

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

WILMAN RODAS HUARCAYA

**ESTIMATIVA DE ERRO E
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM
MODELO DE CORDAS ELÁSTICAS
COM FRONTEIRA MÓVEL**

Rio de Janeiro
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

WILMAN RODAS HUARCAYA

**ESTIMATIVA DE ERRO E
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM
MODELO DE CORDAS ELÁSTICAS
COM FRONTEIRA MÓVEL**

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

Orientador: Mauro Antônio Rincon

Rio de Janeiro
2016

H874 Huarcaya, Wilman Rodas

Estimativa de Erro e Simulação Numérica de um modelo de cordas elásticas com fronteira móvel / Wilman Rodas Huarcaya. – 2016.

93 f.: il.

Tese (Doutorado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto de Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2016.

Orientador: Mauro Antônio Rincon.

1. Estimativa de Erro. 2. Método de Galerkin. 3. Fronteira Móvel. 4. Método de Newton . 5. Método dos Elementos Finitos. 6. Método de Newmark. 7. Simulação Numérica. – Teses. I. Rincon, Mauro Antônio (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto de Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. III. Título

CDD:

WILMAN RODAS HUARCAYA

Estimativa de Erro e Simulação Numérica de um modelo de cordas elásticas com fronteira móvel

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

Aprovado em: Rio de Janeiro, ____ de _____ de _____.

Prof. Dr. Mauro Antônio Rincon (Orientador)

Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark

Prof. Dr. Juan Límaco Ferrel

Prof. Dr. Gladson Octaviano Antunes

Prof. Dr. Daniel Alfaro Vigo

Prof. Dra. Juliana Vianna Valerio

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a DEUS pela força e paciência que me deu para conseguir meus objetivos.

À minha família, que acreditou em mim com sua compreensão ao longo de todos esses anos de estudos.

Ao meu orientador, professor Dr. Mauro Antônio Rincon por toda a atenção, dedicação e paciência para me ajudar.

Aos membros da banca examinadora, os professores Dr. Haroldo Rodrigues Clark, Dr. Juan Límaco Ferrel, Dr. Gladson Octaviano Antunes, Dr. Daniel Alfaro Vigo e Dra. Juliana Vianna Valerio, pelos importantes comentários, valiosas sugestões e correções neste trabalho.

Aos amigos que fiz aqui nesta nossa sempre querida Ilha do Fundão-UFRJ, pois foram muitos os momentos felizes que compartilhamos juntos.

Ao NCE pelo uso de suas instalações.

Finalmente à CAPES pelo apoio financeiro de me outorgar uma bolsa de estudos.

RESUMO

HUARCAYA, Wilman Rodas. **Estimativa de Erro e Simulação Numérica de um modelo de cordas elásticas com fronteira móvel**. 2016. 93 f. Tese (Doutorado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

Neste trabalho serão obtidas estimativas de erro para os problemas semidiscreto e totalmente discreto de um modelo não linear de cordas elásticas com fronteira móvel, considerando a condição de fronteira nula. A existência e unicidade de solução do caso contínuo do problema são conhecidos na literatura. Além disso, para comprovar a ordem de convergência do método numérico, simulações numéricas são apresentadas com tabelas de ordem de convergência nas normas $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ e $L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ e algumas figuras são apresentadas. O sistema não linear de equações é resolvido por meio do método de Newton. A linguagem computacional usada foi o *Matlab*.

Palavras-chave: Estimativa de Erro, Método de Galerkin, Fronteira Móvel, Método de Newton, Método dos Elementos Finitos, Método de Newmark, Simulação Numérica.

ABSTRACT

HUARCAYA, Wilman Rodas. **Estimativa de Erro e Simulação Numérica de um modelo de cordas elásticas com fronteira móvel**. 2016. 93 f. Tese (Doutorado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

In this work we will prove error estimates for the semi-discrete and totally discrete problems of a nonlinear model of elastic strings with boundary moving, considering the zero boundary condition. The existence and uniqueness of solution for the continuous case of the problem are known in the literature. Furthermore, to verify the order of convergence of the numerical method, numerical simulations are presented with convergence order tables in the $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ and $L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ norms and some pictures are also presented. We use the Newton's method to solve the nonlinear system of equations. Computational language used was *Matlab*.

Keywords: Error Estimation, Galerkin's Method, Moving Boundary, Newton Method, Finite Elements Method, Newmark Method, Numerical Simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1: Função base global	32
Figura 4.1: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 1	58
Figura 4.2: Soluções aproximadas do exemplo 1.	61
Figura 4.3: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 2	62
Figura 4.4: Soluções aproximadas do exemplo 2.	65
Figura 4.5: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 3	65
Figura 4.6: Soluções aproximadas do exemplo 3.	68
Figura 4.7: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 4	69
Figura 4.8: Soluções aproximadas do exemplo 4.	73
Figura 4.9: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 5	74
Figura 4.10: Soluções aproximadas do exemplo 5.	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Ordem de convergência do exemplo 1.	59
Tabela 4.2: Ordem de convergência do exemplo 1.	59
Tabela 4.3: Ordem de convergência do exemplo 1.	59
Tabela 4.4: Ordem de convergência do exemplo 1.	60
Tabela 4.5: Ordem de convergência do exemplo 1.	60
Tabela 4.6: Ordem de convergência do exemplo 1.	60
Tabela 4.7: Ordem de convergência do exemplo 2.	63
Tabela 4.8: Ordem de convergência do exemplo 2.	63
Tabela 4.9: Ordem de convergência do exemplo 2.	63
Tabela 4.10: Ordem de convergência do exemplo 2.	63
Tabela 4.11: Ordem de convergência do exemplo 2.	64
Tabela 4.12: Ordem de convergência do exemplo 2.	64
Tabela 4.13: Ordem de convergência do exemplo 3	66
Tabela 4.14: Ordem de convergência do exemplo 3	67
Tabela 4.15: Ordem de convergência do exemplo 3	67
Tabela 4.16: Ordem de convergência do exemplo 3	67
Tabela 4.17: Ordem de convergência do exemplo 3	67
Tabela 4.18: Ordem de convergência do exemplo 3	68
Tabela 4.19: Ordem de convergência do exemplo 4	70
Tabela 4.20: Ordem de convergência do exemplo 4	71
Tabela 4.21: Ordem de convergência do exemplo 4	71
Tabela 4.22: Ordem de convergência do exemplo 4	71
Tabela 4.23: Ordem de convergência do exemplo 4	72
Tabela 4.24: Ordem de convergência do exemplo 4	72
Tabela 4.25: Ordem de convergência do exemplo 5	75
Tabela 4.26: Ordem de convergência do exemplo 5	75
Tabela 4.27: Ordem de convergência do exemplo 5	75
Tabela 4.28: Ordem de convergência do exemplo 5	75
Tabela 4.29: Ordem de convergência do exemplo 5	76
Tabela 4.30: Ordem de convergência do exemplo 5	76

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Histórico da Equação	12
1.2	Proposta de Pesquisa	14
2	ANÁLISE TEÓRICA	15
2.1	Formulação do problema	15
2.2	Problema equivalente	16
2.3	Formulação Variacional	21
2.4	Estimativa de erro para o problema semi-discreto	22
3	MÉTODOS NUMÉRICOS	29
3.1	Método de Galerkin	29
3.2	Problema Aproximado	29
3.3	Método dos Elementos finitos	31
3.3.1	Função de Interpolação	31
3.4	Método Numérico das Diferenças Finitas	34
3.4.1	Algoritmo	36
3.5	Solução do Sistema Não-linear	38
3.5.1	Método de Newton	38
3.5.2	Aplicação	40
3.6	Estimativa de erro-tempo discreto	42
4	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	56
4.1	Validação do Método	56
4.1.1	Convergência Numérica para o Exemplo 1	58
4.1.2	Convergência Numérica para o Exemplo 2	62
4.1.3	Convergência Numérica para o Exemplo 3	66
4.1.4	Convergência Numérica para o Exemplo 4	70
4.1.5	Convergência Numérica para o Exemplo 5	74
5	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	79

APÊNDICE A	NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS	82
A.1	Preliminares	82
A.2	Espaço das Distribuições	82
A.3	Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	82
A.4	Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$	84
A.5	Espaços de Sobolev	85
A.5.1	Convergência em L^p e no dual de L^p	85
A.6	Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	88
A.7	Definições e notações utilizadas	92

1 INTRODUÇÃO

1.1 Histórico da Equação

Os primeiros resultados matemáticos para o estudo de pequenas vibrações transversais de cordas elásticas foram obtidos por D'Alembert em 1743 e posteriormente por Euler. O modelo proposto por D'Alembert em notação moderna, é:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (1.1)$$

onde $c^2 = \tau/m$, sendo τ a tensão constante e m a massa da corda. Para obter o modelo de D'Alembert é preciso impor algumas restrições ao problema físico, já que o modelo não considera os pequenos deslocamentos horizontais que acontecem durante a vibração.

As pequenas vibrações transversais de uma corda elástica, quando se supõe que a tensão em cada ponto da corda possui apenas uma componente vertical, podem ser descritas pela seguinte equação:

$$u_{tt} - \frac{1}{m} \left[\tau_0 + \frac{k}{2L_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} u_x^2 dx \right] u_{xx} = 0, \quad (1.2)$$

onde $u = u(x, t)$ é o deslocamento transversal da corda, m é a massa por unidade de longitude, τ_0 é a tensão, $L_0 = \beta_0 - \alpha_0$ é a longitude da corda nos extremos e k é o módulo de Young. A equação (1.2) foi introduzida por Kirchhoff [14]. O primeiro resultado matemático para um problema misto da equação (1.2) foi obtido por Bernstein [2] e Dickey [10]. Em [5] Carrier também estabeleceu um modelo do tipo

$$u_{tt} = [P_0 + P_1 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} u^2 dx] u_{xx}, \quad (1.3)$$

onde $P_0 = \tau_0/m$ e $P_1 = k/2mL_0$ são constantes.

Em 1961, Balazs [1] propôs uma solução para a equação de onda com fronteira móvel. O modelo estudado por Balazs foi:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} \quad \text{se, } 0 \leq x \leq vt \\ u(x, t) = 0 \quad \text{caso contrário,} \\ u(0, t) = u(vt, t) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u'(0, x) = u_1(x). \end{array} \right. \quad (1.4)$$

A equação (1.4)₁ é a própria equação de D'Alembert com $c = 1$. O fato importante do modelo é que a velocidade v do extremo $x = vt$ deve ser menor que a velocidade da característica $\sqrt{c} = 1$. Trabalhos baseados nos estudos de Balazs [1] foram apresentados por Cooper, em [8] e por Gonzales, em [12].

Em 1999 Medeiros e Límaco propuseram em [19] um modelo que é uma extensão do modelo de Kirchhoff-Carrier, pois considera a troca de tamanho das cordas elásticas durante a vibração apresentado por:

$$u_{tt} - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 dx \right] u_{xx} = 0, \quad (1.5)$$

onde $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são as posições dos extremos esquerdo e direito da corda no instante t respectivamente; o comprimento da corda é dado por $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) > 0$, note que $\alpha(t) < \beta(t)$ e $\gamma_0 = \beta_0 - \alpha_0$ com $\alpha(0) = \alpha_0, \beta(0) = \beta_0$. Quando $\alpha(t) = \alpha_0$ e $\beta(t) = \beta_0, \forall t \geq 0$, então a equação (1.5) se reduz ao modelo (1.2).

1.2 Proposta de Pesquisa

Nesse trabalho, estudaremos a Estimativa de Erro no tempo contínuo e no tempo discreto do seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - [a(t) + b(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2 dx] u_{xx} = f \quad \text{em } \hat{Q}, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \hat{\Sigma}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u'(0, x) = u_1(x), \quad \text{para } \alpha_0 < x < \beta_0. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

onde o domínio $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^2$ é definido por

$$\hat{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T); x \in I_t\} \text{ e } I_t = \{x \in \mathbb{R}; \alpha(t) < x < \beta(t)\},$$

e sua fronteira lateral é dada por $\hat{\Sigma} = \bigcup_{0 < t < T} \{(\alpha(t), \beta(t))\} \times \{t\}$. A solução u do problema (1.6) é uma função que depende das variáveis espacial x e temporal t , ou seja, $u = u(x, t)$.

Estudaremos os aspectos teóricos e numéricos do problema (1.6) com o objetivo de estabelecer a estimativa de erro de soluções em espaços de Sobolev para o problema discreto e problema semi-discreto, assim como também realizar simulações numéricas do comportamento da solução.

Para o desenvolvimento teórico, aplica-se o Método de Faedo-Galerkin e resultados de teoria de interpolação para obter uma desigualdade da solução aproximada para a solução exata e, para obter a solução numérica, aplica-se o Método dos Elementos Finitos para a variável espacial e o Método das Diferenças Finitas para a variável temporal. A linguagem computacional utilizada foi o Matlab e suas bibliotecas para calcular e desenhar os gráficos das soluções.

2 ANÁLISE TEÓRICA

2.1 Formulação do problema

Consideremos o problema associado ao seguinte modelo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left\{ \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

para pequenas vibrações de cordas elásticas com a fronteira móvel, sendo o comprimento da corda definido por $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, $\alpha(t) < \beta(t)$ e $\gamma_0 = \beta_0 - \alpha_0$ com $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$. O domínio não cilíndrico $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^2$, é definido como

$$\hat{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T); x \in I_t\} \text{ e } I_t = \{x \in \mathbb{R}; \alpha(t) < x < \beta(t)\},$$

e sua fronteira lateral $\hat{\Sigma}$ por

$$\hat{\Sigma} = \bigcup_{0 < t < T} \{(\alpha(t), \beta(t))\} \times \{t\}.$$

Definimos

$$a(t) = \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \quad \text{e} \quad b(t) = \frac{k}{2m\gamma(t)}.$$

Com esta notação temos o operador diferencial definido para funções $u(x, t)$ com $(x, t) \in \hat{Q}$ por:

$$\hat{L}u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(t) + b(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.2)$$

Determinamos uma função $u = u(x, t)$, no espaço $H_0^1(I_t) \cap H^2(I_t)$, tal que,

$$(I) \quad \begin{cases} \hat{L}u(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in \hat{Q} \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \hat{\Sigma} \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), & \alpha(0) < x < \beta(0), \end{cases} \quad (2.3)$$

com as seguintes hipóteses:

$$(H1) \quad \alpha, \beta \in C^2([0, T[; \mathbb{R}), \alpha(t) < \beta(t), \alpha'(t) < 0, \beta'(t) > 0,$$

$$|\alpha'(t) + \gamma'(t)y| < \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad |\alpha''(t) + \gamma''(t)y| < \frac{(\alpha'(t) + \gamma'(t)y)^2}{\gamma(t)},$$

para todo $0 \leq t < T$, e $0 \leq y \leq 1$ com m_0 uma constante de (H2);

$$(H2) \quad a \in W^{1, \infty}(0, \infty), \quad a(t) \geq m_0 > 0 \quad \text{e} \quad 0 < \gamma_0 < \gamma(t) < \gamma_1 < \infty.$$

Das hipóteses $\alpha'(t) < 0$ e $\beta'(t) > 0$ implica que \hat{Q} é crescente, ou seja, a função $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ é crescente sobre $0 \leq t < T$.

2.2 Problema equivalente

Devemos considerar o problema equivalente definido num domínio fixo pela seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \tau : \hat{Q} &\rightarrow Q = (0, 1) \times (0, T) \\ (x, t) &\mapsto (y, t) = \left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}, t \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

que é um difeomorfismo de classe C^2 . A inversa τ^{-1} é também de classe C^2 . A aplicação τ definida em (2.4) transforma o operador $\hat{L}u(x, t)$ no operador $\check{L}v(y, t)$, dado por

$$\begin{aligned} \check{L}v(y, t) = & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \left[-\frac{m_0}{2} + a(t) + \frac{b(t)}{\gamma} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.5)$$

definido para funções reais $v(y, t)$ no cilindro Q . Onde os coeficientes de $\check{L}v(y, t)$ são:

$$\begin{aligned} a(y, t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2, & b(y, t) &= -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right), \\ c(y, t) &= - \left(\frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

Note que $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ e $\gamma = \gamma(t)$.

Proposição 2.1. *O operador $\check{L}v(y, t)$, definido em (2.5), é obtido a partir do operador $\hat{L}u(x, t)$, definido em (2.2), por meio da mudança de variável τ dada em (2.4).*

Prova: Definindo, $v(y, t) = (u \circ \tau^{-1})(y, t) = u(x, t)$ e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.7)$$

Uma vez que

$$y = \frac{x - \alpha}{\gamma}$$

então temos

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma} \quad (2.8)$$

Novamente aplicando a regra da cadeia a (2.7) e usando (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ & + \frac{1}{\gamma^2} \left\{ 2\gamma'(\alpha' + \gamma'y) - \gamma(\alpha'' + \gamma''y) \right\} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por outro lado de (2.6) temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (2.10)$$

Temos também que

$$dy = \frac{1}{\gamma} dx \quad (2.11)$$

como

$$\hat{L}u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(t) + b(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

em (2.2), obtemos de (2.6)-(2.11) que

$$\begin{aligned} \check{L}v(y, t) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2 \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad - \left[a(t) + b(t) \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{\gamma} \right)^2 \gamma dy \right] \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} \left\{ 2\gamma'(\alpha' + \gamma' y) - \gamma(\alpha'' + \gamma'' y) \right\} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.12)$$

O que é equivalente a

$$\begin{aligned} \check{L}v(y, t) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2 \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{m_0}{2\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{\gamma^2} \left[-\frac{m_0}{2} + a(t) + \frac{b(t)}{\gamma} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad + \frac{2\gamma'}{\gamma} \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\alpha'' + \gamma'' y}{\gamma} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Assim

$$\begin{aligned} \check{L}v(y, t) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \left[-\frac{m_0}{2} + a(t) + \frac{b(t)}{\gamma} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad - \left(\frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2\gamma'}{\gamma} \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ &\quad - 2 \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \left(\frac{\alpha'' + \gamma'' y}{\gamma} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \check{L}v(y, t) = & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \left[-\frac{m_0}{2} + a(t) + \frac{b(t)}{\gamma} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde

$$\begin{aligned} a(y, t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2, & b(y, t) &= -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right), \\ c(y, t) &= - \left(\frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

Obtemos assim, num domínio retangular $Q = (0, 1) \times (0, T)$, o problema equivalente de determinar uma função $v = v(y, t)$ no espaço $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$, tal que,

$$(II) \quad \begin{cases} \check{L}v(y, t) = g(y, t), & \forall (y, t) \in Q = (0, 1) \times (0, T) \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, & 0 < t < T \\ v(y, 0) = v_0(y), \quad v'(y, 0) = v_1(y), & 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Pela mudança de variável τ , a função $u(x, t)$ é solução do problema **(I)**, (2.3), se, e somente se, $v(y, t)$ é solução do problema **(II)**, (2.16). Representemos por $((,)), \|\cdot\|; (,), |\cdot|$ respectivamente o produto escalar e a norma em $H_0^1(0, 1)$ e $L^2(0, 1)$. Em [20] foi mostrado o seguinte resultado para o problema **(II)**-**(I)**.

