃, além da desigualdade de Cauchy-Schwarz, utilizamos ainda a desigualdade de Poincaré, $|\nabla \theta_m(t)|^2 \geq \lambda_1 |\theta_m(t)|^2$. Fato decorrente de $\theta_m(t)$ pertencer a $H_0^1(\Omega)$. A constante λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Laplace. Quanto a constante L , dado que por hipótese $\gamma \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, temos que γ é Lipschitz (Teorema 2.8), logo, L é a constante de Lipschitz da função γ .

Substituindo as identidades de (3.7) no sistema (3.6), temos

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + \alpha(t) \frac{d}{dt} |\nabla u_m(t)|^2 + 2\alpha(t) (\eta(x) u'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} \\
& + 2((\mathbf{a} \cdot \nabla) \theta_m(t), u'_m(t)) + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2\lambda}{\rho+2} \|u_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \right\} = 0, \\
& \frac{d}{dt} |\theta_m(t)|^2 + 2\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) |\nabla \theta_m(t)|^2 \\
& + 2((\mathbf{a} \cdot \nabla) u'_m(t), \theta_m(t)) + 2(\gamma(\theta_m(t)), \theta_m(t)) = 0.
\end{aligned} \right. \tag{3.9}$$

Somando as equações do sistema anterior, utilizando as desigualdades dadas em (3.8), a identidade (3.7)₄ e observando que de (3.8)₃,

$$-\frac{2L}{\lambda_1} |\nabla \theta_m(t)|^2 \leq -2|(\gamma(\theta_m(t)), \theta_m(t))|_{\mathbb{R}} \leq 2(\gamma(\theta_m(t)), \theta_m(t)),$$

resulta

$$\frac{d}{dt} E_m(t) + 2\alpha_0\eta_0 |u'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2 \left(\beta_0 - \frac{L}{\gamma_1} \right) |\nabla\theta_m(t)|^2 \leq |\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} |\nabla u_m(t)|^2,$$

em que

$$E_m(t) = |u'_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 + \alpha(t) |\nabla u_m(t)|^2 + \frac{2\lambda}{\rho + 2} \|u_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}.$$

Deste modo, como $\alpha_0 |\nabla u_m(t)|^2 \leq \alpha(t) |\nabla u_m(t)|^2 \leq E_m(t)$, então

$$\frac{d}{dt} E_m(t) + 2\alpha_0\eta_0 |u'_m(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2 \left(\beta_0 - \frac{L}{\gamma_1} \right) |\nabla\theta_m(t)|^2 \leq \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} E_m(t).$$

Portanto, integrando de 0 a t , $0 < t < t_m$, obtemos

$$E_m(t) + \mu_1 \int_0^t |u'_m(s)|_{\Gamma_1}^2 ds + \mu_2 \int_0^t |\nabla\theta_m(s)|^2 ds \leq E_m(0) + \int_0^t \frac{|\alpha'(s)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} E_m(s) ds, \quad (3.10)$$

em que μ_1 e μ_2 , definidas respectivamente por $2\alpha_0\eta_0$, $2 \left(\beta_0 - \frac{L}{\gamma_1} \right)$, são constantes positivas por hipótese. Sendo todas as parcelas do lado esquerdo da inequação (3.10) não-negativas, obtemos que

$$E_m(t) \leq E_m(0) + \int_0^t \frac{|\alpha'(s)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} E_m(s) ds. \quad (3.11)$$

Verificando as hipóteses para aplicarmos a desigualdade de Gronwall em (3.11), temos que mostrar que $E_m(0)$ é limitado. De fato, sendo

$$E_m(0) = |u_{1m}|^2 + |\theta_{0m}|^2 + \alpha(0) |\nabla u_{0m}|^2 + \frac{2\lambda}{\rho + 2} \|u_{0m}\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2},$$

pela convergência forte das sequências $(u_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$, $(u_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\theta_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ dada em (3.5), pelas hipóteses consideradas em (3.1)₁ para a função α e pelas imersões contínuas $(V \cap H_{\Delta}(\Omega)) \hookrightarrow V \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, temos que $E_m(0)$ é limitado por uma constante que independe de m .

Estando todas as hipóteses verificadas, aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.11), obtemos

$$E_m(t) \leq E_m(0)e^{\int_0^t \frac{|\alpha'(s)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} ds}$$

para todo $t \in]0, t_m[$. Da hipótese $\alpha' \in L^1(0, \infty)$ e limitação obtida para $E_m(0)$, existe uma constante positiva C , independente de m e de t , tal que

$$E_m(t) \leq C, \quad \forall t \in [0, t_m[.$$

Tal estimativa nos permite prolongar o par de solução $\{u_m(t), \theta_m(t)\}$ ao intervalo $[0, T[$. Finalizando, repetimos toda a estimativa, agora integrando de 0 a t , com $0 < t < T$, obtendo o seguinte resultado

$$E_m(t) + \mu_1 \int_0^t |u'_m(s)|_{\Gamma_1}^2 ds + \mu_2 \int_0^t |\nabla \theta_m(s)|^2 ds \leq C_2, \quad (3.12)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T[$ e C_2 uma constante positiva que independe de m e t . Lembrando que

$$E_m(t) = |u'_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 + \alpha(t) |\nabla u_m(t)|^2 + \frac{2\lambda}{\rho + 2} \|u_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2},$$

o resultado anterior, (3.12), nos permite concluir que

$$\begin{aligned} (u'_m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ (\theta_m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ (u_m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V), \\ (u_m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)), \\ (u'_m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\ (\theta_m)_{m \in \mathbb{N}} & \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.2 Segunda estimativa

Derivando as equações do problema aproximado, dadas em (3.5), com respeito a t e substituindo v por $2u_m''(t)$ e w por $2\theta_m'(t)$, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(u_m''', u_m'') + 2\alpha' [(\nabla u_m, \nabla u_m'') + (\eta u_m', u_m'')_{\Gamma_1}] + 2\alpha [(\nabla u_m', \nabla u_m'') + (\eta u_m'', u_m'')_{\Gamma_1}] \\ \quad + 2((\mathbf{a} \cdot \nabla) \theta_m', u_m'') + 2\lambda(\rho + 1)(|u_m|_{\mathbb{R}}^{\rho} u_m', u_m'') = 0, \\ 2(\theta_m'', \theta_m') + 2\beta' \left(\int_{\Omega} \theta_m dx \right) \left(\int_{\Omega} \theta_m' dx \right) (\nabla \theta_m, \nabla \theta_m') + 2\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m dx \right) (\nabla \theta_m', \nabla \theta_m') \\ \quad + 2((\mathbf{a} \cdot \nabla) u_m'', \theta_m') + 2(\gamma'(\theta_m) \theta_m', \theta_m') = 0. \end{array} \right.$$

Adicionando as duas equações do sistema anterior e fazendo uso das identidades e desigualdades a seguir

$$\begin{aligned} (i) \quad & 2(u_m'''(t), u_m''(t)) = \frac{d}{dt} |u_m''(t)|^2, \\ (ii) \quad & 2(\theta_m''(t), \theta_m'(t)) = \frac{d}{dt} |\theta_m'(t)|^2, \\ (iii) \quad & 2((\mathbf{a} \cdot \nabla) \theta_m'(t), u_m''(t)) + 2((\mathbf{a} \cdot \nabla) u_m''(t), \theta_m'(t)) = 0, \\ (iv) \quad & 2\beta_0 |\nabla \theta_m'(t)|^2 \leq 2\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) |\nabla \theta_m'(t)|^2, \\ (v) \quad & 2\alpha_0 \eta_0 |u_m''(t)|_{\Gamma_1} \leq 2\alpha(t) (\eta(x) u_m''(t), u_m''(t))_{\Gamma_1}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_m + 2\beta_0 |\nabla \theta_m'|^2 + 2\alpha_0 \eta_0 |u_m''|_{\Gamma_1} & \leq \alpha' |\nabla u_m'|^2 - 2(\gamma'(\theta_m) \theta_m', \theta_m') \\ & \quad - 2\lambda(\rho + 1)(|u_m|_{\mathbb{R}}^{\rho} u_m', u_m'') \\ & \quad - 2\beta' \left(\int_{\Omega} \theta_m dx \right) \left(\int_{\Omega} \theta_m' dx \right) (\nabla \theta_m, \nabla \theta_m') \\ & \quad - 2\alpha' [(\nabla u_m, \nabla u_m'') + (\eta u_m', u_m'')_{\Gamma_1}] \end{aligned} \tag{3.15}$$

em que

$$F_m(t) = |u_m''(t)|^2 + \alpha(t) |\nabla u_m'(t)|^2 + |\theta_m'(t)|^2.$$

As identidades e desigualdades em (3.14) são obtidas de forma análoga as obtidas na primeira estimativa.

Para prosseguir, precisamos de limitações para os termos do lado direito da inequação (3.15).

- Limitação para $\alpha'(t) |\nabla u'_m(t)|^2$. Pelas hipóteses consideradas em (3.1)₁ para a função $\alpha(t)$ e pela definição da $F(t)$ temos que:

$$\alpha'(t) |\nabla u'_m(t)|^2 \leq |\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} \frac{\alpha(t)}{\alpha_0} |\nabla u'_m(t)|^2 \leq \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} F_m(t) \leq C F_m(t).$$

- Limitação para $-2(\gamma'(\theta_m(t))\theta'_m(t), \theta'_m(t))$. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e observando que $\gamma' \in L^\infty(\mathbb{R})$, dado que por hipótese $\gamma \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, existe uma constante positiva C , tal que

$$-2(\gamma'(\theta_m(t))\theta'_m(t), \theta'_m(t)) \leq 2 |\gamma'(\theta_m(t))\theta'_m(t)| |\theta'_m(t)| \leq C |\theta'_m(t)| |\theta'_m(t)| \leq C F_m(t).$$

- Limitação para $-2\lambda(\rho+1)(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u'_m(t), u''_m(t))$. Considerando as hipóteses para ρ em (3.1), a imersão contínua de V em $H^1(\Omega)$ e resultados de imersões de espaços de Sobolev (veja Teorema 2.9), analisamos os três casos a seguir:

(i) Se $n = 1$ e $0 < \rho < \infty$, temos que $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho |u'_m(t)|_{\mathbb{R}} |u''_m(t)|_{\mathbb{R}} dx &\leq \|u_m(t)\|_{C(\bar{\Omega})}^\rho \int_{\Omega} |u'_m(t)|_{\mathbb{R}} |u''_m(t)|_{\mathbb{R}} dx \\ &\leq \|u_m(t)\|_{C(\bar{\Omega})}^\rho |u'_m(t)| |u''_m(t)| \\ &\leq C |\nabla u_m(t)|^\rho |\nabla u'_m(t)| |u''_m(t)|, \end{aligned}$$

em que, na primeira desigualdade, utilizamos a imersão de V em $C(\bar{\Omega})$. Na segunda, usamos a desigualdade de Hölder para o caso $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Ressaltando que $u'_m(t)$ e $u''_m(t)$ pertencem a $L^2(\Omega)$, pois $v_i \in L^2(\Omega)$ e $c'_{im}(t), c''_{im}(t)$ estão bem definidos. Na última desigualdade, utilizamos a imersão contínua de V em $C(\bar{\Omega})$ e de V em $L^2(\Omega)$.

(ii) Se $n = 2$ e $\frac{1}{2} \leq \rho < \infty$ então $2 \leq 4\rho < \infty$. Consequentemente, temos que $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{4\rho}(\Omega)$ e $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^{\rho} |u'_m(t)|_{\mathbb{R}} |u''_m(t)|_{\mathbb{R}} dx &\leq \|u_m^{\rho}(t)\|_{L^4(\Omega)} \|u'_m(t)\|_{L^4(\Omega)} |u''_m(t)| \\ &= \|u_m(t)\|_{L^{4\rho}(\Omega)}^{\rho} \|u'_m(t)\|_{L^4(\Omega)} |u''_m(t)| \\ &\leq C |\nabla u_m(t)|^{\rho} |\nabla u'_m(t)| |u''_m(t)|. \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade utilizamos Hölder generalizado para o caso $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$. Para mostrar que $u_m^{\rho}(t) \in L^4(\Omega)$ basta notar que $\|u_m^{\rho}(t)\|_{L^4(\Omega)} = \|u_m(t)\|_{L^{4\rho}(\Omega)}^{\rho}$ e usar a imersão contínua de V em $L^{4\rho}(\Omega)$. Para mostrar que $u'_m(t) \in L^4(\Omega)$ basta notar que, $v_i \in H^1(\Omega)$ e $c'_{im}(t)$ está bem definido, $u'_m(t) \in H^1(\Omega)$. Assim, utilizando a imersão contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^4(\Omega)$ segue o resultado. Quanto a $u''_m(t)$, como justificado no caso anterior, temos que $u''_m(t) \in L^2(\Omega)$. Na segunda desigualdade utilizamos a imersão contínua de V em $L^{4\rho}(\Omega)$ e de V em $L^4(\Omega)$.

(iii) Se $n \geq 3$ e $\frac{1}{n} \leq \rho \leq \frac{2}{n-2}$ então $1 \leq n\rho \leq \frac{2n}{n-2}$. Consequentemente, temos que $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \hookrightarrow L^{n\rho}(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^{\rho} |u'_m(t)|_{\mathbb{R}} |u''_m(t)|_{\mathbb{R}} dx &\leq \|u_m^{\rho}(t)\|_{L^n(\Omega)} \|u'_m(t)\|_{L^q(\Omega)} |u''_m(t)| \\ &= \|u_m(t)\|_{L^{n\rho}(\Omega)}^{\rho} \|u'_m(t)\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} |u''_m(t)| \\ &\leq C |\nabla u_m(t)|^{\rho} |\nabla u'_m(t)| |u''_m(t)|. \end{aligned}$$

Usamos a desigualdade generalizada de Hölder para o caso $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$, com $q = \frac{2n}{n-2}$. As justificativas são análogas ao caso anterior.

Pelos itens (i)-(iii), por $\alpha_0 \leq \alpha(t)$ e pela limitação obtida na primeira estimativa para o termo $|\nabla u_m(t)|$, temos

$$\begin{aligned} -2\lambda(\rho + 1)(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^{\rho} u'_m(t), u''_m(t)) &\leq 2C\lambda(\rho + 1) |\nabla u_m(t)|^{\rho} |\nabla u'_m(t)| |u''_m(t)| \\ &\leq C |\nabla u'_m(t)| |u''_m(t)| \\ &\leq C \left(|\nabla u'_m(t)|^2 + |u''_m(t)|^2 \right) \leq CF_m(t). \end{aligned}$$

- Limitação para $-2\beta' \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) \left(\int_{\Omega} \theta'_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla \theta'_m(t))$. Pela primeira estimativa, θ_m é limitado em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Uma vez que $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e, por hipótese, $\beta' \in L^\infty(\mathbb{R})$, então existe uma constante positiva C tal que

$$\left| \beta' \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) \right|_{\mathbb{R}} \leq C.$$

Usamos este resultado, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Young, com $p = q = 2$, $a = \frac{C}{\sqrt{\beta_0}} |\theta'_m(t)| |\nabla \theta_m(t)|$ e $b = \sqrt{\beta_0} |\nabla \theta'_m(t)|$, para obter

$$\begin{aligned} & -2\beta' \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) \left(\int_{\Omega} \theta'_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla \theta'_m(t)) \\ & \leq 2C \|\theta'_m(t)\|_{L^1(\Omega)} |\nabla \theta_m(t)| |\nabla \theta'_m(t)| \\ & \leq C |\theta'_m(t)| |\nabla \theta_m(t)| |\nabla \theta'_m(t)| \\ & \leq \frac{C^2}{\beta_0} |\theta'_m(t)|^2 |\nabla \theta_m(t)|^2 + \beta_0 |\nabla \theta'_m(t)|^2 \\ & \leq \frac{C^2}{\beta_0} |\nabla \theta_m(t)|^2 F_m(t) + \beta_0 |\nabla \theta'_m(t)|^2. \end{aligned}$$

- Limitação para $-2\alpha'(t) [(\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + (\eta(x)u'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1}]$. Considerando $v = 2u''_m(t)$ na primeira equação do problema aproximado, dado em (3.5), resulta

$$\begin{aligned} & 2\alpha(t) [(\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + (\eta(x)u'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1}] = -2 |u''_m(t)|^2 \\ & - 2((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), u''_m(t)) - 2\lambda(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), u''_m(t)). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por $-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$, obtemos

$$\begin{aligned} & -2\alpha'(t) [(\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + (\eta(x)u'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1}] = 2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} |u''_m(t)|^2 \\ & + 2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), u''_m(t)) + 2\lambda \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), u''_m(t)). \end{aligned}$$

Assim, para obter a limitação do termo proposto neste item, basta encontrar limitações para cada um dos termos do lado direito da equação anterior. Buscaremos a

seguir estas limitações.

