

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
INSTITUTO TERCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS  
COMPUTACIONAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

GABRIEL THOMAZ DE AQUINO PEREIRA

**MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA  
UTILIZANDO O MÉTODO DE  
APROXIMAÇÕES LINEARES  
INCREMENTAIS**

Rio de Janeiro  
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS  
COMPUTACIONAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

GABRIEL THOMAZ DE AQUINO PEREIRA

**MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA  
UTILIZANDO O MÉTODO DE  
APROXIMAÇÕES LINEARES  
INCREMENTAIS**

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientador: Marcello Goulart Teixeira

Co-orientador: I-Shih Liu

Rio de Janeiro  
2015

P436 Pereira, Gabriel Thomaz de Aquino

Modelagem Elastoplástica Utilizando o Método de Aproximações Lineares Incrementais / Gabriel Thomaz de Aquino Pereira. – 2015.

89 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2015.

Orientador: Marcello Goulart Teixeira.

Co-orientador: I-Shih Liu.

1. Aproximações lineares incrementais. 2. Plasticidade. 3. Von Mises. 4. Elementos finitos. – Teses. I. Teixeira, Marcello Goulart (Orient.). II. Liu, I-Shih (Co-orient.). III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. IV. Título

CDD

GABRIEL THOMAZ DE AQUINO PEREIRA

## Modelagem Elastoplástica Utilizando o Método de Aproximações Lineares Incrementais

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado em: Rio de Janeiro, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

---

Prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira (Orientador)

---

Prof. Ph.D. I-Shih Liu (Co-orientador)

---

Prof. Dr. Mauro Antonio Rincon

---

Prof. Dr. Daniel G. Alfaro Vigo

---

Prof. Dr. Fernando Pereira Duda

Rio de Janeiro  
2015

*Aos meus pais...*

## AGRADECIMENTOS

A realização desse trabalho não seria possível sem a colaboração de algumas pessoas que deram suas contribuições de diferentes maneiras mas igualmente importantes. À elas declaro um agradecimento especial,

À meus pais, por sempre terem sido exemplos para mim. Pelo apoio, confiança e incentivo para que eu sempre pudesse estudar.

À minha companheira Ci, que sempre acreditou em mim e nunca deixou que eu desanimasse, mesmo nos momentos mais desesperadores. Agradeço principalmente por ser tão compreensiva.

Ao meu orientador Marcello, pela confiança e apoio, mesmo estando fora do país estive presente em cada passo do trabalho. Ao meu outro orientador I-Shih Liu, pela grande oportunidade de trabalhar ao seu lado e por sua prontidão em me ajudar.

Ao professor Mauro Rincon, por ter me dado a primeira oportunidade na graduação, durante a iniciação científica. Foi essa chance que me fez querer fazer mestrado e me motiva a continuar estudando.

Aos amigos do LC3 que sempre me divertem, tornando o trabalho menos árduo. Em especial ao Mineiro que por vezes agiu como orientador informal através de nossas discussões. Espero que essa ajuda tenha sido recíproca.

Aos amigos Diego, Ju e Romulo, pela ajuda acadêmica (mesmo não estudando a mesma coisa) ou por simplesmente estarem sempre aptos a escutarem um desabafo. Enfim, obrigado pelo apoio.

À Deus, que mesmo depois de um período brigados fizemos as pazes antes dos períodos mais conturbados. Agradeço toda a força e por ter dado suporte para que eu não desistisse.

À CAPES pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Pereira, Gabriel Thomaz de Aquino. **Modelagem Elastoplástica Utilizando o Método de Aproximações Lineares Incrementais**. 2015. 88 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

O objetivo deste trabalho é fazer uma modelagem numérica de grandes deformações de materiais elastoplásticos. Em particular, serão considerados metais modelados pelo critério de von Mises. Para esta modelagem será considerado o método de aproximações lineares incrementais e a teoria de plasticidade de pequenas deformações. O método de elementos finitos será empregado para solução numérica de cada incremento de força.

**Palavras-chave:** Aproximações lineares incrementais, plasticidade, von Mises, elementos finitos.

## ABSTRACT

Pereira, Gabriel Thomaz de Aquino. **Modelagem Elastoplástica Utilizando o Método de Aproximações Lineares Incrementais**. 2015. 88 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

The goal of this work is to model large deformations in elastoplastic materials. More precisely, it will be considered metals with von Mises criterion. For this model will be applied the successive linear approximation method and the small plastic deformation theory. The finite element method will be used for numeric solution for each force increment.

**Keywords:** successive linear approximation, plasticity, von Mises, finite elements.

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Esquema de configuração de referência . . . . .	19
4.1	Transformação entre elemento finito $\Omega_e$ e o elemento biunitário $\Omega_B$	45
4.2	Funções de interpolação $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ e $\phi_4$ . . . . .	45
4.3	Cisalhamento Puro . . . . .	46
4.4	Configuração inicial e suas deformações subsequentes com as tensões de cisalhamento aplicadas. $\tau = 20\Delta\tau, \tau = 40\Delta\tau, \tau = 60\Delta\tau, \tau = 80\Delta\tau, \tau = 120\Delta\tau, \tau = 120\Delta\tau$ e $\tau = 140\Delta\tau$ . . . . .	48
4.5	Passo $\times$ Erro relativo em porcentagem, $Erro = \left  \frac{\lambda_1^{numérico} - \lambda_1^{exato}}{\lambda_1^{exato}} \right  \times 100$ . . . . .	49
5.1	Curva de tensão $\times$ deformação (a)metal macio e (b)alumínio . . .	52
5.2	Curvas de tensão $\times$ deformação em um material Mooney-Rivlin LIU (2011a) . . . . .	55
5.3	Superfície de escoamento . . . . .	57
5.4	Plasticidade perfeita . . . . .	60
5.5	Encruamento isotrópico . . . . .	60
5.6	Encruamento cinemático . . . . .	61
6.1	Esquema método ALI elastoplástico . . . . .	74
6.2	Malha de 120 elementos utilizada e condições de contorno. . . . .	76
6.3	Ordem da plastificação dos elementos se dá a partir da face interna em direção a face externa. . . . .	77
6.4	Deslocamento da face interna do cilindro com o aumento da pressão. 78	78
6.5	Distribuição da tensão principal $T_\theta = \frac{T_1+T_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_1-T_2}{4}\right)^2 + T_{12}^2}$ para alguns valores de pressão aplicada $P$ . . . . .	79
6.6	Malha e condições de contorno. . . . .	80
6.7	Comparação entre o resultado teórico e o método ALI adaptado para plasticidade. Deslocamento vertical $\times$ Deslocamento Radial	81
6.8	Comparação entre o resultado teórico e o método ALI adaptado para plasticidade. Deslocamento vertical $\times$ Raio . . . . .	82
6.9	Erro relativo em porcentagem em alguns incrementos de força. . .	82
6.10	Malha deformada no final do deslocamento imposto de 5mm. . . .	83

## LISTA DE TABELAS

4.1	Propriedades do material para o exemplo de cisalhamento puro. . .	49
4.2	Comparação entre os valores exatos e numéricos de $\lambda_1$ em vários passos de incremento. . . . .	50
4.3	Teste de incompressibilidade do material $\det F \approx 1$ . . . . .	50
5.1	Condições geradas pela mudança incremental na superfície de ten- são. . . . .	62
6.1	Propriedades do material para o exemplo de vaso de pressão ci- lindrico. . . . .	76
6.2	Propriedades do material para o exemplo de estrangulamento de uma barra. . . . .	80

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	15
2.1	CONCEITOS MATEMÁTICOS	15
2.2	CONCEITOS DE MECÂNICA	18
<b>3</b>	<b>MÉTODO ALI</b>	23
3.1	CONFIGURAÇÃO DE REFERÊNCIA ATUALIZADA	24
3.2	EQUAÇÃO CONSTITUTIVA LINEARIZADA	26
3.2.1	Corpos elásticos compressíveis e quase incompressíveis	29
3.2.2	Material de Mooney-Rivlin	31
3.3	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO LINEARIZADO	33
3.4	SOLUÇÃO NUMÉRICA DE GRANDES DEFORMAÇÕES	35
<b>4</b>	<b>RESOLUÇÃO NUMÉRICA</b>	37
4.1	FORMULAÇÕES FORTE E FRACA	37
4.2	FORMULAÇÃO DE GALERKIN	40
4.3	FORMULAÇÃO MATRICIAL	40
4.4	MATRIZ LOCAL E FORÇA LOCAL	43
4.5	SIMULAÇÃO DE CISALHAMENTO PURO	45
4.5.1	Solução exata	46
4.5.2	Solução numérica	47
<b>5</b>	<b>MODELO DE PLASTICIDADE PARA PEQUENAS DEFORMAÇÕES</b>	51
5.1	IDEIAS GERAIS	51
5.2	RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO NO REGIME ELÁSTICO	54
5.3	CRITÉRIO DE ESCOAMENTO	56
5.3.1	Crítério de von Mises	57
5.4	ENCRUAMENTO OU SUPERFÍCIES SUBSEQUENTES DE ESCOAMENTO	59
5.4.1	<i>Insight</i> físico sobre encruamento por deformação	62
5.5	RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO ELASTOPLÁSTICA	64
5.6	EQUAÇÕES DE PLASTICIDADE NA SUA FORMA MATRICIAL	66
5.6.1	Determinação da constante $A$	69
5.6.2	Determinação do vetor de fluxo $a$	70
5.6.3	Determinação do vetor $d_D$	71

<b>6</b>	<b>MÉTODO ALI ELASTOPLÁSTICO . . . . .</b>	<b>73</b>
6.1	MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA UTILIZANDO O ALI . . . . .	73
6.2	RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	75
6.2.1	Vaso de pressão cilíndrico . . . . .	75
6.2.2	Estrangulamento de uma barra circular . . . . .	77
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>84</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>86</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A mecânica computacional tem por objetivo estudar e compreender melhor fenômenos da mecânica através de simulações e análises numéricas. Grande parte do interesse dessa área é estudar fenômenos não lineares, que são divididos basicamente em dois tipos: não linearidade de material e não linearidade geométrica.

Uma não linearidade de material típica é o comportamento plástico de vários tipos de materiais. A não linearidade geométrica pode ser observada quando um sólido sofre grandes deformações, ou seja, a variação do formato do sólido não pode mais ser negligenciada.

A pesquisa em grandes deformações começou há alguns anos e tem crescido nos desde então. Os métodos computacionais mais tipicamente usados, e que são muito bem documentados, baseiam-se nas teorias de SIMO; TAYLOR (1991), SIMO; HUGHES (1998) e ZIENKIEWICZ; TAYLOR (2000). Estes métodos empregam o método de Newton para solucionar o sistema não linear proveniente da formulação variacional de um problema de valor de contorno não linear.

Em LIU; CIPOLATTI; RINCON (2010) foi proposto o método de Aproximações Lineares Incrementais (ALI) para resolução de problemas de grandes deformações em materiais elásticos e, posteriormente, em LIU et al. (2014), esse método foi adaptado para materiais viscoelásticos.

Apesar de aparentes semelhanças do método ALI com outros métodos incrementais, o ALI utiliza uma formulação que considera o estado atual do corpo como a configuração de referência, enquanto os outros são geralmente escritos em uma

formulação Lagrangiana.

No ALI também há a vantagem das prescrições das condições de contorno, pois em outros métodos incrementais, que consideram uma formulação Lagrangiana, as condições de tração à serem prescritas na configuração de referência inicial, geralmente dependem da superfície da geometria da configuração deformada. Já no ALI não há dificuldade alguma em relação as condições de contorno, pois em cada passo consecutivo um problema de pequenas deformações é resolvido.

Existem métodos de grandes deformações para materiais elastoplásticos, como em SIMO; HUGHES (1998), que reproduzem bem os fenômenos. Entretanto, para utilizar estes métodos toda uma teoria voltada para grandes deformações elastoplásticas é desenvolvida, e praticamente não há uso das equações já estabelecidas para pequenas deformações.

Visto que o ALI resolve grandes deformações através de incrementos de pequenas deformações, este trabalho é tem por objetivo unificar o método ALI com a teoria da plasticidade de pequenas deformações, e, assim, comprovar a robustez do método. Com esta unificação as vantagens para se simular grandes deformações de materiais elastoplásticos serão relevantes.

A dissertação foi dividida em 7 capítulos. No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos envolvendo matemática e mecânica para facilitar a compreensão da dissertação.

No Capítulo 3 o método de aproximações lineares incrementais (ALI) é apresentado em detalhes. Para que posteriormente seja possível mostrar uma formulação mais completa de um problema de valor de contorno, neste capítulo é considerado um material de Mooney-Rivlin quase incompressível.

No Capítulo 4 são apresentadas as formulações forte, fraca, de Galerkin e matricial para um problema que considera o material de Mooney-Rivlin quase incompressível. Tais formulações serão discutidas em forma de componentes. O primeiro resultado da dissertação é discutido através de um exemplo de cisalhamento puro.

No Capítulo 5 é apresentada uma breve introdução da teoria matemática da plasticidade para pequenas deformações.

No Capítulo 6 é apresentado como foi realizada a junção da teoria do ALI com a teoria de pequenas deformações de materiais elastoplásticos. Dois exemplos são considerados e discutidos. O primeiro se trata de um exemplo de pequenas deformações e o segundo um exemplo de grandes deformações.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos posteriores.

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo serão trabalhados alguns conceitos que ajudarão a melhor compreensão dos capítulos posteriores.

Na seção 2.1 serão apresentadas algumas definições e alguns teoremas, com as respectivas demonstrações referenciadas. Já na seção 2.2 alguns conceitos de mecânica serão abordados.

### 2.1 Conceitos Matemáticos

- **Notação de Einstein (convenção do somatório)**

Seja  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$ , então, dado um vetor  $\mathbf{u} \in V$ , esse pode ser representado como:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i$$

em que,  $u_i$  é uma componente do vetor  $\mathbf{u}$ .

A notação de Einstein, criada pelo físico em 1916, simplifica a escrita de somatórios. Tal notação diz que:

*Ao expressar um termo, se um índice é repetido uma, e somente uma, vez, um somatório sobre este índice é assumido.*

$$u_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i = \mathbf{u}$$

- **Tensores**

A teoria de tensores é bastante rica e complexa, e, por esse motivo, não daria para desenvolver todos os conceitos nesse trabalho. Alguns poucos conceitos básicos serão abordados para melhor compreensão do tema.

Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais munidos de produto interno e  $T$  uma transformação linear de  $U$  em  $V$ . O conjunto de todas as transformações lineares de  $U$  em  $V$  é denotado por,

$$\mathcal{T}(U, V) = \{T : U \rightarrow V \mid T \text{ é linear}\}.$$

Com a operação de soma e a operação de multiplicação por escalar definidas, tem-se que  $\mathcal{T}$  também é um espaço vetorial.

**Definição:** *Sejam  $\mathbf{u} \in U$  e  $\mathbf{v} \in V$ , o produto tensorial de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , denotado por  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ , é definido como uma transformação linear de  $U$  em  $V$  tal que*

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \tag{2.1}$$

em que  $(\cdot \cdot \cdot)$  é a operação de produto interno e  $\mathbf{w}$  é qualquer vetor em  $U$ .

Como dito, o produto tensorial de dois vetores é uma transformação linear, e tal transformação é chamada de *tensor*. É possível mostrar que toda transformação linear pode ser expressa como combinação linear de tensores. Assim, diz-se que  $\mathcal{T}(U, V)$  é o *espaço de produto tensorial* de  $U$  em  $V$  e denotado por  $\mathcal{T}(U, V) = V \otimes U$ .

O caso especial em que as transformações lineares pertencem a um espaço em que  $U = V$ , e assim,  $V \otimes V = \mathcal{T}(V, V) = \mathcal{T}(V)$ , tais transformações são chamadas de *tensores de segunda ordem*. Seja  $A \in \mathcal{T}(V)$  e  $\{\mathbf{e}_i\}$  uma base de  $V$ . Em termos

de componentes, o tensor  $A$  é dado por:

$$A = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

e o traço do tensor  $A$  é

$$\text{tr}(A) = A_{ii}$$

**Definição:** *Sejam  $A$  e  $B$  pertencentes à  $\mathcal{T}(V)$ , o produto interno de  $A$  por  $B$  é dado por:*

$$A \cdot B = \text{tr}(AB^T) \quad (2.2)$$

*que é uma operação bilinear, simétrica e definida-positiva.*

### • Teoremas Importantes

**Teorema (Teorema da Divergência):** *Seja  $\mathcal{R}$  uma região regular de  $\mathcal{E}$  (espaço euclidiano de pontos) com fronteira  $\partial\mathcal{R}$ . Seja  $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{h} : \mathcal{R} \rightarrow V$  e  $S : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{T}(V)$  campos suaves tais quais são, respectivamente, escalar, vetorial e tensorial. Então,*

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{R}} (\phi \mathbf{n}) da &= \int_{\mathcal{R}} (\nabla \phi) dv \\ \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) da &= \int_{\mathcal{R}} (\text{div} \mathbf{h}) dv \\ \int_{\partial\mathcal{R}} (S \mathbf{n}) da &= \int_{\mathcal{R}} (\text{div} S) dv \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à  $\partial\mathcal{R}$ .

**Demonstração:** As duas primeiras versões do teorema da divergência são mais conhecidas e suas demonstrações podem ser encontradas em referências clássicas de um curso de análise, como por exemplo, em RUDIN (1976). A demonstração da versão tensorial é encontrada em LIU (2002).

**Teorema** (*Teorema de Euler para funções homogêneas*): Seja  $g(\mathbf{x})$  uma função homogênea e de grau  $k$  então:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = kg$$

**Demonstração:** ver HILL (1950)

## 2.2 Conceitos de Mecânica

- **Configuração e Deformação**

Considere  $\mathcal{W}$  o espaço-tempo Newtoniano da mecânica clássica. Assim, é possível realizar o mapeamento 1 – 1  $\Phi$

$$\Phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathbb{R}$$

em que  $\mathcal{E}$  é o espaço euclidiano de três dimensões e  $\mathbb{R}$  é o espaço de uma dimensão dos números reais. Este mapeamento é chamado de *frame*<sup>1</sup> de referência. Outra maneira de se denominar o *frame* de referência é por *observador*. Um fato importante é que observadores diferentes medem eventos em  $\mathcal{W}$  de maneiras diferentes.

