UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO INSTITUTO DE MATEMÁTICA INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

MATEUS TORRES DE SOUSA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA INTEGRAL DE CONTORNO NA MODELAGEM DE ONDAS INTERNAS

Rio de Janeiro 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO INSTITUTO DE MATEMÁTICA INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

MATEUS TORRES DE SOUSA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA INTEGRAL DE CONTORNO NA MODELAGEM DE ONDAS INTERNAS

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientador: Daniel Gregorio Alfaro Vigo

Rio de Janeiro 2015

S725a	Sousa, Mateus Torres de Aplicação do Método da Integral de Contorno na Modelagem de Ondas Internas / Mateus Torres de Sousa. – Rio de Janeiro, 2015. 74 f.: il.
	Orientador: Daniel Gregorio Alfaro Vigo. Dissertação (Mestrado em Informática) – Universi- dade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemá- tica, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Infor- mática, Rio de Janeiro, 2015.
	1. Ondas internas aquáticas. 2. Método da inte- gral de contorno. 3. Simulação numérica. 4. Campo de pressão. – Teses. I. Vigo, Daniel Gregorio Alfaro (Ori- ent.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Ins- tituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Apli- cações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós- Graduação em Informática. III. Título
	CDD:

MATEUS TORRES DE SOUSA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA INTEGRAL DE CONTORNO NA MODELAGEM DE ONDAS INTERNAS

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

Aprovado em: Rio de Janeiro, _____ de ______ de _____.

Daniel Gregorio Alfaro Vigo (Orientador), D.Sc., IMPA

Adán José Corcho Fernández, D.Sc., IMPA

Mauro Antonio Rincon, D.Sc., UFRJ

Aos meus pais e minha namorada. Com amor e afeto...

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar pela força, capacidade, ânimo e oportunidade de efetuar este trabalho. Eu não estaria aqui sem Ele.

Também agradeço à minha família, em especial aos meus pais, Celia e Sampaio, pelo amor, zelo e empenho na minha educação. Se cheguei até aqui, devo isso a vocês. A minha namorada Eduarda que sempre me apoiou e incentivou com amor e paciência acreditando no meu sucesso.

A todo PPGI da UFRJ, em especial ao meu orientador, prof. Daniel Alfaro, pela dedicação e empenho em ajudar nas minhas dificuldades com toda paciência necessária a um orientador. Agradeço aos meus amigos de laboratório pelo convívio amistoso e peculiar que tivemos no LC3.

Agradeço ao CENPES pelo auxílio financeiro.

RESUMO

SOUSA, Mateus Torres de. Aplicação do Método da Integral de Contorno na Modelagem de Ondas Internas. 2015. 74 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Este trabalho tem como objetivo utilizar a formulação integral de contorno na construção de um método numérico para modelar a propagação de ondas internas na interface entre dois fluidos e obter uma aproximação do campo de pressão no interior dos fluidos. Apresentamos vários exemplos numéricos para ilustrar a precisão do método proposto e também mostrar sua utilidade na simulação das interações de ondas não lineares.

Palavras-chave: Ondas internas aquáticas, método da integral de contorno, simulação numérica, campo de pressão.

ABSTRACT

SOUSA, Mateus Torres de. Aplicação do Método da Integral de Contorno na Modelagem de Ondas Internas. 2015. 74 f. Dissertação (Mestrado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

In this work, we use boundary integral formulation to develop a numerical method to study the propagation of internal waves at the interface of two fluids and obtaining an approximation of the pressure field interior fluid. We present several numerical examples in order to illustrate the accuracy of the proposed method and also to show that its usefulness in the simulation of nonlinear waves interactions.

Keywords: Water internal waves, boundary integral method, numerical simulation, pressure field.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Ondas internas no Mar de Sulu	11
Figura 2.1:	Sistema de duas camadas	18
Figura 3.1:	Conjunto Ω_{ϵ}	31
Figura 3.2:	Ângulo α quando $P_0 \in \partial \Omega$	34
Figura 3.3:	Cédula periódica $\partial \tilde{\Omega}$	37
Figura 5.1:	Pressão no interior da camada para $t=6.9286\ s$ e $t=10.7016\ s$.	65
Figura 5.2:	Decomposição de um perfil de onda em duas ondas viajantes.	
	Mostramos os gráficos de $-\eta(t, x)$	67
Figura 5.3:	Detalhe do perfil da onda viajando para esquerda. Comparação	
	com o perfil de uma onda solitária correspondente da equação ILW.	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Erro de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-5}$ 61Tabela 5.2: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-5}$. . . 61Tabela 5.3: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-3}$. . . 61Tabela 5.4: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-3}$ 62Tabela 5.5: Erro de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-2}$ 62Tabela 5.6: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-2}$. . . 62Tabela 5.7: Erro de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-3}$ 63Tabela 5.8: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-3}$. . . 63Tabela 5.9: Erro de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-2}$ 64Tabela 5.10: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-2}$. . . 64Tabela 5.11: Erro de η para ondas de Stokes de 3^a ordem em que $\alpha = 0.01$. . 65

SUMÁRIO

1	ΙΝΤRODUÇÃO	10		
2 2.1 2.2 2.2 2.3	MODELAGEM MATEMÁTICA DE ONDAS INTERNAS	16 16 20 25 26		
3 3.1 3.2 3.3 3.4	FORMULAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA	$30 \\ 30 \\ 35 \\ 36 \\ 43$		
4 4.1 4.2 4.3	DISCRETIZAÇÃO DO MODELO	$45 \\ 45 \\ 53 \\ 55$		
5 5.1 5.2 5.3 5.4	RESULTADOS ONDAS ESTACIONÁRIAS DE PEQUENA AMPLITUDEONDAS DE STOKES DE 1ª ORDEMONDAS DE STOKES DE 3ª ORDEMDECOMPOSIÇÃO EM ONDAS VIAJANTES	59 60 62 64 65		
6	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	70		
REFERÊNCIAS				
APÍ	APÊNDICE A TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER 7			

1 INTRODUÇÃO

A recuperação de petróleo em águas profundas oceânicas apresenta grandes desafios tecnológicos e operacionais. Por exemplo, o conhecimento da dinâmica oceânica é de vital importância para o desenho e fabricação das diferentes estruturas submergidas que serão utilizadas durante a prospecção e recuperação de petróleo, pois essas estruturas serão submetidas às pressões produzidas pelo movimento das águas oceânicas.

Devido à estratificação das águas oceânicas provocada pelas diferenças de temperatura, salinidade e consequentemente de densidade, sabemos que a dinâmica oceânica é fortemente influenciada pelo movimento das ondas internas que aparecem na interface entre as camadas de água com diferentes densidades.

As ondas internas são fenômenos espetaculares que ocorrem nas interações entre qualquer tipo fluido. A sua presença é bem documentada e são vistas a partir de cima através de leituras feitas na superfície dos oceanos conforme a figura (1). O período dessas ondas varia desde alguns minutos podendo chegar a meia hora e o seu comprimento de onda varia entre algumas centenas de metros podendo chegar à quilômetros.

Um caminho possível para o estudo de ondas internas é através de Modelos Reduzidos. Esses modelos são obtidos através de relações assintóticas restringindo-os a determinadas condições gerando sistemas com uma quantidade menor de parâmetros. Choi e Camassa consideram em *CHOI*; *CAMASSA* (1999) duas camadas contendo fluidos inviscidos, imiscíveis e irrotacionais, em que o fluido mais denso ocupa a camada inferior. O regime assintótico adotado por eles considera que a



Figura 1.1: Ondas internas no Mar de Sulu

profundidade da camada superior é bem pequena quando comparada ao comprimento de onda característico da interface. Já a profundidade da camada inferior é comparável ao comprimento de onda característico. A partir do trabalho de Choi e Camassa, Cardeña apresentou em *CARDEA* (2012) uma família de sistemas assintoticamente equivalentes ao de Choi e Camassa no regime fracamente não linear. Zárate *ZARTE* (2007) generalizou os Modelos Reduzidos apresentados por Choi e Camassa para o caso em que o fundo é irregular e também apresentou um método para aproximar a pressão no interior da camada superior. (1)

Uma outra alternativa para abordar os problemas de Dinâmica dos Fluidos é através de uma formulação integral de contorno. Esta formulação consiste em relacionar as condições de contorno Neumann e Dirichlet em diferentes partes da fronteira, ou talvez alguma combinação delas, a partir da Terceira Identidade de Green aplicada a uma função harmônica. Alguns dos mais importantes Problemas de Contorno para EDP's elípticas como, por exemplo, Equações de Helmholtz e Biharmônicas, têm sido estudados e resolvidos numericamente através dessa abordagem, e, dependendo dos requisitos do problema, a utilização da formulação pode ser o meio mais eficaz de resolvê-lo *ATKINSON*; *HAN* (2009).

A fim de obter a derivada normal da solução na fronteira para resolver um problema com Condição de Contorno de Dirichlet cujo domínio é limitado ou não, define-se o operador Dirichlet-to-Neumann conforme conhecido na literatura. Se o domínio tem uma geometria simples, o operador é fácil de determinar. Mas seu cálculo eficiente torna-se um desafio, caso a geometria domínio se desvie significativamente do simples. Daí a necessidade de encontrar formas eficientes para calcular esse operador sensível a geometria domínio.

Em GUIDOTTI (2008), foi proposto a utilização de um operador Dirichletto-Neumann oriundo dessa formulação para obter os dados de Neumann. O autor sugeriu a utilização de uma função logarítmica periódica para o núcleo do operador a fim de obter melhores resultados numéricos. Tal função é conhecida como de função de Green EVANS (2010). Seu trabalho apresentou um método de integral de contorno pseudo-espectral preciso e estável com bom desenpenho tanto para curvas não-suaves como para as de pouca suavidade. CLAMONDet al. (2005) apresenta um esquema numérico para simulações de ondas aquáticas de superfície no caso tridimensional. São consideradas ondas não-lineares. O método baseia-se em um algoritmo iterativo de convergência rápida para calcular o operador Dirichletto-Neumann. Como em GUIDOTTI (2008), esse operador é obtido a partir da formulação integral de contorno porém utilizando outra função para o núcleo do operador.

Em RIBEIRO – JUNIOR (2014) foi utilizada uma formulação integral de

fronteira para obter órbitas de partículas abaixo de ondas de superfície cujo fluxo é irrotacional estando sobre a influência de correnteza uniforme que varia linearmente com a profundidade (vorticidade constante). Para isso, além da formulação integral de contorno, foi utilizado o método das imagens sobre o fundo plano junto a uma função de Green periódica apresentada em *GUIDOTTI* (2008). Também foram apresentados os efeitos da vorticidade na pressão no interior da camada.

Nesse levantamento bibliográfico é possível notar um ponto em comum: nesses trabalhos consultados, não foi utilizada a formulação integral de contorno para obter o campo de pressão no interior das camadas de um sistema de onda interna. Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo matemático da relação entre o campo de velocidade de partículas no interior das camadas. Também tem como finalidade desenvolver códigos computacionais orientados à simulação numérica de forma eficiente para a propagação de ondas na interface e do campo de pressão em toda a faixa de água. Para isso, utilizaremos o software Matlab na implementação dos códigos.

A teoria responsável por associar o comportamento no interior das camadas com a interface é a formulação de integral de contorno ATKINSON; HAN (2009). Através dela, podemos calcular o potencial da velocidade em qualquer ponto dentro do fluido sem realizar qualquer tipo de expansão em série de potências ou análise assintótica. A partir dessa formulação serão introduzidos dois operadores integrais responsáveis por conectar os dados de Dirichlet e Neumann. Dentre estes, é necessário uma abordagem cautelosa, conforme proposta em ATKINSON; HAN (2009), para o operador Neumann-Dirichlet devido a sua singularidade.

Como as funções consideradas são periódicas e suaves ao longo da interface, utilizaremos métodos espectrais (Transformada de Fourier) na direção x para a representação numérica de suas derivadas. Para a evolução da variável no tempo, utilizaremos alguns Métodos de Diferenças Finitas presentes na literatura, a saber, Euler Explícito e Leap-Frog.

Esta dissertação aborda alguns aspectos teóricos da Modelagem do Problema assim como da formulação integral de contorno e também apresenta resultados numéricos obtidos através do algoritmo desenvolvido. Ela está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 1 apresentaremos aspectos referentes à modelagem do problema e algumas soluções aproximadas encontradas na literatura que correspondem a diferentes regimes assintóticos. Na Seção 1.1 será apresentado a modelagem do problema a partir da Equação de Euler na forma vetorial assim como sua condição de fronteira. Na Seção 1.2, consideraremos o sistema linearizado em que a onda está próxima do repouso. Adotaremos que tais as ondas são viajantes. Na seção 1.3 exibiremos os Modelos Reduzidos apresentados em CHOI; CAMASSA (1999), CARDEA (2012), ZARTE (2007) e uma aproximação, oriunda desses modelos, da pressão na camada superior obtida por Zárate em ZARTE (2007).

O Capítulo 2 é reservado para a discussão teórica da formulação de integral de contorno e a sua aplicação ao sistema estudado. A formulação é importante pois a partir das condições de fronteira conseguiremos encontrar o potencial da velocidade e a pressão no interior das camadas. Na Seção 2.1, consideraremos uma função harmônica e utilizaremos a Terceira Identidade de Green para obter relações entre seu valor no interior de um domínio arbitrário e sua fronteira. Na Seção 2.2, a partir dessa formulação, introduziremos operadores integrais que associam as condições de Dirichlet e Neumann. A Seção 2.3 é destinada à utilização dos operadores no sistema de duas camadas, com as devidas adaptações, afim de obter a pressão no interior das camadas. No Capítulo 3 exibiremos os métodos numéricos utilizados assim como a discretização dos operadores integrais do capítulo 2. Também será apresentado o algoritmo desenvolvido. A Seção 3.1 é usada para mostrar a abordagem discreta dos operadores integrais e diferenciais utilizados no algoritmo. Na Seção 3.2 apresentaremos a discretização temporal usada e o método numérico usado para a evolução temporal. Na Seção 3.3 é reservado ao algoritmo desenvolvido.

No Capítulo 4 são apresentados alguns resultados numéricos obtidos para o comportamento da onda interna e da pressão no interior das camadas. Para a validação do algoritmo, seus resultados serão comparados com as soluções aproximadas apresentadas no capítulo 1. Na Seção 4.1 serão exibidos os resultados para o caso de ondas estacionárias. A Seção 4.2 é serão apresentados os resultados para o caso de ondas viajantes de 1^a ordem conforme apresentado na Seção 1.2. Também apresentaremos resultados para regimes de ondas não-lineares.