(i) Limitação para $2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} |u_m''(t)|^2$.

$$2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} |u_m''(t)|^2 \leq 2 \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} |u_m''(t)|^2 \leq 2 \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} F_m(t) \leq C F_m(t).$$

Pela definição de $F_m(t)$, temos $|u_m''(t)|^2 \leq F_m(t)$. Das hipóteses sobre $\alpha(t)$ obtemos que $\frac{1}{\alpha(t)} \leq \frac{1}{\alpha_0}$, conseqüentemente, $\frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha(t)} \leq \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0}$. Na última desigualdade, utilizamos que $\alpha' \in L^\infty(0, \infty)$, hipótese (3.1)₁.

(ii) Limitação para $2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), u_m''(t))$.

$$\begin{aligned} 2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), u_m''(t)) &\leq 2 \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \frac{\partial \theta_m}{\partial x_i}(t) u_m''(t) dx \right|_{\mathbb{R}} \\ &\leq 2 \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \frac{\partial \theta_m}{\partial x_i}(t) u_m''(t) \right|_{\mathbb{R}} dx \\ &\leq \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \{|\mathbf{a}_i|_{\mathbb{R}}\} \right) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} 2 \left| \frac{\partial \theta_m}{\partial x_i}(t) \right|_{\mathbb{R}} |u_m''(t)|_{\mathbb{R}} dx \\ &\leq \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \{|\mathbf{a}_i|_{\mathbb{R}}\} \right) \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial \theta_m}{\partial x_i}(t) \right|_{\mathbb{R}}^2 + |u_m''(t)|_{\mathbb{R}}^2 \right) dx \\ &= \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \{|\mathbf{a}_i|_{\mathbb{R}}\} \right) \left(|\nabla \theta_m(t)|^2 + n |u_m''(t)|^2 \right) dx \\ &\leq C |\nabla \theta_m(t)|^2 + C F_m(t). \end{aligned}$$

(iii) Limitação para $2\lambda \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), u_m''(t))$.

$$\begin{aligned} (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), u_m''(t)) &\leq (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho |u_m(t)|_{\mathbb{R}}, |u_m''(t)|_{\mathbb{R}}) \\ &= (|u_m^{\rho+1}(t)|_{\mathbb{R}}, |u_m''(t)|_{\mathbb{R}}) \\ &\leq |u_m^{\rho+1}(t)| |u_m''(t)| \\ &= \|u_m(t)\|_{L^{2\rho+2}(\Omega)}^{\rho+1} |u_m''(t)| \end{aligned}$$

Utilizamos a desigualdade de Hölder para o caso $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Observando que $|u_m^{\rho+1}(t)| = \|u_m(t)\|_{L^{2\rho+2}(\Omega)}^{\rho+1}$, para mostrar que $u_m^{\rho+1}(t) \in L^2(\Omega)$, basta mostrar que $V \hookrightarrow L^{2\rho+2}(\Omega)$. Para tal, utilizamos a imersão contínua de V em $H^1(\Omega)$ e as imersões de espaços de Sobolev (veja Teorema 2.9) juntamente com as hipóteses feitas sobre ρ , como pode ser visto a seguir.

Se $n = 1$, temos $H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$. O resultado segue de $C(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^{2\rho+2}(\Omega)$ ser válido para $0 < \rho < \infty$.

Se $n = 2$, temos $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [2, \infty[$. Sendo $2\rho + 2 > 2$, pois por hipótese $\rho \in [\frac{1}{2}, \infty[$, o resultado é válido para $q = 2\rho + 2$.

Se $n \geq 3$, temos $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q \in [1, \frac{2n}{n-2}]$. Da hipótese $\rho \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n-2}]$, temos que $1 < 2\rho + 2 \leq \frac{2n}{n-2}$. Consequentemente, segue o resultado para $q = 2\rho + 2$.

Prosseguindo com a estimativa,

$$\begin{aligned} 2\lambda \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^{\rho} u_m(t), u_m''(t)) &\leq 2\lambda \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0} \|u_m(t)\|_{L^{2\rho+2}(\Omega)}^{\rho+1} |u_m''(t)| \\ &\leq 2\lambda \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0} C |\nabla u_m(t)|^{\rho+1} |u_m''(t)| \\ &\leq C |\nabla u_m(t)|^{2\rho+2} + C |u_m''(t)|^2 \\ &\leq C + CF_m(t), \end{aligned}$$

em que, na segunda desigualdade, utilizamos a imersão contínua de V em $L^{2\rho+2}(\Omega)$. Na terceira, a desigualdade de Young juntamente com as hipóteses feitas sobre α . Na última desigualdade, utilizamos a limitação obtida na primeira estimativa para o termo $|\nabla u_m(t)|$ e a definição de $F_m(t)$.

Por abuso de linguagem, consideramos a mesma constante C em todas as passagens. Ressaltamos que em todas as passagens, C é uma constante positiva

independente de t e de m .

Substituindo em (3.15) as limitações encontradas para cada item do lado direito da inequação, temos que

$$\frac{d}{dt}F_m(t) + \beta_0 |\nabla\theta'_m(t)|^2 + 2\alpha_0\eta_0 |u''_m(t)|_{\Gamma_1} \leq C + C(1 + |\nabla\theta_m(t)|^2)F_m(t) + C|\nabla\theta_m(t)|^2.$$

Integrando de 0 a t , com $0 < t < T$, e utilizando que $\int_0^t |\nabla\theta_m(s)|^2 ds$ é limitado por uma constante independente de t e m (veja (3.12)), obtemos

$$F_m(t) + \beta_0 \int_0^t |\nabla\theta'_m(s)|^2 ds + 2\alpha_0\eta_0 \int_0^t |u''_m(s)|_{\Gamma_1} ds \leq C + F_m(0) + \int_0^t \psi(s)F_m(s) ds$$

em que $\psi(s) = C(1 + |\nabla\theta_m(s)|^2)$.

Sendo $\int_0^t \psi(s) ds$ limitado, para aplicarmos o lema de Gronwall, resta apenas mostrar que $F_m(0) = |u''_m(0)|^2 + \alpha(0) |\nabla u'_m(0)|^2 + |\theta'_m(0)|^2$ é limitado. A limitação para o termo $|\nabla u'_m(0)|^2$ segue da convergência forte da sequência $(u_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$ em V . Quanto aos termos $u''_m(0)$ e $\theta'_m(0)$, substituindo v por $u''_m(0)$ e w por $\theta'_m(0)$ no problema aproximado (3.5), usando a condição de compatibilidade $\frac{\partial u_{0m}}{\partial \nu} + \eta u_{1m} = 0$ sobre Γ_1 e a fórmula de Green, obtemos

$$\begin{cases} |u''_m(0)|^2 - \alpha(0)(\Delta u_m(0), u''_m(0)) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(0), u''_m(0)) \\ \quad + \lambda(|u_m(0)|_{\mathbb{R}}^{\rho} u_m(0), u''_m(0)) = 0, \\ |\theta'_m(0)|^2 - \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(0) dx \right) (\Delta \theta_m(0), \theta'_m(0)) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m(0), \theta'_m(0)) \\ \quad + (\gamma(\theta_m(0)), \theta'_m(0)) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Lembrando que $u_{0m} \in (V \cap H_{\Delta}(\Omega)) \hookrightarrow V \hookrightarrow L^{2\rho+2}(\Omega)$, usando a desigual-

dade de Cauchy-Schwarz na primeira equação do sistema anterior, temos

$$\begin{aligned}
|u_m''(0)|^2 &\leq \alpha(0) \int_{\Omega} |\Delta u_m(0)|_{\mathbb{R}} |u_m''(0)|_{\mathbb{R}} dx + \int_{\Omega} |(\mathbf{a} \cdot \nabla) \theta_m(0)|_{\mathbb{R}} |u_m''(0)|_{\mathbb{R}} dx \\
&\quad + \lambda \int_{\Omega} |u_m(0)|_{\mathbb{R}}^{\rho+1} |u_m''(0)|_{\mathbb{R}} dx \\
&\leq \alpha(0) |\Delta u_m(0)| |u_m''(0)| + \left(\max_{1 \leq i \leq n} \{ |a_i| \} \right) |\nabla \theta_m(0)| |u_m''(0)| \\
&\quad + C |\nabla u_m(0)|^{\rho+1} |u_m''(0)|.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|u_m''(0)| \leq C |\Delta u_m(0)| + C |\nabla \theta_m(0)| + C |\nabla u_m(0)|^{\rho+1},$$

em que C é uma constante positiva independente de m . Analisando a desigualdade anterior, a limitação para $|u_m''(0)|$ segue das convergências das seqüências $(u_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$, $(u_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\theta_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ apresentadas em (3.5).

Trabalhando a segunda equação do sistema (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}
|\theta_m'(0)|^2 &\leq \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(0) dx \right) \int_{\Omega} |\Delta \theta_m(0)|_{\mathbb{R}} |\theta_m'(0)|_{\mathbb{R}} dx + \int_{\Omega} |(\mathbf{a} \cdot \nabla) u_m'(0)|_{\mathbb{R}} |\theta_m'(0)|_{\mathbb{R}} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} |\gamma(\theta_m(0))|_{\mathbb{R}} |\theta_m'(0)|_{\mathbb{R}} dx \\
&\leq C |\Delta \theta_m(0)| |\theta_m'(0)| + C |\nabla u_m'(0)| |\theta_m'(0)| + C |\theta_m(0)| |\theta_m'(0)|.
\end{aligned}$$

Para limitar o termo $\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(0) dx \right)$, note que, pela convergência forte da seqüência $(\theta_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $|\theta_m(0)|$ é limitada por uma constante independente de m . Deste modo, sendo $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que existe uma constante c , independente de m , tal que

$$\int_{\Omega} \theta_m(0) dx \in [-c, c].$$

Assim, tendo β uma representante continua, dado que por hipótese pertence a $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ (veja Teorema 2.7), a limitação para o termo $\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(0) dx \right)$ segue da continuidade da função β no intervalo compacto $[-c, c]$.

Prosseguindo, temos que

$$|\theta'_m(0)| \leq C |\Delta\theta_m(0)| + C |\nabla u'_m(0)| + C |\theta_m(0)|.$$

Portanto, das convergências das sequências $(u_{1m})_{m \in \mathbb{N}}$, $(u_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\theta_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ apresentadas em (3.5), segue a limitação para $|\theta'_m(0)|$ por uma constante independente de m .

Os resultados anteriores nos permitem concluir que

$$F_m(0) = |u''_m(0)|^2 + \alpha(0) |\nabla u'_m(0)|^2 + |\theta'_m(0)|^2$$

é limitada. Deste modo,

$$F_m(t) + \beta_0 \int_0^t |\nabla \theta'_m(s)|^2 ds + 2\alpha_0 \eta_0 \int_0^t |u''_m(s)|_{\Gamma_1} ds \leq C + \int_0^t \psi(s) F_m(s) ds. \quad (3.17)$$

Como todas as parcelas do lado direito são positivas, temos que

$$F_m(t) \leq C + \int_0^t \psi(s) F_m(s) ds,$$

resultando, pelo Lema de Gronwall, que

$$F_m(t) \leq C e^{\int_0^t \psi(s) ds}, \quad \forall t \in]0, T[.$$

Podemos, assim, concluir que, $F_m(t)$, com $t \in [0, T[$, é limitada por uma constante que independe de m e de t . Deste resultado e da equação (3.17), temos

$$F_m(t) + \beta_0 \int_0^t |\nabla \theta'_m(s)|^2 ds + 2\alpha_0 \eta_0 \int_0^t |u''_m(s)|_{\Gamma_1} ds \leq C. \quad (3.18)$$

De modo que

$$F_m(t) = |u''_m(t)|^2 + \alpha(t) |\nabla u'_m(t)|^2 + |\theta'_m(t)|^2,$$

o resultado (3.18), nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
(u''_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
(u'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V), \\
(\theta'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
(\theta'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\
(u''_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

As limitações estabelecidas nas estimativas nos permite obter mais regularidade para $\theta_m(t)$. A seguir, mostraremos que $\|\theta_m(t)\|_{H^2(\Omega)}$ é limitada por uma constante independente de m e de t . De fato, substituindo w por $\Delta\theta_m(t)$ no problema aproximado, dado em (3.5), temos

$$\begin{aligned}
(\theta'_m(t), \Delta\theta_m(t)) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) (\Delta\theta_m(t), \Delta\theta_m(t)) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u'_m(t), \Delta\theta_m(t)) \\
+ (\gamma(\theta_m(t)), \Delta\theta_m(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Isolando o termo $\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) |\Delta\theta_m(t)|^2$ e observando que $\beta_0 \leq \beta(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\beta_0 |\Delta\theta_m(t)|^2 \leq \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) |\Delta\theta_m(t)|^2 = (\theta'_m(t), \Delta\theta_m(t)) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u'_m(t), \Delta\theta_m(t)) \\
+ (\gamma(\theta_m(t)), \Delta\theta_m(t)),
\end{aligned}$$

da qual, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e que $|\gamma(\theta_m(t))| \leq L |\theta_m(t)|$, resulta

$$\beta_0 |\Delta\theta_m(t)|^2 \leq |\theta'_m(t)| |\Delta\theta_m(t)| + \max_{1 \leq i \leq n} \{\|\mathbf{a}_i\|_{\mathbb{R}}\} |\nabla u'_m(t)| |\Delta\theta_m(t)| + L |\theta_m(t)| |\Delta\theta_m(t)|.$$

Assim,

$$|\Delta\theta_m(t)| \leq C (|\theta'_m(t)| + |\nabla u'_m(t)| + |\theta_m(t)|).$$

Logo, as sequências $(\theta'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ são limitadas em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em $L^\infty(0, T; V)$, segue que $|\Delta\theta_m(t)|$ é limitada por uma constante independente de m e de t . Daí, como $\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq C |\Delta\varphi|$ para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ com $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ (veja Lema 2.4), temos que

$$(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega)). \tag{3.20}$$

3.3 Passagem ao Limite

De (3.20) e das limitações obtidas na primeira e segunda estimativa, (3.13) e (3.19), temos que

$$\begin{aligned}
(u_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V \cap L^{\rho+2}(\Omega)), \\
(u'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V), \\
(u''_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
(u'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
(u''_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\
(\theta'_m)_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Das limitações anteriores, aplicando o Corolário do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Corolário 2.1) e o Teorema 2.3, temos que existem subsequências de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$, que denotaremos da mesma forma, tais que

$$\begin{aligned}
u_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u && \text{ em } L^\infty(0, T; V \cap L^{\rho+2}(\Omega)), \\
u'_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u' && \text{ em } L^\infty(0, T; V), \\
u''_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u'' && \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
u'_m &\rightharpoonup u' && \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
u''_m &\rightharpoonup u'' && \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)), \\
\theta_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \theta && \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\
\theta'_m &\rightharpoonup \theta' && \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\
\theta'_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \theta' && \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Os resultados obtidos em (3.22) são suficientes para tomar o limite dos termos lineares do sistema (3.25). No entanto, para os termos não lineares, será necessário a convergência forte em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ de algumas sequências. Vamos estabelecer estes resultados a seguir.

De (3.21) temos que $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; V)$ e $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$, então, considerando $B_0 = V$, $B = L^2(\Omega)$ e $B_1 = L^2(\Omega)$, pelo Teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$, que também será denotada por $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$, tal que

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.23)$$

De forma análoga, utilizando as limitações dadas em (3.21), obtemos que

$$\begin{aligned} u'_m &\longrightarrow u' \quad \text{em} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \theta_m &\longrightarrow \theta \quad \text{em} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Estabelecidos os resultados de convergência necessários, vamos prosseguir a fim de tomar o limite no problema aproximado. Multiplicando as equações do problema aproximado por $\psi \in L^2(0, T)$, integrando de 0 a T , considerando m_0 fixo e $m > m_0$, temos

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^T (u''_m(t), v) \psi(t) dt + \int_0^T \alpha(t) [(\nabla u_m(t), \nabla v) \psi(t) + (\eta(x) u'_m(t), v)_{\Gamma_1} \psi(t)] dt \\ &\quad + \int_0^T ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \theta_m(t), v) \psi(t) dt + \lambda \int_0^T (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), v) \psi(t) dt = 0, \\ &\int_0^T (\theta'_m(t), w) dt + \int_0^T \beta \left(\int_\Omega \theta_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla w) \psi(t) dt \\ &\quad + \int_0^T ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u'_m(t), w) \psi(t) dt + \int_0^T (\gamma(\theta_m(t)), w) \psi(t) dt = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

para todo $v \in V_{m_0}$ e $w \in W_{m_0}$. Vamos estudar, separadamente, a convergência de cada termo do sistema anterior a seguir.

- Convergência do termo $\int_0^T (u''_m(t), v) \psi(t) dt$.