Teorema 2.1. *Sob as hipóteses (H1)-(H2) e dados iniciais $v_0 \in H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$, $v_1 \in H_0^1(0, 1)$, $g \in C^0([0, T]; H_0^1(0, 1))$ existe uma única solução, $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$, para o problema (II), (2.16), satisfazendo as seguintes condições:*

1. $v \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1))$,
2. $v' \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$,
3. $v'' \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$,
4.
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma^2} \left[-\frac{m_0}{2} + a(t) + \frac{b(t)}{\gamma} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} = g(y, t), \quad q.s \text{ em } Q,$$
5. $v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1.$

Teorema 2.2. *Seja $I_t = (\alpha(t), \beta(t))$, $I_0 = (\alpha(0), \beta(0))$ e dados iniciais $u_0 \in H_0^1(I_0) \cap H^2(I_0)$, $u_1 \in H_0^1(I_0)$, $f \in C^0([0, T]; H_0^1(I_t))$. Sob as hipóteses (H1)-(H2), existe uma única solução $u : \hat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, para o problema (I), (2.3), satisfazendo as seguintes condições:*

1. $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(I_t) \cap H^2(I_t))$,
2. $u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(I_t))$,
3. $u'' \in L^2(0, T; L^2(I_t))$,
4.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(t) + b(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad q.s \text{ em } \hat{Q},$$
5. $u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$

2.3 Formulação Variacional

Seja

$$\mu = \mu(t) = \frac{1}{\gamma^2} \left[-\frac{m_0}{2} + a(t) + \frac{b(t)}{\gamma} \|v(t)\|^2 \right] \quad (2.17)$$

com seguinte hipóteses adicional:

(H3) μ é uma função derivável tal que: $0 < \mu_1 \leq \mu(\lambda) \leq \mu_2$ e $|\mu'(\lambda)| \leq c, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Tome $w \in \mathcal{D}(0, 1)$. Multiplicando (2.16)₁ por w e integrando em $(0, 1)$, tem-se para quase todo $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dy - \int_0^1 \mu(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w dy - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) w dy \\ & + \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} w dy + \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} w dy = \int_0^1 g(y, t) w dy. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Integrando a segunda e a terceira parcela por partes, obtemos

$$- \int_0^1 \mu(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w dy = -\mu(t) \frac{\partial v}{\partial y} w \Big|_0^1 + \int_0^1 \mu(t) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy, \quad (2.19)$$

e

$$- \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) w dy = -a(y, t) w \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0^1 + \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (2.20)$$

Como $w \in \mathcal{D}(0, 1)$, tem-se que

$$-\mu(t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w \Big|_0^1 = -a(y, t) w \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_0^1 = 0,$$

logo substituindo (2.19)-(2.20) em (2.18) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dy + \int_0^1 \mu(t) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy + \int_0^1 \left(a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} dy \\ & + \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} w dy + \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} w dy = \int_0^1 g(y, t) w dy, \quad \forall w \in \mathcal{D}(0, 1). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Observe que, como $\mathcal{D}(0, 1)$ é denso em $H_0^1(0, 1)$, a igualdade (2.21) permanece válida para todo $w \in H_0^1(0, 1)$, ou seja,

$$\begin{aligned} (v'', w) + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) + (a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}) \\ + (b(y, t) \frac{\partial v'}{\partial y}, w) + (c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y}, w) = (g, w). \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.4 Estimativa de erro para o problema semi-discreto

Apresentaremos a formulação semi-discreta para o problema **(II)**, (2.16), usando o método de Galerkin discretizando a variável espacial. Seja $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ uma partição de $[0, 1]$ com $h = \max_{1 \leq i \leq N} (x_i - x_{i-1}) < 1$. Dado um inteiro $l \geq 1$ introduzimos um subespaço finito dimensional,

$$N_h^l = \{ \chi \in C^0(0, 1); \chi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_l, \chi(1) = \chi(0) = 0 \} \subset H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$$

onde \mathbb{P}_l é o conjunto de polinômios de grau menor ou igual a l , isto é, N_h^l é o espaço de funções polinomiais contínuas por partes de grau l . Pela teoria de interpolação, segue que dada uma função $v : [0, T] \rightarrow H^{l+1}(0, 1)$ existe um interpolador $\tilde{v}_h : [0, T] \rightarrow N_h^l$ tal que

$$\|v(t) - \tilde{v}_h(t)\|_m \leq Ch^{l+1-m} \|v(t)\|_{l+1}. \quad (2.23)$$

O resultado ainda vale para $v'(t)$ e $v''(t)$ em $H^{l+1}(0, 1)$, ver [11]. Na seguinte análise, podemos usar o resultado acima para $m = 0$ ou $m = 1$ e $l = 1$, e escrevemos N_h^l simplesmente como N_h . O problema semi-discreto consiste em encontrar $v_h : [0, T] \rightarrow N_h$ tal que

$$\begin{aligned} (v_h'', w_h) + \mu_h \left(\frac{\partial v_h}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) + (a(y, t) \frac{\partial v_h}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y}) \\ + (b(y, t) \frac{\partial v_h'}{\partial y}, w_h) + (c(y, t) \frac{\partial v_h}{\partial y}, w_h) = (g, w_h), \quad \forall w_h \in N_h. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Tomando $w = w_h$ em (2.22) e fazendo a diferença entre os problemas (2.22) e (2.24) obtemos

$$\begin{aligned} & \left((v - v_h)'' , w_h \right) + \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \mu_h \frac{\partial v_h}{\partial y} , \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) + \left(a(y, t) \frac{\partial (v - v_h)}{\partial y} , \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) \\ & + \left(b(y, t) \frac{\partial (v - v_h)'}{\partial y} , w_h \right) + \left(c(y, t) \frac{\partial (v - v_h)}{\partial y} , w_h \right) = 0, \quad \forall w_h \in N_h. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Seja $\hat{a}(v, w)$ forma bilinear em $H_0^1(0, 1)$ definida por

$$\hat{a}(v, w) = \left(a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} , \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy. \quad (2.26)$$

Usando hipóteses (H1)-(H3) concluímos que $\hat{a}(v, w)$ é contínua e coerciva. Mas ainda podemos definir a projeção ortogonal, denominada projeção de Ritz com respeito a forma bilinear $\hat{a}(\cdot, \cdot)$ da seguinte forma: $P : H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \rightarrow N_h$ onde $Pv(t) = \tilde{v}_h(t)$ satisfazendo,

$$\hat{a}(v(t) - \tilde{v}_h(t), w_h) = 0, \quad \forall w_h \in N_h. \quad (2.27)$$

Queremos mostrar que a solução aproximada $v_h(y, t)$ converge para a solução exata $v(y, t)$ em alguma norma quando $h \rightarrow 0$. Para conseguir a convergência, precisamos das seguintes hipóteses para interpolação dos dados iniciais.

$$(H4) \quad \|v_h(0) - \tilde{v}_h(0)\| \leq \hat{c}h^2, \quad |v'_h(0) - \tilde{v}'_h(0)| \leq \tilde{c}h^2.$$

Obs 2.1. Note que $|\alpha' + \gamma'y| \leq |\gamma'| \Leftrightarrow -\gamma' \leq \alpha' + \gamma'y \leq \gamma'$. De fato, $\alpha' + \gamma'y \leq \gamma'$, pois $\alpha' < 0$ e $0 \leq y \leq 1$. Temos também $-\gamma' \leq \alpha' + \gamma'y$ equivale $0 \leq \alpha' + \gamma'y + \gamma'$ ou $0 \leq \beta' + y\gamma'$ que é verdade desde que $|\gamma'| = \gamma'$.

Obs 2.2. A partir da hipóteses (H1) e a observação anterior, temos

$$|\alpha'' + \gamma''y| \leq \frac{(\gamma')^2}{\gamma} \text{ e } (\alpha' + \gamma'y)^2 \leq (\gamma')^2 < \frac{m_0}{8}.$$

Para obter estimativas de erro no tempo contínuo, precisamos mais regularidade sobre as derivadas de v .

(H5) $v \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1))$, v' e $v'' \in L^\infty(0, T, H^2(0, 1))$.

Teorema 2.3. *Se v é solução do problema (II), (2.16), com dados iniciais $v_0 \in H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$, $v_1 \in H_0^1(0, 1)$, com as hipóteses (H1) – (H5), então existe uma constante positiva C dependente de v e independente de h tal que*

$$|v' - v'_h|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))} + \|v - v_h\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))} \leq Ch. \quad (2.28)$$

Prova: Considere $e(t) = v(t) - v_h(t) = (v(t) - \tilde{v}_h(t)) + (\tilde{v}_h(t) - v_h(t)) = \rho(t) + \theta(t)$, onde $\tilde{v}_h(t)$ é o interpolante de $v(t)$ em N_h . Somando e subtraindo $\tilde{v}_h(t)$ em (2.25) e usando (2.27) ou seja $\hat{a}(\rho(t), w_h) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\theta'', w_h \right) + \left(a(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) + \left(b(y, t) \frac{\partial \theta'}{\partial y}, w_h \right) + \left(c(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, w_h \right) \\ &= -(\rho'', w_h) - \left(b(y, t) \frac{\partial \rho'}{\partial y}, w_h \right) - \left(c(y, t) \frac{\partial \rho}{\partial y}, w_h \right) \\ & - \left([\mu - \mu_h] \frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) - \left(\mu_h \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) - \left(\mu \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Como $\theta(t)$ e $\theta'(t)$ pertencem a N_h para todo $t \in [0, T]$, podemos escolher $w_h = \theta'(t)$ na equação (2.29), obtendo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta'(t)|^2 + \left(a(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) + \left(b(y, t) \frac{\partial \theta'}{\partial y}, \theta' \right) = - \left(c(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \theta' \right) \\ & - (\rho'', \theta') - \left(b(y, t) \frac{\partial \rho'}{\partial y}, \theta' \right) - \left(c(y, t) \frac{\partial \rho}{\partial y}, \theta' \right) - \left([\mu - \mu_h] \frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) \\ & - \left(\mu_h \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) - \left(\mu \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

O segundo termo do lado esquerdo de (2.30) pode se escrever como:

$$\left(a(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) = \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \theta'}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dy$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 a(y, t) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dy - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} a(y, t) \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Do teorema generalizado para integrais, existe $\xi \in [0, 1]$ tal que

$$\left(a(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a(\xi, t) \|\theta(t)\|^2) - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} a(y, t) \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (2.31)$$

Integrando por partes o terceiro termo do lado esquerdo de (2.30) obtemos

$$\begin{aligned} \left(b(y, t) \frac{\partial \theta'}{\partial y}, \theta' \right) &= \frac{1}{2} \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial}{\partial y} (\theta'(t))^2 dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y}(y, t) (\theta')^2 dy \\ &= \frac{\gamma'}{\gamma} |\theta'(t)|^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.31)-(2.32) em (2.30) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a(\xi, t) \|\theta(t)\|^2) + \frac{\gamma'}{\gamma} |\theta'(t)|^2 &= - \left(c(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \theta' \right) - (\rho'', \theta') \\ - \left(b(y, t) \frac{\partial \rho'}{\partial y}, \theta' \right) - (c(y, t) \frac{\partial \rho}{\partial y}, \theta') &- \left(\mu_h \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) - \left(\mu \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) \\ - \left([\mu - \mu_h] \frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y} \right) &- \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} a(y, t) \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dy. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Tomando o valor absoluto do lado direito da equação (2.33), e ignorando o terceiro termo do lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a(\xi, t) \|\theta(t)\|^2) &\leq |(c(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \theta')| + |(\rho'', \theta')| \\ + |(c(y, t) \frac{\partial \rho}{\partial y}, \theta')| + |(b(y, t) \frac{\partial \rho'}{\partial y}, \theta')| &+ |([\mu - \mu_h] \frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y})| \\ + |(\mu_h \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y})| + |(\mu \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y})| &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} a(y, t) \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right| dy. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Análise do termo não linear. Usando $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ e $ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2$ obtemos

$$\begin{aligned} |([\mu - \mu_h] \frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y})| &\leq c_0 (|\|v(t)\|^2 - \|v_h(t)\|^2|) \|\tilde{v}_h(t)\| \|\theta'(t)\| \\ &\leq c_0 \|v - v_h\| \|v + v_h\|_{L^\infty} \|\tilde{v}_h\|_{L^\infty} \|\theta'(t)\| \\ &\leq c_1 [\|\rho\|^2 + \|\theta\|^2] + \frac{\mu_2}{4} \frac{d}{dt} \|\theta(t)\|^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde c_1 é uma constante positiva dependente de c_0 , $\|v + v_h\|_{L^\infty}$ e $\|\tilde{v}_h\|_{L^\infty}$. Usando a hipóteses (H3) no sexto termo do lado direito de (2.34) temos

$$\begin{aligned} |(\mu_h \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y})| &\leq \int_0^1 \mu_2 |\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \theta'}{\partial y}| dy \\ &\leq \mu_2 [\|\theta\|^2 + \frac{1}{4} \|\theta'\|^2] \\ &\leq \mu_2 [\|\theta\|^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Similarmente para o sétimo termo

$$\begin{aligned} |(\mu \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \theta'}{\partial y})| &\leq \int_0^1 \mu_2 |\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \theta'}{\partial y}| dy \\ &\leq \mu_2 [\|\rho\|^2 + \frac{1}{4} \|\theta'\|^2] \\ &\leq \mu_2 [\|\rho\|^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\theta\|^2]. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Para o primeiro termo do lado direito da equação (2.34)

$$\begin{aligned} |(c(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \theta' dy)| &= \left| \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y} \theta' dy \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{|\alpha' + \gamma' y|^2}{\gamma^2} \left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right| |\theta'| dy \\ &\leq \int_0^1 \frac{(\gamma')^2}{\gamma^2} \left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right| |\theta'| dy \\ &\leq \int_0^1 \lambda \frac{(\gamma')^4}{\gamma^4} \left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|^2 dy + \frac{1}{4\lambda} \int_0^1 |\theta'|^2 dy. \end{aligned}$$

Tomando

$$\lambda \frac{(\gamma')^4}{\gamma^4} = \frac{m_0 \gamma'}{4 \gamma^3}, \text{ então } \frac{1}{4\lambda} = \frac{(\gamma')^3}{m_0 \gamma}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |(c(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \theta' dy)| &\leq \frac{m_0 \gamma'}{4 \gamma^3} \|\theta\|^2 + \frac{(\gamma')^3}{m_0 \gamma} |\theta'| \\ &\leq \frac{m_0}{4} \left(\frac{m_0}{8} \right)^{1/2} \frac{1}{\gamma_0^3} \|\theta\|^2 + \frac{1}{m_0 \gamma_0} \frac{m_0}{8} \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2} |\theta'|^2. \end{aligned}$$

Assim obtemos:

$$|(c(y, t) \frac{\partial \theta}{\partial y}, \theta' dy)| \leq c_2(\|\theta(t)\|^2 + |\theta'(t)|^2). \quad (2.38)$$

Analogamente

$$|(c(y, t) \frac{\partial \rho}{\partial y}, \theta')| \leq c_3(\|\rho(t)\|^2 + |\theta'(t)|^2). \quad (2.39)$$

Para o quarto termo

$$\begin{aligned} |(b(y, t) \frac{\partial \rho'}{\partial y}, \theta')| &= \left| \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial \rho'}{\partial y} \theta' dy \right| \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right)^2 (\theta')^2 dy + \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial y} \right)^2 dy \\ &\leq \int_0^1 \frac{(\gamma')^2}{\gamma^2} (\theta')^2 dy + \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial y} \right)^2 dy \\ &\leq \frac{m_0}{8\gamma^2} |\theta'|^2 + \|\rho'\|^2 \leq \frac{m_0}{8\gamma_0^2} |\theta'|^2 + \|\rho'\|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$|(b(y, t) \frac{\partial \rho'}{\partial y}, \theta')| \leq c_4(\|\rho'(t)\|^2 + |\theta'(t)|^2). \quad (2.40)$$

Para o segundo termo

$$|(\rho'', \theta')| \leq \frac{1}{2}(|\rho''(t)|^2 + |\theta'(t)|^2). \quad (2.41)$$

Finalmente para o último termo de (2.34)

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} a(y, t) \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right| dy \leq c_5 \|\theta\|^2. \quad (2.42)$$

Considerando $\tilde{c} = \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, 1/2, c_5\} > 0$, e combinando (2.35)-(2.42) em (2.34) encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta'(t)|^2 + \frac{d}{dt} \left(\left[\frac{a(\xi, t)}{2} - \frac{3\mu_2}{4} \right] \|\theta(t)\|^2 \right) &\leq \tilde{c} [\|\rho(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2 \\ &\quad + |\theta'(t)|^2 + \|\rho'(t)\|^2 + |\rho''(t)|^2]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Integrando a desigualdade (2.43) sobre $[0, t]$, com $t \leq T$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\theta'(t)|^2 + \left[\frac{a(\xi, t)}{2} - \frac{3\mu_2}{4} \right] \|\theta(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2} |\theta'(0)|^2 + \left[\frac{a(\xi, 0)}{2} - \frac{3\mu_2}{4} \right] \|\theta(0)\|^2 \\ &\quad + \tilde{c} \int_0^t \left[\|\rho(s)\|^2 + \|\theta(s)\|^2 + |\theta'(s)|^2 + \|\rho'(s)\|^2 + |\rho''(s)|^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Tomando $\hat{c} = \frac{1}{2} \min\{1, a(\xi, t) - \frac{3}{2}\mu_2\} > 0$. Obtemos

$$\begin{aligned} |\theta'(t)|^2 + \|\theta(t)\|^2 &\leq c_5(|\theta'(0)|^2 + \|\theta(0)\|^2) \\ &+ c_6 \int_0^t \left[\|\rho(s)\|^2 + \|\theta(s)\|^2 + |\theta'(s)|^2 + \|\rho'(s)\|^2 + |\rho''(s)|^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Onde $c_5 = \frac{1}{2\hat{c}} \max\{1, a(\xi, 0) - \frac{3}{2}\mu_2\} > 0$ e $c_6 = \tilde{c}/\hat{c}$ são constantes positivas. Fixando $l = 1$ e variando $m \in \{0, 1\}$ em (2.23) podemos estimar o termo envolvido $\rho = v - \tilde{v}_h$ e suas derivadas, ou seja,

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1))} &\leq c_7 h \|v(t)\|_{H^2(0,1)}, \quad \|\rho'\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,1))} \leq c_8 h \|v'(t)\|_{H^2(0,1)}, \\ |\rho''|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} &\leq c_9 h^2 \|v''(t)\|_{H^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Assim, juntando estas estimativas e a hipótese (H5), temos que:

$$|\theta'(t)|^2 + \|\theta(t)\|^2 \leq c_{10} h^2 + c_6 \int_0^t [|\theta'(s)|^2 + \|\theta(s)\|^2] ds. \quad (2.46)$$

Usando a desigualdade de Gronwall, a integral do lado direito pode ser removida, obtendo-se que

$$|\theta'(t)|^2 + \|\theta(t)\|^2 \leq Ch^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.47)$$

Extraindo a raiz em ambos lados e usando a desigualdade triangular, concluímos que

$$|v' - v'_h|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} + \|v - v_h\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,1))} \leq Ch. \quad (2.48)$$

□

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de solução aproximada num tempo discreto e fazer estimativa de erro do problema totalmente discreto, para o método numérico proposto.