No último capítulo apresentaremos as conlusões a partir dos resultados obtidos levando em conta a teoria envolvida e os métodos numéricos utilizados. Também proporemos alguns trabalhos futuros que possam contribuir com comunidade científica.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA DE ONDAS IN-TERNAS

Neste capítulo apresentaremos as Equações de Euler para dinâmica dos fluidos, segundo a Teoria Potencial *LAMB* (1932), aplicadas a um sistema de dois fluidos. Na literatura, existem várias maneiras de simplificar essas equações com o objetivo de obter soluções aproximadas, por exemplo, via modelos reduzidos *CHOI; CAMASSA* (1999), *CHOI; CAMASSA* (1996), *ZARTE* (2007). Além de alguns desses modelos reduzidos, apresentaremos também uma solução analítica para o problemas linearizados e não linearizados. Essas soluções aproximadas serão usadas para validar os métodos numéricos que serão exibidos posteriormente.

2.1 Teoria Potencial

Como ponto de partida do estudo matemático das ondas internas, consideraremos a propagação de uma onda aquática na superfície livre de um canal com fundo plano. Consideraremos que o fluido é inviscido, incompressível, homogêneo e está sujeito a um campo gravitacional constante. As componentes $u_1 e u_2$ do vetor velocidade **u** correspondem às coordenadas espaciais (x, y), respectivamente, em cada instante t. Assumiremos que a única força externa atuante sobre o sistema é a gravidade. Adotaremos também que a gravidade g possui sentido negativo de y e **j** indica o vetor unitário a direção y. Com isso, a partir da Equação de Euler na forma vetorial WHITHAM (1974), o sistema é dado por

$$\begin{cases} u_{1,x} + u_{2,y} = 0\\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{j} \qquad \text{em} \quad -h \le y \le \eta(t, x) \qquad (2.1) \end{cases}$$

Como o fluxo é irrotacional, temos que $rot(\mathbf{u}) = 0$. Com isso, pode-se considerar ϕ como o potencial da velocidade, ou seja, $\nabla \phi = \mathbf{u}$. Integrando a segunda equação de (2.1) com relação às variáveis espaciais *LAMB* (1932), temos a relação de Bernoulli

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gy + \frac{p}{\rho} = 0$$
(2.2)

em que e p = p(t, x, y) representa a pressão no ponto (x, y) no instante t. Observe que qualquer função B(t) que venha a surgir nessa integração pode ser absorvida pelo potencial da velocidade. Como o fluxo é irrotacional e incompressível, pode-se assegurar que ϕ é uma função harmônica no domínio WHITHAM (1974), ou seja,

$$\Delta \phi = 0 \tag{2.3}$$

Para uma partícula sobre a superfície da onda, ou seja, em $y = \eta(t, x)$, a condição cinemática para a velocidade do fluido é dada por

$$\phi_y = \eta_t + \eta_x \phi_x \tag{2.4}$$

Além disso, ao considerar que o fundo do canal é impermeável, a condição no fundo do canal é dada por

$$\phi_y = 0 \quad \text{em} \quad y = -h. \tag{2.5}$$

Portanto, as Equações de Euler para fluidos inviscidos, incompressíveis e homogêneos contendo uma superfície livre podem ser representadas pelo sistema (2.6). Além disso, nesse sistema foram incluidas as condições de fronteira cinemática, dinâmica (Relação de Bernoulli) e de impermeabilidade do fundo que foi considerado plano de profundidade h.

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\\ \eta_t + \phi_x \eta_x - \phi_y = 0, \quad \text{em} \quad y = \eta(x, t)\\ \phi_t + gy + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} = 0,\\ \phi_y = 0 \quad \text{em} \quad y = -h \end{cases}$$
(2.6)

onde o domínio é dado por $\Omega = \mathbb{R} \times (-h, \eta(t, x)).$

Tais equações podem ser utilizadas para modelar um sistema de dois fluidos em que a tampa do canal também é plana. Os fluidos interagem através da interface e possuem densidades distintas sendo que o fluido mais denso ocupa a camada inferior. Adotaremos o índice 1 para referenciar os elementos da camada superior e 2 para os elementos da camada inferior conforme ilustra a figura (2.1).



Figura 2.1: Sistema de duas camadas

Consideraremos que $\phi_j(t, x, y)$ é o potencial da velocidade do fluido na camada j (onde j = 1, 2), ou seja, $\nabla \phi_j(t, x, y) = \mathbf{u}_j(t, x, y)$. A densidade e a pressão no interior da camada j são representadas, respectivamente, por ρ_j e $p_j(t, x, y)$. A interface entre as camadas é dada por $y = \eta(t, x)$. Para simplificar a notação, consideraremos $\phi_j(t, x, y) = \phi_j$.

Assim as equações de Euler para o sistema de dois fluidos tem a forma

$$\Delta \phi_{j} = 0 \ em \ \Omega_{j}$$

$$\phi_{j,n} = 0 \ em \ \partial \Omega_{jr}$$

$$\eta_{t} + \phi_{jx}\eta_{x} - \phi_{jy} = 0 \ em \ y = \eta(x,t)$$

$$\phi_{j,t} + g\eta + \frac{1}{2} |\nabla \phi_{j}|^{2} + \frac{p_{j}}{\rho_{j}} = 0 \ em \ y = \eta(x,t)$$

(2.7)

em que

$$\Omega_1 = \{\eta(t, x) \le y \le h_1\}$$
$$\partial \Omega_{1r} = \{y = h_1\}$$
$$\Omega_2 = \{-h_2 \le y \le \eta(t, x)\}$$
$$\partial \Omega_{2r} = \{y = -h_2\}$$

O sistema acima é completado considerando que a pressão permanece contínua ao atravessar a interface, o que do ponto de vista físico significa que a tensão superficial é desprezível. Assim temos a condição $p_1 = p_2$ em $y = \eta(t, x)$.

Adotaremos que as funções ϕ_j , $\eta \in p_j$ das Equações de Euler são suaves, 2L -periódicas na variável x. Abordaremos (2.7) a fim de estudar a relação entre as camadas assim como a obtenção de códigos computacionais para aproximar o campo de pressão no interior das camadas.

2.2 Soluções aproximadas das Equações de Euler

Nesta seção serão apresentadas algumas soluções aproximadas para o sistema (2.7) de acordo com *LAMB* (1932) e *WHITHAM* (1974). Devido à não-linearidade de alguns termos do sistema, obter a solução analítica é extremamente difícil. Por isso procuramos soluções aproximadas através de um processo de linearização, como por exemplo considerando uma onda próxima do repouso. Para isso, serão considerados as seguintes variáveis adimensionalizadas:

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \frac{x}{L} & \tilde{y} &= \frac{y}{h_1} \\
c_0 &= \sqrt{gh_1} & \tilde{t} &= \frac{c_0 t}{L} & \tilde{\eta} &= \frac{\eta}{a} \\
\tilde{\eta} &= \frac{\eta}{a} & \tilde{\phi}_i & p &= \rho_1 g a \tilde{p}
\end{aligned}$$
(2.8)

em que L representa o período da onda e a sua amplitude. Substituindo (2.8) no sistema (2.7) e desconsiderando os acentos da notação temos o novo sistema:

$$\begin{cases} \phi_{j,xx} + \frac{1}{\beta}\phi_{j,yy} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_i^0 \\ \phi_{j,n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_j^0 \\ \eta_t + \alpha\phi_{j,x}\eta_x - \frac{1}{\beta}\phi_{j,y} = 0 \quad \text{em} \quad y = \alpha\eta \\ \phi_{j,t} + \frac{\alpha}{2}\left(\phi_{j,x}^2 + \frac{1}{\beta}\phi_{j,y}^2\right) + \frac{\rho_1}{\rho_j}p + \eta = 0 \quad \text{em} \quad y = \alpha\eta(x,t) \end{cases}$$
(2.9)

onde $\alpha = \frac{a}{h_1} = \frac{\phi_0}{c_0 L} e \beta = \left(\frac{h_1}{L}\right)^2$. Com as variáveis escalonadas, temos os seguintes conjuntos:

$$\begin{split} \Omega_1^0 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ \alpha \eta < y < 1 \} \\ \Omega_2^0 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ -\frac{h_2}{h_1} < y < \alpha \eta \} \end{split}$$

Como pode ser visto, o sistema (2.9) possui equações não lineares. A fim de procurar por soluções para o caso linearizado, consideraremos que a amplitude da onda é muito menor do que a altura da camada superior. Portanto, quando $\alpha = \frac{a}{h_1} \rightarrow 0$, os termos do sistema (2.9) que possuem α são anulados assim como Ω_j^0 mudam conforme apresentado a seguir:

$$\begin{cases} \phi_{j,0,xx} + \frac{1}{\beta}\phi_{j,0,yy} = 0 & \text{em } \Omega_{j}^{0} \\ \phi_{j,n} = 0 & \text{em } y = \overline{y}_{j} \\ \eta_{0,t} - \frac{1}{\beta}\phi_{j,0,y} = 0 & \text{em } y = 0 \\ \phi_{j,0,t} + \frac{\rho_{1}}{\rho_{j}}p_{o} + \eta_{0} = 0 & \text{em } y = 0, \end{cases}$$
(2.10)

em que $\overline{y}_1 = 1$, $\overline{y}_2 = -\frac{h_2}{h_1}$, $\Omega_1^0 = \mathbb{R} \times (0,1)$ e $\Omega_2^0 = \mathbb{R} \times (-\frac{h_2}{h_1}, 0)$.

Considerando que tal sistema representa ondas viajantes, as soluções podem ser representadas como $\phi_{j,0}(x.y,t) = e^{i(kx\pm\omega t)}A_i(y), \eta_0(x,t) = Ce^{i(kx\pm\omega t)} e p_0(t,x) = \overline{p}e^{i(kx\pm\omega t)}$ em que ω representa a frequência da onda e k o número de ondas. Sendo assim,

$$\begin{cases}
-k^{2}\cos(kx\pm\omega t)e^{i(kx\pm\omega t)}\beta A_{j}(y) + \cos(kx\pm\omega t)e^{i(kx\pm\omega t)}A_{j}'' = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_{j}^{0} \\
A_{j}'(y) = 0 \quad \text{em} \quad y = \overline{y}_{j} \\
\pm i\omega C\beta = A_{j}'(y) \quad \text{em} \quad y = 0 \\
\pm i\omega A_{j}(y) + \frac{\rho_{1}}{\rho_{j}}\overline{p} + C = 0 \quad \text{em} \quad y = 0,
\end{cases}$$
(2.11)

Como procuramos por soluções não triviais, podemos considerar que $e^{i(kx\pm\omega t)}\neq$

0, logo temos que

$$\begin{cases} A_j''(y) - k^2 \beta A_j(y) = 0, \\ A_j'(\overline{y}_j) = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} A_j(y) = C_{1j}e^{k\sqrt{\beta}y} + C_{2j}e^{-k\sqrt{\beta}y} \\ A'_j(\overline{y}_j) = k\sqrt{\beta}[C_{1j}e^{k\sqrt{\beta}\overline{y}_j} - C_{2j}e^{-k\sqrt{\beta}\overline{y}_j}] = 0, \end{cases}$$
(2.12)

Logo, $C_{2j} = C_{1j} e^{k\sqrt{\beta}\overline{y}_j}$. Fazendo as devidas substituições em (2.12), encontramos que:

$$A_{j}(y) = C_{1j} \left[e^{k\sqrt{\beta}y} + e^{k\sqrt{\beta}(2\overline{y}_{j}-y)} \right]$$
$$= 2C_{1j}e^{k\sqrt{\beta}\overline{y}_{j}} \cosh[k\sqrt{\beta}(y-\overline{y}_{j})]$$
$$= \overline{A}_{j} \cosh[k\sqrt{\beta}(y-\overline{y}_{j})]$$

em que $\overline{A}_j = 2C_{1j}e^{k\sqrt{\beta}}$. Pela terceira equação de (2.11) podemos encontrar a seguinte relação entre \overline{A}_1 e \overline{A}_2 :

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \operatorname{senh}[k\sqrt{\beta}\overline{y}_1] = \overline{A}_2 \operatorname{senh}[k\sqrt{\beta}\overline{y}_2] \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A}_1 = \frac{\overline{A}}{\operatorname{senh}[k\sqrt{\beta}\overline{y}_1]} \\ \overline{A}_2 = \frac{\overline{A}}{\operatorname{senh}[k\sqrt{\beta}\overline{y}_2]}, \end{cases}$$

Daí, o potencial da velocidade é dado por

$$\phi_1(t, x, y) = \frac{A}{\operatorname{senh}[k\sqrt{\beta}\overline{y}_1]} e^{i(kx\pm\omega t)} \cosh[k\sqrt{\beta}(y-\overline{y}_1)]$$

$$\phi_2(t, x, y) = \frac{\overline{A}}{\operatorname{senh}[k\sqrt{\beta}\overline{y}_2]} e^{i(kx\pm\omega t)} \cosh[k\sqrt{\beta}(y-\overline{y}_2)]$$
(2.13)

Pelo sistema (2.11), temos $\pm i\omega C\beta = A'_1(0)$. Então, substituindo o resultado anterior, temos:

$$\eta(t,x) = \pm \frac{\overline{A}}{\sqrt{\beta}} \frac{k}{\omega} i \ e^{i(kx\pm\omega t)}$$
(2.14)

Como $p_1(t, x, 0) = p_2(t, x, 0)$, pela quarta equação de (2.11) temos

$$\pm i\omega \left(\rho_1 A_1(0) - \rho_2 A_2(0)\right) + C(\rho_1 - \rho_2) = 0$$

Substituindo A_1 , A_2 , C na relação anterior e fazendo as devidas simplificações encontramos uma relação entre ω e k que deve ser satisfeita para que o problema tenha solução não-trivial. Essa relação é chamada de relação de dispersão e é dada por

$$\omega^2 = \frac{k(\rho_2 - \rho_1)}{\sqrt{\beta}[\rho_1 \coth(k\sqrt{\beta}h_1) + \rho_2 \coth(k\sqrt{\beta}h_2)]}$$
(2.15)

A partir de ϕ_1 , ϕ_2 e η , a pressão p_j é obtida através da relação de Bernoulli (2.2) para $-h_2 \leq y \leq h_1$. Substituindo os termos adimensionalizados (2.8) na relação anterior

$$\phi_{j,\tilde{t}} + \frac{1}{2} \left(\alpha \phi_{j,\tilde{x}}^2 + \frac{\alpha}{\beta} \phi_{j,\tilde{y}}^2 \right) + \frac{1}{\alpha} \tilde{y} + \frac{\rho_1}{\rho_j} p_j = 0$$