Temos que

$$u''_m \xrightarrow{*} u'' \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\langle u''_m, \phi \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))} \rightarrow \langle u'', \phi \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Assim,

$$\int_0^T \langle u_m''(t), \phi(t) \rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} dt \rightarrow \int_0^T \langle u''(t), \phi(t) \rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} dt,$$

do qual, sendo $u_m''(t)$, $u''(t)$ e $\phi(t)$ pertencentes a $L^2(\Omega)$, obtemos

$$\int_0^T (u_m''(t), \phi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u''(t), \phi(t)) dt.$$

Em particular, o resultado anterior vale para $\phi(t) = v\psi(t)$, ou seja,

$$\int_0^T (u_m''(t), v)\psi(t) dt \rightarrow \int_0^T (u''(t), v)\psi(t) dt \quad \forall v \in V_{m_0}.$$

- Convergência do termo $\int_0^T (\theta_m'(t), w)\psi(t) dt$.

De (3.22) temos que

$$\theta_m' \xrightarrow{*} \theta' \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Deste modo, procedendo de forma análogo ao caso anterior, obtemos

$$\int_0^T (\theta_m'(t), w)\psi(t) dt \rightarrow \int_0^T (\theta'(t), w)\psi(t) dt \quad \forall w \in W_{m_0}.$$

- Convergência do termo $\int_0^T \alpha(t)(\nabla u_m(t), \nabla v)\psi(t) dt$.

De (3.22) temos que

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad \text{em } L^\infty(0, T; V),$$

ou seja,

$$\langle u_m, \phi \rangle_{L^\infty(0, T; V) \times L^1(0, T; V')} \rightarrow \langle u, \phi \rangle_{L^\infty(0, T; V) \times L^1(0, T; V')}.$$

Assim,

$$\int_0^T \langle u_m(t), \phi(t) \rangle_{V \times V'} dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), \phi(t) \rangle_{V \times V'} dt,$$

do qual, aplicando o Teorema da Representação de Riesz (Teorema 2.13), obtemos

$$\int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla \phi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \phi(t)) dt,$$

para todo $\phi \in L^1(0, T; V)$. Logo, segue o resultado para $\phi(t) = \alpha(t)\psi(t)v$, ou seja,

$$\int_0^T \alpha(t) (\nabla u_m(t), \nabla v) \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \alpha(t) (\nabla u(t), \nabla v) \psi(t) dt \quad \forall v \in V_{m_0}.$$

- Convergência do termo $\int_0^T \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla w) \psi(t) dt$.

Temos que mostrar que

$$\int_0^T \left(\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) \nabla \theta_m(t) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) \nabla \theta(t), \nabla w \right) \psi(t) dt \rightarrow 0 \quad \forall w \in W_{m_0}.$$

A fim de simplificar a escrita, vamos denotar por μ_m o termo geral da sequência anterior. Sendo

$$\begin{aligned} \mu_m &= \int_0^T \left(\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) \nabla \theta_m(t) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) \nabla \theta(t), \nabla w \right) \psi(t) dt \\ &= \int_0^T \left[\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) \right] (\nabla \theta(t), \nabla w) \psi(t) dt \\ &\quad + \int_0^T \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) ([\nabla \theta_m(t) - \nabla \theta(t)], \nabla w) \psi(t) dt, \end{aligned}$$

basta mostrar a convergência dos termos do lado direito da equação anterior. Inicialmente, vamos analisar os dois termos a seguir:

$$\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) \quad \text{e} \quad \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right).$$

Quanto ao primeiro, como $\beta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, pelo Teorema 2.8, β é lipschitziana.

Logo,

$$\left| \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) \right|_{\mathbb{R}} \leq L \left| \int_{\Omega} \theta_m(t) dx - \int_{\Omega} \theta(t) dx \right|_{\mathbb{R}} \leq L \int_{\Omega} |\theta_m(t) - \theta(t)|_{\mathbb{R}} dx.$$

Note que $\int_{\Omega} |\theta_m(t) - \theta(t)|_{\mathbb{R}} dx = \|\theta_m(t) - \theta(t)\|_{L^1(\Omega)}$. Assim, sendo $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que

$$\left| \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) \right|_{\mathbb{R}} \leq C |\theta_m(t) - \theta(t)|.$$

Para o segundo, sendo θ_m limitado em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, veja (3.21), e de $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, existe uma constante positiva C , independente de m e t , tal que

$$\left| \int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right|_{\mathbb{R}} \leq C |\theta_m(t)| \leq C.$$

Observando que β possui uma representante contínua, veja Teorema 2.7, da continuidade da função β no intervalo $[-C, C]$, existe uma nova constante positiva C , independente de m e t , tal que

$$\beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) \leq C, \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T.$$

Destas duas considerações, resulta que

$$\begin{aligned} |\mu_m|_{\mathbb{R}} &\leq C \int_0^T |\theta_m(t) - \theta(t)| |(\nabla \theta(t), \nabla w)|_{\mathbb{R}} |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt \\ &\quad + C \int_0^T |([\nabla \theta_m(t) - \nabla \theta(t)], \nabla w)|_{\mathbb{R}} |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt. \end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |\mu_m|_{\mathbb{R}} &\leq C \int_0^T |\theta_m(t) - \theta(t)| |\nabla \theta(t)| |\nabla w| |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt \\ &\quad + C \int_0^T |\nabla \theta_m(t) - \nabla \theta(t)| |\nabla w| |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt \\ &\leq C \|\nabla \theta\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} |\nabla w| \int_0^T |\theta_m(t) - \theta(t)| |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt \\ &\quad + C |\nabla w| \int_0^T |\nabla \theta_m(t) - \nabla \theta(t)| |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt. \end{aligned}$$

Aplicando agora a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |\mu_m|_{\mathbb{R}} &\leq C \|\theta_m - \theta\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|\psi\|_{L^2(0, T)} + C \|\nabla \theta_m - \nabla \theta\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \|\psi\|_{L^2(0, T)} \\ &\leq C \|\theta_m - \theta\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + C \|\nabla \theta_m - \nabla \theta\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Deste modo, da convergência forte de θ_m em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, dada em (3.24), segue a convergência do termo em questão, ou seja,

$$\int_0^T \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla w) \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) (\nabla \theta(t), \nabla w) \psi(t) dt,$$

para todo $w \in W_{m_0}$.

- Convergência do termo $\int_0^T \alpha(t) (\eta(x) u'_m(t), v)_{\Gamma_1} \psi(t) dt$.

De (3.22) temos que

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)),$$

ou seja,

$$\langle u'_m, \phi \rangle_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))} \rightarrow \langle u', \phi \rangle_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \times L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))}.$$

Deste modo,

$$\int_0^T \langle u'_m(t), \phi(t) \rangle_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)} dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), \phi(t) \rangle_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)} dt.$$

Então, dado que $u'_m(t)$, $u'(t)$ e $\phi(t)$ pertencem a $L^2(\Gamma_1)$, obtemos

$$\int_0^T (u'_m(t), \phi(t))_{\Gamma_1} dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), \phi(t))_{\Gamma_1} dt,$$

para todo $\phi \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$. Assim, sendo $\eta \in L^\infty(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, pois por hipótese $\eta \in W^{1, \infty}(\Gamma_1)$, segue o resultado para $\phi(t) = \alpha(t) \eta v \psi(t)$, ou seja,

$$\int_0^T \alpha(t) (\eta(x) u'_m(t), v)_{\Gamma_1} \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \alpha(t) (\eta(x) u'(t), v)_{\Gamma_1} \psi(t) dt \quad \forall v \in V_{m_0}.$$

- Convergência do termo $\int_0^T ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u'_m(t), w) \psi(t) dt$.

Dado que a sequência $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V)$, veja (3.21)₂, segue a limitação de $((\mathbf{a} \cdot \nabla) u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Assim, pelo Corolário do

Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, Corolário 2.1, existe uma subsequência de $((\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m \xrightarrow{*} \chi \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.26)$$

ou seja,

$$\langle (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m, \phi \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))} \rightarrow \langle \chi, \phi \rangle_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \times L^1(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Consequentemente,

$$\int_0^T \langle (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m(t), \phi(t) \rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} dt \rightarrow \int_0^T \langle \chi(t), \phi(t) \rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} dt.$$

Assim,

$$\int_0^T ((\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m(t), \phi(t)) dt \rightarrow \int_0^T (\chi(t), \phi(t)) dt \quad (3.27)$$

para todo $\phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, logo, em particular, vale para $\phi(t) = w\psi(t)$.

Mostraremos que $\chi = (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'$. De fato, observando que para qualquer que seja $\vartheta \in L^2(Q)$, esta define uma distribuição T_ϑ , dada por

$$\langle T_\vartheta, \phi \rangle = \int_Q \vartheta(x, t) \phi(x, t) dx dt, \quad \text{para todo } \phi \in \mathcal{D}(Q).$$

Então, dado que $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge forte para u' em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, veja (3.24), e que $\mathcal{D}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$, temos

$$\langle T_{u'_m}, \phi \rangle = \int_Q u'_m(x, t) \phi(x, t) dx dt \rightarrow \int_Q u'(x, t) \phi(x, t) dx dt = \langle T_{u'}, \phi \rangle,$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(Q)$, portanto, $T_{u'_m} \rightarrow T_{u'}$ e pela continuidade da derivação em $\mathcal{D}'(Q)$,

$$T_{(\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m} \rightarrow T_{(\mathbf{a} \cdot \nabla)u'} \quad \text{em } \mathcal{D}'(Q),$$

ou seja,

$$\langle T_{(\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m}, \phi \rangle = \int_Q (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m \phi dx dt \rightarrow \int_Q (\mathbf{a} \cdot \nabla)u' \phi dx dt = \langle T_{(\mathbf{a} \cdot \nabla)u'}, \phi \rangle, \quad (3.28)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(Q)$.

Assim, das convergências em (3.27) e (3.28), pela unicidade do limite, segue que $T_{(\mathbf{a} \cdot \nabla)u'} = T_\chi$. Deste modo, pelo Teorema de Du Bois Raymond, resulta que $\chi = (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'$ em quase todo ponto de Q , como queríamos mostrar.

- Convergência do termo $\int_0^T ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), v)\psi(t)dt$.

A convergência deste termo segue de forma análoga ao caso anterior.

- Convergência do termo $\int_0^T (\gamma(\theta_m(t)), w)\psi(t)dt$.

Temos que mostrar que

$$\int_0^T (\gamma(\theta_m(t)) - \gamma(\theta(t)), w)\psi(t)dt \rightarrow 0 \quad \forall w \in W_{m_0}. \quad (3.29)$$

Definindo por δ_m o termo geral da sequência anterior, temos que

$$|\delta_m|_{\mathbb{R}} = \left| \int_0^T (\gamma(\theta_m(t)) - \gamma(\theta(t)), w)\psi(t)dt \right|_{\mathbb{R}} \leq \int_0^T |(\gamma(\theta_m(t)) - \gamma(\theta(t)), w)|_{\mathbb{R}} |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e utilizando que γ é lipschitziana, veja Teorema 2.8, temos

$$\begin{aligned} |\delta_m|_{\mathbb{R}} &\leq \int_0^T |\gamma(\theta_m(t)) - \gamma(\theta(t))| |w| |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt \leq L \int_0^T |\theta_m(t) - \theta(t)| |w| |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt \\ &= L |w| \int_0^T |\theta_m(t) - \theta(t)| |\psi(t)|_{\mathbb{R}} dt \leq L |w| |\theta_m - \theta|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} |\psi|_{L^2(0,T)}. \end{aligned}$$

Deste modo, dado que por (3.24) a sequência $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge forte para θ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, da limitação anterior, obtemos o resultado (3.29).

- Convergência do termo $\lambda \int_0^T (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^p u_m(t), v)\psi(t)dt$.

Dado que u_m converge forte para u em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, veja (3.24), pelo Teorema 2.6, existe uma subsequência de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$, que denotaremos da mesma

forma, tal

$$u_m \rightarrow u \quad \text{em q.t.p. de } Q.$$

Assim, pela continuidade da função $r(s) = |s|_{\mathbb{R}}^\rho s$, com $s \in \mathbb{R}$, segue que

$$|u_m|_{\mathbb{R}}^\rho u_m \rightarrow |u|_{\mathbb{R}}^\rho u \quad \text{em q.t.p. de } Q. \quad (3.30)$$

Por outro lado, de $V \hookrightarrow L^{2\rho+2}(\Omega)$, temos $L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^{2\rho+2}(\Omega))$.

Deste modo, observando que

$$\| |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t) \|^2 = \int_{\Omega} |u_m(t)|_{\mathbb{R}}^{2\rho+2} dx = \|u_m(t)\|_{L^{2\rho+2}(\Omega)}^{2\rho+2}$$

e que a sequência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V)$, resulta que

$$(|u_m|_{\mathbb{R}}^\rho u_m)_{m \in \mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.31)$$

Portanto, de (3.30), (3.31) e Lema de Lions (Lema 2.1), obtemos

$$|u_m|_{\mathbb{R}}^\rho u_m \rightharpoonup |u|_{\mathbb{R}}^\rho u \quad \text{em } L^2(Q),$$

isto é,

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u_m|_{\mathbb{R}}^\rho u_m \phi dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} |u|_{\mathbb{R}}^\rho u \phi dx dt,$$

para todo $\phi \in L^2(Q)$. Logo, segue o resultado para $\phi(t) = v\psi(t)$, ou seja,

$$\int_0^T (|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), v)\psi(t) dt \rightarrow \int_0^T (|u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u(t), v)\psi(t) dt,$$

para todo $v \in V_{m_0}$.

Feito a convergência de todos os termos de (3.25), fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^T (u''(t), v)\psi(t) dt + \int_0^T \alpha(t) [(\nabla u(t), \nabla v)\psi(t) + (\eta(x)u'(t), v)_{\Gamma_1}\psi(t)] dt \\ & + \int_0^T ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta(t), v)\psi(t) dt + \lambda \int_0^T (|u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u(t), v)\psi(t) dt = 0, \\ & \int_0^T (\theta'(t), w)\psi(t) dt + \int_0^T \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) (\nabla \theta(t), \nabla w)\psi(t) dt \\ & + \int_0^T ((\mathbf{a} \cdot \nabla)u'(t), w)\psi(t) dt + \int_0^T (\gamma(\theta(t)), w)\psi(t) dt = 0, \end{aligned} \right. \quad (3.32)$$

para todo $v \in V_{m_0}$, $w \in W_{m_0}$ e $\psi \in L^2(0, T)$. Por densidade, o sistema (3.32) vale para todo $v \in V$ e $w \in H_0^1(\Omega)$. Assim, fazendo $\phi(x, t) = \psi(t)v(x)$ e $\varphi(x, t) = \psi(t)w(x)$ temos a identidade integral (3.3), isto é, o sentido das soluções. Para finalizar, a regularidade $u \in L^\infty(0, T; H_\Delta(\Omega))$ segue por resultados de regularidade elíptica.

3.4 Verificação dos Dados Iniciais

Temos três condições iniciais a serem verificadas. Mostraremos que $u(x, 0) = u_0(x)$, $u'(x, 0) = u_1(x)$ e $\theta(x, 0) = \theta_0(x)$.

Inicialmente, precisamos de resultados que nos permitam calcular $u(x, t)$, $u'(x, t)$ e $\theta(x, t)$ no tempo $t = 0$. Para tal, observe que, sendo $u \in L^\infty(0, T; V)$ e $u' \in L^\infty(0, T; V)$, pelo Lema 2.2, resulta que $u \in C([0, T]; V)$, fazendo sentido calcular $u(x, 0)$. De forma análoga, observando que $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e $\theta' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, temos que $u' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $\theta \in C([0, T]; L^2(\Omega))$.

- Primeira caso: mostraremos que $u(x, 0) = u_0(x)$.

De (3.22),

$$\begin{aligned} u_m &\xrightarrow{*} u \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u'_m &\xrightarrow{*} u' \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m(t), \vartheta(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (u(t), \vartheta(t)) dt, \\ \int_0^T (u'_m(t), \vartheta(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (u'(t), \vartheta(t)) dt, \end{aligned} \tag{3.33}$$

para todo $\vartheta \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$. Em particular, tomando $\vartheta(x, t) = v(x)\psi'(t)$ em (3.33)₁ e $\vartheta(x, t) = v(x)\psi(t)$ em (3.33)₂, em que, $\psi \in C^1([0, T])$, com $\psi(0) = 1$ e

$\psi(T) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m(t), v) \psi'(t) dt &\rightarrow \int_0^T (u(t), v) \psi'(t) dt, \\ \int_0^T (u'_m(t), v) \psi(t) dt &\rightarrow \int_0^T (u'(t), v) \psi(t) dt, \end{aligned} \quad (3.34)$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Observando que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{(u_m(t), v) \psi(t)\} &= (u'_m(t), v) \psi(t) + (u_m(t), v) \psi'(t), \\ \frac{d}{dt} \{(u(t), v) \psi(t)\} &= (u'(t), v) \psi(t) + (u(t), v) \psi'(t), \end{aligned}$$

somando as duas equações de (3.34), temos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \{(u_m(t), v) \psi(t)\} dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} \{(u(t), v) \psi(t)\} dt,$$

ou seja,

$$(u_m(T), v) \psi(T) - (u_m(0), v) \psi(0) \rightarrow (u(T), v) \psi(T) - (u(0), v) \psi(0).$$

Portando, sendo $\psi(0) = 1$ e $\psi(T) = 0$,

$$(u_m(0), v) \rightarrow (u(0), v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega). \quad (3.35)$$

Por outro lado, dado que $u_m(0) \rightarrow u_0$ em $V \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e que toda convergência forte implica em convergência fraca, temos que

$$(u_m(0), v) \rightarrow (u_0, v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega). \quad (3.36)$$

Assim, de (3.35) e (3.36), resulta

$$(u(0) - u_0, v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega),$$

logo,

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

- Segundo caso: mostraremos que $\theta(x, 0) = \theta_0(x)$.

