

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TERCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ROMULO BRITO DA SILVA

**PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM
UMA TEORIA DE MEIOS
POROELÁSTICOS**

Rio de Janeiro
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

ROMULO BRITO DA SILVA

**PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM
UMA TEORIA DE MEIOS
POROELÁSTICOS**

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Informática, do Instituto de Matemática e do Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

Orientador: I-Shih Liu

Orientador: Mauro Antonio Rincon

Rio de Janeiro
2017

586p Silva, Romulo Brito da

Propagação de Ondas em uma Teoria de Meios Poroelásticos /
Romulo Brito da Silva. – 2017.

147 f.: il.

Tese (Doutorado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2017.

Orientador: I-Shih Liu.

Orientador: Mauro Antonio Rincon.

1. Mecânica do Contínuo. 2. Teoria de Misturas. 3. Meio Poroso. 4. Propagação de Onda. – Teses. I. Liu, I-Shih (Orient.). II. Rincon, Mauro Antonio (Orient.). III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. IV. Título

CDD

Propagação de Ondas em uma Teoria de Meios Poroelásticos

ROMULO BRITO DA SILVA

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Informática, do Instituto de Matemática e do Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

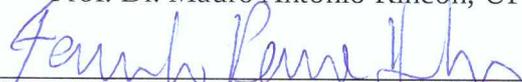
Aprovado em: Rio de Janeiro, 20 de outubro de 2017.



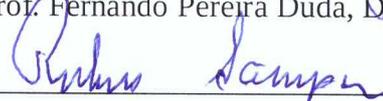
Prof. Ph.D. I-Shih Liu, UFRJ (Presidente)



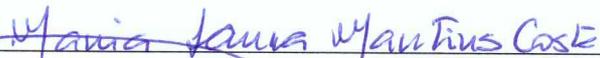
Prof. Dr. Mauro Antonio Rincon, UFRJ



Prof. Fernando Pereira Duda, D.Sc., UFRJ



Prof. Rubens Sampaio Filho, Ph.D., PUC RJ



Prof. Maria Laura Martins Costa, D.Sc., UFF



Prof. Rolci de Almeida Cipolatti, Ph.D., UFRJ



Prof. Marcello Goulart Teixeira, D.Sc., UFRJ



Prof. Daniel Alvaro Gregório Vigo, D.Sc., UFRJ

Para minha família.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos por todo suporte, preocupação e cuidado. À minha esposa Olívia Dib, que por vezes foi submetida a minha ausência e em outras a ouvir minhas histórias (teorias, conjecturas, pensamentos, vez ou outra bobagens...) nessa trajetória, pela dedicação, carinho, paciência e as vezes pela falta dela nos momentos em que de fato foram necessários.

Aos meus orientadores, I-Shih Liu com quem aprendi muito, obrigado pela paciência e disponibilidade e Mauro Antonio Rincon, por todo suporte e por ter aberto as portas do PPGI para que eu pudesse realizar este trabalho, meu muito obrigado.

Aos membros da banca pelos comentários e correções, essenciais para uma melhor compreensão deste trabalho. Peço-lhes desculpas pela existência de erros ainda remanescentes, mas todo trabalho tem prazo e garanto-lhes que me esforcei para tentar diminuí-los nesse tempo.

Aos meus amigos do LC3 que me acolheram de imediato e com os quais compartilhei e espero compartilhar grandes momentos ainda. Em especial aos amigos Gabriel Thomaz de Aquino Pereira, Bruno Alves do Carmo e Adriano Alves de Alcântara, que com as brincadeiras e conversas deixaram essa caminhada mais leve.

Às secretárias do PPGI, Adriana Albuquerque e Patrícia Mamede, pelas conversas, paciência e por serem sempre solícitas.

E por último, ao CENPES/BR pelo suporte financeiro, que enquanto durou, foi essencial nesses anos de estudo.

RESUMO

Silva, Romulo Brito da. **Propagação de Ondas em uma Teoria de Meios Poroelásticos**. 2017. 147 f. Tese (Doutorado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

O presente trabalho baseia-se em uma teoria de mistura de meios poroelásticos que, em contraste com a teoria de *Biot*, nenhuma aceleração relativa é introduzida como uma força interativa nas equações de movimento para explicar o efeito da massa adicional. A propagação de ondas harmônicas planas em região homogeneamente deformada é considerada. Para diferentes modelos poroelásticos, tanto as ondas $P1$ quanto $P2$ são obtidas, exceto para o modelo com componentes sólidos e fluidos incompressíveis, para os quais existe apenas uma onda P . As velocidades de fase e os coeficientes de atenuação das relações de dispersão são determinados numericamente para mostrar graficamente seus comportamentos qualitativos sob efeito da variação da frequência e da porosidade.

Palavras-chave: Mecânica do Contínuo. Teoria de Misturas. Meio Poroso. Propagação de Onda.

ABSTRACT

Silva, Romulo Brito da. **Propagação de Ondas em uma Teoria de Meios Poroelásticos**. 2017. 147 f. Tese (Doutorado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

The present work is based on a mixture theory of poroelastic media which in contrast to Biot's theory, no relative acceleration is introduced as an interactive force in the equations of motion to account for the effect of added mass. The propagation of plane harmonic waves in homogeneously deformed region are considered. For different poroelastic models, both $P1$ and $P2$ waves are obtained except the model with both incompressible solid and fluid constituents, for which only one P wave exists. Phase velocities and attenuation coefficients from dispersion relations are numerically determined in order to show graphically their qualitative behaviors on the variation of the frequency and the porosity.

Keywords: Continuum Mechanics. Mixture Theory. Porous Media. Wave Propagation.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Ondas de compressão e de cisalhamento.	15
3.1	A figura acima representa o momento de interação entre dois constituintes de uma mistura, denotados pelos índices i e j . O ponto material $\mathbf{p}_i \in B_i$ é levado a posição \mathbf{X}_i que pertence a configuração de referência $B_{\kappa_i} \subset \mathbb{E}$. De modo análogo, o ponto material \mathbf{p}_j é fixado na posição \mathbf{X}_j na configuração de referência $B_{\kappa_j} \subset \mathbb{E}$. Em um dado instante, t_0 , a configuração atual em B_{t_0} é ocupada simultaneamente pelos corpos dos constituintes B_i e B_j em suas respectivas configurações de referência B_{κ_i} e B_{κ_j} , de modo que a posição dos pontos materiais \mathbf{p}_i e \mathbf{p}_j são mapeados na posição espacial $\chi_i(\mathbf{X}_i, t_0) = \chi_j(\mathbf{X}_j, t_0) = \mathbf{x} \in B_{t_0} \subset \mathbb{E}$	25
5.1	No sentido horário, imagem aproximada de uma formação óssea, solo argiloso seco compactado, vidro reciclado sinterizado, utilizado com o objetivo de isolamento acústico, rocha magmática. . .	49
5.2	Poros presentes no concreto denso. Fonte: http://iti.northwestern.edu/cement	51
5.3	Visão aproximada dos poros que foram uni-direcionados através do método de extrusão em fibras de carbono presentes em cerâmicas. Fonte: Porous ceramics mimicking nature—preparation and properties of microstructures with unidirectionally oriented pores. . . .	51
5.4	A imagem representa uma seção transversal de um meio poroso com volume V , onde no elemento de volume representativo dV , estão presentes os constituintes sólido (com volume dV_s com os poros não preenchidos pelo fluido) e os poros preenchidos pelo constituinte fluido, cujo o volume é dV_f	52
5.5	O diagrama representa caminhos de fluxo hipotéticos através de um meio poroso.	57
7.1	A imagem representa uma região R arbitrária do espaço dividida pela superfície singular $\sigma(t)$, gerando duas regiões R^+ e R^- com a convenção da normal \mathbf{n} apontando na direção R^+ no ponto $\mathbf{x} \in \sigma(t)$.	65
7.2	A imagem superior mostra que a direção da aceleração da onda pode não ser alinhada à direção do vetor normal \mathbf{n} . Na imagem inferior, realizamos a suposição feita para ondas longitudinais, ou seja, além da aceleração ser paralela ao vetor deslocamento $\Delta \mathbf{x}$, essa direção está alinhada com o vetor normal da superfície $\sigma(t)$. .	69