3.1 Método de Galerkin

Consiste em aproximar o espaço das soluções $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$ por um subespaço de dimensão finita. Para aproximarmos tal espaço, definimos um subespaço $V_m = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$ gerado pelos primeiros m vetores base do espaço $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$. Agora, buscamos uma solução aproximada $v_m(y, t) \in V_m$ do problema **(II)**, (2.16), no subespaço V_m .

3.2 Problema Aproximado

Aproxima-se o problema **(II)**, (2.16) pelo problema de determinar no espaço das soluções V_m , uma função $v_m = v_m(y, t)$, tal que

$$(III) \quad \begin{cases} \check{L}v_m(y, t) = g(y, t), & \forall (y, t) \in Q = (0, 1) \times (0, T) \\ v_m(0, t) = v_m(1, t) = 0, & 0 < t < T \\ v_m(y, 0) = v_{0m}(y), \quad v'_m(y, 0) = v_{1m}(y), & 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

A formulação variacional em V_m é dada por

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2} w dy + \int_0^1 \mu(t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy + \int_0^1 \left(a(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} dy \\ & + \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial^2 v_m}{\partial t \partial y} w dy + \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y} w dy = \int_0^1 g(y, t) w dy, \quad \forall w \in V_m. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Note que, como $v_m(y, t) \in V_m$ podemos escrever

$$v_m(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y), \quad \varphi_i(y) \in V_m \quad (3.3)$$

onde $d_i(t)$ constante para t fixo. De $v_m = v_m(y, t)$ dado por (3.3) deduzimos:

$$\frac{\partial v_m}{\partial y} = \sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial d_i(t)}{\partial t} \varphi_i(y) = \sum_{i=1}^m d'_i(t) \varphi_i(y) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 d_i(t)}{\partial t^2} \varphi_i(y) = \sum_{i=1}^m d''_i(t) \varphi_i(y) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t \partial y} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial d_i(t)}{\partial t} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^m d'_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.4)-(3.7) em (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^m d''_i(t) \varphi_i(y) w \right) dy + \int_0^1 \mu(t) \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \\ & + \int_0^1 a(y, t) \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy + \int_0^1 b(y, t) \left(\sum_{i=1}^m d'_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} w \right) dy \\ & + \int_0^1 c(y, t) \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} w \right) dy = \int_0^1 g(y, t) w dy. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tomando em particular $w = \varphi_j(y) \in V_m$ em (3.8) obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left[d''_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy + d_i(t) \mu(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy \right. \\ & + d_i(t) \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy + d'_i(t) \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy \\ & \left. + d_i(t) \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy \right] = \int_0^1 g(y, t) \varphi_j(y) dy \end{aligned} \quad (3.9)$$

para $j = 1, 2, \dots, m$. Denotamos os coeficientes

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \left(\varphi_i(y), \varphi_j(y) \right), \quad \bar{K}_{ij}(t) = \left(b(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}, \varphi_j(y) \right) \\
B_{ij}(t) &= \left(c(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}, \varphi_j(y) \right), \quad K_{i,j}(t) = \left(a(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} \right) \\
Q_{ij}(d(t)) &= \left(\mu(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} \right) \\
&= \left(\left[z_1(t) + z_2(t) \left\| \sum_{k=1}^m d_k(t) \varphi_k(y) \right\|^2 \right] \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} \right) \\
G_j(t) &= \left(g(t), \varphi_j(y) \right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Onde

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= \frac{1}{\gamma(t)^2} \left[-\frac{m_0}{2} + \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \right], \text{ e} \\
z_2(t) &= \frac{k}{2m\gamma(t)^3}.
\end{aligned}$$

3.3 Método dos Elementos finitos

3.3.1 Função de Interpolação

Dado V_m um subespaço de $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$ definido como:

$$V_m = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]. \tag{3.11}$$

As funções φ_i escolhidas são funções de interpolação linear por partes satisfazendo:

$$\varphi_i(y_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{3.12}$$

Onde $y_j \in [0, 1]$ é denominado nó. Os nós são pontos discretos do intervalo $[0, 1]$ distribuídos de forma equidistante ou não. Tomando m divisões em $[0, 1]$, definimos

o passo

$$h_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

Em cada nó i definimos a função $\varphi_i(y)$ linear por partes satisfazendo a condição (3.12), assim $\varphi_i(y)$ para $i = 1, \dots, m$ é definida por:

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}, & \text{se } y \in [y_{i-1}, y_i], \\ \frac{y_{i+1} - y}{y_{i+1} - y_i}, & \text{se } y \in [y_i, y_{i+1}], \\ 0, & \text{se } y \notin [y_{i-1}, y_{i+1}]. \end{cases} \quad (3.14)$$

Considerando uma partição de $I = [0, 1]$ em m elementos, de tal forma que I_e seja um intervalo de comprimento fixo h para todo e , o gráfico da função (3.14) será:

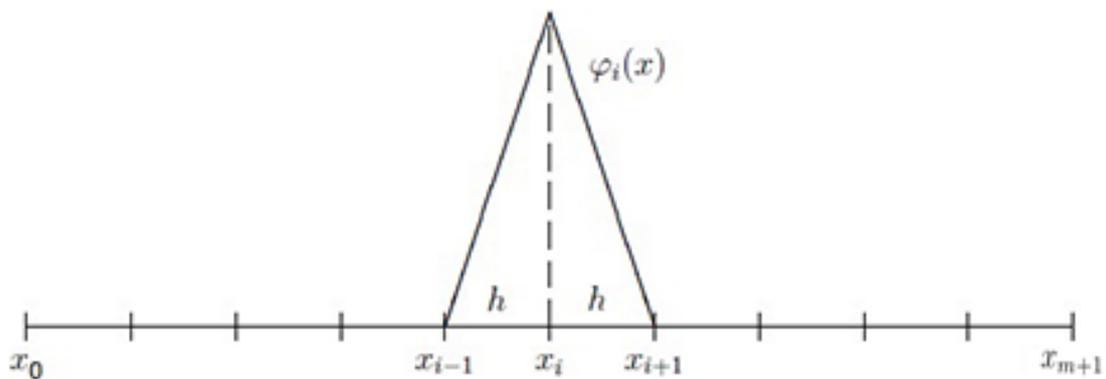


Figura 3.1: Função base global

De (3.14) podemos calcular a derivada de $\varphi_i(y)$, obtendo-se:

$$\frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{se } y \in [y_{i-1}, y_i], \\ \frac{-1}{h_i}, & \text{se } y \in [y_i, y_{i+1}], \\ 0, & \text{se } y \notin [y_{i-1}, y_{i+1}]. \end{cases} \quad (3.15)$$

Observe que pela definição da função em (3.14) temos

$$\varphi_i(y)\varphi_j(y) = \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} = 0 \quad \text{se } |i - j| \geq 2,$$

assim

$$\int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_j(y)dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} \varphi_i(y)\varphi_j(y)dy,$$

e

$$\int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy \quad \text{para } j = i - 1, i, i + 1$$

Portanto obtém-se o seguinte sistema não linear de equações diferenciais ordinárias:

$$[d''(t)]^T M + [d(t)]^T Q(d(t)) + [d(t)]^T K + [d'(t)]^T \bar{K} + [d(t)]^T B = [G(t)]^T, \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} M &= [M_{ij}]_{m \times m}, & \bar{K} &= [\bar{K}_{ij}(t)]_{m \times m}, & K &= [K_{ij}(t)]_{m \times m}, \\ Q(d(t)) &= [Q_{ij}(d(t))]_{m \times m}, & G(t) &= [G_j(t)]_{m \times 1}, & B &= [B_{ij}(t)]_{m \times m}, \\ d(t) &= [d_i(t)]_{m \times 1}, & d'(t) &= [d'_i(t)]_{m \times 1}, & d''(t) &= [d''_i(t)]_{m \times 1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Note que M é simétrica, pois

$$M_{ij} = \left(\varphi_i(y), \varphi_j(y) \right) = \left(\varphi_j(y), \varphi_i(y) \right) = M_{ji},$$

analogamente K e Q . Assim transpondo a equação (3.16), obtém-se

$$Md''(t) + Q(d(t))d(t) + K(t)d(t) + \bar{K}^T(t)d'(t) + B^T(t)d(t) = G(t). \quad (3.18)$$

Para que o sistema não linear de equações diferenciais ordinárias (3.18) tenha uma única solução, serão acrescentados condições iniciais dados por:

$$\begin{aligned} d_0 &= (d_{01}, \dots, d_{0m}) \\ d_1 &= (d_{11}, \dots, d_{1m}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim de (3.18)-(3.19), obtém-se

$$\begin{cases} Md''(t) + Q(d(t))d(t) + K(t)d(t) + \bar{K}^T(t)d'(t) + B^T(t)d(t) = G(t), \\ d(0) = ((u_0, \varphi_1), \dots, (u_0, \varphi_m)) = d_0, \\ d'(0) = ((u'_0, \varphi_1), \dots, (u'_0, \varphi_m)) = d_1. \end{cases} \quad (3.20)$$

Em geral, a solução $d(t)$ não é conhecida explicitamente para todo t positivo, assim é necessário desenvolver métodos numéricos para obter uma solução aproximada para tempos discretos t_n . As derivadas no tempo serão aproximadas pelo Método das Diferenças finitas e um método numérico baseado no Método de Newmark será desenvolvido para obter as soluções aproximadas em cada tempo discreto t_n .

3.4 Método Numérico das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas será aplicado aos termos envolvendo as derivadas temporais para seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} Md''(t) + Q(d(t))d(t) + K(t)d(t) + \bar{K}^T(t)d'(t) + B^T(t)d(t) = G(t), \\ d(0) = ((u_0, \varphi_1), \dots, (u_0, \varphi_m)) = d_0, \\ d'(0) = ((u'_0, \varphi_1), \dots, (u'_0, \varphi_m)) = d_1. \end{cases} \quad (3.21)$$

Primeiramente, tome $P_{[0,T]} = [t_0, t_1, \dots, t_{N-1}]$ uma partição do intervalo $[0, T]$ com N elementos, onde $t_{i+1} - t_i = \Delta t_i > 0$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$. Para cada $t_n \in P_{[0,T]}$, denota-se $g^n := g(t_n)$. Fazendo $t = t_n$ no sistema (3.21)₁, para $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, tem-se

$$Md''(t_n) + Q(d(t_n))d(t_n) + K(t_n)d(t_n) + \bar{K}^T(t_n)d'(t_n) + B^T(t_n)d(t_n) = G(t_n). \quad (3.22)$$

Considere as seguintes aproximações

$$d''(t_n) \approx \frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{(\Delta t)^2}, \quad d'(t_n) \approx \frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (3.23)$$

com erro de aproximação de $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, para funções de classe C^2 , ver [16], e a aproximação devida a Newmark dada por

$$d(t_n) \approx d^{n+\theta} = \theta d^{n+1} + (1 - 2\theta)d^n + \theta d^{n-1}, \quad (3.24)$$

uma média ponderada dos valores de $d(t_n)$, nos tempos adjacentes a t_n , com $0 \leq \theta \leq 1$. Utilizando as aproximações (3.23) e (3.24) em (3.22) tem-se, para $n = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\begin{aligned} & M \left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) + Q(d^{n+\theta})(d^{n+\theta}) + K^{n+\theta} d^{n+\theta} \\ & + (\bar{K}^{n+\theta})^T \left(\frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t} \right) + (B^{n+\theta})^T d^{n+\theta} = G^{n+\theta}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$G^{n+\theta} = \theta G^{n+1} + (1 - 2\theta)G^n + \theta G^{n-1}.$$

Multiplicando a equação (3.25) por $2(\Delta t)^2$ e fazendo as substituições, obtemos o seguinte sistema algébrico de equações

$$\begin{aligned} & [2M + 2(\Delta t)^2\theta(\theta K^{n+1} + (1 - 2\theta)K^n + \theta K^{n-1}) \\ & + \Delta t(\theta(\bar{K}^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(\bar{K}^T)^n + \theta(\bar{K}^T)^{n-1}) \\ & + 2(\Delta t)^2\theta(\theta(B^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(B^T)^n + \theta(B^T)^{n-1})] d^{n+1} \\ & + 2(\Delta t)^2 Q(d^{n+\theta})(d^{n+\theta}) \\ & + [-4M + 2(\Delta t)^2(1 - 2\theta)(\theta K^{n+1} + (1 - 2\theta)K^n + \theta K^{n-1}) \\ & + 2(\Delta t)^2(1 - 2\theta)(\theta(B^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(B^T)^n + \theta(B^T)^{n-1})] d^n \\ & + [2M + 2(\Delta t)^2\theta(\theta K^{n+1} + (1 - 2\theta)K^n + \theta K^{n-1}) \\ & - \Delta t(\theta(\bar{K}^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(\bar{K}^T)^n + \theta(\bar{K}^T)^{n-1}) \\ & + 2(\Delta t)^2\theta(\theta(B^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(B^T)^n + \theta(B^T)^{n-1})] d^{n-1} \\ & - 2(\Delta t)^2(\theta G^{n+1} + (1 - 2\theta)G^n + \theta G^{n-1}) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Definindo as matrizes

$$\begin{aligned}
A_1^n &= 2M + 2(\Delta t)^2\theta(\theta K^{n+1} + (1 - 2\theta)K^n + \theta K^{n-1}) \\
&\quad + \Delta t(\theta(\bar{K}^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(\bar{K}^T)^n + \theta(\bar{K}^T)^{n-1}) \\
&\quad + 2(\Delta t)^2\theta(\theta(B^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(B^T)^n + \theta(B^T)^{n-1}) \\
A_2^n &= -4M + 2(\Delta t)^2(1 - 2\theta)(\theta K^{n+1} + (1 - 2\theta)K^n + \theta K^{n-1}) \\
&\quad + 2(\Delta t)^2(1 - 2\theta)(\theta(B^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(B^T)^n + \theta(B^T)^{n-1}) \\
A_3^n &= 2M + 2(\Delta t)^2\theta(\theta K^{n+1} + (1 - 2\theta)K^n + \theta K^{n-1}) \\
&\quad - \Delta t(\theta(\bar{K}^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(\bar{K}^T)^n + \theta(\bar{K}^T)^{n-1}) \\
&\quad + 2(\Delta t)^2\theta(\theta(B^T)^{n+1} + (1 - 2\theta)(B^T)^n + \theta(B^T)^{n-1}).
\end{aligned}$$

Então podemos escrever o sistema de equações (3.26) por

$$A_1^n d^{n+1} + 2(\Delta t)^2 Q(d^{n+\theta})(d^{n+\theta}) + A_2^n d^n + A_3^n d^{n-1} - 2(\Delta t)^2 G^{n+\theta} = 0, \quad (3.27)$$

ou equivalentemente por

$$A_1^n d^{n+1} + 2(\Delta t)^2 Q(d^{n+\theta})(d^{n+\theta}) + L^n = 0, \quad (3.28)$$

onde $L^n = A_2^n d^n + A_3^n d^{n-1} - 2(\Delta t)^2 G^{n+\theta}$. O método de aproximação acima é conhecido como o método θ - Newmark. Note que quando $\theta = 0$, obtemos o método da diferença central.

3.4.1 Algoritmo

Para inicialização do processo tomemos $n = 0$ em (3.28), obtendo-se

$$A_1^0 d^1 + 2(\Delta t)^2 Q(d^\theta)d^\theta + A_2^0 d^0 + A_3^0 d^{-1} - 2(\Delta t)^2 G^\theta = 0, \quad (3.29)$$

onde

$$G^\theta = \theta G^1 + (1 - 2\theta)G^0 + \theta G^{-1},$$

sendo $G^{-1} = G(-t_1) = G(-\Delta t)$ e o termo d^{-1} é dado por

$$d'(t_n) = \frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t}.$$

De fato, fazendo $n = 0$, tem-se

$$d'(t_0) = d'(0) = \frac{d^1 - d^{-1}}{2\Delta t} \implies d^{-1} = d^1 - (2\Delta t)d'(0).$$

Mas, de (3.21)₃, $d'(0) = d_1$ portanto,

$$d^{-1} = d^1 - (2\Delta t)d_1. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.30) em (3.29) tem-se

$$(A_1^0 + A_3^0)d^1 + 2(\Delta t)^2 Q(d^\theta)d^\theta = 2(\Delta t)^2 G^\theta + 2\Delta t A_3^0 d_1 - A_2^0 d^0, \quad (3.31)$$

ou equivalentemente por

$$(A_1^0 + A_3^0)d^1 + 2(\Delta t)^2 Q(d^\theta)d^\theta + L^0 = 0, \quad (3.32)$$

onde $L^0 = -2(\Delta t)^2 G^\theta - 2\Delta t A_3^0 d_1 + A_2^0 d^0$.

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução d^1 . Sucessivamente para cada $n = 1, 2, \dots, N - 1$ obtemos d^2, d^3, \dots, d^N resolvendo para cada n o sistema (3.28)

$$A_1^n d^{n+1} + 2(\Delta t)^2 Q(d^{n+\theta})d^{n+\theta} + L^n = 0. \quad (3.33)$$

Para resolver os sistemas não lineares (3.32)-(3.33) será utilizado o método de Newton. Uma maneira usual de resolver os sistemas não lineares, é linearizando o sistema de equações ordinárias, como feito em [9], mas, em geral, há uma perda de precisão.

Neste trabalho, vamos resolver o sistema não linear usando o Método de Newton, para manter a ordem de convergência quadrática no tempo, como feito nas aproximações do método numérico proposto.