De (3.22),

$$\begin{aligned}\theta_m &\xrightarrow{*} \theta \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \theta'_m &\xrightarrow{*} \theta' \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^T (\theta_m(t), \vartheta(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (\theta(t), \vartheta(t)) dt, \\ \int_0^T (\theta'_m(t), \vartheta(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (\theta'(t), \vartheta(t)) dt,\end{aligned}\tag{3.37}$$

para todo $\vartheta \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$. Em particular, tomando $\vartheta(x, t) = v(x)\psi'(t)$ em (3.37)₁ e $\vartheta(x, t) = v(x)\psi(t)$ em (3.37)₂, em que, $\psi \in C^1([0, T])$, com $\psi(0) = 1$ e $\psi(T) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T (\theta_m(t), v)\psi'(t) dt &\rightarrow \int_0^T (\theta(t), v)\psi'(t) dt, \\ \int_0^T (\theta'_m(t), v)\psi(t) dt &\rightarrow \int_0^T (\theta'(t), v)\psi(t) dt,\end{aligned}\tag{3.38}$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Observando que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \{(\theta_m(t), v)\psi(t)\} &= (\theta'_m(t), v)\psi(t) + (\theta_m(t), v)\psi'(t), \\ \frac{d}{dt} \{(\theta(t), v)\psi(t)\} &= (\theta'(t), v)\psi(t) + (\theta(t), v)\psi'(t),\end{aligned}$$

somando as duas equações de (3.38), temos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \{(\theta_m(t), v)\psi(t)\} dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} \{(\theta(t), v)\psi(t)\} dt,$$

ou seja,

$$(\theta_m(T), v)\psi(T) - (\theta_m(0), v)\psi(0) \rightarrow (\theta(T), v)\psi(T) - (\theta(0), v)\psi(0).$$

Portando, sendo $\psi(0) = 1$ e $\psi(T) = 0$,

$$(\theta_m(0), v) \rightarrow (\theta(0), v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega).\tag{3.39}$$

Por outro lado, dado que $\theta_m(0) \rightarrow \theta_0$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e que toda convergência forte implica em convergência fraca, temos que

$$(\theta_m(0), v) \rightarrow (\theta_0, v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega). \quad (3.40)$$

Assim, de (3.39) e (3.40), resulta

$$(\theta(0) - \theta_0, v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega),$$

logo,

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

- Terceiro caso: mostraremos que $u'(x, 0) = u_1(x)$.

De (3.22),

$$\begin{aligned} u'_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u''_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^T (u'_m(t), \vartheta(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (u'(t), \vartheta(t)) dt, \\ \int_0^T (u''_m(t), \vartheta(t)) dt &\rightarrow \int_0^T (u''(t), \vartheta(t)) dt, \end{aligned} \quad (3.41)$$

para todo $\vartheta \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$. Em particular, tomando $\vartheta(x, t) = v(x)\psi'(t)$ em (3.41)₁ e $\vartheta(x, t) = v(x)\psi(t)$ em (3.41)₂, em que, $\psi \in C^1([0, T])$, com $\psi(0) = 1$ e $\psi(T) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T (u'_m(t), v)\psi'(t) dt &\rightarrow \int_0^T (u'(t), v)\psi'(t) dt, \\ \int_0^T (u''_m(t), v)\psi(t) dt &\rightarrow \int_0^T (u''(t), v)\psi(t) dt, \end{aligned} \quad (3.42)$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Observando que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{(u'_m(t), v)\psi(t)\} &= (u''_m(t), v)\psi(t) + (u'_m(t), v)\psi'(t), \\ \frac{d}{dt} \{(u'(t), v)\psi(t)\} &= (u''(t), v)\psi(t) + (u'(t), v)\psi'(t), \end{aligned}$$

somando as duas equações de (3.42), temos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \{(u'_m(t), v)\psi(t)\} dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} \{(u'(t), v)\psi(t)\} dt,$$

ou seja,

$$(u'_m(T), v)\psi(T) - (u'_m(0), v)\psi(0) \rightarrow (u'(T), v)\psi(T) - (u'(0), v)\psi(0).$$

Portando, sendo $\psi(0) = 1$ e $\psi(T) = 0$,

$$(u'_m(0), v) \rightarrow (u'(0), v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega). \quad (3.43)$$

Por outro lado, dado que $u'_m(0) \rightarrow u_1$ em $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e que toda convergência forte implica em convergência fraca, temos que

$$(u'_m(0), v) \rightarrow (u_1, v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega). \quad (3.44)$$

Assim, de (3.43) e (3.44), resulta

$$(u'(0) - u_1, v) \quad \text{para todo } v \in L^2(\Omega),$$

logo,

$$u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

3.5 Unicidade das Soluções

Utilizando o método da Energia, mostraremos que a solução é única. Suponha que $\{u, \theta\}$ e $\{\hat{u}, \hat{\theta}\}$ sejam duas soluções do problema (1.1)-(1.2) e defina $v := u - \hat{u}$

e $w := \theta - \hat{\theta}$. Então, $\{v, w\}$ satisfaz

$$\begin{cases}
 (v''(t), \varrho) + \alpha(t) [(\nabla v(t), \nabla \varrho) + (\eta(x)v'(t), \varrho)_{\Gamma_1}] + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)w(t), \varrho) \\
 \quad + \lambda(|u(t)|_{\mathbb{R}}^\varrho u(t), \varrho) - \lambda(|\hat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\varrho \hat{u}(t), \varrho) = 0, \\
 (w'(t), \varsigma) + \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) (\nabla \theta(t), \nabla \varsigma) - \beta \left(\int_{\Omega} \hat{\theta}(t) dx \right) (\nabla \hat{\theta}(t), \nabla \varsigma) \\
 \quad + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)v'(t), \varsigma) + (\gamma(\theta(t)) - \gamma(\hat{\theta}(t)), \varsigma) = 0, \\
 v(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \times]0, T[, \quad w(x, t) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times]0, T[, \\
 v(x, 0) = 0, \quad v'(x, 0) = 0 \quad \text{e } w(x, 0) = 0 \quad \text{em } \Omega.
 \end{cases} \tag{3.45}$$

Tomando $\varrho = 2v'(t)$ e $\varsigma = 2w(t)$ em (3.45) e observando que

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & (v''(t), 2v'(t)) = \frac{d}{dt}(v'(t), v'(t)) = \frac{d}{dt}|v'(t)|^2, \\
 (ii) \quad & (\nabla v(t), 2\nabla v'(t)) = \frac{d}{dt}(\nabla v(t), \nabla v(t)) = \frac{d}{dt}|\nabla v(t)|^2, \\
 (iii) \quad & \alpha(t)(\nabla v(t), 2\nabla v'(t)) = \frac{d}{dt} \left\{ \alpha(t)|\nabla v(t)|^2 \right\} - \alpha'(t)|\nabla v(t)|^2, \\
 (iv) \quad & (w'(t), 2w(t)) = \frac{d}{dt}(w(t), w(t)) = \frac{d}{dt}|w(t)|^2, \\
 (v) \quad & (\nabla \theta(t), \nabla w(t)) = (\nabla w(t) + \nabla \hat{\theta}(t), \nabla w(t)) = |\nabla w(t)|^2 + (\nabla \hat{\theta}(t), \nabla w(t)),
 \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{cases}
 \frac{d}{dt}|v'(t)|^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \alpha(t)|\nabla v(t)|^2 \right\} - \alpha'(t)|\nabla v(t)|^2 + \alpha(t)(\eta(x)v'(t), 2v'(t))_{\Gamma_1} \\
 \quad + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)w(t), 2v'(t)) + \lambda(|u(t)|_{\mathbb{R}}^\varrho u(t), 2v'(t)) - \lambda(|\hat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\varrho \hat{u}(t), 2v'(t)) = 0, \\
 \frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) |\nabla w(t)|^2 + 2 \left[\beta \left(\int_{\Omega} \theta dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \hat{\theta} dx \right) \right] (\nabla \hat{\theta}(t), \nabla w(t)) \\
 \quad + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)v'(t), 2w(t)) + (\gamma(\theta(t)) - \gamma(\hat{\theta}(t)), 2w(t)) = 0.
 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações do sistema anterior e fazendo uso das identidades e desigualdades a seguir

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & ((\mathbf{a} \cdot \nabla)w(t), 2v'(t)) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)v'(t), 2w(t)) = 0, \\
 (ii) \quad & 2\alpha_0\eta_0|v'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leq \alpha(t)(\eta(x)v'(t), 2v'(t))_{\Gamma_1}, \\
 (iii) \quad & 2\beta_0|\nabla w(t)|^2 \leq 2\beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) |\nabla w(t)|^2,
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) + 2\alpha_0\eta_0|v'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2\beta_0|\nabla w(t)|^2 &\leq \alpha'(t)|\nabla v(t)|^2 + (\gamma(\widehat{\theta}(t)) - \gamma(\theta(t)), 2w(t)) \\ &+ \lambda(|\widehat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^p \widehat{u}(t) - |u(t)|_{\mathbb{R}}^p u(t), 2v'(t)) + 2 \left[\beta \left(\int_{\Omega} \widehat{\theta} dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta dx \right) \right] (\nabla \widehat{\theta}(t), \nabla w), \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que,

$$E(t) = |v'(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla v(t)|^2 + |w(t)|^2. \quad (3.48)$$

A justificativa da identidade (3.46)₁ segue de forma análoga a dada para a identidade (3.7)₄. Quanto as demais, (3.46)₂ e (3.46)₃, seguem das hipóteses em (3.1).

Para prosseguir, a fim de aplicar a desigualdade de Gronwall, precisamos obter limitação para cada termo do lado direito da inequação (3.47).

- Limitação para o termo $\alpha'(t)|\nabla v(t)|^2$.

Temos que $0 < \alpha_0 \leq \alpha(t)$ e $\alpha(t)|\nabla v(t)|^2 \leq E(t)$, então,

$$\alpha'(t)|\nabla v(t)|^2 \leq |\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} \frac{\alpha(t)}{\alpha_0} |\nabla v(t)|^2 \leq \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} E(t).$$

- Limitação para o termo $(\gamma(\widehat{\theta}(t)) - \gamma(\theta(t)), 2w(t))$.

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, utilizando que γ é Lipschitz e que $|w(t)|^2 \leq E(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} |(\gamma(\widehat{\theta}(t)) - \gamma(\theta(t)), 2w(t))|_{\mathbb{R}} &\leq |\gamma(\widehat{\theta}(t)) - \gamma(\theta(t))| |2w(t)| \\ &\leq L|\widehat{\theta}(t) - \theta(t)| |2w(t)| \\ &= 2L|w(t)|^2 \leq 2L E(t). \end{aligned}$$

- Limitação para o termo $\lambda(|\hat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho \hat{u}(t) - |u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u(t), 2v'(t))$.

Definindo a função $r(s) = |s|_{\mathbb{R}}^\rho s$, com $s \in [a, b]$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in]0, 1[$, tal que, $r(b) - r(a) = r'((1-\xi)a + \xi b)(b-a)$. Sendo $r'(s) = (\rho+1)|s|_{\mathbb{R}}^\rho$, fazendo $a = u(x, t)$ e $b = \hat{u}(x, t)$, temos

$$\begin{aligned} & |(|\hat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho \hat{u}(t) - |u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u(t), v'(t))|_{\mathbb{R}} \leq \int_{\Omega} ||\hat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho \hat{u}(t) - |u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u(t)|_{\mathbb{R}} |v'(t)|_{\mathbb{R}} dx \\ & = (\rho + 1) \int_{\Omega} |(1 - \xi)u(t) + \xi\hat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho |\hat{u}(t) - u(t)|_{\mathbb{R}} |v'(t)|_{\mathbb{R}} dx \\ & \leq C \int_{\Omega} (|u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho + |\hat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho) |v(t)|_{\mathbb{R}} |v'(t)|_{\mathbb{R}} dx \\ & \leq C (|\nabla u(t)|^\rho + |\nabla \hat{u}(t)|^\rho) |\nabla v(t)| |v'(t)|, \end{aligned}$$

em que, a última passagem segue pelos mesmos argumentos aplicados no estudo da limitação do termo $-2\lambda(\rho + 1)(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u'_m(t), u''_m(t))$ na segunda estimativa. De fato, considerando as hipóteses para ρ em (3.1), a imersão continua de V em $H^1(\Omega)$ e resultados de imersões de espaços de Sobolev (veja Teorema 2.9), analisamos os seguintes casos:

(i) Se $n = 1$ e $0 < \rho < \infty$, temos que $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$. Logo,

$$\begin{aligned} ((|u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho + |\hat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho) |v(t)|_{\mathbb{R}} |v'(t)|_{\mathbb{R}}) & \leq (\|u(t)\|_{C(\bar{\Omega})}^\rho + \|\hat{u}(t)\|_{C(\bar{\Omega})}^\rho) \int_{\Omega} |v(t)|_{\mathbb{R}} |v'(t)|_{\mathbb{R}} dx \\ & \leq (\|u(t)\|_{C(\bar{\Omega})}^\rho + \|\hat{u}(t)\|_{C(\bar{\Omega})}^\rho) |v(t)| |v'(t)| \\ & \leq C (|\nabla u(t)|^\rho + |\nabla \hat{u}(t)|^\rho) |\nabla v(t)| |v'(t)|, \end{aligned}$$

em que, na primeira desigualdade, utilizamos a imersão de V em $C(\bar{\Omega})$. Na segunda, usamos a desigualdade de Hölder para o caso $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Na última desigualdade, utilizamos a continuidade da imersão de V em $C(\bar{\Omega})$ e a de V em $L^2(\Omega)$.

(ii) Se $n = 2$ e $\frac{1}{2} \leq \rho < \infty$ então $2 \leq 4\rho < \infty$. Consequentemente, temos que

$V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{4\rho}(\Omega)$ e $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} (||u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho + |\widehat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho)|v(t)|_{\mathbb{R}}, |v'(t)|_{\mathbb{R}}) &\leq (||u^\rho(t)||_{L^4(\Omega)} + \|\widehat{u}^\rho(t)\|_{L^4(\Omega)}) \|v(t)\|_{L^4(\Omega)} |v'(t)| \\ &= (||u(t)||_{L^{4\rho}(\Omega)}^\rho + \|\widehat{u}(t)\|_{L^{4\rho}(\Omega)}^\rho) \|v(t)\|_{L^4(\Omega)} |v'(t)| \\ &\leq C (|\nabla u(t)|^\rho + |\nabla \widehat{u}(t)|^\rho) |\nabla v(t)| |v'(t)|. \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade utilizamos Hölder, generalizado, para o caso $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$. Para mostrar que $u^\rho(t), \widehat{u}^\rho(t) \in L^4(\Omega)$, basta notar que $\|u^\rho(t)\|_{L^4(\Omega)} = \|u(t)\|_{L^{4\rho}(\Omega)}^\rho$ e usar a imersão continua de V em $L^{4\rho}(\Omega)$. Para mostrar que $v(t) \in L^4(\Omega)$ basta utilizar a imersão continua de $H^1(\Omega)$ em $L^4(\Omega)$. Quanto a $v'(t)$, segue de $u'(t), \widehat{u}'(t) \in L^2(\Omega)$. Na segunda desigualdade utilizamos a imersão continua de V em $L^{4\rho}(\Omega)$ e de V em $L^4(\Omega)$.

(iii) Se $n \geq 3$ e $\frac{1}{n} \leq \rho \leq \frac{2}{n-2}$ então $1 \leq n\rho \leq \frac{2n}{n-2}$. Consequentemente, temos que $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^{n\rho}(\Omega)$, com $q = \frac{2n}{n-2}$. Logo,

$$\begin{aligned} (||u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho + |\widehat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho)|v(t)|_{\mathbb{R}}, |v'(t)|_{\mathbb{R}}) &\leq (||u^\rho(t)||_{L^n(\Omega)} + \|\widehat{u}^\rho(t)\|_{L^n(\Omega)}) \|v(t)\|_{L^q(\Omega)} |v'(t)| \\ &= (||u(t)||_{L^{n\rho}(\Omega)}^\rho + \|\widehat{u}(t)\|_{L^{n\rho}(\Omega)}^\rho) \|v(t)\|_{L^q(\Omega)} |v'(t)| \\ &\leq C (|\nabla u(t)|^\rho + |\nabla \widehat{u}(t)|^\rho) |\nabla v(t)| |v'(t)|. \end{aligned}$$

Usamos a desigualdade generalizada de Hölder para o caso $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$. As justificativas são análogas ao caso anterior.

