UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

DANIELE COSTA ROCHA GOMES

ANÁLISE TEÓRICA E COMPUTACIONAL DE UMA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR COM FRONTEIRA MÓVEL

Rio de Janeiro
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

DANIELE COSTA ROCHA GOMES

ANÁLISE TEÓRICA E COMPUTACIONAL DE UMA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR COM FRONTEIRA MÓVEL

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientador: Mauro Antonio Rincon

Co-orientadora: Maria Darci G. da Silva

Rio de Janeiro
2015

G184a Gomes, Daniele Costa Rocha

Análise Teórica e Computacional de uma Equação de Schrödinger Não Linear com Fronteira Móvel / Daniele Costa Rocha Gomes. – Rio de Janeiro, 2015.

138 f.: il.

Orientador: Mauro Antonio Rincon.

Co-orientadora: Maria Darci G. da Silva.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2015.

1. Equação de Schrödinger. 2. Domínio Não-Cilíndrico. 3. Existência e Unicidade de Solução. 4. Simulação Numérica. – Teses. I. Rincon, Mauro Antonio (Orient.). II. Silva, Maria Darci G. da (Co-orient.). III. Universidade Federal do Rio de Janeiro. IV. Título

CDD:

DANIELE COSTA ROCHA GOMES

ANÁLISE TEÓRICA E COMPUTACIONAL DE UMA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO LINEAR COM FRONTEIRA MÓVEL

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado em: Rio de Janeiro, 03 de Dezembro de 2015.

____

Mauro Antonio Rincon (Orientador), D.Sc., UFRJ

____

Maria Darci G. da Silva (Co-orientadora), D.Sc., UFRJ

____

Luiz Adauto da Justa Medeiros, D.Sc., UFRJ

____

I-Shih Liu, Ph.D., UFRJ

____

Rolci de Almeida Cipolatti, D.Sc., UFRJ

____

Gladson Octaviano Antunes, D.Sc., UNIRIO

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus pela oportunidade de estar concluindo mais uma etapa de minha formação acadêmica e poder ampliar meus conhecimentos.

Ao meu marido Carlos Eduardo pelo constante incentivo e apoio. Aos meus pais Antonio Jorge e Regina, e minha irmã Helen pelo carinho e pela confiança que sempre depositaram em mim.

Aos professores Mauro Antonio Rincon e Maria Darci Godinho da Silva, pela oportunidade de tê-los como orientadores e pelos conhecimentos transmitidos.

Gostaria de agradecer em especial ao professor Luiz Adauto, que colaborou para o desenvolvimento deste trabalho desde o início sem reservas. Também agradeço ao professor Gladson Octaviano, pelo apoio e acompanhamento.

Aos amigos do mestrado e doutorado do PPGI-UFRJ, pela parceria e contibuições. Dentre eles, Adriano, Bruno, Charles, Gabriel, Matheus e outros.

Aos secretários do PPGI, pela pronta assistência prestada.

RESUMO

GOMES, Daniele Costa Rocha. **Análise Teórica e Computacional de uma Equação de Schrödinger Não Linear com Fronteira Móvel**. 2015. 138 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Estudamos neste trabalho os aspectos matemáticos e numéricos de uma equação de Schrödinger não linear em domínio não-cilíndrico. Uma mudança da variável permitirá transformar o problema em estudo em um equivalente, com domínio cilíndrico, permitindo obter a existência e a unicidade da solução utilizando o método de Galerkin e resultados de compacidade. A simulação numérica será realizada para o caso unidimensional. Vamos aplicar o método dos elementos finitos no espaço associado e o método de diferenças finitas na parte temporal, para obter uma solução numérica aproximada. Além disso, faremos uma análise da taxa de convergência dos métodos aplicados e retornaremos ao problema original através da mudança de variável dada inicialmente. Isso nos permitirá estudar o comportamento da solução aproximada no domínio não cilíndrico.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger, Domínio Não-Cilíndrico, Existência e Unicidade de Solução, Simulação Numérica.

ABSTRACT

Gomes, Daniele Costa Rocha. **Theoretical and Computational Analysis of a Non Linear Schrödinger Equation with Moving Boundary**. 2015. 138 f. Dissertation (Master Degree “em Informática”) - PPGI , Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

We studied in this work the mathematical and numerical aspects of a nonlinear Schrödinger equation in non cylindrical domains. A change of variable will transform the problem into an equivalent study, with a cylindrical domains, allowing to obtain the existence and uniqueness of the solution using the Galerkin method and results of compactness. The numerical simulation is performed for the one-dimensional case. Let’s apply the finite element method in the associated space and the finite difference method in the temporal part, to get an approximate numerical solution. In addition, we will make an analysis of the rate of convergence of the methods applied and return to the original problem by changing variable given initially. This will allow us to study the behavior of the approximate solution in the non-cylindrical domain.

Keywords: Schrödinger Equation, Non Cylindrical Domain, Existence and Uniqueness of Solution, Numerical Simulation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, vamos realizar uma análise matemática e simulação numérica de uma equação de Shrödinger não-linear com fronteira móvel.

1.1 Um breve histórico

No final de 1925, um físico austríaco, Erwin Schrödinger formulou uma equação diferencial parcial de segunda ordem, cuja solução é a função de onda, que descrevia como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo. Esta função de onda é uma expressão matemática que descreve o comportamento ondulatório de uma partícula.

Podemos comparar a relevância da segunda lei de Newton ($F = ma$) na mecânica clássica com a da equação de Schrödinger na mecânica quântica. A primeira, relaciona através de uma equação diferencial, força e posição de uma partícula. A segunda descreve o comportamento de uma onda associada a uma partícula qualquer.

A partir da equação de Schrödinger, podemos obter soluções ondulatórias que nos fornecem informações fundamentais sobre o comportamento de uma partícula-onda.

1.2 Proposta de pesquisa

Nosso objetivo é estabelecer a existência e a unicidade de solução de dois problemas não lineares em domínios não-cilíndricos, sendo o segundo uma generalização do primeiro para o caso unidimensional. Além disso, realizamos uma simulação numérica para o caso unidimensional.

Consideramos o seguinte problema de valores inicial e de fronteira

$$\left| \begin{array}{l} u'(x,t) - i\Delta u(x,t) + |u(x,t)|^{\rho}\, u(x,t) = \hat{f} \;\text{ em }\; \hat{Q}; \\ \\ u(x,t) = 0 \;\text{ em }\; \hat{\Sigma}; \qquad\qquad\qquad\qquad (i^2 = -1) \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \;\text{ em }\; \Omega_0; \end{array} \right. \tag{1.1}$$

em que o domínio $\hat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,T[\,; x \in \Omega_t\}$ com $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n; x = k(t)y, y \in \Omega\}$, cuja fronteira lateral $\hat{\Sigma} = \bigcup\limits_{0<t<T} (\Gamma_t \times \{t\})$. Sendo Γ_t a fronteira de Ω_t. Além disso, consideramos ρ uma costante real positiva.

Por meio de uma mudança de variável, será possível transformar o problema em estudo em um problema equivalente, mas com domínio cilíndrico, cujas seções não dependem do tempo t. A existência e a unicidade de solução do problema em estudo serão estabelecidas pelo método de Faedo-Galerkin e resultados de compacidade.

Para a simulação numérica, aplicaremos o método de elementos finitos na parte espacial, resultando em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) não-linear. Aplicaremos o método de diferenças finitas de ordem dois no sistema de EDO, resolvendo o sistema não-linear resultante pelo método de Newton, para cada passo de tempo. Mostraremos também que os resultados numéricos são consistentes com os resultados teóricos.

Em LIONS (1969), a equação de Schrödinger não linear $u' - i\Delta u + |u|^\rho u = f$ em domínio cilíndrico foi estudada com a mesma não linearidade do problema aqui proposto. Além disso, utilizamos a mesma mudança de variável descrita em MEDEIROS; MIRANDA (1994) que estudou o controle exato para a equação de Schrödinger linear homogênea $u' - i\Delta u = 0$ em domínio não-cilíndrico. Ambos os trabalhos contribuíram de forma significativa no desenvolvimento da parte teórica deste trabalho. Equações de Schrödinger com não linearidades do tipo estudado no presente trabalho encontramos em CIPOLATTI; LóPEZ GONDAR; TRALLERO-GINER (2012).

Descreveremos a estrutura do presente trabalho. No capítulo 2, apresentamos a notação que será utilizada e os pré-requisitos necessários para desenvolver os capítulos subsequentes. No capítulo 3, realizamos uma análise teórica estudando a existência e a unicidade do problema proposto para o $\mathbb{R}^n$. No capítulo 4, estudamos uma mudança de variável mais geral no caso unidimensional. A existência e a unicidade do problema também é garantida pelo método de Faedo-Galerkin e resultados de compacidade. No capítulo 5, determinamos a solução numérica do problema em estudo para o caso unidimensional. No capítulo 6, avaliamos a implementação da solução numérica apresentando os resultados numéricos obtidos. Além disso, realizamos um estudo da taxa de convergência do erro associado aos métodos aplicados. Por fim, no capítulo 7, apresentamos as considerações finais.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo será convencionada a notação a ser utilizada e os pré-requisitos necessários para desenvolver os capítulos subsequentes.

2.1 Notação

Com Ω representamos um aberto limitado não vazio do $\mathbb{R}^n$. Notemos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ representam os corpos dos números reais e complexos, respectivamente.

Sejam E e F espaços de Banach. Denotamos por $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F munido da norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E;F)} = \sup_{x\in E;\|x\|\leq 1} \|Tx\|_F.$$

Representamos $\mathcal{L}(E;E)$ por $\mathcal{L}(E)$.

Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções $f:\Omega\to\mathbb{C}$ de classe C^∞ com suporte compacto em Ω. Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ de $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as condições:
i) todas as φ_n possuem suportes compactos contidos em um compacto fixo K de Ω;
ii) a sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida, será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definimos distribuição sobre Ω, a uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear, contínua no sentido de convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. Denotamos o valor da distribuição T em $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, por $\langle T, \varphi \rangle$. Dizemos que uma sucessão $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distribuições sobre Ω converge para T, quando a sucessão $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{C}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O espaço das distribuições sobre Ω, munido da noção de convergência acima definida, será representado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Representamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das funções $u : \Omega \to \mathbb{C}$ mensuráveis a Lebesgue tais que $\displaystyle\int_\Omega |u|^p d\Omega < \infty$, se $1 \leq p < \infty$, ou $\displaystyle\sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess}|u| < \infty$, se $p = \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ está munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty; \\ \displaystyle\sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess}|u|, & \text{se} \quad p = \infty. \end{cases}$$

No caso particular $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do seguinte produto escalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, d\Omega,$$

e denotamos o produto escalar e a norma, respectivamente, por $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$.

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço de Banach das funções $u : \Omega \to \mathbb{C}$ mensuráveis a Lebesgue tais que $D^k u \in L^p(\Omega)$ no sentido das distribuições, para todo multi-índice k tal que $|k| \leq m$, munido da norma

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|k|\leq m} \|D^k u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty; \\ \displaystyle\sum_{|k|\leq m} \|D^k u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 < p' \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Representamos por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$. Além disso, $H^m(\Omega)$ é espaço de Hilbert munido do produto escalar

$$(u, v)_m = \sum_{|k| \leq m} (D^k u, D^k v)_{L^2(\Omega)},$$

e tem sua norma denotada por $\| \cdot \|_m$.

Denotamos $W_0^{m,2}(\Omega)$ por $H_0^m(\Omega)$ e seu dual topológico por $H^{-m}(\Omega)$. No caso específico $p = 2$ e $m = 1$, denotamos a norma $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$ por $\| \cdot \|$.

Sejam V espaço de Banach e $u : [0, T] \to V$ uma função. Dizemos que u é mensurável (no sentido de Bochner) se existe uma sucessão $(u_m(t)_{m \in \mathbb{N}})$ de funções escadas de V, convergindo para $u(t)$ em V, quase sempre para t em $[0, T]$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e E espaço de Banach.

Representamos $L^p(a, b; E)$ o espaço de Banach das funções $u :]a, b[\to E$ mensuráveis a Bochner tais que a função $t \to \|u(t)\|_E^p$ seja integrável a Lebesgue. Definimos $\displaystyle\int_a^b \|u(t)\|_E^p \, dt < \infty$, se $1 \leq p < \infty$, ou $\displaystyle\sup_{t \in]a,b[} \text{ess} \|u(t)\|_E < \infty$, se $p = \infty$. O espaço $L^p(a, b; E)$ está munido da norma

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b \|u(t)\|_E^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty; \\ \displaystyle\sup_{t \in]a,b[} \text{ess} \|u(t)\|_E, & \text{se} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Denotamos por $C([a,b];E)$ o espaço de Banach das funções $u : [a,b] \to E$ contínuas munido da norma $\max\limits_{a \leq t \leq b} \|u(t)\|_E$.

Seja k inteiro, $k \geq 1$. Representamos por $C^k([a,b];E)$ o espaço de Banach das funções $u \in C([a,b];E)$ tais que $\dfrac{d^j u}{dt^j} \in C([a,b];E)$, para todo $1 \leq j \leq k$, munido da norma

$$\|u\|_{C^k([a,b];E)} = \|u\|_{L^\infty(a,b;E)} + \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L^\infty(a,b;E)}.$$

2.2 Resultados utilizados

Definição 2.1 *(**Convergência Fraca**) Sejam E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle$, para todo $\varphi \in E'$.*

Definição 2.2 *(**Convergência Fraca Estrela**) Sejam E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Diz-se $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle$, para todo $u \in E$.*

Proposição 2.1 *Sejam E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então,*

i) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E então $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$;

ii) Se $x_n \to x$ em E então $x_n \rightharpoonup x$ para E';

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e se $f_n \to f$ em E' (isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$) então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 35.*

Definição 2.3 *Diz-se que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.*

Definição 2.4 *Sejam E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e E'' o seu bidual topológico. Diz-se $J : E \to E''$ é injeção canônica se, para cada $x \in E$, a aplicação $f \longmapsto \langle f, x \rangle$ de E' em $\mathbb{R}$ constitui uma forma linear contínua sobre E', isto é, um elemento de E'', denotado por Jx. Portanto,*

$$\langle Jx, f \rangle_{E'' \times E'} = \langle f, x \rangle_{E' \times E} \quad \forall\, x \in E, \forall\, f \in E'.$$

Definição 2.5 *Seja E um espaço de Banach e seja J a injeção canônica de E em E''. Diz-se que E é reflexivo se $J(E) = E''$.*

Teorema 2.1 *(**Banach-Alaoglu-Bourbaki**) Sejam E um espaço de Banach e E' o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; |f| \leq 1\} \quad \text{é compacto na topologia fraca estrela.}$$

Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 42.*

Corolário 2.1 *Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 50.*

Teorema 2.2 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que converge na topologia fraca estrela.*
Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 50.*

Teorema 2.3 *(**Desigualdade de Hölder**) Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 56.*

Observação 2.1 *(Consequência da Desigualdade de Hölder) Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad para \quad 1 \leq i \leq k \quad com \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1 f_2 f_3 \ldots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 57.*

Teorema 2.4 *(**Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue**) Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfazem*
(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *em q.t.p de Ω;*
(b) *existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo n, tem-se $|f_n(x)| \leq g(x)$ em q.t.p de Ω.*
Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.
Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 54.*

Teorema 2.5 *Sejam* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$*, tais que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$*. Então existe uma subsequência* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*
(a) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *em q.t.p de* Ω*;*
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *para todo* k *e em q.t.p de* Ω*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*
Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 58.*

Lema 2.1 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\ dx = 0, \ \textit{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então $u = 0$ *quase sempre em* Ω*.*
Demonstração: *Ver MEDEIROS; MIRANDA (2011), p. 12.*

Corolário 2.2 *Suponhamos que* Ω *é um conjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^1 *com* Γ *limitado. Seja* $1 \leq p \leq \infty$*, então temos*

$$i)\ Se\ \ p < n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \ com\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

$$ii)\ Se\ \ p = n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \ para\ todo\ q \in [p, +\infty),$$

$$iii)\ Se\ \ p > n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega),$$

e todas estas injeções são contínuas. Além disso, se $p > n$ *temos para todo* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x-y|^\alpha \ \ q.t.p.\ x, y \in \Omega,$$

com $\alpha = 1 - (n/p)$ *e* C *dependendo somente de* Ω*,* p *e* n*. Em particular* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$*.*
Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 168.*

Teorema 2.6 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Suponhamos* Ω *um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *li-*

mitado de classe C^1. Então, temos as seguintes injeções compactas

i) Se $p < n$ $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, p^*)$ *com* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

ii) Se $p = n$ $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [p, +\infty)$,

iii) Se $p > n$ $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *com injeção compacta para todo* p.

Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 169.*

Teorema 2.7 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos* Ω *é um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Então existe uma constante* C *(dependendo de* Ω *e* p*) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \textit{para todo} \;\; u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 174.*

Teorema 2.8 ***(Agmon-Douglis-Nirenberg)*** *Suponhamos* Ω *um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *limitado de classe* C^2 *com fronteira* Γ *limitada. Seja* $1 < p < \infty$. *Então para toda* $f \in L^p(\Omega)$, *existe solução única* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *da equação*

$$-\Delta u + u = f \;\; \textit{em} \; \Omega.$$

Além disso, se Ω *é de classe* C^{m+2} *e se* $f \in W^{m,p}(\Omega)$ *(para* $m \geq 1$*), então*

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad e \quad \|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração: *Ver BREZIS (1999), p. 197.*

Teorema 2.9 ***(Aubin-Lions)*** *Sejam* B_0, B, B_1 *espaços de Banach,* B_0 *e* B_1 *reflexivos, a imersão de* B_0 *em* B *é compacta,* B *imerso continuamente em* B_1, $1 < p_0$,

$p_1 < \infty$ e W o espaço

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0)\,;\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

equipado da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}\,.$$

Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.
Demonstração: *Ver LIONS (1969), p. 58.*

Observação 2.2 *(Consequência do Teorema de Aubin-Lions) Se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue-se que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.*

Lema 2.2 ***(Lions)*** *Sejam Q um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(Q)$, com $1 < q < \infty$, satisfazendo*

$$|g_m|_{L^q(Q)} \le C \quad e \quad g_m \to g, \quad em\ q.t.p\ de\ \ Q.$$

Então

$$g_m \rightharpoonup g, \quad em \ \ L^q(Q).$$

Demonstração: *Ver LIONS (1969), p. 12.*

Lema 2.3 *Sejam X um espaço de Banach, $f \in L^p(0,T;X)$ e $f' \in L^p(0,T;X)$ com $1 \le p \le \infty$, então*

$$f \in C([0,T];X).$$

(Possivelmente redefinidas sobre um conjunto de medida nula.)
Demonstração: *Ver LIONS (1969), p. 7.*

Lema 2.4 *Sejam X um espaço de Banach, X' o seu dual, e u e g funções pertencentes a $\in L^1(a,b;X)$, então as seguintes afirmações são equivalentes*

$$i)\ u(t) = \xi + \int_a^t g(s)\ ds, \xi \in X, \forall\ t \in [a,b];$$

ii) Para cada função teste $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$,

$$\int_a^b u(t)\varphi'(t)\ dt = -\int_a^b u(t)\varphi(t)\ dt \ \left(\varphi'(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}\right);$$

$$iii)\ \text{Para cada } \eta \in X', \frac{\langle u,\eta\rangle}{dt} = \langle g,\eta\rangle,$$

no sentido da distribuição escalar em (a,b).
Em particular, se u satisfaz $(i)-(iii)$, temos que $u \in C([0,T];X)$.
Demonstração: *Ver TEMAM (1979), p. 250.*

Lema 2.5 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular. Então, a aplicação*

$$v \to \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

define em $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente à norma $H^2(\Omega)$.
Demonstração: *Ver MEDEIROS; MIRANDA (2011), p. 155.*

Teorema 2.10 ***(Funções Próprias e Decomposição Espectral)*** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ. Então existe uma sequência de números reais $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tais que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, com $\lambda_m \to \infty$ quando $m \to \infty$. Além disso, existe uma base Hilbertiana $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$, com $w_j \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\left|\begin{array}{rcl} -\Delta w_j &=& \lambda_j w_j \text{ em } \Omega, \\ w_j &=& 0 \text{ em } \Gamma, \end{array}\right. \quad \text{para } j = 1,2,\ldots.$$

Dizemos que os números (λ_m) são os autovalores de $-\Delta$ (com a condição de Dirichlet) e que as $(w_j)_{m\in\mathbb{N}}$ são as funções próprias associadas.
Demonstração: *Ver EVANS (1998), p. 335.*

Condições de Carathéodory

Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (x,t) onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, seja $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando:

- $f\,(x,t)$ é mensurável em t, para cada x fixo;
- $f\,(x,t)$ é contínua em x, para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(x,t)| \leq m_K(t)$, para todo $(x,t) \in K$.

Definição 2.6 *Uma solução no sentido* estendido *do problema*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

é uma função $\phi(t)$ absolutamente contínua tal que, para algum β real, tenhamos

i) $(\phi(t),t) \in D,$ *para todo,* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*;*

ii) $\phi'(t) = f(t,\phi(t))$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.*

Consideremos o retângulo

$$R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\right\},$$

com $a, b > 0$. Então, teremos os seguintes resultados:

Teorema 2.11 *(**Carathéodory**) Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R, então sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

Demonstração: *Ver MEDEIROS; RIVERA (1975), p. 156.*

Corolário 2.3 *Seja D aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D, então o problema*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.
Demonstração: *Ver MEDEIROS; RIVERA (1975), p. 159.*

Teorema 2.12 *Seja D aberto limitado conexo em $\mathbb{R}^{n+1}$, uma função f que satisfaz as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e existe uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m(t)$, para todo $(t,x) \in D$. Seja φ uma solução de*

$$x' = f(t,x) \quad \textit{para quase todo} \quad t \;\textit{em}\; I,$$

sobre o intervalo aberto (a,b) então

i) *existe $\varphi(a+0), \varphi(b-0)$,*

ii) *se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b+\delta]$ para algun δ. Análogo resultado para a,*

iii) *$\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0))$ pertencem a ∂D (∂D fronteira de D),*

iv) *se f pode estender-se a $\overline{D}$ sem que ele perca suas propriedades então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.*

Demonstração: *Ver MEDEIROS; RIVERA (1975), p. 159.*

Corolário 2.4 *(**Prolongamento de solução**) Sejam $D = B \times [0, T]$, com $0 < T < \infty$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e a função f nas condições do Teorema 2.12. Seja $\phi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(0) = x_0 \quad e \quad |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Se em qualquer intervalo I onde $\phi(t)$ está definida, se tenha, $|\phi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então ϕ tem um prolongamento até $[0, T]$.

Demonstração: *Ver MEDEIROS; RIVERA (1975), p. 164.*

Lema 2.6 *(**Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial**) Seja $\eta(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$. Se η satisfaz q.s. para t a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leq \psi(t) + \varphi(t)\eta(t),$$

com $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ sendo funções não negativas e integráveis em $[0, T]$, então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds \right],$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Demonstração: *Ver EVANS (1998), p. 624.*

Teorema 2.13 *(**Lema de Gauss**) Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ de classe C^1, e $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, d\Omega = \int_\Gamma u \cdot \nu_j \, d\Gamma, \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Demonstração: *Ver EVANS (1998), p. 627.*

Teorema 2.14 *(**Fórmula de Green**) Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ de classe C^1, e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u \; d\Omega = -\int_\Omega u \Delta v \; d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} u \; d\Gamma.$$

Demonstração: *Ver EVANS (1998), p. 628.*

3 EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR COM FRONTEIRA MÓVEL

3.1 Notação

Sejam $T > 0$ e Ω um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira regular Γ de classe C^2. Representamos por $k(t)$ uma função real definida sobre os números reais não negativos $[0, \infty[$.

O objetivo deste capítulo é estabelecer a existência e a unicidade de solução para o problema de fronteira móvel

$$\left| \begin{array}{ll} u'(x,t) - i\Delta u(x,t) + |u(x,t)|^\rho \, u(x,t) = \hat{f}(x,t) \ \text{ em } \ \hat{Q}, & \\ u(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \hat{\Sigma}, & (i^2 = -1) \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ em } \ \Omega_0. & \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Para cada $t \in [0, T]$, consideramos $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n; x = k(t)y, y \in \Omega\}$. Seja $\hat{Q}$ o domínio de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\hat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[\, ; x \in \Omega_t\} = \bigcup_{0<t<T} (\Omega_t \times \{t\})$$

cuja fronteira lateral $\hat{\Sigma}$ é definida por

$$\hat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} (\Gamma_t \times \{t\}) \, ,$$

com Γ_t sendo a fronteira de Ω_t.

A existência e a unicidade de solução do problema (3.1) será demonstrada por meio de uma mudança de variável. Esta transformará o problema em estudo em um problema equivalente, mas com domínio cilíndrico, cujas seções não dependem do tempo t, nos permitindo usar resultados de compacidade e o método de Galerkin.

Transformamos o domínio $\hat{Q}$ em um domínio cilíndrico $Q = \Omega \times (0, T)$, definindo $y := \dfrac{x}{k(t)}$, com $x \in \Omega_t$. Além disso, consideramos o seguinte difeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \tau : \hat{Q} & \rightarrow & Q = \Omega \times (0, T) \\ (x, t) & \longmapsto & (y, t) = \left(\dfrac{x}{k(t)}, t \right), \end{array} \tag{3.2}$$

com $k(t)$ diferenciável e não nula.