Como α possui ordem maior do que os demais termos, desconsideraremos termos multiplicados por α . Portanto, substituindo $\phi_{1,t} \in \phi_{2,t}$, a pressão pode ser representada por

$$\begin{cases} p_1(t, x, y) = -\frac{y}{\alpha} \pm \overline{A} \ \omega \ \frac{\cosh[k\sqrt{\beta}(y - \overline{y}_1)]}{\operatorname{senh}[k\sqrt{\beta}\overline{y}_1]} \ i \ e^{i(kx \pm \omega t)} \\ p_2(t, x, y) = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \ \frac{y}{\alpha} \ \pm \ \frac{\rho_2}{\rho_1} \ \overline{A} \ \omega \ \frac{\cosh[k\sqrt{\beta}(y - \overline{y}_2)]}{\operatorname{senh}[k\sqrt{\beta}\overline{y}_2]} \ i \ e^{i(kx \pm \omega t)} \end{cases}$$
(2.16)

Portanto, incorporando $\frac{k}{\omega}$ à \overline{A} , as soluções do sistema (2.10) são dadas por:

$$\begin{cases} \eta(t,x) = \pm \frac{\overline{A}}{\sqrt{\beta}} i e^{i(kx\pm\omega t)} \\ \phi_1(t,x,y) = \overline{A} \frac{\omega}{k} \frac{\cosh[k\sqrt{\beta}(y-\overline{y}_1)]}{\sinh[k\sqrt{\beta}\overline{y}_1]} e^{i(kx\pm\omega t)} \\ \phi_2(t,x,y) = \overline{A} \frac{\omega}{k} \frac{\cosh[k\sqrt{\beta}(y-\overline{y}_2)]}{\sinh[k\sqrt{\beta}\overline{y}_2]} e^{i(kx\pm\omega t)} \\ p_1(t,x,y) = -\frac{y}{\alpha} \pm \overline{A} \frac{\omega^2}{k} \frac{\cosh[k\sqrt{\beta}(y-\overline{y}_1)]}{\sinh[k\sqrt{\beta}\overline{y}_1]} i e^{i(kx\pm\omega t)} \\ p_2(t,x,y) = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{y}{\alpha} \pm \frac{\rho_2}{\rho_1} \overline{A} \frac{\omega^2}{k} \frac{\cosh[k\sqrt{\beta}(y-\overline{y}_2)]}{\sinh[k\sqrt{\beta}\overline{y}_2]} i e^{i(kx\pm\omega t)} \end{cases}$$

$$(2.17)$$

Retornando às variáveis originais do sistema e desconsiderando o traço A, as soluções aproximadas para (2.7) são dadas por:

$$\begin{cases} \eta(t,x) = \pm A \, i \, e^{i(kx\pm\omega t)} \\ \phi_1(t,x,y) = -A \, \frac{\omega}{k} \, \frac{\cosh[k(y-h_1)]}{\sinh[kh_1]} \, e^{i(kx\pm\omega t)} \\ \phi_2(t,x,y) = A \, \frac{\omega}{k} \, \frac{\cosh[k(y+h_2)]}{\sinh[kh_2]} \, e^{i(kx\pm\omega t)} \\ p_1(t,x,y) = -\rho_1 \, y \, g \, \pm \, A \, \rho_1 \, \frac{\omega^2}{k} \, \frac{\cosh[k(y-h_1)]}{\sinh[kh_1]} \, i \, e^{i(kx\pm\omega t)} \\ p_2(t,x,y) = -\rho_2 \, y \, g \, \mp \, \rho_2 \, A \, \frac{\omega^2}{k} \, \frac{\cosh[k(y-h_2)]}{\sinh[kh_2]} \, i \, e^{i(kx\pm\omega t)} \end{cases}$$

$$(2.18)$$

em que A representa a amplitude da onda. A relação de dispersão é dada por:

$$\omega^{2} = \frac{gk(\rho_{2} - \rho_{1})}{\rho_{1} \coth(kh_{1}) + \rho_{2} \coth(kh_{2})}$$
(2.19)

A partir de (2.18) obtem-se uma solução para o sistema linearizado para ondas estacionárias de pequena amplitude pois essas ondas podem ser representadas como combinações de duas ondas viajantes de sentidos opostos. Tal solução é dada por:

$$\begin{cases} \eta(t,x) = \pm A \cos(kx) \ i \ e^{i\omega t} \\ \phi_1(t,x,y) = -A \frac{\omega}{k} \cos(kx) \ \frac{\cosh[k(y-h_1)]}{\operatorname{senh}[kh_1]} \ e^{i\omega t} \\ \phi_2(t,x,y) = A \frac{\omega}{k} \cos(kx) \ \frac{\cosh[k(y+h_2)]}{\operatorname{senh}[kh_2]} \ e^{i\omega t} \\ p_1(t,x,y) = -\rho_1 \ y \ g \ -A \ \rho_1 \ \cos(kx) \ \frac{\omega^2}{k} \ \frac{\cosh[k(y-h_1)]}{\operatorname{senh}[kh_1]} \ i \ e^{i\omega t} \\ p_2(t,x,y) = -\rho_2 \ y \ g \ +A \ \rho_2 \ \cos(kx) \ \frac{\omega^2}{k} \ \frac{\cosh[k(y-h_2)]}{\operatorname{senh}[kh_2]} \ i \ e^{i\omega t} \end{cases}$$
(2.20)

cuja relação de dispersão também é dada por (2.19). Note que tanto (2.20) como (2.18) são funções cujas imagens são números complexos. Portanto, para obter soluções reais, devemos considerar apenas a parte real ou imaginária das funções.

2.2.1 Ondas de Stokes de 3ª Ordem

Além das soluções aproximadas lineares apresentadas em (2.20) e (2.18), HUNT (1961), THORPE (1968) e MASSEL (2015) apresentam soluções para a propagação da onda quando expandia a Série de Potência até o termo de 3ª ordem dada por:

$$\eta(t,x) = \alpha \cos(kx - \omega t) + \alpha_2 \cos 2(kx - \omega t) + \alpha_3 \cos 3(kx - \omega t), \qquad (2.21)$$

em que, considerando

$$\hat{S}_n = \operatorname{senh}(nkh_1) \qquad S_n = \operatorname{senh}(nkh_2)$$

$$\hat{C}_n = \cosh(nkh_1) \qquad C_n = \cosh(nkh_2),$$
(2.22)

os coeficientes α_2 e α_3 são dados por:

$$\alpha_{2} = \frac{k\alpha^{2}}{2} \left[\rho_{2} \frac{C_{1}(C_{2}+2)}{S_{1}S_{2}} - \rho_{1} \frac{\hat{C}_{1}(\hat{C}_{2}+2)}{\hat{S}_{1}\hat{S}_{2}} \right] \times \left[\rho_{1} \frac{S_{1}}{C_{1}} + \rho_{2} \frac{\hat{S}_{1}}{\hat{C}_{1}} \right]^{-1}, \quad (2.23)$$

$$\alpha_{3} = \frac{k\alpha_{1}\alpha_{2}}{16} \left[\rho_{2} \frac{(2C_{4}+3C_{2}+4)}{S^{2}(2C_{4}+1)} - \rho_{1} \frac{(2\hat{C}_{4}+3\hat{C}_{2}+4)}{\hat{C}^{2}(2\hat{C}_{4}+1)} \right] \quad (2.24)$$

$$= \frac{k\alpha_1^2}{16} \left[\rho_2 \frac{(2C_4 + 3C_2 + 4)}{S_1^2(2C_2 + 1)} - \rho_1 \frac{(2\hat{C}_4 + 3\hat{C}_2 + 4)}{\hat{S}_1^2(2\hat{C}_2 + 1)} \right].$$
(2.21)
(2.21)

Sua relação de dispersão é dada por:

$$\omega^{2} = \frac{gk(\rho_{2} - \rho_{1})}{\rho_{2}\frac{C_{1}}{S_{1}} + \rho_{1}\frac{\hat{C}_{1}}{\hat{S}_{1}}} \times \left\{ 1 + \frac{\alpha^{2}k^{2} \left(\frac{\rho_{2}C_{1}(C_{1}^{2} - 2)}{S_{1}^{3}} + \frac{\rho_{1}\hat{C}_{1}(\hat{C}_{1}^{2} - 2)}{\hat{S}_{1}^{3}} \right) - \alpha_{2}k \left(\frac{\rho_{2}(2C_{1}^{2} + 1)}{S_{1}^{2}} - \frac{\rho_{1}(2\hat{C}_{1}^{2} + 1)}{\hat{S}_{1}^{2}} \right)}{2 \left(\rho_{2}\frac{C_{1}}{S_{1}} + \rho_{1}\frac{\hat{C}_{1}}{\hat{S}_{1}} \right)} \right\}$$

$$(2.26)$$

2.3 Modelos Reduzidos

Uma outra maneira de realizar um estudo matemático da propagação de ondas internas entre dois fluidos é utilizando Modelos Reduzidos obtidos a partir da Análise Assintótica das Equações de Euler *CHOI*; *CAMASSA* (1996). Tais suposições, mesmo levando a modelos matemáticos simplificados, apresentam grande desafios interessantes quanto à análise matemática e numérica das equações diferenciais utilizadas.

A partir das Equações de Euler, Choi e Camassa em *CHOI*; *CAMASSA* (1999) consideraram vários regimes assintóticos. Um regime muito interessante devido a sua relação com o caso de ondas internas em águas oceânicas é aquele em que o comprimento da camada superior é bem menor que o comprimento de onda característico da interface ao passo que a profundidade da camada inferior é compatível com o comprimento característico da onda e o fluido mais denso ocupa a camada inferior ($\rho_1 < \rho_2$). Seguindo estas considerações, os autores obtiveram o Modelo Reduzido Fortemente não Linear *CHOI*; *CAMASSA* (1999) em que $\overline{u}(x,t)$ e $\eta(x,t)$ representam a velocidade média horizontal na camada superior e o deslocamento da interface, respectivamente.

Modelo Reduzido Fortemente não Linear *CHOI*; *CAMASSA* (1999)

$$\int \eta_t - [(1 - \alpha \eta)\overline{u}]_x = 0,$$

$$\left\{ \overline{u}_t + \alpha \overline{u}.\overline{u}_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_1}{\rho_1} \mathcal{T}_{\delta}[(1 - \alpha \eta)\overline{u}]_{xt} + \frac{\beta}{3} \overline{u}_{txx} + O(\beta^{\frac{3}{2}}) \right.$$

onde foram considerados os parâmetros $\alpha, \beta \in \delta$ como

$$\alpha = \frac{h_1}{L}, \quad \beta = \left(\frac{h_1}{L}\right)^2 \ll 1 \quad e \quad \delta = \frac{h_2}{L}$$

O operador \mathcal{T}_{δ} é a Transformada de Hilbert na faixa de altura δ definida como:

$$\mathcal{T}_{\delta}[f](x) = \frac{1}{2\delta} PV \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(\tilde{x}-x)\right) d\tilde{x}$$

onde PV indicação integração no sentido do valor principal de Cauchy. No caso de águas profundas $(\delta \to \infty)$, o operador é representado como:

$$\mathcal{T}_{\delta}[f](x) = \mathcal{H}[f](x) = PV \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x} - x}$$

A partir do sistema (2.27), Cardeña em *CARDEA* (2012) desenvolveu uma família de sistemas equivalentes ao sistema de Choi e Camassa no regime fracamente não linear, ou seja, quando $\alpha = O(\beta)$.

Temos a Família de Sistemas Fracamente não Lineares

$$\begin{cases} \eta_t - a\beta\eta_{txx} = u_{0x} + b\beta u_{0xxx} - \alpha(\eta u_0)_x \\ u_{0t} + \alpha u_0 u_{0x} - c\frac{\rho_2}{\rho_1}\sqrt{\beta}\mathcal{T}_{\delta}[u_{0tx}] - f\beta u_{0txx} - d\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \beta \mathcal{T}_{\delta}^2[u_{0txx}] = \\ \eta_x + h\frac{\rho_2}{\rho_1}\sqrt{\beta}\mathcal{T}_{\delta}[\eta_{xx}] + g\beta\eta_{xxx} + e\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \beta \mathcal{T}_{\delta}^2[\eta_{xxx}] \end{cases}$$
(2.28)

em que u_0 representa a velocidade horizontal do fluido na altura ζ_0 $(0 \le \zeta_0 \le 1)$ da camada superior, η representa o deslocamento da interface e os parâmetros a, b, c, $d, e, f, g, p \in q$ satisfazem as relações

$$\begin{cases} a+b=p, \quad c+d+e=1, \\ f+g=q, \quad c+h=1, \\ p=\frac{1}{2}\left(\zeta_0^2-\frac{1}{3}\right), \quad q=\frac{1}{2}\left(1-\zeta_0^2\right), \\ 0 \le \zeta_0 \le 1 \end{cases}$$

Para tal sistema de EDP's, Cardenã considerou que as condições de contorno são periódicas.

Em outro trabalho, Zárate ZARTE (2007) apresentou um generalização do Modelo de Choi e Camassa para o caso de fundo irregular. Nesse trabalho foi feita uma análise assintótica que torna possível estudar o comportamento da pressão em todo o canal. Fazendo as devidas adaptações para um sistema de fundo plano, a pressão adimensionalizada na faixa superior é dada por

$$p_1(t, x, y) = P(x, t) - (y - \eta) + O(\beta)$$

em que

$$P(x,t) = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\eta + \sqrt{\beta} \mathcal{T}_{\delta}[(1-\eta)\bar{u}]_t \right) + O(\beta),$$

representa a pressão que atua na interface.

Os modelos de Choi e Camasa, Cardeña e Zárate, ainda que restritos à certas condições, permitem uma abordagem computacional eficiente devido a redução da quantidade de funções incógnitas em relação ao modelo formado pelas equações de Euler.

Este presente trabalho tem como objetivo apresentar uma abordagem diferenciada para o estudo de ondas internas no sistema de duas camadas utilizando uma formulação integral das equações reduzindo o número de equações do sistema e interligando os termos de ambas as camadas.

3 FORMULAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA

Neste capítulo apresentaremos a formulação de integral de contorno para uma função harmônica, ou seja, cujo laplaciano da função é nulo no interior do seu domínio. Essa formulação é obtida a partir da 3^a Identidade de Green usando uma função auxiliar, chamada de Função de Green *ATKINSON*; *HAN* (2009), permitindo encontrar uma relação entre os valores da função no interior e na fronteira com o valor da Função de Green na fronteira através de operadores integrais *GUIDOTTI* (2008) oriundos das condições de Dirichlet e Neumann.

Como, segundo sistema de Equações de Euler, o potencial do vetor velocidade é uma função harmônica no interior de cada camada, é possível relacionar o seu valor no interior com o valor na interface entre as camadas.

A utilização da formulação de integral de contorno aplicada ao sistema de duas camadas é capaz de determinar, conhecendo o potencial da velocidade no tempo inicial, sua derivada normal em toda a interface através dos operadores integrais assim como relacionar o potencial da velocidade nas duas camadas. Isso possibilita conhecer o potencial no interior da camada para encontrar o campo de pressão no interior das camadas através da Integral de Bernoulli.