3.5 Solução do Sistema Não-linear

Para resolver os sistemas em (3.32)-(3.33), será utilizado o Método de Newton, seu algoritmo pode ser encontrado em [25] e os resultados que garantem sua convergência em [4]. Agora será apresentada uma breve teoria a respeito do Método de Newton.

3.5.1 Método de Newton

O método mais conhecido para resolver sistemas de equações não-lineares é o Método de Newton.

Para o caso de uma equação não-linear de uma variável, tem-se que: supondo $f \in C^2(a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq b$, e que existe $p \in (a, b)$ que seja uma raiz de $f(y)$, seja $\bar{y} \in (a, b)$ uma aproximação de p tal que $f'(\bar{y}) \neq 0$ e $|p - \bar{y}|$ seja pequeno. Considere o polinômio de Taylor, de ordem 1, em torno de \bar{y} para $f(y)$,

$$f(y) = f(\bar{y}) + (y - \bar{y})f'(\bar{y}) + \frac{(y - \bar{y})^2}{2}f''(\xi(y)), \quad (3.34)$$

onde $\xi(y)$ está entre y e \bar{y} . Uma vez que $f(p) = 0$, tomando $y = p$ em (3.34) obtém-se

$$0 = f(\bar{y}) + (p - \bar{y})f'(\bar{y}) + \frac{(p - \bar{y})^2}{2}f''(\xi(p)).$$

Como foi tomado \bar{y} de forma que $|p - \bar{y}|$ fosse pequeno, tem-se que o termo que envolve $(p - \bar{y})^2$ é muito menor, então

$$0 \approx f(\bar{y}) + (p - \bar{y})f'(\bar{y}).$$

Isolando p obtém-se

$$p \approx \bar{y} - \frac{f(\bar{y})}{f'(\bar{y})}. \quad (3.35)$$

Traduzindo a relação (3.35) para o Método de Newton, iniciando com uma aproximação p_0 de p , será gerada uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, de forma que

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad n \geq 0. \quad (3.36)$$

Voltando para o caso de um sistema de equações não-lineares, considerando $F(Y) = (F_1(Y), \dots, F_n(Y))$, com $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$, como sendo o vetor que armazena cada equação não-linear de um sistema., tem-se por objetivo obter $P \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(P) = 0$.

Analogamente ao Método de Newton dado por (3.36), restringindo-se somente a uma linha do vetor $F(Y)$ e tomando $\bar{Y} \in \mathbb{R}^n$ próximo de P , de (3.35), obtém-se

$$\nabla^T F_i(\bar{Y})(P - \bar{Y}) \approx -F_i(\bar{Y}), \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (3.37)$$

onde $\nabla^T F_i(\bar{Y})$ é o vetor gradiente de F_i calculado em \bar{Y} .

Como (3.37) é válido para todo i , tem-se que

$$\begin{bmatrix} \nabla^T F_1(\bar{Y}) \\ \nabla^T F_2(\bar{Y}) \\ \vdots \\ \nabla^T F_n(\bar{Y}) \end{bmatrix} (P - \bar{Y}) \approx - \begin{bmatrix} F_1(\bar{Y}) \\ F_2(\bar{Y}) \\ \vdots \\ F_n(\bar{Y}) \end{bmatrix} = -F(\bar{Y}).$$

Logo, o Método de Newton aplicado a um sistema de equações não-lineares, consiste em iniciar com uma aproximação $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e gerar uma sequência $(P_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$,

para satisfazer o seguinte sistema linear:

$$J(P_k)s_k = -F(P_k), \quad k \geq 0, \quad (3.38)$$

onde $s_k = P_{k+1} - P_k$ e

$$J(P_k) = \begin{bmatrix} \nabla^T F_1(\bar{Y}) \\ \nabla^T F_2(\bar{Y}) \\ \vdots \\ \nabla^T F_n(\bar{Y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\bar{Y})}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(\bar{Y})}{\partial Y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\bar{Y})}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n(\bar{Y})}{\partial Y_n} \end{bmatrix}.$$

A matriz J é chamada de matriz jacobiana.

Resolvendo o sistema (3.38), será obtido o vetor s_k , de onde se poderá obter o próximo termo da sequência P_{k+1} através da operação $P_{k+1} = s_k + P_k$. Para que este sistema tenha uma única solução, é necessário que a matriz jacobiana calculada no ponto P_k , $\forall k$, seja não singular, ou seja, $\det(J(P_k)) \neq 0$, $\forall k$.

A seguir será apresentado como foi aplicado o Método de Newton no sistema não-linear (3.32)-(3.33).

3.5.2 Aplicação

Em cada passo de tempo n . Para encontrar as soluções dos sistemas não lineares (3.32)-(3.33) devemos determinar $Y = d^{n+1}$ tal que $F(Y) = 0$. Definimos a função F como

$$F(Y) = \begin{cases} (A_1^n + A_3^n)d^{n+1} + 2(\Delta t)^2 Q(d^{n+\theta})d^{n+\theta} + L^n, & \text{se } n = 0, \\ A_1^n d^{n+1} + 2(\Delta t)^2 Q(d^{n+\theta})d^{n+\theta} + L^n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Para obter a solução do sistema (3.32)-(3.33), basta aplicar o método de Newton para a função $F(Y)$. Para isto, precisamos dos termos $F(Y_k)$ e $J(Y_k)$. Para o termo $F(Y_k)$ basta substituir $Y = Y_k$ em (3.39). Mas para a matriz jacobiana $J(Y_k)$ é calculada por:

$$J(Y) = \begin{bmatrix} \nabla^T F_1(Y) \\ \nabla^T F_2(Y) \\ \vdots \\ \vdots \\ \nabla^T F_m(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y_1}(Y) & \frac{\partial F_1}{\partial Y_2}(Y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial Y_m}(Y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y_1}(Y) & \frac{\partial F_2}{\partial Y_2}(Y) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial Y_m}(Y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial Y_1}(Y) & \frac{\partial F_m}{\partial Y_2}(Y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial Y_m}(Y) \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Se $n = 0$ as coordenadas da função F são:

$$F_i(Y) = \sum_{k=1}^m [A_1^n + A_3^n]_{i,k} Y_k + 2(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^m [Q(d^{n+\theta})]_{i,k} [d^{n+\theta}]_k + [L^n]_i \quad (3.41)$$

e derivando parcialmente temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial Y_j}(Y) &= [A_1^n + A_3^n]_{i,j} + 4\theta(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial Y_j} [Q(d^{n+\theta})]_{i,k} [d^{n+\theta}]_k \\ &\quad + 4\theta(\Delta t)^2 [Q(d^{n+\theta})]_{i,j} \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde $Y = d^{n+1}$.

Se $n \geq 1$ as coordenadas de F são:

$$F_i(Y) = \sum_{k=1}^m [A_1^n]_{i,k} Y_k + 2(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^m [Q(d^{n+\theta})]_{i,k} [d^{n+\theta}]_k + [L^n]_i \quad (3.43)$$

e suas derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial Y_j}(Y) &= [A_1^n]_{i,j} + 2\theta(\Delta t)^2 \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial Y_j} [Q(d^{n+\theta})]_{i,k} [d^{n+\theta}]_k \\ &\quad + 2\theta(\Delta t)^2 [Q(d^{n+\theta})]_{i,j} \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde $Y = d^{n+1}$.

Avaliação de termo não linear:

O termo não linear do sistema é dado por: $\frac{\partial}{\partial Y_j} [Q(2\theta Y + (1-2\theta)d^n - 2\theta\Delta t d'^n)]_{i,k}$
 Definindo a função $\rho(v) = z_1(t) + z_2(t)|v_y|^2$, temos

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} [Q(d^{n+\theta})]_{i,k} = \left(\frac{\partial}{\partial Y_j} \rho \left(\sum_{j=1}^m (d^{n+\theta})_j \varphi_j \right) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \right)$$

onde $Y = d^{n+1}$ e $d^{n+\theta} = 2\theta Y + (1-2\theta)d^n - 2\theta\Delta t d'^n$.

Calculando todas as derivadas parciais $\frac{\partial F_i}{\partial Y_j}(Y_k)$, $\forall i, j$, então obtemos a Matriz Jacobiana.

Assim, obtendo $J(Y_k)$ e $F(Y_k)$, basta substituir no sistema (3.38) e resolver através de um método numérico, para obter s_0 , de onde será extraído o vetor Y_1 , assim, sucessivamente, até o k que permita a condição abaixo ser satisfeita para algum $\epsilon > 0$ dado

$$|Y_{k+1} - Y_k| < \epsilon.$$

3.6 Estimativa de erro-tempo discreto

Nesta seção faremos uma estimativa de erro, e determinaremos a ordem de convergência nas normas discretas de $L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ e $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ para o problema **(II)**, (2.16), quando o tempo t varia discretamente sobre o intervalo $[0, T]$, na forma $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$. Seja $v^n \simeq v(\cdot, t_n)$, e então a aproximação θ -Newmark [16] é definido por $v^{n+\theta} = \theta v^{n+1} + (1-2\theta)v^n + \theta v^{n-1}$, onde $0 < \theta \leq 1$.

Definimos:

$$\begin{aligned}\delta v^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta t}(v^n - v^{n-1}), & \delta v^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta t}(v^{n+1} - v^n) \\ \delta v^n &= \frac{1}{2\Delta t}(v^{n+1} - v^{n-1}), & \delta^2 v^n &= \frac{1}{(\Delta t)^2}(v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}).\end{aligned}\tag{3.45}$$

Para obter estimativas de erro no tempo discreto, requeremos mais regularidade sobre as derivadas de v .

$$(H6) \quad v', v'' \in L^\infty(0, T; H^2(0, 1)), v''' \in L^\infty(0, T; H^1(0, 1)) \text{ e } v'''' \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)).$$

Definimos o esquema discreto baseado no problema semi-discreto (2.25), dada pela seguinte equação

$$\begin{aligned}& \left(\delta^2(v^n - v_h^n), w_h \right) + \left(\mu^{n+\theta} \frac{\partial v^{n+\theta}}{\partial y} - \mu_h^{n+\theta} \frac{\partial v_h^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) \\ & + \left(a^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y}(v^{n+\theta} - v_h^{n+\theta}), \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) + \left(b^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} \delta(v^n - v_h^n), w_h \right) \\ & + \left(c^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y}(v^{n+\theta} - v_h^{n+\theta}), w_h \right) = (\varphi^n, w_h), \quad \forall w_h \in N_h.\end{aligned}\tag{3.46}$$

onde $\varphi^n = (\delta^2 v^n - v_{tt}^{n+\theta}) + b^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y}(\delta v^n - v_t^n)$ e $\delta^2 v^n, \delta v^n$ são aproximações das derivadas $(v_{tt}), (v_t)$ no tempo por diferenças finitas.

Teorema 3.1. *Seja v a solução do problema (II), (2.16) e $v_m = v_h$ a solução do problema aproximado (III), (3.1). Sobre as hipóteses (H1) – (H6), para $\eta > 0$ e $0 < \theta \leq 1$ então existe uma constante positiva C dependente de v e independente de θ, h e Δt tal que*

$$|\delta(v - v_h)|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))} + \|v - v_h\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))} \leq C(h + (\Delta t)^2).\tag{3.47}$$

Prova: Considere a decomposição de erro na forma $e^n = v^n - v_h^n = (v^n - \tilde{v}_h^n) + (\tilde{v}_h^n - v_h^n) = \rho^n + \xi^n$, onde \tilde{v}_h^n é o interpolante de v^n em N_h . Somando e subtraindo

\tilde{v}_h^n em (3.46), e usando (2.27) ou seja $\hat{a}(\rho^{n+\theta}, w_h) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left(\delta^2 \xi^n, w_h \right) + \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) + \left(a^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) \\
& + \left(b^{n+\theta} \frac{\partial (\delta \xi^n)}{\partial y}, w_h \right) + \left(c^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+\theta}}{\partial y}, w_h \right) = - \left(b^{n+\theta} \frac{\partial (\delta \rho^n)}{\partial y}, w_h \right) \\
& - \left(c^{n+\theta} \frac{\partial \rho^{n+\theta}}{\partial y}, w_h \right) - \left([\mu^{n+\theta} - \mu_h^{n+\theta}] \frac{\partial v^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) + (\varphi^n - \delta^2 \rho^n, w_h) \\
& - \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \rho^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Tomando, em particular

$$w_h = \frac{1}{2}(\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}) = \frac{1}{2\Delta t}(\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) = \delta \xi^n.$$

Substituindo no primeiro termo do lado esquerdo de (3.48) e observando que

$$\begin{aligned}
\delta^2 \xi^n &= \frac{1}{(\Delta t)^2}(\xi^{n+1} - 2\xi^n + \xi^{n-1}) = \frac{1}{(\Delta t)^2}((\xi^{n+1} - \xi^n) - (\xi^n - \xi^{n-1})) \\
&= \frac{1}{\Delta t}(\delta \xi^{n+1/2} - \delta \xi^{n-1/2})
\end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned}
\left(\delta^2 \xi^n, w_h \right) &= \left(\frac{1}{\Delta t}(\delta \xi^{n+1/2} - \delta \xi^{n-1/2}), \frac{1}{2}(\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}) \right) \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \left(|\delta \xi^{n+1/2}|^2 - |\delta \xi^{n-1/2}|^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Para o segundo termo de (3.48) temos

$$\begin{aligned}
\left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}(\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right) \\
&= \frac{\theta}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}(\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right) \\
&+ \left(\frac{1-2\theta}{2\Delta t} \right) \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^n}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}(\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right) \\
&+ \frac{\theta}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}(\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right) \\
&= \frac{1}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^n}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}(\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right) \\
&+ \frac{\theta}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y}(\xi^{n+1} - 2\xi^n + \xi^{n-1}), \frac{\partial}{\partial y}(\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right).
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo ξ^n convenientemente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial \xi^n}{\partial y} \right) - \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^n}{\partial y}, \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\theta}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^n), \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^n) \right) \\
&\quad + \frac{\theta}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^n), \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - \xi^{n-1}) \right) \\
&\quad - \frac{\theta}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - \xi^{n-1}), \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^n) \right) \\
&\quad - \frac{\theta}{2\Delta t} \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - \xi^{n-1}), \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - \xi^{n-1}) \right) \\
&\geq \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial \xi^n}{\partial y} \right) - \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial \xi^n}{\partial y}, \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\theta \mu_1}{2\Delta t} \|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 - \frac{\theta \mu_2}{2\Delta t} \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

onde usamos a hipótese (H3) da limitação de $\mu_h^{n+\theta}$. Analogamente para o terceiro termo de (3.48) temos

$$\begin{aligned}
\left(a^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+\theta}}{\partial y}, w_h \right) &= \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(a^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial \xi^n}{\partial y} \right) - \left(a^{n+\theta} \frac{\partial \xi^n}{\partial y}, \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\theta}{2\Delta t} \left(a^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^n), \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^n) \right) \\
&\quad + \frac{\theta}{2\Delta t} \left(a^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^n), \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - \xi^{n-1}) \right) \\
&\quad - \frac{\theta}{2\Delta t} \left(a^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - \xi^{n-1}), \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^n) \right) \\
&\quad - \frac{\theta}{2\Delta t} \left(a^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - \xi^{n-1}), \frac{\partial}{\partial y} (\xi^n - \xi^{n-1}) \right) \\
&\geq \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(a^{n+\theta} \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial \xi^n}{\partial y} \right) - \left(a^{n+\theta} \frac{\partial \xi^n}{\partial y}, \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial y} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\theta}{2\Delta t} \frac{3m_0}{8\gamma_1^2} \|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 - \frac{\theta}{2\Delta t} \frac{m_0}{2\gamma_0^2} \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

onde usamos a hipótese (H1) da limitação de $a^{n+\theta}$. Substituindo (3.49)-(3.51) na equação (3.48) obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \left(\theta\mu_1 + \frac{3m_0\theta}{8\gamma_1^2} \right) \|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 - \frac{1}{2\Delta t} \left(\theta\mu_2 + \frac{m_0\theta}{2\gamma_0^2} \right) \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2 \\
& + \frac{1}{2\Delta t} \left\{ |\delta\xi^{n+1/2}|^2 - |\delta\xi^{n-1/2}|^2 \right\} \leq - \left([\mu^{n+\theta} - \mu_h^{n+\theta}] \frac{\partial}{\partial y} \tilde{v}_h^{n+\theta}, \frac{\partial}{\partial y} (\delta\xi^n) \right) \\
& - \left(b^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\delta\xi^n), \delta\xi^n \right) - \frac{1}{2} \left(b^{n+\theta} \frac{\partial(\delta\rho^n)}{\partial y}, \delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2} \right) \\
& - \frac{1}{2} \left(c^{n+\theta} \frac{\partial\rho^{n+\theta}}{\partial y}, \delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2} \right) - \frac{1}{2} \left(c^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} \xi^{n+\theta}, \delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2} \right) \quad (3.52) \\
& + (\varphi^n - \delta^2\rho^n, \delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}) - \left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial\rho^{n+\theta}}{\partial y}, \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) \\
& - \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\mu_h^{n+\theta} \frac{\partial\xi^n}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right) \right] - \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(a^{n+\theta} \frac{\partial\xi^n}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right) \right] \\
& = \sum_{i=1}^9 I_i
\end{aligned}$$