10.1	Velocidade de fase gerada nesse trabalho (vermelho) e em [42] (azul).	117
10.2	Atenuação gerada nesse trabalho (vermelho) e em [42] (azul).	117
10.3	A diferença das velocidades de fase das ondas $P2_\infty$ e $P2_\infty^w$	118
10.4	os valores limites para as ondas $P2_0$ e $P2_0^w$, com $\omega \leq 10^{-3}$	118
10.5	A diferença entre as ondas geradas pela teoria [42] e [31] está de acordo com os resultados obtidos para as velocidades de fase das ondas P2 Fig. 10.3.	119
10.6	Velocidade de fase da onda de cisalhamento.	119
10.7	Atenuação sofrida pela onda de cisalhamento.	119
10.8	Diminuímos a escala do gráfico da velocidade de fase da onda S em torno da interseção com o eixo vertical.	120
10.9	Velocidades de fase da onda P1 para vários valores de porosidade.	122
10.10	Atenuação da onda P1 para vários valores de porosidade.	122
10.11	Velocidades de fase da onda P2 para vários valores de porosidade.	123
10.12	Gráfico da velocidade de fase da onda P2 para $\omega \leq 10^{-3}$	123
10.13	Atenuação da onda P2 para vários valores de porosidade.	124
10.14	Gráfico da atenuação da onda P2 para $\omega \leq 10^{-3}$	124
10.15	Representação gráfica da velocidade da onda P1 para altas frequências.	124
10.16	Representação gráfica da velocidade da onda P1 para baixas frequências.	125
10.17	Representação gráfica da atenuação da onda P1 para frequências altas.	125
10.18	O gráfico mostra a diferença entre as velocidades de propagação da onda P1 sob a influência da mudança da porosidade do meio em baixas frequências (azul) e altas frequências (vermelho).	126
10.19	Representação gráfica da velocidade da onda P2 para frequências altas.	126
10.20	Representação gráfica da atenuação da onda P2 para frequências altas.	127
10.21	Velocidade de fase da onda P1 em função da frequência e resistividade do meio.	127
10.22	Atenuação sofrida pela onda P1 em função da frequência e resistividade do meio.	127
10.23	Velocidade de fase da onda P2 em função da frequência e resistividade do meio.	128
10.24	Atenuação sofrida pela onda P2 em função da frequência e resistividade do meio.	128
10.25	Velocidade de fase da onda de cisalhamento para $\phi = \{0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$	129

10.26	Atenuação da onda de cisalhamento para a porosidade do meio variando.	129
10.27	Representação gráfica da velocidade da onda S para frequências altas.	130
10.28	Atenuações da onda de cisalhamento, $\omega \rightarrow \infty$, e porosidade do meio variando $\phi = \{0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$	130
10.29	Velocidades limites para baixas frequências para a onda de cisalhamento com a porosidade do meio variando.	131
10.30	Velocidades de fase da onda P1 para vários valores de porosidade.	132
10.31	Atenuação da onda P1 para vários valores de porosidade.	132
10.32	Velocidades de fase da onda P2 para vários valores de porosidade.	132
10.33	Atenuação da onda P2 para vários valores de porosidade.	132
10.34	Velocidades limites para altas frequências da onda P1 com a porosidade do meio variando.	133
10.35	Valores limites de atenuação da onda P1 para altas frequências, com porosidade do meio variando.	133
10.36	Valores limite para velocidade de fase da onda P1, para baixas frequências com porosidade do meio variando.	134
10.37	Valores limites da velocidade de fase da onda P2 para altas frequências, com porosidade do meio variando.	134
10.38	Valores limites da atenuação da onda P2 para altas frequências, com porosidade do meio variando.	135
10.39	Velocidades de fase da onda P1 para vários valores de porosidade.	136
10.40	Atenuação da onda P1 para vários valores de porosidade.	136
10.41	Valores limites da velocidade da onda P1 para frequências altas, com porosidade variando.	137
10.42	Valores limites da atenuação onda P1 para frequências altas, com porosidade variando.	137
10.43	Velocidade de fase da onda P1 para os três modelos, com 20% de porosidade.	139
10.44	Atenuação da onda P1 para os três modelos, com 20% de porosidade.	139
10.45	Velocidade de fase da onda P2 para os dois modelos, com 20% de porosidade.	140
10.46	Atenuação da onda P2 para os dois modelos, com 20% de porosidade.	140
10.47	Velocidade de fase da onda P1 para os três modelos, com 40% de porosidade.	141
10.48	Atenuação da onda P1 para os três modelos, com 40% de porosidade.	141

10.49	Velocidade de fase da onda $P2$ para os Modelos-1,2, com 40% de porosidade.	141
10.50	Atenuação da onda $P2$ para os Modelos-1,2, com 30% de porosidade.	141

LISTA DE TABELAS

10.1	Parâmetros utilizados nas relações de dispersão para os modelos com porosidade $\phi = \{0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$	120
10.2	Velocidade de fase da onda P1, variando a porosidade para altas frequências.	124
10.3	Velocidade de fase da onda P1, variando a porosidade para baixas frequências.	125
10.4	Atenuação da onda P1, variando a porosidade para altas frequências.	125
10.5	Velocidade de fase da onda P2, variando a porosidade em altas frequências.	126
10.6	Atenuação da onda P2, variando a porosidade em altas frequências.	127
10.7	Velocidade de fase da onda S, variando a porosidade em altas frequências.	130
10.8	Atenuação da onda S, variando a porosidade em altas frequências.	130
10.9	Velocidade de fase da onda S, variando a porosidade em baixas frequências.	131
10.10	Velocidade de fase da onda P1, variando a porosidade em altas frequências.	133
10.11	Atenuação da onda P1, variando a porosidade em altas frequências.	133
10.12	Velocidade da onda P1, variando a porosidade em baixas frequências	134
10.13	Velocidade da onda P2, variando a porosidade em altas frequências.	134
10.14	Atenuação da onda P2, variando a porosidade em altas frequências.	135
10.15	Velocidade de fase da onda P1 para altas frequências.	137
10.16	Atenuação da onda P1 quando ω tende a zero.	137

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	OBJETIVO	17
1.2	TRABALHOS RELACIONADOS	19
2	EQUAÇÃO GERAL DE BALANÇO	22
2.1	EQUAÇÃO DE BALANÇO NA FORMA LOCAL	23
3	TEORIA DE MISTURAS	24
3.1	LEIS DE BALANÇO PARA CADA CONSTITUINTE	25
3.1.1	Balanço de Massa	26
3.1.2	Balanço de Momento Linear e Momento Angular	27
3.1.3	Balanço de Energia	28
3.1.4	Balanço de entropia	32
3.2	LEIS DE BALANÇO PARA A MISTURA	33
4	MISTURA ELÁSTICA DE SÓLIDO E FLUIDO	40
4.1	PRINCÍPIO DE ENTROPIA	43
4.1.1	Sumário de Resultados	45
5	MEIO POROSO	48
5.1	MEIO POROSO SATURADO	50
5.2	PRESSÃO EM PORO	53
5.3	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	54
5.4	TEORIA LINEAR	55
6	PROBLEMAS EM POROELASTICIDADE	60
6.1	INCOMPRESSIBILIDADE	62
7	ONDAS DE ACELERAÇÃO	64
7.1	PROPAGAÇÃO DE FRENTE DE ONDA	64
7.2	MEIO POROSO COM CONSTITUINTE SÓLIDO INCOMPRESSÍVEL	67
7.2.1	Ondas de Aceleração Longitudinais	68
7.2.2	Ondas de Aceleração Transversais	72
8	ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE ONDA EM MEIO POROSO VIA ONDAS HARMÔNICAS	74
8.1	SISTEMAS DE EQUAÇÕES VIA ONDAS HARMÔNICAS COM CONSTITUINTE SÓLIDO INCOMPRESSÍVEL	75

8.1.1	Onda Harmônica Plana Longitudinal com Constituinte Sólido Incompressível	82
8.1.2	Ondas Transversais com Constituinte Sólido Incompressível	87
8.2	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE GOVERNO VIA ONDAS HARMÔNICAS COM CONSTITUINTE FLUIDO INCOMPRESSÍVEL	91
8.2.1	Onda Harmônica Plana Longitudinal com Constituinte Fluido Incompressível	95
8.3	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE GOVERNO VIA ONDAS HARMÔNICAS COM CONSTITUINTES SÓLIDO E FLUIDO INCOMPRESSÍVEIS	99
8.3.1	Onda Harmônica Plana Longitudinal com Constituintes Sólido e Fluido Incompressível	102
9	VELOCIDADES DE ONDAS E ESTADO DE REFERÊNCIA HOMOGENEAMENTE DEFORMADO	105
9.1	VELOCIDADE DE ONDA NAS DIREÇÕES PRINCIPAIS	107
9.1.1	Velocidade da onda no estado de referência natural	108
10	RESULTADOS NUMÉRICOS	112
10.1	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O MODELO COM SÓLIDO INCOMPRESSÍVEL	116
10.2	INFLUÊNCIA DA POROSIDADE NA RELAÇÃO DE DISPERSÃO	120
10.2.1	Influência da Porosidade nas Velocidades de Fase com Constituinte Sólido Incompressível	121
10.2.2	Resultados Numéricos Para o Modelo com Sólido Incompressível Ondas Transversais	128
10.2.3	Resultados Numéricos Para o Modelo com Fluido Incompressível	130
10.2.4	Resultados Numéricos Para o Modelo com sólido e fluido Incompressíveis	134
10.2.5	Comparação Entre os Modelos com Constituinte Sólido, Constituinte Fluido e Meio Poroso Incompressíveis	138
11	CONSIDERAÇÕES FINAIS	142
11.1	TRABALHOS FUTUROS	143
	REFERÊNCIAS	144