Matematicamente é interessante representar a presença de um corpo  $\mathcal{B}$  no espaço. Para tal, é necessário identificar esse corpo com uma região de  $\mathcal{E}$  relativo a uma *frame* de referência. O mapeamento 1 – 1 de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{E}$  é chamado de *configuração* de  $\mathcal{B}$ , e é conveniente escolher uma configuração do corpo como referência,

$$\kappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \kappa(X) = \mathbf{X}$$

em que  $\kappa$  é a *configuração de referência*. O corpo  $\mathcal{B}$  na configuração  $\kappa$  é denotado por  $\mathcal{B}_\kappa$ . Agora, considere  $\chi$  uma configuração qualquer de  $\mathcal{B}$ . A *deformação* de  $\mathcal{B}$

---

<sup>1</sup>Esta palavra será mantida em inglês por não haver uma tradução adequada.

de  $\kappa$  para  $\chi$  é representada na figura 2.1 e é definida por,

$$\chi_\kappa = \chi \circ \kappa^{-1} : \mathcal{B}_\kappa \rightarrow \mathcal{B}_\chi, \quad \mathbf{x} = \chi_\kappa(\mathbf{X}) = \chi(\kappa^{-1}(\mathbf{X})).$$

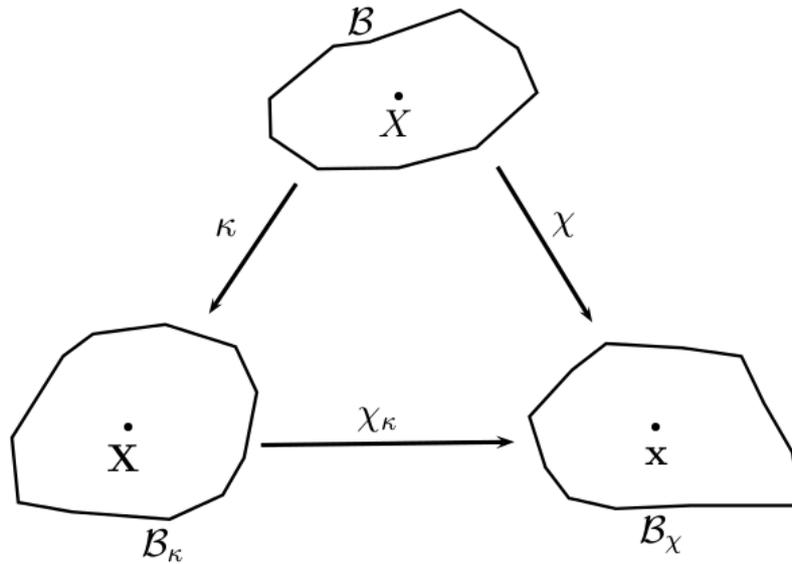


Figura 2.1: Esquema de configuração de referência

Também é interessante definir o *gradiente de deformação* de  $\chi$  relativo a  $\kappa$ ,

$$F_\kappa = \nabla_{\mathbf{X}}(\chi_\kappa)$$

e como o mapeamento  $\chi_\kappa$  é 1-1  $F_\kappa$  é não singular, ou seja,

$$\det F \neq 0.$$

- **Movimento**

O *movimento* de um corpo é definido como uma sequência contínua de configurações no tempo, ou ainda, como uma sequência de deformações no tempo, a partir de uma configuração de referência.

O corpo material possui algumas propriedades físicas que podem sofrer alterações de valores devido a deformações no corpo em movimento. Essas quantidades físicas são geralmente descritas de duas maneiras: ou pela *descrição material* ou pela *descrição espacial*.

A primeira também é chamada de *descrição Lagrangeana*, e descreve a evolução dos seus valores ao longo de um caminho de um ponto material. Já a segunda, conhecida também como *descrição Euleriana*, é descrita através das mudanças dos valores em uma localização fixa na configuração atual do corpo.

- **Princípio da Objetividade Material ou Princípio de Indiferença à *Frame* Material**

O comportamento de um corpo é caracterizado fisicamente pela descrição dos campos de *densidade*,  $\rho(X, t)$ , *movimento*,  $\chi(X, t)$ , e *temperatura*,  $\theta(X, t)$ , onde  $t$  é o tempo.

O tensor de tensão, o fluxo de calor e a energia interna de um material, não dependem somente do comportamento do material, mas também do tipo de material que o corpo é constituído. Essas quantidades são chamadas de *quantidades constitutivas*.

**Definição:** Seja  $\psi(\cdot)$  uma função do tempo, a história de  $\psi$  até o tempo  $t$  é definida como

$$\psi^t(s) = \psi(t - s)$$

em que  $s \in [0, \infty)$  é a coordenada de um tempo passado, relativa ao tempo presente  $t$ .

**Princípio do determinismo:** *Seja  $\mathcal{C}$  uma quantidade constitutiva, então a relação constitutiva para  $\mathcal{C}$  é dada por um funcional na forma:*

$$\mathcal{C}(X, t) = \underset{\substack{Y \in \mathcal{B} \\ 0 \leq s \leq \infty}}{\mathcal{F}} (\rho^t(Y, s), \chi^t(Y, s), \theta^t(Y, s), X, t)$$

onde  $\mathcal{F}$  é chamada de função constitutiva. Tal funcional permite a descrição de efeitos arbitrários não locais de qualquer corpo.

Seja  $\Phi$  um *frame* de referência e  $\mathcal{C}(X, t; \Phi)$  uma quantidade constitutiva no *frame*  $\Phi$ . Assim, é possível reescrever a relação constitutiva anterior como

$$\mathcal{C}(X, t; \Phi) = \underset{\substack{Y \in \mathcal{B} \\ 0 \leq s \leq \infty}}{\mathcal{F}_\Phi} (\rho^t(Y, s), \chi^t(Y, s), \theta^t(Y, s), X, t)$$

ou seja, uma função constitutiva depende, de maneira geral, da escolha do *frame*.

**Princípio da Indiferença Material de *Frame*:** *As funções constitutivas de uma quantidade constitutiva, que são indiferentes à *frame*, com respeito a transformações Euclidianas (ver LIU (2002)), tem que ser indiferentes à *frame*, ou seja,*

$$\mathcal{F}_\Phi(\cdot) = \mathcal{F}_{\Phi^*}(\cdot)$$

onde  $\Phi$  e  $\Phi^*$  são *frames* de referência distintos.

- **Estados Planos**

Seja  $T$  o tensor de tensão de Cauchy e  $T_{xx} = T_x$ ,  $T_{yy} = T_y$ ,  $T_{zz} = T_z$ , as tensões nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Considere também o tensor deformação  $\epsilon$  e  $\epsilon_{xx} = \epsilon_x$ ,  $\epsilon_{yy} = \epsilon_y$ ,  $\epsilon_{zz} = \epsilon_z$ , as deformações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**Estado Plano de Tensão:** *é definido como sendo o estado de tensão em que a tensão normal na direção  $z$ ,  $T_z$ , e as tensões de cisalhamento,  $T_{xz}$  e  $T_{yz}$ , dirigidas perpendicularmente ao plano  $xy$ , são assumidas nulas.*

A geometria de um corpo que é analisado em um estado plano de tensão é essencialmente como a de uma placa fina, com uma dimensão muito menor do que as outras duas. Os carregamentos de força são aplicados uniformemente sobre a espessura da placa, e agem no plano da placa.

**Estado Plano de Deformação:** *é definido como sendo o estado de deformação em que a deformação normal na direção  $z$ ,  $\epsilon_z$ , e as deformações de cisalhamento,  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{yz}$ , são assumidas nulas.*

A geometria de um corpo em estado plano de deformação é essencialmente a de um cilindro prismático, com uma direção muito maior em comparação as outras duas. Os carregamentos de força, nesse estado, são distribuídos uniformemente com respeito a dimensão de maior tamanho, e agem perpendicularmente a ela.

### 3 MÉTODO ALI

O método de *Aproximações Lineares Incrementais* (ALI) será apresentado nesta seção. Tal método foi proposto nas referências LIU; CIPOLATTI; RINCON (2010) e LIU (2011b). Em CIPOLATTI; LIU; RINCON (2012) é feita uma análise da existência e unicidade da solução para materiais de Mooney-Rivlin; já em LIU et al. (2014), o método é apresentado para materiais viscoelásticos. O propósito desta seção é descrever o ALI para o caso em que um corpo é constituído de material elástico de Mooney-Rivlin compressível ou quase incompressível.

Em geral, os Problemas de Valor de Contorno (PVC) são formulados nas coordenadas de referência ou em coordenadas espaciais. A primeira é dita formulação Lagrangeana, e a segunda, formulação Euleriana. Alternativamente, o método ALI utiliza uma formulação que foi chamada de *formulação relativa-descritiva*. Nessa formulação os problemas de valor de contorno são formulados em coordenadas relativas à configuração do tempo atual  $t$ , ao invés, de usar uma configuração de referência fixa como no caso Lagrangeana. Note que também não é Euleriana já que nesta as coordenadas são fixas no espaço.

Neste método, as equações constitutivas são calculadas a cada estado, sendo a configuração de referência atualizada em cada passo de tempo. O novo estado de referência é a configuração atual do corpo. Supondo que em cada passo de tempo ocorram pequenas deformações, as equações constitutivas são linearizadas.

Assim, o método ALI resolve um problema não linear através de incrementos lineares em cada passo de tempo, ou seja, uma grande deformação pode ser calculada através de incrementos de pequenas deformações.

### 3.1 Configuração de Referência Atualizada

Seja  $\mathcal{B}$  um corpo elástico, sendo  $\kappa_0$  a configuração tomada como de referência preferida, tal configuração é a única onde o corpo é isotrópico. Considere

$$x = \chi(X, t), \quad X \in \kappa_0(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_0$$

a *deformação* do corpo  $\mathcal{B}_0$  no tempo  $t$ . O *tensor de tensão de Cauchy* é dado pela equação constitutiva,

$$T(X, t) = \mathcal{F}_{\kappa_0}(F) \quad (3.1)$$

sendo  $F(X, t)$  o *gradiente de deformação* e  $\mathcal{F}_{\kappa_0}(F)$  a função constitutiva do material elástico, que em geral, considerando o caso de grandes deformações, é uma função não linear de  $F$ .

Nesse texto o tempo  $t$  sempre será usado como tempo atual. Seja  $\kappa_t$  a configuração deformada no tempo  $t$ ,  $\mathcal{B}_t = \kappa_t(\mathcal{B})$ . Assim, é possível definir o *gradiente de deformação* com respeito a configuração  $\kappa_0$ , como sendo

$$F(X, t) = \nabla_x(\chi(X, t))$$

Considere o tempo  $\tau > t$  e  $\kappa_\tau$  a configuração deformada nesse tempo,  $\mathcal{B}_\tau = \kappa_\tau(\mathcal{B})$ . No tempo  $\tau$  a deformação em relação a  $\kappa_0$  é dada por  $\xi = \chi(X, \tau)$ . É possível, então, definir na configuração atual a *deformação relativa* de  $\kappa_t$  para  $\kappa_\tau$  com a função  $\chi_t : \mathcal{B}_t \rightarrow \mathcal{B}_\tau$

$$\chi_t(x, \tau) := \chi(X, \tau), \quad x = \chi(X, t) \in \mathcal{B}_t \quad (3.2)$$

e o *deslocamento relativo* correspondente

$$u_t(x, \tau) := \xi - x = \chi_t(x, \tau) - x \quad x \in \mathcal{B}_t \quad (3.3)$$

Tomando o gradiente relativo a  $x$  em ambos os lados de (3.3) temos:

$$\begin{aligned}\nabla_x u_t(x, \tau) &= \nabla_x(\chi_t(x, \tau) - x(X, t)) \\ H_t(x, \tau) &= F_t(x, \tau) - I\end{aligned}\tag{3.4}$$

em que  $H_t$  e  $F_t$  são denominados, respectivamente, *gradiente de deslocamento relativo*, *gradiente de deformação relativo*, e  $I$  é o *tensor identidade*.

Agora, calculando o gradiente de (3.3) relativo a  $X$  temos,

$$\begin{aligned}\nabla_x u_t(x, \tau) &= \nabla_x \chi_t(x, \tau) - \nabla_x x(X, t) \\ \nabla_x u_t(x, \tau) \nabla_x x(X, t) &= \nabla_x \chi(X, \tau) - F(X, t) \\ H_t(x, \tau) F(X, t) &= F(X, \tau) - F(X, t) \\ F(X, \tau) &= (I + H_t(x, \tau)) F(X, t)\end{aligned}\tag{3.5}$$

O esquema abaixo ilustra a relação entre as configurações consideradas,

$$\begin{array}{ccc} & X \in \mathcal{B}_0 & \\ & \swarrow F(t) & \searrow F(\tau) = (I+H)F(t) \\ x \in \mathcal{B}_t & \xrightarrow[\xi = x + \mathbf{u}(\xi, t)]{F_t(\tau) = I+H} & \xi \in \mathcal{B}_\tau \end{array}$$

Em uma descrição Lagrangeana, uma função  $f(X, t)$  definida sobre o movimento de um corpo é definida no domínio  $\mathcal{B}_0 \times \mathbb{R}$ , em uma configuração de referência fixa. Já numa descrição Euleriana,  $\tilde{f}(x, t)$ , é definida na posição  $x$  ocupada pelo corpo e seu domínio é dado por  $\mathcal{B}_t \times \{t\}$ .

Contudo, a partir do que fora feito até agora, é possível definir uma função  $f_t(x, \tau)$  sobre o domínio  $\mathcal{B}_t \times \mathbb{R}$ , no tempo  $\tau$  relativo à configuração atual, como se esta função fosse vista no instante  $\tau$  a partir de um observador ligado ao corpo em

seu movimento no instante atual  $t$ . Essa característica que define o que chamamos anteriormente de formulação relativa-descritiva.

A vantagem de usar uma formulação relativa-descritiva é que nesta é possível linearizar as equações constitutivas relativo ao estado atual. E repetindo esse processo sucessivamente, como em um método de Euler, é possível aproximar funções constitutivas não lineares para grandes deformações.

### 3.2 Equação Constitutiva Linearizada

De acordo com a literatura da área (por exemplo LIU (2002)), sabe-se que o modelo constitutivo linear dado pela *Lei de Hooke* não satisfaz o *principle of material frame-indifference* (princípio de indiferença à *frame* material), e portanto, só pode ser considerado como uma aproximação de algum modelo não linear de pequenas deformações. No caso de grandes deformações, consideramos o funcional  $\mathcal{F}_{\kappa_0}(F)$  não linear em relação ao gradiente de deformação  $F$ .

Seja  $\tau = t + \Delta t$ . É assumido que  $\Delta t$  é pequeno o suficiente para que o gradiente de deslocamento seja pequeno ( $H \ll 1$ ), ou seja,  $H(\tau) = H_t(x, \tau)$ . Daí, juntamente com (3.4) e (3.5), conclui-se que  $F(\tau) - F(t) = H(\tau)F(t)$  e  $F_t(\tau) = I + H(\tau)$ .

Agora, utiliza-se *séries de Taylor* para linearizar (3.1) relativamente à configuração atual  $\kappa_t$

$$T(\tau) = T(t) + \nabla_F \mathcal{F}_{\kappa_0}(F(t))[F(\tau) - F(t)] = T(t) + \nabla_F \mathcal{F}_{\kappa_0}(F(t))[H(\tau)F(t)]$$

Assim, a equação anterior é escrita na seguinte forma:

$$T(\tau) = T(t) + L(F(t))[H(\tau)] \quad (3.6)$$

sendo

$$L(F(t))[H(\tau)] = \nabla_F \mathcal{F}_{\kappa_0}(F(t))[H(\tau)F(t)] \quad (3.7)$$

o tensor de elasticidade de 4ª ordem, relativo à configuração  $\kappa_t$ .

Dado que o tensor de tensão de Cauchy é conhecido, pode-se determinar o *tensor de tensão de Piola-Kirchhoff*,  $T_{\kappa_t}$ , através da relação  $T_{\kappa_t}(\tau) = |J|T(\tau)F_t(\tau)^{-T}$ , onde  $J = \det(F_t)$ . Assim,

$$T_{\kappa_t}(\tau) = \det(I + H)(T(t) + L(F)[H])(I + H)^{-T}$$

Antes de simplificar a equação anterior, observe que:

- $\det(I + H)$  - Caso  $\mathbb{R}^3$ , que é análogo para  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \det(I + H) &= \det \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & 1 + h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & 1 + h_9 \end{pmatrix} \\ &= 1 + h_1 + h_5 + h_9 + o(2) \\ &= I + (H) + o(2) \end{aligned}$$

- $(I + H)^{-T}$

$$\begin{aligned}
(I + H)^{-T} &= ((I + H)^T)^{-1} = (I + H^T)^{-1} \\
&= (I + H^T)^{-1} + H^T(I + H^T)^{-1} - H^T(I + H^T)^{-1} \\
&= (I + H^T)(I + H^T)^{-1} - H^T(I + H^T)^{-1} \\
&= I - H^T(I + H^T)^{-1} \\
&= I - H^T(I - H^T(I + H^T)^{-1}) \\
&= I - H^T + (H^T)^2(I + H^T)^{-1} \\
&= I - H^T + o(2)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim, o tensor de Piola-Kirchhoff linearizado é dado por:

$$\begin{aligned}
T_{\kappa_t}(\tau) &= (I + \text{tr}(H))(T(t) + L(F)[H])(I - H^T) + o(2) \\
&= T(t) + (\text{tr}H)T(t) - T(t)H^T + L(F)[H] + o(2) \\
&= T(t) + \mathcal{L}(F, T)[H]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde  $o(2)$  representa termos do gradiente de deslocamento  $H$  de ordem mais alta e  $\mathcal{L}(F, T)[H]$  é o tensor de elasticidade de 4ª ordem para o tensor de Piola-Kirchhoff.

$$\mathcal{L}(F, T)[H] = (\text{tr}H)T(t) - T(t)H^T + L(F)[H] \tag{3.10}$$

Para se determinar o funcional  $\mathcal{F}_{\kappa_0}$  é necessário saber qual tipo de material elástico o corpo é constituído. Neste trabalho, se tratando de materiais elásticos, será considerado o material do tipo Mooney-Rivlin compressível e quase incompressível. As próximas duas subsecções abordarão esses casos.

### 3.2.1 Corpos elásticos compressíveis e quase incompressíveis

Como está sendo considerado um corpo elástico, pode-se reescrever (3.1) considerando a pressão:

$$T(X, t) = \mathcal{F}_{\kappa_0}(F(X, t)) = -pI + \tilde{\mathcal{F}}(F(X, t)) \quad (3.11)$$

em que  $p$  é uma pressão. Os corpos compressíveis são caracterizados pelo fato desta pressão poder depender do gradiente de deformação,  $p = p(F)$ . Já nos corpos quase incompressíveis a pressão depende tanto de  $F$  quanto das condições de contorno. Como essa pressão não pode ser determinada somente através da deformação, ela é chamada de *pressão indeterminada*, que é uma variável independente.