Assim, usando a desigualdade de Young e observando que $u, \widehat{u} \in L^\infty(0, T; V)$, obtemos uma constante positiva C , independente de t , tal que

$$2\lambda (|\widehat{u}(t)|_{\mathbb{R}}^\rho \widehat{u}(t) - |u(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u(t), v'(t))_{\mathbb{R}} dx \leq C |\nabla v(t)|^2 + C |v'(t)|^2 \leq CE(t).$$

- Limitação para o termo $2 \left[\beta \left(\int_{\Omega} \widehat{\theta}(t) dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) \right] (\nabla \widehat{\theta}(t), \nabla w(t))$.

Sendo β Lipschitz e $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que

$$\left| \beta \left(\int_{\Omega} \widehat{\theta} dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta dx \right) \right|_{\mathbb{R}} \leq L \left| \int_{\Omega} \widehat{\theta} dx - \int_{\Omega} \theta dx \right|_{\mathbb{R}} \leq L \|w(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq C |w(t)|.$$

Portanto, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Young com $p = q = 2$, $a = \frac{C}{\sqrt{\beta_0}} |\nabla \hat{\theta}(t)| |w(t)|$ e $b = \sqrt{\beta_0} |\nabla w(t)|$, e, lembrando que θ pertence a $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, resulta

$$\begin{aligned} 2 \left| \left[\beta \left(\int_{\Omega} \hat{\theta}(t) dx \right) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(t) dx \right) \right] (\nabla \hat{\theta}(t), \nabla w) \right|_{\mathbb{R}} &\leq C |w(t)| |\nabla \hat{\theta}(t)| |\nabla w(t)| \\ &\leq \frac{C^2}{\beta_0} |\nabla \hat{\theta}(t)|^2 |w(t)|^2 + \beta_0 |\nabla w(t)|^2 \leq CE(t) + \beta_0 |\nabla w(t)|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, feito a estimativa de cada termo do lado direito da inequação (3.47), obtemos uma constante positiva C , independente de t , tal que

$$\frac{d}{dt} E(t) + 2\alpha_0 \eta_0 |v'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \beta_0 |\nabla w(t)|^2 \leq \left(\frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0} + C \right) E(t). \quad (3.49)$$

Deste modo, dado que $\alpha' \in L^\infty(0, \infty)$ e $E(0) = 0$, aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$E(t) = |v'(t)|^2 + \alpha(t) |\nabla v(t)|^2 + |w(t)|^2 = 0 \quad \text{em } [0, T],$$

de onde concluimos a unicidade das soluções.

4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo vamos desenvolver a solução numérica do modelo em estudo para os casos em que o domínio Ω seja uni ou bidimensional. Para obter a solução numérica, utilizamos o método dos elementos finitos na parte espacial resultando em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) não linear.

Para resolver o sistema de EDO's, aplicamos o método de Diferenças Finitas, obtendo um sistema não linear, resolvido pelo método de Newton. Os métodos numéricos aplicados podem ser encontrados em RINCON; LIU (2011) e HUGHES (2012).

Para validar a implementação, vamos comparar a solução numérica gerada pelo programa com a solução exata do modelo. A fim de tornar possível esta comparação, dado que não é conhecido a solução exata, vamos acrescentar as funções fontes $f(x, t)$ e $g(x, t)$ no lado direito do modelo em estudo. Deste modo, para encontrar a solução exata, basta definir funções $u(x, t)$ e $\theta(x, t)$ que satisfaça as condições de fronteira e construir as demais funções (u_0 , u_1 , θ_0 , f e g) a partir das soluções. Uma vez validado a implementação, consideramos f e g identificativamente nulas, retornamos ao modelo original.

O modelo em estudo modificado é dado por

$$\begin{cases} u''(x, t) - \alpha(t)\Delta u(x, t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta(x, t) + \lambda|u(x, t)|^\rho u(x, t) = f(x, t), \\ \theta'(x, t) - \beta\left(\int_{\Omega} \theta(x, t) dx\right)\Delta\theta(x, t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'(x, t) + \gamma(\theta(x, t)) = g(x, t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Aplicado o método de Faedo-Galerkin, o problema aproximado consiste em

determinar $u_m : [0, T[\rightarrow V_m$, $\theta_m : [0, T[\rightarrow W_m$, representados por

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m c_i(t)v_i \quad \text{e} \quad \theta_m(t) = \sum_{i=1}^m d_i(t)w_i, \quad (4.2)$$

tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_m''(t), v) + \alpha(t) [(\nabla u_m(t), \nabla v) + (\eta(x)u_m'(t), v)_{\Gamma_1}] + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), v) \\ \quad + \lambda(|u_m(t)|_{\mathbb{R}}^\rho u_m(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V_m; \\ (\theta_m'(t), w) + \beta \left(\int_{\Omega} \theta_m(t) dx \right) (\nabla \theta_m(t), \nabla w) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)u_m'(t), w) \\ \quad + (\gamma(\theta_m(t)), w) = (g(t), w), \quad \forall w \in W_m; \\ u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ em } V \cap H^2(\Omega); \\ u_m'(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ em } V; \\ \theta_m(0) = \theta_{0m} \longrightarrow \theta_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.2) em (4.3) e considerando $v = v_j$, $w = w_j$ para $j = 1, \dots, m$, resulta em

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m c_i''(t)(v_i, v_j) + \alpha(t) \sum_{i=1}^m [c_i(t)(\nabla v_i, \nabla v_j) + c_i'(t)(\eta v_i, v_j)_{\Gamma_1}] \\ \quad + \sum_{i=1}^m d_i(t)((\mathbf{a} \cdot \nabla)w_i, v_j) + \lambda \left(\left| \sum_{k=1}^m c_k(t)v_k \right|_{\mathbb{R}}^\rho \sum_{i=1}^m c_i(t)v_i, v_j \right) = (f(t), v_j), \\ \sum_{i=1}^m d_i'(t)(w_i, w_j) + \beta \left(\sum_{k=1}^m d_k(t) \int_{\Omega} w_k dx \right) \sum_{i=1}^m d_i(t)(\nabla w_i, \nabla w_j) \\ \quad + \sum_{i=1}^m c_i'(t)((\mathbf{a} \cdot \nabla)v_i, w_j) + (\gamma(\sum_{k=1}^m d_k(t)w_k), w_j) = (g(t), w_j). \end{array} \right.$$

Denotando $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_m(t))^t$, $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_m(t))^t$ e

$$\begin{array}{ll} A_{i,j} = (v_i, v_j), & \bar{A}_{i,j} = (w_i, w_j), \\ K_{i,j} = (\nabla v_i, \nabla v_j), & \bar{K}_{i,j} = (\nabla w_i, \nabla w_j), \\ B_{i,j} = ((\mathbf{a} \cdot \nabla)w_i, v_j), & \bar{B}_{i,j} = ((\mathbf{a} \cdot \nabla)v_i, w_j), \\ R_j(c(t)) = \lambda \left(\left| \sum_{k=1}^m c_k(t)v_k \right|_{\mathbb{R}}^\rho \sum_{i=1}^m c_i(t)v_i, v_j \right), & S_j(d(t)) = (\gamma(\sum_{k=1}^m d_k(t)w_k), w_j), \\ F_j(t) = (f(t), v_j), & G_j(t) = (g(t), w_j), \\ E_{i,j} = (\eta v_i, v_j)_{\Gamma_1}, & \end{array} \quad (4.4)$$

a formulação (4.3) pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{cases} Ac''(t) + \alpha(t)Kc(t) + \alpha(t)Ec'(t) + B^td(t) + R(c(t)) = F(t), \\ \bar{A}d'(t) + \beta\left(\sum_{k=1}^m d_k(t) \int_{\Omega} w_k dx\right)\bar{K}d(t) + \bar{B}^t c'(t) + S(d(t)) = G(t). \end{cases} \quad (4.5)$$

4.1 Método dos Elementos Finitos

Observe que as matrizes e vetores definidas em (4.4) dependem, fundamentalmente, das bases dos espaços V_m , W_m . O método dos elementos finitos consiste, basicamente, em considerar as funções bases com suporte pequeno, de modo que, as matrizes definidas em (4.4) sejam esparsas. Assim, a resolução do sistema resultante, neste caso, (4.5), tem uma redução significativa no número de operações.

Fundamentalmente, primeiro discretizamos o domínio em sub-regiões Ω_e , denominadas elementos finitos, para então, em seguida, definirmos as funções bases.

4.1.1 Discretização do domínio

Como já dito, vamos gerar a solução numérica apenas para os casos uni e bidimensional. Assim sendo, neste trabalho, consideramos o domínio Ω , para cada dimensão, respectivamente por $]x_o, x_f[$ e $]x_o, x_f[\times]y_o, y_f[$. Em ambos os casos vamos tomar uma partição do domínio Ω em idênticas sub-regiões Ω_e , satisfazendo

$$\Omega = \left(\bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}_e\right)^\circ \quad \text{e} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad \text{se} \quad i \neq j, \quad (4.6)$$

sendo N_e é o numero total de elementos.

Para o caso unidimensional, particionando o domínio em N_e intervalos de mesmo comprimento Δx , temos $\Omega_e =]x_e, x_{e+1}[$, com $x_e = x_o + (e - 1)\Delta x$. Sendo os

intervalos idênticos, o comprimento de cada intervalo é dado por $\Delta x = (x_f - x_o)/N_e$. Os pontos x_A , $A = 1, \dots, N_e + 1$, são denominados nós globais. Por simplificação, quando conveniente, nos referimos aos nós globais apenas por seus índices.

Para o caso bidimensional, as sub-regiões geralmente são triângulos ou retângulos. Escolhemos trabalhar apenas com retângulos, definindo estes na forma $]x_i, x_{i+1}[\times]y_i, y_{i+1}[$, em que

$$\begin{aligned} x_i &= x_o + (i - 1)\Delta x, & i &= 1, \dots, N_x + 1, \\ y_j &= y_o + (j - 1)\Delta y, & j &= 1, \dots, N_y + 1, \end{aligned}$$

com $\Delta x = (x_f - x_o)/N_x$, $\Delta y = (y_f - y_o)/N_y$, sendo que, N_x e N_y são os números de partições dos intervalos $]x_o, x_f[$ e $]y_o, y_f[$, respectivamente. Assim, o número de elementos $N_e = N_x \times N_y$ e esta partição satisfaz (4.6).

De forma análoga ao caso unidimensional, cada ponto $\mathbf{x}_A = (x_i, y_j)$ é denotado um nó global e identificado unicamente por um número, digamos A . A numeração dos elementos e dos nós segue a lei de formação utilizada na malha dada na figura (4.1), ou seja, da esquerda para a direita e de baixo para cima. Note que a relação entre a numeração do nó A e suas coordenadas (x_i, y_j) é dada por $A = (j - 1) \times (N_x + 1) + i$.

	25	26	27	28	29	30
19	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	24
13	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	18
7	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	12
1	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	6

Figura 4.1: Malha de elementos retangulares.

4.1.2 Definindo as funções bases

Sob as considerações anteriores, tome uma malha para o domínio Ω . Para cada nó global A desta malha, vamos definir a função φ_A , uma função de interpolação linear por partes, satisfazendo a seguinte condição:

$$\varphi_A(B) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = B \\ 0, & \text{se } A \neq B \end{cases} \quad (4.7)$$

para todo nó B .

Note que se as funções das bases dos espaços V_m, W_m satisfizerem a condição (4.7), então, as soluções aproximadas, em um nó B qualquer, serão dadas por $u_m(x_B, t) = c_B(t)$ e $\theta_m(x_B, t) = d_B(t)$.

No caso unidimensional, a função φ_A é definida por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{A-1}}{\Delta x}, & \forall x \in]x_{A-1}, x_A[= \Omega_{A-1} \\ \frac{x_{A+1} - x}{\Delta x}, & \forall x \in]x_A, x_{A+1}[= \Omega_A \\ 0, & \forall x \notin]x_{A-1}, x_{A+1}[\end{cases} \quad (4.8)$$

e representada geometricamente na Figura 4.2.

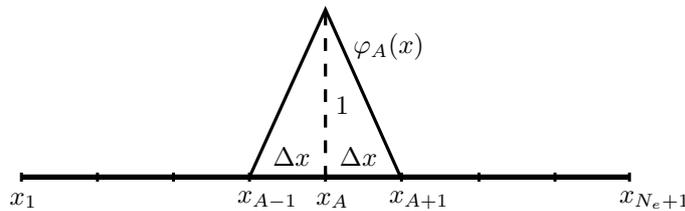


Figura 4.2: Função φ_A - caso unidimensional.

Observe que o nó x_A é extremidade de apenas dois elementos, sendo eles

$\Omega_{A-1} =]x_{A-1}, x_A[$ e $\Omega_A =]x_A, x_{A+1}[$. Assim, a definição de φ_A tem apenas três restrições, veja (4.8). Para o caso bidimensional, x_A é extremidade de quatro elementos, logo, vamos ter cinco restrições. Para facilitar a definição de φ_A vamos introduzir o conceito de φ local.

Considerando uma numeração local dos nós para cada sub-região $\Omega_e =]x_e, x_{e+1}[$, de modo que, $\Omega_e =]x_e, x_{e+1}[=]x_1^e, x_2^e[$. Na sub-região, definimos a função de interpolação local φ_a^e dada por

$$\varphi_a^e(x) = \begin{cases} \varphi_1^e = \frac{x_2^e - x}{\Delta x}, & \forall x \in]x_1^e, x_2^e[\\ \varphi_2^e = \frac{x - x_1^e}{\Delta x}, & \forall x \in]x_1^e, x_2^e[\\ 0, & \forall x \notin]x_1^e, x_2^e[\end{cases} \quad (4.9)$$

Deste modo, a função φ_A pode ser descrita em função de φ_a^e da seguinte forma:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \varphi_2^{A-1}, & \forall x \in]x_1^{A-1}, x_2^{A-1}[=]x_{A-1}, x_A[= \Omega_{A-1} \\ \varphi_1^A, & \forall x \in]x_1^A, x_2^A[=]x_A, x_{A+1}[= \Omega_A \\ 0, & \forall x \notin]x_1^{A-1}, x_2^{A+1}[\end{cases} \quad (4.10)$$

Note que φ_A restrita ao elemento Ω_{A-1} é a função φ_2^{A-1} e φ_A restrita ao elemento Ω_A é a função φ_1^A . A princípio, para o caso unidimensional, não há vantagem em definir as funções φ_A a partir das funções locais φ_a^e . A comodidade surge no caso bidimensional. Procedemos desta forma para facilitar a compreensão do caso bidimensional.

No caso bidimensional, para definir as funções φ_A teríamos que abrir em vários casos, tornando muito mais simples definir apenas as funções locais φ_a^e .

Para cada elemento $\Omega_e =]x_i, x_{i+1}[\times]y_j, y_{j+1}[$, considere uma numeração local dos nós, de modo que, suas coordenadas $\{\mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_2^e, \mathbf{x}_3^e, \mathbf{x}_4^e\}$ sejam dadas como na Figura 4.3, em que $\mathbf{x}_1^e = (x_1^e, y_1^e)$, $\mathbf{x}_2^e = (x_2^e, y_2^e)$, $\mathbf{x}_3^e = (x_3^e, y_3^e)$ e $\mathbf{x}_4^e = (x_4^e, y_4^e)$.

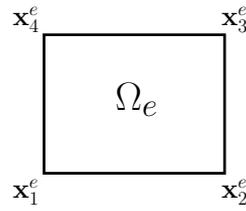


Figura 4.3: Numeração local dos nós no elemento retangular Ω_e .

Queremos definir as funções φ_a^e , de modo que, dado a e e , φ_a^e seja a restrição de φ_A sobre o elemento Ω_e para algum nó A . Deste modo, as funções φ_a^e devem satisfazer a condição (4.7), ou seja

$$\varphi_a^e(\mathbf{x}_b^e) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = b \\ 0, & \text{se } a \neq b \end{cases} \quad (4.11)$$

para todo nó local \mathbf{x}_b^e do elemento Ω_e .