3.1 Identidade de Green

Seja Ω um conjunto aberto de R^2 , $\partial \Omega$ sua fronteira suave por partes e u e v funções pertencentes a $C^2(\overline{\Omega})$. Pela 3^a Identidade de Green EVANS (2010), temos:

$$\int_{\Omega} \left(u\Delta v - v\Delta u \right) dA = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

Considere a função $v(x, y) = G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{1}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Observe que *G* é uma função harmônica pois:

$$\Delta v(x,y) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) \right\}$$

= $-\frac{1}{2} \left\{ \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 + y^2) - 4y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right\} = 0.$ (3.1)

Seja S_{ϵ} uma circunferência de centro $(x_0, y_0) \in \Omega$ e raio ϵ conforme a figura (5.1). O conjunto Ω_{ϵ} é definido como o interior de Ω exterior à S_{ϵ} [ATKINSON; HAN (2009)] em que vale a seguinte relação.



Figura 3.1: Conjunto Ω_{ϵ}

$$\int_{\Omega_{\epsilon}} \left(u\Delta G - G\Delta u \right) dA = \int_{\partial\Omega_{\epsilon}} \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

Se $\Delta u = 0$ em Ω , devido a (3.1), temos:

$$\int_{\partial\Omega_{\epsilon}} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds - \int_{S_{\epsilon}} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0.$$
(3.2)

Denotando \vec{r}_{P,P_0} como o vetor raio de S_{ϵ} com centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e extremidade em P = (x, y), assim como \vec{n} o vetor normal à S_{ϵ} dado por $\frac{-\vec{r}_{P,P_0}}{|\vec{r}_{P,P_0}|}$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n}(x,y;x_0,y_0) &= \frac{\partial G}{\partial x} \left(\frac{2(x-x_0)}{|\vec{r}_{P,P_0}|} \right) + \frac{\partial G}{\partial y} \left(\frac{2(y-y_0)}{|\vec{r}_{P,P_0}|} \right) \\ &= -\frac{1}{2|\vec{r}_{P,P_0}|} \left\{ \left(\frac{2(x-x_0)}{|\vec{r}_{P,P_0}|} \right) \left(\frac{-(x-x_0)}{|\vec{r}_{P,P_0}|} \right) + \left(\frac{2(y-y_0)}{|\vec{r}_{P,P_0}|} \right) \left(\frac{-(y-y_0)}{|\vec{r}_{P,P_0}|} \right) \right\} \\ &= \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{|\vec{r}_{P,P_0}|^3} = \frac{1}{|\vec{r}_{P,P_0}|} \Longrightarrow \frac{\partial G}{\partial n}(x,y;x_0,y_0) = \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Portanto, para Psob a curva $S_{\epsilon},$ temos

$$\int_{S_{\epsilon}} u(P_s) \frac{\partial G}{\partial n}(P_s, P_0) ds = \frac{1}{\epsilon} \int_{S_{\epsilon}} u(P_s) ds = \frac{2\pi\epsilon u(\tilde{P})}{\epsilon} \to 2\pi u(P_0).$$
(3.3)

Por outro lado, como $G(x, y; x_0, y_0) = -ln(\epsilon)$, temos que:

$$\int_{S_{\epsilon}} G \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\ln(\epsilon) \int_{S_{\epsilon}} \frac{\partial u}{\partial n} ds$$
(3.4)

Para determinar (3.4), devemos observar que:

$$\left|\int_{S_{\epsilon}} \frac{\partial u}{\partial n} ds\right| \leq \int_{S_{\epsilon}} |\nabla u.n| ds \leq \int_{S_{\epsilon}} |\nabla u|.|n| ds \leq \max_{u \in C^{2}(\overline{\Omega})} \{|\nabla u|\} 2\pi\epsilon \qquad (3.5)$$

Sendo assim, por (3.4) e o resultado anterior:

$$\left| \int_{S_{\epsilon}} G \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \le 2\pi\epsilon |\ln(\epsilon)| . || \nabla u||_{L^{\infty}(\overline{\Omega})}$$
(3.6)

De tal forma que, quando $\epsilon \to 0$:

$$\Big|\int_{S_{\epsilon}} G \frac{\partial u}{\partial n} ds\Big| \to 0$$

Sendo assim, obtemos:

$$\int_{S_{\epsilon}} G \frac{\partial u}{\partial n} ds \to 0 \tag{3.7}$$

A partir de (3.2), (3.7) e (3.3), para $P_0 \in \Omega$, podemos concluir que:

$$2\pi u(P_0) = \int_{\partial\Omega} \left(G(P_s; P_0) \frac{\partial u(P_s)}{\partial n_{P_s}} - u(P_s) \frac{\partial G(P_s; P_0)}{\partial n_{P_s}} \right) ds, \tag{3.8}$$

em que $P \in \partial \Omega$ e n_P representa seu vetor normal. A partir de (3.8) é possível determinar u em Ω caso sejam conhecidos u e $\frac{\partial u}{\partial n}$ em $\partial \Omega$. Para $P_0 \in \partial \Omega$, consideraremos S_{ϵ} o setor circular de ângulo α_{ϵ} , centrado em P_0 e raio ϵ conforme a figura (3.2).

Para este caso, o valor da integral em S_{ϵ} é depende do ângulo α_{ϵ} como podemos notar em:



Figura 3.2: Ângulo α quando $P_0 \in \partial \Omega$

$$\int_{S_{\epsilon}} u(P) \frac{\partial G}{\partial n}(P, P_0) ds = \frac{1}{\epsilon} \int_{S_{\epsilon}} u(P) ds = \frac{\alpha(\epsilon) u(P_{\epsilon})}{\epsilon}.$$

Nos pontos de suavidade de $\partial\Omega$, quando $\epsilon \to 0$, S_{ϵ} tende a uma semicircunferência, ou seja, $\frac{\alpha(\epsilon)}{\epsilon} \to \pi$. Observe também que, devido à singularidade de G em $P \to P_0$, a integral é definida no sentido do Valor Principal de Cauchy BYRON; FULLER (2012). Sendo assim, temos:

$$\pi u(P_0) = \oint_{\partial\Omega} \left(G(P_s; P_0) \frac{\partial u}{\partial n_{P_s}}(P_s) - u(P_s) \frac{\partial G}{\partial n_{P_s}}(P_s; P_0) \right) ds.$$
(3.9)

As equações (3.8) e (3.9) também são válidas quando a função $G(P; P_0)$ é uma função harmônica em relação à P mas com singularidade logarítmica $-\ln |P - P_0|$ próximo de P_0 .
3.2 Operadores Dirichlet-Neumann e Neumann-Dirichlet

A partir de (3.9) é possível definir os seguintes operadores integrais que atuam sobre as funções $u \in \frac{\partial u}{\partial n}$ definidas na fonteira $\partial \Omega$, onde n é o vetor normal externo à Ω .

$$\mathcal{A}\frac{\partial u}{\partial n}(P_0) := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n_{P_s}}(P_s) G(P_s; P_0) ds \tag{3.10}$$

е

$$\mathcal{B}u(P_0) := \int_{\partial\Omega} u(P_s) \frac{\partial G}{\partial n_{P_s}}(P_s; P_0) ds.$$
(3.11)

Note que, devido a presença de $G(P_s; P_0)$, \mathcal{A} é um operador integral singular. Sendo assim, para $P_0 \in \Omega$, a relação (3.9) pode ser representada em termos dos operadores de $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ como

$$\mathcal{A}\frac{\partial u}{\partial n}(P_0) = [\pi \mathcal{I} + \mathcal{B}]u(P_0), \qquad (3.12)$$

em que \mathcal{I} indica o operador identidade. A relação (3.12) possibilita encontrar u e $\frac{\partial u}{\partial n}$ em $\partial \Omega$ a partir das condições de Neumann e Dirichlet, respectivamente. Para isso, introduziremos os seguintes operadores

Operador Dirichlet-Neumann

$$\mathcal{D}u(P_0) := \mathcal{A}^{-1}[\pi \mathcal{I} + \mathcal{B}]u(P_0), \qquad (3.13)$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n}(P_0)$ é encontrado a partir de u(P) com $P \in \partial \Omega$ (Dados de Dirichlet) através de \mathcal{B} e o inverso de \mathcal{A} . Já o operador Neumann-Dirichlet a seguir permite obter $u(P_0)$ a partir de $u_n(P) = \frac{\partial u}{\partial n}(P)$ para $P \in \partial \Omega$ (Dados de Neumann) através de \mathcal{A} e $[\pi \mathcal{I} + \mathcal{B}]^{-1}$.

Operador Neumann-Dirichlet

$$\mathcal{N}u_n(P_0) := [\pi \mathcal{I} + \mathcal{B}]^{-1} \mathcal{A}u_n(P_0)$$
(3.14)

Como o operador \mathcal{N} é aplicado a $\frac{\partial u}{\partial n}$, u pode ser obtido apenas a menos de uma constante. Para que u seja obtido de maneira única, é necessário impor alguma outra condição para u, por exemplo, que tenha média zero, ou seja,

$$\int_{\partial\Omega} u \, ds = 0 \tag{3.15}$$

Para utilizar os operadores \mathcal{D} e \mathcal{N} , mostraremos no próximo capítulo o procedimento numérico usado para contornar tal situação.

3.3 Formulação Integral Aplicada ao Sistema

Antes de utilizar a formulação de integral de contorno é necessário adaptar as Equações de Euler reescrevendo-as após introduzir a derivada normal do potencial da velocidade em $y = \eta(t, x)$ em cada instante. Para isso, as próximas considerações serão feitas com respeito a camada inferior (i = 2) e as relações referentes a camada superior serão apresentadas posteriormente com as devidas adaptações. Com isso, a fim de simplificar a notação, será desconsiderado o índice *i*. Outra simplificação introduzida é a periodicidade de $\eta e \phi_i$ na variável *x*.

Utilizando o Método das Imagens GUIDOTTI (2008) para um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, consideraremos a função harmônica $G(P; P_0) = K(x - x_0, y - y_0) + K(x - y_0)$

 $x_0, -2h-y-y_0)$ em que K é a função de Green dada por

$$K(x,y) = -\frac{1}{2} \ln \left[1 + e^{\frac{2\pi y}{L}} - 2e^{\frac{\pi y}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \ em \ \mathbb{R}^2 - \{(0,2Ln)\}$$

Tal escolha para G é feita pois, além de ser periódica e possuir a singularidades em (0, 2Ln) para $n \in \mathbb{Z}$, satisfaz a Condição de Neumann do problema no fundo rígido y = -h, ou seja,

$$\frac{\partial G(P; P_0)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial G(P; P_0)}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad P = (x, -h). \tag{3.16}$$

$$(3.16)$$

Figura 3.3: Cédula periódica $\partial \tilde{\Omega}$

Considerando $\partial \tilde{\Omega} = \Upsilon_d \cup \Gamma \cup \Upsilon_e \cup \partial \Omega_r$, a cédula periódica de $\partial \Omega$ conforme a figura (3.3), é possível notar que (3.12) restritos à Υ_d e Υ_e se anulam devido às condições periódicas das funções envolvidas e em $\partial \Omega_r$ é nulo devido à (3.16). Sendo assim, os limites de integração de (3.17) estão restritos apenas à Γ .

Considerando $P_s = (x(s), y(s))$ uma parametrização de $\Gamma.$ Segundo (3.8)

$$\begin{cases} \phi(P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n_s}(P_s) G(P_s; P_0) - \phi(P_s) \frac{\partial G}{\partial n_s}(P_s; P_0) \right] ds, \text{ se } P_0 \in \Omega, \\ \phi(P_0) = \frac{1}{\pi} \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n_s}(P_s) G(P_s; P_0) - \phi(P_s) \frac{\partial G}{\partial n_s}(P_s; P_0) \right] ds, \text{ se } P_0 \in \partial\Omega, \end{cases}$$
(3.17)

em um instante qualquer. Essa formulação possibilita determinar $\phi(t, x, y)$ em Ω a partir do seu valor em Γ . Quando consideramos a parametrização de Γ com x(s) = se $y(s) = \eta(t, s)$, os operadores $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ são descritos como:

$$\mathcal{A}\phi_n(P_0) = \int_0^{2L} \left[\phi_n(P_s)) G(P_s; P_0) \right] ||(1, \eta_s(s))|| ds,$$

$$\mathcal{B}\phi(P_0) = \int_0^{2L} \left[\phi(P_s) \frac{\partial G}{\partial n}(P_s; P_0) \right] ||(1, \eta_s(s))|| ds.$$
(3.18)

Como ϕ é uma função harmônica no aberto Ω , os operadores (3.13) e (3.14), nos dão relações entre $\phi \in \phi_n$ quando $P_0 \in \partial \Omega$. Sendo assim, temos

Operador Dirichlet-Neumann

$$\phi_n(t, x, y) = \mathcal{D}\phi(t, x, y)$$
 em $y = \eta(t, x)$

Operador Neumann-Dirichlet

$$\phi(t, x, y) = \mathcal{N}\phi_n(t, x, y)$$
 em $y = \eta(t, x)$

A fim de obter equações que relacionem as derivadas normais, tangenciais e as derivadas com respeito à $x \in y \in y = \eta(t, x)$ consideramos τ o vetor tangente de mesmo sentido que a parametrização de $\Gamma \in n$ o vetor normal a interface $\eta(x)$ e externo à Ω da forma

$$\tau(t,x) = \frac{(1,\eta_x(t,x))}{||(1,\eta_x(t,x))||} \qquad e \qquad n(t,x) = \frac{(-\eta_x(t,x),1)}{||(1,\eta_x(t,x))||}.$$

Adotando $\Phi(t, x) = \phi(t, x, \eta(t, x))$, temos

$$\tilde{\Phi}_n(t,x) = ||(1,\eta_x(tx))||\Phi_n(t,x) = [-\eta_x\phi_x + \phi_y](t,x,\eta(t,x)),$$
(3.19)

$$\Phi_x(t,x) = ||(1,\eta_x(t,x))|| \Phi_\tau(t,x) = [\phi_x + \phi_y \eta_x] (t,x,\eta(t,x)), \qquad (3.20)$$

$$\Phi_t(t,x) = [\phi_t + \phi_y \eta_t] (t, x, \eta(t, x)).$$
(3.21)

A partir de (3.19) e (3.20) encontramos

$$\phi_x(t, x, \eta(t, x)) = \frac{\Phi_x - \tilde{\Phi}_n \eta_x}{1 + \eta_x^2(t, x)} \quad e \quad \phi_y(t, x, \eta(t, x)) = \frac{\eta_x \Phi_x + \tilde{\Phi}_n}{1 + \eta_x^2(t, x)}.$$