Considerando corpos compressíveis, assumi-se que a pressão irá depender de  $F$  através de seu determinante, ou, equivalentemente, a equação de balanço de massa (ver LIU (2002)) depende somente da densidade de massa, assim:

$$p = p(\rho) = \hat{p}(\det F) \quad \rho = \frac{\rho_0}{\det F} \quad (3.12)$$

em que  $\rho_0$  é a densidade de massa na configuração de referência preferida  $\kappa_0$ . Novamente, considerando  $\tau = t + \Delta t$  e  $\rho_0 = \rho(t)\det(F(t))$ , temos:

$$\begin{aligned} \rho(\tau) - \rho(t) &= \frac{\rho_0}{\det(F(\tau))} - \frac{\rho_0}{\det(F(t))} \\ &= \rho(t)\det(F(t))\left(\frac{1}{\det(F(\tau))} - \frac{1}{\det(F(t))}\right) \\ &= \rho(t)(\det(F(t)F(\tau)^{-1}) - 1) \\ &= \rho(t)(\det(I + H(\tau))^{-1} - 1) \\ &= \rho(t)(\det(I - H(\tau)) - 1) \\ &= \rho(t)(1 - \text{tr}(H(\tau)) - 1) + o(2) \\ &= -\rho(t)\text{tr}(H(\tau)) + o(2). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Em (3.13)<sub>3</sub> foi usado o seguinte argumento:

$$\begin{aligned}
F(\tau) - F(t) &= H(\tau)F(t) \\
I - F(t)F(\tau)^{-1} &= H(\tau)F(t)F(\tau)^{-1} \\
F(t)F(\tau)^{-1}(I + H(\tau)) &= I \\
F(t)F(\tau)^{-1} &= (I + H(\tau))^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, pela equação de balanço de massa e por (3.13) tem-se que:

$$p(\tau) - p(t) = \left( \frac{dp}{d\rho} \right) (\rho(\tau) - \rho(t)) + o(2) = - \left( \rho \frac{dp}{d\rho} \right) \text{tr}(H(\tau)) + o(2),$$

ou ainda,

$$p(\tau) = p(t) - \beta(t)\text{tr}(H(\tau)) + o(2)$$

em que  $\beta(t) = \rho \frac{dp}{d\rho}$  é um parâmetro do material que depende da densidade de massa  $\rho$ .

Com a linearização que está sendo considerada e pelo fato de  $F(\tau) = (I + H)F(t)$ , pode-se tomar o gradiente em (3.11) e assim,

$$T(\tau) - T(t) = -(p(\tau) - p(t))I + \nabla_F \tilde{\mathcal{F}}(F(t))[H(\tau)F(t)] = -(p(\tau) - p(t))I + L(F(t))[H]$$

em que  $L(F(t))[H] = \nabla_F \tilde{\mathcal{F}}(F(t))[H(\tau)F(t)]$ . Como  $p(\tau) - p(t) = -\beta(t)\text{tr}(H(\tau))$ , a equação anterior é escrita como:

$$T(\tau) = T(t) + \beta(t)\text{tr}(H(\tau))I + L(F(t))[H]. \tag{3.15}$$

Os mesmos argumentos podem ser usados para o cálculo do tensor de Piola-Kirchhoff:

$$T_{\kappa_t}(\tau) = T(t) + \beta(t)\text{tr}(H(\tau))I + \mathcal{L}(F, T)[H]. \tag{3.16}$$

Considerando um corpo quase incompressível é necessário saber que tal corpo é quase insensível à mudança de pressão. Portanto, como  $\rho = \rho(p)$ , sua derivada em relação à pressão é quase zero, ou seja, assume-se que  $\beta$  é uma constante muito maior que 1

$$\beta \gg 1$$

É importante ressaltar que para corpos compressíveis ou quase incompressíveis, não há um termo relativo à pressão explícito no tensor elástico. Tal tensor depende somente de parâmetros do material e do gradiente de deformação.

### 3.2.2 Material de Mooney-Rivlin

Agora, é necessário definir de uma maneira mais adequada o termo  $L(F(t))[H(\tau)] = \nabla_F \tilde{\mathcal{F}}(F(t))[H(\tau)F(t)]$ . Para isso, é considerado um material de Mooney-Rivlin. Tal material é caracterizado por possuir o termo  $\tilde{\mathcal{F}}(F)$  como:

$$\tilde{\mathcal{F}}(F) = s_1 B(\tau) + s_2 B(\tau)^{-1} \quad (3.17)$$

em que,  $s_1$  e  $s_2$  são parâmetros constantes do material e  $B = FF^T$  o tensor de Cauchy-Green esquerdo.

- Cálculo de  $B(\tau)$ :

$$\begin{aligned} B(\tau) &= F(\tau)F(\tau)^T \\ &= (I + H(\tau))F(t)F(t)^T(I + H(\tau)^T) \\ &= F(t)F(t)^T + H(\tau)F(t)F(t)^T + F(t)F(t)^T H(\tau)^T + H(\tau)F(t)F(t)^T H(\tau)^T \\ &= B(t) + H(\tau)B(t) + B(t)H(\tau)^T + o(2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

- Cálculo de  $B(\tau)^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
B(\tau)^{-1} &= (F(\tau)F(\tau)^T)^{-1} \\
&= ((I + H(\tau))F(t)F(t)^T(I + H(\tau)^T))^{-1} \\
&= (I + H(\tau)^T)^{-1}B(t)^{-1}(I + H(\tau))^{-1} \\
&= (I - H(\tau)^T)B(t)^{-1}(I - H(\tau)) \\
&= B(t)^{-1} - H(\tau)^T B(t)^{-1} - B(t)^{-1}H(\tau) + H(\tau)B(t)^{-1}H(\tau) \\
&= B(t)^{-1} - H(\tau)^T B(t)^{-1} - B(t)^{-1}H(\tau) + o(2) \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Para um corpo compressível ou quase incompressível de Mooney-Rivlin, a equação constitutiva referente a  $\kappa_0$  é dada por:

$$T(t) = \mathcal{F}_{\kappa_0}(F) = -pI + \tilde{\mathcal{F}}(F) \tag{3.20}$$

Novamente usando a linearização e os dois itens calculados anteriormente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
T(\tau) - T(t) &= -(p(\tau) - p(t))I + s_1(B(\tau) - B(t)) + s_2(B(\tau)^{-1} - B(t)^{-1}) \\
&= -\beta \text{tr}(H(\tau))I + s_1(H(\tau)B(t) + B(t)H(\tau)^T) - s_2(H(\tau)^T B(t)^{-1} \\
&\quad + B(t)^{-1}H(\tau))
\end{aligned}$$

ou seja, o tensor de tensão de Cauchy é dado por:

$$T(\tau) = T(t) + L(F(t))[H] \tag{3.21}$$

sendo o tensor de elasticidade de quarta ordem

$$L(F(t))[H] = -\beta \text{tr}(H)I + s_1(HB + BH^T) - s_2(H^T B^{-1} + B^{-1}H) \tag{3.22}$$

O mesmo pode ser feito para o tensor de Piola-Kirchhoff e seu tensor de elasticidade. Ambos podem ser expressos, respectivamente, por:

$$T_{\kappa_t}(\tau) = T(t) + \mathcal{L}(F, T)[H] \tag{3.23}$$

$$\mathcal{L}(F, T)[H] = \text{tr}(H)T - TH^T - \beta \text{tr}(H)I + s_1(HB + BH^T) - s_2(H^T B^{-1} + B^{-1}H) \quad (3.24)$$

As constantes  $s_1$  e  $s_2$  satisfazem

$$s_1 > 0 \quad \text{e} \quad s_2 < s_1$$

Normalmente é assumido que  $s_2 \leq 0 < s_1$  (são conhecidas como desigualdades-E, ver LIU (2002)) baseado no fato de que a função de energia livre é positiva definida para qualquer deformação. Porém, em LIU (2011a) é provado que somente é necessário que  $s_2 < s_1$ .

### 3.3 Problema de Valor de Contorno Linearizado

Considere a configuração  $\kappa_t$ , agora denotada por  $\kappa$ . Seja  $\Omega = \kappa(\mathcal{B}) \in \mathbb{R}^3$  a região ocupada pelo corpo na configuração  $\kappa$  no tempo presente  $t$  e  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  a fronteira do corpo com  $\Gamma_1$  é a fronteira de tração e  $\Gamma_2$  a fronteira de deslocamento prescrito.

A equação de movimento de um corpo é uma equação diferencial parcial não linear dada por:

$$\rho_\kappa \ddot{\mathbf{x}} - \text{div} T_\kappa = \rho_\kappa \mathbf{b} \quad (3.25)$$

em que  $T_\kappa$  é o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff,  $\rho_\kappa$  a densidade de massa,  $\mathbf{b}$  a densidade de força do corpo e  $\ddot{\mathbf{x}}$  a aceleração.

Considerando um problema de valor de contorno de um corpo em equilíbrio

e sem forças externas,  $\ddot{\mathbf{x}} = 0$ ,  $\mathbf{b} = 0$ , respectivamente, encontra-se o seguinte PVC:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}T_\kappa(x, \tau) & = 0 & \text{em } \Omega \\ T_\kappa(x, \tau)\mathbf{n}_\kappa & = \mathbf{f} & \text{em } \Gamma_1 \\ \mathbf{u}(x, \tau) & = \mathbf{g} & \text{em } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

em que  $\mathbf{n}_\kappa$  é o vetor exterior normal à  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{f}$  o vetor de tração prescrita na fronteira,  $\mathbf{g}$  o vetor deslocamento também prescrito na fronteira e  $\mathbf{u}$  o vetor deslocamento relativo de  $\kappa$  para  $\kappa_\tau$ , com  $\tau = t + \Delta t$ . O vetor de deslocamento e o gradiente de deslocamento são definidos, respectivamente, por:

$$\mathbf{u}(\tau) = u_t(x, t + \Delta t) = \chi(X, \tau) - \chi(X, t) \quad (3.27)$$

$$H(\tau) = \nabla_x \mathbf{u}(\tau). \quad (3.28)$$

Usando o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff (3.23) na primeira equação do PVC (3.26), consegue-se elaborar o problema na formulação relativa-descritiva.

$$-\operatorname{div}(\mathcal{L}(F, T)[\nabla_x \mathbf{u}(\tau)]) = \operatorname{div}(T(t)) \quad (3.29)$$

em que  $T(t)$  é o tensor de tensão de Cauchy. Nesse problema, o estado em  $t$  é suposto ser conhecido, ou seja,  $F(t)$  e  $T(t)$  são conhecidos. Portanto, a equação (3.29) é uma equação diferencial parcial linear no tempo  $\tau$  e o sistema (3.26) utilizando tal equação é um PVC linearizado para determinar o vetor de deslocamento  $\mathbf{u}(x, \tau)$ , como o descrito abaixo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathcal{L}(F, T)[\nabla_x \mathbf{u}(x, \tau)]) & = \operatorname{div}(T(t)) & \text{em } \Omega \\ (\mathcal{L}(F, T)[\nabla_x \mathbf{u}(x, \tau)])\mathbf{n}_\kappa & = \mathbf{f} - T(t)\mathbf{n}_\kappa & \text{em } \Gamma_1 \\ \mathbf{u}(x, \tau) & = \mathbf{g} & \text{em } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.30)$$

A linearização que foi feita não depende do carregamento incremental como em outros métodos incrementais(ver ODEN (1972), OGDEN (1984), CIARLET (1988)). Assim, (3.26) é idêntico a um PVC em elasticidade linear de pequenas deformações. Para solução numérica, através do método de elementos finitos, a formulação variacional deste problema será feita posteriormente no Capítulo 4.

### 3.4 Solução Numérica de Grandes Deformações

É possível resolver numericamente problemas de grandes deformações, utilizando a mesma estratégia de implementação de um problema de Euler para equações diferenciais, solucionando um PVC como (3.30). Seja o eixo discreto,

$$\cdots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < \cdots$$

com  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , considerando  $\Delta t$  pequeno o suficiente. Esse eixo não representa o tempo físico mas sim incrementos de forças aplicadas. Considere também  $\kappa_{t_n}$  a configuração do corpo no instante  $t_n$  e

$$x_n = \chi(X, t_n) \in \mathcal{B}_{t_n} \quad \text{com} \quad X \in \mathcal{B}_{t_0}.$$

Seja o gradiente de deformação  $F(x_n, t_n)$  e o tensor de tensão de Cauchy  $T(x_n, t_n)$  relativos à configuração de referência preferida  $\kappa_0$  no tempo atual  $t_n$  dados. O PVC (3.30), com condição de tração  $f(x, t_{n+1})$  e condição de deslocamento  $g(x, t_{n+1})$  na formulação relativa-descritiva com respeito à configuração atual  $\kappa_{t_n}$  pode, agora, ser resolvido como um problema de elasticidade linear para o campo de deslocamento relativo  $\mathbf{u}(x_n, t_{n+1})$  a partir do estado atual  $t_n$ .

Após esse PVC ser resolvido para o tempo  $t_n$ , a configuração  $\kappa_{t_{n+1}}$  pode ser considerada como a configuração atual, relativa ao tempo atualizado  $t_{n+1}$ , a partir do campo de deslocamento, ou seja,

$$x_{n+1} = \chi(X, t_{n+1}) = x_n + \mathbf{u}(x_n, t_n + 1)$$

enquanto o gradiente de deformação e o tensor de Cauchy, respectivamente,

$$F(x_{n+1}, t_{n+1}) = (I + H(x_n, t_{n+1}))F(x_n, t_n)$$

$$T(x_{n+1}, t_{n+1}) = T(x_n, t_n) + L(F(x_n, t_n))[H(x_n, t_{n+1})],$$

podem ser calculados no instante  $t_{n+1}$  para que a formulação relativa-descritiva do PVC (3.30), com condição de tração  $f(x_{n+1}, t_{n+2})$  e condição de deslocamento prescrito  $g(x_{n+1}, t_{n+2})$ , possa prosseguir a partir da configuração atualizada atual  $t_{n+1}$ . Esse procedimento foi nomeado como *Aproximações Lineares Incrementais*(ALI).

## 4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA

Conforme abordado no Capítulo 3, verifica-se que utilizando a equação (3.23), o problema (3.26) muda de um problema não linear para um problema linear. Neste capítulo serão abordadas as formulações forte, fraca, de Galerkin e matricial desse problema linearizado para realização do método de elementos finitos.

Problemas vetoriais são clássicos em elementos finitos, mas, em geral, os livros abordam-os de maneira vetorial e matricial, como em COOK; MALKUS; PLESHA (1989) e HUGHES (2000). Em RINCON; LIU (2011) o problema vetorial é abordado em sua forma tensorial em componentes. Esse último tipo de formulação será adotado.

### 4.1 Formulações Forte e Fraca

Considerando o problema (3.26), temos o seguinte problema de valor de contorno em sua *formulação forte*: encontrar o campo de deslocamento  $\mathbf{u}(x, \tau)$ , tal que:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T_\kappa) &= 0 & \text{em } \Omega \\ T_\kappa \mathbf{n}_\kappa &= \mathbf{f} & \text{em } \Gamma_1 \\ \mathbf{u}(x, \tau) &= \mathbf{g} & \text{em } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $T_\kappa$  é o tensor de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{f}$  é a tração prescrita e  $\mathbf{g}$  é o deslocamento prescrito e  $\mathbf{n}_\kappa$  é o vetor exterior normal a fronteira  $\partial\Omega$ .

A fronteira  $\partial\Omega$  admite a seguinte decomposição:

$$\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega = \Gamma$$

e,

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

Como  $\Gamma_1$  é a fronteira de tração e  $\Gamma_2$  é a fronteira de deslocamento temos um problema de fronteira mista.

Sejam,

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2; \mathbf{u} = g \text{ em } \Gamma_2\}$$

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2; \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_2\}.$$

Este espaço está mais bem definido em CIPOLATTI; LIU; RINCON (2012). Calculando o produto interno da primeira equação de (4.1) por  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  e integrando sobre  $\Omega$ :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(T_{\kappa}) \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0. \quad (4.2)$$

Agora, é possível reescrever (4.2) usando o teorema da divergência e integrando por partes:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(T_{\kappa}) \cdot \mathbf{v} d\Omega &= - \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot T_{\kappa} \mathbf{n}_{\kappa} d\Gamma + \int_{\Omega} T_{\kappa} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \\ &= - \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Gamma + \int_{\Omega} \operatorname{tr}(T_{\kappa} \nabla \mathbf{v}^T) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Na última igualdade de (4.3) foi usada a condição de contorno no primeiro termo. No segundo termo de (4.3) foi usado a definição de produto interno de dois tensores de segunda ordem; visto que como  $\mathbf{v}$  é um vetor, seu gradiente é um tensor de segunda ordem.

Substituindo (3.23) em (4.3), encontra-se a *formulação fraca* de (4.1):

$$\int_{\Omega} \operatorname{tr}(\mathcal{L}[H] \nabla \mathbf{v}^T) d\Omega = \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{tr}(T(t) \nabla \mathbf{v}^T) d\Omega \quad (4.4)$$

Como esse problema é vetorial faz sentido escrevê-lo em termos de componentes. Antes, porém, observe que o termo  $\mathcal{L}[H] = \text{tr}(H)T(t) - T(t)H^T + L[H]$  onde  $L[H] = \beta(\text{tr}H)I + s_1(HB + BH^T) - s_2(B^{-1}H + H^TB^{-1})$ , assim, é interessante verificar como o termo  $L[H]$  é escrito em componentes:

$$\begin{aligned} L_{ijkl}H_{kl} &= \beta H_{kk}\delta_{ij} + s_1(H_{il}B_{lj} + B_{il}H_{jl}) + s_2(B_{ik}^{-1}H_{kj} + H_{ki}B_{kj}^{-1}) \\ &= [\beta\delta_{ij}\delta_{kl} + s_1(\delta_{ik}B_{lj} + B_{il}\delta_{jk}) + s_2(B_{ik}^{-1}\delta_{jl} + \delta_{il}B_{kj}^{-1})]H_{kl} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ou seja, o tensor  $L$  é dado por:

$$L_{ijkl} = \beta\delta_{ij}\delta_{kl} + s_1(\delta_{ik}B_{lj} + B_{il}\delta_{jk}) + s_2(B_{ik}^{-1}\delta_{jl} + \delta_{il}B_{kj}^{-1}) \quad (4.6)$$

em que  $\delta_{ij}$  é o *delta de Kronecker* definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Assim, usando o fato de que  $H = \nabla_x \mathbf{u}$ , é possível reescrever (4.4) em componentes:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} T_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} L_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma_{1_i}} f_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega} T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega.$$

Para simplificação, utilizam-se dois operadores,  $a(\cdot, \cdot)$  bilinear e  $b(\cdot)$  linear, para reescrever a formulação fraca em termos de componentes. Assim, a formulação se dá através de:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.7)$$

em que,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} T_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} L_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega \quad (4.8)$$

$$b(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_{1_i}} f_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega} T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega. \quad (4.9)$$

## 4.2 Formulação de Galerkin

Considere o subespaço  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$  de dimensão finita gerado pelos  $m$  primeiros vetores da base do espaço  $\mathcal{V}$ . Seja  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{H}^h \subset \mathcal{H}$  tal que:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{w}^h + \mathbf{g}^h$$

em que  $\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h$  e

$$g_i^h(x) = \begin{cases} g_i(x), & \forall x \in \Gamma_{2_i} \\ 0, & \forall x \notin \Gamma_{2_i}. \end{cases}$$

Com tal definição para  $\mathbf{u}^h$  tem-se que,  $\forall x \in \Gamma_{2_i}$ ,  $u_i^h(x) = w_i^h(x) + g_i^h(x) = g_i^h(x)$ . Como (4.7) é válida para todo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , em particular é válida para  $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$ , ou seja,

$$a(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}) = b(\mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h. \quad (4.10)$$

É possível definir, assim como foi feito com a função  $g_i^h(x)$ , a função  $f_i^h(x)$ ,

$$f_i^h(x) = \begin{cases} f_i(x), & \forall x \in \Gamma_{1_i} \\ 0, & \forall x \notin \Gamma_{1_i}, \end{cases}$$

desta forma, a *formulação de Galerkin* é dada por:

*Determinar  $\mathbf{u}^h = \mathbf{w}^h + \mathbf{g}^h \in \mathcal{H}^h$  tal que:*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) &= b(\mathbf{v}^h) \\ a(\mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h) &= b(\mathbf{v}^h) - a(\mathbf{v}^h, \mathbf{g}^h), \end{aligned} \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h \quad (4.11)$$

em que  $\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h$ .