Usando o difeomorfismo (3.2), observando que $x(t) = k(t)y$ e denotando por

$$u(x, t) = \left(u \text{ o } \tau^{-1} \right) (y, t) = v(y, t)$$

teremos as seguintes identidades

$$\begin{cases} \nabla u(x, t) = \dfrac{1}{k(t)} \nabla v(y, t), \\ \\ \Delta u(x, t) = \dfrac{1}{k^2(t)} \Delta v(y, t), \\ \\ u'(x, t) = v'(y, t) - \dfrac{k'(t)}{k(t)} y_j \dfrac{\partial v(y, t)}{\partial y_j}, \end{cases}$$

com ∇ e Δ representando os operadores Gradiente e Laplaciano respectivamente, em relação a x ou a y. O índice repetido denota somatório.

Usando as identidades acima, o problema (3.1) é transformado no seguinte problema equivalente definido no cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$ com fronteira $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$

$$\left| \begin{array}{l} v'(y,t) - \dfrac{k'}{k} y_j \dfrac{\partial v(y,t)}{\partial y_j} - i \dfrac{1}{k^2} \Delta v(y,t) \\ \\ \quad + |v(y,t)|^\rho \, v(y,t) = f(y,t) \;\text{ em }\; Q, \quad (i^2 = -1) \\ \\ v(y,t) = 0 \;\text{ em }\; \Sigma, \\ \\ v(y,0) = v_0 \;\text{ em }\; \Omega, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

com $f(y,t) = \hat{f}(k(t)y,t)$.

Demonstramos a existência e a unicidade de solução do problema (3.3) garantindo a existência e a unicidade da solução do problema (3.1), pelo difeomorfismo.

Com a finalidade de anunciar o resultado principal no presente trabalho, vamos fixar algumas notações e hipóteses sobre $k(t)$ e ρ.

- (H1) $k \in W^{2,\infty}_{loc}([0,\infty[); k(t) \geq k_0 > 0$ para todo $t \geq 0$;
- (H2) $0 \leq \rho < \infty$ se $n = 1,2$ e $0 \leq \rho \leq \dfrac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$.

Além disso, consideramos M como o $\sup\{|y|; y \in \Omega\}$, com $|y|$ sendo o módulo do vetor $y \in \mathbb{R}^n$.

3.2 Resultados principais

Teorema 3.1 *Sob as hipóteses (H1) e (H2), considerando o dado inicial* $u_0 \in H^1_0(\Omega_0)$ *e* $\hat{f} \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega_t))$, *existe uma única função* $u : \hat{Q} \to \mathbb{C}$, *satisfazendo as condições:*

1. $u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega_t)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega_t))$, *com* $p = \rho + 2$;

2. $u' \in L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$, *com* $p' = \frac{\rho+2}{\rho+1}$;

3. $u' - i\Delta u + |u|^{\rho} u = \hat{f}$ *em* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$;

4. $u(0) = u_0$ *em* Ω_0.

Devido ao difeomorfismo (3.2), u é uma solução do problema (3.1) pelo Teorema (3.1) se, e somente se, v é uma solução do problema (3.3) pelo seguinte teorema

Teorema 3.2 *Sob as hipóteses (H1) e (H2), considerando o dado inicial* $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ *e* $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, *existe uma única função* $v : Q \to \mathbb{C}$, *satisfazendo as condições:*

1. $v \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega))$, *com* $p = \rho + 2$;

2. $v' \in L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, *com* $p' = \frac{\rho+2}{\rho+1}$;

3. $v' - \dfrac{k'}{k} y_j \dfrac{\partial v}{\partial y_j} - i\dfrac{1}{k^2}\Delta v + |v|^{\rho} v = f$ *em* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega))$;

4. $v(0) = v_0$ *em* Ω.

O problema (3.3) está definido no domínio cilíndrico Q. Assim, podemos estabelecer a existência e a unicidade de solução usando técnicas apropriadas para domínios cilíndricos.

A demonstração do Teorema (3.2) é baseada no Método de Faedo-Galerkin, seguindo as seguintes etapas:

- Existência de soluções aproximadas em subespaços de dimenssão finita;
- Estimativas sobre as soluções aproximadas;
- Passagem ao limite das soluções aproximadas;
- Verificação dos dados iniciais;
- Unicidade de solução.

3.3 Demonstração do teorema 3.2

3.3.1 Soluções aproximadas

Seja $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ base Hilbertiana de $L^2(\Omega)$ constituída das soluções do Problema Espectral a seguir e que formam um sistema ortogonal completo em $V = H_0^1(\Omega)$.

$$\left| \begin{array}{rcl} -\Delta w_j & = & \lambda_j w_j \text{ em } \Omega \\ \\ w_j & = & 0 \text{ em } \Gamma. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Temos que $w_j \in L^2(\Omega)$ e pelo teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg, aplicando sucessivamente, obtemos que $w_j \in H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \forall k \in \mathbb{N}$.

Consideramos V_m o subespaço gerado pelas m primeiras autofunções do $-\Delta$ acima, ou seja, $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, desejamos determinar $v_m(y,t) = \sum\limits_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(y) \in V_m$

solução do problema aproximado

$$
\left|\begin{array}{l}
(v_m'(t), w_j) - \dfrac{k'}{k}\,(y \cdot \nabla v_m(t), w_j) - i\dfrac{1}{k^2}\,(\Delta v_m(t), w_j) \\[2ex]
\quad +(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \;\text{ em }\; Q, \forall\; j = 1, 2, \ldots, m, \\[2ex]
v_m(y,t) = 0 \text{ em } \Sigma, \\[2ex]
v_m(0) = v_{0m} \;\text{ em }\; \Omega.
\end{array}\right. \tag{3.5}
$$

Pela Fórmula de Green, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que o problema aproximado será dado por

$$
\left|\begin{array}{l}
(v_m'(t), w_j) - \dfrac{k'}{k}\,(y \cdot \nabla v_m(t), w_j) + i\dfrac{1}{k^2}\,(\nabla v_m(t), \nabla w_j) \\[2ex]
\quad +(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \;\text{ em }\; Q, \forall\; j = 1, 2, \ldots, m, \\[2ex]
v_m(y,t) = 0 \text{ em } \Sigma, \\[2ex]
v_m(y,0) = v_{0m}(y) \;\text{ em }\; \Omega,
\end{array}\right. \tag{3.6}
$$

com $v_{0m}(y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (v_0, w_j) w_j$ e $y \cdot \nabla v_m = y_j \dfrac{\partial v_m}{\partial y_j}$.

Como $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é base Hilbertiana de $L^2(\Omega)$, temos que $v_0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (v_0, w_j) w_j$. Assim, $v_{0m} \longrightarrow v_0$ em $L^2(\Omega)$. Além disso, definimos que $v_m(0) = v_{0m}$, ou seja, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j = \sum_{j=1}^{m} (v_0, w_j) w_j$, observamos que $g_{jm}(0) = (v_0, w_j)$. Como $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é sistema ortonormal completo em $V = H_0^1(\Omega)$, segue que

$$
v_m(0) = v_{0m} \longrightarrow v_0 \text{ em } V. \tag{3.7}
$$

O sistema aproximado (3.6) possui solução local v_m definida em $[0, t_m[$, para algum $0 < t_m < T$, pelo Teorema de Carathéodory. A seguir, mostraremos que essas soluções são limitadas independentemente de m e t a fim de prolongar a solução em todo intervalo $[0, T]$ e obter a convergência de v_m para v, solução do problema cilíndrico. Para isso, faremos estimativas a priori.

3.3.2 Estimativas a priori

Para prolongar a solução em todo intervalo $[0, T]$ faremos a estimativa que segue.

3.3.2.1 Primeira estimativa

Multiplicando ambos os membros de (3.6) por $\overline{g_{jm}(t)}$, conjugado de $g_{jm}(t)$, e somando em $j = 1, 2, \ldots, m$, teremos

$$\begin{aligned}&(v'_m(t), v_m(t)) - \frac{k'}{k}\,(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t)) + i\frac{1}{k^2}\,(\nabla v_m(t), \nabla v_m(t))\\ &+(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), v_m(t)) = (f(t), v_m(t)).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Observemos que as funções $w_j(y)$ são reais, assim, $\overline{v_m(y,t)} = \sum_{j=1}^{m} \overline{g_{jm}(t)} w_j(y)$.

Considerando a parte real de (3.8), teremos que

$$\begin{aligned}&Re\,(v'_m(t), v_m(t)) - Re\left(\frac{k'}{k}\,(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t))\right) + Re\left(i\frac{1}{k^2}\,(\nabla v_m(t), \nabla v_m(t))\right)\\ &+Re(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), v_m(t)) = Re(f(t), v_m(t)).\end{aligned} \tag{3.9}$$

- Análise do termo $Re\,(v'_m(t), v_m(t))$

Temos que

$$Re\,(v_m'(t), v_m(t)) = Re \int_\Omega v_m' \; \overline{v_m} \; d\Omega = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega v_m' \; \overline{v_m} \; d\Omega + \overline{\int_\Omega v_m' \; \overline{v_m} \; d\Omega} \;\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega v_m' \; \overline{v_m} \; d\Omega + \int_\Omega \overline{v_m' \; \overline{v_m}} \; d\Omega\right] = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega v_m' \; \overline{v_m} \; d\Omega + \int_\Omega v_m \; \overline{v_m'} \; d\Omega\right] \tag{3.10}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v_m \; \overline{v_m} \; d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,(v_m(t), v_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|v_m(t)|^2 \,.$$

- Análise do termo $Re\left(\dfrac{k'}{k}\,(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t))\right)$

Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\,(y_j v_m) = n v_m + y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_j}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\,((y_j v_m)\,\overline{v_m}) = \frac{\partial}{\partial y_j}\,(y_j v_m)\,\overline{v_m} + y_j v_m \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}.$$

Além disso, pelo Lema de Gauss, temos que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\,(y_j v_m \overline{v_m}) \;\; d\Omega = \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j v_m \overline{v_m} \; d\Gamma = 0.$$

Desta forma, utilizando a Fórmula de Green, obtemos

$$(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t)) = \int_\Omega y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_j}\overline{v_m} \; d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\,(y_j v_m)\,\overline{v_m} \; d\Omega - n\int_\Omega v_m \overline{v_m} \; d\Omega$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}(y_j v_m \overline{v_m}) \; d\Omega - \int_\Omega y_j v_m \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j} \; d\Omega - n\int_\Omega v_m \overline{v_m} \; d\Omega = -\int_\Omega y_j v_m \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j} \; d\Omega$$

$$-n|v_m(t)|^2 = -\int_\Omega \overline{y_j \overline{v_m} \frac{\partial v_m}{\partial y_j}} \; d\Omega - n|v_m(t)|^2 = -\overline{\int_\Omega y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_j}\overline{v_m} \; d\Omega} - n|v_m(t)|^2.$$

Assim, multiplicando ambos os membros da equação acima por $\dfrac{k'}{k}$, obtemos

$$2Re\left(\frac{k'}{k}(y\cdot\nabla v_m(t),v_m(t))\right)=-\frac{nk'}{k}|v_m(t)|^2.$$

Logo,

$$Re\left(\frac{k'}{k}(y\cdot\nabla v_m(t),v_m(t))\right)=-\frac{1}{2}\frac{nk'}{k}|v_m(t)|^2. \tag{3.11}$$

- Análise do termo $Re\left(i\dfrac{1}{k^2}\left(\nabla v_m(t),\nabla v_m(t)\right)\right)$

Notemos que,

$$\frac{1}{k^2}\left(\nabla v_m(t),\nabla v_m(t)\right)=\frac{1}{k^2}\left(\left(v_m(t),v_m(t)\right)\right)=\frac{1}{k^2}\left\|v_m(t)\right\|^2\in\mathbb{R}.$$

Logo,

$$Re\ \left(i\frac{1}{k^2}\left(\nabla v_m(t),\nabla v_m(t)\right)\right)=0. \tag{3.12}$$

- Análise do termo não linear $Re(|v_m(t)|^{\rho}\, v_m(t),v_m(t))$

Temos que,

$$\begin{aligned}Re(|v_m(t)|^{\rho}\, v_m(t),v_m(t))&=Re\int_{\Omega}|v_m|^{\rho}\, v_m\ \overline{v_m}\ d\Omega=\frac{1}{2}\left[\int_{\Omega}|v_m|^{\rho}\, v_m\ \overline{v_m}\ d\Omega\right.\\&\left.+\int_{\Omega}\overline{|v_m|^{\rho}\, v_m}\ v_m\ d\Omega\right]=\frac{1}{2}\left[\int_{\Omega}|v_m|^{\rho}\,|v_m|^2\ d\Omega+\int_{\Omega}\overline{|v_m|^{\rho}}\ \ |v_m|^2\ d\Omega\right]\\&=\int_{\Omega}|v_m|^{\rho}\,|v_m|^2\ d\Omega=\int_{\Omega}|v_m|^{\rho+2}\ d\Omega.\end{aligned} \tag{3.13}$$

- Análise do termo $Re(f(t), v_m(t))$

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz nos garante que $|(f(t), v_m(t))| \leq |f(t)|\,|v_m(t)|$. Assim, $Re(f(t), v_m(t)) \leq |Re(f(t), v_m(t))| \leq |(f(t), v_m(t))| \leq |f(t)|\,|v_m(t)|$. Logo, pela desigualdade de Young,

$$Re(f(t), v_m(t)) \leq \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |v_m(t)|^2\right). \tag{3.14}$$

Dessa forma, substituindo (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) em (3.9), teremos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{nk'}{k}|v_m(t)|^2 + \int_\Omega |v_m|^{\rho+2}\ d\Omega \leq \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |v_m(t)|^2\right),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2 + \frac{nk'}{k}|v_m(t)|^2 + 2\int_\Omega |v_m(t)|^{\rho+2}\ d\Omega \leq |f(t)|^2 + |v_m(t)|^2.$$

Integrando de 0 a $t < T_m$, teremos

$$|v_m(t)|^2 + \int_0^t \frac{nk'(s)}{k(s)}|v_m(s)|^2\ ds + 2\int_0^t\int_\Omega |v_m(y,s)|^{\rho+2}\ d\Omega\ ds$$

$$\leq |v_m(0)|^2 + \int_0^t |f(s)|^2\ ds + \int_0^t |v_m(s)|^2\ ds.$$

De (3.7), temos que $(v_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em V. Ou seja, existe uma constante real $M_1 > 0$ tal que $\|v_m(0)\| < M_1$. Além disso, $\forall\ t \in [0,T]$

$$\int_0^t |f(s)|^2\ ds \leq \int_0^T |f(s)|^2\ ds = \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Ou seja, existe uma constante real $0 < M_2 = \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$, tal que

$$\int_0^t |f(s)|^2\ ds \leq M_2, \forall\ t \in [0,T].$$

Tomando $M_3 = M_1 + M_2$, teremos que

$$|v_m(t)|^2 + \int_0^t \frac{nk'(s)}{k(s)} |v_m(s)|^2 \; ds + 2\int_0^t \int_\Omega |v_m(y,s)|^{\rho+2} \; d\Omega \; ds \leq \tag{3.15}$$
$$\leq M_3 + \int_0^t |v_m(s)|^2 \; ds.$$

Como o integrando do terceiro termo do primeiro membro da desigualdade (3.15) é não negativo, podemos considerar

$$|v_m(t)|^2 \leq M_3 + \int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)} |v_m(s)|^2 \; ds + \int_0^t |v_m(s)|^2 \; ds.$$

ou seja,

$$|v_m(t)|^2 \leq M_3 + \int_0^t \left[\frac{n|k'(s)|}{k(s)} + 1\right] |v_m(s)|^2 \; ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall, obtemos $\forall \; t \in [0, T_m]$

$$|v_m(t)|^2 \leq M_3 \; \exp\left(\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)} + 1 \; ds\right).$$

Tal estimativa nos permite prolongar a solução v_m em todo intervalo $[0, T]$. Diante disso, repetindo a estimativa e integrando de 0 a t, com $0 < t < T$, obtemos

$$|v_m(t)|^2 + 2\int_0^t \int_\Omega |v_m(y,s)|^{\rho+2} \; d\Omega \; ds \leq C_1,$$

com $C_1 = M_3 \; \exp\left[T\left(\frac{nC(T)}{k_0} + 1\right)\right]$, pois $k(s) \geq k_0 > 0, \; \forall \; t \geq 0$ e porque $|k'(s)| \leq \sup\operatorname{ess}_{0 \leq s \leq T} |k'(s)| \leq C(T)$, pois $k \in W^{2,\infty}_{loc}$. Assim, obtemos que $\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)} \; ds \leq \int_0^T \frac{n|k'(s)|}{k(s)} \; ds \leq \int_0^T \frac{nC(T)}{k_0} \; ds \leq \frac{TnC(T)}{k_0}$.

Dessa forma, podemos concluir que

$$\|v_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \left(\sup_{t \in]0,T[} \operatorname{ess} |v_m(t)|^2\right)^2 \leq C_1$$

e

$$\int_0^T \int_\Omega |v_m(y,s)|^{\rho+2} \ d\Omega \ ds \leq C_1.$$

Mas,

$$\int_0^T \int_\Omega |v_m(y,s)|^{\rho+2} \ d\Omega \ ds = \int_0^T \|v_m(y,s)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \ ds = \|v_m\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))}.$$

Daí, segue que,

$$(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.16}$$

e

$$(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{3.17}$$

3.3.2.2 Segunda estimativa

Esta estimativa tem por finalidade buscar uma maior regularidade para $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Para isso, multiplicamos ambos os membros de (3.6) por λ_j e observando que $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$, por (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} &(v'_m(t), -\Delta w_j) - \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla v_m(t), -\Delta w_j) + i\frac{1}{k^2}(\nabla v_m(t), \nabla(-\Delta w_j)) \\ &\quad + (|v_m(t)|^\rho v_m(t), -\Delta w_j) = (f(t), -\Delta w_j). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Agora, multiplicando ambos os membros de (3.18) por $\overline{g_{jm}(t)}$ e somando em $j = 1, 2, \ldots, m$, obtemos

$$\begin{aligned} &(v'_m(t), -\Delta v_m(t)) - \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla v_m(t), -\Delta v_m(t)) + i\frac{1}{k^2}(\nabla v_m(t), \nabla(-\Delta v_m(t))) \\ &\quad + (|v_m(t)|^\rho v_m(t), -\Delta v_m(t)) = (f(t), -\Delta v_m(t)). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Considerando a parte real de (3.19), teremos que

$$\begin{aligned} & Re\left(v_m'(t), -\Delta v_m(t)\right) - Re\left(\frac{k'}{k}(y \cdot \nabla v_m(t), -\Delta v_m(t))\right) \\ & +Re\left(i\frac{1}{k^2}\left(\nabla v_m(t), \nabla\left(-\Delta v_m(t)\right)\right)\right) \\ & +Re\left(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), -\Delta v_m(t)\right) = Re\left(f(t), -\Delta v_m(t)\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

- Análise do termo $Re\left(v_m'(t), -\Delta v_m(t)\right)$

Pela fómula de Green, temos que

$$Re\left(v_m'(t), -\Delta v_m(t)\right) = Re\left(\nabla v_m'(t), \nabla v_m(t)\right) = Re\int_\Omega \nabla v_m' \overline{\nabla v_m}\; d\Omega$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \nabla v_m' \overline{\nabla v_m}\; d\Omega + \overline{\int_\Omega \nabla v_m' \overline{\nabla v_m}\; d\Omega}\;\right] = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \nabla v_m' \overline{\nabla v_m}\; d\Omega + \int_\Omega \overline{\nabla v_m' \overline{\nabla v_m}}\; d\Omega\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \nabla v_m' \overline{\nabla v_m}\; d\Omega + \int_\Omega \overline{\nabla v_m'} \nabla v_m\; d\Omega\right] = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \nabla v_m' \overline{\nabla v_m}\; d\Omega + \int_\Omega \nabla v_m \overline{\nabla v_m'}\; d\Omega\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla v_m \overline{\nabla v_m}\; d\Omega\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\nabla v_m(t), \nabla v_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_m(t)\right\|^2. \tag{3.21}$$

- Análise do termo $Re\left(\dfrac{k'}{k}(y \cdot \nabla v_m(t), -\Delta v_m(t))\right)$

Pela fórmula de Green, temos que

$$(y \cdot \nabla v_m(t), -\Delta v_m(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \left[y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_j} \right], \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right) - \int_\Gamma \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial \nu} y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_j} d\Gamma$$

$$= \left(\delta_k^j \frac{\partial v_m}{\partial y_j}, \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right) + \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right], \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right) - \int_\Gamma \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial \nu} y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_j} d\Gamma$$

$$= \|v_m(t)\|^2 + \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right], \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right) - \int_\Gamma \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial \nu} y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_j} d\Gamma$$

$$= \|v_m(t)\|^2 + \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right], \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right) - \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left| \frac{\partial v_m}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma,$$

com $\delta_k^j = 1$, se $j = k$, e zero, se $j \neq k$, e porque $\dfrac{\partial v_m}{\partial y_j} = \nu_j \dfrac{\partial v_m}{\partial \nu}$.

Tomando a parte real da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} Re\,(y \cdot \nabla v_m(t), -\Delta v_m(t)) &= \|v_m(t)\|^2 \\ &+ \int_\Omega y_j Re \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right] \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} \right\} d\Omega - \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left| \frac{\partial v_m}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma \end{aligned} \tag{3.22}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} Re \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right] \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right] \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} + \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} \right] \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k} \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} \right]. \end{aligned}$$

Pelo lema de Gauss, temos que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j} \left[y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} \right] d\Omega = \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} d\Gamma = \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left| \frac{\partial v_m}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma,$$

pois $\dfrac{\partial v_m}{\partial y_k} \dfrac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} = \nu_k \nu_k \dfrac{\partial v_m}{\partial \nu} \dfrac{\partial \overline{v_m}}{\partial \nu} = \left| \dfrac{\partial v_m}{\partial \nu} \right|^2$.

Dessa forma, temos que

$$\int_\Omega y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k}\right] d\Omega = -n\|v_m(t)\|^2 + \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma. \tag{3.23}$$

Substituindo (3.23) em (3.22), temos que

$$Re\left(y \cdot \nabla v_m(t), -\Delta v_m(t)\right) = \frac{(2-n)}{2}\|v_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma.$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{k'}{k}$, obtemos que

$$Re\left(\frac{k'}{k}(y \cdot \nabla v_m(t), -\Delta v_m(t))\right) = \frac{(2-n)k'}{2k}\|v_m(t)\|^2 - \frac{k'}{2k}\int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma. \tag{3.24}$$

- Análise do termo $Re\left(i\frac{1}{k^2}\left(\nabla v_m(t), \nabla\left(-\Delta v_m(t)\right)\right)\right)$

Notemos que

$$\frac{1}{k^2}\left(\nabla v_m(t), \nabla\left(-\Delta v_m(t)\right)\right) = \frac{1}{k^2}\left(-\Delta v_m(t), -\Delta v_m(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\Delta v_m(t), \Delta v_m(t)\right) = \frac{1}{k^2}\left|\Delta v_m(t)\right|^2 \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$Re\left(i\frac{1}{k^2}\left(\nabla v_m(t), \nabla\left(-\Delta v_m(t)\right)\right)\right) = 0. \tag{3.25}$$

- Análise do termo não linear $Re\left(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), -\Delta v_m(t)\right)$

Notemos que

$$\frac{\partial \left|v_m\right|^\rho}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}[(|v_m|^2)^{\frac{\rho}{2}}] = \frac{\partial}{\partial y_j}[(v_m\ \overline{v_m})^{\frac{\rho}{2}}] = \frac{\rho}{2}(v_m\ \overline{v_m})^{\frac{\rho}{2}-1}\left[\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\overline{v_m} + v_m\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}\right]$$

$$= \frac{\rho}{2}(|v_m|^2)^{\frac{\rho-2}{2}}\left[\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\overline{v_m} + v_m\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}\right] = \frac{\rho}{2}\left|v_m\right|^{\rho-2}\left[\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\overline{v_m} + v_m\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}\right].$$

Dessa forma, pela fórmula de Green

$$(\left|v_m(t)\right|^\rho v_m(t), -\Delta v_m(t)) = \sum_{j=1}^{m}\int_\Omega \left|v_m\right|^\rho v_m\left(-\frac{\partial^2\overline{v_m}}{\partial y_j^2}\right)d\Omega$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\left|v_m\right|^\rho v_m\right)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial\left|v_m\right|^\rho}{\partial y_j}v_m\frac{\partial\overline{v_m}}{\partial y_j}d\Omega + \int_\Omega \left|v_m\right|^\rho\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\frac{\partial\overline{v_m}}{\partial y_j}d\Omega$$

$$= \frac{\rho}{2}\int_\Omega \left|v_m\right|^{\rho-2}\left[\left|v_m\right|^2\left|\frac{\partial\overline{v_m}}{\partial y_j}\right|^2 + \left(v_m\frac{\partial\overline{v_m}}{\partial y_j}\right)^2\right]d\Omega + \int_\Omega \left|v_m\right|^\rho\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\right|^2 d\Omega.$$

Observemos que: $\forall\ z = x + iy \in \mathbb{C},\ z^2 + |z|^2 = (x+iy)^2 + x^2 + y^2 = x^2 - y^2 + i2xy + x^2 + y^2 = 2x^2 + i2xy$. Acarretando que $Re(z^2 + |z|^2) = 2(Re(z))^2$.