Análise do termo não linear: Para o primeiro termo do lado direito da equação (3.52), usando as desigualdades $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ e $ab \leq \frac{1}{2}[\varepsilon a^2 + (1/\varepsilon)b^2]$ com $\varepsilon = 1/(8\Delta t\eta)$, onde η uma constante positiva a ser definida. Assim obtemos

$$\begin{aligned}
|I_1| & \leq \tilde{c}_0 (\|v^{n+\theta}\|^2 - \|v_h^{n+\theta}\|^2) \|\tilde{v}_h^{n+\theta}\| \left\| \frac{1}{2\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right\| \\
& \leq \tilde{c}_0 \|v^{n+\theta} - v_h^{n+\theta}\| \|v^{n+\theta} + v_h^{n+\theta}\|_{L^\infty} \|\tilde{v}_h^{n+\theta}\|_{L^\infty} \left\| \frac{1}{2\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right\| \\
& \leq \tilde{c}_1 \|v^{n+\theta} - v_h^{n+\theta}\| \left\| \frac{1}{2\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right\| \quad (3.53) \\
& \leq \frac{\tilde{c}_1^2}{16\Delta t\eta} \|v^{n+\theta} - v_h^{n+\theta}\|^2 + 4\Delta t\eta \left\| \frac{\xi^{n+1} - \xi^{n-1}}{2\Delta t} \right\|^2 \\
& \leq \frac{\tilde{c}_1^2}{8\Delta t\eta} (\|\rho^{n+\theta}\|^2 + \|\xi^{n+\theta}\|^2) + \frac{2\eta}{\Delta t} [\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 + \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2],
\end{aligned}$$

onde $\tilde{c}_1 = \max\{\tilde{c}_0, \|\tilde{v}_h^{n+\theta}\|_{L^\infty}, \|v^{n+\theta} + v_h^{n+\theta}\|_{L^\infty}\}$. Para o sétimo termo do lado direito de (3.52) temos

$$\begin{aligned}
|I_7| & \leq \mu_2 \|\rho^{n+\theta}\| \left\| \frac{1}{2\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right\| \\
& \leq \frac{\mu_2^2}{16\Delta t\eta} \|\rho^{n+\theta}\|^2 + \frac{2\eta}{\Delta t} [\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 + \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2]. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Para o oitavo termo do lado direito de (3.52) tem-se

$$\begin{aligned}
|I_8| &\leq \mu_2 \|\xi^n\| \left\| \frac{1}{2\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right\| \\
&\leq \frac{\mu_2^2}{16\Delta t \eta} \|\xi^{n+\theta}\|^2 + 4\Delta t \eta \left\| \frac{1}{2\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right\|^2 \\
&\leq \frac{\mu_2^2}{16\Delta t \eta} \|\xi^{n+\theta}\|^2 + \frac{2\eta}{\Delta t} [\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 + \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2].
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Finalmente para o termo de (3.52) temos

$$\begin{aligned}
|I_9| &\leq \frac{m_0}{2\gamma_0^2} \|\xi^n\| \left\| \frac{1}{2\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right\| \\
&\leq \left(\frac{m_0}{2\gamma_0^2} \right)^2 \frac{1}{16\Delta t \eta} \|\xi^{n+\theta}\|^2 + 4\Delta t \eta \left\| \frac{1}{2\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^{n-1}) \right\|^2 \\
&\leq \left(\frac{m_0}{2\gamma_0^2} \right)^2 \frac{1}{16\Delta t \eta} \|\xi^{n+\theta}\|^2 + \frac{2\eta}{\Delta t} [\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 + \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2].
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Analogamente podemos limitar $I_2 - I_6$ pelas hipóteses sobre os coeficientes $a^{n+\theta}$, $b^{n+\theta}$ e $c^{n+\theta}$, para obter

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \left(\frac{m_0}{8} \right)^{1/2} \frac{1}{4\gamma_0} |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}|^2 \\
|I_3| &\leq \frac{m_0}{8\gamma_0^2} |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| \|\delta \rho^n\| \\
|I_4| &\leq \frac{m_0}{16\gamma_0^2} |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| \|\rho^{n+\theta}\| \\
|I_5| &\leq \frac{m_0}{16\gamma_0^2} |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| \|\xi^{n+\theta}\| \\
|I_6| &\leq |\varphi^n| |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| + |\delta^2 \rho^n| |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}|.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Substituindo (3.53)-(3.57) em (3.52) e multiplicando por $2\Delta t$ obtemos

$$\begin{aligned}
& \theta\left(\mu_1 + \frac{3m_0}{8\gamma_1^2}\right)\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 - \theta\left(\mu_2 + \frac{m_0}{2\gamma_0^2}\right)\|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2 \\
& + \left(|\delta\xi^{n+1/2}|^2 - |\delta\xi^{n-1/2}|^2\right) \leq \left(\frac{\tilde{c}_1^2}{4\eta} + \frac{\mu_2^2}{8}\right)\left(\|\rho^{n+\theta}\|^2 + \|\xi^{n+\theta}\|^2\right) \\
& + \left(\frac{m_0}{2\gamma_0^2}\right)^2 \frac{1}{8}\|\xi^{n+\theta}\|^2 + 16\eta\left[\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 + \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2\right] \\
& + \left(\frac{m_0}{8}\right)^{1/2} \frac{\Delta t}{2\gamma_0} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}|^2 + \frac{m_0\Delta t}{4\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\delta\rho^n\| \\
& + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\rho^{n+\theta}\| + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\xi^{n+\theta}\| \\
& + 2\Delta t|\varphi^n| |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| + 2\Delta t|\delta^2\rho^n| |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}|.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
& \lambda_1\|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 - \lambda_2\|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2 + \left(|\delta\xi^{n+1/2}|^2 - |\delta\xi^{n-1/2}|^2\right) \\
& \leq \frac{1}{8}\left(\frac{2\tilde{c}_1^2}{\eta} + \left(\frac{m_0}{2\gamma_0^2}\right)^2 + \mu_2^2\right)\|\xi^{n+\theta}\|^2 \\
& + \frac{1}{8}\left(\frac{2\tilde{c}_1^2}{\eta} + \mu_2^2\right)\|\rho^{n+\theta}\|^2 + \left(\frac{m_0}{8}\right)^{1/2} \frac{\Delta t}{2\gamma_0} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}|^2 \\
& + \frac{m_0\Delta t}{4\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\delta\rho^n\| + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\rho^{n+\theta}\| \\
& + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\xi^{n+\theta}\| + 2\Delta t|\varphi^n| |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \\
& + 2\Delta t|\delta^2\rho^n| |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}|,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

onde $\lambda_1 = \theta\left(\mu_1 + \frac{3m_0}{8\gamma_1^2}\right) - 16\eta$ e $\lambda_2 = \theta\left(\mu_2 + \frac{m_0}{2\gamma_0^2}\right) + 16\eta$. Queremos determinar a constante $\eta > 0$, de tal forma que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Considere $\eta = \frac{\theta}{32}\left(\mu_1 + \frac{3m_0}{8\gamma_1^2}\right)$. Como $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, para todo $\theta > 0$ e tomando $C_1 = \min\{1, \lambda_1, \lambda_2\} > 0$, então

da equação (3.59) temos

$$\begin{aligned}
& \|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2 - \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2 + \left(|\delta\xi^{n+1/2}|^2 - |\delta\xi^{n-1/2}|^2 \right) \leq C_2 \left[\|\rho^{n+\theta}\|^2 \right. \\
& + \|\xi^{n+\theta}\|^2 + \left(\frac{m_0}{8} \right)^{1/2} \frac{\Delta t}{2\gamma_0} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}|^2 \\
& + \frac{m_0\Delta t}{4\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\delta\rho^n\| + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\rho^{n+\theta}\| \\
& + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\xi^{n+\theta}\| + 2\Delta t |\varphi^n| |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \\
& \left. + 2\Delta t |\delta^2\rho^n| |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \right], \tag{3.60}
\end{aligned}$$

onde $C_2 = (1/8C_1) \max \left\{ 2\tilde{c}_1^2 + \left(m_0/2\gamma_0^2 \right)^2 + \mu_2^2, 2\tilde{c}_1^2 + \mu_2^2 \right\} > 0$. Somando de $n = 1, \dots, N-1$, e observando o cancelamento dos termos comuns obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\xi^N - \xi^{N-1}\|^2 + |\delta\xi^{N-1/2}|^2 \leq |\delta\xi^{1/2}|^2 + \|\xi^1 - \xi^0\|^2 \\
& + C_2 \left[\sum_{n=1}^{N-1} (\|\rho^{n+\theta}\|^2 + \|\xi^{n+\theta}\|^2) + \left(\frac{m_0}{8} \right)^{1/2} \frac{\Delta t}{2\gamma_0} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}|^2 \right. \\
& + \frac{m_0\Delta t}{4\gamma_0^2} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\delta\rho^n\| \\
& + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\rho^{n+\theta}\| \\
& + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \|\xi^{n+\theta}\| \\
& \left. + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\varphi^n| |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2\rho^n| |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}| \right]. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Vamos analisar os termos do lado direito envolvendo os somatórios em (3.61). Para o segundo termo do lado direito, usando a desigualdade elementar, obtemos

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{m_0}{8} \right)^{1/2} \frac{\Delta t}{2\gamma_0} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta\xi^{n+1/2} + \delta\xi^{n-1/2}|^2 \leq \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2} \frac{\Delta t}{\gamma_0} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta\xi^{n-1/2}|^2 \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2} \frac{\Delta t}{\gamma_0} |\delta\xi^{N-1/2}|^2, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

onde ε é uma constante positiva a ser definida. Analogamente para o terceiro termo do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{m_0 \Delta t}{4\gamma_0^2} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| \|\delta \rho^n\| &\leq \frac{m_0 \varepsilon}{8\gamma_0^2} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta \xi^{n-1/2}|^2 \\ &+ \frac{m_0}{8\gamma_0^2 \varepsilon} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|\delta \rho^n\|^2 + \frac{m_0 \varepsilon}{8\gamma_0^2} \Delta t |\delta \xi^{N-1/2}|^2. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Para o quarto termo do lado direito, temos

$$\begin{aligned} \frac{m_0 \Delta t}{8\gamma_0^2} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| \|\rho^{n+\theta}\| &\leq \frac{m_0 \varepsilon}{16\gamma_0^2} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta \xi^{n-1/2}|^2 \\ &+ \frac{m_0}{16\gamma_0^2 \varepsilon} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|\rho^{n+\theta}\|^2 + \frac{m_0 \varepsilon}{16\gamma_0^2} \Delta t |\delta \xi^{N-1/2}|^2. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Para o quinto termo do lado direito, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{m_0 \Delta t}{8\gamma_0^2} \sum_{n=1}^{N-1} |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| \|\xi^{n+\theta}\| &\leq \frac{m_0 \varepsilon}{16\gamma_0^2} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta \xi^{n-1/2}|^2 \\ &+ \frac{m_0}{16\gamma_0^2 \varepsilon} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|\xi^{n+\theta}\|^2 + \frac{m_0 \varepsilon}{16\gamma_0^2} \Delta t |\delta \xi^{N-1/2}|^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Para o sexto termo do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} 2\Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\varphi^n| |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| &\leq \varepsilon \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta \xi^{n-1/2}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\varphi^n|^2 \\ &+ \frac{\varepsilon \Delta t}{2} |\delta \xi^{N-1/2}|^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Finalmente para o sétimo termo do lado direito, temos

$$\begin{aligned} 2\Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2 \rho^n| |\delta \xi^{n+1/2} + \delta \xi^{n-1/2}| &\leq \varepsilon \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta \xi^{n-1/2}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2 \rho^n|^2 \\ &+ \frac{\varepsilon \Delta t}{2} |\delta \xi^{N-1/2}|^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Substituindo (3.62)-(3.67) em (3.61) obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\xi^N - \xi^{N-1}\|^2 + \left(1 - C_2\varepsilon\Delta t\left(1 + \frac{m_0}{4\gamma_0^2} + \left(\frac{m_0}{8\gamma_0^2}\right)^{1/2}\right)\right)|\delta\xi^{N-1/2}|^2 \\
& \leq \chi_0^2 + C_2 \left[\sum_{n=1}^{N-1} \left\{ (\|\rho^{n+\theta}\|^2 + \|\xi^{n+\theta}\|^2) + \frac{m_0\Delta t}{16\gamma_0^2\varepsilon} (\|\rho^{n+\theta}\|^2 + \|\xi^{n+\theta}\|^2) \right. \right. \\
& \quad + \left. \left(\varepsilon\Delta t\left(2 + \frac{m_0}{4\gamma_0^2} + \left(\frac{m_0}{8\gamma_0^2}\right)^{1/2}\right) |\delta\xi^{n-1/2}|^2 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} |\varphi^n|^2 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} |\delta^2\rho^n|^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{m_0\Delta t}{8\gamma_0^2\varepsilon} \|\delta\rho^n\|^2 \right\} \right], \tag{3.68}
\end{aligned}$$

onde

$$\chi_0^2 = |\delta\xi^{1/2}|^2 + \|\xi^1 - \xi^0\|^2 \leq |\delta\xi^{1/2}|^2 + 2(\|\xi^1\|^2 + \|\xi^0\|^2) \leq \bar{c}h^4.$$

Tomando $\varepsilon < (C_2\Delta t(1 + (m_0/4\gamma_0^2) + (m_0/8\gamma_0^2)^{1/2}))^{-1}$ então podemos assegurar que o segundo termo do lado esquerdo de (3.68) é positivo.

Denotando por $C_3 = \min\{1, 1 - C_2\varepsilon\Delta t(1 + (m_0/4\gamma_0^2) + (m_0/8\gamma_0^2)^{1/2})\}$ e $C_4 = (C_2/C_3) \max\{1, m_0/16\gamma_0^2\varepsilon, 1/\varepsilon, \varepsilon(2 + (m_0/4\gamma_0^2) + (m_0/8\gamma_0^2)^{1/2}), m_0/8\gamma_0^2\varepsilon\}$, então da desigualdade (3.68) obtém-se que

$$\begin{aligned}
& \|\xi^N - \xi^{N-1}\|^2 + |\delta\xi^{N-1/2}|^2 \leq C_4 \left[\chi_0^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \Delta t |\delta\xi^{n-1/2}|^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1 + \Delta t)(\|\rho^{n+\theta}\|^2 + \|\xi^{n+\theta}\|^2) + \Delta t |\varphi^n|^2 + \Delta t |\delta^2\rho^n|^2 + \Delta t \|\delta\rho^n\|^2 \right\} \right]. \tag{3.69}
\end{aligned}$$

Usando expansão de Taylor, integrando por partes e fazendo manipulações algébricas obtemos

$$\begin{aligned}
|\varphi^n| &= |(\delta^2 v^n - v_{tt}^{n+\theta}) + b^{n+\theta} \frac{\partial}{\partial y} (\delta v^n - v_t^n)| \\
&\leq |(\delta^2 v^n - v_{tt}^n) - \theta(v_{tt}^{n+1} - 2v_{tt}^n + v_{tt}^{n-1})| + |b^{n+\theta}| |\delta v^n - v_t^n| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - s)^3}{3!} v_{tttt}(s) ds + \int_{t_n}^{t_{n-1}} \frac{(t_{n+1} - s)^3}{3!} v_{tttt}(s) ds \right\} \right. \\
&\quad \left. - \theta \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - s)^3}{3!} v_{tttt}(s) ds + \int_{t_n}^{t_{n-1}} \frac{(t_{n+1} - s)^3}{3!} v_{tttt}(s) ds \right\} \right| \\
&\quad + \frac{m_0}{4\gamma_0^2} \left\| \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{(t_{n+1} - s)^2}{2!} v_{ttt}(s) ds + \int_{t_n}^{t_{n-1}} \frac{(t_{n-1} - s)^2}{2!} v_{ttt}(s) ds \right\} \right\| \tag{3.70}
\end{aligned}$$

Desde que $|t_n - s| \leq \Delta t \leq 1$, então

$$\begin{aligned}
|\varphi^n| &\leq \frac{1}{(\Delta t)^2} \left\{ |v_{tttt}|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; L^2(0,1))} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \frac{(t_{n+1} - s)^3}{3!} \right| ds \right. \\
&\quad + |v_{tttt}|_{L^\infty(t_{n-1}, t_n; L^2(0,1))} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \frac{(t_{n+1} - s)^3}{3!} \right| ds \left. \right\} \\
&\quad + \theta \left\{ |v_{tttt}|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; L^2(0,1))} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |(t_{n+1} - s)| ds \right. \\
&\quad + |v_{tttt}|_{L^\infty(t_{n-1}, t_n; L^2(0,1))} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(t_{n+1} - s)| ds \left. \right\} \\
&\quad + \frac{m_0}{4\gamma_0^2} \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \|v_{ttt}\|_{L^\infty(t_n, t_{n+1}; H^1(0,1))} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\|(t_{n+1} - s)^2\|}{2!} ds \right. \\
&\quad + \|v_{ttt}\|_{L^\infty(t_{n-1}, t_n; H^1(0,1))} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\|(t_{n-1} - s)^2\|}{2!} ds \left. \right\} \\
&\leq C_5(\Delta t)^2 \|v_{tttt}\|_{L^\infty(t_{n-1}, t_{n+1}; L^2(0,1))} + C_6(\Delta t)^2 \|v_{tttt}\|_{L^\infty(t_{n-1}, t_{n+1}; L^2(0,1))} \\
&\quad + C_7(\Delta t)^2 \|v_{ttt}\|_{L^\infty(t_{n+1}, t_{n+1}; H^1(0,1))} + C_8(\Delta t)^2 \|v_{ttt}\|_{L^\infty(t_{n-1}, t_{n+1}; H^1(0,1))},
\end{aligned} \tag{3.71}$$

onde C_5, C_6, C_7 e C_8 são constantes independentes de Δt e $0 < \theta \leq 1$. Tomando $C_9 = \max\{C_5, C_6, C_7, C_8\}$ e elevando ao quadrado obtemos

$$|\varphi^n|^2 \leq C_9(\Delta t)^4 \left\{ \|v_{tttt}\|_{L^\infty(t_{n+1}, t_{n+1}; L^2(0,1))}^2 + \|v_{ttt}\|_{L^\infty(t_{n+1}, t_{n+1}; H^1(0,1))}^2 \right\}. \tag{3.72}$$

Multiplicando por Δt e fazendo a soma para $n = 1, \dots, N - 1$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 &= \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|\varphi^n\|^2 \\
&\leq C_9(\Delta t)^4 \left[\|v''''\|_{L^\infty(0,T; L^2(0,1))}^2 + \|v'''\|_{L^\infty(0,T; H^1(0,1))} \right].
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Para o restante de termos do lado direito da equação (3.69) usamos a aproximação θ -Newmark, assim temos respectivamente as estimativas

$$\begin{aligned}
\|\rho^{n+\theta}\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 &= \sum_{n=1}^{N-1} \|\rho^{n+\theta}\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 \leq C_{10} \|\rho\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 \\
\|\delta\rho^n\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 &= \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \|\delta\rho^n\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 \leq C_{11} \|\rho'\|_{L^\infty(0,T;H^1(0,1))}^2 \\
|\delta^2\rho^n|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 &= \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} |\delta^2\rho^n|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 \leq C_{12} |\rho''|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 \\
\sum_{n=1}^{N-1} \|\xi^{n+\theta}\|^2 &\leq 2 \sum_{n=1}^{N-1} (\|\xi^n + \xi^{n-1}\|^2 + \|\xi^{n+1} - \xi^n\|^2).
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Fixando $l = 1$ e variando $m \in \{0, 1\}$ em (2.23) para limitar ρ'' , ρ' e ρ , juntamente com (H4) temos que

$$\begin{aligned}
\|\xi^N + \xi^{N-1}\|^2 + \|\xi^N - \xi^{N-1}\|^2 + |\delta\xi^{N-1/2}|^2 &\leq C_{13} \left[h^4 + h^2(\|v\|_2^2 + \|v'\|_2^2) \right. \\
+ h^4\|v''\|_2^2 + (\Delta t)^4(|v'''|^2 + |v''''|^2) + \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} (\|\xi^n + \xi^{n-1}\|^2 + \|\xi^n - \xi^{n-1}\|^2 & \\
\left. + |\delta\xi^{n-1/2}|^2) \right]. & \tag{3.75}
\end{aligned}$$