## 4.3 Formulação Matricial

Considere um domínio discretizado em elementos finitos, sendo  $\mathcal{N}$  o conjunto de nós da malha e  $\mathcal{N}_2$  o conjunto de nós prescritos. Para cada nó  $A$ , considere  $\phi_A$  a

função de interpolação da base de  $\mathcal{V}^h$ .

$$\phi_A(x_B) = \begin{cases} 1, & A = B \\ 0, & A \neq B. \end{cases}$$

Assim, como a solução  $\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h$ , pode-se representá-la por:

$$\mathbf{w}^h(x) = \sum_{A=1}^{nNo} d_A \phi_A(x),$$

em que  $nNo$  é a cardinalidade de  $\mathcal{N}$  e  $\mathbf{w}^h(x)$  é uma função vetorial, ou seja,

$$\mathbf{w}^h = (w_1^h, w_2^h, \dots, w_n^h),$$

onde  $n$  é a dimensão do espaço. Observando a forma do operador  $a(\cdot, \cdot)$  faz-se necessário escrever as funções  $\mathbf{w}^h$  e  $\mathbf{g}^h$  em termos de componentes:

$$w_j^h(x) = \sum_{B \in \mathcal{N}} d_{jB} \phi_B(x) = \sum_{B \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_{2j}} d_{jB} \phi_B(x), \quad 1 \leq j \leq n \quad (4.12)$$

pois, como  $\mathbf{w}^h(x) \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ ,  $w_j^h(x) = 0$  se  $x \in \mathcal{N}_{2j}$ . Da mesma forma, na fronteira:

$$g_j^h(x) = \sum_{B \in \mathcal{N}_{2j}} g_{jB} \phi_B(x), \quad 1 \leq j \leq n \quad (4.13)$$

Considerando a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ , os vetores  $\mathbf{w}^h$  e  $\mathbf{q}^h$  podem ser escritos como:

$$\mathbf{w}^h = w_j^h \mathbf{e}_j \quad \mathbf{g}^h = g_j^h \mathbf{e}_j$$

em que,  $w_j^h$  e  $g_j^h$  são dadas, respectivamente, por (4.12) e (4.13). Assim, a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  é reescrita da seguinte forma:

$$a(\mathbf{v}^h, w_j^h \mathbf{e}_j) = a(\mathbf{v}^h, \sum_{B \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_{2j}} d_{jB} \phi_B \mathbf{e}_j) \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h. \quad (4.14)$$

Como a igualdade anterior é válida para todo  $\mathbf{v}^h = v_i^h \mathbf{e}_i$ , toma-se  $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$  na forma  $\mathbf{v}^h = \phi_A \mathbf{e}_i$ ,

$$a(\mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{B \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_{2j}} a(\phi_A \mathbf{e}_i, \phi_B \mathbf{e}_j) d_{jB} \right), \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.15)$$

De forma análoga, o mesmo pode ser feito com os outros operadores de (4.11), ficando na seguinte forma:

$$b(\mathbf{v}^h) = b(\phi_A \mathbf{e}_i), \quad a(\mathbf{v}^h, \mathbf{g}^h) = a(\phi_A \mathbf{e}_i, \mathbf{g}^h).$$

Como é possível interpolar  $\mathbf{g}^h$  pela função da base  $\phi_A$ , a função é definida como

$$g_j^h(x) = \sum_{A \in \mathcal{N}_{2j}} \phi_A(x) g_{jA}$$

em que  $g_{jA} = g_j^h(x_A)$  com  $x_A \in \Gamma_{2j}$ . Assim, reescrevendo o operador  $a(\mathbf{v}^h, \mathbf{g}^h)$ :

$$a(\mathbf{v}^h, \mathbf{g}^h) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{B \in \mathcal{N}_{2j}} a(\phi_A \mathbf{e}_i, \phi_B \mathbf{e}_j) g_{jB} \right).$$

Substituindo a equação anterior e a equação (4.15) em (4.11), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{B \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_{2j}} a(\phi_A \mathbf{e}_i, \phi_B \mathbf{e}_j) d_{jB} = b(\phi_A \mathbf{e}_i) - \sum_{j=1}^n \sum_{B \in \mathcal{N}_{2j}} a(\phi_A \mathbf{e}_i, \phi_B \mathbf{e}_j) g_{jB} \quad (4.16)$$

em que  $A \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_{2i}$ . Assim, é possível definir o seguinte sistema linear:

$$K_{AB} d_{jB} = F_A \quad (4.17)$$

sendo,

$$K_{AB} = a(\phi_A \mathbf{e}_i, \phi_B \mathbf{e}_j) \quad (4.18)$$

e,

$$F_A = b(\phi_A \mathbf{e}_i) - \sum_{j=1}^n \sum_{B \in \mathcal{N}_{2j}} a(\phi_A \mathbf{e}_i, \phi_B \mathbf{e}_j) g_{jB} \quad (4.19)$$

A matriz  $K$  é denominada *matriz de Rigidez* e o vetor  $F$  de *vetor Força*. Essa matriz e esse vetor, fazendo uma troca de índices e considerando:

$$\mathbf{u} = \phi_A \mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad u_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \phi_A \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_i \rangle = \phi_A \delta_{ir}$$

$$\mathbf{v} = \phi_B \mathbf{e}_s \quad \Rightarrow \quad v_j = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \phi_B \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_j \rangle = \phi_B \delta_{js},$$

podem ser escritos como:

$$K_{AB} = \int_{\Omega} T_{ri} \frac{\partial \phi_A}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_B}{\partial x_s} d\Omega - \int_{\Omega} T_{ri} \frac{\partial \phi_A}{\partial x_s} \frac{\partial \phi_B}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} L_{risj} \frac{\partial \phi_A}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_B}{\partial x_j} d\Omega \quad (4.20)$$

e,

$$F_A = \sum_{B \in \mathcal{N}_{3j}} \int_{\Gamma_1} \phi_A \phi_B f_{jB} d\Gamma - \int_{\Omega} T_{ri} \frac{\partial \phi_A}{\partial x_i} d\Omega - \sum_{B \in \mathcal{N}_{2j}} K_{AB} g_{jB}, \quad (4.21)$$

em que  $\mathcal{N}_{3j}$  é o conjunto de nós com condição de tração e  $f_{jB}$  é a função  $f_r^h$  interpolada pelas funções da base, assim como foi feito com a função  $g_j^h(x)$ .

$$f_j^h(x) = \sum_{A \in \mathcal{N}_{3j}} \phi_A(x) f_{jA}.$$

#### 4.4 Matriz Local e Força Local

Considere que o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é discretizado em elementos finitos  $\Omega_e$  que satisfazem

$$\Omega = \left( \bigcup_{e=1}^{Nel} \overline{\Omega_e} \right)^{\circ} \quad \text{e} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{se} \quad i \neq j$$

em que  $Nel$  é o número total de elementos. Os elementos  $\Omega_e$ , são considerados elementos  $Q_4$ , ou seja, elementos finitos quadriláteros de quatro nós.

Dessa forma, a matriz global e o vetor força global são obtidos através dos somatórios:

$$K = \sum_{e=1}^{Nel} K^e \quad \text{e} \quad F = \sum_{e=1}^{Nel} F^e$$

em que,

$$K_{AB}^e = \int_{\Omega_e} T_{ri} \frac{\partial \phi_A}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_B}{\partial x_s} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} T_{ri} \frac{\partial \phi_A}{\partial x_s} \frac{\partial \phi_B}{\partial x_i} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} L_{risj} \frac{\partial \phi_A}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_B}{\partial x_j} d\Omega_e$$

e,

$$F_A^e = \sum_{B \in \mathcal{N}_{3j}} \int_{\Gamma_1^e} \phi_A \phi_B f_{jB} d\Gamma^e - \int_{\Omega_e} T_{ri} \frac{\partial \phi_A}{\partial x_i} d\Omega_e - \sum_{B \in \mathcal{N}_{2j}} K_{AB}^e g_{jB}.$$

É sabido que para cada elemento  $e$  somente algumas posições da matriz  $K$  e do vetor  $F$  são não nulas. Assim, ao invés de armazenar uma matriz e um vetor de ordens muito grandes para cada elemento, é conveniente armazenar, no caso bidimensional vetorial, uma matriz de dimensão  $8 \times 8$  e um vetor  $8 \times 1$ , respectivamente. Tais estruturas são denominadas *matriz local* e *vetor local*, e são denotadas por  $K_{ab}^e$  e  $F_a^e$ . Os índices minúsculos  $a$  e  $b$  são os nós locais de cada elemento e tais nós estão relacionados com os índices  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Para cada nó local  $a$ , define-se uma função de interpolação local  $\phi_a^e$  que satisfaça:

$$\phi_a^e(b) = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b. \end{cases}$$

Com isso define-se a matriz e o vetor local:

$$K_{ab}^e = \int_{\Omega_e} T_{ri} \frac{\partial \phi_a^e}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_b^e}{\partial x_s} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} T_{ri} \frac{\partial \phi_a^e}{\partial x_s} \frac{\partial \phi_b^e}{\partial x_i} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} L_{risj} \frac{\partial \phi_a^e}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_b^e}{\partial x_j} d\Omega_e$$

e,

$$F_a^e = \sum_{b=1}^4 \int_{\Gamma_1^e} \phi_a^e \phi_b^e f_{jb} d\Gamma^e - \int_{\Omega_e} T_{ri} \frac{\partial \phi_a^e}{\partial x_i} d\Omega_e - \sum_{b=1}^4 K_{ab}^e g_{jb}.$$

**Observação:** Para o cálculo das matrizes locais  $K_{ab}^e$  e  $F_a^e$  é necessário calcular integrais sobre cada elemento. Apesar de todos elementos serem quadriláteros, não necessariamente possuem a mesma geometria. Assim, será usada uma transformação biunívoca, mostrada na Figura 4.1, que transforma cada elemento  $\Omega_e$  em um  $\Omega_B = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , que é denominado *elemento biunitário* e é definido por:

$$(\xi, \eta) : \Omega^e \longrightarrow \Omega^B$$

$$(x, y) \longrightarrow (\xi(x, y), \eta(x, y))$$

$$(x, y) : \Omega^B \longrightarrow \Omega^e$$

$$(\xi, \eta) \longrightarrow (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

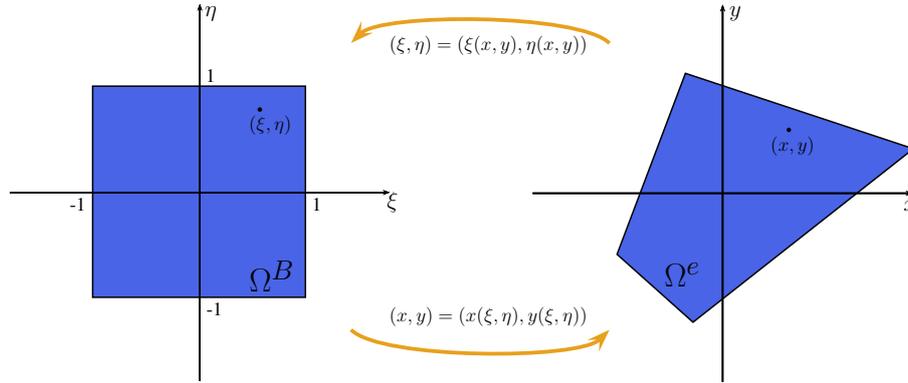


Figura 4.1: Transformação entre elemento finito  $\Omega_e$  e o elemento biunitário  $\Omega_B$

com  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = (\sum_{a=1}^4 \phi_a(\xi, \eta)x_a^e, \sum_{a=1}^4 \phi_a(\xi, \eta)y_a^e)$ , no qual a função de interpolação  $\phi_a$  no elemento biunitário  $\Omega^B$  pode ser observada na Figura 4.2 e tem a forma:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & \phi_2(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} & \phi_4(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}. \end{aligned}$$

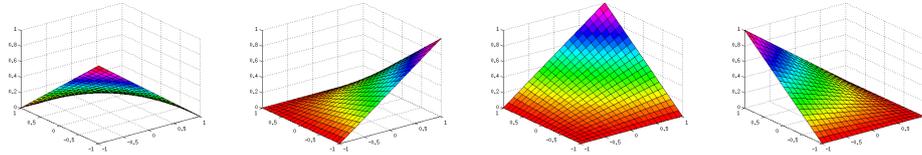


Figura 4.2: Funções de interpolação  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  e  $\phi_4$

## 4.5 Simulação de Cisalhamento Puro

Como exemplo inicial, será apresentado o caso de cisalhamento puro de um bloco quadrado de um corpo constituído por um material do tipo Mooney-Rivlin. Nesse exemplo, aplicam-se forças de tração tangenciais a superfície do bloco, ou seja tensões de cisalhamento  $\tau = T_{12}$ . Assim, o problema é do tipo Neumann, e

para garantir solução única numericamente é necessário fixar um ponto, no caso foi escolhido o ponto 0, como mostra a figura 4.3.

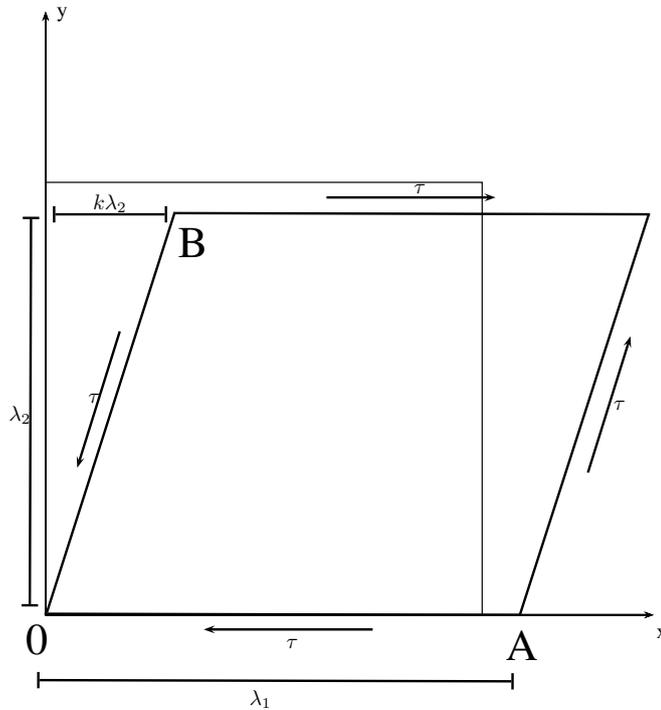


Figura 4.3: Cisalhamento Puro

#### 4.5.1 Solução exata

A teoria diz que um cisalhamento pode ser descrito como

$$x_1 = \lambda_1 X_1 + k\lambda_2 X_2, \quad x_2 = \lambda_2 X_2, \quad x_3 = \lambda_3 X_3 \quad (4.22)$$

No caso de cisalhamento puro é provado que, para um material elástico, os estados deformados mantêm a forma de um paralelogramo equilátero, daí

$$\overline{0A} = \overline{0B} \Rightarrow \lambda_1^2 = (1 + k^2)\lambda_2^2. \quad (4.23)$$

Considerando (3.20) e (4.22), a tensão de cisalhamento é dada por

$$T_{12} = \tau = k(s_1\lambda_2^2 - s_2\frac{1}{\lambda_1^2}). \quad (4.24)$$

Como está sendo considerado o caso de duas dimensões, a espessura do corpo se mantém sem modificações, ou seja,  $\lambda_3 = 1$  e como o corpo é incompressível  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ . Conseqüentemente, de (4.23) e (4.24), segue que

$$\lambda_1 = \left(1 - \tau^2 \frac{1}{(s_1 - s_2)^2}\right)^{-\frac{1}{4}}, \quad k = \sqrt{\lambda_1^4 - 1}. \quad (4.25)$$

As equações (4.23) e (4.25) serão utilizadas para comparar com os resultados numéricos.

#### 4.5.2 Solução numérica

Para solução de grandes deformações utilizando ALI, considera-se o passo de tempo  $t_n = n\Delta t$ , portanto, a tensão de cisalhamento prescrita no tempo  $t_n$  é  $\tau = n\Delta\tau$ . Pelo ALI, em cada passo  $n$ , a tensão de referência  $T_0$  e o gradiente de deformação  $F_0$  são obtidos a partir do passo anterior, assim, é assumido que inicialmente o corpo está livre de tensão, portanto, no passo  $n = 0$ , tem-se que  $T_0 = 0$  e  $F_0 = I$ .

A simulação foi feita com uma malha de  $20 \times 20$  elementos finitos do tipo  $Q_4$  e domínio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . A condição de fronteira é do tipo Neumann, com  $\Delta\tau = 0.004$ , como mostrado na Figura 4.3, sendo o nó no ponto 0 fixo. As propriedades do material são dadas na Tabela 4.1.