Assim,

$$Re\left(\left|v_m(t)\right|^\rho v_m(t), -\Delta v_m(t)\right)$$

$$= Re\left(\frac{\rho}{2}\int_\Omega \left|v_m\right|^{\rho-2}\left[\left|v_m\right|^2\left|\frac{\partial\overline{v_m}}{\partial y_j}\right|^2 + \left(v_m\frac{\partial\overline{v_m}}{\partial y_j}\right)^2\right]d\Omega\right) + Re\left(\int_\Omega \left|v_m\right|^\rho\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\right|^2 d\Omega\right)$$

$$= \frac{\rho}{2}\int_\Omega \left|v_m\right|^{\rho-2} 2\left(Re\left(v_m\frac{\partial\overline{v_m}}{\partial y_j}\right)\right)^2 d\Omega + \int_\Omega \left|v_m\right|^\rho\left|\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\right|^2 d\Omega.$$

Logo,

$$Re\left(\left|v_m(t)\right|^\rho v_m(t), -\Delta v_m(t)\right) \geq 0. \tag{3.26}$$

Substituindo (3.21), (3.24) e (3.25) em (3.20), e observando que, de (3.26), $Re\left(|v_m|^\rho\, v_m, -\Delta v_m\right) \geq 0$, teremos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_m(t)\right\|^2 - \frac{(2-n)k'}{2k}\left\|v_m(t)\right\|^2 + \frac{k'}{2k}\int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma \leq Re\left(f(t), -\Delta v_m(t)\right),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left\|v_m(t)\right\|^2 + \frac{(n-2)k'}{k}\left\|v_m(t)\right\|^2 + \frac{k'}{k}\int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma \leq 2Re\left(f(t), -\Delta v_m(t)\right). \tag{3.27}$$

Observação 3.1 *Se supomos $y_j \cdot \nu_j \geq 0$ em Γ, isto é, Ω contém a origem do $\mathbb{R}^n$ e o domínio é estrelado com respeito a origem, a integral na fronteira em (3.27) é não negativa. Com isso, obtemos a limitação de v_m em $H_0^1(\Omega)$, concluindo a segunda estimativa. Entretanto, tal restrição a Ω não se faz necessária tendo em vista que a integral em (3.27) pode ser substituída por uma identidade, nos permitindo estimar v_m em $H_0^1(\Omega)$. A prova desta identidade encontra-se no Apêndice A.*

Pelo Apêndice A, identidade (A.16), modificamos a equação (3.27) obtendo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\left\|v_m(t)\right\|^2 + k'kIm(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))\right\} \\
&+\frac{nk'}{k}\left\{\left\|v_m(t)\right\|^2 + k'kIm(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))\right\} \\
&\leq [(k')^2 + kk'']Im(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t)) \\
&-2k'kIm(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], y \cdot \nabla v_m(t)) + 2k'kIm(P_m f(t), y \cdot \nabla v_m(t)) \\
&+nk'kIm(f(t), v_m(t)) + 2Re\left(f(t), -\Delta v_m(t)\right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Definimos $h(t) = \left\|v_m(t)\right\|^2 + k'(t)k(t)Im(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))$ e a equação diferencial (3.28) como

$$h'(t) + \theta(t)h(t) \leq r(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.29}$$

com $\theta(t) = \dfrac{nk'}{k}$ e $r(t)$ sendo o segundo membro de (3.28).

Resolvendo (3.29) e observando que $\exp\left(\int_0^t \theta(s)ds\right) = \left[\dfrac{k(t)}{k(0)}\right]^n$, obtemos

$$h(t) \leq \left[\frac{k(0)}{k(t)}\right]^n h(0) + (k(t))^{-n} \int_0^t (k(s))^n r(s)ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\|v_m(t)\|^2 + k'(t)k(t)Im(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t)) \\
&\leq \left[\frac{k(0)}{k(t)}\right]^n \left[\|v_m(0)\|^2 + k'(0)k(0)Im(v_m(0), y\cdot\nabla v_m(0))\right] \\
&+(k(t))^{-n}\int_0^t (k(s))^n \Big\{[(k'(s))^2 + k(s)k''(s)]Im(v_m(s), y\cdot\nabla v_m(s)) \\
&-2k'(s)k(s)Im(P_m[|v_m(s)|^\rho v_m(s)], y\cdot\nabla v_m(s)) \\
&+2k'(s)k(s)Im(P_m f(s), y\cdot\nabla v_m(s)) \\
&+nk'(s)k(s)Im(f(s), v_m(s)) + 2Re\,(f(s), -\Delta v_m(s))\Big\}\,ds
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Como $k \in W^{2,\infty}_{loc}$, temos que $\forall T > 0, \exists$ constantes positivas $C_0(T)$, $C_1(T)$ e $C_2(T)$ tal que $\forall t \in [0,T]$,

- $k(s) = |k(s)| \leq \sup\limits_{0\leq s\leq T}\text{ess}|k(s)| \leq C_0(T)$;
- $|k'(s)| \leq \sup\limits_{0\leq s\leq T}\text{ess}|k'(s)| \leq C_1(T)$;
- $|k''(s)| \leq \sup\limits_{0\leq s\leq T}\text{ess}|k''(s)| \leq C_2(T)$.

Assim,

- $-k'(t)k(t)Im(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t)) \leq \dfrac{1}{2}C_1^2(T)C_0^2(T)M^2|v_m(t)|^2 + \dfrac{1}{2}\|v_m(t)\|^2,$

- $[(k'(t))^2 + k(t)k''(t)]Im(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))$

  $\leq \dfrac{1}{2}[C_1^2(T) + C_0(T)C_2(T)]^2M^2|v_m(t)|^2 + \dfrac{1}{2}\|v_m(t)\|^2,$

- $-2k'(t)k(t)Im(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t))$

  $\leq 2C_1(T)^2C_0(T)^2M^2||v_m(t)|^\rho v_m(t)|^2 + \dfrac{1}{2}\|v_m(t)\|^2,$

- $2k'(t)k(t)Im(P_m f(t), y\cdot\nabla v_m(t)) \leq 2C_1^2(T)C_0^2(T)M^2|f(t)|^2 + \dfrac{1}{2}\|v_m(t)\|^2,$

- $nk'(t)k(t)Im(f(t), v_m(t)) \leq \dfrac{1}{2}n^2C_1^2(T)C_0^2(T)|f(t)|^2 + \dfrac{1}{2}|v_m(t)|^2,$

- $Re\,(f(t), -\Delta v_m(t)) \leq |\,(f(t), -\Delta v_m(t))\,|.$

  Como $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ temos que $|(f(t), -\Delta v_m(t))| = |((f(t), v_m(t)))|$. Além disso, a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos garante que $|((f(t), v_m(t)))| \leq \|f(t)\|\,\|v_m(t)\|$.

  Logo, pela desigualdade de Young, $Re\,(f(t), -\Delta v_m(t)) \leq \dfrac{1}{2}\left(\|f(t)\|^2 + \|v_m(t)\|^2\right).$

Observação 3.2 *Temos que* $||v_m(t)|^\rho\, v_m(t)|^2 = \displaystyle\int_\Omega |v_m|^{2(\rho+1)}\, d\Omega = \|v_m(t)\|^{2(\rho+1)}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}$. *Pela hipótese* $(H2)$ *e pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, obtemos que*

- *Se* $n = 1$ *e* $0 \leq \rho < \infty$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$*;*
- *Se* $n = 2$ *e* $0 \leq \rho < \infty$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$*;*

- *Se* $n \geq 3$ *e* $0 \leq \rho \leq \dfrac{2}{n-2}$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$.

Dessa forma, obtemos que $\|v_m(t)\|^{2(\rho+1)}_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)} \leq C\|v_m(t)\|$.

Usando as desigualdades acima, as limitações (3.16) e (3.17), obtidas na primeira estimativa, e a convergência inicial (3.7), modificamos (3.30) por

$$\|v_m(t)\| \leq c_0 + c_1 \int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds,$$

com c_0 e c_1 sendo constantes positivas.

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos $\forall\ t \in [0,T]$

$$\|v_m(t)\|^2 \leq c_0 e^{c_1 t} \leq c_0 e^{c_1 T}.$$

Dessa forma, podemos concluir que

$$(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.31}$$

3.3.3 Passagem ao limite

Das limitações (3.16), (3.17), (3.31) e aplicando o Corolário 2.1 e o Teorema 2.2, segue que $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ possui subsequência também denotada por $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \tag{3.32}$$

$$v_m \rightharpoonup v \text{ em } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)); \tag{3.33}$$

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.34}$$

Consideramos o operador $-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ não limitado em $L^2(\Omega)$. Temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, para ρ conforme hipótese $(H2)$. Logo,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \text{ com } p = \rho + 2. \tag{3.35}$$

Seja P_m a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $V_m \subset L^2(\Omega)$ definida da seguinte forma $P_m : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ tal que $v \longmapsto P_m v = \sum_{j=1}^{m} (v, w_j) w_j$.

Temos que $P_m \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$ e $\|P_m\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \leq const$, assim, por (3.35), obtemos

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega);L^p(\Omega))} \leq const.$$

Daí e como P_m é auto-adjunta, segue que

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(L^{p'}(\Omega);H^{-1}(\Omega))} \leq const. \tag{3.36}$$

Multiplicando ambos os membros da equação aproximada (3.6) por w_j e somando em $j = 1, 2, \ldots, m$, obtemos

$$v_m' = \frac{k'}{k} P_m[y \cdot \nabla v_m] + i\frac{1}{k^2}\Delta v_m - P_m[|v_m|^\rho v_m] + P_m f. \tag{3.37}$$

Façamos as seguintes considerações:

Por (3.16), temos que $(y \cdot \nabla v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Assim, temos que $(P_m[y \cdot \nabla v_m])_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, já que $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ com $\|P_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq 1$. Por (3.31) e como $-\Delta$ é operador linear limitado de $H_0^1(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$, obtemos que $(\Delta v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Por (3.17), temos que $(|v_m|^\rho v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)) = L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))$. Assim, por (3.36), temos que $(P_m[|v_m|^\rho v_m])_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Além disso, como $f \in L^2(0,1;H_0^1(\Omega))$, temos que $P_m f$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Daí e como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, segue que

$$(v_m')_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.38}$$

Então, pelo Teorema 2.2, temos que

$$v_m' \rightharpoonup \phi \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.39}$$

Vamos mostrar que $\phi = v'$ em (3.39).

De fato, dizer que $v_m' \rightharpoonup \phi$ em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ significa que

$$\int_0^T \langle v_m'(t), \psi\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \phi(t), \psi\rangle dt, \forall \psi \in L^{\rho+2}(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Em particular, o resultado acima vale para $\psi = w(y)\theta(t)$, com $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$,

$$\int_0^T \langle v_m'(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \overline{\theta(t)} dt \longrightarrow \int_0^T \langle \phi(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \overline{\theta(t)} dt.$$

Consequentemente,

$$\left\langle \int_0^T v_m'(t)\overline{\theta(t)}dt, w \right\rangle \longrightarrow \left\langle \int_0^T \phi(t)\overline{\theta(t)}dt, w \right\rangle, \forall w \in H_0^1(\Omega), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T). \tag{3.40}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_0^T \langle v_m'(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\overline{\theta(t)}dt = -\int_0^T \langle v_m(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\overline{\theta'(t)}dt$$

$$\longrightarrow -\int_0^T \langle v(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\overline{\theta'(t)}dt,$$

ou seja,

$$\left\langle \int_0^T v_m'(t)\overline{\theta(t)}dt, w\right\rangle \longrightarrow -\left\langle \int_0^T v(t)\overline{\theta'(t)}dt, w\right\rangle \tag{3.41}$$

Da unicidade do limite da convervência fraca, de (3.40) e (3.41) temos que

$$\left\langle \int_0^T \phi(t)\overline{\theta(t)}dt, w\right\rangle = -\left\langle \int_0^T v(t)\overline{\theta'(t)}dt, w\right\rangle, \forall w \in H_0^1(\Omega), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Dessa forma, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$, $\displaystyle\int_0^T \phi(t)\overline{\theta(t)}dt = -\int_0^T v(t)\overline{\theta'(t)}dt$. Assim, $\phi = v'$ em $\mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Logo,

$$v_m' \rightharpoonup v' \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.42}$$

Além disso, como $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $(v_m')_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, considerando $B_0 = H_0^1(\Omega)$ com $p_0 = 2$, $B = L^2(\Omega)$ e $B_1 = H^{-1}(\Omega)$ com $p_1 = \frac{\rho+2}{\rho+1}$, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, pelo Teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de (v_m), que também será denotada por (v_m), tal que

$$v_m \longrightarrow v \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.43}$$

A partir destes resultados de convergência vamos prosseguir para realizar a passagem ao limite no problema aproximado.

Seja $\theta(t) \in \mathcal{D}(0,T)$. Consideramos j fixo e $m > j$. Multiplicamos a equação aproximada (3.6) por $\overline{\theta(t)}$. Integrando de 0 a T, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (v_m'(t), \theta(t) w_j)\, dt - \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)} (y \cdot \nabla v_m(t), \theta(t) w_j)\, dt \\
&+ \int_0^T i \frac{1}{k^2(t)} (\nabla v_m(t), \theta(t) \nabla w_j)\, dt + \int_0^T (|v_m(t)|^\rho \, v_m(t), \theta(t) w_j) dt \\
&= \int_0^T (f(t), \theta(t) w_j) dt, \ \forall j = 1, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Vamos estudar, separadamente, a convergência de cada termo do sistema anterior a seguir.

- Convergência do termo $\displaystyle\int_0^T (v_m'(t), \theta w_j)\, dt$

De (3.42), temos que

$$v_m' \rightharpoonup v' \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T; H^{-1}(\Omega)),$$

ou seja,

$$\langle v_m', \phi \rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^{\rho+2}(0,T;H_0^1(\Omega))} \to \langle v', \phi \rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^{\rho+2}(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

$\forall \phi \in L^{\rho+2}(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Assim,

$$\int_0^T \langle v_m'(t), \phi(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} dt \to \int_0^T \langle v'(t), \phi(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} dt,$$

$\forall \phi \in L^{\rho+2}(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Em particular, o resultado acima vale para $\phi = \theta w_j$, ou seja,

$$\int_0^T \langle v_m'(t), \theta w_j \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} dt \to \int_0^T \langle v'(t), \theta w_j \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} dt. \tag{3.45}$$

- Convergência do termo $\int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)} (y \cdot \nabla v_m(t), \theta w_j)\, dt$

Por (3.16), temos que a sequência $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, daí segue a limitação de $(y \cdot \nabla v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Assim, pelo Corolário 2.1, existe uma subsequência de $(y \cdot \nabla v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$(y \cdot \nabla v_m) \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.46}$$

ou seja,

$$\langle y \cdot \nabla v_m, \phi \rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\times L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to \langle \psi, \phi \rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\times L^1(0,T;L^2(\Omega))},$$

$\forall \phi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Assim,

$$\int_0^T (y \cdot \nabla v_m, \phi(t))\, dt \to \int_0^T (\psi(t), \phi(t))dt, \ \forall \phi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Em particular, o resultado acima vale para $\phi = \theta w_j$, ou seja,

$$\int_0^T (y \cdot \nabla v_m(t), \theta(t) w_j)\, dt \to \int_0^T (\psi(t), \theta(t) w_j)dt. \tag{3.47}$$

Mostraremos que $\psi = y \cdot \nabla v$. De fato, como $v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ em (3.34), temos que

$$\forall\ k = 1, \ldots, n, \ \ \frac{\partial v_m}{\partial y_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial v}{\partial y_k} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Dessa forma, obtemos que

$$\int_0^T (y \cdot \nabla v_m(t), \theta(t) w_j)\, dt = \int_0^T \int_\Omega y_k \frac{\partial v_m(t)}{\partial y_k} \overline{\theta(t)} w_j \; d\Omega dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v_m(t)}{\partial y_k} \overline{y_k \theta(t) w_j} \; d\Omega dt \;\longrightarrow\; \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v(t)}{\partial y_k} \overline{y_k \theta(t) w_j} \; d\Omega dt \tag{3.48}$$

$$= \int_0^T (y \cdot \nabla v(t), \theta(t) w_j)\, dt.$$

Da unicidade da convergência fraca estrela, por (3.47) e (3.48), temos que $\psi = y \cdot \nabla v$.

Logo,

$$\int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)} (y \cdot \nabla v_m(t), \theta w_j)\, dt \longrightarrow \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)} (y \cdot \nabla v(t), \theta w_j)\, dt. \tag{3.49}$$

- Convergência do termo $\displaystyle\int_0^T i \frac{1}{k^2(t)} (\nabla v_m(t), \theta \nabla w_j)\, dt$

De (3.34), temos que

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

e portanto $-\Delta v_m \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta v$ em $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$, já que $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é linear limitado.

Ou seja,

$$\langle -\Delta v_m, \phi \rangle_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \to \langle -\Delta v, \phi \rangle_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^1(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

$\forall \phi \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Assim,

$$\int_0^T \langle -\Delta v_m(t), \phi(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt \to \int_0^T \langle -\Delta v(t), \phi(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt,$$

$\forall \phi \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Em particular, o resultado acima vale para $\phi = \theta w_j$, ou seja,

$$\int_0^T \langle -\Delta v_m(t), \theta(t) w_j\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt \to \int_0^T \langle -\Delta v(t), \theta(t) w_j\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt.$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T i\frac{1}{k^2(t)}\left(\nabla v_m(t), \theta \nabla w_j\right) dt \\ &= \int_0^T i\frac{1}{k^2(t)}\langle -\Delta v_m(t), \theta w_j\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt \\ &\longrightarrow \int_0^T i\frac{1}{k^2(t)}\langle -\Delta v(t), \theta w_j\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt. \end{aligned} \tag{3.50}$$

- Convergência do termo não linear $\displaystyle\int_0^T (|v_m(t)|^\rho \, v_m(t), \theta w_j) dt$

Por (3.43), temos que v_m converge forte para v em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Pelo Teorema 2.5, existe uma subsequência de $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que denotaremos da mesma forma, tal que

$$v_m \to v \text{ em q.t.p. de } Q.$$

Daí, vem que,

$$|v_m(y,t)|^\rho \, v_m(y,t) \longrightarrow |v(y,t)|^\rho \, v(y,t) \text{ q. t. p. em } Q, \tag{3.51}$$

pois a função $\psi(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda$ é contínua em $\mathbb{R}$, para ρ conforme $(H2)$.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}\int_Q ||v_m(y,t)|^\rho\, v_m(y,t)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}\ dQ &= \int_Q |v_m(y,t)|^{\rho+2}\ dQ \\ &= \int_0^T \|v_m(s)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\ ds \leq C,\end{aligned} \tag{3.52}$$

com C sendo uma constante que independe de m por (3.17).

De (3.51), (3.52) e observando que $1 < \dfrac{\rho+2}{\rho+1} < +\infty$, pelo lema de Lions, temos que

$$|v_m|^\rho\, v_m \rightharpoonup |v|^\rho\, v \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q) = L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)). \tag{3.53}$$

isto é,

$$\int_0^T \langle |v_m(t)|^\rho\, v_m(t), \phi(t)\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\ dt \to \int_0^T \langle |v(t)|^\rho\, v(t), \phi(t)\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\ dt,$$

$\forall \phi \in L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))$.

Em particular, o resultado acima vale para $\phi = \theta w_j$, ou seja,

$$\int_0^T \langle |v_m(t)|^\rho\, v_m(t), \theta w_j\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\ dt \to \int_0^T \langle |v(t)|^\rho\, v(t), \theta w_j\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\ dt.$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), \theta w_j) dt = \int_0^T \langle |v_m(t)|^\rho\, v_m(t), \theta w_j\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\ dt \\ &\longrightarrow \int_0^T \langle |v(t)|^\rho\, v(t), \theta w_j\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\ dt.\end{aligned} \tag{3.54}$$

Após análise da convergência de todos os termos de (3.44), tomando o limite em m, obtemos

$$\int_0^T \langle v'(t), \theta w_j\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt - \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)} \left(y\cdot\nabla v(t), \theta w_j\right) dt$$

$$+ \int_0^T i\frac{1}{k^2(t)} \langle -\Delta v(t), \theta w_j\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \langle |v(t)|^\rho v(t), \theta w_j\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} dt$$

$$= \int_0^T (f(t), \theta w_j) dt, \ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Seja $z \in V = H_0^1(\Omega)$. Então, existe sequência $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que, $\forall m, z_m = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{mj} w_j \in V_m$ com $z_m \longrightarrow z$ em V.

Pela densidade de $\bigcup_{m=1}^{+\infty} V_m$ em V, em que $\bigcup_{m=1}^{+\infty} V_m$ denota o conjunto de todas as combinações lineares finitas com elementos dos conjuntos V_m, $\forall\ m \geq 1$ inteiro.

Multiplicando a equação acima por $\overline{\varphi_{mj}}$ e somando em $j = 1, \ldots, m$, obtemos

$$\int_0^T \langle v'(t), \theta z_m(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt - \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)} \left(y\cdot\nabla v(t), \theta z_m(t)\right) dt$$

$$+ \int_0^T i\frac{1}{k^2(t)} \langle -\Delta v(t), \theta z_m(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \langle |v(t)|^\rho v(t), \theta z_m(t)\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} dt$$

$$= \int_0^T (f(t), \theta z_m(t)) dt, \ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall z_m \in V_m.$$

Tomamos o limite em m e obtemos

$$\int_0^T \langle v'(t), \theta z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt - \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)} \left(y\cdot\nabla v(t), \theta z(t)\right) dt$$

$$+ \int_0^T i\frac{1}{k^2(t)} \langle -\Delta v(t), \theta z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \langle |v(t)|^\rho v(t), \theta z(t)\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} dt$$

$$= \int_0^T (f(t), \theta z(t)) dt, \ \forall \theta \ \in \mathcal{D}(0,T), \forall z \in V,$$

ou seja,

$$\int_0^T \langle v'(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\overline{\theta}dt - \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)}\left(y\cdot\nabla v(t), z(t)\right)\overline{\theta}dt$$

$$+\int_0^T i\frac{1}{k^2(t)}\left\langle -\Delta v(t), z(t)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\overline{\theta}dt + \int_0^T \left\langle |v(t)|^\rho v(t), z(t)\right\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\overline{\theta}dt$$

$$= \int_0^T (f(t), z(t))\overline{\theta}dt,\ \forall\ \theta\in\mathcal{D}(0,T), \forall\ z\in V.$$

Pela observação 3.2, temos que $V\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)\hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\equiv L^2(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\hookrightarrow V'$. Assim, obtemos

$$\int_0^T \langle v'(t), z\rangle_{V'\times V}\overline{\theta}dt - \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)}\left\langle y\cdot\nabla v(t), z\right\rangle_{V'\times V}\overline{\theta}dt$$

$$+\int_0^T i\frac{1}{k^2(t)}\left\langle -\Delta v(t), z\right\rangle_{V'\times V}\overline{\theta}dt + \int_0^T \left\langle |v(t)|^\rho v(t), z\right\rangle_{V'\times V}\overline{\theta}dt$$

$$= \int_0^T \langle f(t), z\rangle_{V'\times V}\overline{\theta}dt,\ \forall\ \theta\in\mathcal{D}(0,T).$$

Dessa forma, pela propriedade da Integral de Bochner, podemos escrever a seguinte dualidade

$$\left\langle \int_0^T v'(t)\theta dt - \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)}y\cdot\nabla v(t)\theta dt - i\int_0^T \frac{1}{k^2(t)}\Delta v(t)\theta dt\right.$$

$$\left. + \int_0^T |v(t)|^\rho v(t)\theta dt, z\right\rangle_{V'\times V} = \left\langle \int_0^T f(t)\theta dt, z\right\rangle_{V'\times V},\ \forall z\in V.$$

Dessa forma,

$$\int_0^T v'(t)\theta dt - \int_0^T \frac{k'(t)}{k(t)}y\cdot\nabla v(t)\theta dt - i\int_0^T \frac{1}{k^2(t)}\Delta v(t)\theta dt$$

$$+\int_0^T |v(t)|^\rho v(t)\theta dt = \int_0^T f(t)\theta dt,\ \forall\ \theta\in\mathcal{D}(0,T).$$

Portanto,

$$\left\langle v' - \frac{k'}{k} y \cdot \nabla v - i \frac{1}{k^2} \Delta v + |v|^\rho v, \theta \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T;V') \times \mathcal{D}(0,T)} = \langle f, \theta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T;V') \times \mathcal{D}(0,T)} .$$

Dessa forma,

$$v' - \frac{k'}{k} y \cdot \nabla v - i \frac{1}{k^2} \Delta v + |v|^\rho v = f \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;V').$$

Como

$$v' \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega));$$

$$\frac{k'}{k} y \cdot \nabla v \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega));$$

$$-i \frac{1}{k^2} \Delta v \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega));$$

$$|v|^\rho v \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega));$$

$$f \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega));$$

temos que,

$$v' - \frac{k'}{k} y \cdot \nabla v - i \frac{1}{k^2} \Delta v + |v|^\rho v = f \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.55}$$

3.3.4 Verificação do dado inicial

Das convergências, obtemos que

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

e

$$v'_m \rightharpoonup v' \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Observemos que

$$\int_0^T \langle v_m(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle v(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta'(t)\ dt$$

e

$$\int_0^T \langle v_m'(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle v'(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta(t)\ dt$$

$\forall z \in H_0^1(\Omega), \forall \theta \in C^1[0,T],$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$.