Usando os polinômios de Lagrange, as funções φ_a^e no elemento Ω_e satisfazendo a condição (4.11) são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_1^e(x, y) &= \frac{(x - x_3^e)(y - y_3^e)}{(x_1^e - x_3^e)(y_1^e - y_3^e)}, & \varphi_2^e(x, y) &= \frac{(x - x_1^e)(y - y_3^e)}{(x_3^e - x_1^e)(y_1^e - y_3^e)}, \\ \varphi_3^e(x, y) &= \frac{(x - x_1^e)(y - y_1^e)}{(x_3^e - x_1^e)(y_3^e - y_1^e)}, & \varphi_4^e(x, y) &= \frac{(x - x_3^e)(y - y_1^e)}{(x_1^e - x_3^e)(y_3^e - y_1^e)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que, sendo o elemento Ω_e retangular, $\mathbf{x}_2^e, \mathbf{x}_4^e$ são definidas a partir de $\mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_3^e$, isto é, $\mathbf{x}_2^e = (x_3^e, y_1^e)$ e $\mathbf{x}_4^e = (x_1^e, y_3^e)$. Na Figura 4.4 temos os gráficos das funções locais, dispostas na mesma ordem em que suas equações foram dadas em (4.12).

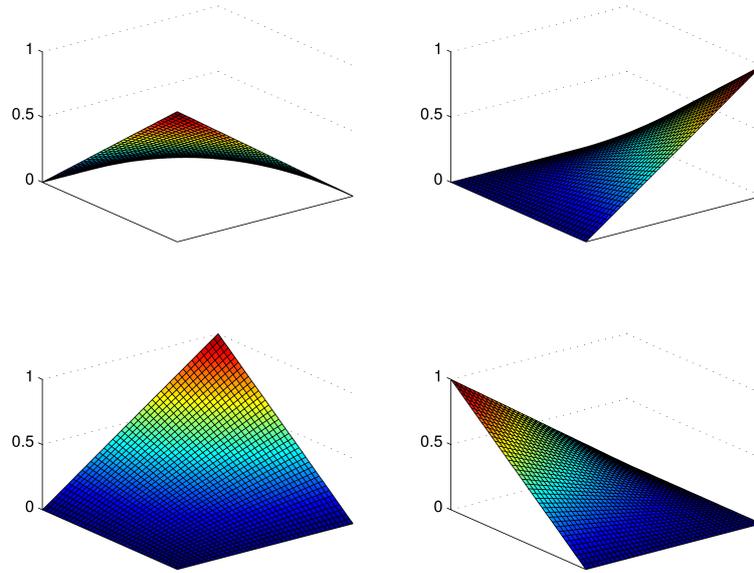


Figura 4.4: Funções locais φ_a^e , dispostas na ordem $\begin{matrix} \varphi_1^e & \varphi_2^e \\ \varphi_3^e & \varphi_4^e \end{matrix}$.

4.2 Solução do Sistema de EDO

Aplicado o método dos elementos finitos na parte espacial, resta resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias, sistema (4.5), dada por

$$\begin{cases} Ac''(t) + \alpha(t)Kc(t) + \alpha(t)Ec'(t) + B^t d(t) + R(c(t)) = F(t), \\ \overline{A}d'(t) + \beta \left(\sum_{k=1}^m d_k(t) \int_{\Omega} w_k dx \right) \overline{K}d(t) + \overline{B}^t c'(t) + S(d(t)) = G(t). \end{cases}$$

Por não conhecermos explicitamente o par de solução $\{c(t), d(t)\}$ do sistema anterior, vamos aplicar métodos numéricos para determinar as soluções aproximadas em cada tempo discreto t_n , sendo estes, gerados por uma discretização uniforme do intervalo de interesse $[0, T]$, ou seja, com $\Delta t = (t_{n+1} - t_n)$ constante.

Efetuada a discretização do intervalo de tempo, vamos aplicar o método de

diferenças finitas na equação diferencial discretizada a fim de obter uma aproximação para o par de incógnitas $\{c(t_{n+1}), d(t_{n+1})\}$.

No sistema (4.5), considerando a primeira equação nos tempos t_{n+1}, t_{n-1} e a segunda equação nos tempos t_{n+1}, t_n , tomando a média, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{c''^{n+1} + c''^{n-1}}{2} + K \frac{\alpha^{n+1} c^{n+1} + \alpha^{n-1} c^{n-1}}{2} + E \frac{\alpha^{n+1} c'^{n+1} + \alpha^{n-1} c'^{n-1}}{2} \\ + B^t \frac{d^{n+1} + d^{n-1}}{2} + \frac{R(c^{n+1}) + R(c^{n-1})}{2} = \frac{F^{n+1} + F^{n-1}}{2}, \\ \bar{A} \frac{d'^{n+1} + d'^n}{2} + \bar{K} \frac{\beta(d^{n+1})d^{n+1} + \beta(d^n)d^n}{2} + \bar{B}^t \frac{c'^{n+1} + c'^n}{2} \\ + \frac{S(d^{n+1}) + S(d^n)}{2} = \frac{G^{n+1} + G^n}{2}, \end{array} \right. \quad (4.13)$$

em que, consideramos a notação

$$\begin{aligned} c^n &= c(t_n), \quad c'^n = c'(t_n), \quad c''^n = c''(t_n), \quad \alpha^n = \alpha(t_n), \quad F^n = F(t_n), \\ d^n &= d(t_n), \quad d'^n = d'(t_n), \quad \beta(d^n) = \beta\left(\sum_{k=1}^m d_k(t_n) \int_{\Omega} w_k dx\right), \quad G^n = G(t_n). \end{aligned}$$

É importante ressaltar que no sistema anterior não fizemos aproximações no tempo e que ambas as equações estão acopladas, isto é, a primeira equação depende do termo d^{n+1} e a segunda do termo c'^{n+1} . Note ainda que, se tomarmos aproximações apenas para os termos com derivadas não conseguiremos quebrar o acoplamento. Para tal, vamos considerar, além das aproximações para as derivadas, uma aproximação para o termo $(d^{n+1} + d^{n-1})/2$. Segue as aproximações que vamos utilizar.

- Aproximação para o termo $\frac{c''^{n+1} + c''^{n-1}}{2}$. Das expansões em séries de Taylor da função $c''(t)$,

$$\begin{aligned} c''^{n+1} &= c''^n + (\Delta t)c'''^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!}c^{(iv)n} + \frac{(\Delta t)^3}{3!}c^{(v)n} + \dots \\ c''^{n-1} &= c''^n - (\Delta t)c'''^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!}c^{(iv)n} - \frac{(\Delta t)^3}{3!}c^{(v)n} + \dots \end{aligned}$$

temos

$$\frac{c'^{m+1} + c'^{m-1}}{2} = c'^m + \frac{(\Delta t)^2}{2!} c^{(iv)n} + \dots$$

Assim, utilizando uma aproximação de ordem dois para o termo c'^m , obtemos que

$$\frac{c'^{m+1} + c'^{m-1}}{2} = \frac{c^{n+1} - 2c^n + c^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \mathcal{O}(2).$$

- Aproximação para o termo $\frac{\alpha^{n+1}c'^{m+1} + \alpha^{n-1}c'^{m-1}}{2}$. Utilizando diferença atrasada para o termo c'^{n+1} e adiantada para c'^{n-1} , ambas de ordem dois, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^{n+1}}{2} \left(\frac{3c^{n+1} - 4c^n + c^{n-1}}{2(\Delta t)} + \mathcal{O}(2) \right) + \frac{\alpha^{n-1}}{2} \left(\frac{-c^{n+1} + 4c^n - 3c^{n-1}}{2(\Delta t)} + \mathcal{O}(2) \right) \\ &= \frac{1}{2(\Delta t)} \left(\frac{3\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1}}{2} c^{n+1} - 2(\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1})c^n + \frac{\alpha^{n+1} - 3\alpha^{n-1}}{2} c^{n-1} \right) + \mathcal{O}(2). \end{aligned}$$

- Aproximações para os termos $\frac{d'^{n+1} + d'^n}{2}$ e $\frac{c'^{m+1} + c'^n}{2}$. Utilizando diferença atrasada para o termo d'^{n+1} e central para d'^n , temos

$$\begin{aligned} \frac{d'^{n+1} + d'^n}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{3d^{n+1} - 4d^n + d^{n-1}}{2(\Delta t)} + \mathcal{O}(2) + \frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2(\Delta t)} + \mathcal{O}(2) \right) \\ &= \frac{d^{n+1} - d^n}{(\Delta t)} + \mathcal{O}(2). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{c'^{m+1} + c'^n}{2} = \frac{c^{n+1} - c^n}{(\Delta t)} + \mathcal{O}(2).$$

- Aproximação para o termo $\frac{d'^{n+1} + d'^{n-1}}{2}$. Das expansões em séries de Taylor da função $d(t)$,

$$\begin{aligned} d^{n+1} &= d^n + (\Delta t)d'^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!} d''^n + \frac{(\Delta t)^3}{3!} d'''^n + \dots \\ d^{n-1} &= d^n - (\Delta t)d'^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!} d''^n - \frac{(\Delta t)^3}{3!} d'''^n + \dots \end{aligned}$$

temos

$$\frac{d'^{n+1} + d'^{n-1}}{2} = d^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!} d''^n + \frac{(\Delta t)^4}{4!} d^{(iv)n} + \dots$$

Deste modo, d^n é uma aproximação de ordem dois para o termo $(d^{n+1} + d^{n-1})/2$, e o mais importante, esta aproximação nos permite desacoplar o sistema (4.13), dado que a primeira equação não vai mais depender da incógnita d^{n+1} .

Substituindo as aproximações anteriores em (4.13) e multiplicando a primeira equação por $2(\Delta t)^2$ e a segunda por $2(\Delta t)$, obtemos

$$\begin{cases} M_1^n c^{n+1} + (\Delta t)^2 R(c^{n+1}) + L_1^n = 0, \\ [2\bar{A} + (\Delta t)\beta(d^{n+1})\bar{K}]d^{n+1} + (\Delta t)S(d^{n+1}) + 2\bar{B}^t c^{n+1} + L_2^n = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

em que

$$\begin{aligned} M_1^n &= 2A + (\Delta t)^2 \alpha^{n+1} K + (\Delta t) \frac{3\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1}}{2} E, \\ M_2^n &= 2A + (\Delta t)^2 \alpha^{n-1} K + (\Delta t) \frac{\alpha^{n+1} - 3\alpha^{n-1}}{2} E, \\ L_1^n &= M_2^n c^{n-1} + (\Delta t)^2 R(c^{n-1}) - [4A + 2(\Delta t)(\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1})E]c^n \\ &\quad + 2(\Delta t)^2 B^t d^n - (\Delta t)^2 (F^{n+1} + F^{n-1}), \\ L_2^n &= [-2\bar{A} + (\Delta t)\beta(d^n)\bar{K}]d^n + (\Delta t)S(d^n) - 2\bar{B}^t c^n - (\Delta t)(G^{n+1} + G^n). \end{aligned}$$

No primeiro passo de tempo, ou seja, fazendo $n = 1$, o sistema (4.14) precisa ser ligeiramente modificado. Estamos numerando a discretização do intervalo de tempo $[0, T]$, de modo que, o primeiro nó é t_1 . Assim, note que o termo $c^0 = c(-dt)$ não é conhecido. Para contornar esta situação utilizamos diferença central para aproximar o termo $c'(t_1)$, que é um termo dado pelas condições iniciais, obtendo uma aproximação de ordem dois para c^0 , dada por

$$c^0 \approx c^2 - 2(\Delta t)c^1. \quad (4.15)$$

Substituindo (4.15) em (4.14), para $n = 1$, o sistema resultante é dado por

$$\begin{cases} [M_1^n + M_2^n]c^{n+1} + (\Delta t)^2 R(c^{n+1}) + (\Delta t)^2 R(c^{n+1} - 2(\Delta t)c^n) + \bar{L}_1^n = 0, \\ [2\bar{A} + (\Delta t)\beta(d^{n+1})\bar{K}]d^{n+1} + (\Delta t)S(d^{n+1}) + 2\bar{B}^t c^{n+1} + L_2^n = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

em que

$$\begin{aligned}\bar{L}_1^n = & M_2^n(-2(\Delta t)c'^n) - [4A + 2(\Delta t)(\alpha^{n+1} - \alpha^{n-1})E]c^n \\ & + 2(\Delta t)^2 B^t d^n - (\Delta t)^2(F^{n+1} + F^{n-1})\end{aligned}$$

e as demais matrizes e vetores não são alteradas.

Sendo os sistemas (4.16), (4.14) não lineares, dado n , para encontrarmos o par de solução $\{c^{n+1}, d^{n+1}\}$, vamos utilizar o método de Newton.

4.2.1 Solução do sistema não linear

Para cada passo de tempo n , encontrar a solução do sistema (4.16) ou (4.14) se resume em encontrar $X = c^{n+1}$, $Y = d^{n+1}$ tais que $F(X) = 0$ e $G(Y) = 0$. Para tal, basta definir a função F utilizando a primeira equação do sistema e G a segunda, como pode ser visto a seguir

$$\begin{aligned}F(X) = & [M_1^n + M_2^n]X + (\Delta t)^2 R(X) + (\Delta t)^2 R(X - 2(\Delta t)c'^n) + \bar{L}_1^n, & \text{se } n = 1 \\ F(X) = & M_1^n X + (\Delta t)^2 R(X) + L_1^n, & \text{se } n \geq 2 \\ G(Y) = & [2\bar{A} + (\Delta t)\beta(Y)\bar{K}]Y + (\Delta t)S(Y) + 2\bar{B}^t X + L_2^n, & \text{se } n \geq 1\end{aligned}$$

sendo que, encontrado X que satisfaça $F(X) = 0$, X se torna uma variável conhecida para a função G .

Para encontrar a raiz da função F (analogamente para G), vamos utilizar o método de Newton: partindo da solução no tempo n como aproximação inicial, resolvemos o sistema linear

$$JF(X) \cdot s = -F(X) \tag{4.17}$$

e obtemos $X = s + X$ uma nova aproximação para X . A matriz $JF(X)$ é dada por

$$JF(X) = \begin{bmatrix} \nabla^t F_1(X) \\ \nabla^t F_2(X) \\ \vdots \\ \nabla^t F_m(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(X) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(X) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_m}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(X) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(X) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_m}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial X_1}(X) & \frac{\partial F_m}{\partial X_2}(X) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial X_m}(X) \end{bmatrix}.$$

Para cada passo de tempo, temos que montar e resolver o sistema linear (4.17), tanto para a F quanto para a G , por várias vezes. Assim, é de suma importância que estas montagens e soluções sejam de baixo custo computacional.

Estando o programa implementado em Matlab, para a solução dos sistemas lineares utilizamos o solver do Matlab. Quanto a montagem, as derivadas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X) &= [M_1^n + M_2^n]_{i,j} + (\Delta t)^2 \frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X) + (\Delta t)^2 \frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X - 2(\Delta t)c^n), & \text{se } n = 1 \\ \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X) &= [M_1^n]_{i,j} + (\Delta t)^2 \frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X), & \text{se } n \geq 2 \\ \frac{\partial G_i}{\partial Y_j}(Y) &= (\Delta t) \frac{\partial \beta}{\partial Y_j}(Y) \sum_{k=1}^m \bar{K}_{i,k} Y_k + [2\bar{A} + (\Delta t)\beta(Y)\bar{K}]_{i,j} + (\Delta t) \frac{\partial S_i}{\partial Y_j}(Y), & \text{se } n \geq 1 \end{aligned}$$

em que, a menos dos termos

$$\frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X), \quad \frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X - 2(\Delta t)c^n), \quad \frac{\partial S_i}{\partial Y_j}(Y), \quad \frac{\partial \beta}{\partial Y_j}(Y) \quad (4.18)$$

todos os demais termos são conhecidos. Consequentemente, o custo de montar $JF(X)$ e $JG(Y)$ recai sob a determinação dos termos em (4.18). Felizmente, como veremos a seguir, os termos em (4.18) são facilmente calculados.

- Calculando $\frac{\partial \beta}{\partial Y_j}(Y)$. Sendo $\beta(Y) = \beta\left(\sum_{k=1}^m Y_k \int_{\Omega} w_k dx\right)$, temos que

$$\frac{\partial \beta}{\partial Y_j}(Y) = \beta' \left(\sum_{k=1}^m Y_k \int_{\Omega} w_k dx \right) \int_{\Omega} w_j dx.$$

- Calculando $\frac{\partial S_i}{\partial Y_j}(Y)$. Dado que $S_i(Y) = \left(\gamma \left(\sum_{k=1}^m Y_k w_k \right), w_i \right)$, obtemos

$$\frac{\partial S_i}{\partial Y_j}(Y) = \left(\gamma' \left(\sum_{k=1}^m Y_k w_k \right) w_j, w_i \right).$$

Percorrendo i e j , a equação anterior nos fornece uma matriz. Note que a lei de formação desta matriz é semelhante a da matriz $\bar{A}_{i,j}$, dada por (w_i, w_j) . Não obstante, a forma de se calcular ambas é a mesma.