1 INTRODUÇÃO

A teoria de meio poroso vem ganhando atenção nos últimos anos, devido a sua vasta aplicabilidade na modelagem de fenômenos físicos, geológicos, químicos, biológicos, entre outros. Em particular, essa teoria vem sendo aplicada na prospecção de petróleo, em que os conceitos de meio poroso e meio fraturado são comuns. Um dos principais interesses nessa área diz respeito à determinação da direção preferencial de propagação da onda. Essa direção está relacionada com a permeabilidade e com a porosidade do meio e, conseqüentemente, com a geometria da matriz sólida. Assim, as relações de escoamento ou migração de um fluido nas camadas internas de uma dada região, estão vinculadas (dentre outros fatores) com a permeabilidade e a porosidade do meio nessa região. Podemos ainda citar que um dos passos na determinação da existência de hidrocarbonetos nas armadilhas petrolíferas é a realização de experimentos *in situ* que consistem na leitura de dados obtidos através da reflexão de ondas acústicas em diferentes meios dos quais o solo é composto. De acordo com a resposta dessas ondas, podemos classificar as camadas de rochas presentes na região e, assim, obter indícios da existência de reservatórios.

São previstos experimentalmente dois tipos de ondas acústicas que se propagam no meio poroelástico. A onda primária, ou onda P, é uma onda de compressão e o deslocamento das partículas ocorre na direção da propagação. A outra, é uma onda de cisalhamento, chamada de onda S e o deslocamento das partículas ocorre na direção transversal à propagação, Fig. 1.1.

Ambas as ondas P e S, se propagam no meio sólido. Entretanto, na teoria formulada por *M.A. Biot* [7, 8, 9, 10], uma terceira onda foi prevista. Essa onda se propaga na mistura sólido-fluido, cujo deslocamento das partículas é paralelo à

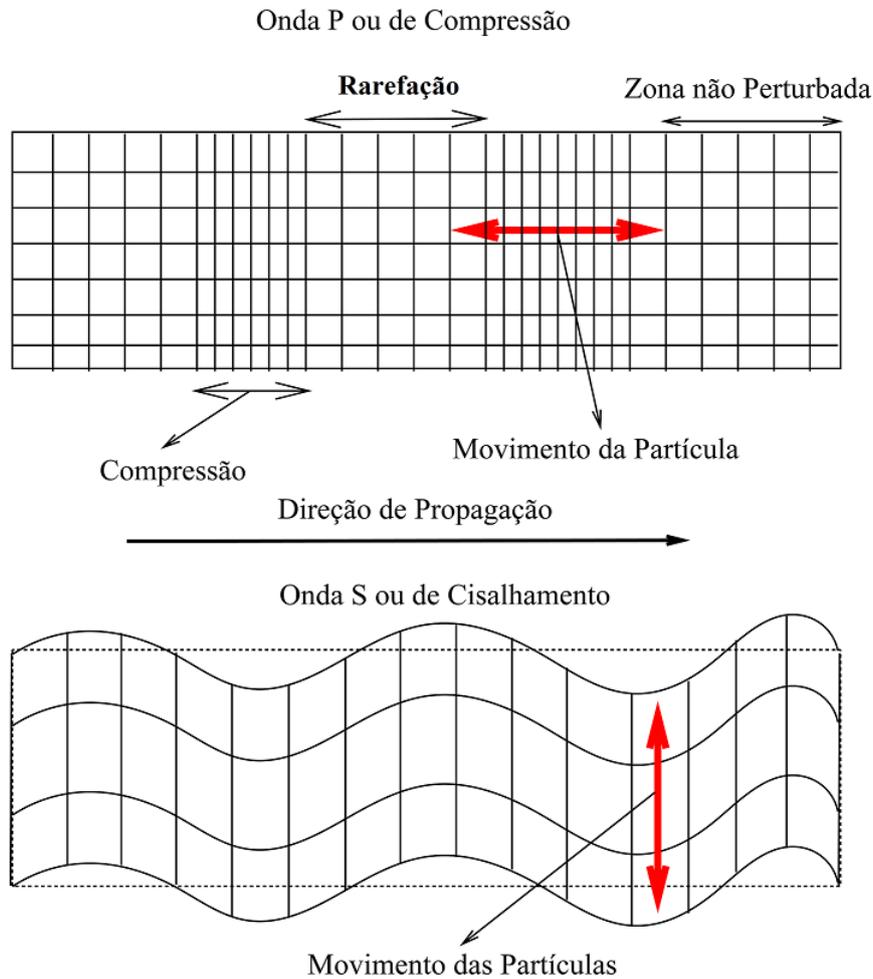


Figura 1.1: Ondas de compressão e de cisalhamento.

direção de propagação, como ocorre com a onda P. Por essa razão, foi batizada de onda P2, e sua amplitude sofre uma forte atenuação. Alguns autores relacionam a onda P2 com uma onda do tipo difusiva devido ao seu comportamento em baixas frequências [21]. Em função da atenuação dessa onda a detecção experimental e mensuramento só veio a ocorrer anos depois de sua previsão teórica, mais precisamente nos anos 80 [32], em que foi realizada uma série de experimentos em um material poroso saturado artificial (água e vidro sinterizado). Esse experimento foi motivado pela descoberta de um fenômeno conhecido como *segundo som* na análise

do hélio II, realizada por [26] e [38].

O estudo de propagação de onda em meio poroso saturado teve início em meados da década de 20 com os trabalhos de *Terzaghi* [35, 36] em mecânica dos solos. Esse trabalho está relacionado com a teoria clássica da elasticidade e complementado pela Lei de Darcy para fluxos de fluidos em poros.

Essa abordagem obteve continuidade com a teoria de *Biot* nos anos 50. As equações descritas por ele, que governam a dinâmica de fluidos em um meio poroso saturado, se baseiam nas seguintes premissas [11]:

- isotropia do material;
- reversibilidade da relação de tensão-deformação sob as condições de equilíbrio final;
- linearidade da relação de tensão-deformação;
- pequenas deformações;
- a água contida nos poros é incompressível;
- a água pode conter bolhas de ar;
- a água flui através dos poros de acordo com a Lei de Darcy.

Além disso, *Biot* em sua modelagem, propôs que um elemento de volume deveria ser considerado grande o suficiente se comparado ao tamanho dos poros e, assim, poderia ser tratado como homogêneo e, ao mesmo tempo, deveria ser suficientemente pequeno, se comparado à escala do fenômeno macroscópico em que estava interessado. Desse modo, poderia ser considerado infinitesimal para o tratamento matemático.

Essas equações foram alteradas diversas vezes por *Biot* com o objetivo de obter uma previsão mais apurada do fenômeno. Entretanto, como mencionado no artigo [42], existiam alguns problemas de caráter conceitual no modelo. Esses problemas foram expostos com o próprio avanço no campo da Termodinâmica do Contínuo, segundo a qual os modelos que lidam com propriedades do material estudado, devem satisfazer alguns princípios físicos, tais como o princípio da objetividade material e devem ser classificados como um processo termodinamicamente admissível, no qual a segunda lei da termodinâmica serve como restrição às equações constitutivas do modelo.

Os trabalhos de *Biot*, desde os anos 50 até os dias atuais, servem de fonte de pesquisa, e são considerados a fundamentação para a teoria linear acústica de meio poroso. Muitos autores realizam modificações no modelo criado por ele com objetivo de suprir deficiências no modelo original e estendê-lo à teoria de elasticidade não linear.