Substituindo o resultado anterior e (3.19) na terceira e quarta equação de (2.6) temos

$$\begin{cases} \eta_t = \Phi_n, \\ \Phi_t = -\frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_x^2 - \tilde{\Phi}_n^2}{1 + \eta_x^2} \right] + \frac{\eta_x \Phi_x \tilde{\Phi}_n}{1 + \eta_x^2} - g\eta - \frac{p}{\rho}. \end{cases}$$
(3.22)

Retornando com a notação que indica a camada abordada, temos que para a camada inferior:

$$\begin{cases} \eta_t = \tilde{\Phi}_{2,n}, \\ \Phi_{2,t} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_{2,x}^2 - \tilde{\Phi}_{2,n}^2}{1 + \eta_x^2} \right] + \frac{\eta_x \Phi_{2,x} \tilde{\Phi}_{2,n}}{1 + \eta_x^2} - g\eta - \frac{p_2}{\rho_2}. \end{cases}$$
(3.23)

Note que, sob o ponto de vista físico, Φ_n indica a velocidade do fluido na direção normal à superfície. Portanto, $\Phi_{1,n_1} = -\Phi_{2,n_2}$, onde n_1 e n_2 representam, respectivamente, os vetores normais externos à $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$. Na interface Γ das duas camadas, temos $n = n_2 = -n_1$ e, com isso, teremos $\Phi_{1,n} = \Phi_{2,n}$. Sendo assim, na formulação de integral de contorno, os termos de (3.9) que dependem do vetor \mathbf{n} , quando referentes a camada superior, sofrerão alterações. Feitas as devidas adaptações, os operadores envolvidos serão tais que:

$$\mathcal{D}_{1}\Phi_{1} = [-\mathcal{A}_{1}(\eta)]^{-1} [\pi \mathcal{I} - \mathcal{B}_{1}(\eta)] \Phi_{1}$$

$$\mathcal{N}_{1}\Phi_{1,n} = [\pi \mathcal{I} - \mathcal{B}_{1}(\eta)]^{-1} [-\mathcal{A}_{1}(\eta)] \Phi_{1,n}$$

$$\mathcal{D}_{2}\Phi_{2} = [\mathcal{A}_{2}(\eta)]^{-1} [\pi \mathcal{I} + \mathcal{B}_{2}(\eta)] \Phi_{2}$$

$$\mathcal{N}_{2}\Phi_{2,n} = [\pi \mathcal{I} + \mathcal{B}_{2}(\eta)]^{-1} [\mathcal{A}_{2}(\eta)] \Phi_{2,n}$$

(3.24)

 com

$$\mathcal{A}_{1}u_{n}(P_{0}) = \int_{\Gamma} u_{n}(P_{s})G_{1}(P_{s}; P_{0})ds,$$

$$\mathcal{B}_{1}u(P_{0}) = \int_{\Gamma} u(P_{s})\frac{\partial G_{1}}{\partial n}(P_{s}; P_{0})ds,$$

$$\mathcal{A}_{2}u_{n}(P_{0}) = \int_{\Gamma} u_{n}(P_{s})G_{2}(P_{s}; P_{0})ds,$$

$$\mathcal{B}_{2}u(P_{0}) = \int_{\Gamma} u(P_{s})\frac{\partial G_{2}}{\partial n}(P_{s}; P_{0})ds.$$

(3.25)

em que G_1 e G_2 representam as funções de Green referentes a cada camada com as respectivas profundidades.

A partir dos operadores de (3.24) é possível obter, por exemplo, Φ_2 a partir de Φ_1 pois $\Phi_{1,n} = \Phi_{2,n}$ conforme pode ser visto a seguir.

$$\Phi_{1} = \mathcal{N}_{1}(\eta)\Phi_{1,n}
= \mathcal{N}_{1}(\eta)\Phi_{2,n}
= \mathcal{N}_{1}(\eta)[\mathcal{D}_{2}(\eta)\Phi_{2}]$$
(3.26)

Além disso, $p_1(t,x) = p_2(t,x)$ em $y = \eta(x)$. Então, considerando

$$\Psi = \rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2 \tag{3.27}$$

temos

$$\Psi_t = -\frac{1}{2} \left[\frac{\rho_1 \Phi_{1,x}^2 - \rho_2 \Phi_{2,x}^2 - (\rho_1 - \rho_2) \tilde{\Phi}_{1,n}^2}{1 + \eta_x^2} \right] + \frac{\eta_x \Psi_x \tilde{\Phi}_{1,n}}{1 + \eta_x^2} - (\rho_1 - \rho_2) g\eta. \quad (3.28)$$

Como visto em (3.15), ao usar o operador Neumann-Dirichlet, para que uma função h seja obtida de maneira única, consideraremos que

$$\hat{h} = h - \langle h \rangle$$
, onde $\langle h \rangle = \frac{1}{2L} \int_{0}^{2L} h(x) dx.$ (3.29)

Assim, a partir de (3.26), concluímos que

$$\widehat{\Psi} = \left[\rho_1 \mathcal{N}_1(\eta) \mathcal{D}_2(\eta) - \rho_2 I\right] \widehat{\Phi}_2 \tag{3.30}$$

Definimos os operadores \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 que são responsáveis pela recuperação de $\widehat{\Phi}_1$ e $\widehat{\Phi}_2$ a partir de $\widehat{\Psi}$.

$$\mathcal{R}_2 \widehat{\Psi} = [\rho_1 \mathcal{N}_1(\eta) \mathcal{D}_2(\eta) - \rho_2 \mathcal{I}]^{-1} \widehat{\Psi} \implies \mathcal{R}_2 \widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}_2$$
(3.31)

$$\mathcal{R}_1 \widehat{\Psi} = \rho_1^{-1} (\widehat{\Psi} - \rho_2 \mathcal{R}_2 \Psi) \implies \mathcal{R}_1 \widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}_1$$
(3.32)

Portanto, para recuperar Φ_1 a partir de $\widehat{\Psi},$ consideraremos que Φ_1 possui média zero. Ou seja,

$$\mathcal{R}_1 \widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}_1 = \Phi_1 \tag{3.33}$$

Já a média de Φ_2 pode ser obtida, a partir de (3.27), pois

$$<\Psi>=\rho_1<\Phi_1>-\rho_2<\Phi_2>\implies <\Phi_2>=-\frac{<\Psi>}{\rho_2}.$$
 (3.34)

Com isso, Φ_2 é obtido pois

$$\Phi_2 = \mathcal{R}_2 \widehat{\Psi} - \frac{\langle \Psi \rangle}{\rho_2}.$$
(3.35)

Unindo (3.28) com o resultado anterior, temos o sistema a seguir quando $y = \eta(t, x)$

$$\begin{cases} \eta_t(x) = \mathcal{F}(\eta, \Psi) \\ \Psi_t = \mathcal{G}(\eta, \Psi) \end{cases}$$
(3.36)

onde $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$ são da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\eta, \Psi) = \mathcal{D}_1 \mathcal{R}_1 \widehat{\Psi}, \\ \mathcal{G}(\eta, \Psi) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\rho_1 \Phi_{1,x}^2 - \rho_2 \Phi_{2,x}^2 - (\rho_1 - \rho_2) [\mathcal{D}_1 \mathcal{R}_1 \widehat{\Psi}]^2}{1 + \eta_x^2} \right] \\ + \frac{\eta_x \Psi_x [\mathcal{D}_1 \mathcal{R}_1 \widehat{\Psi}]}{1 + \eta_x^2} - (\rho_1 - \rho_2) g\eta, \end{cases}$$

em que $\Phi_{1,x}$ e $\Phi_{2,x}$ podem ser obtidos através de operadores diferencias oriundos da Transformada de Fourier *EVANS* (2010) devido a periodicidade de ϕ_1 e ϕ_2 em [0, 2L]. Note que $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$ dependem de $\eta \in \Psi$ devido aos operadores contidos neles.

Considerando que, pelo menos, $\Phi_1(0, x)$ e a interface $\eta(0, x)$ são conhecidos, desenvolvemos um algoritmo computacional para aproximar o comportamento da interface e o potencial da velocidade na interface em ambas as camadas. Os métodos utilizados para a discretização, derivação assim como o algoritmo serão apresentados no próximo capítulo.

3.4 Cálculo da pressão

As informações sobre $\Phi_i \in \eta$ são importantes pois, com a primeira equação de (3.17), pode-se obter ϕ_i em qualquer ponto no interior da camada e, a partir de suas derivadas, determinar $p_i(x, y)$ no interior de cada camada através da relação de Bernoulli vista em (2.2). Essa relação apresentada em (2.7) pode ser estendida, segundo WHITHAM (1974), para qualquer ponto na faixa de água.

Para $(x, y) \in \Omega_i$ em qualquer instante t, por (3.17), temos $\phi_i(x, y) = \int_0^{2L} \left[G_i(s, \eta(t, s); x, y) \Phi_{i,n}(s, \eta(t, s)) - G_{i,n}(s, \eta(t, s); x, y) \Phi_i(s, \eta(t, s)) \right] ||(1, \eta_x(t, s))| ds.$ (3.37)

Tal relação permite obter as derivadas espaciais e temporal de ϕ_i . Esses valores são facilmente calculados pois ambos dependem de Φ_i e das derivadas de Gque são conhecidas. As derivadas espaciais são

$$\phi_{i,x}(x,y) = \int_0^{2L} \left[\frac{\partial G_i}{\partial x} (s,\eta(t,s);x,y) \Phi_{i,n}(s,\eta(t,s)) - \Phi_i(s,\eta(t,s)) \frac{\partial G_{i,n_s}}{\partial x} (s,\eta(t,s);x,y) \right] ||(1,\eta_x(t,s))| ds$$

$$(3.38)$$

e $\phi_{i,y}(x,y)$ é obtida de maneira análoga. Já a derivada temporal é dada por

$$\phi_{i,t} = \int_{0}^{2L} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[G_{i}(s,\eta(t,s);x,y) \Phi_{i,n}(s,\eta(t,s)) - G_{i,n}(s,\eta(t,s);x,y) \Phi_{i}(s,\eta(t,s)) \right] ||(1,\eta_{x}(t,s))| \right\} ds.$$
(3.39)

No caso de um sistema discretizado, $\phi_{i,t}$ é aproximado facilmente a partir de Métodos de Diferenças Finitas já que Φ_i é obtido em (3.33) e (3.35). Tais resultados permitem obter a pressão no interior de qualquer camada a partir do potencial velocidade na interface e de seu comportamento através da relação de Bernoulli:

$$p_i(t, x, y) = -\rho_i\left(\phi_{i,t}(t, x, y) + \frac{1}{2}| \bigtriangledown \phi_i(t, x, y)|^2 + gy\right), \quad (x, y) \in \Omega_i \qquad (3.40)$$

Este método mostra que, uma vez conhecido o potencial da velocidade na interface, a formulação de integral de contorno permite encontrar o potencial em qualquer ponto no interior das camadas. A partir desse potencial, (3.40) permite conhecer a pressão no interior da camada. No próximo capítulo apresentaremos os métodos numéricos utilizados para obter uma aproximação para a pressão.

4 DISCRETIZAÇÃO DO MODELO

Neste capítulo apresentaremos a discretização do problema e os métodos utilizados. Para os operadores Dirichlet-Neumann e Neumann-Dirichlet, apresentaremos a abordagem proposta em ATKINSON; HAN (2009) para a discretização das integrais singulares oriundas da Formulação Integral de Fronteira apresentada no capítulo anterior. Para obter as derivadas com relação à x de maneira simples, consideraremos que as funções são de \mathbb{R} em \mathbb{C} e 2*L*-periódicas.

Para a evolução no tempo, foram utilizados os esquemas de Diferenças Finitas Euler Explícito e Leap Frog. Apresentaremos também o algoritmo computacional desenvolvido.

4.1 Discretização dos Operadores / Espacial

Assim como na seção 2.3, discutiremos a discretização dos operadores referentes à camada inferior e, posteriormente, apresentaremos os operadores da camada superior com as devidas adaptações. Também desconsideraremos, em cada termo, o índice que indica a camada.

Segundo a formulação de integral de contorno, para função harmônica $\phi(x, y) \in [0, 2L] \times [-h, \eta(x)]$, temos:

$$\mathcal{A}(\eta)\phi_n(x,y) = [\pi \mathcal{I} + \mathcal{B}(\eta)]\phi(x,y)$$
(4.1)

em que $\mathcal{A}(\eta)$ e $\mathcal{B}(\eta)$ representam, para $(x_0, y_0) \in \Gamma$, os operadores integrais

$$\mathcal{A}(\eta)\phi_n(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} \left[\phi_n(s, \eta(s))G(s, \eta(s); x_0, y_0)\right] ds \tag{4.2}$$

$$\mathcal{B}(\eta)\phi(x_0, y_0) = \int_{\Gamma} \left[\phi(s, \eta(s)) \frac{\partial G}{\partial n}(s, \eta(s); x_0, y_0) \right] ds.$$
(4.3)

A Função de GreenGé dada por $G(x,y;x_0,y_0)=K(x-x_0,y-y_0)+K(x-x_0,2h-y-y_0)$ em que

$$K(x,y) = -\frac{1}{2}\ln\left[1 + e^{\frac{2\pi y}{L}} - 2e^{\frac{\pi y}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right].$$

Note que $(x, y) \longrightarrow (x_0, y_0)$, a função $K(x - x_0, y - y_0)$ é singular. Afim de estudar o comportamento de $A(\eta)$ próximo à singularidade de K, introduzimos um termo a função G tal que

$$G(x, y; x_0, y_0) = K(x - x_0, y - y_0) - \frac{1}{2} \ln \left\{ \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi(x - x_0)}{2L} \right) \right]^2 \right\} + \frac{1}{2} \ln \left\{ \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi(x - x_0)}{2L} \right) \right]^2 \right\} + K(x - x_0, 2h - y - y_0).$$

Conforme SLOAN; YAN (1988), desenvolvendo o termo introduzido, temos

$$G(x, y; x_0, y_0) = -\frac{\pi}{2L}(y - y_0) - \frac{1}{2} \ln \left\{ 1 + \frac{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\pi(y - y_0)}{2L}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(x - x_0)}{2L}\right)} \right\} + \frac{1}{2} \ln \left\{ 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(x - x_0)}{2L}\right) \right\} + K(x - x_0, 2h - y - y_0)$$

$$(4.4)$$

Podemos reescrever, então, $G(x, y; x_0, y_0) = K_1(x, y; x_0, y_0) + K_2(x - x_0)$ em

que

$$K_{1}(x, y; x_{0}, y_{0}) = -\frac{\pi}{2L}(y - y_{0}) - \frac{1}{2}\ln\left\{1 + \frac{\operatorname{senh}^{2}\left(\frac{\pi(y - y_{0})}{2L}\right)}{\operatorname{sen}^{2}\left(\frac{\pi(x - x_{0})}{2L}\right)}\right\}$$
$$+ K(x - x_{0}, 2h - y - y_{0}),$$
$$K_{2}(x - x_{0}) = \frac{1}{2}\ln\left[4\operatorname{sen}^{2}\left(\frac{\pi(x - x_{0})}{2L}\right)\right].$$