- Calculando $\frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X)$ e $\frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X - 2(\Delta t)c^n)$. O cálculo e o custo destes termos são análogos ao caso anterior. Definindo a função $r(y) = \lambda|y|^\rho y$, com $y \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X) &= \left(r' \left(\sum_{k=1}^m X_k v_k \right) v_j, v_i \right), \\ \frac{\partial R_i}{\partial X_j}(X - 2(\Delta t)c^n) &= \left(r' \left(\sum_{k=1}^m (X - 2(\Delta t)c^n)_k v_k \right) v_j, v_i \right). \end{aligned}$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Vamos avaliar a implementação da solução numérica de duas formas. Na primeira, considerando o modelo alterado, vamos analisar o erro entre a solução numérica e a solução exata. Na segunda, fazendo f e g identicamente nulas, vamos avaliar o comportamento da solução numérica do modelo original. A linguagem computacional utilizada foi o Matlab.

Para construir as soluções do modelo alterado, basta tomar funções $u(x, t)$ e $\theta(x, t)$ que satisfaçam as condições na fronteira, e a partir delas, construir os dados de entrada u_0 , u_1 , θ_0 , f e g . Para avaliar o comportamento do erro, consideramos diversas discretizações para o espaço e para o tempo, buscando assim, estimar a taxa de convergência do mesmo.

Considerando o modelo original (f e g iguais a zero), não temos a solução exata para comparar com a numérica. Assim, um procedimento numérico utilizado em RINCON; LIU (2011) é considerar como solução exata a solução numérica gerada com uma discretização suficientemente refinada. Como no caso anterior, vamos estimar a taxa de convergência utilizando como solução exata a solução refinada.

Neste trabalho, não realizamos um estudo teórico de estimativa de erro da solução numérica do modelo em estudo. Em RINCON; LIU (2011), foram realizadas estimativas de erro para as soluções numéricas das equações do calor e da onda, ambas lineares e desacopladas. No estudo em questão, para ambas as equações, foi obtido um erro de ordem $\mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$, utilizando a norma de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, funções bases lineares por partes e aproximações de diferenças finitas de ordem dois no tempo.

Como utilizamos funções bases lineares por partes e aproximações de diferenças finitas de ordem dois no tempo, assim como para os modelos lineares em RINCON; LIU (2011), gostaríamos de obter ordem dois no tempo e no espaço.

Para as simulações dos modelos alterados, dado que vamos escolhemos o par de solução $\{u(x, t), \theta(x, t)\}$, vamos tomar soluções que, ao longo do tempo $t \in [0, T]$, variam pouco em ordem de grandeza. Deste modo, sendo pequena a variação, medimos os erros das soluções aproximadas u^h e θ^h por

$$\begin{aligned} Erro(u^h) &= \|u - u^h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \\ Erro(\theta^h) &= \|\theta - \theta^h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para o modelo original, nas simulações realizadas, observamos uma grande variação na ordem de grandeza das soluções. Neste caso, medimos os erros de forma relativa, isto é, consideramos

$$\begin{aligned} Erro(u^h) &= \max_{t_i \in [0, T]} \left\{ \frac{\|u(t_i) - u^h(t_i)\|_{L^2(\Omega)}}{\|u(t_i)\|_{L^2(\Omega)}} \right\}, \\ Erro(\theta^h) &= \max_{t_i \in [0, T]} \left\{ \frac{\|\theta(t_i) - \theta^h(t_i)\|_{L^2(\Omega)}}{\|\theta(t_i)\|_{L^2(\Omega)}} \right\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pelas escolhas tomadas (norma, base e aproximações por diferenças finitas de ordem dois no tempo) a taxa de convergência do erro é, no máximo, quadrática no espaço e no tempo. A fim de estimar a taxa, consideramos discretizações idênticas para o espaços e tempo, denotadas por h_i . Para cada h_i , seja E_i o erro da solução aproximada, relativo a u^h ou θ^h , como definidos em (5.1) e (5.2). Sendo ambas as discretizações, para o espaço e tempo, iguais a h_i , temos que

$$E_i \approx C(h_i)^p,$$

em que, p é taxa de convergência que queremos determinar e C é uma constante

positiva independente de h_i . Assim, dados h_i, h_{i+1} , com $h_i = 2h_{i+1}$, obtemos que

$$\frac{E_i}{E_{i+1}} \approx \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} \right)^p = 2^p \Rightarrow p \approx \frac{\log \left(\frac{E_i}{E_{i+1}} \right)}{\log 2}.$$

Vale lembrar que as condições na fronteira a serem satisfeitas são

$$\begin{cases} u(x, t) = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times]0, T[, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \eta(x)u'(x, t) = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \theta(x, t) = 0 & \text{sobre } \Gamma \times]0, T[. \end{cases}$$

5.1 Caso Unidimensional - Modelo Alterado

Nessa seção, em todas as simulações realizadas, consideramos o tempo final $T = 1$, o espaço $\Omega =]0, 1[$, $\Gamma_0 = \{0\}$ e $\Gamma_1 = \{1\}$. Desta forma, observe que tomar $\Delta x = 2^{-i}$ e $\Delta t = 2^{-j}$ é equivalente a tomar $N_x = 2^i$ e $N_t = 2^j$, em que, N_x e N_t são, respectivamente, os números de discretizações dos intervalos de espaço e tempo.

Para facilitar, vamos reescrever a seguir o modelo alterado, ou seja, o sistema de equações original acrescido das funções f e g .

$$\begin{cases} u''(x, t) - \alpha(t)\Delta u(x, t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta(x, t) + \lambda|u(x, t)|^\rho u(x, t) = f(x, t), \\ \theta'(x, t) - \beta \left(\int_{\Omega} \theta(x, t) dx \right) \Delta \theta(x, t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'(x, t) + \gamma(\theta(x, t)) = g(x, t). \end{cases}$$

Exemplo 1: Consideramos

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= t + 1, \quad \mathbf{a} = 1, \quad \lambda = 1, & u(x, t) &= \sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right)e^{\frac{3\pi}{4\eta}t}, \\ \beta(y) &= y^2 + 1, \quad \gamma(y) = y^2, \quad \eta = 1, & \theta(x, t) &= \sin(\pi x)e^{\frac{3\pi}{4\eta}t}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Na Tabela 5.1, fazendo Δx igual a Δt , mostramos as taxas de convergência dos erros, em u^h e θ^h , para diversos valores de ρ . Os resultados nos mostram que,

para os dados de entrada em (5.3), a ordem de convergência do erro associado aos métodos aplicados é quadrática no tempo e no espaço.

Na Figura 5.1, ambos os gráficos descrevem o comportamento do erro da solução numérica u^h para $\rho = 2$ com solução exata e demais funções de entrada definidas em (5.3). No primeiro gráfico, escolhemos três discretizações para o espaço. O gráfico mostra a evolução do erro ao longo das várias discretizações no tempo para cada discretização do espaço. No segundo, fizemos o inverso, escolhemos três discretizações para o tempo. Neste gráfico mostramos o comportamento do erro ao longo das discretizações para o espaço para cada discretização do tempo. Na Figura 5.2 fizemos a mesma análise anterior para θ^h .

$\Delta x = \Delta t$	p_{u^h}				p_{θ^h}			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-3}	—	—	—	—	—	—	—	—
2^{-4}	1.9991	1.9954	2.1437	2.0181	2.0139	2.0139	2.0154	2.0124
2^{-5}	2.0088	2.0090	2.0588	2.0129	2.0035	2.0035	2.0047	2.0050
2^{-6}	2.0065	2.0070	2.0201	1.9828	2.0009	2.0009	2.0013	1.9971
2^{-7}	2.0037	2.0040	2.0084	2.0185	2.0002	2.0002	2.0003	1.9989
2^{-8}	2.0020	2.0021	2.0039	2.0077	2.0000	2.0000	2.0000	1.9999
2^{-9}	2.0010	1.9905	1.9968	2.0024	2.0000	2.0000	1.9996	2.0000
2^{-10}	2.0005	1.3609	0.8815	1.5859	1.9999	2.0042	2.0243	1.9960
2^{-11}	2.0009	2.0012	0.4118	0.0625	2.0000	1.9999	1.9876	1.8860
2^{-12}	1.9977	2.0016	2.0020	1.0704	2.0002	2.0002	1.9997	2.1264

Tabela 5.1: **Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1.** Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.3). O erro pode ser visto na Tabela (5.2).

$\Delta x = \Delta t$	$-\log_{10} \left(\ u - u^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(0,1))} \right)$				$-\log_{10} \left(\ \theta - \theta^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(0,1))} \right)$			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-3}	0.8149	0.8906	1.1461	1.2016	1.1886	1.1879	1.1874	1.1873
2^{-4}	1.4167	1.4913	1.7914	1.8091	1.7949	1.7942	1.7941	1.7931
2^{-5}	2.0215	2.0961	2.4112	2.4151	2.3980	2.3973	2.3976	2.3967
2^{-6}	2.6255	2.7002	3.0193	3.0120	3.0004	2.9997	3.0000	2.9979
2^{-7}	3.2287	3.3035	3.6239	3.6196	3.6025	3.6018	3.6022	3.5996
2^{-8}	3.8314	3.9062	4.2272	4.2240	4.2045	4.2039	4.2043	4.2017
2^{-9}	4.4337	4.5054	4.8283	4.8269	4.8066	4.8060	4.8062	4.8037
2^{-10}	5.0360	4.9151	5.0937	5.3043	5.4087	5.4093	5.4156	5.4046
2^{-11}	5.6383	5.5176	5.2177	5.3231	6.0107	6.0114	6.0140	5.9724
2^{-12}	6.2397	6.1201	5.8203	5.6453	6.6129	6.6135	6.6160	6.6125

Tabela 5.2: **Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1.** Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.3).

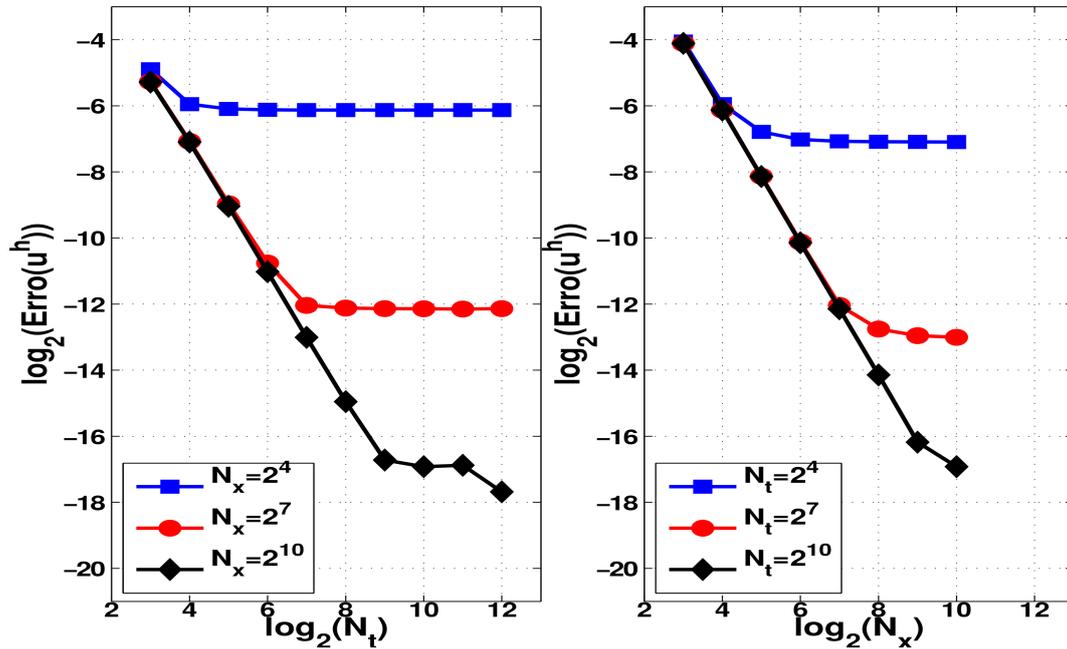


Figura 5.1: **Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1.** Comportamento do erro da solução numérica u^h para $\rho = 2$ com solução exata e demais funções de entrada definidas em (5.3). $\text{Erro}(u^h) = \|u - u^h\|_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$.

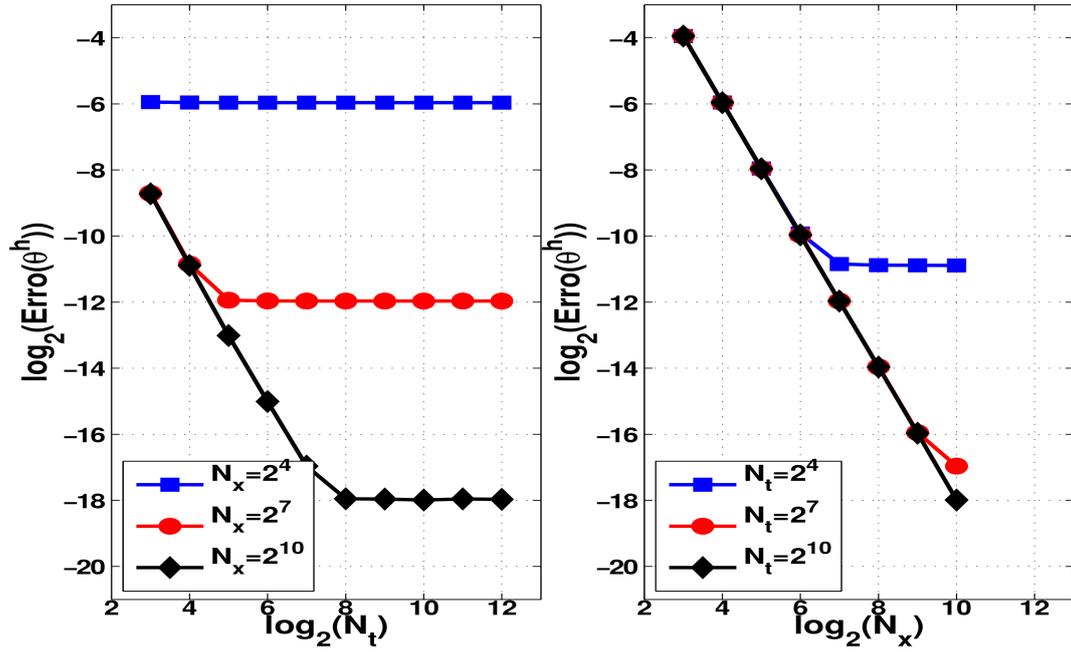


Figura 5.2: Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1. Comportamento do erro da solução numérica θ^h para $\rho = 2$ com solução exata e demais funções de entrada definidas em (5.3). $\text{Erro}(\theta^h) = \|\theta - \theta^h\|_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$.

Exemplo 2: Consideramos

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= t + 1, \quad \mathbf{a} = 1, \quad \lambda = 1, & u(x, t) &= x^2(x - 1)^2 e^t, \\ \beta(y) &= y^2 + 1, \quad \gamma(y) = y^2, \quad \eta = 1, & \theta(x, t) &= x^2(x - 1)^2 e^t. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Assim como no exemplo 1, a Tabela 5.3 nos fornece as taxas de convergência dos erros de u^h e θ^h para diversos valores de ρ . Os erros podem ser vistos na Tabela 5.4.

$\Delta x = \Delta t$	p_{u^h}				p_{θ^h}			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-3}	–	–	–	–	–	–	–	–
2^{-4}	1.9999	1.9964	1.9941	1.9937	1.9094	1.9172	1.9172	1.9171
2^{-5}	2.0029	1.9978	1.9957	1.9955	1.9897	1.9950	1.9947	1.9947
2^{-6}	1.9997	1.9991	1.9986	1.9984	2.0183	2.0182	2.0180	2.0180
2^{-7}	2.0003	1.9955	1.9979	1.9986	1.9955	1.9974	1.9962	1.9955
2^{-8}	2.0000	1.9995	1.9993	1.9992	2.0007	2.0006	2.0006	2.0006
2^{-9}	2.0018	2.0016	2.0016	2.0016	1.9983	1.9983	1.9982	1.9982
2^{-10}	2.0000	1.9999	1.9998	1.9998	1.9744	1.9739	1.9738	1.9738
2^{-11}	2.0003	2.0002	2.0001	2.0001	1.9994	1.9994	1.9994	1.9994
2^{-12}	2.0053	2.0038	2.0034	2.0034	1.9922	1.9917	1.9916	1.9916

Tabela 5.3: **Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 2.** Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.4). O erro pode ser visto na Tabela (5.4).