Então podemos aplicar o Lema de Gronwall em (3.75) e obter:

$$\begin{aligned}
\|\xi^N\|^2 + |\delta\xi^{N-1/2}|^2 &\leq \|\xi^N + \xi^{N-1}\|^2 + \|\xi^N - \xi^{N-1}\|^2 + |\delta\xi^{N-1/2}|^2 \\
&\leq \tilde{C}(h + (\Delta t)^2)^2.
\end{aligned}$$

Logo usando a equivalência de normas em espaços de dimensão finita, podemos extrair a raiz quadrada para obter,

$$\max_{1 \leq N \leq T} \{\|\xi^N\| + |\delta\xi^{N-1/2}|\} \leq C(h + (\Delta t)^2). \tag{3.76}$$

Assim pela definição de norma e usando a desigualdade triangular concluímos que

$$\|v - v_h\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,1))} + |\delta(v - v_h)|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq C(h + (\Delta t)^2). \tag{3.77}$$

Analogamente como no problema **(II)**, (2.16), precisamos a seguinte hipótese adicional para interpolar os dados iniciais do problema **(I)**, (2.3), isto é

$$(H7) \quad \|u_h(0) - \tilde{u}_h(0)\| \leq \bar{c}h^2; \quad |u'_h(0) - \tilde{u}'_h(0)| \leq \hat{c}h^2.$$

Teorema 3.2. *Sejam $I_t = (\alpha(t), \beta(t))$ e $I_0 = (\alpha(0), \beta(0))$. Se u é solução do problema (I), (2.3), com dados iniciais $u_0 \in H_0^1(I_0) \cap H^2(I_0)$, $u_1 \in H_0^1(I_0)$, e suponhamos que $u \in L^\infty(0, T, H_0^1(I_t) \cap H^2(I_t))$, $u', u'' \in L^\infty(0, T, H^2(I_t))$ com as hipóteses (H1) – (H7), então existe uma constante positiva C dependente de u e independente de h tal que*

$$|u' - u'_h|_{L^\infty(0, T; L^2(I_t))} + \|u - u_h\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(I_t))} \leq Ch. \quad (3.78)$$

Prova: Se $v(y, t)$ é solução do problema (II), (2.16), com condições iniciais dadas por:

$$\begin{aligned} v_0(y) &= u_0(\alpha(0) + \gamma(0)y) \\ v_1(y) &= u_1(\alpha(0) + \gamma(0)y) + (\alpha'(0) + \gamma'(0)y)u'_0(\alpha(0) + \gamma(0)y) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Considere as funções $u(x, t) = v(y, t)$ e $f(x, t) = g(y, t)$, onde $x = \alpha(t) + \gamma(t)y$. Vamos a mostrar que $u(x, t)$, sobre as hipóteses do Teorema 2.2 é solução do problema (I), (2.3), para isto é suficiente mostrar que a solução $v(y, t)$ do problema (II), (2.16), já resolvido pelo Teorema 2.1 quando transformado pelo difeomorfismo τ^{-1} resulta no problema (I), (2.3), e assim, as soluções do Teorema 2.1 resultam nas soluções do Teorema 2.2. De fato temos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} \{ 2\gamma'(\alpha' + \gamma'y) - \gamma(\alpha'' + \gamma''y) \} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \\ &\quad + \frac{m_0}{2\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy. \quad (3.82)$$

Resulta de (3.80)-(3.82) que $\check{L}v(y, t)$ é transformado em:

$$\hat{L}u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(t) + b(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

A regularidade de $v(y, t)$ dada pelo Teorema 2.1 implica que $u(x, t)$ é solução do problema **(I)**, (2.3). Portanto temos que a estimativa de erro de $v(y, t)$ dada em (2.28) implica a estimativa de erro de $u(x, t)$ em (3.78).

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo serão mostrados simulações numéricas, para ilustrar características do problema associado ao modelo de cordas elásticas com fronteira móvel. Vimos que, para resolver o problema **(I)**, (2.3), fazemos uma mudança de variáveis de modo a termos um problema cilíndrico. Obtivemos assim, o problema **(II)**, (2.16), o qual se aproxima por **(III)**, (3.1). Portanto encontrar a solução aproximada para **(III)**, (3.1), implica em encontrar uma solução aproximada para o problema **(II)**, (2.16).

4.1 Validação do Método

Para validação do método, será escolhida uma solução $v(y, t)$ como solução exata do problema **(II)**, (2.16). Assim, a partir desta solução, serão definidas a função fonte $g(y, t)$, como sendo o resultado da operação $v_{tt} - [z_1(t) + z_2(t) \int_0^1 v_y^2 dy] v_{yy} - (a(y, t)v_y)_y + b(y, t)v_{yt} + c(y, t)v_y$, uma vez que $v(y, t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$, $c(y, t)$, $b(y, t)$ e $a(y, t)$ são conhecidas, e as condições iniciais v_0 e v_1 , dadas respectivamente por $v(y, 0)$ e $v_t(y, 0)$, a fim de gerarmos um problema, no qual será aplicado o método (3.28) com o objetivo de se obter a solução aproximada $v_m(y, t)$. Após obtê-la, será calculado o erro de aproximação entre as soluções $v(y, t)$ e $v_m(y, t)$ na norma discreta de $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, dado por:

$$\begin{aligned} E_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))} &= \max_{0 \leq t_n \leq 1} (\|v(y_i, t_n) - v_m(y_i, t_n)\|_{L^2(0, 1)}) \\ &= \max_{0 \leq t_n \leq 1} \left(\int_0^1 |v(y_i, t_n) - v_m(y_i, t_n)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

A seguir serão apresentadas exemplos numéricos representativos das várias características do modelo e tabelas com os erros de aproximação para cada $v_m(y, t)$ obtida a partir de algumas combinações dos parâmetros $\Delta t, h$ e θ .

Exemplo 1

Considerando

$$v(y, t) = \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi y) \cos(\pi t),$$

onde a posição inicial da corda e a velocidade inicial dadas por

$$\begin{aligned} v(y, 0) &= \frac{1}{\pi^2} \text{sen}(\pi y) \\ v'(y, 0) &= 0, \end{aligned}$$

com valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0.$$

Definimos a fronteira móvel como:

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \text{ e } \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1}$$

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = -1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 3$. Portanto

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = \frac{3t+1}{t+1}.$$

Logo o domínio \hat{Q} é crescente e seu gráfico é dado na Figura 4.1.

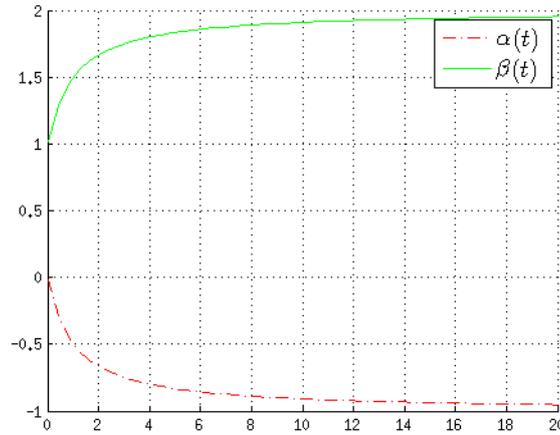


Figura 4.1: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 1

Tomando as constantes : $\tau_0/m = 50, k/m = 5$ e $m_0 = 5$ temos:

$$z_1(t) = \frac{1}{\gamma(t)^2} \left[-\frac{m_0}{2} + \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \right] = \frac{5(t+1)(7t+3)}{2(3t+1)^2},$$

$$z_2(t) = \frac{k}{2m\gamma(t)^3} = \frac{5}{2} \left(\frac{t+1}{3t+1} \right)^3,$$

$$a(y, t) = \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2 = \frac{5(t+1)^3 - 2(2y-1)^2}{2(3t+1)^2(t+1)^2},$$

$$b(y, t) = -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) = \frac{2-4y}{(3t+1)(t+1)}, \text{ e}$$

$$c(y, t) = - \left(\frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} \right) = \frac{4y-2}{(3t+1)(t+1)^2}.$$

Neste caso observa-se que $a(y, t) > 0$, já que estamos tomando $m_0 = 5$ e assim se verifica nossas hipóteses dadas.

4.1.1 Convergência Numérica para o Exemplo 1

Utilizando a fórmula dada em (A.3), a Tabela 4.1 mostra que a ordem de convergência do método utilizado é, aproximadamente de $\mathcal{O}(h)$, em acordo com a

estimativa de erro (3.47), fixado $\theta = 0.5$ e $\Delta t = h^2$.

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-2}	2^{-4}	0.05141016	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.02545670	1.014008
	2^{-4}	2^{-8}	0.01274979	0.997571
	2^{-5}	2^{-10}	0.00637787	0.999327

Tabela 4.1: Ordem de convergência do exemplo 1.

Por outro lado a Tabela 4.2 mostra que a ordem de convergência também é, de $\mathcal{O}(h)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47), fixado $\theta = 0.75$ e fazendo $\Delta t = h^2$.

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-2}	2^{-4}	0.05280767	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.02545916	1.052562
	2^{-4}	2^{-8}	0.01274988	0.997700
	2^{-5}	2^{-10}	0.00637787	0.999336

Tabela 4.2: Ordem de convergência do exemplo 1.

Na Tabela 4.3 e 4.4 calculamos o erro e a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1))$, fixado $\theta = 0.5, 0.75$ e tomando $(\Delta t)^2 = h$. Assim observamos que o erro diminui com uma taxa de convergência que é aproximadamente $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-4}	2^{-2}	0.48541361	—
	2^{-6}	2^{-3}	0.07308403	2.731586
	2^{-8}	2^{-4}	0.01860918	1.973541
	2^{-10}	2^{-5}	0.00481820	1.949448

Tabela 4.3: Ordem de convergência do exemplo 1.

Na Tabela 4.5 e 4.6 calculamos o erro e a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T, L^2(0, 1))$. Assim observamos que o erro diminui com uma taxa de conver-

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-2}	2^{-4}	0.54704501	–
	2^{-3}	2^{-6}	0.09932166	2.461479
	2^{-4}	2^{-8}	0.02720539	1.868208
	2^{-5}	2^{-10}	0.00715585	1.979715

Tabela 4.4: Ordem de convergência do exemplo 1.

gência que é aproximadamente $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-3}	0.02319118	–
	2^{-4}	0.00590244	1.974190
	2^{-5}	0.00152876	1.948943
	2^{-6}	0.00038563	1.987069
	2^{-7}	0.00009692	1.992340

Tabela 4.5: Ordem de convergência do exemplo 1.

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-3}	0.03158056	–
	2^{-4}	0.00864378	1.869302
	2^{-5}	0.00227332	1.926858
	2^{-6}	0.00057637	1.979719
	2^{-7}	0.00014554	1.985592

Tabela 4.6: Ordem de convergência do exemplo 1.

Observa-se que o lado esquerdo da Figura 4.2 mostra a evolução no tempo da solução aproximada $u_m(x, t)$ para o domínio com fronteira móvel. Esta solução foi calculada para uma discretização de $h = \Delta t = 2^{-9}$. O lado direito da Figura 4.2 representa a evolução no tempo da solução aproximada $v_m(y, t)$ para o domínio com fronteira fixa, depois de aplicar a transformação inversa $\tau^{-1}(y, t)$.

Exemplo 2

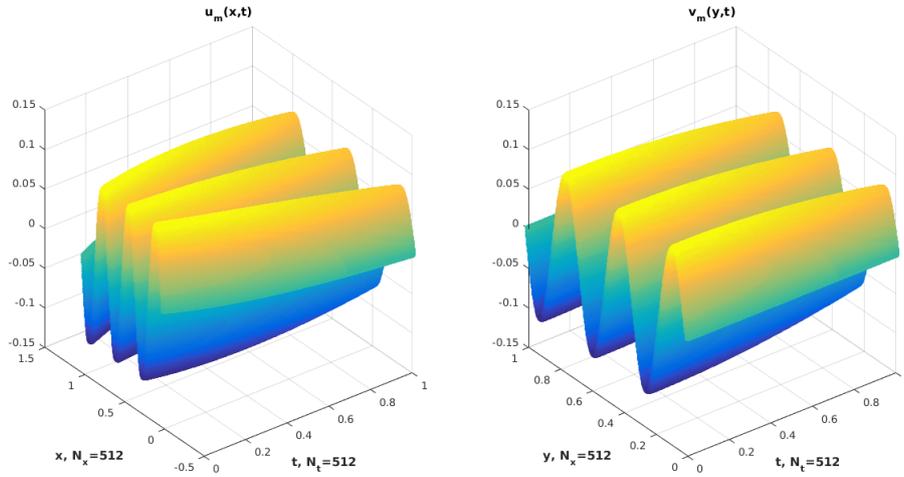


Figura 4.2: Soluções aproximadas do exemplo 1.

Considerando

$$v(y, t) = \text{sen}(\pi y)(\cos(\pi t) + \text{sen}(\pi t)),$$

onde a posição inicial da corda e a velocidade inicial dadas por

$$v(y, 0) = \text{sen}(\pi y) = v'(y, 0),$$

com valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0.$$

Definimos a fronteira móvel como:

$$\alpha(t) = -1 + 2e^{(-t-1)} \text{ e } \beta(t) = 1 - 2e^{(-t-1)}.$$

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = -1$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 2$. Portanto

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - 4e^{(-t-1)}.$$

Novamente temos o domínio \hat{Q} crescente, com gráfico na Figura 4.3. Tomando as

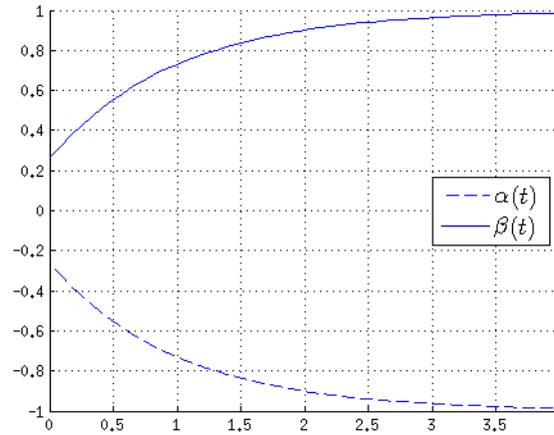


Figura 4.3: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 2

constantes : $\tau_0/m = 50, k/m = 5$ e $m_0 = 5$, temos

$$z_1(t) = \frac{1}{\gamma(t)^2} \left[-\frac{m_0}{2} + \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \right] = \frac{15 - 10e^{-t-1} - 20e^{-t-1}}{8(1 - e^{-t-1})^2(1 - 2e^{-t-1})},$$

$$z_2(t) = \frac{k}{2m\gamma(t)^3} = \frac{5}{16(1 - 2e^{-t-1})^3},$$

$$a(y, t) = \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2 = \frac{5 - 4(2ye^{-t-1} - e^{-t-1})^2}{4(1 - 2e^{-t-1})^2},$$

$$b(y, t) = -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) = \frac{(2 - 4y)e^{-t-1}}{1 - 2e^{-t-1}}, \text{ e}$$

$$c(y, t) = - \left(\frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} \right) = \frac{(2y - 1)e^{-t-1}}{1 - 2e^{-t-1}}.$$

Neste caso também se verifica que $a(y, t) > 0$, tomando $m_0 = 5$.

4.1.2 Convergência Numérica para o Exemplo 2

Nas Tabelas 4.7 e 4.8 mostram que a ordem de convergência do método utilizado é, aproximadamente de $\mathcal{O}(h)$ em acordo com a estimativa de erro (3.47), fixado $\theta = 0.5, 0.75$ e tomando $\Delta t = h^2$.

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-2}	2^{-4}	0.70845055	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.35526344	0.995777
	2^{-4}	2^{-8}	0.17799942	0.997016
	2^{-5}	2^{-10}	0.08902556	0.999580

Tabela 4.7: Ordem de convergência do exemplo 2.

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-2}	2^{-4}	0.72802252	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.35532543	1.034842
	2^{-4}	2^{-8}	0.17800072	0.997257
	2^{-5}	2^{-10}	0.08902569	0.999589

Tabela 4.8: Ordem de convergência do exemplo 2.

Nas Tabelas 4.9 e 4.10 a seguir obtemos que o erro e a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1))$ fixado $\theta = 0.5, 0.75$ e tomando $(\Delta t)^2 = h$ é aproximadamente de $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, também em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-4}	2^{-2}	3.71445185	—
	2^{-6}	2^{-3}	0.51522489	2.849807
	2^{-8}	2^{-4}	0.14358166	1.843398
	2^{-10}	2^{-5}	0.03616572	1.989176

Tabela 4.9: Ordem de convergência do exemplo 2.

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-4}	2^{-2}	4.85974962	—
	2^{-6}	2^{-3}	0.85405458	2.508481
	2^{-8}	2^{-4}	0.22500761	1.924354
	2^{-10}	2^{-5}	0.05439931	2.048313

Tabela 4.10: Ordem de convergência do exemplo 2.

Nas Tabelas 4.11 e 4.12 a seguir obtemos que o erro e a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T, L^2(0, 1))$ que é aproximadamente de $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-3}	0.16736947	—
	2^{-4}	0.04656825	1.845617
	2^{-5}	0.01170539	1.992173
	2^{-6}	0.00297377	1.976803
	2^{-7}	0.00074675	1.993581

Tabela 4.11: Ordem de convergência do exemplo 2.

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-3}	0.27714016	—
	2^{-4}	0.07223714	1.939803
	2^{-5}	0.01747020	2.047844
	2^{-6}	0.00424897	2.039709
	2^{-7}	0.00112184	1.921239

Tabela 4.12: Ordem de convergência do exemplo 2.

O lado esquerdo da Figura 4.4 mostra a evolução no tempo da solução aproximada $u_m(x, t)$ para o domínio não cilíndrico. Esta solução foi calculada para uma discretização $h = \Delta t = 2^{-9}$. O lado direito da Figura 4.4 representa a evolução no tempo da solução aproximada $v_m(y, t)$ para o domínio cilíndrico, depois de aplicar a transformação inversa $\tau^{-1}(y, t)$.