Assim,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[\langle v_m(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta(t)]\ dt = \int_0^T [\langle v_m'(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta(t)$$

$$+\langle v_m(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta'(t)]\ dt \longrightarrow \int_0^T [\langle v'(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta(t)$$

$$+\langle v(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta'(t)]\ dt = \int_0^T \frac{d}{dt}[\langle v(t), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\theta(t)]\ dt.$$

Como $v_m, \forall m \in \mathbb{N}$, e $v \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)$ e $v_m', \forall m \in \mathbb{N}$, e $v' \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ então, pelo Lema 2.3, obtemos $v_m, \forall m \in \mathbb{N}$, e $v \in C([0,T], H^{-1}(\Omega))$. Daí e da caracterização de θ, segue que

$$-\langle v_m(0), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \longrightarrow -\langle v(0), z\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)},\ \forall z \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$v_{0m} = v_m(0) \rightharpoonup v(0) \text{ em } H^{-1}(\Omega). \tag{3.56}$$

Por outro lado, temos que

$$v_m(0) = v_{0m} \longrightarrow v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega). \tag{3.57}$$

Se $v_m(0)$ converge forte para v_0, em particular, converge fraco. Assim, pela unicidade do limite fraco, temos que $v(0) = v_0$.

3.3.5 Unicidade da solução

Sejam v_1 e v_2 soluções do problema (3.3). Consideremos $z = v_2 - v_1$. Logo, $z \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{\rho+2}(0,T; L^{\rho+2}(\Omega))$ e $z' \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T; H^{-1}(\Omega))$.

Assim, para todo $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)$, q. s. em $]0,T[$,

$$\begin{aligned} &\langle v_1'(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla v_1(t), w\right) + i\frac{1}{k^2}\langle -\Delta v_1(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \\ &+ \langle |v_1(t)|^\rho v_1(t), w\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} = (f(t), w) \end{aligned} \tag{3.58}$$

e

$$\begin{aligned} &\langle v_2'(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla v_2(t), w\right) + i\frac{1}{k^2}\langle -\Delta v_2(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \\ &+ \langle |v_2(t)|^\rho v_2(t), w\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} = (f(t), w). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Então, fazendo a diferença das equações (3.58) e (3.59), temos

$$\begin{aligned} &\langle z'(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla z(t), w\right) + i\frac{1}{k^2}\langle -\Delta z(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \\ &+ \langle |v_2(t)|^\rho v_2(t) - |v_1(t)|^\rho v_1(t), w\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Daí, tomando $w = z(t)$,

$$\begin{aligned} &\langle z'(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla z(t), z(t)\right) + i\frac{1}{k^2}\langle -\Delta z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \\ &+ \langle |v_2(t)|^\rho v_2(t) - |v_1(t)|^\rho v_1(t), z(t)\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Tomando a parte real da equação acima, teremos, de forma análoga à 1^a

Estimativa, que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \frac{nk'}{k}|z(t)|^2$$

$$+Re\left\langle |v_2(t)|^\rho v_2(t) - |v_1(t)|^\rho v_1(t), z(t)\right\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} = 0.$$

Observe que,

$$\left\langle |v_2(t)|^\rho v_2(t) - |v_1(t)|^\rho v_1(t), z(t)\right\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega \{|v_2|^\rho v_2 - |v_1|^\rho v_1\} \cdot \{\overline{v_2} - \overline{v_1}\}\ d\Omega$$

$$= \int_\Omega |v_2|^{\rho+2} + |v_1|^{\rho+2} - |v_2|^\rho v_2\overline{v_1} - |v_1|^\rho v_1\overline{v_2}\ d\Omega.$$

Assim,

$$Re\left\langle |v_2(t)|^\rho v_2(t) - |v_1(t)|^\rho v_1(t), z(t)\right\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega |v_2|^{\rho+2} + |v_1|^{\rho+2}\ d\Omega - Re\int_\Omega |v_2|^\rho v_2\overline{v_1} + |v_1|^\rho v_1\overline{v_2}\ d\Omega$$

$$\geq \int_\Omega |v_2|^{\rho+2} + |v_1|^{\rho+2}\ d\Omega - \int_\Omega |v_2|^\rho|v_2||v_1| + |v_1|^\rho|v_1||v_2|\ d\Omega$$

$$= \int_\Omega |v_2|^{\rho+1}(|v_2| - |v_1|)\ d\Omega - \int_\Omega |v_1|^{\rho+1}(|v_2| - |v_1|)\ d\Omega$$

$$= \int_\Omega (|v_2|^{\rho+1} - |v_1|^{\rho+1})(|v_2| - |v_1|)\ d\Omega \geq 0.$$

Dessa forma, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \frac{nk'}{k}|z(t)|^2 \leq 0 \text{ q. s. em }]0, T[,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\langle z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \leq \frac{2n|k'|}{k}|z(t)|^2 \text{ q. s. em }]0, T[.$$

Daí e observando que aplicando o lema 2.4, temos que $z \in C([0,T], H_0^1(\Omega))$, graças à regularidade da solução, segue que, integrando de 0 a $t \in [0,T]$, obtemos

$$\langle z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \leq \langle z(0), z(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \int_0^t \frac{2n|k'(s)|}{k(s)}|z(s)|^2 ds.$$

Usando a desigualdade de Gronwall e observando que $z(0) = 0$, obtemos

$$\langle z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \leq 0, \ \forall\ t \in [0,T].$$

Mas,

$$\langle z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |z(t)|^2 d\Omega \geq 0$$

.

Logo,

$$\langle z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = 0, \tag{3.60}$$

isto é, $|z(t)|^2_{L^2(\Omega)} = 0$. Acarretando em $v_2 = v_1$.

4 EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR COM FRONTEIRA MÓVEL (CASO N=1)

Neste capítulo, estudamos uma mudança de variável mais geral para o problema proposto no caso unidimensional.

4.1 Notação

Sejam $T > 0$ e $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funções reais definidas sobre os números reais não negativos $[0, \infty[$, com $\beta(t) > \alpha(t),\ \forall\ t \geq 0$.

Para cada $t \in [0, T]$, consideramos $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}; \alpha(t) < x < \beta(t)\}$. Seja $\hat{Q}$ o domínio de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\hat{Q} = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times]0, T[\,; x \in \Omega_t\} = \bigcup_{0<t<T} (\Omega_t \times \{t\}),$$

cuja fronteira lateral $\hat{\Sigma}$ é definida por

$$\hat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} (\Gamma_t \times \{t\}),$$

com Γ_t sendo a fronteira de Ω_t, isto é, $\Gamma_t = \{\alpha(t), \beta(t)\}$.

O objetivo deste capítulo é estabelecer a existência e unicidade de solução para o problema de fronteira móvel

$$\left| \begin{array}{l} u'(x,t) - i\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + |u(x,t)|^\rho \, u(x,t) = \hat{f}(x,t) \ \text{ em } \ \hat{Q}, \\ \\ u(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \hat{\Sigma}, \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ em } \ \Omega_0. \end{array} \right. \qquad (i^2 = -1) \tag{4.1}$$

A existência e a unicidade de solução do problema (4.1) será demonstrada por meio de uma mudança de variável. Esta transformará o problema em estudo em um problema equivalente, mas com domínio cilíndrico, cujas seções não dependem do tempo t, nos permitindo usar resultados de compacidade e o método de Galerkin.

Transformamos o domínio $\hat{Q}$ em um domínio cilíndrico $Q = \Omega \times (0,T)$, definindo $y := \dfrac{2x - \alpha(t) - \beta(t)}{\gamma(t)}$, com $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ e $x \in \Omega_t$. Notemos que ao variar (x,t) no domínio $\hat{Q}$, o ponto (y,t) de $\mathbb{R}^2$ varia no cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$, com $\Omega = (-1,1)$.

Dessa forma, se $\alpha(t), \beta(t)$ diferenciáveis em $(0,T)$, consideramos o seguinte difeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \tau : \hat{Q} & \rightarrow & Q = (-1,1) \times (0,T) \\ (x,t) & \longmapsto & (y,t) = \left(\dfrac{2x - \alpha(t) - \beta(t)}{\gamma(t)}, t \right), \end{array} \tag{4.2}$$

com $\gamma(t)$ diferenciável e não nula.

Usando o difeomorfismo (4.2), observando que $x(t) = \dfrac{\gamma(t)y + \alpha(t) + \beta(t)}{2}$ e denotando por

$$u(x,t) = \left(u \text{ o } \tau^{-1} \right)(y,t) = v(y,t)$$

teremos as seguintes identidades

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \dfrac{2}{\gamma(t)}\dfrac{\partial v(y,t)}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{4}{\gamma^2(t)}\dfrac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2}, \\[2ex] u'(x,t) = v'(y,t) - \left(\dfrac{\gamma'(t)y + \alpha'(t) + \beta'(t)}{\gamma(t)}\right)\dfrac{\partial v(y,t)}{\partial y}. \end{cases}$$

Usando as identidades acima, o problema (4.1) é transformado no seguinte problema equivalente definido no cilindro $Q = \Omega\times(0,T)$ com fronteira $\Sigma = \Gamma\times(0,T)$

$$\left| \begin{array}{l} v'(y,t) - a(y,t)\dfrac{\partial v(y,t)}{\partial y} - i\dfrac{4}{\gamma^2(t)}\dfrac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} \\[2ex] \quad + \left|v(y,t)\right|^{\rho} v(y,t) = f(y,t) \ \text{ em } \ Q, \qquad\qquad (i^2 = -1) \\[2ex] v(y,t) = 0 \ \text{ em } \ \Sigma, \\[2ex] v(y,0) = v_0(y) \ \text{ em } \ \Omega, \end{array} \right. \tag{4.3}$$

com $a(y,t) = \dfrac{\gamma'(t)y + \alpha'(t) + \beta'(t)}{\gamma(t)}$ e $f(y,t) = \hat{f}\left(\dfrac{\gamma(t)y + \alpha(t) + \beta(t)}{2}, t\right)$.

Notemos que quando $\alpha(t) = -\beta(t)$, temos que $x = \dfrac{\gamma(t)y + \alpha(t) + \beta(t)}{2} = \beta(t)y$, em que $\gamma(t) = 2\beta(t)$, a mesma mudança de variável que usamos no caso $\mathbb{R}^n$.

Mostraremos a existência e a unicidade da solução do problema (4.3) garantindo a existência e unicidade da solução do problema (4.1), pelo difeomorfismo.

Com a finalidade de anunciar o resultado principal no presente trabalho, vamos fixar as seguintes hipóteses sobre as funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, e ρ:

- (H1) $\alpha(t), \beta(t) \in W^{2,\infty}_{loc}([0,\infty[)$;

- (H2) $\exists\gamma_0 > 0$ tal que $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) \geq \gamma_0, \;$ para todo $t \geq 0$;
- (H3) $0 \leq \rho < \infty$.

4.2 Resultados principais

Teorema 4.1 *Sob as as hipóteses (H1), (H2) e (H3), considerando o dado inicial* $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)$ *e* $\hat{f} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t))$, *existe uma única função* $u : \hat{Q} \to \mathbb{C}$, *satisfazendo as condições:*

1. $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega_t)),$ *com* $p = \rho + 2$;
2. $u' \in L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega_t)),$ *com* $p' = \frac{\rho+2}{\rho+1}$;
3. $u' - i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}u + |u|^\rho\, u = \hat{f}$ *em* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$;
4. $u(0) = u_0$ *em* Ω_0.

Devido ao difeomorfismo (4.2), u é uma solução do problema (4.1) pelo Teorema (4.1) se, e somente se, v é uma solução do problema (4.3) pelo seguinte teorema

Teorema 4.2 *Sob as as hipóteses (H1), (H2) e (H3), considerando o dado inicial* $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ *e* $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, *existe uma única função* $v : Q \to \mathbb{C}$, *satisfazendo as condições:*

1. $v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega)),$ *com* $p = \rho + 2$;
2. $v' \in L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega)),$ *com* $p' = \frac{\rho+2}{\rho+1}$;

3. $v' - \dfrac{\gamma' y + \alpha' + \beta'}{\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{4}{\gamma^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + |v|^\rho v = f$ *em* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega))$;

4. $v(0) = v_0$ *em* Ω.

O problema (4.1) está definido no domínio cilíndrico Q. Assim, podemos estabelecer a existência e a unicidade de solução usando técnicas apropriadas para domínios cilíndricos.

A demonstração do Teorema (4.2) é baseada no Método de Faedo-Galerkin, seguindo as seguintes etapas:

- Existência de soluções aproximadas em subespaços de dimenssão finita;
- Estimativas sobre as soluções aproximadas;
- Passagem ao limite das soluções aproximadas;
- Verificação dos dados iniciais;
- Unicidade de solução.

4.3 Demonstração do teorema 4.2

4.3.1 Soluções aproximadas

Seja $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ base Hilbertiana de $L^2(\Omega)$ constituída das soluções do Problema Espectral (3.4) e que formam, como no capítulo anterior, um sistema ortogonal completo em $V = H_0^1(\Omega)$.

Consideramos V_m o subespaço gerado pelas m primeiras autofunções do $-\Delta$, ou seja, $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, desejamos determinar $v_m(y,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(y) \in V_m$ solução do problema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} (v_m'(t), w_j) - \left(a(t) \dfrac{\partial v_m(t)}{\partial y}, w_j \right) - i \dfrac{4}{\gamma^2} \left(\dfrac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}, w_j \right) \\ \quad + (|v_m(t)|^\rho \, v_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \;\text{ em }\; Q, \forall\, j = 1, 2, \ldots, m, \\ v_m(-1,t) = v_m(1,t) = 0, \; 0 < t < T, \\ v_m(0) = v_{0m} \;\text{ em }\; \Omega. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Integrando por partes a terceira parcela de (4.4), para cada $m \in \mathbb{N}$, teremos que o problema aproximado será dado por

$$\left| \begin{array}{l} (v_m'(t), w_j) - \left(a(t) \dfrac{\partial v_m(t)}{\partial y}, w_j \right) + i \dfrac{4}{\gamma^2} \left(\dfrac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \dfrac{\partial w_j}{\partial y} \right) \\ \quad + (|v_m(t)|^\rho \, v_m(t), w_j) = (f(t), w_j) \;\text{ em }\; Q, \forall\, j = 1, 2, \ldots, m \\ v_m(-1,t) = v_m(1,t) = 0, \; 0 < t < T, \\ v_m(y,0) = v_{0m}(y) \;\text{ em }\; \Omega, \end{array} \right. \tag{4.5}$$

com $v_{0m}(y) = \sum_{j=1}^{m} (v_0, w_j) w_j$.

Além disso, como em (3.7), obtemos que

$$v_m(0) = v_{0m} \longrightarrow v_0 \text{ em } V. \tag{4.6}$$

O sistema aproximado (4.5) possui solução local v_m definida em $[0, t_m[$, para algum $0 < t_m < T$, pelo Teorema de Carathéodory. A seguir, mostraremos que essas soluções são limitadas independentemente de m e t a fim de prolongar a solução em todo intervalo $[0,T]$ e obter a convergência de v_m para v, solução do problema cilíndrico. Para isso, faremos estimativas a priori.

4.3.2 Estimativas a priori

Para prolongar a solução em todo intervalo $[0,T]$ faremos a estimativa que segue.

4.3.2.1 Primeira estimativa

Multiplicando ambos os membros de (4.5) por $\overline{g_{jm}(t)}$, conjugado de $g_{jm}(t)$, e somando em $j=1,2,\ldots,m$, teremos

$$\begin{aligned}&(v_m'(t), v_m(t)) - \left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right) + i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)\\ &+(|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t)) = (f(t), v_m(t)).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Observemos que as funções $w_j(y)$ são reais, assim, $\overline{v_m(y,t)} = \sum_{j=1}^{m} \overline{g_{jm}(t)} w_j(y)$.

Considerando a parte real de (4.7), teremos que

$$\begin{aligned}&Re\,(v_m'(t), v_m(t)) - Re\left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right) + Re\left(i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)\right)\\ &+Re(|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t)) = Re(f(t), v_m(t)).\end{aligned} \tag{4.8}$$

- Análise do termo $Re\,(v_m'(t), v_m(t))$

De forma análoga ao termo (3.10), temos que

$$Re\left(v_m'(t), v_m(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_m(t)\right|^2. \tag{4.9}$$

- Análise do termo $Re\left(a(t)\dfrac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)$

Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)v_m\right) = \frac{\partial a(y,t)}{\partial y}v_m + a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(a(y,t)v_m\right)\overline{v_m}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)v_m\right)\overline{v_m} + a(y,t)v_m\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}.$$

Além disso, como $w_j(-1) = w_j(1) = 0$, temos que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)v_m\overline{v_m}\right)\, d\Omega = \left(a(y,t)v_m\overline{v_m}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Desta forma, utilizando integração por partes, obtemos

$$\left(a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m(t)\right) = \int_\Omega a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\overline{v_m}\, d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)v_m\right)\overline{v_m}\, d\Omega$$

$$-\int_\Omega \frac{\partial a(y,t)}{\partial y}v_m\overline{v_m}\, d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}(a(y,t)v_m\overline{v_m})\, d\Omega - \int_\Omega a(y,t)v_m\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\, d\Omega$$

$$-\frac{\gamma'}{\gamma}\int_\Omega v_m\overline{v_m}\, d\Omega = -\int_\Omega a(y,t)v_m\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\, d\Omega - \frac{\gamma'}{\gamma}|v_m(t)|^2$$

$$= -\int_\Omega \overline{a(y,t)\overline{v_m}\frac{\partial v_m}{\partial y}}\, d\Omega - \frac{\gamma'}{\gamma}|v_m(t)|^2 = -\overline{\int_\Omega a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\overline{v_m}\, d\Omega} - \frac{\gamma'}{\gamma}|v_m(t)|^2.$$

Assim, obtemos que

$$2Re\left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right) = -\frac{\gamma'}{\gamma}|v_m(t)|^2.$$

Logo,

$$Re\left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right) = -\frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}|v_m(t)|^2. \tag{4.10}$$

- Análise do termo $Re\left(i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)\right)$

De forma análoga ao termo (3.12), temos que

$$Re\left(i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)\right) = 0. \tag{4.11}$$

- Análise do termo não linear $Re(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), v_m(t))$

De forma análoga ao termo não linear (3.13), temos que

$$Re(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), v_m(t)) = \int_\Omega |v_m|^{\rho+2}\ d\Omega. \tag{4.12}$$

- Análise do termo $Re(f(t), v_m(t))$

De forma análoga ao termo (3.14), temos que

$$Re(f(t), v_m(t)) \leq \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |v_m(t)|^2\right). \tag{4.13}$$

Dessa forma, substituindo (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13) em (4.8), teremos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}|v_m(t)|^2 + \int_\Omega |v_m|^{\rho+2}\ d\Omega \leq \frac{1}{2}\left(|f(t)|^2 + |v_m(t)|^2\right),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left|v_m(t)\right|^2+\frac{\gamma'}{\gamma}\left|v_m(t)\right|^2+2\int_\Omega \left|v_m(t)\right|^{\rho+2}\ d\Omega\leq \left|f(t)\right|^2+\left|v_m(t)\right|^2.$$

Integrando de 0 a $t<T_m$, teremos

$$\begin{aligned}&\left|v_m(t)\right|^2+\int_0^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\left|v_m(s)\right|^2\ ds+2\int_0^t\int_\Omega \left|v_m(y,s)\right|^{\rho+2}\ d\Omega\ ds\\&\leq \left|v_m(0)\right|^2+\int_0^t\left|f(s)\right|^2\ ds+\int_0^t\left|v_m(s)\right|^2\ ds.\end{aligned}$$

De (4.6), temos que $(v_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em V. Ou seja, existe uma constante real $M_1>0$, tal que $\|v_m(0)\|<M_1, \forall\ m\in\mathbb{N}$. Além disso, $\forall\ t\in[0,T]$

$$\int_0^t\left|f(s)\right|^2\ ds\leq\int_0^T\left|f(s)\right|^2\ ds=\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Ou seja, existe uma constante real $0<M_2=\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$, tal que

$$\int_0^t\left|f(s)\right|^2\ ds\leq M_2, \forall\ t\in[0,T].$$

Tomando $M_3=M_1+M_2$, teremos que

$$\begin{aligned}&\left|v_m(t)\right|^2+\int_0^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\left|v_m(s)\right|^2\ ds+2\int_0^t\int_\Omega \left|v_m(y,s)\right|^{\rho+2}\ d\Omega\ ds\\&\leq M_3+\int_0^t\left|v_m(s)\right|^2\ ds.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Como o integrando do terceiro termo do primeiro membro da desigualdade (4.14) é não negativo, podemos considerar

$$\left|v_m(t)\right|^2\leq M_3+\int_0^t\frac{\left|\gamma'(s)\right|}{\gamma(s)}\left|v_m(s)\right|^2\ ds+\int_0^t\left|v_m(s)\right|^2\ ds.$$

ou seja,

$$|v_m(t)|^2 \leq M_3 + \int_0^t \left[\frac{|\gamma'(s)|}{\gamma(s)} + 1\right] |v_m(s)|^2 \, ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall, obtemos $\forall \, t \in [0, T_m]$

$$|v_m(t)|^2 \leq M_3 \exp\left(\int_0^t \frac{n|\gamma'(s)|}{\gamma(s)} + 1 \, ds\right) \leq C_1,$$

com $C_1 = M_3 \exp\left[T\left(\frac{nC(T)}{\gamma_0} + 1\right)\right]$, pois $\gamma(s) \geq \gamma_0 > 0$, $\forall \, t \geq 0$, e porque $|\gamma'(s)| \leq \sup\limits_{0 \leq s \leq T} \text{ess}|k'(s)| \leq C(T)$, pois $\gamma \in W^{2,\infty}_{loc}$. Assim, obtemos que $\int_0^t \frac{n|\gamma'(s)|}{\gamma(s)} \, ds \leq \int_0^T \frac{n|\gamma'(s)|}{\gamma(s)} \, ds \leq \int_0^T \frac{nC(T)}{\gamma_0} \, ds \leq \frac{TnC(T)}{\gamma_0}$.

Então, tal estimativa nos permite prolongar a solução v_m em todo intervalo $[0, T]$. Diante disso e a partir de (3.15), obtemos, $\forall \, t \in [0, T]$, que

$$|v_m(t)|^2 + 2\int_0^t \int_\Omega |v_m(y, s)|^{\rho+2} \, d\Omega \, ds \leq M_3 + TC_1 = \hat{C}_1.$$

Dessa forma, podemos concluir que

$$\|v_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \left(\sup_{t \in]0,T[} \text{ess} \, |v_m(t)|^2\right)^2 \leq \hat{C}_1$$

e

$$\int_0^T \int_\Omega |v_m(y, s)|^{\rho+2} \, d\Omega \, ds \leq \hat{C}_1.$$

Mas,

$$\int_0^T \int_\Omega |v_m(y, s)|^{\rho+2} \, d\Omega \, ds = \int_0^T \|v_m(y, s)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \, ds = \|v_m\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))}.$$

Daí, segue que,

$$(v_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{4.15}$$

e

$$(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{4.16}$$

4.3.2.2 Segunda estimativa

Esta estimativa tem por finalidade buscar uma maior regularidade para v_m e uma limitação melhor para $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Para isso, multiplicamos ambos os membros de (4.5) por λ_j e observando que $-\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} = \lambda_j w_j$, por (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(v_m'(t), -\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}\right) - \left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, -\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}\right) + i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}\right)\right)\\
&+\left(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), -\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}\right) = \left(f(t), -\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Agora, multiplicando ambos os membros de (3.18) por $\overline{g_{jm}(t)}$ e somando em $j = 1, 2, \ldots, m$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(v_m'(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) - \left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) + i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right)\right)\\
&+\left(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) = \left(f(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Considerando a parte real de (3.19), teremos que

$$\begin{aligned}
&Re\left(v_m'(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) - Re\left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right)\\
&+Re\left(i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right)\right)\right)\\
&+Re\left(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) = Re\left(f(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

- Análise do termo $Re\left(v_m'(t), -\dfrac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right)$

De forma análoga ao termo (3.21), temos que

$$Re\left(v_m'(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_m(t)\right\|^2. \tag{4.20}$$

- Análise do termo $Re\left(a(t)\dfrac{\partial v_m(t)}{\partial y}, -\dfrac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right)$

Notemos que,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\right) = \frac{\partial a(y,t)}{\partial y}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y} + a(y,t)\frac{\partial^2 \overline{v_m}}{\partial y^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(a(y,t)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\right)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\right)\frac{\partial v_m}{\partial y} + \left(a(y,t)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}.$$

Dessa forma, utilizando integração por partes, teremos

$$\begin{aligned}
&\left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) = -\int_\Omega a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial^2 \overline{v_m}}{\partial y^2}\, d\Omega \\
&= \int_\Omega \frac{\partial a(y,t)}{\partial y}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\, d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\right)\frac{\partial v_m}{\partial y}\, d\Omega \\
&= \int_\Omega \frac{\partial a(y,t)}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\, d\Omega + \int_\Omega a(y,t)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\, d\Omega \\
&- \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)\, d\Omega = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\int_\Omega \frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\, d\Omega \\
&+ \int_\Omega \overline{a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\frac{\partial^2 \overline{v_m}}{\partial y^2}}\, d\Omega - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right)\, d\Omega.
\end{aligned}$$

Assim,

$$2Re\left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\|v_m(t)\|^2 - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right)\, d\Omega.$$

Logo,

$$Re\left(a(t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\|v_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right)\, d\Omega. \tag{4.21}$$

- Análise do termo $Re\left(i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right)\right)\right)$

De forma análoga ao termo (3.25), temos que

$$Re\left(i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right)\right)\right) = 0. \tag{4.22}$$

- Análise do termo não linear $Re\left(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right)$

De forma análoga ao termo não linear (3.26), temos que

$$Re\left(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) \geq 0. \tag{4.23}$$

Substituindo (4.20), (4.21) e (4.22) em (4.19), e observando que, de (4.23), $Re\left(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right) \geq 0$, teremos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\frac{\gamma'}{\gamma}\|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right)\, d\Omega \leq Re\left(f(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2 - \frac{\gamma'}{\gamma}\|v_m(t)\|^2 + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right)\, d\Omega \leq 2Re\left(f(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right). \tag{4.24}$$

Pelo Apêndice B, identidade (B.16), modificamos a equação (4.24) obtendo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\|v_m(t)\|^2 + \frac{\gamma^2}{4}Im\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)\right\} \\
&+\frac{\gamma'}{\gamma}\left\{\|v_m(t)\|^2 + \frac{\gamma^2}{4}Im\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)\right\} \\
&\leq \frac{\gamma'}{2}Im(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t)) + \frac{\gamma^2}{4}Im\left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right) \qquad (4.25)\\
&-\frac{\gamma^2}{2}Im\left(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) + \frac{\gamma^2}{2}Im\left(P_m f(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) \\
&+\frac{\gamma\gamma'}{4}Im\left(f(t), v_m(t)\right) + 2Re\left(f(t), -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}\right).
\end{aligned}$$

Definimos $h(t) = \|v_m(t)\|^2 + \dfrac{\gamma^2}{4}Im\left(v_m(t), a(y,t)\dfrac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)$ e a equação diferencial (4.25) como

$$h'(t) + \theta(t)h(t) \leq r(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4.26}$$

com $\theta(t) = \dfrac{\gamma'}{\gamma}$ e $r(t)$ sendo o segundo membro de (4.25).