Observe que $\mathcal{A}(\eta)$ é aplicado para funções em $y = \eta(x)$. Ou seja, quando $x \longrightarrow x_0$, senh $(\eta(x) - \eta(y_0))$ e sen $(x - x_0)$ possuem singularidades similares a $|\eta(x) - \eta(x_0)|$ e $|x - x_0|$, respectivamente. Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} K_1(x - x_0, \eta(x) - \eta(x_0)) = -\ln\sqrt{1 + \eta_x^2(x_0)} + K(0, 2h - 2\eta(x_0)).$$
(4.5)

Então, reescreveremos $\mathcal{A}(\eta) = \tilde{\mathcal{A}}(\eta) + \mathcal{A}_0$, em que

$$\tilde{\mathcal{A}}(\eta)\phi_n(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} \left[\phi_n(s, \eta(s)) K_1(s, \eta(s); x_0, y_0)\right] ds$$
(4.6)

$$\mathcal{A}_0 \phi_n(x_0, y_0) = \oint_{\Gamma} [\phi_n(s, \eta(s)) K_2(s - x_0)] \, ds.$$
(4.7)

Já o operador $\mathcal{B}(\eta)$ é dado por

$$\mathcal{B}(\eta)\phi(x_0,\eta(x_0)) = \int_{\Gamma} b(s,x_0)\phi(s)ds$$
(4.8)

onde $b(s, x_0)$ representa a derivada normal de G em Γ . Expandindo b em Série de Taylor temos que

$$\lim_{s \to x_0} b(s, x_0) = \frac{\eta_{xx}(x_0)}{2 + 2\eta_x^2(x_0)} + \frac{\partial K}{\partial y}(0, 2(h - \eta(x_0))) - \frac{\pi}{2L}.$$

Para a discretização espacial, consideraremos a malha formada por $x_j = j\Delta x$ para $j = 0, 1, 2, \dots, N$ em que $\Delta x = \frac{2L}{N}$ e $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$. Essa escolha é feita para utilizar a Transformada Discreta de Fourier (TREFETHEN, 2000) para a derivação espacial pois consideramos funções η , $\phi_1 \in \phi_2$ de \mathbb{R} em \mathbb{C} , 2*L*-periódicas cujas discretizações pertencem à l_N^2 .

Considerando as aproximações de $\eta \in \Phi_i$ para cada x_j , podemos representa-las na forma vetorial conforme a seguir.

$$\begin{bmatrix} \eta(x_1) \\ \eta(x_2) \\ \vdots \\ \eta(x_N) \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_i(x_1) \\ \Phi_i(x_2) \\ \vdots \\ \Phi_i(x_N) \end{bmatrix} \approx \Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i,1} \\ \Phi_{i,2} \\ \vdots \\ \Phi_{i,N} \end{bmatrix}$$

Quando aplicados os operadores de Dirichlet-Neumann e Neumann-Dirichlet às ϕ_j e ϕ_{nj} , é conveniente representa-los na forma de matrizes. Utilizando a Regra dos Trapézios (*TREFETHEN*, 2000) para discretizar os operadores $\mathcal{A}(\eta) \in \mathcal{B}(\eta)$

$$\left[\tilde{A}(\boldsymbol{\eta})\right]_{ij} = \Delta x \begin{cases} -\frac{\pi}{2L}(\eta_j - \eta_i) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\pi(\eta_j - \eta_i)}{2L}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(x_j - x_i)}{2L}\right)}\right) + \\ K(x_j - x_i, 2h - \eta_j - \eta_i), \ i \neq j \\ K(0, 2(h - \eta_j)) - \frac{1}{2}\ln\sqrt{1 + [\eta_x]_j^2}, \ i = j \end{cases}$$

$$[\pi I + B(\eta)]_{ij} = \pi [I]_{ij} + \Delta x \begin{cases} \left[\eta_x \right]_j \frac{\partial G_{(x_i,\eta_i)}}{\partial x} \middle|_{(x_j,\eta_j)} - \frac{\partial G_{(x_i,\eta_i)}}{\partial y} \middle|_{(x_j,\eta_j)}, & i \neq j; \\ \\ \frac{[\eta_{xx}]_j}{2 + 2[\eta_x^2]_j} + \frac{\partial K}{\partial y} (0, 2h - 2\eta_j) - \frac{\pi}{2L}, & i = j \end{cases}$$

Para aproximar \mathcal{A}_0 , foi utilizado Transformada Discreta de Fourier. Os coefi-

cientes de Fourier são aproximados pela Regra dos Trapézios conformeSLOAN;YAN (1988). Portanto,

$$[A_0]_{lj} = \Delta x \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} b_m \ e^{\frac{im\pi(x_l - x_j)}{L}}$$

onde
$$b_m = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0, \\ \\ \frac{1}{2|m|}, & m \neq 0 \end{cases}$$

Com isso, a partir de A_0 , $\tilde{A}(\eta) \in B(\eta)$, a discretização dos operadores Neumann-Dirichlet e Dirichlet-Neumann referentes a camada inferior possuem a seguinte representação matricial:

$$D_{2}(\eta) = [A_{0} + \tilde{A}_{2}(\eta)]^{-1} [\pi I + B_{2}(\eta)]$$
$$N_{2}(\eta) = [\pi I + B_{2}(\eta)]^{-1} [A_{0} + \tilde{A}_{2}(\eta)]$$

Fazendo as devidas adaptações em virtude da orientação do vetor normal indicadas por (3.24), os operadores referentes à camada superior são representados por:

$$D_1(\eta) = [-A_0 - \tilde{A}_1(\eta)]^{-1} [\pi I - B_1(\eta)]$$

$$N_1(\eta) = [\pi I - B_1(\eta)]^{-1} [-A_0 - \tilde{A}_1(\eta)]$$

Devido a (3.29), para calcular a média de uma função também é usada a Regra dos Trapézios. Portanto,

$$\langle h \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} h(x_i)$$

$$(4.9)$$

Os operadores \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 são aproximados por R_1 e R_2 , respectivamente, a partir de N_1 e D_2 .

$$R_2 \widehat{\boldsymbol{\Psi}} = [\rho_1 N_1 D_2 - \rho_2 I]^{-1} \widehat{\boldsymbol{\Psi}}$$

$$(4.10)$$

$$R_1 \widehat{\boldsymbol{\Psi}} = \rho_1^{-1} [\widehat{\boldsymbol{\Psi}} - \rho_2 R_1 \boldsymbol{\Psi}]$$
(4.11)

onde $\widehat{\Psi}$ é obtido a partir de (3.27) e (3.29).

Para aproximar as derivadas de $\eta \in \phi$ com relação à variável x foi utilizado a Transformada Discreta de Fourier conforme o Apêndice 1. Para qualquer função v de período 2L cuja discretização $\mathbf{v} = [v_1, \ldots, v_N]^t \in l_N^2$, sua derivada pode ser aproximada por v_{xj} em que

$$v_x(x_j) \approx v_{xj} = [D_N^{(1)} \mathbf{v}]_j = \sum_{\substack{m=1\\m \neq j \pmod{N}}}^N v_m \frac{\pi}{L} (-1)^{j-m} \cot\left(\frac{(j-m)\pi}{N}\right)$$

Tal expressão pode ser representada matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} v_{x1} \\ \vdots \\ v_{xj} \\ \vdots \\ v_{xN} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{L} \begin{bmatrix} 0 & \cot\left(\frac{\pi}{N}\right) & -\cot\left(\frac{2\pi}{N}\right) & \cdots & -\cot\left(\frac{\pi}{N}\right) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \cdots & -\cot\left(\frac{\pi}{N}\right) & 0 & \cot\left(\frac{\pi}{N}\right) & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cot\left(\frac{\pi}{N}\right) & -\cot\left(\frac{2\pi}{N}\right) & \cdots & -\cot\left(\frac{\pi}{N}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

De maneira análoga, de acordo com (TREFETHEN, 2000), a derivada de segunda ordem em x pode ser aproximada multiplicando pela matriz $D_N^{(2)}$ em que:

$$[D_N^{(2)}]_{ij} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \begin{cases} -\frac{(\pi N)^2}{12L^2} - \frac{1}{6}, & i = j\\ \frac{(-1)^{i+j+1}}{2\operatorname{sen}^2\left[\frac{(i-j)\pi}{N}\right]}, & i \neq j \end{cases}$$

Portanto a derivação com relação à x para de $\eta \in \Phi$ é dado por:

$$\eta_{\boldsymbol{x}} = D_N^{(1)} \boldsymbol{\eta}$$
$$\eta_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}} = D_N^{(2)} \boldsymbol{\eta}$$
$$\Phi_{\mathbf{i},\mathbf{x}} = D_N^{(1)} \Phi_{\mathbf{i}}$$

Além de serem Toeplitz, as matrizes $D_N^{(1)}$ e $D_N^{(2)}$ são circulantes tornando mais simples, a partir de funções do Matlab, a representação das mesmas.

Conforme visto em (3.40), para obter a pressão $p_i(x, y)$ no interior da camada *i* é necessário conhecer $\phi_{i,t}$, $\phi_{i,x} \in \phi_{i,y}$. O método para a discretização da derivada temporal será descrito na próxima seção. Para obter $\phi_{i,x}(x, y) \in \phi_{i,y}(x, y)$ no interior da camada, como esses termos são escritos como a integral de funções conhecidas sobre uma curva conhecida, segundo (3.38), podemos aproxima-los através da Regra dos Trapézios.

Consideraremos a malha formada pela mesma discretização de x usada na interface e $y_l = (-1)^{i+1} l \Delta y$ para $j = 1, 2, \dots, N_y$. Essa escolha contempla ambas as camadas. Portanto, consideramos que a ϕ_i no interior da camada i é aproximada conforme a seguir.

$$\boldsymbol{\phi_i} \approx \begin{bmatrix} \phi_i(x_1, y_1) & \cdots & \phi_i(x_k, y_1) & \cdots & \phi_i(x_N, y_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \phi_i(x_1, y_l) & \cdots & \phi_i(x_k, y_l) & \cdots & \phi_i(x_N, y_l) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_i(x_1, y_{N_y}) & \cdots & \phi_i(x_k, y_{N_y}) & \cdots & \phi_i(x_N, y_{N_y}) \end{bmatrix}$$

De maneira análoga, $\phi_{i,x} \in \phi_{i,y}$ são as matrizes que aproximam as derivadas de ϕ_i no interior das camadas. Para garantir que, independentemente do comportamento da onda, estes pontos pertençam ao interior da sua respectiva camada basta impor alguma condição para Δy , por exemplo, que seja maior do que a amplitude da onda em qualquer instante. Portanto, adotaremos $\Delta y = 2\alpha$, onde α representa a amplitude da onda. Então, utilizando a Regra dos Trapézios em (3.39), $\phi_i(t_n, x_j, y_l)$, em um instante t qualquer, é aproximado por

$$[\boldsymbol{\phi_{i}^{n}}]_{j,l} = \Delta x \sum_{k=1}^{N} \left[G(x_{k}, \eta_{k}; x_{j}, y_{l}) [\boldsymbol{\Phi_{i,n}}]_{k} - \sqrt{1 + [\eta_{x}]_{k}^{2}} G_{n}(x_{k}, \eta_{k}; x_{j}, y_{l}) [\boldsymbol{\Phi_{i}}]_{k} \right].$$
(4.12)

Suas derivadas são obtidas através de

$$[\boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{n}}]_{j,l} = \Delta x \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\partial G}{\partial x} (x_k, \eta_k; x_j, y_l) [\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{n}}]_k - \sqrt{1 + [\eta_x]_k^2} \frac{\partial G_n}{\partial x} (x_k, \eta_k; x_j, y_l) [\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{i}}]_k \right],$$
(4.13)

$$[\boldsymbol{\phi_{i,y}}^{n}]_{j,l} = \Delta x \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\partial G}{\partial y}(x_{k},\eta_{k};x_{j},y_{l})[\boldsymbol{\Phi_{i,n}}]_{k} - \sqrt{1 + [\eta_{x}]_{k}^{2}} \frac{\partial G_{n}}{\partial y}(x_{k},\eta_{k};x_{j},y_{l})[\boldsymbol{\Phi_{i}}]_{k} \right].$$

$$(4.14)$$

Como visto anteriormente, através da relação de Bernoulli pode-se encontrar a pressão a partir dos valores de ϕ e ϕ_t que, por sua vez, são obtidos a partir de valores na interface. Portanto, a matriz p_i^n representa a pressão aproximada no interior das camadas e é definida, a partir de (3.40), como

$$\boldsymbol{p_i^n} = -\rho_i \left[\boldsymbol{\phi_{i,t}^n} + \frac{1}{2} \left([\boldsymbol{\phi_{i,x}^n}]^2 + [\boldsymbol{\phi_{i,y}^n}]^2 \right) + g \boldsymbol{Y_i} \right], \tag{4.15}$$

em que Y_i representa a matriz cujas colunas são compostas pelas coordenadas y de cada ponto da malha do interior da camada i, ou seja,

4.2 Discretização Temporal

Para a discretização para a variável temporal, adotando $t_n = n\Delta t$, em que $n = 0, \dots, N_t$ em que N_t representa o número de pontos da discretização da variável temporal. Com isso, introduzindo a discretização temporal, temos os seguintes vetores

$$\begin{bmatrix} \eta(x_1, t_n) \\ \eta(x_2, t_n) \\ \vdots \\ \eta(x_N, t_n) \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{\eta^n} = \begin{bmatrix} \eta_1^n \\ \eta_2^n \\ \vdots \\ \eta_N^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_i(x_1, t_n) \\ \Phi_i(x_2, t_n) \\ \vdots \\ \Phi_i(x_N, t_n) \end{bmatrix} \approx \Phi_i^n = \begin{bmatrix} \Phi_{i,1}^n \\ \Phi_{i,2}^n \\ \vdots \\ \Phi_{i,N}^n \end{bmatrix}$$

De maneira análoga, o valor de ϕ_i no interior da camada i é aproximado por

$$\boldsymbol{\phi_i^n} \approx \begin{bmatrix} \phi_i(t_n, x_1, y_1) & \cdots & \phi_i(t_n, x_k, y_1) & \cdots & \phi_i(t_n, x_N, y_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \phi_i(t_n, x_1, y_l) & \cdots & \phi_i(t_n, x_k, y_l) & \cdots & \phi_i(t_n, x_N, y_l) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_i(t_n, x_1, y_{N_y}) & \cdots & \phi_i(t_n, x_k, y_{N_y}) & \cdots & \phi_i(t_n, x_N, y_{N_y}) \end{bmatrix}$$

Para a discretização do tempo utilizamos esquemas de Diferenças Finitas conhecidos na literatura, a saber, Leap Frog (*TREFETHEN*, 2000). Portanto, a partir do sistema (3.36), temos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}^{n+1} = \boldsymbol{\eta}^{n-1} + 2\Delta t \mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}^n, \boldsymbol{\Psi}^n) \\ \boldsymbol{\Psi}^{n+1} = \boldsymbol{\Psi}^{n-1} + 2\Delta t \mathcal{G}(\boldsymbol{\eta}^n, \boldsymbol{\Psi}^n) \end{cases} \quad para \quad n \ge 1, \tag{4.16}$$

em que $\mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}^n, \boldsymbol{\Psi}^n)$ e $\mathcal{G}(\boldsymbol{\eta}^n, \boldsymbol{\Psi}^n)$ são obtidos a partir dos métodos de apresentados na seção anterior. Além disso, para obter a pressão no interior da camada é necessário aproximar $\phi_{i,t}$ no interior. Para isso, utilizando Leap Frog,

$$\phi_{i,t}^{n} = \frac{\phi_{i}^{n+1} - \phi_{i}^{n-1}}{2\Delta t} \quad n \ge 1,$$
(4.17)

em que ϕ_i^{n-1} e ϕ_i^{n+1} são obtidos, em qualquer instante, através de (4.12).