1.1 Objetivo

Neste trabalho, serão apresentados alguns resultados provenientes da teoria de poroelasticidade em [30, 31], mais especificamente no que se refere a teoria de propagação de ondas em meios poroelásticos saturados. No primeiro artigo [30], utilizá-se o rigor da teoria de mistura elástica sólido-fluido para se obter uma teoria constitutiva, cuja as restrições termodinâmicas são impostas por meio do uso do procedimento Müller-Liu, [27], em que os resultados alcançados em [13], pelo uso da exploração do princípio de entropia através do procedimento Coleman e Noll, são recuperados. Para o modelo em questão, foi considerado somente a interação física entre os constituintes (sólido e fluido), não havendo, por exemplo, produção de massa devido à reações químicas. Este fato simplifica a teoria e vai ao encontro das teorias

clássicas da mecânica newtoniana. A partir desses resultados, a teoria de meio poroso é formulada pela introdução do conceito de porosidade e é consistente com resultados conhecidos, tais como *Lei de Darcy*, conceito da *pressão em poro* exercida pelo fluido e o *princípio da tensão efetiva* em mecânica dos solos. O segundo artigo [31], fornece modelos de propagação de ondas no meio poroso saturado e explora a teoria, obtendo resultados previstos na teoria clássica de propagação de ondas em meios porosos (existência das ondas P1, P2 e S), [7, 8], utilizando ondas de aceleração. Entretanto, esses artigos não mencionam o comportamento dessas ondas com respeito a velocidade de propagação ou decaimento da frente de onda.

O objetivo da tese é obter esse comportamento. Para isso, a priori, o material poroelástico será definido abstratamente, seguindo a teoria desenvolvida em [31], não sendo especificada nenhuma característica particular. Portanto, a representação da equação constitutiva que classifica o material quanto a isotropias ou anisotropias não é descrita. Isso significa, que todas as quantidades constitutivas do modelo não terão representação explícita. Todavia, neste trabalho, o modelo de propagação de onda considera o meio poroelástico deformado homogeneamente na configuração de referência, em que o material pode ser considerado anisotrópico devido ao seu estado de deformação, a partir do qual será necessário fixar um modelo material, a fim de obter uma representação explícita do estado de deformação e analisar como esse estado de deformação influencia nas velocidades de propagação e decaimento da frente de onda. Porém, pela ausência de dados experimentais na literatura, que lidem com a anisotropia do meio relacionada com o estado de deformação, consideraremos um estado de tensões nulo e, portanto, o meio na configuração indeformada. Essa consideração será necessária, pois necessitaremos analisar qualitativa e quantitativamente as velocidades de fase e atenuações do modelo de propagação de ondas fornecidos neste trabalho.

Concentraremos-nos em estudar o comportamento da propagação sob o efeito

da dependência de parâmetros físicos inerentes ao meio no qual se propaga, uma vez que essa propagação ocorre considerando o meio em seu estado natural (indeformado). Esses parâmetros podem variar de acordo com a formulação dos modelos. Alguns autores podem considerar mais variáveis livres do que outros, dependendo da teoria e das hipóteses físicas realizadas. Ainda assim, para a descrição do fenômeno, existe um conjunto mínimo de variáveis livres que estarão presentes em modelos de propagação de onda em um meio poroelástico, tais como: porosidade, permeabilidade (ou resistividade) e densidade dos constituintes do meio. Analisaremos a propagação, considerando características como velocidade de fase e atenuação, ambas considerando o número de onda sob a dependência da frequência e dos parâmetros materiais do meio. Esses resultados serão obtidos com o auxílio do software de computação simbólica MAPLETM e verificaremos se corroboram com a previsão de outros modelos de propagação de onda em meios porosos estudados.

1.2 Trabalhos Relacionados

Um problema que ocorre na modelagem de propagação de onda em meio poroso é o fato de que as equações que regem o fenômeno e suas respectivas variáveis não constituem um sistema determinado. Esse sistema possui mais variáveis do que equações o que o torna subdeterminado. Com o objetivo de torná-lo possível e unicamente determinado, alguns autores inserem mais uma equação no sistema. Entretanto, essa inserção acarreta a obrigatoriedade de criar uma nova equação para uma variável do modelo que, de certo modo, parece uma alternativa um pouco artificial. Essa abordagem foi proposta em [42], onde é introduzida uma equação de balanço relativa à porosidade do meio. Ainda nessa abordagem, foi necessário, introduzir uma combinação de termos que expressa o suprimento de momento, onde um desses termos carrega a dependência constitutiva do gradiente de porosidade, de fundamental importância para recuperar a teoria linear de poroelasticidade de

Biot, [8], amplamente utilizada em problemas práticos de engenharia.

Outras formas de abordar o problema foram propostas em [14] e [22], onde são realizadas hipóteses de incompressibilidade dos constituintes. Nessa abordagem, as equações de balanço de massa parciais nos fornecem uma equação diferencial para a porosidade e uma restrição diferencial na variação do volume relativo dos componentes. Além disso, alguns pesquisadores, consideraram uma equação de evolução para a porosidade como proposto em [13] e [15]. Essa abordagem é realizada através de intuições decorrentes da química (equações de evolução para reações químicas).

Existem alguns autores, por exemplo em [24], que consideram a modelagem sob a ótica do material granular, formulada através de argumentos formais da mecânica do contínuo. Nessa abordagem, a questão dos espaços vazios entre os constituintes sólidos é negligenciada. Sendo respaldada pela premissa de que a distribuição de massa está relacionada com o volume da distribuição de grãos. Com esse objetivo é considerada uma variável cinemática independente, chamada de *função de distribuição de volume* e fornece uma equação de balanço que segue do *princípio de pressões equilibradas*. Essa força, acompanha as quantidades originais de massa, momento linear e angular. O tratamento da equação de balanço da força equilibrada, desempenha um papel análogo à equação de momento linear, de forma que a taxa de variação temporal da fração de volume do sólido, do tensor de tensão equilibrada e da força de corpo externa equilibrada, desempenham papéis equivalentes ao campo de velocidade, do tensor de tensão e força de corpo, respectivamente.

A modelagem de propagação de onda em meio poroso herda as hipóteses realizadas na teoria de meio poroso. Sendo assim, existe uma variedade de modelagens, que seguem como consequência dos trabalhos realizados por *Biot*. Como, por exemplo, em [2] e [1], que consideram o meio poroelástico saturado, ou em [3], que obtém resultados da propagação de onda no meio poroelástico, considerando a

influência de vários níveis de saturação no meio. Esses modelos consideram todas as quantidades constitutivas isotrópicas. Existem outros trabalhos que consideram a anisotropia do meio em função de alguma variável constitutiva. Por exemplo, em [5], a anisotropia do meio é causada pelo tensor de permeabilidade, e é induzida pela anisotropia da tortuosidade, que é dada por um tensor simétrico de segunda ordem. Já em [16], a anisotropia está vinculada à matriz sólida, e não ao constituinte sólido. Nessa teoria, o meio foi descrito assumindo que o constituinte sólido é isotrópico e que, a anisotropia é somente devida à distribuição dos grãos, ou seja, a matriz é anisotrópica. Diferentes formulações para a anisotropia, tanto considerada pela permeabilidade, quanto pela tortuosidade do meio, podem gerar diferentes resultados e, em alguns casos, até resultados conflitantes, como exposto em [18].

Neste trabalho, primeiro descrevemos uma teoria de meio poroelástico com base na teoria da mistura de fluidos e sólidos proposta por Bowen [13] e Liu [30] no contexto da mecânica do contínuo, resultando nas mesmas equações constitutivas por meio da exploração termodinâmica do princípio de entropia. A teoria linear leva à lei de Darcy e à força de flutuabilidade (empuxo), bem conhecida em mecânica dos solos. Além disso, existe um efeito inercial devido à presença de aceleração do fluido como força na equação de movimento para o constituinte sólido. No entanto, isso é bastante diferente da aceleração relativa, como uma força interativa presente na teoria de Biot, para explicar o efeito de massa adicional. Nesse aspecto, a teoria em [31], que fornece o suporte necessário para a modelagem e análise das propagações de onda no meio poroelástico apresentadas nesse trabalho, tenta inserir um conjunto mínimos de hipóteses em sua formulação.

2 EQUAÇÃO GERAL DE BALANÇO

As leis básicas da mecânica podem ser expressas por meio de uma equação integral que relaciona a taxa de crescimento de uma certa quantidade física ψ que varia em uma dada região \mathfrak{B} de um corpo \mathbf{B} . A taxa de variação dessa quantidade física está sujeita à ação do fluxo de Φ_ψ que atravessa a fronteira, $\partial\mathfrak{B}$, da região $\mathfrak{B} \subset \mathbf{B}$ e do crescimento, σ_ψ , no interior da região \mathfrak{B} . Matematicamente essa relação pode ser expressa por

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}_t} \psi dv = \oint_{\partial\mathfrak{B}_t} \Phi_\psi \mathbf{n} ds + \int_{\mathfrak{B}_t} \sigma_\psi dv \quad (2.1)$$

para qualquer sub-região limitada regular do corpo $\mathfrak{B} \subset \mathbf{B}$, com vetor unitário \mathbf{n} , apontando para fora da fronteira, $\partial\mathfrak{B}_t$, da região $\mathfrak{B}_t \subset \mathbf{B}_t$, na configuração atual. Além disso, dv é o elemento de volume infinitesimal, $\mathbf{n} ds$ é um vetor normal referente a um elemento de área, $\partial\mathfrak{B}$ é a fronteira do volume \mathfrak{B} . Devemos notar que as quantidades ψ e σ_ψ são campos tensoriais de ordem m , e Φ_ψ é um campo tensorial de ordem $m + 1$.