Procedendo de forma análoga a resolução da equação (3.29), concluimos que

$$\|v_m(t)\| \leq c_0 + c_1\int_0^t \|v_m(s)\|^2 ds,$$

com c_0 e c_1 sendo constantes positivas.

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos $\forall\ t \in [0,T]$

$$\|v_m(t)\|^2 \leq c_0 e^{c_1 t} \leq c_0 e^{c_1 T}.$$

Dessa forma, podemos concluir que

$$(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.27}$$

4.3.3 Passagem ao limite

Das limitações (4.15), (4.16), (4.27) e aplicando o Corolário 2.1 e o Teorema 2.2, segue que $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ possui subsequência também denotada por $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \tag{4.28}$$

$$v_m \rightharpoonup v \text{ em } L^{\rho+2}(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)); \tag{4.29}$$

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.30}$$

De forma análoga as convergências (3.42) e (3.43), podemos concluir que

$$v'_m \rightharpoonup v' \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{4.31}$$

e

$$v_m \longrightarrow v \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.32}$$

A partir destes resultados de convergência vamos prosseguir para realizar a passagem ao limite no problema aproximado.

Seja $\theta(t) \in \mathcal{D}(0,T)$. Consideramos j fixo e $m > j$. Multiplicamos a equação aproximada (4.5) por $\overline{\theta(t)}$. Integrando de 0 a T, temos que

$$\begin{aligned} &\int_0^T (v_m'(t), \theta(t) w_j)\, dt - \int_0^T \left(a(t) \frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \theta(t) w_j \right) dt \\ &+ \int_0^T i \frac{4}{\gamma^2(t)} \left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \theta(t) \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) dt + \int_0^T (|v_m(t)|^\rho \, v_m(t), \theta(t) w_j) dt \qquad (4.33) \\ &= \int_0^T (f(t), \theta(t) w_j) dt, \ \forall j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Vamos estudar, separadamente, a convergência de cada termo do sistema anterior a seguir.

- Convergência do termo $\displaystyle\int_0^T (v_m'(t), \theta(t) w_j)\, dt$

De forma análoga ao termo (3.45), temos que

$$\int_0^T \langle v_m'(t), \theta w_j \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} dt \to \int_0^T \langle v'(t), \theta w_j \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} dt.$$

- Convergência do termo $\displaystyle\int_0^T \left(a(t) \frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \theta(t) w_j \right) dt$

De forma análoga ao termo (3.49), temos que

$$\int_0^T \left(a(t) \frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \theta w_j \right) dt \longrightarrow \int_0^T \left(a(t) \frac{\partial v(t)}{\partial y}, \theta w_j \right) dt.$$

- Convergência do termo $\displaystyle\int_0^T i \frac{4}{\gamma^2(t)} \left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \theta(t) \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) dt$

De forma análoga ao termo (3.50), temos que

$$\int_0^T i\frac{4}{\gamma^2(t)}\left(\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \theta(t)\frac{\partial w_j}{\partial y}\right)dt = \int_0^T i\frac{4}{\gamma^2(t)}\left(\frac{-\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}, \theta(t)\frac{\partial w_j}{\partial y}\right)dt$$

$$= \int_0^T i\frac{4}{\gamma^2(t)}\left\langle -\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}, \theta w_j\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt$$

$$\longrightarrow \int_0^T i\frac{4}{\gamma^2(t)}\left\langle -\frac{\partial^2 v(t)}{\partial y^2}, \theta w_j\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt.$$

- Convergência do termo $\displaystyle\int_0^T (|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), \theta w_j)dt$

De forma análoga ao termo (3.54), temos que

$$\int_0^T (|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), \theta w_j)dt = \int_0^T \langle |v_m(t)|^\rho\, v_m(t), \theta w_j\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\, dt$$

$$\to \int_0^T \langle |v(t)|^\rho\, v(t), \theta w_j\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\, dt.$$

Após análise da convergência de todos os termos de (3.44), tomando o limite em m, obtemos

$$\int_0^T \langle v'(t), \theta w_j\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt - \int_0^T \left(a(t)\frac{\partial v(t)}{\partial y}, \theta w_j\right)dt$$

$$+ \int_0^T i\frac{4}{\gamma^2(t)}\left\langle -\frac{\partial^2 v(t)}{\partial y^2}, \theta w_j\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \langle |v(t)|^\rho\, v(t), \theta w_j\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)}\, dt$$

$$= \int_0^T (f(t), \theta w_j)dt,\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Procedendo de maneira análoga a (3.55), podemos concluir que

$$v' - a(t)\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{4}{\gamma^2(t)}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + |v|^\rho\, v = f \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

4.3.4 Verificação do dado inicial

De maneira análoga as convergências (3.56) e (3.57), concluímos que

$$v_{0m} = v_m(0) \rightharpoonup v(0) \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

e

$$v_m(0) = v_{0m} \longrightarrow v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Se $v_m(0)$ converge forte para v_0, em particular, converge fraco. Assim, pela unicidade do limite fraco, temos que $v(0) = v_0$.

4.3.5 Unicidade da solução

Sejam v_1 e v_2 soluções do problema (4.3). Consideremos $z = v_2 - v_1$. Logo, $z \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{\rho+2}(0,T; L^{\rho+2}(\Omega))$ e $z' \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0,T; H^{-1}(\Omega))$.

Assim, como $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\rho+2}(\Omega)$, q. s. em $]0,T[$,

$$\begin{aligned} &\langle v_1'(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \left(a(t)\frac{\partial v_1(t)}{\partial y}, w\right) + i\frac{4}{\gamma^2}\left\langle -\frac{\partial^2 v_1(t)}{\partial y^2}, w\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \\ &+ \langle |v_1(t)|^\rho\, v_1(t), w\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} = (f(t), w) \end{aligned} \tag{4.34}$$

e

$$\begin{aligned} &\langle v_2'(t), w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \left(a(t)\frac{\partial v_2(t)}{\partial y}, w\right) + i\frac{4}{\gamma^2}\left\langle -\frac{\partial^2 v_2(t)}{\partial y^2}, w\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \\ &+ \langle |v_2(t)|^\rho\, v_2(t), w\rangle_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\times L^{\rho+2}(\Omega)} = (f(t), w). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Então, fazendo a diferença das equações (4.34) e (4.35) e procedendo de maneira análoga a (3.60), podemos concluir que $\langle z(t), z(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = 0$. Acarretando em $v_2 = v_1$.

5 SOLUÇÃO NUMÉRICA

O objetivo deste capítulo é determinar a solução numérica do problema em estudo para o caso unidimensional. Utilizamos o método dos elementos finitos na parte espacial para obter a solução numérica, gerando um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) não linear. Aplicamos o método de diferenças finitas na parte temporal para resolver a EDO, obtendo um sistema não linear. Este foi resolvido pelo método de Newton. Os métodos numéricos aplicados podem ser encontrados em LIU; RINCON (2013).

Com a finalidade de validar a implementação, comparamos a solução exata do modelo com a solução numérica gerada pelo programa. Além disso, em um dos exemplos, consideramos a força externa identicamente nula para observar o comportamento da solução sem a atuação desta no sistema.

Estudamos no Capítulo 4 que a existência e a unicidade da solução do problema (4.1) implica na existência e na unicidade da solução do problema (4.3). Essa equivalência é garantida pelo difeomorfismo (4.2). Diante disso, consideramos o problema (4.3) para realizarmos a simulação numérica. Porém, retornamos para a variável original para estudarmos o comportamento da solução com diferentes tipos de fronteiras.

O problema considerado é dado por

$$\left|\begin{array}{l} v'(y,t) - a(y,t)\dfrac{\partial v(y,t)}{\partial y} - i\dfrac{4}{\gamma^2(t)}\dfrac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} \\ \quad + |v(y,t)|^\rho\, v(y,t) = f(y,t) \text{ em } Q, \\ v(y,t) = 0 \text{ em } \Sigma, \\ v(y,0) = v_0(y) \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \qquad (i^2 = -1) \tag{5.1}$$

com $a(y,t) = \dfrac{\gamma'(t)y + \alpha'(t) + \beta'(t)}{\gamma(t)}$.

Aplicado o método de Faedo-Galerkin, o problema aproximado consiste em determinar uma função $v_m : [0, T[\to V_m$, dada por

$$v_m(y,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\varphi_k(y), \tag{5.2}$$

com c_k sendo os coeficientes a determinar, satisfazendo

$$\left|\begin{array}{l} (v'_m(t), w) - \left(a(t)\dfrac{\partial v_m(t)}{\partial y}, w\right) + i\dfrac{4}{\gamma^2}\left(\dfrac{\partial v_m(t)}{\partial y}, \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \quad +(|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), w) = (f(t), w) \text{ em } Q, \\ v_m = 0 \text{ em } \Sigma, \\ v_m(0) = v_{0m} \longrightarrow v_0 \text{ em } V = H_0^1(\Omega), \end{array}\right. \tag{5.3}$$

para todo $w \in V_m$.

Substituindo (5.2) em (5.3) e tomando em particular $w = \varphi_j$, para todo $j = 1, \cdots, m$, obtemos

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left[c'_k(t)(\varphi_k, \varphi_j) - c_k(t)\left(a(t)\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \varphi_j\right) + i\frac{4}{\gamma^2}c_k(t)\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right)\right] \\ \quad \displaystyle + \left(\left|\sum_{k=1}^{m} c_k(t)\varphi_k\right|^\rho \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\varphi_k, \varphi_j\right) = (f, \varphi_j). \end{array}\right.$$

Dessa forma, podemos definir as matrizes

$$
\begin{aligned}
A &= [a_{kj}] = (\varphi_k, \varphi_j),\\
B &= [b_{kj}] = \left(a(t)\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \varphi_j\right),\\
D &= [d_{kj}] = \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\right),\\
R(c(t)) &= [r_{kj}(c(t))] = \left(\left|\sum_{i=1}^{m} c_i(t)\varphi_i\right|^{\rho} \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\varphi_k, \varphi_j\right),\\
F &= [f_{kj}] = (f, \varphi_j).
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$
Ac'(t) - B^T c(t) + i\frac{4}{\gamma^2} Dc(t) + R(c(t)) = F, \tag{5.4}
$$

com $c(t) = [c_1(t), c_2(t), \cdots, c_m(t)]^T$ sendo o vetor incógnita.

5.1 Método de elementos finitos

Desejamos que a matriz dos coeficientes tenha algumas propriedades que permitam facilidade de resolução (menor número de operações) e seja bem condicionada. A matriz dos coeficientes depende, essencialmente, das funções bases $\{\varphi_1(y), \ldots, \varphi_m(y)\}$ que geram o subespaço V_m onde estamos buscando a solução aproximada v_m.

O método de elementos finitos consiste em introduzir funções bases com suporte pequeno, localizado nos pontos nodais dos elementos. De modo que, as matrizes definidas sejam esparsas. Assim, a resolução do sistema resultante, neste caso, (5.4), tem uma significativa redução no número de operações.

Com esse objetivo, primeiro, discretizamos o domínio em sub-regiões Ω_e, denominadas elementos finitos, para então, em seguida, definirmos as funções bases.

5.1.1 Discretização do domínio

Consideramos o domínio Ω dado por $[y_0, y_f]$. Tomamos uma partição do domínio Ω em idênticas sub-regiões Ω_e, satisfazendo

$$\Omega = \left(\bigcup_{e=1}^{N_e} \overline{\Omega}_e \right)^{\circ} \qquad \text{e} \qquad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, \quad \text{se} \quad i \neq j, \tag{5.5}$$

com N_e sendo o número total de elementos.

Particionando o domínio em N_e intervalos de mesmo comprimento Δy, temos que $\Omega_e = [y_e, y_{e+1}]$, com $y_e = y_0 + (e-1)\Delta y$. O comprimento de cada intervalo é dado por $\Delta y = (y_f - y_0)/N_e$, pois os intervalos são idênticos neste caso. Os pontos y_A, $A = 1, \ldots, N_e + 1$, são denominados nós globais. Quando conveniente, nos referimos aos nós globais apenas por seus índices.

5.1.2 Definindo as funções bases

Sob as considerações anteriores, tomamos uma malha para o domínio Ω. Para cada nó global A desta malha, consideramos a função φ_A. Esta é uma função de interpolação linear por partes, satisfazendo a seguinte condição

$$\varphi_A(B) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = B, \\ 0, & \text{se } A \neq B, \end{cases} \tag{5.6}$$

para todo nó B.

Notemos que, se a função da base do espaço W_m satisfazer a condição (5.6), então as soluções aproximadas, em um nó B qualquer, será dada por $v_m(y_B, t) = c_B(t)$.

Dessa forma, a função φ_A é definida por

$$\varphi_A(y) = \begin{cases} \dfrac{y - y_{A-1}}{\Delta y}, & \forall\, y \in [y_{A-1}, y_A], \\ \dfrac{y_{A+1} - y}{\Delta y}, & \forall\, y \in [y_A, y_{A+1}], \\ 0, & \forall\, y \notin [y_{A-1}, y_{A+1}]. \end{cases} \tag{5.7}$$

Representamos a função φ_A, geometricamente, na figura 5.1.

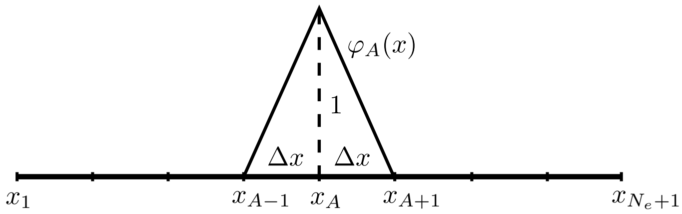

Figura 5.1: Função φ_A - caso unidimensional.

Consideramos uma numeração local dos nós para cada sub-região $\Omega_e = [y_e, y_{e+1}]$, de modo que, $\Omega_e = [y_e, y_{e+1}] = [y_1^e, y_2^e]$. Na sub-região, definimos a função de interpolação local φ_a^e dada por

$$\varphi_a^e(y) = \begin{cases} \varphi_1^e = \dfrac{y_2^e - y}{\Delta y}, & \forall\, y \in [y_1^e, y_2^e], \\ \varphi_2^e = \dfrac{y - y_1^e}{\Delta y}, & \forall\, y \in [y_1^e, y_2^e], \\ 0, & \forall\, y \notin [y_1^e, y_2^e]. \end{cases} \tag{5.8}$$

Desta forma, a função φ_A definida em (5.7) pode ser descrita por

$$\varphi_A(y) = \begin{cases} \varphi_2^{A-1}, & \forall\, y \in \; [y_1^{A-1}, y_2^{A-1}] \;=\; [y_{A-1}, y_A] \;=\; \Omega_{A-1}, \\ \varphi_1^{A}, & \forall\, y \in \; [y_1^{A}, y_2^{A}] \;=\; [y_A, y_{A+1}] \;=\; \Omega_A, \\ 0, & \forall\, y \notin \; [y_1^{A-1}, y_2^{A+1}]. \end{cases} \tag{5.9}$$

Notemos que φ_A restrita ao elemento Ω_{A-1} é a função φ_2^{A-1} e φ_A restrita ao elemento Ω_A é a função φ_1^A.

5.2 Método de diferenças finitas

Vamos aplicar o método de diferenças finitas para determinar a solução aproximada em cada tempo discreto t_n. Estes são gerados por uma discretização uniforme do intervalo $[0,T], T>0$, ou seja, com $\Delta t = (t_{n+1} - t_n)$ constante.

O método consiste em substituir as derivadas da EDO por aproximações construídas por diferenças finitas.

No sistema (5.4), tomando a média da equação nos tempos t_{n+1} e t_n, obtemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}A((c')^{n+1} + (c')^n) - \frac{1}{2}((B^T)^{n+1}c^{n+1} + (B^T)^n c^n) \\ \quad + \frac{1}{2}\, i \left(\frac{4}{(\gamma^2)^{n+1}} c^{n+1} + \frac{4}{(\gamma^2)^n} c^n \right) D + \frac{1}{2}(R(c^{n+1}) + R(c^n)) \\ \quad = \frac{1}{2}(F^{n+1} + F^n), \end{array} \right. \tag{5.10}$$

com a seguinte notação

$$c^n = c(t_n),\ (c')^n = c'(t_n),\ (B^T)^n = B^T(t_n),\ \frac{1}{(\gamma^2)^n} = \frac{1}{\gamma^2(t_n)},$$

$$R(c^n) = R(c(t_n)) \text{ e } F^n = F(t_n).$$

Aproximamos $\frac{(c')^{n+1} + (c')^n}{2}$ utilizando diferença atrasada para o termo $(c')^{n+1}$

e central para $(c')^n$. Assim, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{(c')^{n+1} + (c')^n}{2} &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{3c^{n+1} - 4c^n + c^{n-1}}{2(\Delta t)} + \mathcal{O}(2) + \frac{c^{n+1} - c^{n-1}}{2(\Delta t)} + \mathcal{O}(2)\right) \\
&= \frac{c^{n+1} - c^n}{(\Delta t)} + \mathcal{O}(2).
\end{aligned}
$$

Substituindo a aproximação anterior em (5.10) e multiplicando a equação por $2\Delta t$, obtemos

$$
M^{n+1}c^{n+1} + \Delta t R(c^{n+1}) + M^n = 0, \tag{5.11}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
M^{n+1} &= 2A - \Delta t(B^T)^{n+1} + i\ \Delta t\frac{4}{(\gamma^2)^{n+1}}D, \\
M^n &= \Delta t R(c^n) - \Delta t(F^{n+1} + F^n) - \left[2A + \Delta t(B^T)^n - i\ \Delta t\frac{4}{(\gamma^2)^n}D\right]c^n.
\end{aligned}
$$

Como o sistema (5.11) é não linear, para cada n, vamos utilizar o método de Newton para encontrarmos a solução c^{n+1}.

5.2.1 Solução do sistema não linear

Encontrar a solução do sistema não linear (5.11), para cada passo de tempo n, é equivalente a encontrar a solução $X = c^{n+1}$ que satisfaça $G(X) = 0$. Dessa forma, definimos a função G como

$$
G(X) = M^{n+1}X + \Delta t R(X) + M^n.
$$

Utilizamos o método de Newton para encontrar a raiz da função G. Esse método consiste em partir de uma aproximação inicial de solução no tempo n, satisfazendo o sistema linear

$$J(G(X)) \cdot s = -G(X). \tag{5.12}$$

Temos que $X = s + X$ é uma nova aproximação para X, em que

$$JG(X) = \begin{bmatrix} \nabla G_1(X) \\ \nabla G_2(X) \\ \vdots \\ \nabla G_m(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial X_1}(X) & \frac{\partial G_1}{\partial X_2}(X) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial X_m}(X) \\ \frac{\partial G_2}{\partial X_1}(X) & \frac{\partial G_2}{\partial X_2}(X) & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial X_m}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial X_1}(X) & \frac{\partial G_m}{\partial X_2}(X) & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial X_m}(X) \end{bmatrix}.$$

Montamos e resolvemos o sistema linear (5.12), para cada passo de tempo, t_n. Assim, é importante garantir que estas montagens e soluções sejam de baixo custo computacional.

O programa utilizado para a implementação foi o Matlab, para a solução do sistema linear utilizamos o solver do mesmo. Quanto a montagem, as derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial G_k}{\partial X_j}(X) = M_{k,j}^{n+1} + \Delta t \frac{\partial R_k}{\partial X_j}(X),$$

em que, apenas o termo

$$\frac{\partial R_k}{\partial X_j}(X), \tag{5.13}$$

é desconhecido. Consequentemente, o custo computacional para determinarmos $\nabla G(X)$ se limita na obtenção do termo (5.13). Porém, temos que este é dado com segue.

Seja $r(y) = |y|^\rho y$ uma função contínua com $y \in \mathbb{R}$. Dessa forma, obtemos

$$\frac{\partial R_k}{\partial X_j}(X) = \left(r'\left(\sum_{i=1}^{m} X_i \varphi_i \right) \varphi_j, \varphi_k \right).$$

Percorrendo k e j, a equação anterior nos fornece uma matriz. Notemos que a lei de formação desta matriz é semelhante com a da matriz A, dada por (φ_k, φ_j).

6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo, vamos avaliar a implementação da solução numérica de duas maneiras. Na primeira, vamos estudar o erro entre a solução numérica e a solução exata dada inicialmente. Na segunda, vamos considerar f identicamente nula para avaliar o comportamento da solução numérica sem a força externa atuando no sistema. A linguagem computacional utilizada, como mensionado anteriormente, foi o Matlab.

Construimos a solução exata tomando uma função $v(y, t)$. A partir dela, construimos a posição inicial v_0 e a força resultante $f(y, t)$. Estudamos o comportamento do erro considerando diversas discretizações no espaço e no tempo. Com esses dados, estimamos a taxa de convergência do mesmo.

Quando consideramos f identicamente nula, não possuímos a solução exata para comparar com a numérica. Neste caso, realizamos um procedimento numérico descrito em LIU; RINCON (2013) que considera como "solução exata", a solução numérica gerada com uma discretização suficientemente refinada. Dessa forma, foi possível estimar a taxa de convergência utilizando como "solução exata" a solução refinada.

Neste trabalho, não realizamos um estudo teórico de estimativa de erro para nossa equação. Porém, em LIU; RINCON (2013) foram realizadas estimativas de erro para as soluções numéricas das equações de calor e onda, ambas lineares e desacopladas. Em ambas as equações, foi obtido um erro de ordem $\mathcal{O}((\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$, utilizando a norma $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, funções bases lineares por partes e aproximações de diferenças finitas de ordem dois no tempo.

Utilizamos a norma $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, funções bases lineares por partes e aproximações por diferenças finitas de ordem dois no tempo para realizarmos as simulações numéricas. Como era esperado, obtemos um erro de ordem dois no tempo e no espaço.

As soluções aproximadas são obtidas, quando tomamos as funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ de tal forma que o comprimento $\gamma(t)$ varia pouco sua amplitude e lentamente ao longo do tempo $t \in [0,T]$. Dessa forma, os erros das soluções aproximadas v_m serão dados por

$$E(v_m) = \|v - v_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{6.1}$$

Para o caso em que consideramos f identicamente nula, nas simulações realizadas, observamos uma pequena variação na amplitude das soluções. Por esse motivo, os erros das soluções aproximadas serão calculadas como no caso anterior.

Consideramos discretizações idênticas para espaço e tempo, denotadas por h_i, para estimarmos a taxa de convergência. Para cada h_i, seja E_i o erro da solução aproximada, associado a v_m, como definido em (6.1). Como as discretizações, para espaço e tempo, são iguais a h_i, temos que

$$E_i \approx C(h_i)^p,$$

com p sendo a taxa de convergência que queremos determinar e C sendo uma constante positiva independente de h_i.

Assim, dados h_i e h_{i+1}, com $h_i = 2h_{i+1}$, obtemos

$$\frac{E_i}{E_{i+1}} \approx \left(\frac{h_i}{h_{i+1}}\right)^p = 2^p \Rightarrow p \approx \frac{\log\left(\frac{E_i}{E_{i+1}}\right)}{\log 2}.$$

6.1 Resultados numéricos

Nessa seção vamos apresentar alguns exemplos utilizados no estudo da influência da fronteira móvel na equação de Schrödinger não-linear. Em todas as simulações numéricas consideramos o espaço $\Omega = [-1, 1]$ e o tempo final $T = 2$. Notemos que quando $\Delta y = 2^{-i}$ e $\Delta t = 2^{-j}$ obtemos que $N_y = 2^i$ e $N_t = 2^j$, em que N_y e N_t são, respectivamente, os números de discretizações dos intervalos de espaço e tempo.