A figura 4.4 mostra os resultados numéricos. Os estados deformados mostram que o padrão de paralelogramo equilátero é mantido como a teoria prevê. Como

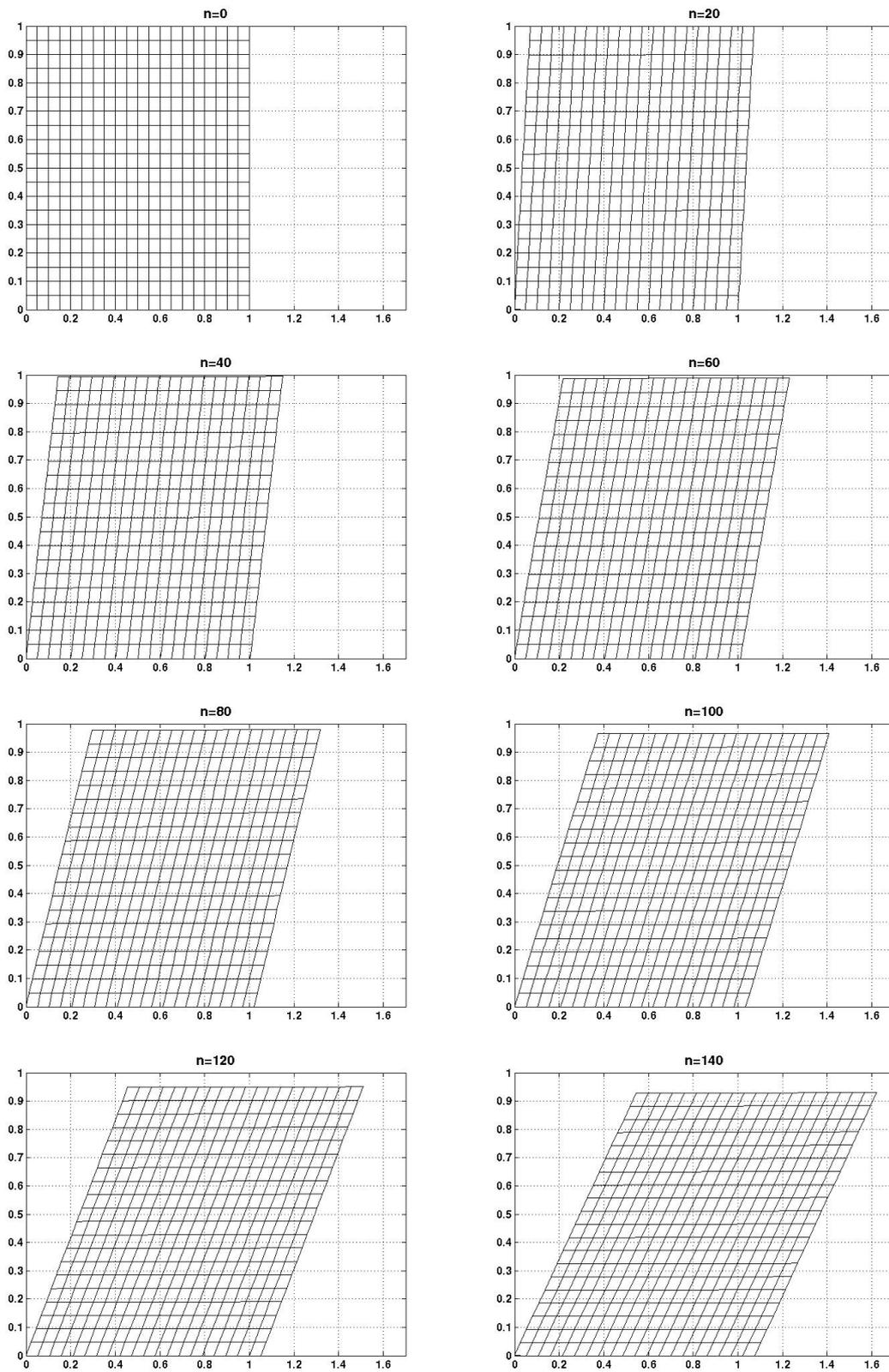


Figura 4.4: Configuração inicial e suas deformações subsequentes com as tensões de cisalhamento aplicadas.  $\tau = 20\Delta\tau$ ,  $\tau = 40\Delta\tau$ ,  $\tau = 60\Delta\tau$ ,  $\tau = 80\Delta\tau$ ,  $\tau = 120\Delta\tau$ ,  $\tau = 120\Delta\tau$  e  $\tau = 140\Delta\tau$ .

Propriedade	Valor
$s_1$	1
$s_2$	-0.1
$\beta$	$10^4$

Tabela 4.1: Propriedades do material para o exemplo de cisalhamento puro.

esta deformação é dita homogênea, teoricamente, o gradiente de deformação  $F$  é constante. Em particular, os valores de  $\lambda_1 = F_{11}$  e  $\det F = 1$ . A Tabela 4.2 compara os valores de  $\lambda_1$  exato e numérico. Na mesma tabela é mostrado o erro relativo para alguns passos. A Figura 4.5 também mostra o erro relativo, porém para todos os passos de incremento.

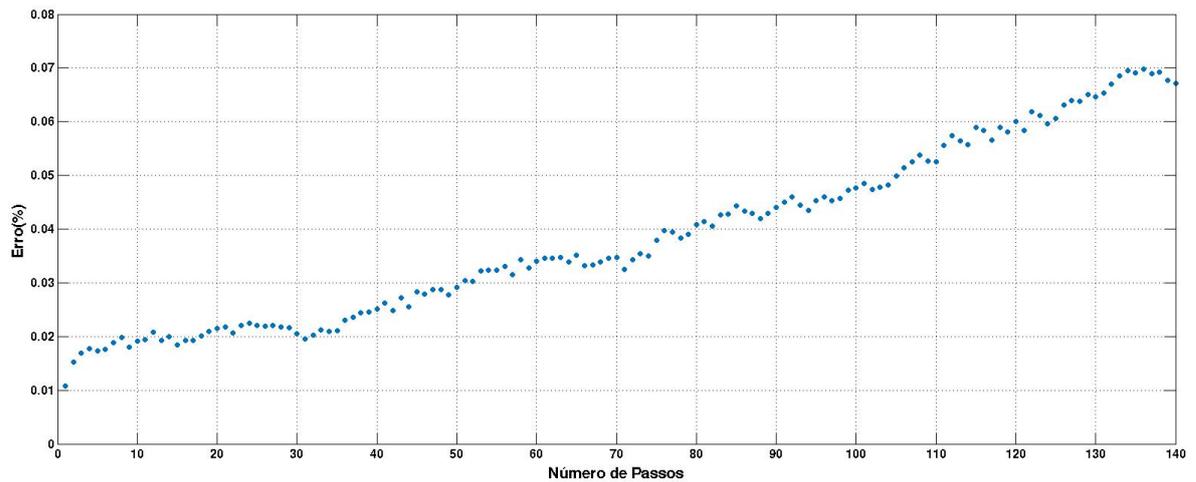


Figura 4.5: Passo  $\times$  Erro relativo em porcentagem,  $Erro = \left| \frac{\lambda_1^{numérico} - \lambda_1^{exato}}{\lambda_1^{exato}} \right| \times 100$ .

Na tabela 4.3 é verificado que a condição de incompressibilidade é satisfeita para a simulação numérica, ou seja,  $\det F \approx 1$ . Os resultados são mostrados nos mesmos passos de incremento que são mostrados na Figura 4.4.

Pelos resultados apresentados, é possível ver que a simulação numérica está

Passo	$\lambda_1^{exato}$	$\lambda_1^{numérico}$	Erro Relativo(%)
20	1.00133	1.00111	0.0214888
40	1.00536	1.00511	0.0251613
60	1.01227	1.01192	0.0339986
80	1.02235	1.02194	0.0407761
100	1.03609	1.03560	0.0476334
120	1.05423	1.05359	0.0601007
140	1.07788	1.07716	0.0671870

Tabela 4.2: Comparação entre os valores exatos e numéricos de  $\lambda_1$  em vários passos de incremento.

Passo	$J = \det F$
20	1.000000
40	1.000000
60	0.999999
80	0.999997
100	0.999988
120	0.999974
140	0.999954

Tabela 4.3: Teste de incompressibilidade do material  $\det F \approx 1$ .

condizente com o que se espera da teoria. Resultados semelhantes foram obtidos em LIU; CIPOLATTI; RINCON (2010).

Este exemplo foi reproduzido para se estudar o método ALI para materiais elásticos e validar a implementação do mesmo.

## 5 MODELO DE PLASTICIDADE PARA PEQUENAS DEFORMAÇÕES

No Capítulo 3 foi proposto um método para resolver problemas de grandes deformações através de incrementos de pequenas deformações, assim, neste capítulo, será apresentada a teoria matemática da plasticidade para pequenas deformações, que tal como o método ALI, também é baseada em incrementos (carregamentos) de deformação.

O modelo estudado será o de *von Mises*, que é adotado em estudo de metais. A teoria é baseada nos estudos feitos por HILL (1950) e OWEN; HINTON (1980). Os estudos feitos por OWEN; HINTON (1980) são baseados na teoria desenvolvida por HILL (1950), porém de uma maneira mais simplificada. Assim, teoria apresentada neste capítulo será enunciada como em OWEN; HINTON (1980).

### 5.1 Ideias Gerais

Além da não linearidade geométrica, representada pelas grandes deformações, um corpo pode possuir a característica de uma *não linearidade de material*, que neste caso é representada pela plasticidade.

O principal objetivo da teoria matemática da plasticidade é prover uma relação entre tensão e deformação para um material elastoplástico. Um corpo que realiza deformação plástica é caracterizado por sofrer uma deformação irreversível independente do tempo, ou seja, a partir de um nível de tensão atingido, esse corpo, quando livre de tensões, não voltará a seu estado inicial.

Para modelar a deformação de um corpo elastoplástico três etapas devem ser cumpridas:

- Uma relação explícita entre tensão e deformação para descrever o comportamento do material durante o regime elástico, isto é, antes de plastificar;
- Deve ser postulado um critério de escoamento, indicando o nível de tensão em que o fluxo plástico começa;
- Uma relação entre tensão e deformação deve ser desenvolvida para depois do escoamento, ou seja, quando a deformação é composta pelas componentes elástica e plástica.

A Figura 5.1 ilustra a curva de tensão-deformação de dois metais que sofrem plasticidade.

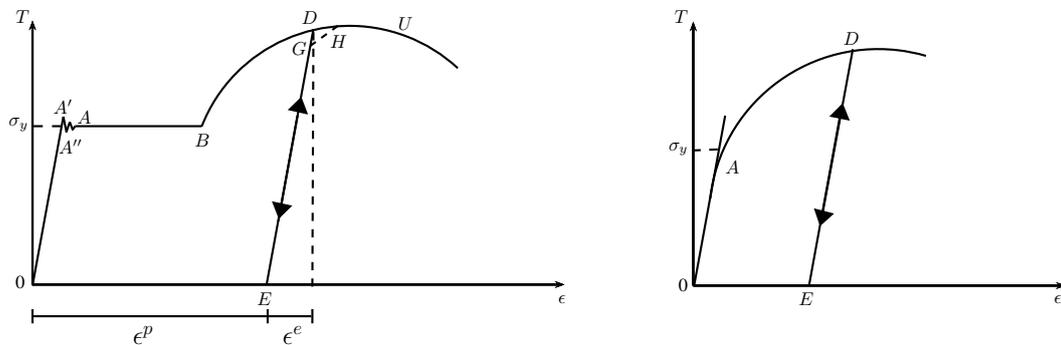


Figura 5.1: Curva de tensão  $\times$  deformação (a)metal macio e (b)alumínio

Na Figura 5.1 (a), observa-se que na curva de tensão-deformação até o ponto  $A''$  o comportamento é linear. Este ponto é chamado de *limite proporcional*. O segmento  $OA''$  representa o período em que o material está sofrendo deformação elástica. A conhecida *Lei de Hooke* pode representar esse comportamento linear.

Além desse ponto, o aumento da deformação não é acompanhado linearmente pelo aumento da tensão, mas a deformação ainda está na região elástica, no sentido de que quando o corpo for livre de tensão vai restaurar a forma do material para a sua forma original.

Esse fato é verdade até que o *ponto de escoamento superior*  $A'$  seja atingido. Neste estágio, com o aumento de deformação, o material pode ter algumas pequenas oscilações no nível de tensão até que se estabilize, e forma um platô até que o ponto  $B$  é atingido.

O ponto  $A$  é o ponto de limite do comportamento elástico do material e é denominado como *ponto de escoamento* ou *ponto de escoamento inferior*, e é determinado pela *tensão de escoamento*  $\sigma_y$ . Quando o material passa por um regime como  $AB$  tal material possui o comportamento *perfeitamente plástico*.

Se, a partir do ponto  $B$ , o material continuar deformando, a tensão continua aumentando até o ponto  $U$ , e a partir desse ponto, conforme a deformação aumenta a tensão diminui. Os materiais que possuem a característica de se comportarem como a região  $BU$  são materiais que possuem a característica de sofrer *encruamento*. A região  $ABU$  é chamada de *deformação plástica do material*.

Durante o período em que o material está na região  $ABU$ , ele pode ser descarregado, como acontece no ponto  $D$ . Quando esse descarregamento acontece, ele segue o caminho  $DE$ , que é um caminho paralelo ao caminho elástico que o material possuía no início da deformação elástica. Como resultado disso, apenas uma parte da deformação é recuperada e é chamada de *deformação elástica*,  $\epsilon^e$ , enquanto a outra parte é chamada de *deformação plástica*,  $\epsilon^p$ . Pela própria figura é possível observar que a *deformação total*,  $\epsilon$ , é dada por:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (5.1)$$

Caso o material volte a ser carregado a partir do ponto  $E$ , o material será carregado elasticamente através da curva  $EG$ , e pode novamente ser descrito pela Lei de Hooke. No ponto  $G$  o material irá escoar e a deformação plástica irá reatar. O ponto  $G$  é o *novo ponto de escoamento* que em materiais reais fica abaixo do ponto  $D$ .

Alguns materiais, como o alumínio mostrado na Figura 5.1 (b), possuem uma transição mais suave entre o comportamento elástico e o plástico não linear. Nessas superfícies é complicado determinar exatamente em que ponto o material começa a escoar, então, o que se faz, é calcular um limite para estimar tal ponto.

Um fato importante é que, após a plastificação do corpo, quando este é carregado, tal carregamento é feito como se o regime fosse elástico, e assim ele entra em um estado de tensões inadmissíveis fazendo-se necessário o retorno à superfície de tensões admissíveis.

## 5.2 Relação Tensão-Deformação no Regime Elástico

Foi visto que para se formular uma teoria de plasticidade é necessário obter uma relação entre tensão e deformação antes do corpo plastificar, ou seja, uma relação no período elástico do material. Serão ilustrados dois tipos de regimes elásticos.

O regime elástico do material pode ser não linear ou linear. Um modelo elástico não linear foi mostrado anteriormente no Capítulo 3, quando foi adotado o material de Mooney-Rivlin incompressível e a relação tensão-deformação foi dada pela equação (3.20). A Figura 5.2 ilustra algumas curvas de materiais distintos de Mooney-Rivlin.

Já em um modelo elástico linear se adota, em geral, a Lei de Hooke como

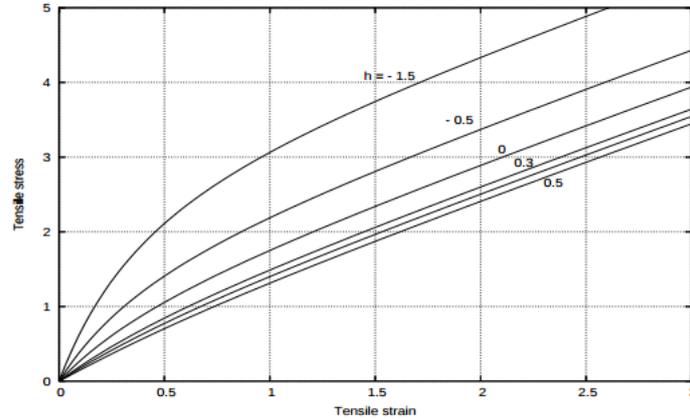


Figura 5.2: Curvas de tensão  $\times$  deformação em um material Mooney-Rivlin LIU (2011a)

relação entre tensão e deformação. A relação, em forma de componentes, que esta lei define, é dada por:

$$T_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (5.2)$$

em que,  $T_{ij}$  é o tensor de tensão Cauchy,  $\epsilon_{kl}$  é o tensor de deformação e  $C_{ijkl}$  é o tensor de propriedade do material elástico, que no caso do material ser isotrópico é escrito da seguinte forma:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (5.3)$$

em que,  $\lambda$  e  $\mu$  são os parâmetros do material conhecidos como *constantes de Lamé* e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. A lei de Hooke também pode ser reescrita em função de outros parâmetros de material, como o *módulo de Young* ou *módulo elástico*  $E$  e o *coeficiente de Poisson*  $\nu$ . Estes estão relacionados com as constantes de Lamé:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

ou inversamente,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

### 5.3 Critério de Escoamento

O *critério de escoamento* define o nível de tensão em que um corpo começa a plastificar e pode ser representado de maneira bem geral por:

$$f(T_{ij}) = Y(\kappa), \quad (5.4)$$

em que,  $f$  é uma dada função e  $Y$  é um parâmetro de material a ser definido experimentalmente e que pode ser dependente de um parâmetro de encruamento  $\kappa$ . Se um ponto no corpo satisfaz o critério (5.4) então esse ponto se deforma plasticamente, caso contrário, está no regime elástico.

Fisicamente, o critério de escoamento deve ser independente da orientação do sistema de coordenadas, e, portanto, deve ser uma função somente dos três invariantes da tensão,

$$\begin{aligned} J_1 &= T_{ii} \\ J_2 &= \frac{1}{2} T_{ij} T_{ij} \\ J_3 &= \frac{1}{3} T_{ij} T_{jk} T_{ki}. \end{aligned}$$

O escoamento plástico está relacionado somente com a tensão desviadora, que é definida como:

$$T'_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk}. \quad (5.5)$$

Para metais, experimentos demonstraram que a deformação plástica é independente da pressão hidrostática, conseqüentemente, o critério de escoamento pode ser escrito como

$$f(J'_2, J'_3) = Y(\kappa). \quad (5.6)$$

Na Figura 5.3 são representadas duas superfícies de escoamento que servem como modelos de metais: a superfície relativa ao *critério de Tresca*, e aquela relativa ao *critério de von Mises*. Porém, os estudos feitos em LIANIS; FORD (1957) fornecem evidências de que o critério de Von Mises é melhor do que o critério de Tresca quando se trata de metais. Por isso, neste trabalho somente interessa a superfície de von Mises.