Como o leap-frog é um esquema de dois passos, é necessário conhecer os valores nos passos n-1 e n para obter uma aproximação para o passo n+1. Porém, por se tratar de um problema de valor inicial, conhecemos apenas $\eta^0 \in \Psi^0$. Uma maneira de aproximar $\eta^1 \in \Psi^1$ é utilizando um esquema explícito de passo um, por exemplo, Euler Explícito. Portanto, para aproximar $\eta^1 \in \Psi^1$ usamos $\eta^0 \in \Psi^0$ através do esquema Euler Explícito.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}^{1} = \boldsymbol{\eta}^{0} + \Delta t \mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}^{0}, \boldsymbol{\Psi}^{0}) \\ \boldsymbol{\Psi}^{1} = \boldsymbol{\Psi}^{0} + \Delta t \mathcal{G}(\boldsymbol{\eta}^{0}, \boldsymbol{\Psi}^{0}) \end{cases}$$
(4.18)

onde η^0 e Ψ^0 são obtidos através das condições iniciais do sistema.

4.3 Algoritimo Computacional

Será apresentado o algoritmo utilizado unindo a discretização das derivadas, operadores assim como a evolução temporal do sistema. Por se tratar de um problema de Valor Inicial, adotaremos que os valores de $\Phi_1(0, x)$, $\Phi_2(0, x) \in \eta(0, x)$ são conhecidos a priori.

A	lg	oritmo	1:	Calculo	da	pressão

```
Entrada: \Phi_1^0, \Phi_2^0 \in \eta^0
Saída: \eta, p_1 \in p_2
inicio
Cálculo de \Phi_1^1, \Phi_2^1 \in \eta^1 através de Euler Explícito;
para n = 2, \dots, N_t hacer
Cálculo de \Phi_1^{n+1}, \Phi_2^{n+1} \in \eta^{n+1} através de Leap Frog;
Cálculo de p_1^n \in p_2^n;
fin para
fin
```

Conforme citado na seção anterior, iniciamos a evolução no tempo utilizando Euler Explícito porém, primeiramente, é necessário obter as derivadas dos dados iniciais para utilizar os operadores $\mathcal{F} \in \mathcal{G}$. A seguir será apresentado, passo a passo, o algoritmo com os devidos comentários.

Euler Explícito : $\Phi_1^1, \, \Phi_2^1 \in \eta^1$

- 1° passo: Calcular η_x^0 , η_{xx}^0 , $\Phi_{1,x}^0 \in \Phi_{2,x}^0$ através de $D_N^{(1)} \in D_N^{(2)}$.
- 2° passo: Calcular $\Phi_{1,n}^0$, $\Phi_{2,n}^0$ a partir do operador $\mathcal{D}_2(\eta^0)$.

• 3° passo: Calcular Ψ^0 a partir dos dados anteriores através de (3.27).

Após determinar os dados no passo inicial, podemos avançar no tempo a partir de Euler Explícito. Observe que não é necessário calcular a média dos valores obtidos pois ainda não foi utilizado o operador Neumann-Dirichlet.

4° passo: Calcular η¹ e Ψ¹ através de *F*(η⁰, Ψ⁰) e *G*(η⁰, Ψ⁰) de acordo com esquema (4.18).

Conforme visto em (3.36), para recuperar Φ_1^1 e Φ_2^1 é necessário conhecer η_x^1 , η_{xx}^1 assim como a $\widehat{\Psi}$.

- 5° passo: Calcular $\eta_x^1 \in \eta_{xx}^1$ através de $D_N^{(1)} \in D_N^{(2)}$.
- 6° passo: Calcular $\widehat{\Psi}^1$ a partir da média de Ψ^1 utilizando (4.9).
- 7° passo: Calcular $\widehat{\Phi}_2^1$ através de $\mathcal{R}_2 \Psi^1$.
- 8° passo: Calcular Φ_1^1 através de $\mathcal{R}_1 \Psi^1$.
- 9° passo: Calcular Φ_2^1 através de (3.34).

Como visto no primeiro passo, para continuar a evolução no tempo é necessário obter as derivas de $\Phi_1^1 \in \Phi_2^1$.

• 10° passo: Calcular $\Phi_{1,x}^1 \in \Phi_{2,x}^1$ através de $D_N^{(1)} \in D_N^{(2)}$ assim como $\Phi_{1,n}^1, \Phi_{2,n}^1$ a partir dos operadores $\mathcal{D}_1(\eta^1) \in \mathcal{D}_2(\eta^1)$, respectivamente. Com as informações obtidas no Euler Explícito é possível utilizar o Leap Frog pois já são conhecidos os valores em dois instantes consecutivos.

Leap Frog : Φ_1^{n+1} , Φ_2^{n+1} e η^{n+1}

- 1° passo: Calcular ηⁿ⁺¹ e Ψⁿ⁺¹ através de F(ηⁿ, Ψⁿ) e G(ηⁿ, Ψⁿ) de acordo com esquema (4.16).
- 2° passo: Calcular $\eta_x^{n+1} \in \eta_{xx}^{n+1}$ através de $D_N^1 \in D_N^2$.
- 3° passo: Calcular $\widehat{\Psi}^{n+1}$ a partir da média de Ψ^{n+1} utilizando (4.9).
- 4° passo: Calcular $\widehat{\Phi}_2^{n+1}$ através de $\mathcal{R}_2 \Psi^{n+1}$.
- 5° passo: Calcular Φ_1^{n+1} através de $\mathcal{R}_1 \Psi^1$.
- 6° passo: Calcular Φ_2^{n+1} através de (3.34).
- 7° passo: Calcular $\Phi_{1,x}^{n+1} \in \Phi_{2,x}^{n+1}$ através de $D_N^{(1)} \in D_N^{(2)}$ assim como $\Phi_{1,n}^{n+1}$, $\Phi_{2,n}^{n+1}$ a partir do operador $\mathcal{D}_2(\eta^{n+1})$.

Uma vez conhecido $\Phi_i \in \eta$ até o instante n + 1, é possível obter a pressão $p_i^n(x_j, y_l)$ através de (3.40) pois, conhecendo o potencial da velocidade na interface, $\phi_{i,x} \in \phi_{i,y}$ são facilmente aproximados por (4.13) e (4.14), respectivamente, assim como $\phi_{i,t}$ é aproximado por (4.17).

Cálculo da pressão : $p_1^n e p_2^n$

- 1º passo: Cálculo da potencial ϕ_i^n através de (4.17).
- 1° passo: Obter a $\phi_{i,t}$ a partir de (4.17).

- **3º passo:** Por meio de (4.13) e (4.14), calcular as derivadas espaciais de ϕ_i^n .
- 4º passo: Aproximar a pressão p_i^n através de (4.15).

A fim de validar o algoritmo, serão utilizados exemplos presentes na literatura, dentre eles, os exemplos apresentados no capítulo 1.

5 **RESULTADOS**

Adotamos o problema como de Valor Inicial, portanto, é necessário conhecer as condições iniciais. Para comparar os resultados para validar o algoritmo, consideraremos o sistema linearizado em que a onda está próxima do repouso, ou seja, sua amplitude é bem pequena quando comparada com h_1 utilizando as soluções apresentadas no capítulo 2. Consideraremos os regimes de ondas estacionárias e ondas de Stokes de 1^a e 3^a ordem.

A seguir apresentaremos alguns resultados oriundos da implementação do algoritmo desenvolvido. Para tal, foi utilizado o software Matlab e algumas de suas funções. Nos primeiros testes a velocidade de propagação da onda c é conhecida (aproximadamente) e fizemos uma discretização tal que $\Delta t = \frac{\Delta x}{1.5c}$ em que $\Delta x = \frac{2L}{N}$ e $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$. Usando diferentes valores para Δx determinamos a taxa de convergência empírica p, observada nas simulações de acordo com a equação

$$p_{i} = \frac{\log E_{i} - \log E_{i-1}}{\log(\Delta t)_{i} - \log(\Delta t)_{i-1}}$$
(5.1)

em que E_i e Δt_i representam o erro das soluções numéricas (medido na norma $\|\cdot\|_{\infty}$) e o tamanho do passo da discretização no tempo na *i*-ésima simulação, respectivamente.

Para as simulações de ondas estacionárias e de Stokes de 1^a ordem adotamos $g = 9.81 \ m/s^2$, as profundidades das camadas $h_1 = 10 \ m$ e $h_2 = 200 \ m$ e as densidades dos fluidos $\rho_1 = 1 \ g/m^3$ e $\rho_2 = 1,023 \ g/m^3$. Consideramos que as ondas tem comprimento $2L = 30 \ m$. Já no caso de ondas não-lineares de 3^a ordem consideramos as profundidades das camadas $h_1 = 5 \ m$ e $h_2 = 20 \ m$ e as densidades dos fluidos $\rho_1 = 1 \ g/m^3$ e $\rho_2 = 1,253 \ g/m^3$. Consideramos que as ondas tem

comprimento 2L = 4 m

5.1 Ondas Estacionárias de pequena amplitude

Considerando a solução do sistema linearizado para o regime de ondas estacionárias próximas do repouso apresentada em (2.20) em que k é o número de ondas, ω a frequência de onda e α sua amplitude. Substituindo (2.20) em (2.7) temos a relação de dispersão a seguir.

$$\omega^{2} = \frac{gk(\rho_{2} - \rho_{1})}{\rho_{1} \coth(kh_{1}) + \rho_{2} \coth(kh_{2})}$$
(5.2)

Para as simulações adotamos $g = 9.81 \ m/s^2$, as profundidades das camadas $h_1 = 10 \ m \in h_2 = 200 \ m \in$ as densidades dos fluidos $\rho_1 = 1 \ g/m^3 \in \rho_2 = 1,023 \ g/m^3$. Consideramos que as ondas tem comprimento $2L = 30 \ m$.

Conforme o esperado devido à linearização das equações, os erros diminuem a medida que α também diminui e a taxa de convergência empírica para $\eta \in \Psi$ são próximas de 2 que já era esperado devido a utilização do método de leap-frog na discretização no tempo. Já a taxa de convergência da pressão ficou próxima de 1 ainda que tenha sido usado leap-frog para a aproximação das derivadas no tempo de $\phi_1 e \phi_2$.

Discretização		Erro				
Δx	Δt	$\eta(t,x)$	$\Psi(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_2(t, x, y)$	
0.9375	0.8453	1.8239×10^{-7}	9.4715×10^{-7}	1.8926×10^{-7}	1.9362×10^{-7}	
0.4688	0.4270	4.5042×10^{-8}	2.3448×10^{-8}	7.1285×10^{-8}	7.2928×10^{-8}	
0.2344	0.2146	1.1226×10^{-8}	5.8574×10^{-9}	3.4860×10^{-8}	3.5665×10^{-8}	
0.1172	0.1076	2.8044×10^{-9}	1.4641×10^{-9}	1.7165×10^{-8}	1.7564×10^{-8}	
0.0586	0.0539	7.0096×10^{-10}	3.6614×10^{-8}	8.5187×10^{-9}	8.7184×10^{-9}	

Tabela 5.1: Erro de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-5}$

	Tax	Taxa de convergência observada				
i	$\eta(t,x)$	$\Psi_1(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_1(t, x, y)$		
p_2	2.0177	2.0141	1.4087	1.4087		
p_3	2.0044	2.0011	1.0320	1.0320		
p_4	2.0011	2.0003	1.0221	1.0219		
p_5	2.0003	1.9995	1.0108	1.0105		

Tabela 5.2: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-5}$

Discretização		Erro				
Δx	Δt	$\eta(t,x)$	$\Psi(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_2(t, x, y)$	
0.9375	0.8453	1.8232×10^{-5}	9.4735×10^{-6}	1.9005×10^{-5}	1.9474×10^{-5}	
0.4688	0.4270	4.5003×10^{-6}	2.3466×10^{-6}	7.3099×10^{-6}	7.5144×10^{-6}	
0.2344	0.2146	1.1217×10^{-6}	5.8762×10^{-6}	3.6101×10^{-6}	3.7298×10^{-6}	
0.1172	0.1076	2.7847×10^{-7}	1.4830×10^{-7}	2.0465×10^{-6}	2.1142×10^{-6}	
0.0586	0.0539	6.9128×10^{-8}	3.8533×10^{-8}	1.8024×10^{-6}	1.8389×10^{-6}	

Tabela 5.3: Precisão de $\eta,\,\Psi,\,p_1$
e p_2 ondas estacionárias com $\alpha=10^{-3}$

	Tax	Taxa de convergência observada				
i	$\eta(t,x)$	$\Psi_1(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_1(t, x, y)$		
p_2	2.0179	2.0133	1.3785	1.3738		
p_3	2.0053	1.9976	1.0178	1.0106		
p_5	2.0049	1.9863	0.8189	0.8190		
p_5	2.0154	1.9443	0.1832	0.2013		

Tabela 5.4: Precisão de $\eta,\,\Psi,\,p_1$
e p_2 ondas estacionárias com $\alpha=10^{-3}$

Discretização		Erro				
Δx	Δt	$\eta(t,x)$	$\Psi(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_2(t, x, y)$	
0.9375	0.8453	1.8144×10^{-4}	9.4569×10^{-5}	2.3105×10^{-4}	2.4448×10^{-5}	
0.4688	0.4270	4.4076×10^{-5}	2.3273×10^{-5}	9.1011×10^{-5}	9.6307×10^{-5}	
0.2344	0.2146	1.0258×10^{-5}	5.7091×10^{-6}	5.9674×10^{-5}	6.2329×10^{-5}	
0.1172	0.1076	2.2754×10^{-6}	1.3341×10^{-6}	7.2065×10^{-5}	7.5646×10^{-5}	
0.0586	0.0539	1.2076×10^{-8}	4.0576×10^{-8}	1.2325×10^{-6}	1.2905×10^{-6}	

Tabela 5.5: Erro de $\eta,\,\Psi,\,p_1$ e p_2 ondas estacionárias com $\alpha=10^{-2}$

	Tax	Taxa de convergência observada				
i	$\eta(t,x)$	$\Psi_1(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_1(t, x, y)$		
p_2	2.0414	2.0227	1.3441	1.3440		
p_3	2.1033	2.0273	0.6089	0.6277		
p_5	2.1725	2.0974	-0.2722	-0.2794		
p_5	0.9139	1.7172	-0.7742	-0.7706		

Tabela 5.6: Precisão de $\eta,\,\Psi,\,p_1$
e p_2 ondas estacionárias com $\alpha=10^{-2}$

5.2 Ondas de Stokes de 1ª Ordem

A solução do sistema linearizado para o regime de ondas viajantes de 1^{a} ordem próximas ao repouso apresentada em (2.18) em que a relação de dispersão

também é dada por (5.2). Consideramos $g = 9.81 \ m/s^2$, as profundidades das camadas $h_1 = 10 \ m \ e \ h_2 = 200 \ m \ e$ as densidades dos fluidos $\rho_1 = 1 \ g/m^3$ e $\rho_2 = 1,023 \ g/m^3$. Adotamos que as ondas tem comprimento $2L = 30 \ m$.