Como estamos interessados na forma local ou diferencial das equações de balanço em um ponto regular da região \mathfrak{B}_t , sua dedução exige que as quantidades tensoriais tenham regularidade, ou seja, supomos que as quantidades ψ , Φ_ψ e σ_ψ sejam suficientemente suaves.

Teorema 2.1 *Teorema do Transporte de Reynolds*

Seja $\mathcal{V}(t)$ uma região regular e $u_n(\mathbf{x}, t)$ a velocidade normal à superfície em um ponto $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}$. Então para qualquer campo tensorial $\psi(\mathbf{x}, t)$ suave, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \psi dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial\psi}{\partial t} dv + \oint_{\partial\mathcal{V}(t)} \psi u_n ds. \quad (2.2)$$

Devemos notar que, se $\mathcal{V}(t)$ é a mesma região material \mathfrak{B}_t , então, a equação anterior assume a forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{B}_t} \psi dv = \int_{\mathfrak{B}_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dv + \oint_{\partial \mathfrak{B}_t} \psi \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (2.3)$$

2.1 Equação de Balanço na Forma Local

Para qualquer região material \mathcal{V} , a equação geral na forma integral é dada por:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \psi}{\partial t} dv + \oint_{\partial \mathcal{V}} \psi \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\partial \mathcal{V}} \Phi_{\psi} \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{V}} \sigma_{\psi} dv. \quad (2.4)$$

Considerando uma região infinitesimal de \mathcal{V} , contendo um ponto regular \mathbf{x} , utilizando o teorema da divergência, temos:

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \dot{\mathbf{x}} - \Phi_{\psi}) - \sigma_{\psi} \right\} dv = 0. \quad (2.5)$$

Uma vez que o integrando é uma função suave e a equação anterior é válida para uma região arbitrária \mathcal{V} , tal que $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, o integrando deve ser nulo, pelo uso do teorema da localização. Obtemos, assim, a forma local da equação de balanço. Em um ponto regular \mathbf{x} , a equação geral de balanço se reduz a:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \dot{\mathbf{x}} - \Phi_{\psi}) - \sigma_{\psi} = 0. \quad (2.6)$$

3 TEORIA DE MISTURAS

Neste capítulo, faremos um resumo da teoria de misturas, com o objetivo de tornar a leitura mais autocontida.

Vamos considerar uma mistura de N constituintes, para os quais assumimos a possibilidade de ocupar a mesma região simultaneamente. Denotamos por B_α um corpo do constituinte α e κ_α sua configuração de referência, de forma que podemos escrever a região ocupada pelo constituinte α na configuração de referência κ_α como $B_{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha(B_\alpha)$ (figura 3.1). O movimento de B_α é dado por um mapa suave

$$\chi_\alpha : B_{\kappa_\alpha} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$$

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t), \quad \mathbf{X}_\alpha \in B_{\kappa_\alpha}.$$

Com isso, podemos definir a velocidade de cada constituinte e o gradiente de deformação relativo a um determinado ponto material como:

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial t}(\mathbf{X}_\alpha, t), \quad F_\alpha = \nabla_{\mathbf{X}_\alpha} \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t).$$

Neste trabalho, consideramos um material simples como um material que possui um único componente em sua composição (de composição uniforme) ou que do ponto de vista macroscópico é impossível distinguir seus componentes.

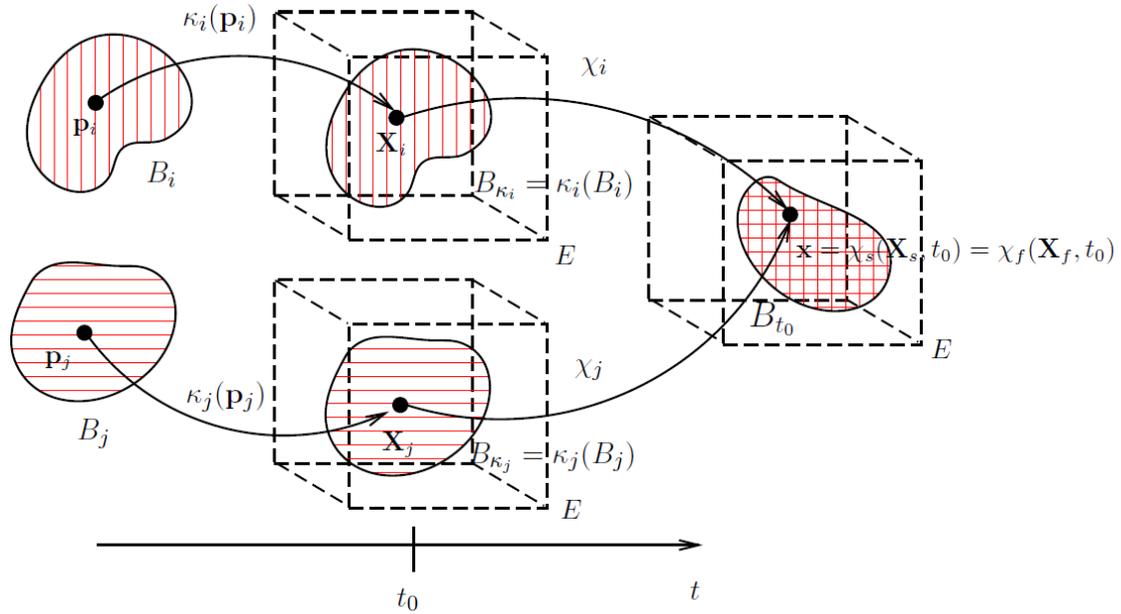


Figura 3.1: A figura acima representa o momento de interação entre dois constituintes de uma mistura, denotados pelos índices i e j . O ponto material $\mathbf{p}_i \in B_i$ é levado a posição \mathbf{X}_i que pertence a configuração de referência $B_{\kappa_i} \subset \mathbb{E}$. De modo análogo, o ponto material \mathbf{p}_j é fixado na posição \mathbf{X}_j na configuração de referência $B_{\kappa_j} \subset \mathbb{E}$. Em um dado instante, t_0 , a configuração atual em B_{t_0} é ocupada simultaneamente pelos corpos dos constituintes B_i e B_j em suas respectivas configurações de referência B_{κ_i} e B_{κ_j} , de modo que a posição dos pontos materiais \mathbf{p}_i e \mathbf{p}_j são mapeados na posição espacial $\chi_i(\mathbf{X}_i, t_0) = \chi_j(\mathbf{X}_j, t_0) = \mathbf{x} \in B_{t_0} \subset \mathbb{E}$.

3.1 Leis de Balanço para cada constituinte

As leis de balanço para cada constituinte podem ser escritas como uma generalização das leis de balanço para um corpo simples. Entretanto, seria coerente esperar que, quando considerássemos a mistura como um todo, as leis de balanço para um corpo simples fossem recuperadas. Nesse sentido, vamos escrever as leis de balanço para cada constituinte da mistura, seguindo argumentos formais da mecânica do contínuo, e depois daremos condições necessárias e suficientes para que as leis de balanço para a mistura como um todo sejam satisfeitas.

Vamos restringir a atenção para a formulação das leis de balanço para cada constituinte na configuração atual (Euleriana).

A forma geral para as leis de balanço dadas anteriormente (2.6), no contexto da teoria de misturas, é dada por:

$$\int_V \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} dv + \oint_{\partial V} \psi^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\partial V} \Phi_\psi^\alpha \mathbf{n} ds + \int_V \sigma_\psi^\alpha dv + \int_V \pi_\psi^\alpha dv, \quad (3.1)$$

onde o termo π_ψ^α representa a produção de uma quantidade física devido a forças de interação entre os constituintes da mistura e \mathbf{v}^α é a velocidade do constituinte α .

Seguindo argumentos apresentados anteriormente, podemos fornecer a forma local da lei de balanço geral para a mistura,

$$\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \Phi_\psi^\alpha) - \sigma_\psi^\alpha = \pi_\psi^\alpha. \quad (3.2)$$

Ressaltamos que se a quantidade ψ^α for um campo vetorial, então o produto $\psi^\alpha \mathbf{v}^\alpha$ deve ser entendido como o produto tensorial $\psi^\alpha \otimes \mathbf{v}^\alpha$.