Exemplo 3

Considerando

$$v(y, t) = y^2(t + 1)(y - 1)^2,$$

onde a posição inicial da corda e a velocidade inicial dadas por

$$v(y, 0) = v'(y, 0) = y^2(y - 1)^2,$$

com valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0.$$

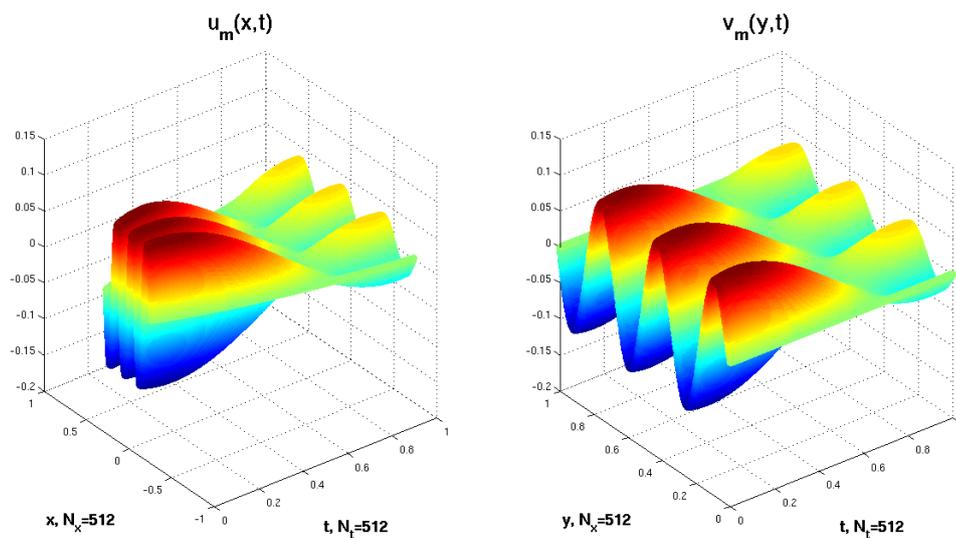


Figura 4.4: Soluções aproximadas do exemplo 2.

Definimos a fronteira móvel como:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi t) - \frac{1}{2} \text{ e } \beta(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi t)$$

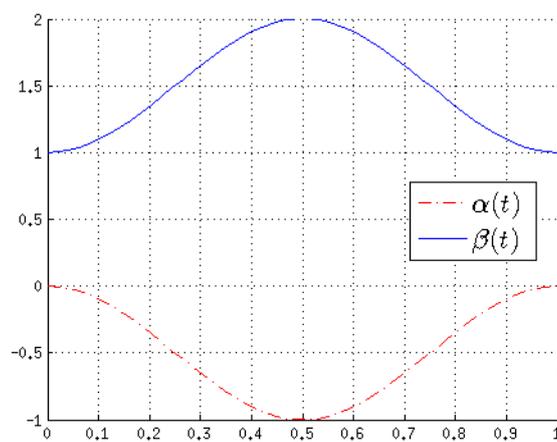


Figura 4.5: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 3

Logo

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - \cos(2\pi t).$$

Em [23] e [7] se mostro que o domínio \hat{Q} não necessariamente pode ser crescente. Assim verificamos a traves de este exemplo que sendo o domínio \hat{Q} simultaneamente crescente e decrescente, ver Figura 4.5, numericamente conseguimos resultados de convergência do método. Tomando as constantes : $\tau_0/m = 50, k/m = 5$, e $m_0 = 25$, tem-se

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{1}{\gamma(t)^2} \left[-\frac{m_0}{2} + \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \right] = \frac{10(1 - \cos(2\pi t)) + 15}{2(1 - \cos(2\pi t))^2}, \\ z_2(t) &= \frac{k}{2m\gamma(t)^3} = \frac{5}{2(2 - \cos(2\pi t))^3}, \\ a(y, t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2 = \frac{5 - 2\pi^2 \text{sen}^2(2\pi t)(2y - 1)^2}{2(2 - \cos(2\pi t))^2}, \\ b(y, t) &= -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) = \frac{2\pi \text{sen}(2\pi t)(1 - 2y)}{2 - \cos(2\pi t)}, \text{ e} \\ c(y, t) &= - \left(\frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} \right) = \frac{2\pi^2 \cos^2(2\pi t)(1 - 2y)}{2 - \cos(2\pi t)}. \end{aligned}$$

Verificamos numericamente que $a(y, t) > 0$, quando tomamos $m_0 = 25$.

4.1.3 Convergência Numérica para o Exemplo 3

As Tabelas 4.13 e 4.14 mostram que a taxa de convergência do método utilizado é, aproximadamente de $\mathcal{O}(h)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47), fixado $\theta = 0.5, 0.75$ e tomando $\Delta t = h^2$. Nas tabelas 4.15 e 4.16 calculamos que

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-2}	2^{-4}	0.11547816	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.06253483	0.884888
	2^{-4}	2^{-8}	0.03202294	0.965553
	2^{-5}	2^{-10}	0.01610597	0.991510

Tabela 4.13: Ordem de convergência do exemplo 3

o erro e a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1))$ fixados $\theta = 0.5, 0.75$ e tomando $(\Delta t)^2 = h$ é aproximadamente de $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, também em acordo com a

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-2}	2^{-4}	0.11433977	–
	2^{-3}	2^{-6}	0.06256279	0.869950
	2^{-4}	2^{-8}	0.03202295	0.966198
	2^{-5}	2^{-10}	0.01610596	0.991510

Tabela 4.14: Ordem de convergência do exemplo 3

estimativa de erro (3.47). Nas tabelas 4.17 e 4.18 calculamos que o erro e a taxa de

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-4}	2^{-2}	0.34264340	–
	2^{-6}	2^{-3}	0.09944912	1.784677
	2^{-8}	2^{-4}	0.03109336	1.677351
	2^{-10}	2^{-5}	0.00946193	1.716399

Tabela 4.15: Ordem de convergência do exemplo 3

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-4}	2^{-2}	0.53944700	–
	2^{-6}	2^{-3}	0.13951516	1.651728
	2^{-8}	2^{-4}	0.04491835	1.519568
	2^{-10}	2^{-5}	0.01299967	1.759600

Tabela 4.16: Ordem de convergência do exemplo 3

convergência no espaço $L^\infty(0, T, L^2(0, 1))$ fixados $\theta = 0.5, 0.75$ e tomando $\Delta t = h$ é aproximadamente de $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, também em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-3}	0.03020247	–
	2^{-4}	0.00956310	1.659115
	2^{-5}	0.00306597	1.641133
	2^{-6}	0.00085955	1.834689
	2^{-7}	0.00022191	1.953570
	2^{-8}	0.00005585	1.990354

Tabela 4.17: Ordem de convergência do exemplo 3

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-3}	0.04363196	—
	2^{-4}	0.01341387	1.701659
	2^{-5}	0.00414055	1.695830
	2^{-6}	0.00125158	1.726071
	2^{-7}	0.00032868	1.928964
	2^{-8}	0.00008313	1.983105

Tabela 4.18: Ordem de convergência do exemplo 3

O lado esquerdo da Figura 4.6 mostra a evolução no tempo da solução aproximada $u_m(x, t)$ para o domínio com fronteira móvel. Esta solução foi calculada para uma discretização de $h = \Delta t = 2^{-9}$. O lado direito da Figura 4.6 representa a evolução no tempo da solução aproximada $v_m(y, t)$ para o domínio com fronteira fixa, depois de aplicar a transformação inversa $\tau^{-1}(y, t)$.

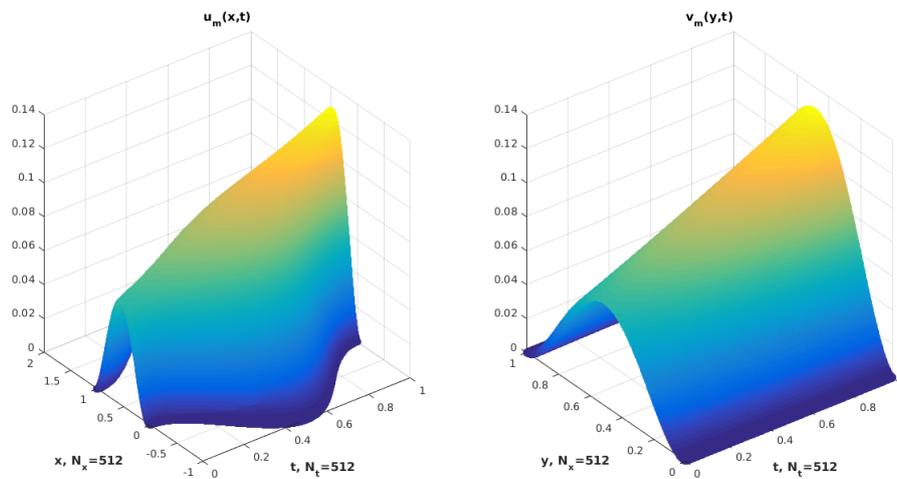


Figura 4.6: Soluções aproximadas do exemplo 3.

Exemplo 4

Considerando

$$v(y, t) = \text{sen}(\pi y) \cos(\pi t), ,$$

onde a posição inicial da corda e a velocidade inicial dadas por

$$v(y, 0) = \text{sen}(\pi y),$$

$$v'(y, 0) = 0,$$

com valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0.$$

Definimos a fronteira móvel como:

$$\alpha(t) = 2 - e^{-t-1} \text{ e } \beta(t) = 3 + e^{-t-1}$$

Note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 2$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = 3 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 1$. Assim

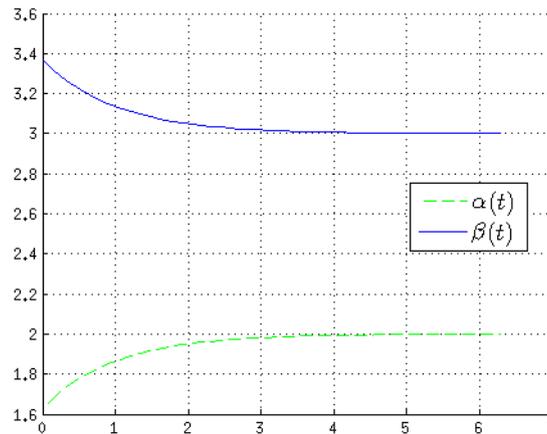


Figura 4.7: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 4

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 1 + 2e^{-t-1}.$$

Em [23] e [7] se mostro que o domínio \hat{Q} , não precisa ser crescente. Verificamos neste exemplo que o domínio \hat{Q} é decrescente, ver Figura 4.7, assim também obtemos resultados para a convergência do método. Tomando as constantes : $\tau_0/m = 50, k/m = 5$

e $m_0 = 5$, temos

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= \frac{1}{\gamma(t)^2} \left[-\frac{m_0}{2} + \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \right] = \frac{45 + 20(e^{-t-1} - 1)}{6(1 + 2e^{-t-1})^2}, \\
 z_2(t) &= \frac{k}{2m\gamma(t)^3} = \frac{5}{2(1 + 2e^{-t-1})^3}, \\
 a(y, t) &= \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2 = \frac{5 - 2e^{-2t-2}(1 - 2y)^2}{2(1 + 2e^{-t-1})^2}, \\
 b(y, t) &= -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) = \frac{2e^{-t-1}(2y - 1)}{1 + 2e^{-t-1}}, \text{ e} \\
 c(y, t) &= - \left(\frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} \right) = \frac{e^{-t-1}(1 - 2y)}{1 + 2e^{-t-1}}.
 \end{aligned}$$

Numericamente se verifica que $a(y, t) > 0$ quando escolhemos $m_0 = 5$, de modo a satisfazer a hipóteses.

4.1.4 Convergência Numérica para o Exemplo 4

A Tabela 4.19 mostra que a convergência do método utilizado é, aproximadamente de $\mathcal{O}(h)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47), fixado $\theta = 0.5$ e tomando $\Delta t = h^2$. Por outro lado a Tabela 4.20 mostra que a convergência também

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-2}	2^{-4}	0.49852965	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.25118833	0.988909
	2^{-4}	2^{-8}	0.12583378	0.997250
	2^{-5}	2^{-10}	0.06294697	0.999310

Tabela 4.19: Ordem de convergência do exemplo 4

é, de $\mathcal{O}(h)$, também em acordo com a estimativa de erro (3.47), fixado $\theta = 0.75$ e tomando $\Delta t = h^2$. Nas tabelas 4.21 e 4.22 calculamos o erro e a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1))$ fixado $\theta = 0.5, 0.75$ e fazendo $(\Delta t)^2 = h$. Assim conseguimos a taxa de convergência aproximadamente de $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-2}	2^{-4}	0.49867320	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.25118893	0.989321
	2^{-4}	2^{-8}	0.12583382	0.997253
	2^{-5}	2^{-10}	0.06294697	0.999310

Tabela 4.20: Ordem de convergência do exemplo 4

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-4}	2^{-2}	0.54869597	—
	2^{-6}	2^{-3}	0.11633838	2.237679
	2^{-8}	2^{-4}	0.04065722	1.516743
	2^{-10}	2^{-5}	0.01024470	1.988632

Tabela 4.21: Ordem de convergência do exemplo 4

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-4}	2^{-2}	0.80134485	—
	2^{-6}	2^{-3}	0.17599123	2.186919
	2^{-8}	2^{-4}	0.05709384	1.624096
	2^{-10}	2^{-5}	0.01533474	1.896531

Tabela 4.22: Ordem de convergência do exemplo 4

Nas tabelas 4.23 e 4.24 calculamos o erro e a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T, L^2(0, 1))$ fixado $\theta = 0.5, 0.75$ e fazendo $\Delta t = h$. Assim conseguimos a taxa de convergência aproximadamente de $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-3}	0.03612383	—
	2^{-4}	0.01271790	1.506090
	2^{-5}	0.00321445	1.984217
	2^{-6}	0.00079825	2.009646
	2^{-7}	0.00019890	2.004781
	2^{-8}	0.00004971	2.000375

Tabela 4.23: Ordem de convergência do exemplo 4

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-3}	0.05535690	—
	2^{-4}	0.01798670	1.621832
	2^{-5}	0.00483890	1.894178
	2^{-6}	0.00120238	2.008787
	2^{-7}	0.00029949	2.005285
	2^{-8}	0.00007481	2.001083

Tabela 4.24: Ordem de convergência do exemplo 4

O lado esquerdo da Figura 4.8 mostra a evolução no tempo da solução aproximada $u_m(x, t)$ para o domínio não cilíndrico. Esta solução foi calculada para uma discretização de $h = \Delta t = 2^{-9}$. O lado direito da Figura 4.8 representa a evolução no tempo da solução aproximada $v_m(y, t)$ para o domínio cilíndrico, depois de aplicar a transformação inversa $\tau^{-1}(y, t)$.

Exemplo 5

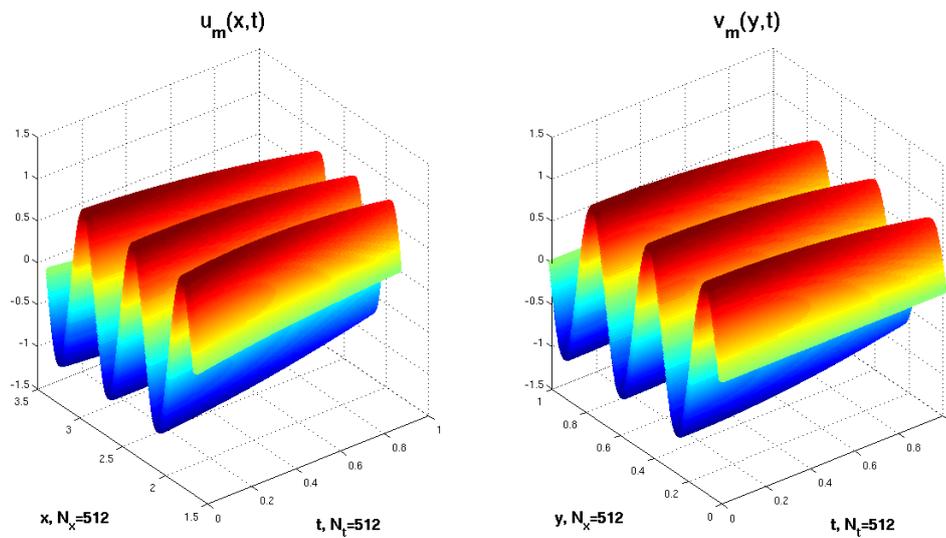


Figura 4.8: Soluções aproximadas do exemplo 4.

Considerando

$$v(y, t) = \text{sen}(\pi y)e^{-t},$$

onde a posição inicial da corda e a velocidade inicial dadas por

$$v(y, 0) = \text{sen}(\pi y),$$

$$v'(y, 0) = -\text{sen}(\pi y),$$

com valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0.$$

Definimos a fronteira móvel como:

$$\alpha(t) = -t \text{ e } \beta(t) = t + 1$$

Note que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = +\infty$. Logo

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2t + 1.$$

Novamente consideremos o domínio \hat{Q} crescente com gráfico na Figura 4.9. Tomando

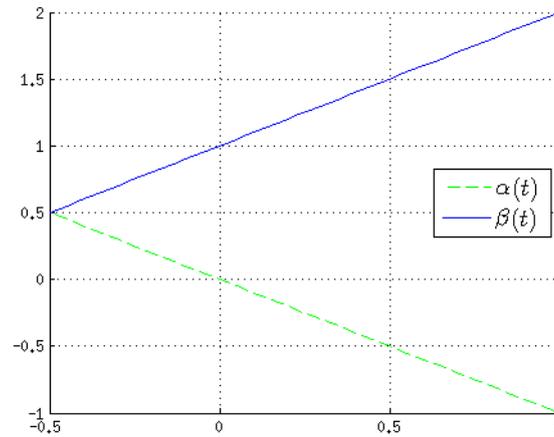


Figura 4.9: Fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do exemplo 5

as constantes : $\tau_0/m = 50, k/m = 5$ e $m_0 = 5$, temos

$$z_1(t) = \frac{1}{\gamma(t)^2} \left[-\frac{m_0}{2} + \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \right] = \frac{15 + 20(t-1)}{(2t+1)^2},$$

$$z_2(t) = \frac{k}{2m\gamma(t)^3} = \frac{5}{2(2t+1)^3},$$

$$a(y, t) = \frac{m_0}{2\gamma^2} - \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right)^2 = \frac{5 - 2(2y-1)^2}{2(2t+1)^2},$$

$$b(y, t) = -2 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) = \frac{-2(2y-1)^2}{(2t+1)^2}, \text{ e}$$

$$c(y, t) = - \left(\frac{\alpha'' + \gamma''y}{\gamma} \right) = 0.$$

Neste caso também se verifica numericamente que $a(y, t) > 0$, quando escolhemos $m_0 = 5$.