Assim como nas ondas estacionárias, os erros para as ondas de 1^a ordem também é menos a medida que α é diminui assim como a taxa de convergência empírica para $\eta \in \Psi$ são próximas de 2 que já era esperado devido a utilização do método de leap-frog na discretização no tempo. Já a taxa de convergência da pressão ficou próxima de 1 ainda que tenha sido usado leap-frog para a aproximação das derivadas no tempo de $\phi_1 \in \phi_2$.

Discretização		Erro				
Δx	Δt	$\eta(t,x)$	$\Psi(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_2(t, x, y)$	
1.8750	1.7259	8.5279×10^{-5}	4.5972×10^{-5}	6.8033×10^{-5}	6.9648×10^{-5}	
0.9375	0.8630	2.1337×10^{-5}	1.1498×10^{-5}	1.9932×10^{-5}	2.0330×10^{-5}	
0.4688	0.4315	5.3308×10^{-6}	2.8680×10^{-6}	7.7642×10^{-6}	7.8861×10^{-6}	
0.2344	0.2157	1.3470×10^{-7}	7.2062×10^{-7}	4.3514×10^{-6}	4.3954×10^{-6}	
0.1172	0.1079	3.5391×10^{-7}	1.8540×10^{-7}	3.6988×10^{-6}	3.7238×10^{-6}	
0.0586	0.0539	1.0643×10^{-7}	5.2581×10^{-8}	5.2231×10^{-6}	5.3679×10^{-6}	

Tabela 5.7: Erro de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-3}$

	Tax	Taxa de convergência observada				
i	$\eta(t,x)$	$\Psi_1(t,x)$	$p_1(t,x,y)$	$p_1(t, x, y)$		
p_2	1.9988	1.9994	1.7711	1.7765		
p_3	2.0009	2.0033	1.3602	1.3662		
p_5	1.9846	1.9927	0.8354	0.8433		
p_5	1.9283	1.9586	0.2344	0.2392		
p_6	1.7335	1.8181	-0.4978	-0.5276		

Tabela 5.8: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-3}$

Discretização		Erro				
Δx	Δt	$\eta(t,x)$	$\Psi(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_2(t, x, y)$	
1.8750	1.7259	8.5724×10^{-4}	4.6219×10^{-4}	8.4019×10^{-4}	8.6161×10^{-4}	
0.9375	0.8630	2.1847×10^{-4}	1.1716×10^{-4}	2.5661×10^{-4}	2.6696×10^{-4}	
0.4688	0.4315	5.8597×10^{-5}	3.0753×10^{-5}	1.3336×10^{-4}	1.3064×10^{-4}	
0.2344	0.2157	1.8972×10^{-5}	9.3181×10^{-6}	1.4611×10^{-4}	1.5073×10^{-4}	
0.1172	0.1079	9.2529×10^{-6}	4.2185×10^{-6}	2.4478×10^{-4}	2.5653×10^{-4}	
0.0586	0.0539	1.0643×10^{-7}	5.2581×10^{-8}	5.2231×10^{-6}	5.3679×10^{-6}	

Tabela 5.9: Erro de $\eta,\,\Psi,\,p_1$ e p_2 ondas estacionárias com $\alpha=10^{-2}$

	Tax	Taxa de convergência observada				
i	$\eta(t,x)$	$\Psi_1(t,x)$	$p_1(t, x, y)$	$p_1(t, x, y)$		
p_2	1.9988	1.9994	1.7711	1.7765		
p_3	2.0009	2.0033	1.3602	1.3662		
p_4	1.9846	1.9927	0.8354	0.8433		
p_5	1.9283	1.9586	0.2344	0.2392		
p_6	1.7335	1.8181	-0.4978	-0.5276		

Tabela 5.10: Precisão de η , Ψ , p_1 e p_2 ondas estacionárias com $\alpha = 10^{-2}$

5.3 Ondas de Stokes de 3ª Ordem

No seguinte exemplo vamos um pouco além da teoria linear, considerando ondas de Stokes de terceira ordem, a solução aproximada da interface é dada por:

$$\eta(t,x) = \alpha \cos(kx - \omega t) + \alpha_2 \cos 2(kx - \omega t) + \alpha_3 \cos 3(kx - \omega t),$$

em que, considerando os coeficientes (2.22), α_2 e α_3 são obtidos através de (2.23) e (2.24), respectivamente. A relação de disperção é (2.26). Consideramos as profundidades das camadas $h_1 = 10 \ m \ e \ h_2 = 200 \ m \ e$ as densidades dos fluidos $\rho_1 = 1 \ g/m^3$ e $\rho_2 = 1,253 \ g/m^3$. Adotamos que as ondas tem comprimento $2L = 20 \ m$

		Erro	Taxa de convergência observada
Δx	Δt	$\eta(t,x)$	$\eta(t,x)$
1.2500	0.1670	1.0194×10^{-4}	
0.6250	0.0835	2.5299×10^{-5}	2.0063
0.3125	0.0417	6.3432×10^{-6}	1.9923
0.0156	0.0208	1.9062×10^{-6}	1.7285

Tabela 5.11: Erro de η para ondas de Stokes de 3ª ordem em que $\alpha=0.01$



Figura 5.1: Pressão no interior da camada para $t = 6.9286 \ s \ e \ t = 10.7016 \ s$

5.4 Decomposição em ondas viajantes

O seguinte exemplo tem como objetivo apresentar a evolução de uma onda onde os efeitos não lineares são mais intensos.

Sabemos que quando $h_1 \ll h_2 = O(\lambda)$ existem soluções aproximadas (assintóticas) na forma de ondas solitárias que dependem do parâmetro $0 < \beta < \pi/2$ e satisfazem a equação de ondas longas intermediárias (ILW) SAUT (2013). Essa solução é dada por

$$\eta_{ILW}(t,x) = \frac{a\cos^2\beta}{\cos^2\beta + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x-ct}{\lambda_{ILW}}\right)}$$
(5.3)

em que $a = 4c_2\beta \tan \beta/(c_1h_2)$, $c = c_0 - 2c_2\beta \tan \beta/h_2$ e $\lambda_{ILW} = h_2/\beta$ representam a amplitude, velocidade de propagação e comprimento de onda efetivo, respectivamente, observe que seu calculo envolve os seguintes parâmetros: $c_0^2 = gh_1^2(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, $c_1 = -1.5c_0/h_1$ e $c_2 = 0.5c_0h_1\rho_2/\rho_1$ (que dependem apenas da configuração física).

Nas simulações consideramos como condições iniciais uma interface com perfil $\eta_0(x) = 2\eta_{ILW}(0, x)$ (para o caso $\beta = 1$) e potenciais nulos. Observamos que neste caso o perfil inicial representa uma onda de depressão. O domínio físico nas simulações foi o intervalo [0, 2000] usamos um $\Delta x = 15.6250$ e um $\Delta t = 1.4128$ que corresponde a um número de Courant C = 0.125 (em relação a velocidade de propagação da onda solitária).

Na figura 5.4 os resultados mostram a decomposição desse perfil inicial em duas ondas viajando para a direita e a esquerda. Observamos que essas duas ondas se deslocam sem mudar muito suas formas, devido à periodicidade em x elas voltam a interagir e se reencontrar no centro.



Figura 5.2: Decomposição de um perfil de onda em duas ondas viajantes. Mostramos os gráficos de $-\eta(t, x)$.

Na figura (5.4) é apresentado o detalhe da onda que viaja para a direita quando t = 867.0664 em conjunto com a onda solitária corrrespondente à equação ILW (5.3). Podemos observar que a onda solitária viaja um pouco mais devagar, mas observando o perfil da onda solitária deslocado concluímos que seus perfis são muito semelhantes.



Figura 5.3: Detalhe do perfil da onda viajando para esquerda. Comparação com o perfil de uma onda solitária correspondente da equação ILW.

As figuras a seguir representam a variação da pressão no interiror das camadas a partir das ondas ILW. É possível notar que o campo de pressão varia de acordo com a onda. As figuras mostram o comportamento da pressão quando as duas ondas menores se aproximam e, logo após o encontro, seguindo em sentidos opostos.











6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho apresentamos um método integral de contorno que permite a simulação da propagação de ondas internas na interface entre duas camadas de fluidos e obter uma aproximação do campo de pressão. A utilização desse método possibilita relacionar a pressão no interior das camadas com o comportamento da interface.

Para ondas lineares de pequena amplitude, a simulação da propagação das ondas se mostrou eficiente observando-se uma ordem de convergência próxima da esperada. Mesmo quando foi considerado ondas não-lineares, o algoritmo ainda apresentou bons resultados. Porém, para a simulação da pressão, o algoritmo apresentou alguns resultados indesejados quanto à taxa de convergência, principalmente quando consideramos ondas não lineares.

Também apresentamos um exemplo onde os efeitos não lineares são mais intensos, o que indica que o método desenvolvido pode ser usado para simular interações não lineares.

Como trabalhos futuros propomos a utilização de outros métodos de discretização do tempo afim de melhorar a ordem de convergência das soluções e um estudo mais aprofundado para encontrar maneiras alternativas para discretizar os operadores envolvidos no cálculo da pressão através do método da integral de contorno.
REFERÊNCIAS

- ATKINSON, K.; HAN, W. Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework. New York: Springer Science, 2009.
- BYRON, F. W.; FULLER, R. W. Mathematics of classical and quantum physics. [S.l.]: North Chelmsford: Courier Corporatio, 2012.
- CARDEÑA, G. E. C. Modelagem Computacional da Propagação de Ondas Internas. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Programa de Pós-Graduação em Informática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.
- CHOI, W.; CAMASSA, R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge, v. 313, p. 83–103, 1996.
- CHOI, W.; CAMASSA, R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge, v. 396, p. 1–36, 1999.
- CLAMOND, D. et al. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations Part I: free space problems. J. of Computational Physics, Orlando, v. 205, p. 665–685, 2005.
- EVANS, L. C. Partial Differential Equations. New York: AMS, 2010.
- GUIDOTTI, P. A. A first kind boundary integral formulation for the Dirichlet-to-Neumann map in 2D. J. of Computational Physics, Cambridge, v. 190, p. 325–345, 2008.
- HUNT, J. N. Interfacial waves of finite amplitude. La Houille Blanche, Paris, n. 4, p. 515–531, 1961.
- LAMB, H. Hydronynamics. New York: Dover Puplications, 1932.

- MASSEL, R. Internal Gravity Waves in the Shallow Seas. New York: Springer, 2015.
- RIBEIRO-JUNIOR, R. Trajetórias de Partículas Geradas por Ondas Periódicas com Vorticidade. 2014. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.
- SAUT, J. C. Asymptotic models for surface and internal waves. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- SLOAN, I. H.; YAN, Y. On integral equations of the first kind with logarithmic kernels. J. of Integral Equations and Applications, Lubbock, v. 1, p. 549– 579, 1988.
- THORPE, S. A. On the shape of progressive internal waves. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, London, v. 263, n. 1145, p. 563-614, 1968.
- TREFETHEN, L. N. Spectral Methods in MATLAB. [S.I.]: Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- WHITHAM, G. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley, 1974.
- ZARÁTE, A. Ruiz de. A Reduced Model for Internal Waves Interacting with Submarine Structures at Intermediate Depth. 2007. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.

APÊNDICE A TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Seja uma função $v : h\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ a discretização de uma função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de período 2L tal que $v_j = u(x_j)$. Considerando que o intervalo [0, 2L] é dividido em um número par N de partes iguais com o comprimento h = 2L/N. Dizemos que a função v é N-periódica com relação à malha.

Definição A.1 Seja uma função $v : h\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Denota-se l_N^2 o espaço das funções que são N-periódica com relação à malha e sua norma

$$||v|| = \left[h\sum_{j=N/2}^{N/2-1} |v_j|^2\right]^{1/2}$$

•

Definição A.2 A Transformada Discreta de Fourier de uma função $v \in l_N^2$ é definida como

$$\widehat{v}(\varepsilon) = h \sum_{j=N/2}^{N/2-1} e^{-i\varepsilon x_j} v_j, \qquad \varepsilon \in \mathbb{Z}.$$

Definição A.3 Dado uma função $w \in l_N^2$. A Transformada Discreta de Fourier Inversa $\check{w} \in l_N^2$ é definida como

$$\check{w}_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{-ikx_j} w_k.$$

A Transformada Discreta de Fourier (TDF) é de grande valia pois é pode-se obter um aproximação para a derivada de u a partir de \hat{v} devido ao teorema a seguir **Teorema A.O.1** Seja $v \in l_N^2$. Se u pertencer à S_N , então

$$u^{(n)} = i^n k^n \widehat{u}(\varepsilon), \qquad \varepsilon \in \mathbb{Z}.$$
 (A.1)

em que $k \in \mathbb{Z}$ e $S_N = span\{e^{ikx}; -N/2 \leq k \leq N/2 - 1\}$ representa o espaço de polinômios trigonométricos de ordem N/2.

Com isso, para obter $v^{(n)}$ a partir de \hat{v} basta calcular TDF de u, multiplicar por $i^n k^n$ e calcular TDFI de $\widehat{u^{(n)}}$.