3.1.1 Balanço de Massa

Consideramos uma mistura com N constituintes. Associado a cada constituinte α , para $\alpha = \{1, \dots, N\}$, existe uma quantidade τ^α , que definimos como a variação do *suprimento de massa* fornecido ao α -ésimo constituinte por unidade de volume. Essa quantidade $\tau^\alpha(\mathbf{x}, t)$ é devida a interações ou reações químicas (em teorias que consideram essa possibilidade) entre os constituintes da mistura.

Se $\mathfrak{R} \subset \mathbf{B}$ é uma região volumétrica fixada no corpo \mathbf{B} . Considerando na equação geral (3.2), os termos $\psi^\alpha = \rho^\alpha$, $\Phi_\psi^\alpha = 0$, $\sigma_\psi^\alpha = 0$ e $\pi_\psi^\alpha = \tau^\alpha$, o axioma de balanço de massa para o α -ésimo constituinte na forma local é dado por,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^\alpha + \operatorname{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = \tau^\alpha. \quad (3.3)$$

3.1.2 Balanço de Momento Linear e Momento Angular

No balanço de momento linear a densidade de momento $\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha$ está balanceada pela ação da densidade de força externa, $\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$ e pelo tensor de tensão parcial T^α . Além desses termos, devemos adicionar a contribuição da produção de densidade de momento, \mathbf{m}^α , devido a forças de interação entre os constituintes da mistura. Essa força é exercida sobre o α -ésimo constituinte da mistura por todos os $N - 1$ constituintes. Dessa forma, considerando $\psi^\alpha = \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha$, $\Phi_\psi^\alpha = T^\alpha$, $\sigma_\psi^\alpha = \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$ e $\pi_\psi^\alpha = \mathbf{m}^\alpha$, podemos escrever o axioma de balanço de momento linear na forma local, para o α -ésimo constituinte:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \operatorname{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \otimes \mathbf{v}^\alpha - T^\alpha) - \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha = \mathbf{m}^\alpha. \quad (3.4)$$

O balanço de momento angular para um material simples geralmente é retratado pelo fato do tensor de tensão ser simétrico. Na teoria de misturas, é permitido que os tensores de tensões parciais possuam uma parte antissimétrica. Como consequência, cada constituinte da mistura obtém um fornecimento de momento angular, além do que já foi produzido pelas forças de interações entre as substâncias da mistura.

A versão local da lei de balanço de momento angular, tomando as seguintes quantidades, $\psi^\alpha = \mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha$, $\Phi_\psi^\alpha = \mathbf{x} \times T^\alpha$, $\sigma_\psi^\alpha = \mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$ e $\pi_\psi^\alpha = \mathbf{x} \times \mathbf{m}^\alpha + M^\alpha$ é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \operatorname{div}((\mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) \otimes \mathbf{v}^\alpha) - \operatorname{div}(\mathbf{x} \times T^\alpha) - \mathbf{x} \times (\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha) = M^\alpha. \quad (3.5)$$

O termo M^α representa o fornecimento de momento angular sobre o constituinte α . O termo $\mathbf{x} \times \mathbf{m}^\alpha + M^\alpha$ representa o fornecimento de *momento* causado pela interação local do α -ésimo constituinte com outros constituintes em uma região $\mathfrak{R} \subset \mathbf{B}$.

3.1.3 Balanço de Energia

A *lei de balanço de energia* é também conhecida como *primeira lei da termodinâmica*. Essa lei relaciona a variação no tempo da energia cinética interna com a variação do trabalho mecânico e do calor. A variação de energia cinética e energia interna em uma região do corpo \mathbf{B} , considerando $\psi^\alpha = \frac{1}{2}\rho^\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + \rho^\alpha \epsilon^\alpha$, $\Phi_\psi^\alpha = T_\alpha^T \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{q}^\alpha$, $\sigma_\psi^\alpha = \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{b}^\alpha + \rho^\alpha r^\alpha$ e $\pi_\psi^\alpha = l^\alpha$, na equação geral (3.2), é dada por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) \mathbf{v}^\alpha \right) - \operatorname{div} (T_\alpha^T \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{q}^\alpha) + \rho^\alpha r^\alpha \\ - \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{b}^\alpha = l^\alpha, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde ϵ^α é a *densidade de energia interna* para o α -ésimo constituinte, \mathbf{q}^α é o vetor *fluxo de calor* para o α -ésimo constituinte, r^α é o *suprimento de calor externo*, e l^α o *suprimento de energia* para o α -ésimo constituinte. A quantidade l^α é uma interação local para energia, de modo semelhante às quantidades τ^α , \mathbf{m}^α e M^α .

Abaixo, resumimos as leis de balanço para cada constituinte da mistura,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho^\alpha + \operatorname{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = \tau^\alpha, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \operatorname{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \otimes \mathbf{v}^\alpha) - \operatorname{div} T^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha = \mathbf{m}^\alpha, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \operatorname{div}((\mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) \otimes \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{x} \times T^\alpha) - \mathbf{x} \times \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha = \mathbf{x} \times \mathbf{m}^\alpha + M^\alpha, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^\alpha \epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 \right) + \operatorname{div} \left(\left(\rho^\alpha \epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 \right) \mathbf{v}^\alpha - T_\alpha^T \mathbf{v}^\alpha + \mathbf{q}^\alpha \right) - \rho^\alpha r^\alpha \\ - \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha = l_\alpha. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Definindo a derivada material com respeito ao constituinte e à mistura, respectivamente, por:

$$\dot{y}_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial t} + (\text{grad}y_\alpha)\mathbf{v}_\alpha,$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} + (\text{grad}y)\mathbf{v},$$

podemos fornecer, utilizando a derivada material no tempo para cada constituinte da mistura, uma versão alternativa para as leis de balanço.

Balanço de massa: Utilizando as seguintes identidades

$$\text{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = (\rho^\alpha \mathbf{v}_i^\alpha)_{,i} = \rho^\alpha_{,i} v_i + \rho^\alpha v_{i,i} = \text{grad}\rho^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha + \rho^\alpha \text{div}\mathbf{v}^\alpha$$

e

$$\dot{\rho}^\alpha = \frac{d}{dt}\rho^\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \text{grad}\rho^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha$$

substituindo em:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^\alpha + \text{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = \tau^\alpha,$$

e observando o resultado anterior,

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \text{grad}\rho^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha + \rho^\alpha \text{div}(\mathbf{v}^\alpha) = \tau^\alpha,$$

obtemos:

$$\dot{\rho}^\alpha + \rho^\alpha \text{div}(\mathbf{v}^\alpha) = \tau^\alpha. \quad (3.8)$$

Balanço de momento linear: usando a seguinte igualdade,

$$\text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = (v_i(\rho v_j))_{,j} = v_{i,j}(\rho v_j) + v_i(\rho v_j)_{,j} = \text{grad}\mathbf{v}(\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} \text{div}(\rho \mathbf{v}),$$

temos que:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial t} \rho^\alpha + \left(\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} \mathbf{v}^\alpha + \text{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) \mathbf{v}^\alpha \right) + (\text{grad}\mathbf{v}^\alpha) \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \text{div}T^\alpha - (\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha) = 0.$$

Rescrevendo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial t} \rho^\alpha + \left(\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \text{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) \right) \mathbf{v}^\alpha + (\text{grad}\mathbf{v}^\alpha) \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \text{div}T^\alpha - (\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha) = 0.$$

O termo entre parênteses na equação acima é o lado esquerdo da lei de balanço de massa para um α -ésimo constituinte que, como vimos anteriormente, é igual a τ^α .

Logo,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}^\alpha) \mathbf{v}^\alpha\right) \rho^\alpha + \tau^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \text{div} T^\alpha - (\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha) = 0$$

Portanto,

$$\dot{\mathbf{v}}^\alpha \rho^\alpha - \text{div} T^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha = \mathbf{m}^\alpha - \tau^\alpha \mathbf{v}^\alpha. \quad (3.9)$$

Balanço de momento angular:

Escrevendo a equação de balanço de momento angular (3.7)₃, em componentes cartesianas, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^\alpha \epsilon_{ijk} x_j v_k^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho^\alpha \epsilon_{ijk} x_j v_k^\alpha v_l^\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_l}(\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}^\alpha) + \epsilon_{ijk} \rho^\alpha x_j b_k^\alpha \epsilon_{ijk} x_j m_k^\alpha + M_i^\alpha, \quad (3.10)$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor de permutação.