4.1.5 Convergência Numérica para o Exemplo 5

Nas Tabelas 4.25 e 4.26 mostram que a convergência do método utilizado é, aproximadamente de $\mathcal{O}(h)$, em acordo com a estimativa de erro (3.47), fixado $\theta =$

0.5, 0.75 e tomando $\Delta t = h^2$. Nas tabelas 4.27 e 4.28 calculamos o erro e a taxa de

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-2}	2^{-4}	0.49803184	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.24729094	1.010028
	2^{-4}	2^{-8}	0.12534258	0.980332
	2^{-5}	2^{-10}	0.06288546	0.995078

Tabela 4.25: Ordem de convergência do exemplo 5

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-2}	2^{-4}	0.53316144	—
	2^{-3}	2^{-6}	0.24729322	1.108349
	2^{-4}	2^{-8}	0.12534258	0.980346
	2^{-5}	2^{-10}	0.06288546	0.995078

Tabela 4.26: Ordem de convergência do exemplo 5

convergência no espaço $L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1))$ fixado $\theta = 0.5, 0.75$ e tomando $(\Delta t)^2 = h$. Assim conseguimos a taxa de convergência aproximadamente de $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, também em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-4}	2^{-2}	3.35949429	—
	2^{-6}	2^{-3}	0.82238435	2.030359
	2^{-8}	2^{-4}	0.21387393	1.943052
	2^{-10}	2^{-5}	0.06005242	1.832466

Tabela 4.27: Ordem de convergência do exemplo 5

	h	Δt	$E_{L^\infty(0,1;H_0^1(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-4}	2^{-2}	3.91657381	—
	2^{-6}	2^{-3}	1.10976192	1.819341
	2^{-8}	2^{-4}	0.32089800	1.790063
	2^{-10}	2^{-5}	0.08766629	1.872020

Tabela 4.28: Ordem de convergência do exemplo 5

Nas tabelas 4.29 e 4.30 calculamos o erro e a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T, L^2(0, 1))$ fixado $\theta = 0.5, 0.75$ e tomando $\Delta t = h$. Assim conseguimos a taxa de convergência aproximadamente de $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$, também em acordo com a estimativa de erro (3.47).

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.5$	2^{-3}	0.26390467	—
	2^{-4}	0.06853257	1.945155
	2^{-5}	0.01922733	1.833631
	2^{-6}	0.00489395	1.974087
	2^{-7}	0.00124119	1.979265
	2^{-8}	0.00031089	1.997223

Tabela 4.29: Ordem de convergência do exemplo 5

	$h = \Delta t$	$E_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	taxa
$\theta = 0.75$	2^{-3}	0.35598295	—
	2^{-4}	0.10259377	1.794865
	2^{-5}	0.02800911	1.872974
	2^{-6}	0.00730770	1.938406
	2^{-7}	0.00185516	1.977869
	2^{-8}	0.00046515	1.995768

Tabela 4.30: Ordem de convergência do exemplo 5

Observa-se que o lado esquerdo da Figura 4.10 mostra a evolução no tempo da solução aproximada $u_m(x, t)$ para o domínio com fronteira móvel. Esta solução foi calculada para uma discretização de $h = \Delta t = 2^{-9}$. O lado direito da Figura 4.10 representa a evolução no tempo da solução aproximada $v_m(y, t)$ para o domínio com fronteira fixa, depois de aplicar a transformação inversa $\tau^{-1}(y, t)$.

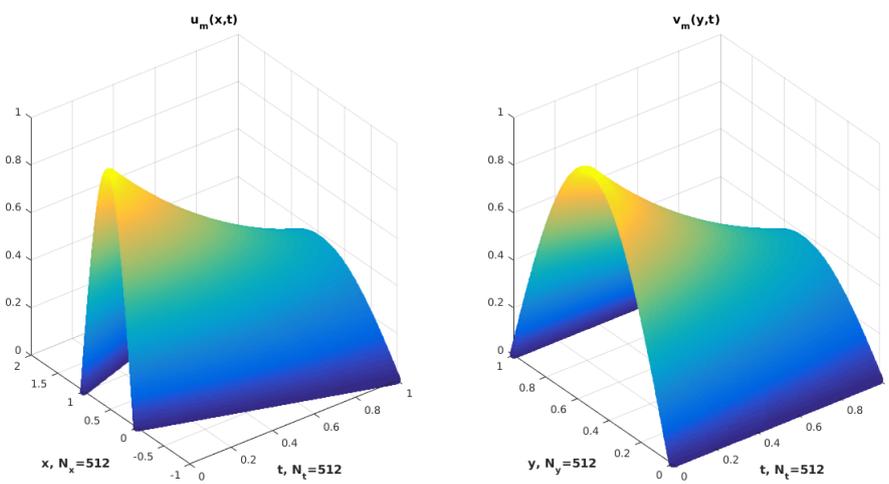


Figura 4.10: Soluções aproximadas do exemplo 5.

5 CONCLUSÃO

Verificamos numericamente, que o erro numérico para $\theta = 0.5$ é menor que para $\theta = 0.75$

Os teoremas mostram que o Problema semidiscreto tem ordem de convergência linear e apresentamos um método numérico eficiente para o Problema totalmente discreto, com ordem de convergência quadrática no tempo.

As simulações numéricas apresentadas, são coerentes com os resultados teóricos obtidos do problema contínuo, aplicando o Método Numérico proposto. Apresentamos graficamente o comportamento da solução numérica $u_m(x, t)$ a longo do domínio não cilíndrico \hat{Q} testando diversos tipos de fronteira móvel. Além disso se mostra que a taxa de convergência no espaço $L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ é de $\mathcal{O}(h)$ quando $h^2 = \Delta t$ e de $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ quando $h = \Delta t^2$, de acordo com o estimado de erro (3.47).

REFERÊNCIAS

- [1] BALAZS, N. **On the solution of wave equations with moving bondaries**, J. Math. Anal. Appl. 2, 472-484 (1961).
- [2] BERNSTEIN, S. **Sur une classe d'équations fonctionnelles aux derivés partielles**, Isv. SSSR, Serie Math. 4 pp 17-26 (1940).
- [3] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle**. Paris: Masson Editeur, 1983.
- [4] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 9 ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2010.
- [5] CARRIER, G.F. **On the nonlinear vibrations problem of elastic string**, Quart. J. Appl. Math. 3 (1945) 157-165.
- [6] CIARLET, P.G. **The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]**, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [7] CLARK, H.R. ; LIMACO, J. ; CLARK, M.R. **Quasilinear equation in moving domain**, J. Nonlinear Analysis. 61, 1241-1256 (2005).
- [8] COOPER, J. **Asymptotic behavior for vibrating string with moving boundary**, J. Math. Anal. Appl. 174, 67-87 (1993).
- [9] DEFELIPPO, R. **Análise Numérica de Kirchhoff-Carrier com Fronteira Móvel**. 2001. 116 f. Dissertação - Programa de Pós Graduação em Informática, **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro. 2001.
- [10] DICKEY, R.W. **Infinite system of nonlinear oscilation equations related to the string**, Proc. of the A.M.S. Vol. 23 pp 459-468 (1969).

- [11] DOUGLAS, J. ; DUPONT, T. , **Galerkin Methods for Parabolic Equations**, SIAM J. Num. Anal. 7 (1970) 575-626.
- [12] GONZALES, N. **An example of pure stability for the wave equation with moving boundary**, J. Math. Anal. Appl. 228, 51-59 (1998).
- [13] KIRBY, R. C.; KIEU, T. T. Galerkin Finite Element Methods for Nonlinear Klein-Gordon Equations. **Mathematische Zeitschrift**, [S.l.], v. 189, n. 4, p. 487-505, 1985.
- [14] KIRCHHOFF, G. **Vorlesungen uber Mathematiche Physik: Mechanik** . Teuber, Leipzig, 1876 (Section 29.7).
- [15] LIU, I.S. ; RINCON, M.A. **Effect of Moving Boundaries on the vibrating Elastic String**, Applied Numerical Mathematics- vol. 47. Fasc. 2 , 159-172 (2003).
- [16] LIU, I.S.; RINCON, M. A. , **Introdução ao Método de Elementos Finitos**. Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro (2011)
- [17] MEDEIROS, L.A. ; MILLA, M. M. **Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais**. Textos de Métodos Matemáticos, N° 25 IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1993).
- [18] MEDEIROS, L.A. ; MILLA, M.M. **Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro (2000).
- [19] MEDEIROS, L.A. ; LIMACO, J.; MENEZES, S.B. **Vibrations of elastic strings: mathematical aspects, part one** , J. Comput. Anal. Appl. 4 (2)(2002) 91-127.

- [20] MEDEIROS, L.A. ; LIMACO, J. ; MENEZES, S.B. **Vibrations of elastic strings: mathematical aspects, part two** , **J. Comput. Anal. Appl.** 4 (3)(2002) 211-263.
- [21] MEDEIROS, L.A. ; RABELLO, T.N.; RINCON, M.A. ; VIEIRA, M.C.C. **On perturbation of the Kirchhoff operator: analysis and numerical simulation. Communications in Mathematical Sciences.** (10)(2012) 751-766.
- [22] PEIXOTO, N. ; Teoria e Simulação Numérica de uma Equação não-Linear de Onda. 2014. 103 f. Dissertação - Programa de Pós Graduação em Informática, **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro. 2014.
- [23] RINCON, M.A. ; LIU, I.S. , **Existence and Uniqueness of Solutions of Elastic String with Moving Ends**, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 27 (14) (2004)1641-1655.
- [24] RIVIERE, B. ; WHEELER, M.F. **A discontinuous Galerkin Method Applied to Nonlinear Parabolic Equations**, *Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg.*, vol. 11, Springer, Berlin, pp. 231-234 (2000).
- [25] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Pearson, 1988.
- [26] SILVA, A. **Análise da Equação de Burges com Fronteira Móvel**. 2007. 100 f. Dissertação - Programa de Pós Graduação em Informática, **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro. 2007.
- [27] THOMME, V. **Galerkin finite element methods for parabolic problems**, in: **Springer Series in Computational Mathematics**, vol. 25. 1997.

APÊNDICE A NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

Neste apêndice serão apresentados os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos 2 e 3.

A.1 Preliminares

A.2 Espaço das Distribuições

Def. A.1. *Dada uma função contínua, $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto, denomina-se suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Isto é*

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega} .$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ em Ω , com suporte compacto em Ω .

A.3 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em Ω para cada multi-índice α , quando $\nu \rightarrow +\infty$.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima, será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que se uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergir em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ , então

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}, \text{ quando } \nu \rightarrow +\infty.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω .

Dado um aberto Ω do \mathbb{R}^N denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de *Lebesgue* em Ω , equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ denota-se por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega,$$

onde quase sempre significa a menos de um conjunto de medida nula.

Neste espaço considera-se a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess } |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, é um espaço de *Banach*. Em particular, quando $p = 2$, tem-se que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* cuja *norma* e *produto interno* serão definidos e denotados, respectivamente por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Lema A.1 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Considere a forma linear definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por:*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $T_u = 0 \Leftrightarrow u = 0$ quase sempre em Ω .

Prova: Veja ([18], página 10).

A.4 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

A seqüência de distribuições escalares $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a distribuição $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A.5 Espaços de Sobolev

A.5.1 Convergência em L^p e no dual de L^p

Diz-se que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será denotado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, é reflexivo. Para demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços $L^p(\Omega)$ consulte Brezis [3].

Teorema A.1. *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge quase sempre para f em Ω , e existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ quase sempre em Ω .

Prova: Veja ([3], página 58).

Def. A.2. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que*

$$i) \|\omega_n\|_H = 1 \quad \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \quad \forall n, m, m \neq n;$$

ii) O espaço gerado pela $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é denso em H .

Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O *espaço de Sobolev de ordem m* , modelado sobre $L^p(\Omega)$, aqui denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, é por definição o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^p(\Omega)$ para as quais suas derivadas até a ordem α , no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e quando $p = \infty$, define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposição A.1. *Os espaços lineares $W^{m,p}(\Omega)$ equipados das respectivas normas acima são espaços de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, que é denotado por $H^m(\Omega)$. Isto é

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

cuja norma e produto interno são dados respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad ((u, v)) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

O espaço $H^m(\Omega)$ com a estrutura topológica acima, é um espaço de *Hilbert*, continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

Def. A.3. *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence

a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é o espaço denotado por $H^{-m}(\Omega)$.

Obs A.1. . Identificando $L^2(\Omega)$ com o seu dual, dos teoremas de imersão temos que:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega);$$

e portanto

$$\langle f, u \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = (f, u)_{L^2}, \forall f \in L^2(\Omega), \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Obs A.2. Uma caracterização do espaço $H_0^1(\Omega)$ que é muito útil é dada pelo Teorema do Traço (para mais detalhe veja Medeiros e Milla ([17], página. 100)), que nos diz que:

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u|_{\Gamma} = 0\}.$$

Lema A.2 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado em alguma direção x_i de \mathbb{R}^N , (isto é, existe uma direção e_i tal que $|pr_i(\Omega)| < C$ em que pr_i é a projeção do \mathbb{R}^N sobre o eixo e_i). Então existe uma constante $C > 0$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Prova: Veja ([18], página 36).

Obs A.3. Usando a desigualdade de Poincaré conclui-se que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

Lema A.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $1 \leq p, q$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Veja ([3], página 56).

Obs A.4. A *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, freqüentemente utilizada neste trabalho, é um caso particular da *Desigualdade de Hölder*, mais especificamente, quando $p = q = 2$.

Lema A.4 (Desigualdade de Young). *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Para $p = q = 2$ tem-se, também, a chamada desigualdade de Young com γ . Isto é, seja $\gamma > 0$, então, sob as mesmas condições do Lema anterior vale a desigualdade

$$ab \leq \frac{\gamma a^2}{2} + \frac{b^2}{2\gamma}.$$

O resultado é obtido tomando $\sqrt{\gamma}a$ e $\frac{b}{\sqrt{\gamma}}$ na desigualdade de Young. Este resultado será usado com freqüência no desenvolvimento do trabalho.

Prova: Veja ([3], página 56).

A.6 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Seja X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto $E \subseteq (0, T)$. Uma função vetorial $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i}(t) \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, dois a dois disjuntos, $\mu(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$. Define-se a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k \mu(E_i) \varphi_i.$$

Diz-se que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é Bochner integrável (\mathcal{B} -integrável) se existir uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

- i) $\varphi_\nu \rightarrow u$ em X , q.s. em $(0, T)$;
- ii) $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0$.

A integral de Bochner de u é dada por $\int_0^T u(t) dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t) dt$, e independe da escolha da sequência φ_ν .

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é fracamente mensurável quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X . Diz-se que u é fortemente mensurável quando u for limite quase sempre de uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à Lebesgue.

Denota-se por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in$

$L^\infty(0, T)$. A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \operatorname{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0, T; X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, mostra-se que para cada $u \in [L^p(0, T; X)]'$, existe $\tilde{u} \in L^{p'}(0, T; X')$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle \tilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , o qual será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Def. A.4. *Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$ representa-se o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da *convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$ denota-se o *espaço das funções* $u : [0, T] \rightarrow X$ *fracamente contínuas*, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$ para $\forall v \in H$.

Lema A.5 (Lax-Milgram). *Seja H espaço de Hilbert e $a(u, v)$ forma bilinear contínua e coerciva sobre $H \times H$. Seja $f \in H'$. Então, existe único $u \in H$ tal que $a(u, v) = (f, v)$, $\forall v \in H$.*

Prova: Veja ([3], página 84).

Obs A.5. *Uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se existe $c > 0$ de modo que*

$$|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\| \forall u, v \in H$$

*sendo $a(\cdot, \cdot)$ forma bilinear, se diz que ela é **coerciva** se existe $\alpha > 0$ tal que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$, $\forall u \in H$.*

Lema A.6 (Gronwall - Forma Diferencial). *Seja $\eta(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$.*

i) Se η satisfaz

$$\eta'(t) \leq \psi(t) + \phi(t)\eta(t), \quad q.s. \text{ em } [0, T] \quad (\text{A.1})$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas e integráveis em $[0, T]$, então

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leq \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) e^{-\int_0^s \phi(r) dr} ds \right] e^{\int_0^t \phi(s) ds} \\ &\leq \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] e^{\int_0^t \phi(s) ds} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) Em particular, se $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t)$ em $[0, T]$ e $\eta(0) = 0$, então

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

Prova: Ver [17] .

Lema A.7 (Gronwall - Forma Integral). *Sejam u, ϕ, ψ funções reais não negativas em $[0, T]$ satisfazendo*

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \psi(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

para todo $t \in [0, T]$. Então para todo $t \in [0, T]$ tem-se

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t \psi(s)\phi(s)e^{\int_s^t \psi(\tau)d\tau} ds.$$

Em particular, se $\phi(t) \equiv 0$, então $u \equiv 0$.

Prova: Ver [17] .

A.7 Definições e notações utilizadas

Def. A.5 (Notação). *Dada uma discretização uniforme $\{0 = t_0, \dots, t_N = T\}$, escreve-se $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Dada uma função w com domínio em $[0, T]$, define-se por w^n o valor que w assume no ponto $t_n = n\Delta t$, isto é, $w^n = w(t_n)$. Assim, também se define:*

$$w^{n+\theta} = \theta w^{n+1} + (1 - 2\theta)w^n + \theta w^{n-1}.$$

onde $\theta \in [0, 1]$.

Def. A.6 (Norma discreta). *Seja a discretização uniforme de $[0, L]$ dada por $\{x_1 = 0, x_2, \dots, x_m = L\}$, com $h = x_{i+1} - x_i$. Dada função $w \in L^2(0, L)$, define-se a norma discreta em $L^2(0, L)$ por:*

$$\|w\|_{L^2(0,L)}^2 = h \sum_{i=1}^m |w(x_i)|^2$$

Def. A.7 (Norma discreta em Distribuições Vetoriais). *Seja a função $w \in L^\infty(0, T; H)$, onde H é um Espaço de Sobolev. Defina-se a norma discreta em $w \in L^\infty(0, T; H)$ por:*

$$\|w\|_{L^\infty(0, T; H)}^2 = \max\{\|w^n\|_H, n = 1, \dots, N\}.$$

Def. A.8 (Ordem de Convergência). *Considerando uma sucessão de soluções aproximadas $(u_{m_1}, u_{m_2}, \dots, u_{m_k})$, onde u_{m_i} será a solução aproximada relacionada a uma malha com espaçamento uniforme h_i , de maneira que $h_i < h_{i+1}, \forall i \in 1, \dots, k$. Assim sendo, será calculado o erro de aproximação $E_i(t)$ relacionado à malha com espaçamento h_i da seguinte forma*

$$E_i = \max_{t \in [0, 1]} \|u(t) - u_{m_i}(t)\|_{L^2(0, 1)}.$$

Portanto, afim de calcular a ordem de convergência do método, será utilizada a fórmula

$$p = \frac{\ln(E_i/E_{i+1})}{\ln(2)}. \quad (\text{A.3})$$

Lema A.8. $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ na norma do $H^1(\Omega)$.

Prova: Ver [3].