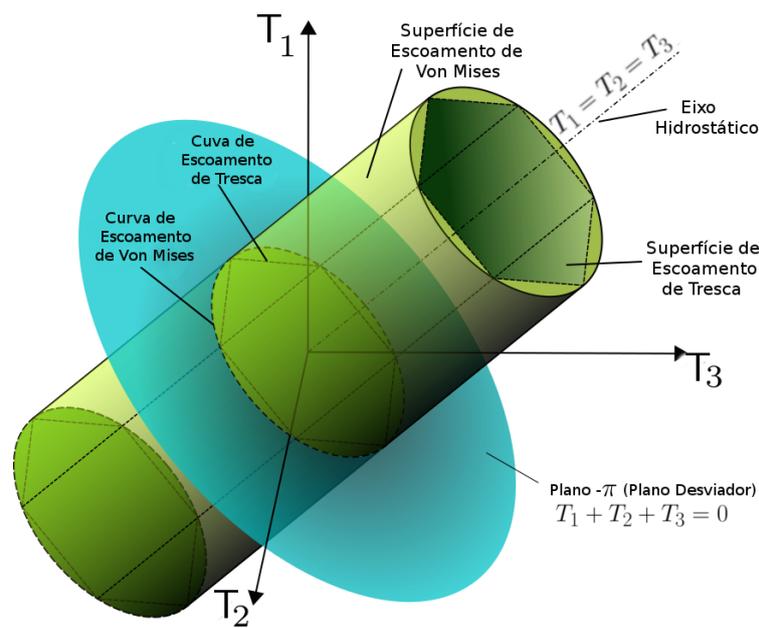


Figura 5.3: Superfície de escoamento

### 5.3.1 Critério de von Mises

Segundo KHAN; HUANG (1995) a equação (5.6), para o caso de Von Mises, representa um cilindro, com raio igual a  $\sqrt{2}Y$ , no espaço das tensões principais com a reta geratriz paralela ao eixo de pressão hidrostática ( $T_1 = T_2 = T_3$ ),<sup>1</sup> visto que a pressão hidrostática  $p = J_1/3$  não é um argumento de (5.6), como na Figura 5.3. O

<sup>1</sup>Notação:  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  são, respectivamente,  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  e  $T_{33}$

plano que corta a superfície na Figura 5.3 é chamado de *plano- $\pi$*  ou *plano desviador*, que é definido por  $T_1 + T_2 + T_3 = 0$ .

Como dito anteriormente, este modelo de plasticidade possui resultados coerentes quando se modela metais. O critério de von Mises diz que a plastificação ocorre quando o segundo invariante da tensão desviadora atinge seu valor crítico. Matematicamente ele é expresso, a partir de (5.6), por:

$$(J_2')^{\frac{1}{2}} = Y(\kappa), \quad (5.7)$$

em que,  $J_2'$  pode ser expresso como

$$\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2}T_{ij}'T_{ij}' \\ &= \frac{1}{6}[(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2] \\ &= \frac{1}{2}[T_1'^2 + T_2'^2 + T_3'^2] + T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Substituindo a segunda equação de (5.8) em (5.7) e elevando ambos os lados ao quadrado, é fácil ver que, de fato, a superfície no critério de Von Mises é um cilindro. É importante ressaltar que este critério é uma função de escoamento que depende somente de  $J_2'$ , e por isso também é conhecido como *critério  $J_2$* .

A *tensão efetiva* ou *tensão equivalente* é definida como sendo

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{3}{2}T_{ij}'T_{ij}'} = \sqrt{3J_2'},$$

assim, em termos da tensão efetiva, pode-se dizer que o critério de Von Mises é dado por:

$$\bar{T} = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{3}Y(\kappa). \quad (5.9)$$

Um sentido físico para  $Y$  pode ser obtido através de dois testes: o primeiro é o teste de tensão uniaxial simples, e o segundo, é um teste de cisalhamento puro. Para

tal, considere que  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento no teste de tensão uniaxial simples e  $\tau_y$  é a tensão de escoamento no teste de cisalhamento puro.

- **Teste de tensão uniaxial simples:** ( $T_1 = \sigma_y$  e  $T_2 = T_3 = 0$ )

Calculando  $J_2'$  com o uso de (5.8) e substituindo em (5.9) temos que:

$$Y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

- **Teste de cisalhamento puro:** ( $T_1 = -T_3 = \tau_y$  e  $T_2 = 0$ )

Novamente, calculando  $J_2'$  com o uso de (5.8) e substituindo em (5.9) temos que:

$$Y = \tau_y.$$

Assim, para o critério de Von Mises, temos que a tensão de escoamento no teste de tensão uniaxial simples é  $\sqrt{3}$  vezes maior do que a tensão de escoamento no teste de cisalhamento puro.

## 5.4 Encruamento ou Superfícies Subsequentes de Escoamento

Um material é considerado *perfeitamente plástico* se o nível de tensão de escoamento não depende do grau de plastificações anteriores, e portanto, sua superfície de escoamento é sempre a mesma, como representado na Figura 5.4.

Porém, em certos materiais, após o escoamento inicial, o nível de tensão em que uma deformação plástica adicional ocorre pode depender do nível de deformação plástica atual, fazendo com que a superfície de escoamento seja alterada conforme o aumento de tensão.

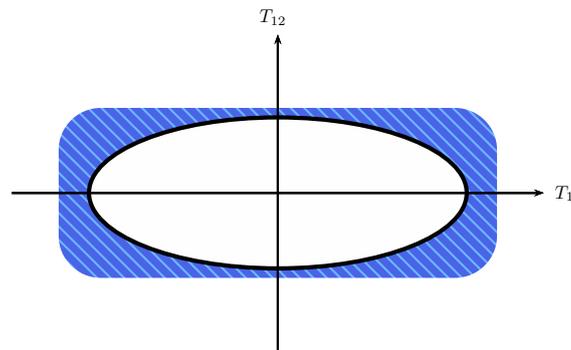


Figura 5.4: Plasticidade perfeita

Se a superfície for expandida mantendo a mesma forma e não houver translação, o encruamento é denominado *isotrópico*. Agora, se a superfície subsequente de escoamento preserva a forma e a orientação, mas translada como um corpo rígido, o encruamento é chamado de *cinemático*. As figuras 5.5 e 5.6 representam, respectivamente, os encruamentos isotrópico e cinemático em um espaço de tensões. Nesse texto, somente encruamento isotrópico será considerado.

As figuras 5.4, 5.5 e 5.6 dizem que as tensões admissíveis do problema estão localizadas dentro das elipses mais recentes, ou seja, dentro das superfícies de escoamento atuais. Qualquer estado de tensão que esteja localizado fora de tal curva não é uma tensão admissível.

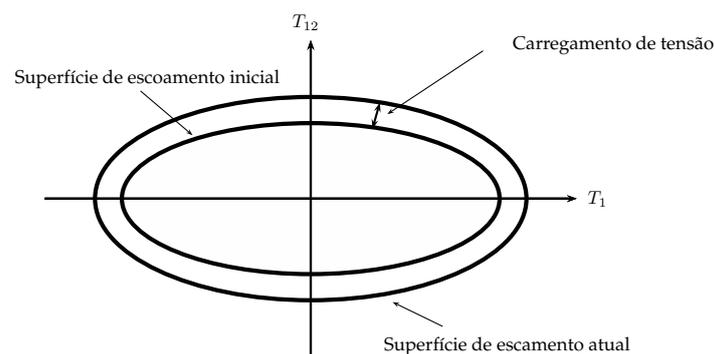


Figura 5.5: Encruamento isotrópico

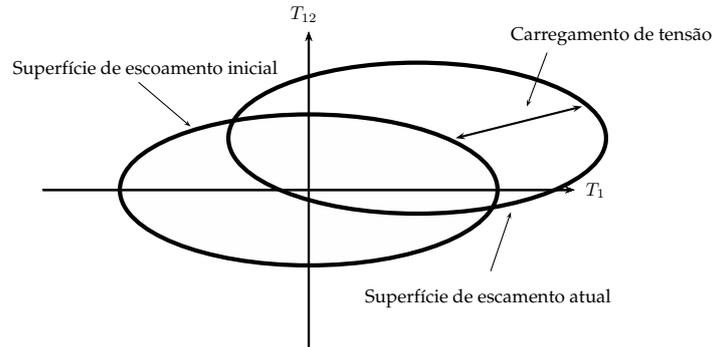


Figura 5.6: Encruamento cinemático

As mudanças progressivas da superfície de escoamento podem ser definidas relacionando a tensão de escoamento  $Y$  com a deformação plástica através do parâmetro de encruamento  $\kappa$ . Isso é possível de duas maneiras distintas: ou através do *encruamento por trabalho* ou por *encruamento por deformação*.

Na primeira, o grau do encruamento por trabalho pode ser postulado como uma função, somente, do trabalho plástico total  $W_p$ . Assim,

$$\kappa = W_p \quad \text{com} \quad W_p = \int T_{ij} d\epsilon_{ij}^p, \quad (5.10)$$

em que,  $d\epsilon_{ij}^p$  são as componentes de um incremento de deformação.

Alternativamente, o encruamento por deformação diz que  $\kappa$  pode ser relacionado com uma medida de deformação plástica total, chamada de *deformação efetiva* ou *deformação plástica equivalente*, tal medida é definida incrementalmente como:

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}. \quad (5.11)$$

Como está sendo considerado o critério de von Mises, a superfície de escoamento é independente de qualquer tensão hidrostática, ou seja,  $d\epsilon_{ii}^p = 0$  e, portanto,

$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^p$ . Pode-se, então, reescrever (5.11) como:

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p. \quad (5.12)$$

Assim, o parâmetro de encruamento é definido como

$$\kappa = \bar{\epsilon}^p, \quad (5.13)$$

em que,  $\bar{\epsilon}^p$  é o resultado da integral de  $d\bar{\epsilon}^p$  sobre o caminho da deformação, ver HILL (1950).

Foi visto que o estado plástico é representado por tensões tal que  $f = Y$ , enquanto,  $f < Y$  representa o comportamento elástico. Durante o estado plástico, um incremento de tensão faz com que ocorra uma mudança incremental na função de escoamento e é representado por

$$df = \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} \quad (5.14)$$

Então, se:

$df < 0$	<b>descarregamento elástico</b> - o ponto de tensão retorna para dentro da superfície de escoamento.
$df = 0$	<b>carregamento neutro</b> - o ponto de tensão permanece na superfície de escoamento.
$df > 0$	<b>carregamento plástico</b> - ponto de tensão permanece na superfície escoamento em expansão.

Tabela 5.1: Condições geradas pela mudança incremental na superfície de tensão.

**Notação:** a letra  $d$  precedida de variáveis é a notação de incremento.

#### 5.4.1 *Insight* físico sobre encruamento por deformação

Para se entender melhor o material com encruamento por deformação considera-se o teste uniaxial ( $T_1 = \sigma$ ,  $T_2 = T_3 = 0$ ) de um material elastoplástico.

Como todo material desse tipo, inicialmente a deformação é elástica. Nesta parte elástica, o gráfico tensão-deformação de pequenas deformações é caracterizado por uma reta de inclinação igual ao módulo elástico  $E$  até que a tensão de escoamento  $\sigma_y$  seja atingida.

Após o escoamento, o material se comporta parcialmente elástico e parcialmente plástico com uma curva caracterizada por sua tangente local variar continuamente, tal tangente é chamada de *módulo da tangente elastoplástica*,  $E_T$ .

Anteriormente, foi verificado que a lei de encruamento pode ser expressa em termos da tensão efetiva, (5.9), e agora, considerando a hipótese de encruamento por deformação, tem-se que,

$$\bar{T} = h(\bar{\epsilon}^p), \quad (5.15)$$

ou na forma diferencial,

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{\epsilon}^p} = h'(\bar{\epsilon}^p). \quad (5.16)$$

Agora, considerando o teste uniaxial e pela definição de tensão efetiva

$$\bar{T} = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{\frac{3}{6}[(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma^2 + \sigma^2]} = \sigma. \quad (5.17)$$

Como a deformação plástica é considerada incompressível, então, o coeficiente de Poisson é assumido como  $\nu = 0.5$ . Considerando  $d\epsilon^p$  o incremento de deformação plástica na direção do carregamento, então:  $d\epsilon_1^p = d\epsilon^p$ ,  $d\epsilon_2^p = -\frac{1}{2}d\epsilon^p$  e  $d\epsilon_3^p = -\frac{1}{2}d\epsilon^p$ . Assim, por (5.12), a deformação plástica efetiva é dada por:

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} = d\epsilon^p. \quad (5.18)$$

Usando (5.16), (5.17) e (5.18) tem-se que:

$$h'(\bar{\epsilon}^p) = \frac{d\bar{T}}{d\bar{\epsilon}^p} = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\epsilon - d\epsilon^e} = \frac{1}{\frac{d\epsilon}{d\sigma} - \frac{d\epsilon^e}{d\sigma}}, \quad (5.19)$$

ou ainda,

$$h' = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}}. \quad (5.20)$$

É válido ressaltar que para a simulação numérica somente  $h'$  é necessário, e não  $h$ . Outro fato interessante é que foi mostrado que  $h'$  pode ser determinado experimentalmente através de um simples teste uniaxial.

## 5.5 Relação Tensão-Deformação Elastoplástica

Como foi dito anteriormente, após o escoamento inicial é necessário uma nova relação de tensão-deformação, pois, depois do escoamento inicial, o comportamento do material é parcialmente elástico e parcialmente plástico.

Dado qualquer incremento de tensão após plastificação, as mudanças na deformação são compostas por uma deformação elástica e por uma deformação plástica de maneira aditiva. Assim, um incremento de tensão gera um incremento de deformação na forma:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p. \quad (5.21)$$

Nessa teoria o regime elástico é regido pela lei de Hooke, portanto, é possível reescrevê-la de maneira incremental. Além disso, o incremento de tensão pode ser decomposto em seus termos desviador e hidrostático, assim, a lei de Hooke apresenta-se na forma:

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{dT'_{ij}}{2\mu} + \frac{1 - 2\nu}{E} \delta_{ij} dT_{kk}. \quad (5.22)$$

Agora, é necessário fazer algumas hipóteses para relacionar o incremento de deformação plástica e o incremento de tensão. Assim, será assumida a *Lei de Fluxo* que governa o fluxo plástico depois do escoamento (em HILL (1950) há uma base teórica para essa hipótese). Tal lei diz que o incremento de deformação plástica é proporcional ao gradiente do *potencial plástico*,  $Q$ , em relação à tensão:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial T_{ij}}, \quad (5.23)$$

em que,  $d\lambda$  é a constante de proporcionalidade chamada de *multiplicador plástico*. Uma das necessidades do potencial  $Q$  é que ele seja uma função de  $J'_2$  e  $J'_3$ , mas ainda não pode ser determinada na sua forma mais geral. Certos princípios variacionais e teoremas de unicidade podem ser formulados se a relação  $f \equiv Q$ , e por isso esta relação é tão especial na teoria matemática da plasticidade.

A equivalência  $f \equiv Q$  é uma relação válida a ser postulada, pois ambas são funções de  $J'_2$  e  $J'_3$  e sobre esta hipótese se dá a *teoria da plasticidade associada*. Assim, a equação (5.23) se torna

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial T_{ij}}, \quad (5.24)$$

e é chamada de *condição de normalidade*, visto que  $\frac{\partial f}{\partial T_{ij}}$  é um vetor normal à superfície de escoamento, orientado positivamente. Portanto, é necessário que as componentes do incremento de deformação plástica combinem vetorialmente para que o resultado seja um vetor normal à superfície de escoamento.

Como está sendo considerado o critério de von Mises, tem-se que  $f = J'_2$  e portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} = \frac{\partial J'_2}{\partial T_{ij}} = \frac{\partial(\frac{1}{2}T'_{ij}T'_{ij})}{\partial T_{ij}} = T'_{ij}, \quad (5.25)$$

assim, (5.24) se torna,

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda T'_{ij} \quad (5.26)$$

que juntamente com (5.24) são conhecidas como *equações de Prandtl-Reuss*.

Desta forma, a relação incremental completa e geral entre tensão e deformação pode ser dada através da substituição de (5.22) e (5.24) em (5.21):

$$d\epsilon_{ij} = \frac{dT'_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E}\delta_{ij}dT_{kk} + d\lambda\frac{\partial f}{\partial T_{ij}}. \quad (5.27)$$

## 5.6 Equações de Plasticidade na Sua Forma Matricial

De maneira geral, os livros e artigos de engenharia apresentam as equações que foram definidas até o momento matricialmente, já em referências mais matemáticas, a notação tensorial é assumida. Como a teoria de plasticidade desenvolvida neste trabalho é baseada em OWEN; HINTON (1980), a notação matricial será adotada nesta seção, e assim, as expressões vistas até agora serão reescritas e algumas novas serão definidas.

Para tal, é necessário redefinir o tensor de tensão  $T$ , que agora será representado vetorialmente por  $\boldsymbol{\sigma}$  e o tensor de deformação  $\epsilon$  que vetorialmente é representado por  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . No caso bidimensional, eles são dados, respectivamente, por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Assim, a superfície de escoamento, que foi primeiramente definida em (5.4) agora, pode ser reescrita na forma:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = Y(\kappa). \quad (5.29)$$

Nos casos particulares de encruamento por trabalho e encruamento por de-

formação as equações (5.10) e (5.13) são reescritas, respectivamente, como:

$$d\kappa = \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad d\kappa = d\varepsilon^p. \quad (5.30)$$

O critério de escoamento (5.29) pode ser rearranjado e escrito como  $F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0$ , obtém-se:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - Y(\kappa) = 0 \quad (5.31)$$

Tomando a derivada da equação acima, tem-se que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0. \quad (5.32)$$

Definindo  $\mathbf{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  e  $A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa$  reescreve-se a equação anterior como:

$$\mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} - Ad\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} = Ad\lambda, \quad (5.33)$$

no qual o vetor  $\mathbf{a}$  é definido como *vetor de fluxo* e é representado vetorialmente como,

$$\mathbf{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right] \quad (5.34)$$

Agora, a relação tensão-deformação para a região pós escoamento é dada vetorialmente por

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = D^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T = D^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \mathbf{a}, \quad (5.35)$$

em que,  $D$  é a representação matricial do tensor de propriedade de material  $C_{ijkl}$  da lei de Hooke. Multiplicando à esquerda os dois lados de (5.35) por  $\mathbf{a}^T D = d_D^T$  e usando (5.33) obtém-se o multiplicador plástico  $d\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T D d\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{a}^T D D^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}^T D d\lambda \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T D d\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a}^T D \mathbf{a} d\lambda \\ \mathbf{a}^T D d\boldsymbol{\varepsilon} &= Ad\lambda + \mathbf{a}^T D \mathbf{a} d\lambda \\ \mathbf{a}^T D d\boldsymbol{\varepsilon} &= (A + \mathbf{a}^T D \mathbf{a}) d\lambda \\ d\lambda &= \frac{\mathbf{a}^T D d\boldsymbol{\varepsilon}}{A + \mathbf{a}^T D \mathbf{a}}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

Substituindo (5.36) em (5.35)

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\varepsilon} &= D^{-1}d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\mathbf{a}^T Dd\boldsymbol{\varepsilon}}{A + \mathbf{a}^T D\mathbf{a}}\mathbf{a} \\
Dd\boldsymbol{\varepsilon} &= DD^{-1}d\boldsymbol{\sigma} + D\frac{\mathbf{a}^T Dd\boldsymbol{\varepsilon}}{A + \mathbf{a}^T D\mathbf{a}}\mathbf{a} \\
Dd\boldsymbol{\varepsilon} &= d\boldsymbol{\sigma} + D\frac{\mathbf{a}^T Dd\boldsymbol{\varepsilon}}{A + \mathbf{a}^T D\mathbf{a}}\mathbf{a} \\
Dd\boldsymbol{\varepsilon} &= d\boldsymbol{\sigma} + D\mathbf{a}\frac{\mathbf{a}^T Dd\boldsymbol{\varepsilon}}{A + \mathbf{a}^T D\mathbf{a}} \\
Dd\boldsymbol{\varepsilon} &= d\boldsymbol{\sigma} + \frac{d_D d_D^T}{A + d_D^T \mathbf{a}} d\boldsymbol{\varepsilon} \\
d\boldsymbol{\sigma} &= Dd\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{d_D d_D^T}{A + d_D^T \mathbf{a}} d\boldsymbol{\varepsilon} \\
d\boldsymbol{\sigma} &= \left( D - \frac{d_D d_D^T}{A + d_D^T \mathbf{a}} \right) d\boldsymbol{\varepsilon} \\
d\boldsymbol{\sigma} &= D_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

em que,  $D_{ep} = D - \frac{d_D d_D^T}{A + d_D^T \mathbf{a}}$  é a representação matricial do tensor elastoplástico.