Depois do estudo do erro, retornamos ao problema original (4.1) realizando a mudança de variável de $y \in [-1, 1]$ para x, com $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$, a partir do difeomorfismo (4.2).

O problema em estudo, como definido anteriormente, é dado por

$$\left| \begin{array}{l} v'(y,t) - a(y,t)\dfrac{\partial v(y,t)}{\partial y} - i\dfrac{4}{\gamma^2(t)}\dfrac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} \\ \quad + |v(y,t)|^\rho \, v(y,t) = f(y,t) \quad \text{em} \quad Q, \\ v(y,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ v(y,0) = v_0(y) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \qquad (i^2 = -1)$$

com $a(y,t) = \dfrac{\gamma'(t)y + \alpha'(t) + \beta'(t)}{\gamma(t)}$.

As fronteiras $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ foram escolhidas de modo que a função $\gamma(t)$ tenha uma pequena variação em sua amplitude. Para isso, consideramos os seguintes tipos de fronteiras:

Fronteira 1

Esta fronteira é dada pelas funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ definidas como

$$\alpha(t) = 0.01e^{(-t-1)} - 1 \text{ e } \beta(t) = 1 - 0.01e^{(-t-1)}.$$

Dessa forma, temos que

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - 0.02e^{(-t-1)} \quad \text{e} \quad a(y,t) = \frac{0.01e^{-t-1}}{1 - 0.01e^{-t-1}}.$$

Notemos que, $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = -1$ e $\lim_{t\to\infty} \beta(t) = 1$. Consequentemente, obtemos que $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 2$. Como no tempo inicial $\gamma(0) = 2 - 0.02e^{-1} = 1.9926$, temos que a amplitude de $\gamma(t)$ varia no máximo 0.0073.

A figura 6.1 representa a função $\beta(t)$ da fronteira 1. Como $\beta(t) = -\alpha(t)$, a função $\alpha(t)$ descreve o mesmo comportamento de forma simétrica ao eixo t.

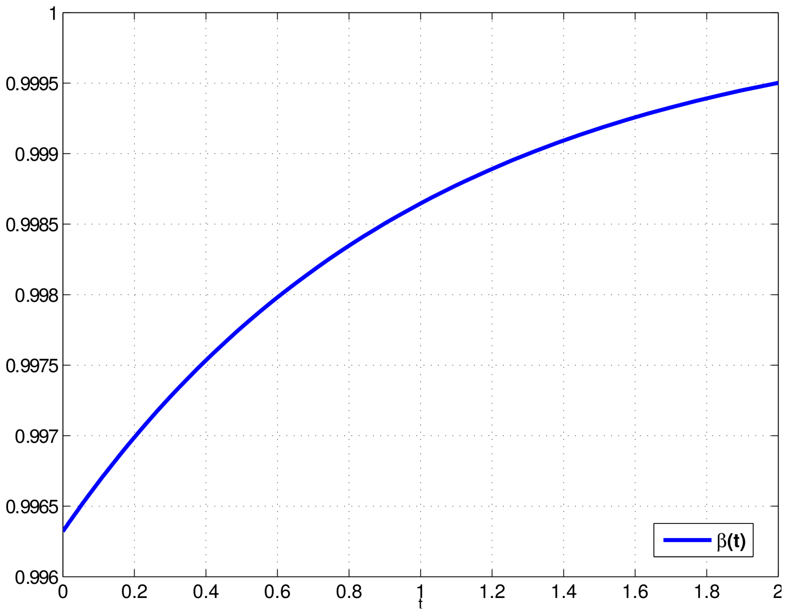

Figura 6.1: Função $\beta(t) = -\alpha(t)$ da Fronteira 1.

Fronteira 2

Esta fronteira foi escolhida para estudarmos o comportamento da solução com fronteiras que não sejam simétricas. Consideramos a fronteira dada pelas funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, em que $\alpha(t) \neq \beta(t)$. Essas funções foram definidas como

$$\alpha(t) = \frac{\cos(2\pi t) - 3}{4} \text{ e } \beta(t) = \frac{16t + 1}{16t + 2}.$$

Dessa forma, temos que

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = \frac{4(16t + 1) + (16t + 2)(3 - \cos(2\pi t))}{4(16t + 2)}$$

e

$$a(y, t) = \frac{4(16t + 2)}{4(16t + 1) + (16t + 2)(3 - \cos(2\pi t))} \left[\frac{4}{(t + 1)^2}(y + 1) + \frac{-\pi \sin(2\pi t)}{2}(1 - y) \right].$$

A figura 6.2 representa as funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ da fronteira 2. Como $\alpha(t)$ é uma função que atinge valor mínimo de -0.25 e máximo de -0.75, e $\lim_{t \to \infty} \beta(t) = 1$, temos que a amplitude de $\gamma(t)$ varia de 1.25 a 1.75.

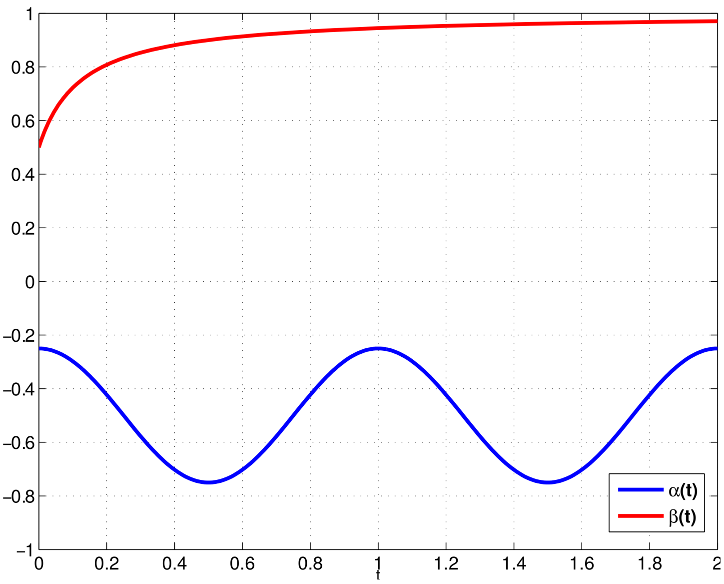

Figura 6.2: Funções $\beta(t)$ e $\alpha(t)$ da Fronteira 2.

Fronteira 3

Esta fronteira é dada pelas funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ definidas como

$$\alpha(t) = e^{(-t-1)} - 1 \text{ e } \beta(t) = 1 - e^{(-t-1)}.$$

Dessa forma, temos que

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - 2e^{(-t-1)} \quad \text{e} \quad a(y,t) = \frac{e^{-t-1}}{1 - e^{-t-1}}.$$

Notemos que, $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = -1$ e $\lim_{t\to\infty} \beta(t) = 1$. Consequentemente, obtemos que $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 2$. Como no tempo inicial $\gamma(0) = 2 - 2e^{-1} = 1.2642$, temos que a amplitude de $\gamma(t)$ varia no máximo 0.7357.

A figura 6.3 representa a função $\beta(t)$ da fronteira 3. Como $\beta(t) = -\alpha(t)$, a função $\alpha(t)$ descreve o mesmo comportamento de forma simétrica ao eixo t.

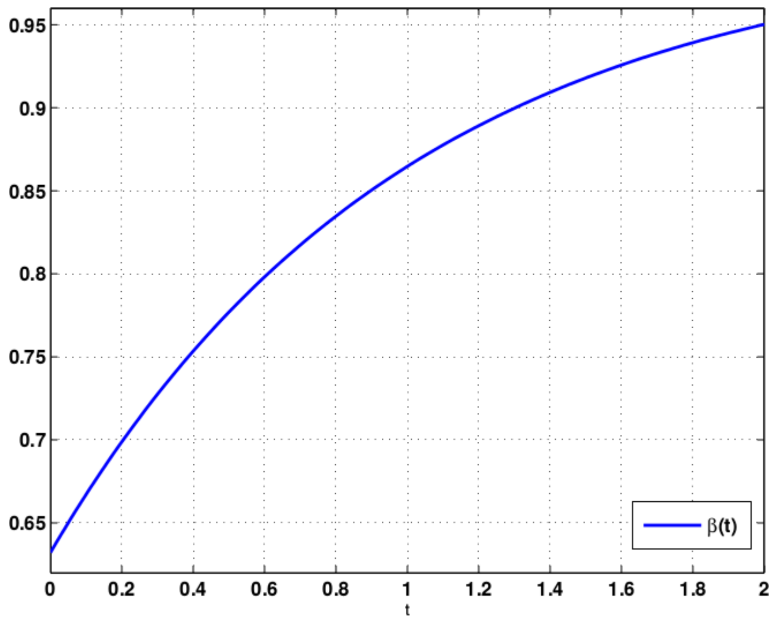

Figura 6.3: Função $\beta(t) = -\alpha(t)$ da Fronteira 3.

Fronteira 4

Esta fronteira é dada pelas funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ definidas como

$$\alpha(t) = 2e^{(-t-1)} - 1 \quad \text{e} \quad \beta(t) = 1 - 2e^{(-t-1)}.$$

Dessa forma, temos que

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - 4e^{(-t-1)} \text{ e } a(y,t) = \frac{2e^{-t-1}}{1 - 2e^{-t-1}}.$$

Notemos que, $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = -1$ e $\lim_{t\to\infty} \beta(t) = 1$. E consequentemente, obtemos que $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 2$. Como no tempo inicial $\gamma(0) = 2 - 4e^{-1} = 0.5285$, temos que a amplitude de $\gamma(t)$ varia no máximo 1.4715.

A figura 6.4 representa a função $\beta(t)$ da fronteira 4. Como $\beta(t) = -\alpha(t)$, a função $\alpha(t)$ descreve o mesmo comportamento de forma simétrica ao eixo t.

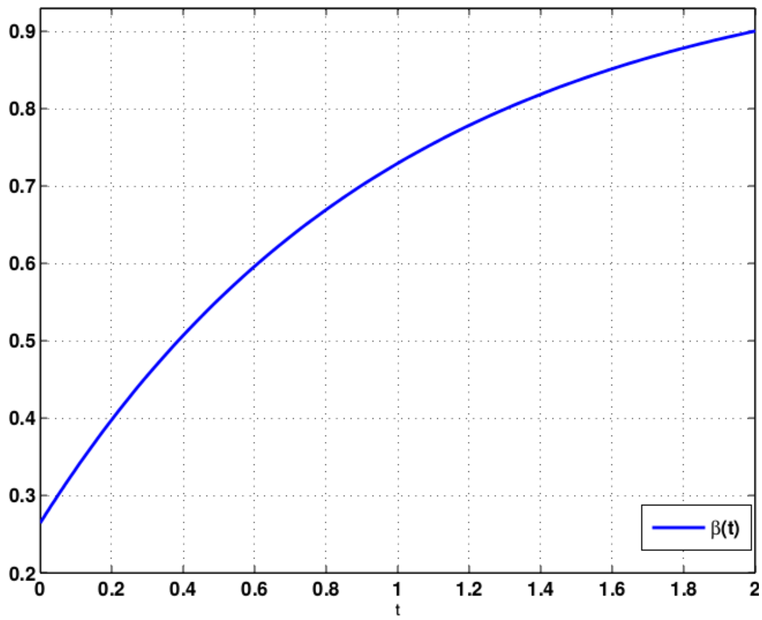

Figura 6.4: Função $\beta(t) = -\alpha(t)$ da Fronteira 4.

Notemos que as fronteiras 1, 3 e 4 possuem o mesmo comportamento. O que difere uma fronteira da outra é variação da amplitude em relação ao tempo inicial. Isso pode ser observado na figura 6.5. Definimos as funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ dessa forma para estudarmos a influência dessas fronteiras no sistema homogênio.

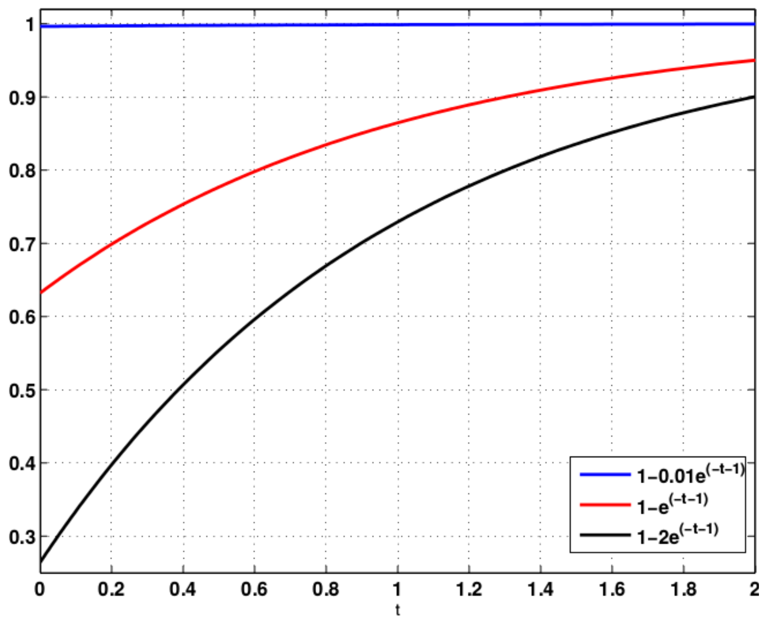

Figura 6.5: Função $\beta(t) = -\alpha(t)$ da Fronteira 1, 3 e 4

6.1.1 Exemplos para sistema não-homogênio

Consideramos nessa seção duas soluções exatas para o problema (6.1). Estudamos o erro entre a solução numérica e a solução exata, dada inicialmente, e a taxa de convergência de cada simulação com as fronteiras 1 e 2.

Exemplo 1: Consideramos como solução exata a função

$$v(y,t) = \sin(\pi y)(\cos(\pi t) + 2) + i\sin(\pi y)(\cos(\pi t) + 2).$$

As tabelas 6.1 e 6.2 apresentam o erro e a taxa de convergência, respectivamente, da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 1 com Fronteira 1. Considerando $\Delta y = \Delta t$, os resultados numéricos mostram que a ordem de convergência do erro associado aos métodos aplicados é quadrática no tempo e no espaço, como era esperado para essa norma.

	$\|\|v - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	2.2632×10^{-3}	9.4919×10^{-3}	1.5016×10^{-2}	2.3198×10^{-2}
2^{-6}	5.6616×10^{-4}	2.3431×10^{-3}	3.5301×10^{-3}	5.0734×10^{-3}
2^{-7}	1.4147×10^{-4}	5.8369×10^{-4}	8.8241×10^{-4}	1.0265×10^{-3}
2^{-8}	3.5372×10^{-5}	1.4586×10^{-4}	2.2059×10^{-4}	2.1896×10^{-4}
2^{-9}	8.8433×10^{-6}	3.6456×10^{-5}	5.5148×10^{-5}	5.4450×10^{-5}
2^{-10}	2.2108×10^{-6}	9.1134×10^{-6}	1.3787×10^{-5}	1.3590×10^{-5}
2^{-11}	5.5270×10^{-7}	2.2809×10^{-6}	3.4479×10^{-6}	3.3964×10^{-6}

Tabela 6.1: **Sistema Não-Homogênio - Exemplo** 1 **com Fronteira** 1**.** Erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

	p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	–	–	–	–
2^{-6}	1.9991	2.0183	2.0887	2.1930
2^{-7}	2.0007	2.0051	2.0002	2.3052
2^{-8}	1.9998	2.0006	2.0001	2.2291
2^{-9}	2.0000	2.0004	2.0000	2.0077
2^{-10}	2.0000	2.0001	2.0000	2.0024
2^{-11}	2.0000	1.9984	1.9995	2.0005

Tabela 6.2: **Sistema Não-Homogênio - Exemplo** 1 **com Fronteira** 1**.** Taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

A figura 6.6 representa a parte real da solução numérica do exemplo 1 com a fronteira 1 para $\rho = 2$ e $N_y = N_t = 2^8$. Lembramos que a parte imaginária da solução é igual a parte real.

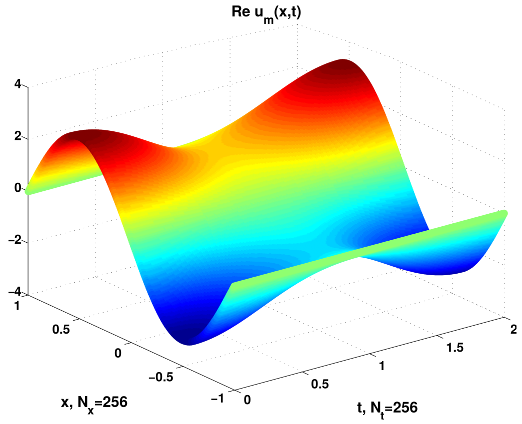

Figura 6.6: **Solução numérica do exemplo 1 com fronteira 1 para $\rho = 2$ para o problema não homogênio.**

As tabelas 6.3 e 6.4 apresentam o erro e a taxa de convergência, respectivamente, da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 1 com Fronteira 2. Como no caso anterior, consideramos $\Delta y = \Delta t$ e os resultados numéricos também mostraram que a ordem de convergência do erro associado aos métodos aplicados é quadrática no tempo e no espaço, como era esperado para essa norma.

	$\|\|v - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	4.0550×10^{-3}	7.4242×10^{-3}	1.5199×10^{-2}	2.3752×10^{-2}
2^{-6}	9.0720×10^{-4}	1.6067×10^{-3}	3.5375×10^{-3}	5.1904×10^{-3}
2^{-7}	2.0486×10^{-4}	4.0409×10^{-4}	8.8421×10^{-4}	1.0462×10^{-3}
2^{-8}	4.9496×10^{-5}	1.0092×10^{-4}	2.2107×10^{-4}	2.2471×10^{-4}
2^{-9}	1.2199×10^{-5}	2.5220×10^{-5}	5.5267×10^{-5}	5.5438×10^{-5}
2^{-10}	3.0376×10^{-6}	6.3045×10^{-6}	1.3817×10^{-5}	1.3818×10^{-6}
2^{-11}	7.5910×10^{-7}	1.5759×10^{-6}	3.4545×10^{-6}	3.4517×10^{-6}

Tabela 6.3: **Sistema Não-Homogênio - Exemplo 1 com Fronteira 2.** Erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

	p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	$-$	$-$	$-$	$-$
2^{-6}	2.1602	2.2081	2.1032	2.1941
2^{-7}	2.1468	1.9914	2.0003	2.3107
2^{-8}	2.0492	2.0014	1.9999	2.2190
2^{-9}	2.0205	2.0006	2.0000	2.0191
2^{-10}	2.0058	2.0001	2.0000	2.0043
2^{-11}	2.0006	2.0002	1.9999	2.0012

Tabela 6.4: **Sistema Não-Homogênio - Exemplo** 1 **com Fronteira** 2**.** Taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

A figura 6.7 representa a parte real da solução numérica do exemplo 1 com a fronteira 2 para $\rho = 2$ e $N_y = N_t = 2^8$. Lembramos que a parte imaginária da solução é igual a parte real.

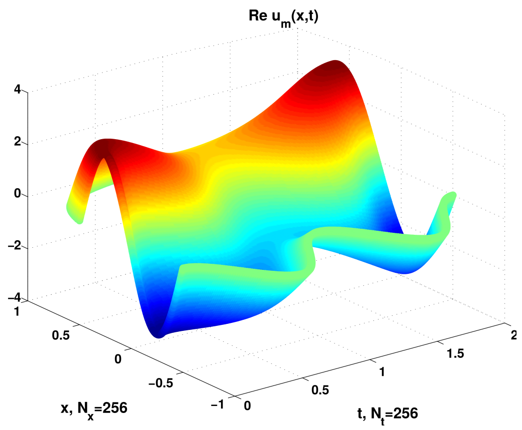

Figura 6.7: **Solução numérica do exemplo** 1 **com fronteira** 2 **para** $\rho = 2$ **para o problema não homogênio.**

Exemplo 2**:** Consideramos como solução exata a função

$$v(y,t) = 4(y^2 - 1)e^t + i4(y^2 - 1)e^t.$$

As tabelas 6.5 e 6.6 apresentam o erro e a taxa de convergência, respectivamente, da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 2 com Fronteira 1. Considerando $\Delta y = \Delta t$, os resultados numéricos mostram que a ordem de convergência do erro associado aos métodos aplicados é quadrática no tempo e no espaço, como era esperado para essa norma.

	$\|\|v - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	2.6133×10^{-2}	3.5114×10^{-2}	3.6832×10^{-2}	3.7662×10^{-2}
2^{-6}	6.5324×10^{-3}	8.7739×10^{-3}	9.1898×10^{-3}	9.3599×10^{-3}
2^{-7}	1.6330×10^{-3}	2.1932×10^{-3}	2.2963×10^{-3}	2.3365×10^{-3}
2^{-8}	4.0825×10^{-4}	5.4828×10^{-4}	5.7401×10^{-4}	5.8390×10^{-4}
2^{-9}	1.0206×10^{-4}	1.3707×10^{-4}	1.4350×10^{-4}	1.4596×10^{-4}
2^{-10}	2.5516×10^{-5}	3.4267×10^{-5}	3.5875×10^{-5}	3.6489×10^{-5}
2^{-11}	6.3790×10^{-6}	8.5668×10^{-6}	8.9686×10^{-6}	9.1223×10^{-6}

Tabela 6.5: **Sistema Não-Homogênio - Exemplo** 2 **com Fronteira** 1**.** Erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

	p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	$-$	$-$	$-$	$-$
2^{-6}	2.0002	2.0007	2.0028	2.0085
2^{-7}	2.0001	2.0002	2.0007	2.0022
2^{-8}	2.0000	2.0000	2.0002	2.0005
2^{-9}	2.0000	2.0000	2.0000	2.0001
2^{-10}	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
2^{-11}	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000

Tabela 6.6: **Sistema Não-Homogênio - Exemplo** 2 **com Fronteira** 1**.** Taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

A figura 6.8 representa a parte real da solução numérica do exemplo 2 com a fronteira 1 para $\rho = 2$ e $N_y = N_t = 2^8$. Lembramos que a parte imaginária da solução é igual a parte real.

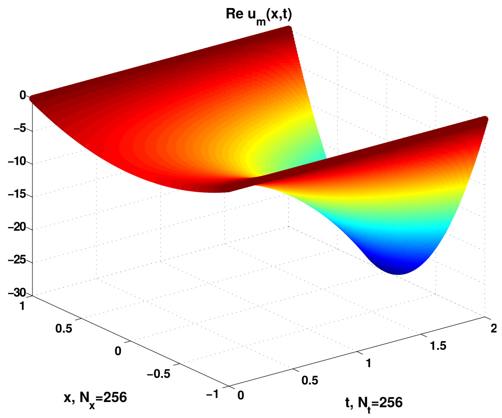

Figura 6.8: **Solução numérica do exemplo** 2 **com fronteira** 1 **para** $\rho = 2$ **para o problema não homogênio.**

As tabelas 6.7 e 6.8 apresentam o erro e a taxa de convergência, respectivamente, da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 2 com Fronteira 2. Como no caso anterior, consideramos $\Delta y = \Delta t$ e os resultados numéricos também mostraram que a ordem de convergência do erro associado aos métodos aplicados é quadrática no tempo e no espaço, como era esperado para essa norma.

	$\|\|v - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	2.3316×10^{-2}	3.4308×10^{-2}	3.6510×10^{-2}	3.7477×10^{-2}
2^{-6}	5.8935×10^{-3}	8.5726×10^{-3}	9.1128×10^{-3}	9.3193×10^{-3}
2^{-7}	1.4804×10^{-3}	2.1429×10^{-3}	2.2773×10^{-3}	2.3268×10^{-3}
2^{-8}	3.7048×10^{-4}	5.3571×10^{-4}	5.6927×10^{-4}	5.8152×10^{-4}
2^{-9}	9.2641×10^{-5}	1.3393×10^{-4}	1.4231×10^{-4}	1.4537×10^{-4}
2^{-10}	2.3162×10^{-5}	3.3481×10^{-5}	3.5578×10^{-5}	3.6342×10^{-5}
2^{-11}	5.7905×10^{-6}	8.3704×10^{-6}	8.8945×10^{-6}	9.0853×10^{-6}

Tabela 6.7: **Sistema Não-Homogênio - Exemplo** 2 **com Fronteira** 2**.** Erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

	p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	$-$	$-$	$-$	$-$
2^{-6}	2.0077	2.0007	2.0023	2.0077
2^{-7}	2.0019	2.0002	2.0006	2.0019
2^{-8}	2.0005	2.0000	2.0001	2.0005
2^{-9}	2.0001	2.0000	2.0000	2.0001
2^{-10}	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
2^{-11}	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000

Tabela 6.8: **Sistema Não-Homogênio - Exemplo** 2 **com Fronteira** 2**.** Taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

A figura 6.9 representa a parte real da solução numérica do exemplo 2 com a fronteira 2 para $\rho = 2$ e $N_y = N_t = 2^8$. Lembramos que a parte imaginária da solução é igual a parte real.