$\Delta x = \Delta t$	$-\log_{10} \left(\ u - u^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(0,1))} \right)$				$-\log_{10} \left(\ \theta - \theta^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(0,1))} \right)$			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-3}	3.3957	3.4237	3.4285	3.4291	3.2787	3.2785	3.2768	3.2763
2^{-4}	3.9978	4.0247	4.0288	4.0293	3.8535	3.8557	3.8539	3.8534
2^{-5}	4.6007	4.6261	4.6296	4.6300	4.4524	4.4562	4.4544	4.4538
2^{-6}	5.2027	5.2279	5.2312	5.2315	5.0600	5.0638	5.0618	5.0613
2^{-7}	5.8049	5.8286	5.8326	5.8332	5.6607	5.6650	5.6628	5.6620
2^{-8}	6.4069	6.4305	6.4345	6.4350	6.2630	6.2673	6.2650	6.2643
2^{-9}	7.0095	7.0330	7.0370	7.0375	6.8645	6.8688	6.8665	6.8658
2^{-10}	7.6116	7.6350	7.6390	7.6395	7.4589	7.4630	7.4607	7.4599
2^{-11}	8.2137	8.2372	8.2411	8.2416	8.0608	8.0649	8.0626	8.0618
2^{-12}	8.8174	8.8404	8.8442	8.8447	8.6605	8.6645	8.6621	8.6613

Tabela 5.4: **Caso unidimensional - Modelo alterado - Exemplo 2.** Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.4).

5.2 Caso Unidimensional - Modelo Original

Nessa seção, vamos estudar o comportamento do erro do modelo original, ou seja, com $f = g = 0$. Consideramos como solução exata a gerada para o caso em que $N_x = N_t = 2^9$. Assim como na seção anterior, tomando o tempo final $T = 1$, o espaço $\Omega =]0, 1[$, $\Gamma_0 = \{0\}$, $\Gamma_1 = \{1\}$ e vamos calcular as taxas de convergência dos erros associados as soluções numéricas u^h e θ^h para diversos valores de ρ .

Exemplo 1: Seja

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= t + 1, & u(x, 0) &= \sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right), \\ \beta(y) &= y^2 + 1, \quad \gamma(y) = y^2, & u'(x, 0) &= \frac{3\pi}{4\eta} \sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right), \\ \mathbf{a} &= 1, \quad \lambda = 1, \quad \eta = 1, & \theta(x, 0) &= \sin(\pi x). \end{aligned} \quad (5.5)$$

A Tabela 5.5 nos fornece as taxas de convergência dos erros associado as soluções numéricas u^h e θ^h , para diversos valores de ρ , com os dados de entrada em (5.5).

$\Delta x = \Delta t$	p_{u^h}				p_{θ^h}			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-4}	–	–	–	–	–	–	–	–
2^{-5}	1.8456	1.8473	1.8501	1.8544	1.7046	1.8910	2.0338	2.1057
2^{-6}	1.8603	1.8746	1.8835	1.8913	1.7766	1.6415	1.5577	1.5529
2^{-7}	1.9636	1.9764	1.9853	1.9924	2.0719	2.0756	2.0760	2.0764
2^{-8}	2.1478	2.1689	2.1898	2.2073	2.2729	2.3166	2.3196	2.3214

Tabela 5.5: **Caso unidimensional - Modelo original - Exemplo 1.** Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.5). O erro pode ser visto na Tabela 5.6.

$\Delta x = \Delta t$	$Erro(u^h)$				$Erro(\theta^h)$			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-4}	0.0326	0.0343	0.0367	0.0400	0.7636	0.8591	0.9359	1.0035
2^{-5}	0.0091	0.0095	0.0102	0.0111	0.2343	0.2316	0.2286	0.2332
2^{-6}	0.0025	0.0026	0.0028	0.0030	0.0684	0.0742	0.0776	0.0795
2^{-7}	0.0006	0.0007	0.0007	0.0007	0.0163	0.0176	0.0184	0.0188
2^{-8}	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0034	0.0035	0.0037	0.0038

Tabela 5.6: **Caso unidimensional - Modelo original - Exemplo 1.** Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.5). $Erro(u^h)$ e $Erro(\theta^h)$ estão definidos em (5.2).

Exemplo 2: Seja

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= t + 1, & u(x, 0) &= x^2(x - 1)^2, \\
 \beta(y) &= y^2 + 1, \quad \gamma(y) = y^2, & u'(x, 0) &= x^2(x - 1)^2, \\
 \mathbf{a} &= 1, \quad \lambda = 1, \quad \eta = 1, & \theta(x, 0) &= x^2(x - 1)^2.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

A Tabela 5.7 nos fornece as taxas de convergência dos erros associados as soluções numéricas u^h e θ^h , para diversos valores de ρ , com os dados de entrada em (5.6).

$\Delta x = \Delta t$	p_{u^h}				p_{θ^h}			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-4}	–	–	–	–	–	–	–	–
2^{-5}	1.6796	1.6829	1.6830	1.6830	1.3051	1.4046	1.4033	1.4032
2^{-6}	1.8226	1.8778	1.8800	1.8801	1.6032	1.5511	1.5549	1.5551
2^{-7}	1.6757	1.7507	1.7568	1.7571	1.6520	1.6592	1.6588	1.6586
2^{-8}	1.9065	1.8980	1.8976	1.8975	1.9030	1.9002	1.8990	1.8991

Tabela 5.7: **Caso unidimensional - Modelo original - Exemplo 2.** Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.6). O erro pode ser visto na Tabela 5.8.

$\Delta x = \Delta t$	$Erro(u^h)$				$Erro(\theta^h)$			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-4}	0.1956	0.2421	0.2442	0.2443	0.4578	0.4448	0.4440	0.4440
2^{-5}	0.0611	0.0754	0.0761	0.0761	0.1853	0.1680	0.1679	0.1679
2^{-6}	0.0173	0.0205	0.0207	0.0207	0.0610	0.0573	0.0571	0.0571
2^{-7}	0.0054	0.0061	0.0061	0.0061	0.0194	0.0182	0.0181	0.0181
2^{-8}	0.0014	0.0016	0.0016	0.0016	0.0052	0.0049	0.0049	0.0049

Tabela 5.8: **Caso unidimensional - Modelo original - Exemplo 2.** Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.6). $Erro(u^h)$ e $Erro(\theta^h)$ estão definidos em (5.2).

5.3 Caso Bidimensional - Modelo Alterado

Nessa seção, em todas as simulações realizadas, consideramos o tempo final $T = 1$, o espaço $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$,

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1 \text{ e } x = 0\}, \\ \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1 \text{ e } x = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 1\}.\end{aligned}$$

Assim como nas seções anteriores vamos considerar dois exemplos. Fazendo $\Delta y = \Delta x = \Delta t$ vamos calcular as taxas de convergência dos erros, em u^h e θ^h , para diversos valores de ρ .

Exemplo 1: Consideramos

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= t + 1, \quad \mathbf{a} = (1, 1), \quad \lambda = 1, \quad u(x, t) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4}y\right) e^{\frac{3\pi}{4\eta}t}, \\ \beta(y) &= y^2 + 1, \quad \gamma(y) = y^2, \quad \eta = 1, \quad \theta(x, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{\frac{3\pi}{4\eta}t}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Na Tabela 5.9 temos as taxas de convergência dos erros em u^h e θ^h . Os erros podem ser vistos na Tabelas 5.10.

$\Delta x = \Delta t$	p_{u^h}				p_{θ^h}			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-3}	—	—	—	—	—	—	—	—
2^{-4}	2.0488	2.0551	2.0942	2.0464	2.0185	2.0185	2.0194	2.0172
2^{-5}	2.0296	2.0322	2.0424	2.0295	2.0047	2.0047	2.0052	2.0054
2^{-6}	2.0155	2.0165	2.0189	2.0039	2.0011	2.0011	2.0013	2.0000

Tabela 5.9: **Caso bidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1.** Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.7). O erro pode ser visto na Tabela 5.10.

$\Delta x = \Delta t$	$-\log_{10} \left(\ u - u^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))} \right)$				$-\log_{10} \left(\ \theta - \theta^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))} \right)$			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-3}	0.8291	0.8571	0.9552	0.9959	0.9409	0.9405	0.9401	0.9402
2^{-4}	1.4459	1.4757	1.5857	1.6119	1.5485	1.5482	1.5480	1.5474
2^{-5}	2.0568	2.0875	2.2005	2.2229	2.1520	2.1517	2.1517	2.1511
2^{-6}	2.6636	2.6945	2.8083	2.8261	2.7544	2.7541	2.7542	2.7532

Tabela 5.10: **Caso bidimensional - Modelo alterado - Exemplo 1.** Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.7).

Exemplo 2: Consideramos

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= t + 1, \quad \mathbf{a} = (1, 1), \quad \lambda = 1, \quad u(x, t) = x^2(x - 1)^2 y^2 (y - 1)^2, \\
 \beta(y) &= y^2 + 1, \quad \gamma(y) = y^2, \quad \eta = 1, \quad \theta(x, t) = x^2(x - 1)^2 y^2 (y - 1)^2.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Na Tabela 5.11 temos as taxas de convergência dos erros em u^h e θ^h . Os erros podem ser vistos na Tabelas 5.12.

$\Delta x = \Delta t$	p_{u^h}				p_{θ^h}			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-3}	–	–	–	–	–	–	–	–
2^{-4}	2.1165	2.1172	2.1173	2.1173	1.8197	1.8247	1.8247	1.8247
2^{-5}	2.0487	2.0491	2.0492	2.0492	1.9546	1.9551	1.9551	1.9551
2^{-6}	2.0132	2.0137	2.0137	2.0137	2.0011	2.0009	2.0009	2.0009

Tabela 5.11: **Caso bidimensional - Modelo alterado - Exemplo 2.** Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.8). O erro pode ser visto na Tabela 5.12.

$\Delta x = \Delta t$	$-\log_{10} \left(\ u - u^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))} \right)$				$-\log_{10} \left(\ \theta - \theta^h\ _{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))} \right)$			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-3}	4.1747	4.1784	4.1785	4.1785	4.1775	4.1790	4.1790	4.1790
2^{-4}	4.8118	4.8158	4.8159	4.8159	4.7253	4.7283	4.7283	4.7283
2^{-5}	5.4286	5.4326	5.4328	5.4328	5.3137	5.3168	5.3168	5.3168
2^{-6}	6.0346	6.0388	6.0390	6.0390	5.9161	5.9192	5.9192	5.9192

Tabela 5.12: **Caso bidimensional - Modelo alterado - Exemplo 2.** Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.8).

5.4 Caso Bidimensional - Modelo Original

Nessa seção, vamos estudar o comportamento do erro do modelo original, ou seja, com $f = g = 0$. Consideramos como solução exata a gerada para o caso em que $N_x = N_t = 2^7$. Tomamos o tempo final T , o espaço Ω , Γ_0 e Γ_1 como na seção anterior. Fazendo $\Delta y = \Delta x = \Delta t$ vamos calcular as taxas de convergência dos erros, em u^h e θ^h , para diversos valores de ρ .

Por limitações computacionais, $N_x = 2^7$ foi a máxima discretização que conseguimos tomar. Nas simulações realizadas, tanto para o uni quanto para o bidimen-

sional, observamos que o erro relativo chega a 100% para discretizações (do espaço e tempo) menores que 2^4 . Este comportamento pode ser visto nas Tabelas 5.6 e 5.14. Como pode ser visto, este erro diminui a medida que refinamos a discretização.

Exemplo 1: Consideramos

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= t + 1, & u(x, 0) &= \sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4}y\right), \\ \beta(y) &= y^2 + 1, \quad \gamma(y) = y^2, & u'(x, 0) &= \frac{3\pi}{4\eta} \sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4}y\right), \\ \mathbf{a} &= (1, 1), \quad \lambda = 1, \quad \eta = 1, & \theta(x, 0) &= \sin(\pi x) \sin(\pi y). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Na Tabela 5.13 temos as taxas de convergência dos erros em u^h e θ^h . Os erros podem ser vistos na Tabela 5.14.

$\Delta x = \Delta t$	p_{u^h}				p_{θ^h}			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-4}	–	–	–	–	–	–	–	–
2^{-5}	1.9889	1.9907	1.9913	1.9920	1.3255	1.3214	1.3320	1.3430
2^{-6}	2.1016	2.1084	2.1130	2.1163	2.3823	2.3818	2.3814	2.3812

Tabela 5.13: **Caso bidimensional - Modelo original - Exemplo 1.** Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.9). O erro pode ser visto na Tabela 5.14.

$\Delta x = \Delta t$	$Erro(u^h)$				$Erro(\theta^h)$			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-4}	0.1536	0.1442	0.1402	0.1381	1.0805	1.0796	1.0799	1.0804
2^{-5}	0.0387	0.0363	0.0353	0.0347	0.4311	0.4320	0.4290	0.4259
2^{-6}	0.0090	0.0084	0.0082	0.0080	0.0827	0.0829	0.0823	0.0817

Tabela 5.14: **Caso bidimensional - Modelo original - Exemplo 1.** Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.9).

Exemplo 2: Consideramos

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= t + 1, & u(x, 0) &= x^2(x - 1)^2y^2(y - 1)^2, \\
 \beta(y) &= y^2 + 1, \quad \gamma(y) = y^2, & u'(x, 0) &= x^2(x - 1)^2y^2(y - 1)^2, \\
 \mathbf{a} &= (1, 1), \quad \lambda = 1, \quad \eta = 1, & \theta(x, 0) &= x^2(x - 1)^2y^2(y - 1)^2.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Na Tabela 5.15 temos as taxas de convergência dos erros em u^h e θ^h . Os erros podem ser vistos na Tabela 5.16.

$\Delta x = \Delta t$	p_{u^h}				p_{θ^h}			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-4}	–	–	–	–	–	–	–	–
2^{-5}	1.4847	1.5602	1.5603	1.5603	1.4039	1.3855	1.3854	1.3854
2^{-6}	2.0028	2.0184	2.0184	2.0184	2.0317	2.0280	2.0280	2.0280

Tabela 5.15: **Caso bidimensional - Modelo original - Exemplo 2.** Taxa de convergência do erro da solução numérica associada aos dados de entrada em (5.10). O erro pode ser visto na Tabela 5.16.

$\Delta x = \Delta t$	$Erro(u^h)$				$Erro(\theta^h)$			
	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-4}	0.4186	0.4514	0.4514	0.4514	0.6723	0.7014	0.7014	0.7014
2^{-5}	0.1496	0.1531	0.1531	0.1531	0.2541	0.2685	0.2685	0.2685
2^{-6}	0.0373	0.0378	0.0378	0.0378	0.0621	0.0658	0.0658	0.0658

Tabela 5.16: **Caso bidimensional - Modelo original - Exemplo 2.** Erro da solução numérica associado aos dados de entrada em (5.10).

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho realizamos uma análise teórica e numérica para uma equação termoelástica dissipativa. A análise teórica foi realizada em \mathbb{R}^n , já na numérica foi considerado apenas os casos de \mathbb{R}^1 e \mathbb{R}^2 .

Analiticamente, a partir do Teorema 3.1, mostramos as condições para existência e unicidade de soluções. Numericamente, foi desenvolvido um programa computacional para a simulação do sistema termoelástico e foi feita uma estimativa numérica para a taxa de convergência no espaço e no tempo, chegando a conclusão de que ambas as taxa são $\mathcal{O}(2)$.

Para trabalhos futuros, será interessante realizar uma análise teórica do erro associado aos métodos aplicados e compara-las com os resultados numéricos gerados pelo programa desenvolvido. Seria interessante, também, adicionar novos termos ao sistema e distintas condições de fronteira, visto que o sistema estudado é um caso particular de uma classe de sistemas termoelásticos dissipativos.

REFERÊNCIAS

APOLAYA, R. F.; CLARK, H. R.; FEITOSA, A. J. On a nonlinear coupled system with internal damping. **Electronic Journal of Differential Equations**, [S.l.], v. 2000, n. 64, p. 1–17, 2000.

BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2011. xiv, 600 p. (Universitext).

CARROLL, R. W. **Abstract methods in partial differential equations**. New York: Harper and Row Publishers, 1969.

CLARK, H. R. et al. A nonlinear thermoelastic system with nonlinear boundary conditions. **Journal of Evolution Equations**, [S.l.], v. 15, n. 4, p. 895–911, 2015.

CLARK, H. R.; JUTUCA, L. P. S. G.; MIRANDA, M. M. On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients. **Electronic Journal of Differential Equations**, [S.l.], v. 1998, n. 4, p. 1–20, 1998.

EVANS, L. C. **Partial differential equations**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. 749 p. (Graduate Studies in Mathematics, 19).

HUGHES, T. J. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. New York: Dover Publications, 2012. 704 p.

LIONS, J. L. **Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires**. Paris: Dunod, 1969. xx, 554 p. (Etudes mathématiques).

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness-asymptotic behavior. **Revista de Matemáticas Aplicadas**, [S.l.], v. 17, p. 47–73, 1996.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev**: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010. 185 p.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011. 222 p.

MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H. **Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1975. 197 p. (Textos de Métodos Matemáticos, 9).

RINCON, M. A.; LIU, I.-S. **Introdução ao método de elementos finitos**. 3. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011. 378 p.

RONALD, R. G. **Aspéctos teóricos sobre um sistema termoelástico dissipativo não linear**. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2012.

SILVA, P. Braz e; CLARK, H. R.; FROTA, C. L. On a nonlinear coupled system of thermoelastic type with acoustic boundary conditions. **Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], p. 1–18, 2015.