A equação (5.37) é a relação incremental elastoplástica completa, visto que no regime elástico a segunda parcela de  $D_{ep}$  é zero. Agora, o que resta para que todas as relações estejam bem definidas é a definição mais explícita dos termos  $A$ ,  $\mathbf{a}$  e  $d_D$ .

**Observação:** Como dito anteriormente, (5.37) e  $D_{ep}$  são representações matriciais de tensores. Tais tensores são dados por:

$$dT = C_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad C_{ep} = C - \frac{\mathbf{a} : C \otimes C : \mathbf{a}}{A + \mathbf{a} : C : \mathbf{a}}, \tag{5.38}$$

em que  $C$  é o tensor de propriedade de material da lei de Hooke e  $C_{ep}$  é o tensor elastoplástico de quarta ordem.

### 5.6.1 Determinação da constante $A$

A hipótese de encruamento por trabalho é mais geral em termos termodinâmicos e, por isso, vai ser adotada neste momento. Nesta etapa utiliza-se o teste uniaxial e, assim, é possível escrever a equação (5.29) na forma:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = f(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\kappa) = 0, \quad (5.39)$$

em que,  $\sigma_y(\kappa) = \sqrt{3}Y(\kappa)$ . Desta forma, pela definição de  $A$  tem-se que:

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = \frac{1}{d\lambda} \frac{d\sigma_y}{d\kappa} d\kappa. \quad (5.40)$$

Substituindo a condição de normalidade,  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\lambda \mathbf{a}$ , em (5.30)<sub>1</sub>:

$$d\kappa = \boldsymbol{\sigma}^T d\lambda \mathbf{a} = d\lambda \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.41)$$

Como está sendo considerado o caso de teste uniaxial  $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_y$  e  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , em que,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  é a tensão efetiva e  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  a deformação efetiva, a equação (5.41) se torna:

$$d\kappa = \sigma_y d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = d\lambda \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.42)$$

Por outro lado, de (5.16), sabe-se que:

$$h' = \frac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \frac{d\sigma_y}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}. \quad (5.43)$$

Aplicando o teorema de Euler para funções homogêneas em (5.39),

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} = \sigma_y. \quad (5.44)$$

Substituindo a equação anterior em (5.42),

$$\sigma_y d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = d\lambda \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} = d\lambda \sigma_y \quad \Rightarrow \quad d\lambda = d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (5.45)$$

Assim, substituindo  $d\lambda$  e (5.43) em (5.40), encontra-se a definição da constante  $A$ :

$$A = h'. \quad (5.46)$$

Portanto,  $A$  é um parâmetro do material proveniente de experimentos e é idêntico à inclinação local da curva tensão-deformação na região plástica.

### 5.6.2 Determinação do vetor de fluxo a

Em NAYAK; ZIENKIEWICZ (1972) é proposto uma maneira de reescrever a função de escoamento em função dos invariantes de tensão, e a sua maior vantagem é o fato de permitir escrever uma forma geral para a função de escoamento e para lei de fluxo para os critérios de Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. Os dois últimos são usados em solos. Porém, como só será abordado, nesse trabalho, o critério de von Mises, este será descrito de uma maneira simplificada.

As tensões desviadoras principais são dadas como as raízes da equação cúbica

$$t^3 - J_2't - J_3' = 0. \quad (5.47)$$

Observe, agora, a seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{sen}^3\theta - \frac{3}{4}\text{sen}\theta + \frac{1}{4}\text{sen}3\theta = 0.$$

Substituindo  $t = r\text{sen}\theta$  em (5.47) obtêm-se:

$$\text{sen}^3\theta - \frac{J_2'}{r^2}\text{sen}\theta - \frac{J_3'}{r^3} = 0. \quad (5.48)$$

Comparando as equações, tem-se que:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'} \quad (5.49)$$

e,

$$\text{sen}3\theta = -\frac{4J_3'}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{J_2'^{\frac{3}{2}}} \quad (5.50)$$

Assim, é possível determinar as três raízes da equação e as funções de escoamento sendo dependentes de  $J_1$ ,  $J_2'$  e  $\theta$ . Visto que a equação (5.50) fornece uma alternativa conveniente para o terceiro invariante e, como o método é tratado de maneira geral, inclusive para solos, um termo de pressão hidrostática é considerado e é

representado por  $J_1$ . Porém, o critério de von Mises diz que a função de escoamento é dependente somente de  $J_2'$ , e esse fato não se altera.

Como dito, uma forma de computação fácil para o vetor  $\mathbf{a}$  é necessária e como só está sendo considerado von Mises tem-se que:

$$\mathbf{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (5.51)$$

OWEN; HINTON (1980) diz que, para von Mises, o termo  $\frac{\partial F}{\partial (J_2')}$  é uma constante igual a  $\sqrt{3}$ , e que o vetor  $\frac{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  é definido como:

$$\left( \frac{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T = \frac{1}{2(J_2')^{\frac{1}{2}}} [\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad \sigma'_{xy} \quad \sigma'_z],$$

portanto, o vetor de fluxo  $\mathbf{a}$  para critério de von Mises é definido por:

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{3}}{2(J_2')^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_{xy} \\ \sigma'_z \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

### 5.6.3 Determinação do vetor $d_D$

O último termo a ser determinado é o vetor  $d_D$  que agora é possível, pois o vetor  $\mathbf{a}$  foi definido na seção anterior. É sabido que  $d_D = D\mathbf{a}$ , porém para determiná-lo é necessário saber quem é a matriz  $D$ . Conforme verificado anteriormente,  $D$  é a representação matricial do tensor elástico de propriedade material e para representá-lo matricialmente, será necessário separá-lo em tipos de problemas: estado plano de tensão, estado plano de deformação e simetria axial.

A forma explícita da matriz de elasticidade  $D$  para problemas de Estado

Plano de Deformação e simetria axial é:

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Já para o caso de Estado Plano de Tensão a matriz  $D$  é dada por:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Agora, é possível definir completamente a matriz elastoplástica  $D_{ep}$  através do vetor  $d_D$  que, assim como a matriz elástica  $D$ , é determinado dependendo do tipo de problema. Para problemas de Estado Plano de Deformação e simetria axial, tem-se que  $d_D$  é definido por:

$$d_D = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu}a_1 + \frac{E\nu(a_1+a_2+a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \frac{E}{1+\nu}a_2 + \frac{E\nu(a_1+a_2+a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\nu}a_4 + \frac{E\nu(a_1+a_2+a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

em que,  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  são as componentes do vetor  $\mathbf{a}$ , e  $G$  é o *módulo de cisalhamento* definido por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Já para problemas de Estado Plano de Tensão o vetor  $d_D$  é escrito como

$$d_D = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu}a_1 + \frac{E\nu(a_1+a_2)}{1-\nu^2} \\ \frac{E}{1+\nu}a_2 + \frac{E\nu(a_1+a_2)}{1-\nu^2} \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\nu}a_4 + \frac{E\nu(a_1+a_2)}{1-\nu^2} \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

## 6 MÉTODO ALI ELASTOPLÁSTICO

Neste capítulo será mostrado como foi feito para unir o método ALI com a teoria de plasticidade para pequenas deformações. Na última seção dois exemplos simulados serão exibidos: vaso de pressão cilíndrico e estrangulamento de uma barra circular.

### 6.1 Modelagem Elastoplástica Utilizando o ALI

Para se modelar grandes deformações de materiais elastoplásticos utilizando o método ALI considera-se que os incrementos de força, que o método utiliza, são sempre pequenos o suficiente.

Como em cada incremento está sendo feita uma pequena deformação, a premissa que se parte é de que nesse incremento, caso o material plastifique, a teoria de plasticidade para pequenas deformações seja válida.

Toda a teoria de plasticidade apresentada baseou-se na relação de tensão-deformação dada pela lei de Hooke, portanto, o tensor de propriedade de material, (4.6), deve ser trocado pelo tensor de propriedade do material que a lei de Hooke define:

$$L_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.1)$$

em que  $\lambda$  e  $\mu$  estão relacionados com  $E$  e  $\nu$  como dito anteriormente.

Esquemáticamente o método ALI elastoplástico pode ser representado na

Figura 6.1. O que diferencia do algoritmo do ALI elástico é a verificação se houve plastificação. Nessa etapa o algoritmo do ALI elástico simplesmente atualiza as tensões através de (3.21).

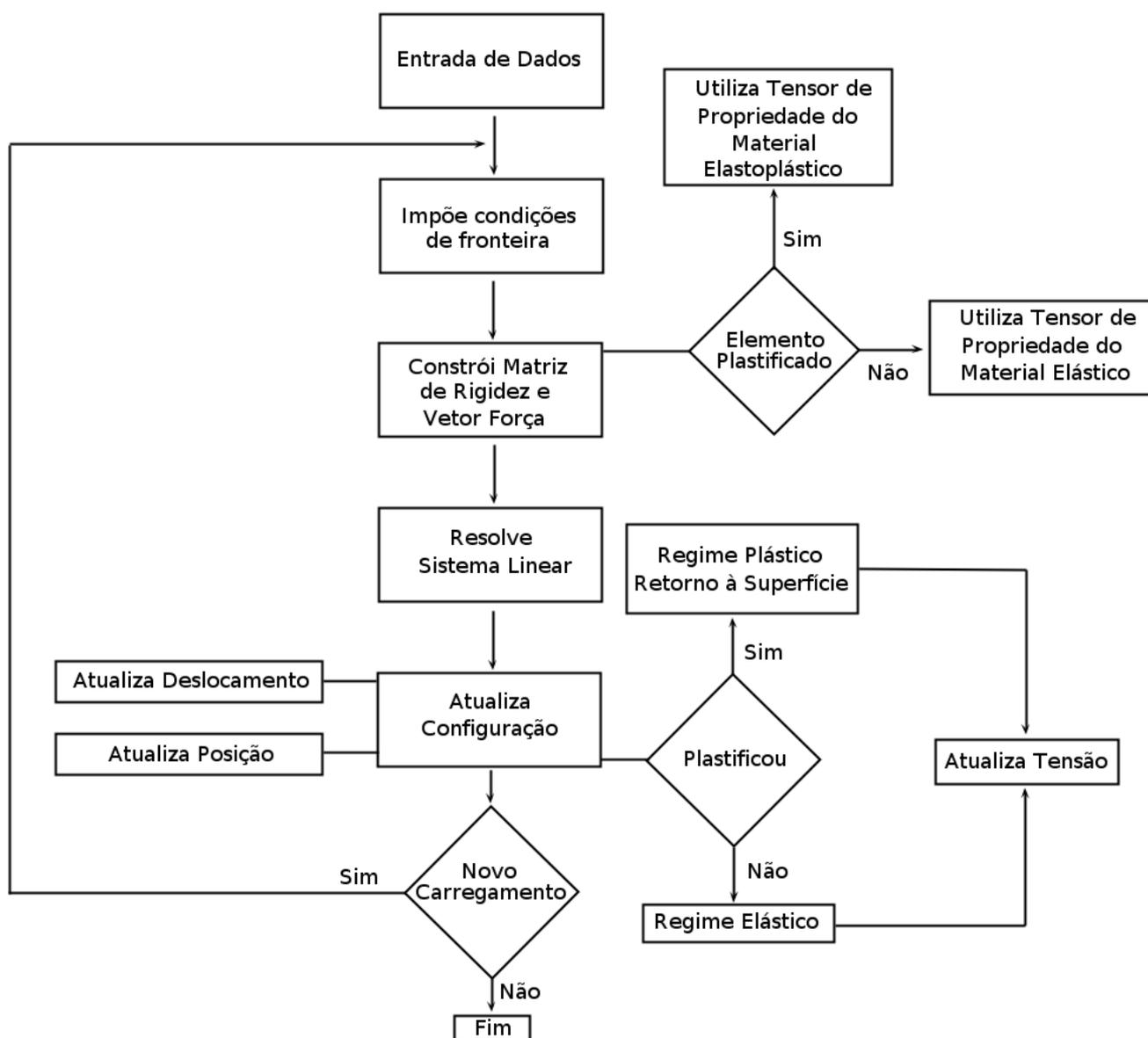


Figura 6.1: Esquema método ALI elastoplástico

## 6.2 Resultados Numéricos

Nesta seção serão apresentados alguns resultados numéricos obtidos na pesquisa. Todas as implementações foram feitas em linguagem orientada a objetos C++ utilizando a *IDE(Integrated Development Environment ou Ambiente Integrado de Desenvolvimento)* Qt Creator. Os gráficos que irão ser apresentados foram gerados no Matlab.

Em termos de implementação é válido ressaltar dois algoritmos: o primeiro é o de resolução do sistema linear que considera que as matrizes geradas para cada incremento de força, são armazenadas considerando sua banda. O método utilizado para a resolução dos sistemas lineares é a eliminação gaussiana adaptada para sistemas em banda.

O segundo algoritmo importante é o de retorno à superfície de escoamento. Existem vários algoritmos possíveis de serem implementados, porém como foi seguido o livro de OWEN; HINTON (1980), o mesmo algoritmo foi implementado. Tal considera um retorno radial à superfície de escoamento para a projeções das tensões inadmissíveis.

### 6.2.1 Vaso de pressão cilíndrico

Neste exemplo será apresentado o primeiro resultado obtido considerando material elastoplástico e o método ALI, porém, este não é um exemplo de grande deformação. O objetivo é validar os resultados e a interação do método ALI com a teoria da plasticidade.

Considera-se o caso de um vaso de pressão cilíndrico de parede espessa subme-

tido a pressão interna, da mesma maneira que foi apresentado em OWEN; HINTON (1980). A condição de deformação plana é assumida. As propriedades do material estão na Tabela 6.1. A malha, que é formada por 120 elementos finitos do tipo  $Q_4$ , e as condições de fronteira estão representadas na Figura (6.2). Devido à simetria do problema, somente um quarto da seção transversal do vaso de pressão é necessária para a simulação. O critério de von Mises adotado é linear e dado na forma:

$$\bar{T} = \sigma_y + h' d\bar{\varepsilon}^p. \quad (6.2)$$

Propriedade	Valor
módulo elástico $E$	$2.1 \times 10^4 \text{ dN/mm}^2$
coeficiente de Poisson $\nu$	0.3
tensão de escoamento uniaxial $\sigma_y$	$24 \text{ dN/mm}^2$
parâmetro de encruamento por deformação $h'$	0

Tabela 6.1: Propriedades do material para o exemplo de vaso de pressão cilíndrico.

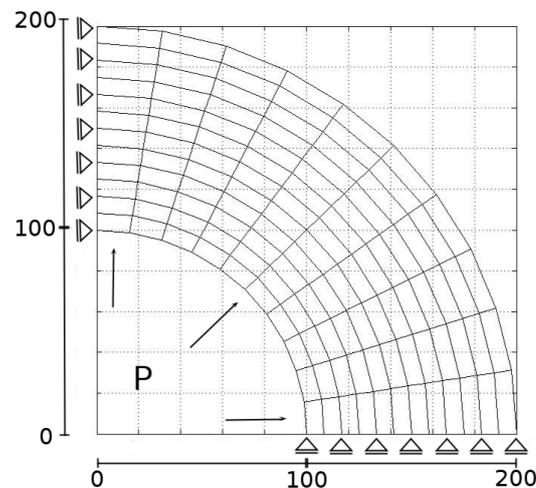


Figura 6.2: Malha de 120 elementos utilizada e condições de contorno.

Pela simetria do problema, a teoria diz que os elementos mais próximos a face interna (onde a pressão está sendo aplicada) são os primeiros a plastificar. A Figura 6.3 mostra que isso de fato acontece na simulação, onde os elementos próximos esta face são os primeiros a plastificar e a plastificação segue em direção à face externa.

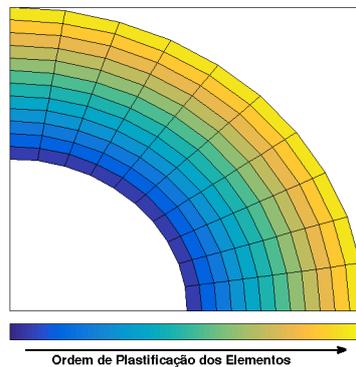


Figura 6.3: Ordem da plastificação dos elementos se dá a partir da face interna em direção a face externa.

Na Figura 6.4 é mostrado a relação entre a pressão aplicada e o deslocamento da face interna do cilindro. Na Figura 6.5 são apresentados os resultados da distribuição da tensão principal  $T_\theta$  ao longo do eixo radial do vaso para alguns valores de pressão aplicada. Para esta simulação foram usados 180 passos do método ALI com  $\Delta P = 0.1$

Os resultados obtidos foram comparados com as soluções teóricas apresentadas em OWEN; HINTON (1980) e concordam com a referência sendo praticamente coincidentes.

### 6.2.2 Estrangulamento de uma barra circular

Neste exemplo, será apresentado o caso em que o material elastoplástico sofre grandes deformações. O seguinte problema é um exemplo clássico que foi analisado por SIMO; HUGHES (1998), SIMO; ARMERO (1992), TAYLOR (2010), SOUZA NETO et al. (1996), SOUZA NETO; PIRES; OWEN (2005), ARMERO; GALSER (1997), ELGUEDJ; HUGHES (2011), entre outros.