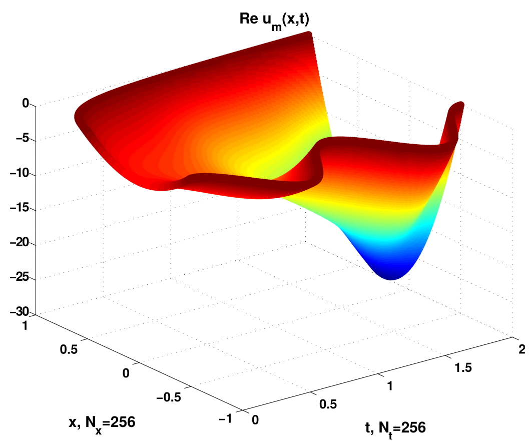

Figura 6.9: **Solução numérica do exemplo** 2 **com fronteira** 2 **para** $\rho = 2$ **para o problema não homogênio.**

6.1.2 Exemplos para sistema homogênio

Consideramos nessa seção f identicamente nula no problema em estudo (6.1), para avaliar o comportamento da solução numérica sem a força externa atuando no sistema.

Como em geral, a solução exata $v(y,t)$ é desconhecida, consideramos a solução numérica $\hat{v}(y,t)$ com N_y suficientemente grande (ou equivalentemente h muito pequeno), em que N_y é o número de nós da discretização. Dessa forma, $\hat{v}$ será entendida como a "solução exata" do sistema homogênio.

Estudamos o comportamento do erro e da taxa de convergência, considerando os dois exemplos anteriores como solução numérica com $N_y = N_t = 2^{12}$ e $\rho = 0, \ldots, 3$ nas fronteiras 1 e 2. Além disso, para estudarmos a influência da fronteira no sistema, consideramos as fronteiras 3 e 4 no exemplo 1.

Exemplo 1:

Consideramos como solução numérica a função

$$\hat{v}(y,t) = \sin(\pi y)(\cos(\pi t) + 2) + i \sin(\pi y)(\cos(\pi t) + 2).$$

A tabela 6.9 apresenta o erro e a taxa de convergência da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 1 com Fronteira 1 para o sistema homogênio.

	$\|\|\hat{v} - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$				p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	0.4510	0.2632	0.4951	3.8310	–	–	–	–
2^{-6}	0.1136	0.0687	0.2664	1.7586	1.9889	1.9374	0.8943	1.1233
2^{-7}	0.0284	0.0419	0.1443	0.5721	1.9993	0.7121	0.8847	1.6201
2^{-8}	0.0071	0.0187	0.0619	0.1695	2.0036	1.1687	1.2206	1.7551
2^{-9}	0.0018	0.0057	0.0240	0.0595	2.0164	1.7048	1.3647	1.5110
2^{-10}	0.0004	0.0016	0.0064	0.0162	2.0668	1.8121	1.9161	1.8727
2^{-11}	0.0001	0.0004	0.0014	0.0050	2.2992	2.0041	2.2018	1.6905

Tabela 6.9: **Sistema Homogênio - Exemplo** 1 **com Fronteira** 1**.** Erro e taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

As figuras 6.10 e 6.11 representam as partes real e imaginária, respectivamente, da solução numérica do exemplo 1 com a fronteira 1 para $\rho = 2$.

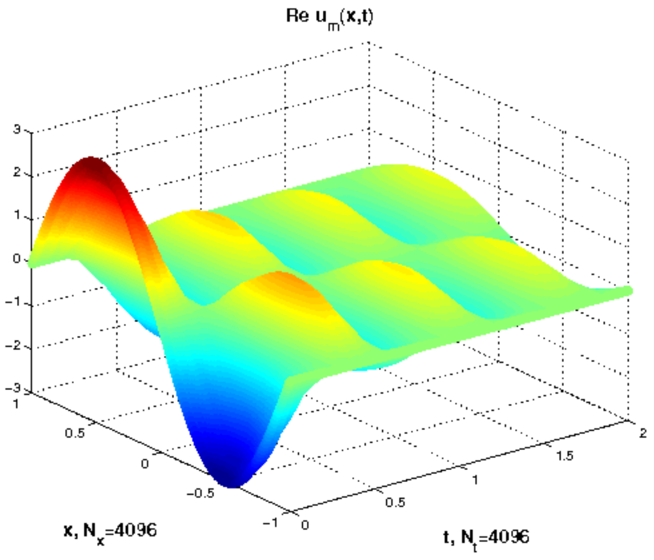

Figura 6.10: **Solução numérica do exemplo** 1 **com fronteira** 1 **para** $\rho = 2$ **para o problema homogênio.**

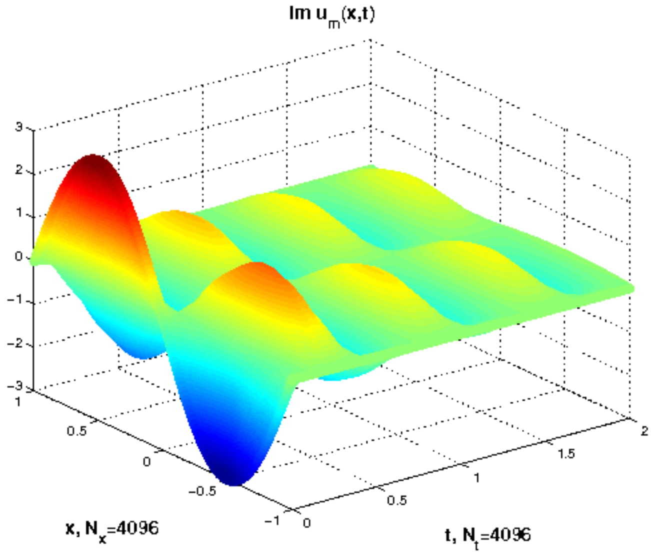

Figura 6.11: **Solução numérica do exemplo** 1 **com fronteira** 1 **para** $\rho = 2$ **para o problema homogênio.**

A tabela 6.10 apresenta o erro e a taxa de convergência da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 1 com Fronteira 2 para o sistema homogênio.

	$\|\|\hat{v} - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$				p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	3.3298	2.6532	1.8142	2.1207	–	–	–	–
2^{-6}	1.6263	1.2202	0.8001	1.4896	1.0338	1.1206	1.1811	0.5096
2^{-7}	0.6196	0.4768	0.3181	0.6025	1.3921	1.3557	1.3306	1.3059
2^{-8}	0.2467	0.1837	0.1224	0.2888	1.3288	1.3758	1.3785	1.0610
2^{-9}	0.1021	0.0787	0.0555	0.1295	1.2722	1.2225	1.1406	1.1570
2^{-10}	0.0495	0.0394	0.0280	0.0423	1.0445	0.9976	0.9845	1.6157
2^{-11}	0.0237	0.0190	0.0138	0.0145	1.0608	1.0512	1.0254	1.5471

Tabela 6.10: **Sistema Homogênio - Exemplo** 1 **com Fronteira** 2**.** Erro e taxa de convergência do erro da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$.

As figuras 6.12 e 6.13 representam as partes real e imaginária, respectivamente, da solução numérica do exemplo 1 com a fronteira 2 para $\rho = 2$.

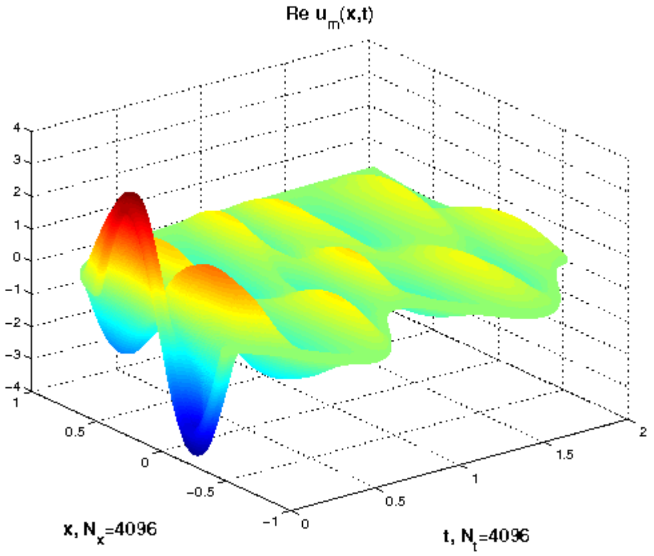

Figura 6.12: **Solução numérica do exemplo** 1 **com fronteira** 2 **para** $\rho = 2$ **para o problema homogênio.**

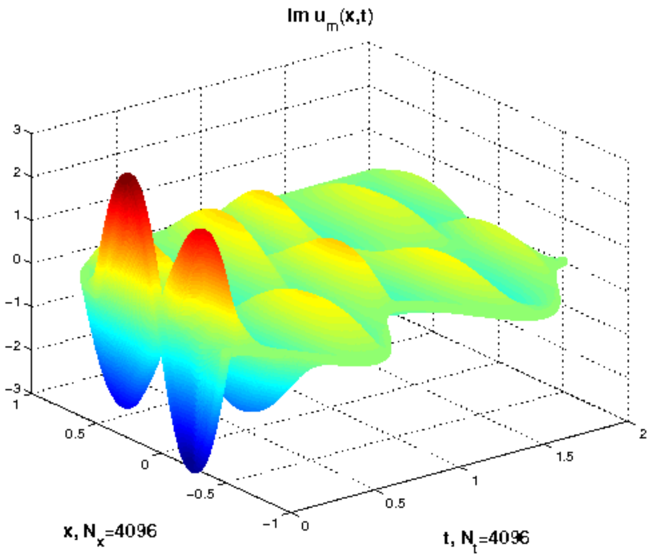

Figura 6.13: **Solução numérica do exemplo** 1 **com fronteira** 2 **para** $\rho = 2$ **para o problema homogênio.**

A tabela 6.11 apresenta o erro e a taxa de convergência, da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 1 com Fronteira 3 para o sistema homogênio.

	$\|\|\hat{v} - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$				p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	2.7226	1.6171	0.9098	2.7096	–	–	–	–
2^{-6}	0.7471	0.4342	0.2658	1.5615	1.8655	1.8970	1.7751	0.7951
2^{-7}	0.1967	0.1166	0.1343	0.6150	1.9255	1.8966	0.9848	1.3442
2^{-8}	0.0570	0.0325	0.0947	0.2860	1.7881	1.8415	0.5044	1.1048
2^{-9}	0.0190	0.0103	0.0435	0.1164	1.5832	1.6529	1.1229	1.2968
2^{-10}	0.0078	0.0048	0.0124	0.0338	1.2878	1.1226	1.8083	1.7824
2^{-11}	0.0035	0.0020	0.0027	0.0082	1.1609	1.2206	2.1851	2.0458

Tabela 6.11: **Sistema Homogênio - Exemplo** 1 **com Fronteira** 3**.** Erro e taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

A tabela 6.12 apresenta o erro e a taxa de convergência da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 1 com Fronteira 4 para o sistema homogênio.

	$\|\|\hat{v} - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$				p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	12.5425	8.8252	6.4841	4.8095	–	–	–	–
2^{-6}	8.9269	8.2525	6.8197	5.2351	0.4906	0.0968	−0.0728	−0.1223
2^{-7}	7.1747	5.7913	4.1243	2.8280	0.3153	0.5109	0.7256	0.8884
2^{-8}	2.5757	1.9886	1.3680	0.9339	1.4779	1.5421	1.5921	1.5985
2^{-9}	0.6715	0.5196	0.3580	0.2607	1.9396	1.9362	1.9339	1.8409
2^{-10}	0.1705	0.1327	0.0913	0.1116	1.9775	1.9693	1.9709	1.2244
2^{-11}	0.0372	0.0285	0.0207	0.0668	2.1950	2.2199	2.1408	0.7398

Tabela 6.12: **Sistema Homogênio - Exemplo** 1 **com Fronteira** 4**.** Erro e taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

Nesse exemplo, consideramos $\Delta y = \Delta t$ em todas as simulações. Os resultados numéricos mostraram uma variação significativa na ordem de convergência do erro associado com as fronteiras escolhidas.

Observamos que quando a fronteira possui uma pequena variação de amplitude em relação ao tempo inicial, como a fronteira 1, a ordem de convergência é quadrática. Porém, quando realizamos a mesma simulação com a fronteira 3, encontramos um resultado menos satisfatório, em que a ordem de convergência sofre uma redução. Se compararmos os resultados das simulações com a fronteira 4 com as da fronteira 1 essa redução é ainda maior, pricipalmente nos casos menos refinados.

O mesmo comportamento foi observado na simulação com a fronteira 2, em que a amplitude da função $\gamma(t)$ também sofre uma variação considerável. Os resultados mostraram uma redução na ordem de convergência.

Além disso, observamos que a medida que aumentamos o valor de ρ, a taxa de convergência também sofre uma variação principalmente nos casos menos refinados. Apesar disso, as tabelas 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12 apontam uma redução do erro em relação ao espaço e tempo em todos os casos.

Exemplo 2:

Consideramos como solução numérica a função

$$\hat{v}(y,t) = 4(y^2-1)e^t + i4(y^2-1)e^t.$$

A tabela 6.13 apresenta o erro e a taxa de convergência da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 2 com Fronteira 1 para o sistema homogênio.

	$\|\|\hat{v}-v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$				p_{v_m}			
$\Delta y=\Delta t$	$\rho=0$	$\rho=1$	$\rho=2$	$\rho=3$	$\rho=0$	$\rho=1$	$\rho=2$	$\rho=3$
2^{-5}	0.2080	0.1571	1.8064	6.6700	–	–	–	–
2^{-6}	0.0882	0.0665	0.5232	5.7555	1.2375	1.2402	2.1886	0.5323
2^{-7}	0.0585	0.0318	0.1395	3.5206	0.5924	1.0664	1.8949	0.6989
2^{-8}	0.0308	0.0168	0.0315	1.1276	0.9235	0.9228	0.8898	2.1625
2^{-9}	0.0171	0.0091	0.0087	0.3237	0.8510	0.8797	1.7201	1.9981
2^{-10}	0.0092	0.0049	0.0031	0.0816	0.8870	0.8914	1.6359	2.1396
2^{-11}	0.0046	0.0024	0.0014	0.0146	0.9967	1.0026	1.2966	2.4822

Tabela 6.13: **Sistema Homogênio - Exemplo** 2 **com Fronteira** 1**.** Erro e taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

As figuras 6.14 e 6.15 representam as partes real e imaginária, respectivamente, da solução numérica do exemplo 2 com a fronteira 1 para $\rho = 2$.

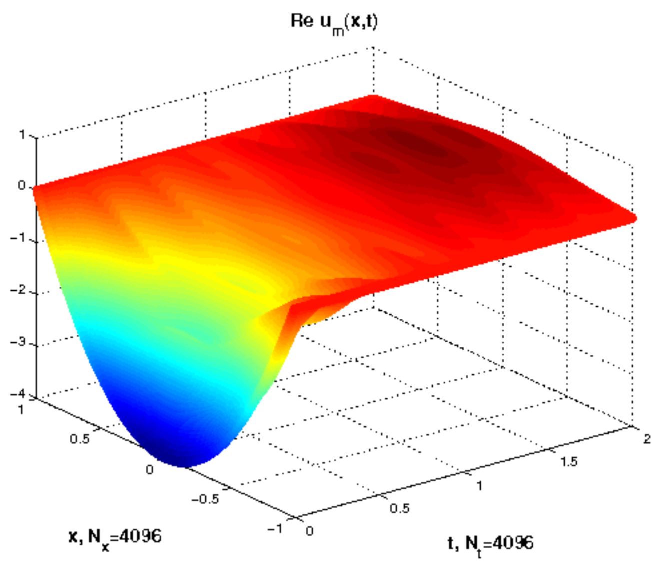

Figura 6.14: **Solução numérica do exemplo** 2 **com fronteira** 1 **para** $\rho = 2$ **para o problema homogênio.**

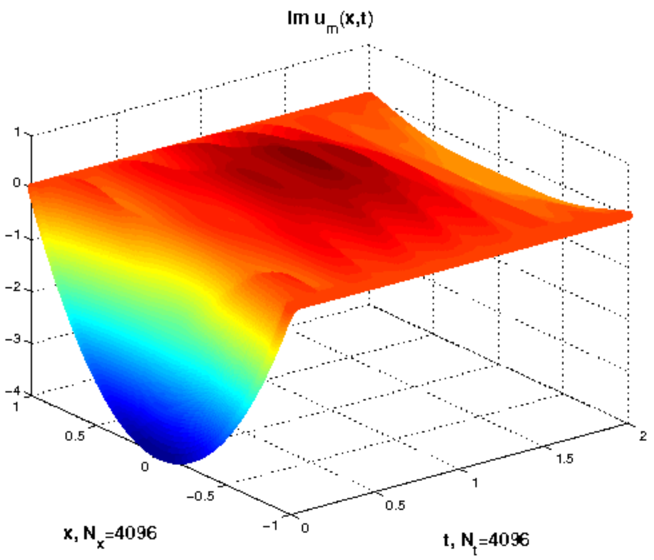

Figura 6.15: **Solução numérica do exemplo** 2 **com fronteira** 1 **para** $\rho = 2$ **para o problema homogênio.**

A tabela 6.14 apresenta o erro e a taxa de convergência da solução numérica v_m para $\rho = 0, \ldots, 3$ referente ao Exemplo 2 com Fronteira 2 para o sistema homogênio.

	$\|\|\hat{v} - v_m\|\|_{L^\infty(0,2;L^2(-1,1))}$				p_{v_m}			
$\Delta y = \Delta t$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 0$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
2^{-5}	1.0116	0.7634	1.9727	6.4536	–	–	–	–
2^{-6}	0.5033	0.3298	0.6154	5.8591	1.0073	1.2110	1.6805	0.1394
2^{-7}	0.2925	0.2090	0.1898	3.4181	0.7831	0.6577	1.6974	0.7775
2^{-8}	0.1527	0.1035	0.0784	1.1130	0.9379	1.0145	1.2753	1.6187
2^{-9}	0.0831	0.0633	0.0400	0.3249	0.8766	0.7079	0.9692	1.7763
2^{-10}	0.0453	0.0344	0.0219	0.0825	0.8762	0.8811	0.8674	1.9771
2^{-11}	0.0227	0.0172	0.0113	0.0156	0.9989	1.0020	0.9566	2.4064

Tabela 6.14: **Sistema Homogênio - Exemplo** 2 **com Fronteira** 1**.** Erro e taxa de convergência do erro da solução numérica para $\rho = 0, \ldots, 3$.

As figuras 6.16 e 6.17 representam as partes real e imaginária, respectivamente, da solução numérica do exemplo 2 com a fronteira 2 para $\rho = 2$.

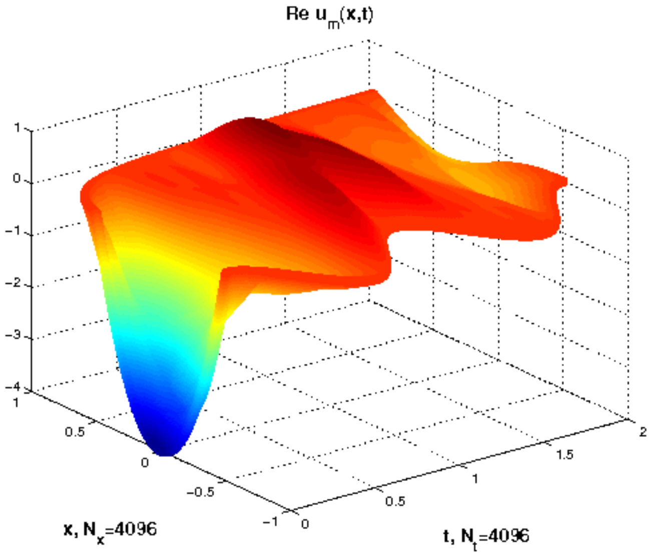

Figura 6.16: **Solução numérica do exemplo 2 com fronteira 2 para $\rho = 2$ para o problema homogênio.**

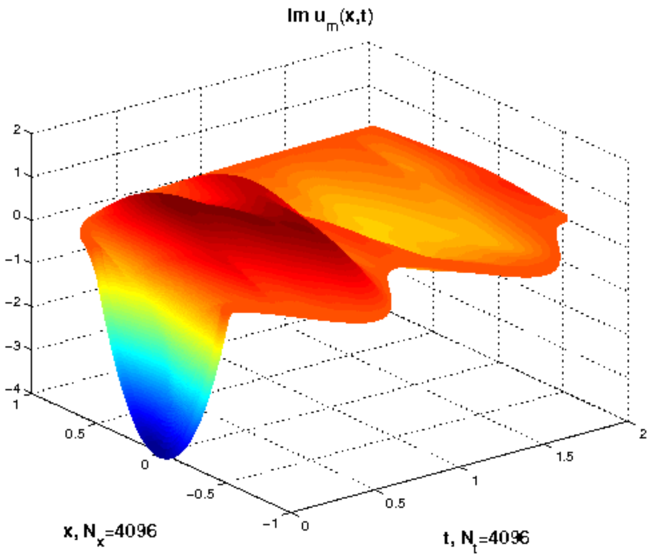

Figura 6.17: **Solução numérica do exemplo 2 com fronteira 2 para $\rho = 2$ para o problema homogênio.**

Nesse exemplo, também consideramos $\Delta y = \Delta t$ em todas as simulações. Os resultados numéricos mostraram uma redução significativa na ordem de convergência do erro associado com as fronteiras escolhidas.

Observamos que as simulações realizadas para as fronteiras 1 e 2, apresentaram um resultado menos satisfatório que nos exemplos anteriores. Os resultados mostraram uma grande variação da ordem de convergência em todos os casos, não sendo possível estabelecer um padrão nos dados coletados.

Além disso, não podemos deixar de mencionar que a única diferença das simulações do exemplo 2 para o exemplo 1 é a solução numérica inicial.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, realizamos análise teórica e simulação numérica de uma equação de Shrödinger não-linear com fronteira móvel.

A análise teórica consistia em mostrar a existência e a unicidade de solução para o problema de fronteira móvel (3.1). Este foi realizado para o $\mathbb{R}^n$ e ainda para o caso unidimensional com uma mudança de variável mais geral, através dos teoremas (3.2) e (4.2), respectivamente.

Na simulação numérica aplicamos os métodos de elementos finitos na parte espacial e de diferenças finitas na parte temporal para resolver a EDO, obtendo um sistema não linear que foi resolvido pelo método de Newton. Todas as simulações foram realizadas para o caso unidimensional através de um programa computacional que foi desenvolvido no Matlab.

Numericamente, foi possível estimatimar a taxa de convergência no espaço e no tempo e observar o comportamento do erro numérico. Em todos os exemplos estudados, podemos concluir que as taxas são quadráticas, ou seja, $\mathcal{O}(2)$ e que o erro decresce a medida que refinamos a malha.

Porém, quando consideramos o problema homogênio, $f = 0$, foi possível observar a influência da fronteira móvel atuando no sistema de forma significativa. A partir dos dados gerados, notamos uma redução da taxa de convergência a medida que escolhemos uma fronteira cujas funções possuem uma variação maior de sua amplitude. Esse fato não foi observado na parte teórica, em que as hipóteses sobre a fronteira não possuiam essa restrição.

Além disso, o exemplo 2 para o problema homogênio, apresentou um resultado pouco satisfatório. Indicando que, de alguma forma, a solução numérica inicial também exerce influência no sistema. Isso demonstra a necessidade de um estudo mais profundo dos resultados de convergência obtidos, ou seja, as estimativas de erro esperado entre a solução exata e a solução numérica aproximada.

Uma análise teórica do erro associado aos métodos aplicados, nos permitirá estabelecer uma comparação com os resultados numéricos gerados pelas simulações numéricas realizadas.

REFERÊNCIAS

BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle, theéorie et applications**. Paris: Dunod, 1999.

BROWDER, F. E. **Problemes Non-Lineaires**. Montreal: Presses de l'Université de Montréal, 1966.

CIPOLATTI, R.; LóPEZ GONDAR, J.; TRALLERO-GINER, C. Bose–Einstein condensates in optical lattices: mathematical analysis and analytical approximate formulae. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Amsterdam, v. 241, p. 755–763, 2012.

EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Providence: American Mathematical Society, 1998. (Graduate Studies in Mathematics, 19).

LIONS, J. L. **Quelques méthodes de résolutions des problémes aux limites non linéaires**. Paris: Dunod, 1969.

LIU, I.-S.; RINCON, M. A. **Introdução ao método de elementos finitos**: computação e aanálise em aquações diferenciais parciais. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2013.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. Controllabilité Exate de l'équation de Schrödinger Dans de Domaines Non Cylindriques. **C.R.Acad. Sci.**, Paris, p. 685–689, 1994.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Exact Controllability for Schrödinger Equations in Non Cylindrical Domains**: 41^o seminário brasileiro de análise. Rio de Janeiro: Rev. Mat. Apl., 1995.

MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Introdução aos espaços de Sobolev e ás equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011. 222 p.

MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H. **Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 1975. 197 p. (Textos de Métodos Matemáticos, 9).

TEMAM, R. **Navier-Stokes equations**: theory and numerical analysis. New York: North-Holland, 1979. v. 2.

APÊNDICE A

O objetivo deste apêndice é mostrar uma identidade a partir da integral

$$\frac{k'}{k}\int_\Gamma y_j\nu_j\left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2\, d\Gamma,$$

obtida no Capítulo 3, na segunda estimativa, seguindo a referência MEDEIROS; MIRANDA (1995).