Observe que da lei de balanço de momento linear temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^\alpha v_i^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha - T_{ij}^\alpha) = \rho^\alpha b_i^\alpha + m_i^\alpha.$$

Mudando os índices de forma conveniente e multiplicando por $\epsilon_{ijk} x_j$,

$$\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t}(\rho^\alpha v_k^\alpha) + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho^\alpha v_j^\alpha v_k^\alpha - T_{jk}^\alpha) = \rho^\alpha \epsilon_{ijk} x_j b_k^\alpha + \epsilon_{ijk} m_k^\alpha x_j. \quad (3.11)$$

E, observando as seguintes identidades,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^\alpha \epsilon_{ijk} x_j v_k^\alpha) = \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t}(\rho^\alpha v_k^\alpha) + \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t}(x_j) \rho^\alpha v_k^\alpha, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(\rho^\alpha \epsilon_{ijk} x_j v_k^\alpha v_l^\alpha) = \epsilon_{ijk} \rho^\alpha \frac{\partial}{\partial x_l}(x_j) v_k^\alpha v_l^\alpha + \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho^\alpha v_k^\alpha v_l^\alpha), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}^\alpha) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}(x_j) T_{kl}^\alpha + \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{kl}^\alpha) x_j, \quad (3.14)$$

que ao substituírmos (3.11),(3.12), (3.13) e (3.14) em (3.10) e observando que $\epsilon_{ijk}v_k^\alpha v_j^\alpha = \mathbf{v}^\alpha \times \mathbf{v}^\alpha = 0$, obtemos:

$$T_\alpha - T_\alpha^T = M_\alpha. \quad (3.15)$$

Balço de energia:

Consideramos $\|\mathbf{v}_\alpha\|^2 = (\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) := \mathbf{v}_\alpha^2$. Agrupando de forma conveniente a lei de balço de energia em (3.7)₄:

$$\rho^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) + \left(\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) + \operatorname{div}(\rho^\alpha (\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2) \mathbf{v}^\alpha) \right) = \operatorname{div}(T_\alpha^T \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{q}^\alpha) + \rho^\alpha r^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{b}^\alpha + l^\alpha. \quad (3.16)$$

Da identidade abaixo

$$\operatorname{div}(\rho^\alpha (\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2) \mathbf{v}^\alpha) = (\rho^\alpha (\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2) v_i^\alpha)_{,i} = \operatorname{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) (\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2) + \operatorname{grad}(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2) \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha,$$

podemos substituir na equação (3.16) e organizar de modo conveniente de forma a obter o lado esquerdo da lei de balço de massa para o α -ésimo constituinte:

$$\rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) + \operatorname{grad}(\epsilon_\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2) \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \left(\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \right) \left(\epsilon_\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) = \operatorname{div}(T_\alpha^T \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{q}_\alpha) + \rho_\alpha r^\alpha + \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\alpha + l_\alpha. \quad (3.17)$$

Reescrevendo:

$$\rho^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) + \operatorname{grad} \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) \mathbf{v}^\alpha \right) - \operatorname{div} \left(T_\alpha^T \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{q}^\alpha \right) - \rho^\alpha r^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{b}^\alpha = l^\alpha - \tau^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right). \quad (3.18)$$

Obtemos:

$$\rho^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) - \operatorname{div} \left(T_\alpha^T \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{q}^\alpha \right) - \rho^\alpha r^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{b}^\alpha = l_\alpha - \tau^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right).$$

Usando as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{v}}_\alpha^2) &= \mathbf{v}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{v}}^\alpha, \\ \operatorname{div}(T_\alpha^T \mathbf{v}^\alpha) &= \mathbf{v}^\alpha \cdot \operatorname{div}T^\alpha + \operatorname{tr}(T_\alpha^T L^\alpha),\end{aligned}$$

onde L_α é o *gradiente de velocidade* do α -ésimo constituinte. Obtemos ao substituímos na equação anterior a seguinte equação:

$$\rho^\alpha \dot{\epsilon}^\alpha - \operatorname{tr}(T_\alpha^T L^\alpha) + \operatorname{div}\mathbf{q}^\alpha - \rho^\alpha r^\alpha - \mathbf{v}^\alpha \cdot (\rho^\alpha \dot{\mathbf{v}}^\alpha - \operatorname{div}T^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha) = l^\alpha - \tau^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right).$$

Observando que, na equação anterior, o termo entre parênteses é o lado esquerdo da forma alternativa da lei de balanço de momento linear, temos:

$$\rho^\alpha \dot{\epsilon}^\alpha - \operatorname{tr}(T_\alpha^T L^\alpha) + \operatorname{div}\mathbf{q}^\alpha - \rho^\alpha r^\alpha + \mathbf{v}^\alpha \cdot (\mathbf{m}^\alpha - \tau^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = l^\alpha - \tau^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right).$$

Que nos fornece a lei de balanço de energia em sua forma alternativa

$$\rho^\alpha \dot{\epsilon}^\alpha - \operatorname{tr}(T_\alpha^T L^\alpha) + \operatorname{div}\mathbf{q}^\alpha - \rho^\alpha r^\alpha = l^\alpha - \tau^\alpha \left(\epsilon^\alpha - \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) - \mathbf{m}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha. \quad (3.19)$$

Logo, as leis de balanço com respeito a derivada material no tempo $\frac{d^\alpha}{dt}$ possuem a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}^\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}^\alpha) = \tau^\alpha, \\ \dot{\mathbf{v}}^\alpha \rho^\alpha - \operatorname{div}T^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha = \mathbf{m}^\alpha - \tau^\alpha \mathbf{m}^\alpha, \\ T_\alpha - T_\alpha^T = M_\alpha, \\ \rho^\alpha \dot{\epsilon}^\alpha - \operatorname{tr}(T_\alpha^T L^\alpha) + \operatorname{div}\mathbf{q}^\alpha - \rho^\alpha r^\alpha = l^\alpha - \tau^\alpha \left(\epsilon^\alpha - \frac{1}{2} \mathbf{v}_\alpha^2 \right) - \mathbf{m}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

3.1.4 Balanço de entropia

A *segunda lei da termodinâmica* fornece uma restrição para os campos que são soluções das leis de balanço associadas à equação constitutiva de um modelo. Essa restrição se traduz em uma direção preferencial para os processos naturais.

O conceito de *entropia* desempenha um papel fundamental no entendimento desses fenômenos físicos a partir do qual, a grosso modo, nos permite situar se o estado físico de um dado sistema está no passado ou no futuro, dito de outra forma, possibilita distinguir processos físicos reversíveis dos irreversíveis.

$$\mathbf{H}(\mathfrak{B}, t) = \int_{\mathfrak{B}_t} \rho \eta dv,$$

onde $\eta(\mathbf{x}, t)$ é chamado de *densidade de entropia* específica e $\mathfrak{B} \subset \mathbf{B}$.

Tomando as seguintes quantidades físicas na equação (3.2), $\psi^\alpha = \rho^\alpha \eta^\alpha$, $\Phi_\psi^\alpha = \Phi^\alpha$, $\sigma_\psi^\alpha = \rho^\alpha s^\alpha$ e $\pi_\psi^\alpha = \zeta^\alpha$ o balanço de entropia para o α -ésimo constituinte pode ser escrito como segue,

$$\frac{\partial \rho^\alpha \eta^\alpha}{\partial t} + \text{div}(\rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{v}^\alpha + \Phi^\alpha) - \rho^\alpha s^\alpha = \zeta^\alpha, \quad (3.21)$$

onde $\Phi^\alpha(\mathbf{x}, t)$ é o *fluxo de entropia* do α -ésimo constituinte, η^α é a *densidade de entropia*, s^α é o *suprimento de entropia externa* e ζ^α é a *produção de entropia* do α -ésimo constituinte.

3.2 Leis de Balanço para a Mistura

Se a mistura se reduz a um único constituinte, os termos do lado direito do sistema de equações (3.7) são nulos, e recuperamos a forma das leis de balanço da Mecânica do Contínuo. Mais precisamente, é plausível assumir que para um observador, todos os fenômenos associados à mistura (sob a ótica macroscópica) são indistinguíveis dos fenômenos associados a um corpo simples, de modo que o observador, que enxerga a mistura como um todo, não seria capaz de perceber a influência de cada constituinte do corpo de forma isolada e, portanto, concluiria que o corpo é constituído por um único componente. Esse raciocínio sugere que as leis de balanço, para a mistura como um todo, devem ser leis conservativas. E se isso

ocorre, então os termos de produção, π_ψ^α , associados à quantidade ψ , em cada uma das leis de balanço, quando somados para todos os constituintes, devem desaparecer, isto é,

$$\sum_{\alpha=1}^N \tau^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{m}^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N M^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^N l^\alpha = 0. \quad (3.22)$$

Por outro lado, se exigirmos que as leis de balanço para a mistura sejam obtidas como a soma das contribuições dos balanços parciais (3.2), então as quantidades associadas a um constituinte α devem ser levadas em consideração na ação sobre a mistura, o que nos leva a considerar a seguinte lei geral de balanço para a mistura:

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \operatorname{div}(\psi^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \Phi_\psi^\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\psi^\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \pi_\psi^\alpha. \quad (3.23)$$

A partir da equação (3.23), podemos determinar as leis de balanço para a mistura como um todo.