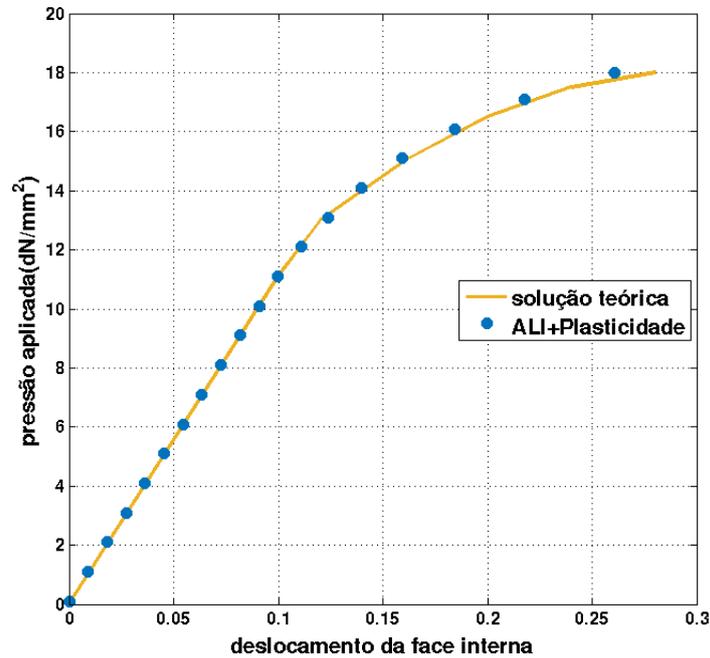


Figura 6.4: Deslocamento da face interna do cilindro com o aumento da pressão.

Diferentemente do livro e dos artigos citados, que desenvolvem uma teoria específica para grandes deformações para materiais elastoplásticos, a ideia é aproveitar o fato do método ALI resolver um problema de pequenas deformações para cada incremento de força e aplicar a teoria de plasticidade para pequenas deformações.

O critério de von Mises continuará sendo adotado, porém, agora, em uma versão não linear dada por:

$$\bar{T} = \sigma_y + h' d\bar{\epsilon}^p + (\sigma_\infty - \sigma_y)(1 - e^{-\delta d\bar{\epsilon}^p}), \quad (6.3)$$

em que  $\sigma_\infty$  é a saturação de tensão de escoamento e  $\delta$  é o expoente de saturação.

Este exemplo, considera uma barra de  $53.334\text{mm}$  de altura e  $12.826\text{mm}$  de largura em estado plano de tensão, porém, pela simetria do problema somente  $\frac{1}{4}$  da barra precisa ser considerada para a simulação numérica. Para controlar a lo-

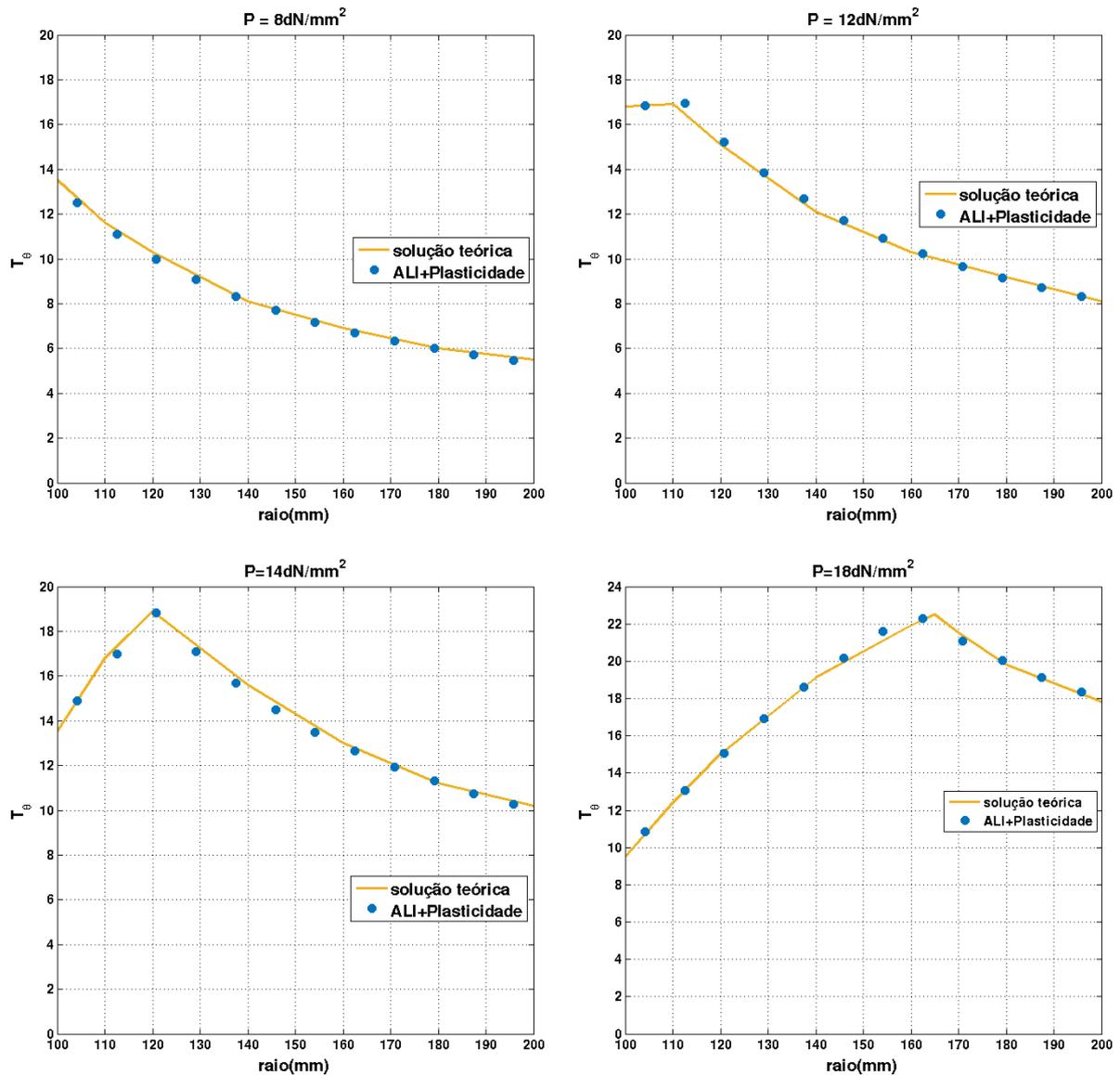


Figura 6.5: Distribuição da tensão principal  $T_\theta = \frac{T_1+T_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_1-T_2}{4}\right)^2 + T_{12}^2}$  para alguns valores de pressão aplicada  $P$ .

calização do estrangulamento, o centro da barra é reduzido em 0.982 do original. Um deslocamento prescrito de  $5 \text{ mm}$  é aplicado no topo da barra. As condições de contorno e a malha são mostrados na Figura (6.6). As propriedades do material são

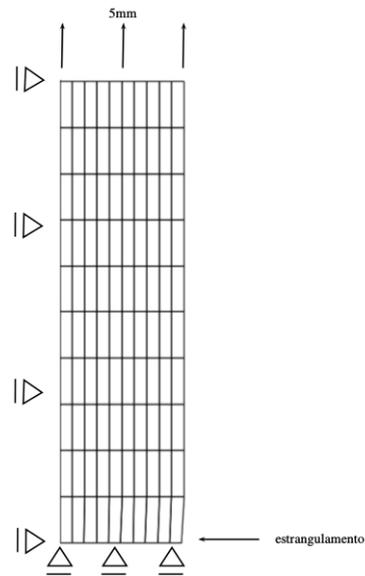


Figura 6.6: Malha e condições de contorno.

mostradas na Tabela 6.2.

Propriedade	Valor
módulo de cisalhamento	80.1938GPa
módulo de Bulk	164.21GPa
tensão de escoamento uniaxial $\sigma_y$	0.45GPa
parâmetro de encruamento por deformação $h'$	0.12924GPa
saturação de tensão de escoamento $\sigma_\infty$	0.715GPa
expoente de saturação $\delta$	16.93

Tabela 6.2: Propriedades do material para o exemplo de estrangulamento de uma barra.

Na Figura 6.7, é mostrado o gráfico do deslocamento vertical imposto pelo deslocamento do raio de estrangulamento. A comparação é feita entre o método ALI e o resultado teórico do artigo ELGUEDJ; HUGHES (2011). A plastificação, nesse exemplo, se dá logo no início da deformação e o método ALI adaptado para plasticidade se comporta bem até certo ponto. Porém, a partir do deslocamento imposto de 4mm começam a ocorrer diferenças, provavelmente devido a modelagem

diferente que foi feita.

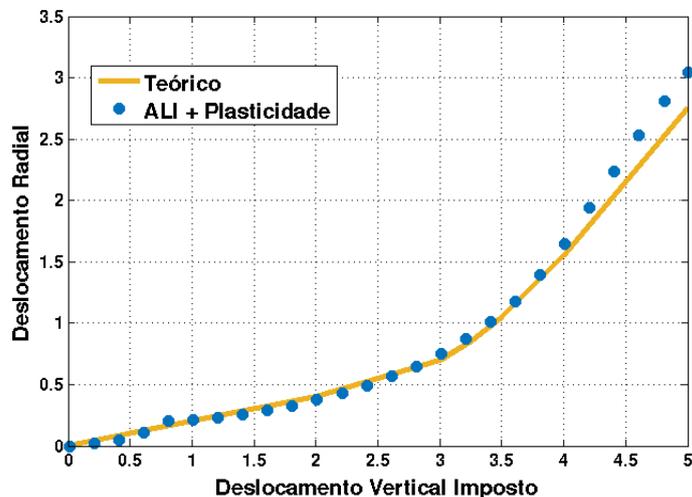


Figura 6.7: Comparação entre o resultado teórico e o método ALI adaptado para plasticidade. Deslocamento vertical  $\times$  Deslocamento Radial

Na Figura 6.8, é feita a mesma análise da Figura 6.7, porém, agora, considerando o raio. Novamente, o mesmo comportamento é observado.

A Figura (6.9) mostra o erro relativo em porcentagem do cálculo do raio em alguns passos de tempo. O erro confirma que em seu último passo de tempo o erro desta modelagem do ALI é de um pouco mais de 8%. A malha deformada é mostrada na Figura 6.10.

Os resultados apresentados foram satisfatórios, mostrando que a modelagem com ALI adaptado para plasticidade tem um comportamento parecido com o considerado nos artigos base. Porém, ainda é necessário algumas possíveis modificações para que a modelagem represente o fenômeno de maneira mais adequada.

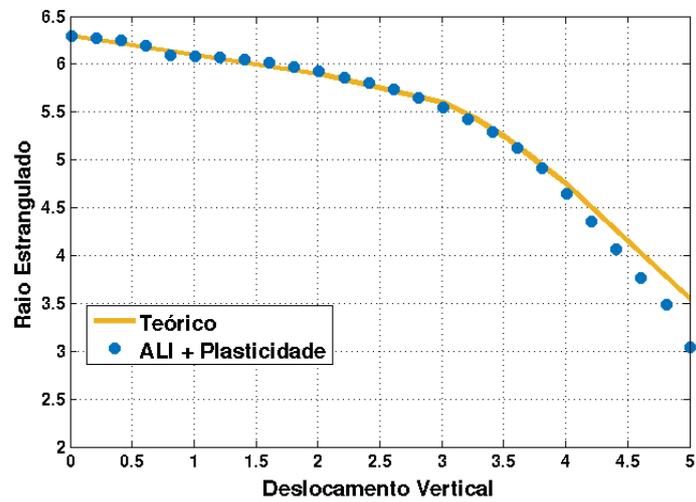


Figura 6.8: Comparação entre o resultado teórico e o método ALI adaptado para plasticidade. Deslocamento vertical  $\times$  Raio

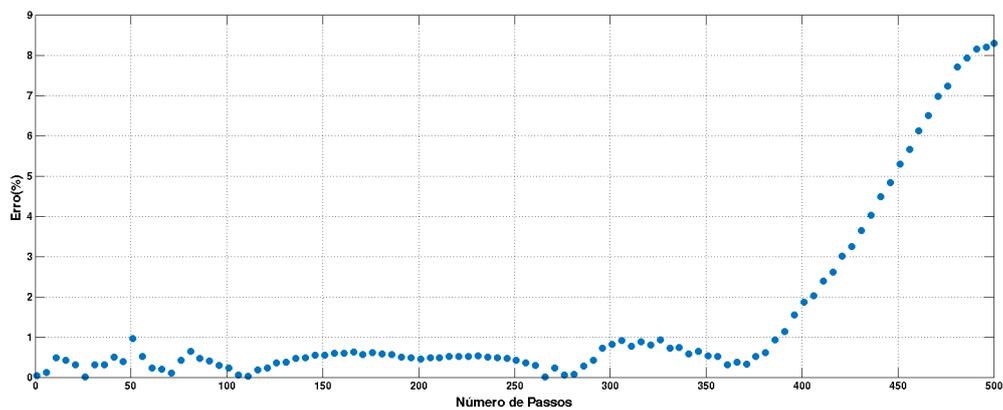


Figura 6.9: Erro relativo em porcentagem em alguns incrementos de força.

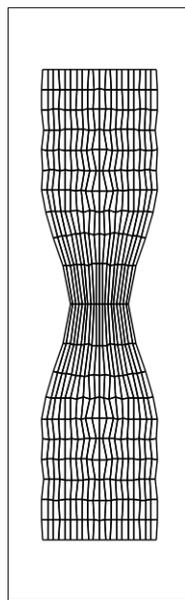


Figura 6.10: Malha deformada no final do deslocamento imposto de 5mm.

## 7 CONCLUSÃO

Fenômenos não lineares e de grandes deformações são observados na natureza e em áreas de produção humana como a engenharia. Cada vez se torna mais importante conhecer melhor esses fenômenos.

Neste trabalho foi exposto o método ALI para materiais elásticos e um pouco sobre a teoria de plasticidade para pequenas deformações. Um programa orientado a objeto foi criado para as simulações utilizando a linguagem C++. Também foram desenvolvidas as formulações forte, fraca, de Galerkin e matricial para um problema de valor de contorno. Essas formulações são importantes para a análise numérica por método de elementos finitos.

Como já provado em artigos anteriores, o método ALI tem um excelente comportamento quando se trata de grandes deformações em materiais elásticos. Quanto ao seu comportamento em materiais elastoplásticos foi visto que para o caso de pequenas deformações o comportamento é excelente. Se tratando de grandes deformações os resultados obtidos foram bons até certo incremento de força, e, depois, mesmo não sendo tão próximos, os resultados foram coerentes com o teórico, no sentido de que não ocorreram comportamentos inesperados. Sendo assim, mais estudos sobre esse tipo modelagem são necessários.

Para trabalhos futuros, seria interessante o estudo de mais critérios de plastificação visando observar o comportamento de outros tipos de materiais diferentes de metais; solos e meios porosos, por exemplo. Sobre a parte computacional, seria interessante a implementação da axissimetria no programa, visto que uma grande dificuldade do trabalho foi encontrar exemplos que não fossem axissimétricos. Seria

interessante considerar elementos finitos de outros tipos (triângulos, quadriláteros do tipo Q8, etc.) para modelar geometrias mais gerais. Um estudo mais apurado sobre os algoritmos de retorno à superfície seria importante, visto que, como o que foi utilizado não é tão recente, possíveis algoritmos melhores devem ter sido sugeridos.

## REFERÊNCIAS

- ARMERO, F.; GALSER, S. On formulation of enhanced strain finite elements in finite deformation. **Engineering Computations**, [S.l.], v.14, p.759–791, 1997.
- CIARLET, P. **Mathematical Elasticity. Three Dimensional Elasticity**. Amsterdam: North-Holland, 1988.
- CIPOLATTI, R.; LIU, I.-S.; RINCON, M. Mathematical Analysis os Successive Linear Approximation for Mooney-Rivlin Material Model in Finite Elasticity. **Journal of Applied Analysis and Computation**, Shangai, v.2, p.363–379, 2012.
- COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. New York: John Wiley and Sons, 1989.
- ELGUEDJ, T.; HUGHES, T. Isogeometric analysis of nearly incompressible large strain plasticity. **ICES Report**, [S.l.], p.11–35, 2011.
- HILL, R. **The Mathematical Theory in Plasticity**. Oxford: Clarendon Press, 1950.
- HUGHES, T. **The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. New York: Dover Publications, 2000.
- KHAN, A.; HUANG, S. **Continuum Theory of Plasticity**. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- LIANIS, G.; FORD, H. An Experimental Investigation of the Yield Criterion and the stress-strain law. **Journal of Mechanics and Physics of Solid**, London, v.5, p.215–222, 1957.
- LIU, I.-S. **Continuum Mechanics**. Germany: Springer, 2002.

- LIU, I.-S. A Note on Mooney-Rivlin Material Model. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, Shanghai, v.24, p.583–590, 2011.
- LIU, I.-S. Successive Linear Approximation for Boundary Value Problems of Non-linear Elasticity in Relative-Descriptive Formulation. **International Journal of Engineering Science**, Shanghai, v.49, p.635–645, 2011.
- LIU, I.-S.; CIPOLATTI, R.; RINCON, M. Successive Linear Approximation for Finite Elasticity. **Computational and Applied Mathematics**, Shanghai, v.3, p.465–478, 2010.
- LIU, I.-S. et al. Successive Linear Approximation for Large Deformation - Instability of Salt Migration. **Journal of Elasticity**, Shanghai, v.114, p.19–39, 2014.
- NAYAK, G.; ZIENKIEWICZ, O. Convenient form of stress invariants for Plasticity. **Journal of the Structural Division of A.S.C.E.**, New York, v.98, p.949–953, 1972.
- ODEN, J. **Finite Elements of Nonlinear Continua**. New York: McGraw-Hill, 1972.
- OGDEN, R. **Non-Linear Elastic Deformation**. New York: Ellis Horwood, 1984.
- OWEN, D.; HINTON, E. **Finite Elements in Plasticity**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1980.
- RINCON, M.; LIU, I.-S. **Introdução ao Método de Elementos Finitos - Computação e Análise em Equações Diferenciais Parciais**. Brasil: IM-UFRJ, 2011.
- RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis, Third Edition**. Singapore: McGraw-Hill, 1976.

- SIMO, J.; ARMERO, F. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.l.], v.33, p.1413–1449, 1992.
- SIMO, J.; HUGHES, T. **Computational Inelasticity**. New York: Springer, 1998.
- SIMO, J.; TAYLOR, R. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches, continuum basis and numerical algorithms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, New York, v.85, p.273–310, 1991.
- SOUZA NETO, E. et al. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. **International Journal os Solids and Structures**, [S.l.], v.33, p.3277–3296, 1996.
- SOUZA NETO, E.; PIRES, F.; OWEN, D. F-bar based linear triangles and tetrahedra for finite strain analysis of nearly incompressible solids. Part I: formulation and benchmarking. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.l.], v.62, p.353–383, 2005.
- TAYLOR, R. Isogeometric analysis of nearly incompressible solids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.l.], v.87, p.273–288, 2010.
- ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. **The finite element method. Solid mechanics Vol.2**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.