Para isso, consideramos a equação aproximada (3.6)

$$\begin{aligned}&(v_m'(t), w_j) - \frac{k'}{k}\left(y\cdot\nabla v_m(t), w_j\right) + i\frac{1}{k^2}\left(\nabla v_m(t), \nabla w_j\right)\\ &+(\left|v_m(t)\right|^\rho v_m(t), w_j) = (f(t), w_j),\end{aligned} \tag{A.1}$$

$\forall\ j = 1, 2, \dots, m$.

Além disso, consideramos $L^2(\Omega) = V_m \oplus V_m^\perp$ e P_m a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $V_m \subset L^2(\Omega)$, tal que $P_m v = \sum\limits_{j=1}^{m}(v, w_j)w_j,\quad \forall v \in L^2(\Omega)$. Temos que $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ com $\|P_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = 1$, auto-adjunta e que $P_m v = v,\ \forall v \in V_m$.

Multiplicando ambos os lados da equação aproximada (A.1) por w_j e somando em $j = 1, 2, \dots, m$, obtemos

$$v_m' - \frac{k'}{k}P_m[y\cdot\nabla v_m] - i\frac{1}{k^2}\Delta v_m + P_m[|v_m|^\rho v_m] = P_m f. \tag{A.2}$$

Tomando o produto interno em ambos os membros de (A.2) com $y\cdot\nabla v_m$, obtemos

$$(v_m'(t), y\cdot\nabla v_m(t)) - \frac{k'}{k}(P_m[y\cdot\nabla v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t)) - i\frac{1}{k^2}(\Delta v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))$$
$$+(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t)) = (P_m f(t), y\cdot\nabla v_m(t)). \tag{A.3}$$

Observemos que $(P_m[y\cdot\nabla v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t)) = (P_m^2[y\cdot\nabla v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t)) = (P_m[y\cdot\nabla v_m(t)], P_m[y\cdot\nabla v_m(t)]) = |P_m[y\cdot\nabla v_m(t)]|^2 \in \mathbb{R}$, pois $P_m^2 = P_m$.

Tomando a parte Imaginária em ambos os membros de (A.3), obtemos

$$Im(v_m'(t), y\cdot\nabla v_m(t)) - Re\left(\frac{1}{k^2}(\Delta v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))\right)$$
$$+Im(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t)) = Im(P_m f(t), y\cdot\nabla v_m(t)),$$

pois, $Im(iz) = Re(z)$. Integrando de 0 a T, teremos

$$\int_0^T Im(v_m'(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt + \int_0^T \frac{1}{k^2}Re(-\Delta v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt$$
$$+\int_0^T Im(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t))dt \tag{A.4}$$
$$= \int_0^T Im(P_m f(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt.$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T Im(v_m'(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt$

Temos que

$$\int_0^T (v_m'(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt$$
$$-\int_0^T (v_m(t), y\cdot\nabla v_m'(t))dt. \tag{A.5}$$

Além disso, pelo Lema de Gauss, temos que

$$\int_\Omega y_j v_m \frac{\partial \overline{v_m'}}{\partial y_j}\, d\Omega + \int_\Omega y_j \frac{\partial v_m}{\partial y_j} \overline{v_m'}\, d\Omega + \int_\Omega n v_m \overline{v_m'}\, d\Omega = 0. \tag{A.6}$$

Substituindo (A.6) em (A.5), obtemos que

$$\int_0^T (v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt$$
$$+ \int_0^T (y \cdot \nabla v_m(t), v_m'(t))dt + n \int_0^T (v_m(t), v_m'(t))dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\int_0^T (v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt - \int_0^T (y \cdot \nabla v_m(t), v_m'(t))dt \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt}(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt + n \int_0^T (v_m(t), v_m'(t))dt. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Notemos que $z - \overline{z} = 2iIm(z)$ e $-i(z - \overline{z}) = 2Im(z)$. Dessa forma,

$$\int_0^T 2Im(v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt$$
$$= -i\left[\int_0^T (v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt - \int_0^T \overline{(v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))}dt\right]$$
$$= -i\left[\int_0^T (v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt - \int_0^T (y \cdot \nabla v_m(t), v_m'(t))dt\right].$$

Assim, podemos reescrever a identidade acima, por (A.7), como

$$\begin{aligned} &\int_0^T 2Im(v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt \\ &= -i\left[\int_0^T \frac{d}{dt}(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt + n \int_0^T (v_m(t), v_m'(t))dt\right]. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Tomando a parte real da equação (A.8), observando que $Re(iz) = -Imz$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T 2Im(v'_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt \\
&= \int_0^T Im\frac{d}{dt}(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt + n\int_0^T Im(v_m(t), v'_m(t))dt.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
n\int_0^T Im(v_m(t), v'_m(t)) &= -n\int_0^T Im(v'_m(t), v_m(t))dt \\
&= n\int_0^T Im(-v'_m(t), v_m(t))dt.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Por (A.2), obtemos que

$$-v'_m = -\frac{k'}{k}P_m[y \cdot \nabla v_m] - i\frac{1}{k^2}\Delta v_m + P_m[|v_m|^\rho v_m] - P_m f.$$

Dessa forma, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
nIm(-v'_m(t), v_m(t)) = \frac{-nk'}{k}Im(P_m[y \cdot \nabla v_m(t)], v_m(t)) + \frac{n}{k^2}Re(-\Delta v_m(t), v_m(t)) \\
+nIm(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], v_m(t)) - nIm(P_m f(t), v_m(t)).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Como P_m é auto-adjunta e $P_m v_m = v_m$, temos que $(P_m[y \cdot \nabla v_m(t)], v_m(t))$ $= (y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t))$, $(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], v_m(t) = (|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t))$ e que $(P_m f(t), v_m(t)) = (f(t), v_m(t))$.

Além disso, pela fómula de Green, escrevemos (A.11) como

$$\begin{aligned}
nIm(-v'_m(t), v_m(t)) = \frac{-nk'}{k}Im(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t)) + \frac{n}{k^2}|\nabla v_m(t)|^2 \\
+nIm(|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t)) - nIm(f(t), v_m(t)).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$(|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t)) = \int_\Omega |v_m|^\rho v_m \overline{v_m} d\Omega = \int_\Omega |v_m|^\rho |v_m|^2 d\Omega = \int_\Omega |v_m|^{\rho+2} d\Omega \in \mathbb{R}.$$

Logo, $Im(|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t)) = 0$.

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} nIm(-v_m'(t), v_m(t)) &= \frac{-nk'}{k} Im(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t)) \\ &+ \frac{n}{k^2}\|v_m(t)\|^2 - nIm(f(t), v_m(t)). \end{aligned} \tag{A.12}$$

Substituindo (A.12) em (A.10), obtemos

$$\begin{aligned} n\int_0^T Im(v_m(t), v_m'(t)) &= -\int_0^T \frac{nk'}{k} Im(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t))dt \\ &+ \int_0^T \frac{n}{k^2}\|v_m(t)\|^2 dt - n\int_0^T Im(f(t), v_m(t))dt. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Agora, substituindo (A.13) em (A.9), obtemos

$$\int_0^T 2Im(v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt = \int_0^T Im\left[\frac{d}{dt}(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))\right] dt$$

$$-\int_0^T \frac{nk'}{k} Im(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t))dt + \int_0^T \frac{n}{k^2}\|v_m(t)\|^2 dt - n\int_0^T Im(f(t), v_m(t))dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^T Im(v_m'(t), y \cdot \nabla v_m(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T Im\left[\frac{d}{dt}(v_m(t), y \cdot \nabla v_m(t))\right] dt \\ &- \int_0^T \frac{nk'}{2k} Im(y \cdot \nabla v_m(t), v_m(t))dt + \int_0^T \frac{n}{2k^2}\|v_m(t)\|^2 dt \\ &- \frac{n}{2}\int_0^T Im(f(t), v_m(t))dt. \end{aligned} \tag{A.14}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T \frac{1}{k^2} Re(-\Delta v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt$

Pela fórmula de Green, temos que

$$(-\Delta v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t)) = \left(\frac{\partial v_m}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\left[y_k \frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right]\right) - \int_\Gamma \frac{\partial v_m}{\partial \nu} y_k \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} d\Gamma$$

$$= \left(\frac{\partial v_m}{\partial y_j}, \delta_k^j \frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right) + \left(\frac{\partial v_m}{\partial y_j}, y_k \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial v_m}{\partial y_k}\right]\right) - \int_\Gamma \frac{\partial v_m}{\partial \nu} y_k \frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_k} d\Gamma.$$

Daí, obtemos que

$$Re(-\Delta v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t)) = \|v_m(t)\|^2 + \int_\Omega y_k Re\left\{\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}\right]\right\} d\Omega - \int_\Gamma y\cdot\nu \left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma.$$

Pelo lema de Gauss, temos que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_k}\left[y_k \frac{\partial v_m}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}\right] d\Omega = n\int_\Omega \frac{\partial v_m}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j} d\Omega$$

$$+ \int_\Omega y_k \frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\right]\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j} d\Omega + \int_\Omega y_k \frac{\partial v_m}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}\right] d\Omega.$$

Daí, obtemos que

$$2\int_\Omega y_k Re\left\{\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}\right]\right\} d\Omega = -n\|v_m(t)\|^2 + \int_\Gamma y_k \frac{\partial v_m}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j} d\Gamma,$$

ou seja,

$$\int_\Omega y_k Re\left\{\frac{\partial v_m}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y_j}\right]\right\} d\Omega = -\frac{n}{2}\|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Gamma y\cdot\nu \left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma.$$

Dessa forma, teremos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{1}{k^2} Re(-\Delta v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt &= \int_0^T \frac{1}{k^2}\|v_m(t)\|^2 dt \\ -\frac{n}{2}\int_0^T \frac{1}{k^2}\|v_m(t)\|^2 dt &- \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{k^2}\int_\Gamma y\cdot\nu \left|\frac{\partial v_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma\ dt.\end{aligned} \tag{A.15}$$

Substituindo (A.14) e (A.15) em (A.4) obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^T Im\frac{d}{dt}(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt - \int_0^T \frac{nk'}{2k} Im(y\cdot\nabla v_m(t), v_m(t))dt$$

$$-\frac{n}{2}\int_0^T Im(f(t), v_m(t))dt + \int_0^T \frac{1}{k^2}\|v_m(t)\|^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{k^2}\int_\Gamma y\cdot\nu\left|\frac{\partial v_m}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma\ dt$$

$$+\int_0^T Im(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t))dt = \int_0^T Im(P_m f(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T Im\frac{d}{dt}(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt - n\int_0^T \frac{k'}{k} Im(y\cdot\nabla v_m(t), v_m(t))dt$$

$$-n\int_0^T Im(f(t), v_m(t))dt + \int_0^T \frac{2}{k^2}\|v_m(t)\|^2 dt - \int_0^T \frac{1}{k^2}\int_\Gamma y\cdot\nu\left|\frac{\partial v_m}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma\ dt$$

$$+2\int_0^T Im(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t))dt = 2\int_0^T Im(P_m f(t), y\cdot\nabla v_m(t))dt.$$

A identidade acima é verdadeira para todo $0 \le t \le T$. Fazendo $T = t$, derivando ambos os membros da equação acima em relação a t e multiplicando por $k'k$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{k'}{k}\int_\Gamma y\cdot\nu\left|\frac{\partial v_m}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma &= k'kIm\frac{d}{dt}(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t)) + n(k')^2 Im(v_m(t), y\cdot\nabla v_m(t))\\ &+\frac{2k'}{k}\|v_m(t)\|^2 + 2k'kIm(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], y\cdot\nabla v_m(t))\\ &-nk'kIm(f(t), v_m(t)) - 2k'kIm(P_m f(t), y\cdot\nabla v_m(t)).\end{aligned} \tag{A.16}$$

APÊNDICE B

O objetivo deste apêndice é mostrar uma identidade a partir da integral

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\right)\, d\Omega,$$

obtida no Capítulo 4, na segunda estimativa, seguindo a referência MEDEIROS; MIRANDA (1995).

Para isso, consideramos a equação aproximada (4.5)

$$\begin{aligned}(v_m'(t), w_j) - \left(a(t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, w_j\right) + i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial w_j}{\partial y}\right)\\ + (|v_m(t)|^\rho\, v_m(t), w_j) = (f(t), w_j),\end{aligned} \tag{B.1}$$

$\forall\ j = 1, 2, \ldots, m.$

Além disso, como no apêndice A, consideramos $L^2(\Omega) = V_m \oplus V_m^\perp$ e P_m a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $V_m \subset L^2(\Omega)$, tal que $P_m v = \sum_{j=1}^{m}(v, w_j)w_j,\ \forall\ v \in L^2(\Omega)$. Temos que P_m é limitada, auto-adjunta e tal que $P_m v = v,\ \forall v \in V_m$.

Multiplicando ambos os lados da equação aproximada (B.1) por w_j e somando em $j = 1, 2, \ldots, m$, obtemos

$$v_m' - P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right] - i\frac{4}{\gamma^2}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} + P_m[|v_m|^\rho v_m] = P_m f. \tag{B.2}$$

Tomando o produto interno em ambos os membros de (A.2) com $a(y,t)\dfrac{\partial v_m}{\partial y}$, obtemos

$$\left(v_m'(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) - \left(P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) - i\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)$$
$$+\left(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) = \left(P_m f(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right). \tag{B.3}$$

Observemos que

$$\left(P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) = \left(P_m^2\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)$$
$$= \left(P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right], P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\right) = \left|P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\right|^2 \in \mathbb{R},$$

pois $P_m^2 = P_m$.

Tomando a parte Imaginária em ambos os membros de (B.3), obtemos

$$Im\left(v_m'(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) - Re\left(\frac{4}{\gamma^2}\left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)\right)$$
$$+Im\left(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) = Im\left(P_m f(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right).$$

pois, $Im(iz) = Re(z)$.

Integrando de 0 a T, teremos

$$\int_0^T Im\left(v_m'(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt + \int_0^T \frac{4}{\gamma^2}Re\left(-\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt$$
$$+\int_0^T Im\left(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt = \int_0^T Im\left(P_m f(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt. \tag{B.4}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T Im\left(v'_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) dt$

Temos que

$$\int_0^T \left(v'_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) dt$$
$$-\int_0^T \left(v_m(t), \frac{d}{dt}\left(a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)\right) dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) dt \tag{B.5}$$
$$-\int_0^T \left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) dt - \int_0^T \left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v'_m}{\partial y}\right) dt.$$

Além disso, pelo Lema de Gauss, temos que

$$\int_\Omega a(y,t)v_m\frac{\partial \overline{v'_m}}{\partial y}\, d\Omega + \int_\Omega a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\overline{v'_m}\, d\Omega + \int_\Omega \frac{\gamma'}{\gamma}v_m\overline{v'_m}\, d\Omega = 0. \tag{B.6}$$

Substituindo (B.6) em (B.5), obtemos que

$$\int_0^T \left(v'_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right) dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right) dt$$
$$-\int_0^T \left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right) dt + \int_0^T \left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v'_m(t)\right) dt$$
$$+\int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma}(v_m(t), v'_m(t))dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \left(v'_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right) dt - \int_0^T \left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v'_m(t)\right) dt$$
$$= \int_0^T \frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right) dt - \int_0^T \left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right) dt \tag{B.7}$$
$$+\int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma}(v_m(t), v'_m(t))dt.$$

Notemos que $z-\overline{z}=2iIm(z)$ e $-i(z-\overline{z})=2Im(z)$. Dessa forma,

$$\int_0^T 2Im\left(v_m'(t),a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt$$

$$-i\left[\int_0^T \left(v_m'(t),a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt-\int_0^T \overline{\left(v_m'(t),a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)}dt\right]$$

$$=-i\left[\int_0^T \left(v_m'(t),a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt-\int_0^T \left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y},v_m'(t)\right)dt\right].$$

Assim, podemos reescrever (B.7) como

$$\begin{aligned}\int_0^T 2Im\left(v_m'(t),a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt&=-i\left[\int_0^T \frac{d}{dt}\left(v_m(t),a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt\right.\\&\left.-\int_0^T \left(v_m(t),\frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt+\int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma}(v_m(t),v_m'(t))dt\right].\end{aligned}\tag{B.8}$$

Tomando a parte real da equação (B.8), observando que $Re(iz)=-Imz$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T 2Im\left(v_m'(t),a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt&=\int_0^T Im\frac{d}{dt}\left(v_m(t),a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt\\&-\int_0^T Im\left(v_m(t),\frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt+\int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma}Im(v_m(t),v_m'(t))dt.\end{aligned}\tag{B.9}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\frac{\gamma'}{\gamma}\int_0^T Im(v_m(t),v_m'(t))&=-\frac{\gamma'}{\gamma}\int_0^T Im(v_m'(t),v_m(t))dt\\&=\frac{\gamma'}{\gamma}\int_0^T Im(-v_m'(t),v_m(t))dt.\end{aligned}\tag{B.10}$$

Por (B.2), obtemos que

$$-v_m'=-P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]-i\frac{4}{\gamma^2}\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}+P_m[|v_m|^\rho v_m]-P_mf.$$

Dessa forma, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(-v_m'(t), v_m(t)\right) = -\frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right], v_m(t)\right)\\
&+\frac{4\gamma'}{\gamma^3} Re\left(-\frac{\partial^2 v_m(t)}{\partial y^2}, v_m(t)\right) + \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], v_m(t)\right)\\
&-\frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(P_m f(t), v_m(t)\right).
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Como P_m é auto-adjunta e $P_m v_m = v_m$, temos que $\left(P_m\left[a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right], v_m(t)\right)$ $= \left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)$, $(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], v_m(t)) = (|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t))$ e que $(P_m f(t), v_m(t)) = (f(t), v_m(t))$.

Além disso, pela fómula de Green, escrevemos (B.11) como

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(-v_m'(t), v_m(t)\right) = -\frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)\\
&+\frac{4\gamma'}{\gamma^3}\|v_m(t)\|^2 + \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t)\right) - \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(f(t), v_m(t)\right).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$(|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t)) = \int_\Omega |v_m|^\rho v_m \overline{v_m} d\Omega = \int_\Omega |v_m|^\rho |v_m|^2 d\Omega = \int_\Omega |v_m|^{\rho+2} d\Omega \in \mathbb{R}.$$

Logo, $Im(|v_m(t)|^\rho v_m(t), v_m(t)) = 0$.

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(-v_m'(t), v_m(t)\right) = -\frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)\\
&+\frac{4\gamma'}{\gamma^3}\|v_m(t)\|^2 - \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(f(t), v_m(t)\right).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Substituindo (B.12) em (B.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma'}{\gamma}\int_0^T Im(v_m(t),v_m'(t)) &= -\int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)dt \\
&+ \int_0^T \frac{4\gamma'}{\gamma^3}\|v_m(t)\|^2 dt - \int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(f(t),v_m(t)\right)dt.
\end{aligned} \tag{B.13}
$$

Agora, substituindo (B.13) em (B.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T 2Im\left(v_m'(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt &= \int_0^T Im\frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt \\
&- \int_0^T Im\left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt - \int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)dt \\
&+ \int_0^T \frac{4\gamma'}{\gamma^3}\|v_m(t)\|^2 dt - \int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(f(t),v_m(t)\right)dt,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T Im\left(v_m'(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt &= \frac{1}{2}\int_0^T Im\frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt \\
&- \frac{1}{2}\int_0^T Im\left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt - \int_0^T \frac{\gamma'}{2\gamma} Im\left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)dt \\
&+ \int_0^T \frac{2\gamma'}{\gamma^3}\|v_m(t)\|^2 dt - \int_0^T \frac{\gamma'}{2\gamma} Im\left(f(t),v_m(t)\right)dt.
\end{aligned} \tag{B.14}
$$

- Análise do termo $\int_0^T \frac{4}{\gamma^2} Re\left(-\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt$

Integrando por partes, temos que

$$\left(-\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right]\right) - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_m}{\partial y} a(y,t)\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\right) d\Omega$$

$$= \frac{\gamma'}{\gamma}\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial v_m}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v_m}{\partial y}, a(y,t)\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right) - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\frac{\partial \overline{v_m}}{\partial y}\right) d\Omega$$

$$= \frac{\gamma'}{\gamma}\left(\frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial v_m}{\partial y}\right) - \left(a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}, -\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}\right) - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right) d\Omega.$$

Daí, obtemos que

$$2Re\left(-\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) = \frac{\gamma'}{\gamma}\|v_m(t)\|^2 - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right) d\Omega,$$

ou seja,

$$Re\left(-\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) = \frac{\gamma'}{2\gamma}\|v_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right) d\Omega.$$

Dessa forma, teremos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{4}{\gamma^2} Re\left(-\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) dt &= \int_0^T \frac{2\gamma'}{\gamma^3}\|v_m(t)\|^2 dt \\ &- \int_0^T \frac{2}{\gamma^2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right) d\Omega dt.\end{aligned} \tag{B.15}$$

Substituindo (B.14) e (B.15) em (B.4) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T Im\frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^T Im\left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt \\
&-\int_0^T \frac{\gamma'}{2\gamma} Im\left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)dt - \int_0^T \frac{\gamma'}{2\gamma} Im\left(f(t), v_m(t)\right)dt \\
&+\int_0^T \frac{4\gamma'}{\gamma^3}\|v_m(t)\|^2 dt - \int_0^T \frac{2}{\gamma^2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right)d\Omega dt \\
&+\int_0^T Im\left(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt = \int_0^T Im\left(P_m f(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt.
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T Im\frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt - \int_0^T Im\left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)dt \\
&-\int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)dt - \int_0^T \frac{\gamma'}{\gamma} Im\left(f(t), v_m(t)\right)dt \\
&+\int_0^T \frac{8\gamma'}{\gamma^3}\|v_m(t)\|^2 dt - \int_0^T \frac{4}{\gamma^2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right)d\Omega dt \\
&+2\int_0^T Im\left(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt = 2\int_0^T Im\left(P_m f(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)dt.
\end{aligned}
$$

A identidade acima é verdadeira para todo $0 \leq t \leq T$. Fazendo $T = t$, derivando ambos os membros da equação acima em relação a t e multiplicando por

$\dfrac{\gamma^2}{4}$, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y,t)\left|\frac{\partial v_m}{\partial y}\right|^2\right)d\Omega = \frac{\gamma^2}{4} Im \frac{d}{dt}\left(v_m(t), a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{\gamma^2}{4} Im\left(v_m(t), \frac{d}{dt}a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}\right) - \frac{\gamma\gamma'}{4} Im\left(a(y,t)\frac{\partial v_m(t)}{\partial y}, v_m(t)\right)$$

$$-\frac{\gamma\gamma'}{4} Im\left(f(t), v_m(t)\right) + \frac{2\gamma'}{\gamma}\|v_m(t)\|^2$$

$$+\frac{\gamma^2}{2} Im\left(P_m[|v_m(t)|^\rho v_m(t)], a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) - \frac{\gamma^2}{2} Im\left(P_m f(t), a(y,t)\frac{\partial v_m}{\partial y}\right). \tag{B.16}$$

ANEXO A

Este anexo tem por objetivo demonstrar o Lema de Lions, seguindo a referência BROWDER (1966).

Lema A.1 *Sejam* $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência do espaço de Lebesgue* $L^p(\Omega)$, *com* $1 < p < \infty$, *e* Ω *um conjunto aberto não vazio e limitado do* $\mathbb{R}^n$. *Suponhamos* $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *limitada, tal que*

$$\exists M > 0; \ \|v_j\|_{L^p(\Omega)} < M, \forall j \ e \ \lim_{j\longrightarrow\infty} v_j = v \ q. \ s. \ em \ \Omega.$$

Então, $v \in L^p(\Omega)$ *e* $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} v_j = v$ *fracamente em* $L^p(\Omega)$.

Demonstração A.1 *Seja* $\varepsilon > 0$. *Então, existe* $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ *tal que* $med(\Omega - \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ *e* $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} v_j = v$, *uniformentente em* Ω_ε.

Mostraremos que $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy fraca em* $L^p(\Omega)$, *com* $1 < p < \infty$.

De fato, $\mathcal{D}(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$. *Assim, é suficiente mostrar que*

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega (v_j - v_k)\varphi \ dx = 0, \ para \ todo \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Temos que $\Omega = \Omega_\varepsilon \cup (\Omega - \Omega_\varepsilon)$. *Assim,*

$$\int_\Omega (v_j - v_k)\varphi \ dx = \int_{\Omega_\varepsilon} (v_j - v_k)\varphi \ dx + \int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} (v_j - v_k)\varphi \ dx. \tag{A.1}$$

A primeira integral do segundo membro da equação (A.1) *converge para zero, porque a convergência é uniforme em* Ω_ε.

A segunda integral é limitada, por $C\|v_j\|_{L^q(\Omega)}.\left(\underset{x\in\Omega}{máx}\,|\varphi(x)|\right).med(\Omega-\Omega_\varepsilon)$. *Como* $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *é limitada e* $med(\Omega-\Omega_\varepsilon)<\varepsilon$, *temos que a integral em* $\Omega-\Omega_\varepsilon$ *também converge a zero.*

Dessa forma, por densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ *em* $L^p(\Omega)$ *e por* (A.1), *temos que* $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy fraca em* $L^p(\Omega)$.

Mas, $L^p(\Omega)$, *para* $1<p<\infty$, *é Banach reflexivo. Um espaço de Banach reflexivo é fracamente sequencialmente completo (como o espaço de Hilbert), portanto, obtemos*

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} v_j = v \text{ fracamente em } L^p(\Omega),\ \text{ com } v\in L^p(\Omega).$$