Os índices, $\alpha = \{1, \dots, N\}$, nos somatórios serão omitidos por conveniência.

Balanço de massa para a mistura:

Tomando a quantidade $\psi^\alpha = \rho^\alpha$, temos as seguintes consequências:

$$\sum \frac{\partial}{\partial t} \rho^\alpha + \sum \operatorname{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = 0,$$

de onde obtemos as seguintes igualdades,

$$\rho = \sum \rho^\alpha, \quad \rho \mathbf{v} = \sum \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha, \quad \text{logo} \quad \mathbf{v} = \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} \mathbf{v}^\alpha. \quad (3.24)$$

Com essas escolhas o balanço de massa para a mistura tem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.25)$$

Balço de momento linear para a mistura:

Fazendo, $\psi^\alpha = \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha$, $\Phi_\psi^\alpha = T^\alpha$, $\sigma_\psi^\alpha = \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$ e $\pi_\psi^\alpha = \tau^\alpha$ em (3.23) temos,

$$\sum \frac{\partial}{\partial t}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \sum \operatorname{div}(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \otimes \mathbf{v}^\alpha) - \sum \operatorname{div} T^\alpha - \sum \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha = 0, \quad (3.26)$$

de onde segue que:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - T &= \sum \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \otimes \mathbf{v}^\alpha - T^\alpha, \\ \rho \mathbf{b} &= \sum \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha. \end{aligned}$$

E, como a velocidade difusiva é dada por:

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{v}^\alpha - \mathbf{v}, \quad (3.27)$$

temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\alpha &= \mathbf{v}^\alpha - \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} \mathbf{v}^\alpha \\ \rho \mathbf{u}^\alpha &= \rho \mathbf{v}^\alpha - \sum \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \\ \sum \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha &= \sum \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \sum \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha = 0 \\ \sum \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha &= \sum (\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Logo, usando o resultado anterior,

$$\begin{aligned} T &= \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \sum (\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \otimes \mathbf{v}^\alpha - T^\alpha) \\ T &= \sum T^\alpha + \sum \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}^\alpha) \\ T &= \sum T^\alpha - \sum \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \otimes \mathbf{u}^\alpha \\ T &= \sum T^\alpha - \sum \rho^\alpha (\mathbf{v} + (\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{v})) \otimes \mathbf{u}^\alpha \\ T &= \sum T^\alpha - \sum \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \otimes \mathbf{u}^\alpha + \mathbf{v} \otimes \sum \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha, \end{aligned}$$

de onde obtemos,

$$T = \sum (T^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \otimes \mathbf{u}^\alpha). \quad (3.28)$$

Além disso, de

$$\rho \mathbf{b} = \sum \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha, \quad \text{temos} \quad \mathbf{b} = \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} \mathbf{b}^\alpha. \quad (3.29)$$

Equações de balanço de momento angular para a mistura:

Usando a forma reduzida da lei de balanço de momento angular para um constituinte α , que é caracterizada pelo fato do tensor de tensão parcial não ser necessariamente simétrico, temos

$$T_\alpha - T_\alpha^T = M_\alpha$$

e observando que, pelo axioma Eq. 3.22, a soma das contribuições de todos os constituintes da mistura para o termo de produção deve ser nulo, $\sum M_\alpha = 0$, podemos derivar as condições necessárias para que a lei de balanço de momento angular para a mistura seja consistente com a formulação para um corpo simples:

$$\sum (T_\alpha - T_\alpha^T) = 0 \quad \text{segue que} \quad \sum T_\alpha = \sum T_\alpha^T, \quad (3.30)$$

que pela dedução anterior, Eq. (3.28), nos fornece:

$$T = T^T.$$

Equações de balanço de energia para a mistura:

Considerando as seguintes quantidades, $\psi^\alpha = \rho^\alpha \epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{v}_\alpha^2$, $\Phi_\psi^\alpha = T_\alpha^T - \mathbf{q}^\alpha$, $\sigma_\psi^\alpha = \rho^\alpha r^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha$ e $\pi_\psi^\alpha = l^\alpha$, na equação de balanço para a mistura (3.23), temos

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial}{\partial t} (\rho^\alpha \epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{v}_\alpha^2) + \sum \operatorname{div} \left((\rho^\alpha \epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{v}_\alpha^2) \mathbf{v}^\alpha - T_\alpha^T \mathbf{v}^\alpha + \mathbf{q}^\alpha \right) \\ - \sum \rho^\alpha r^\alpha - \sum \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha - \sum l^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para que o balanço de energia para a mistura seja consistente com a lei de balanço para um corpo simples, devemos ter

$$\sum l^\alpha = 0. \quad (3.32)$$

Além disso, temos as seguintes condições para as densidades de energia interna e cinética parciais,

$$\begin{aligned}\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 &= \sum(\rho^\alpha\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}\rho^\alpha\mathbf{v}_\alpha^2), \\ \rho\epsilon &= \sum(\rho^\alpha\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}\rho^\alpha\mathbf{v}_\alpha^2) - \sum\frac{1}{2}\rho^\alpha\mathbf{v}^2, \\ \rho\epsilon &= \sum\rho^\alpha(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_\alpha^2 - \mathbf{v}^2)).\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\mathbf{u}^\alpha + \mathbf{v} = \mathbf{v}^\alpha,$$

então,

$$\begin{aligned}\rho\epsilon &= \sum\rho^\alpha\left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}((\mathbf{u}^\alpha + \mathbf{v})^2 - \mathbf{v}^2)\right), \\ \rho\epsilon &= \sum\rho^\alpha\left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_\alpha^2 + 2\mathbf{u}^\alpha\mathbf{v})\right), \\ \rho\epsilon &= \sum\rho^\alpha\left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{u}_\alpha^2\right) + \mathbf{v} \sum\rho^\alpha\mathbf{u}^\alpha.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\epsilon = \sum\frac{\rho^\alpha}{\rho}\left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{u}_\alpha^2\right). \quad (3.33)$$

De modo semelhante, concluímos uma relação para o suprimento de energia externa parcial:

$$\begin{aligned}\rho r + \rho\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} &= \sum\left(\rho^\alpha r^\alpha + \rho^\alpha\mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha\right), \\ \rho r &= \sum\left(\rho^\alpha r^\alpha + \rho^\alpha\mathbf{b}^\alpha \cdot (\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{v})\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$r = \sum\frac{\rho^\alpha}{\rho}\left(r^\alpha + \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha\right). \quad (3.34)$$

Impondo a seguinte igualdade para os termos,

$$(\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2)\mathbf{v} + \mathbf{q} - T^T\mathbf{v} = \sum\left(\left(\rho^\alpha\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}\rho^\alpha\mathbf{v}_\alpha^2\right)\mathbf{v}^\alpha + \mathbf{q}^\alpha - T_\alpha^T\mathbf{v}^\alpha\right),$$

que pode ser reescrito como:

$$\mathbf{q} = \sum\left(\underbrace{\left(\rho^\alpha\epsilon^\alpha + \frac{1}{2}\rho^\alpha\mathbf{v}_\alpha^2\right)\mathbf{v}^\alpha}_{(i)} - (\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2)\mathbf{v} + \mathbf{q}^\alpha - \underbrace{T_\alpha^T\mathbf{v}^\alpha + T^T\mathbf{v}}_{-\sum T_\alpha^T\mathbf{u}^\alpha}\right)$$

Desenvolvendo (i):

$$\begin{aligned}
(i) &= \sum \rho^\alpha \epsilon^\alpha \mathbf{v}^\alpha + \sum \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 \mathbf{v}^\alpha - \rho \epsilon \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{v} \Leftrightarrow \\
&\sum \rho^\alpha \epsilon^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \sum \rho \frac{\rho^\alpha}{\rho} \left(\epsilon^\alpha + \frac{\mathbf{u}_\alpha^2}{2} \right) \mathbf{v} + \sum \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 \mathbf{v}^\alpha - \sum \frac{1}{2} \rho \frac{\rho^\alpha}{\rho} \mathbf{v}^\alpha \mathbf{v}^2 \Leftrightarrow \\
&\sum \rho^\alpha \epsilon^\alpha \mathbf{v}^\alpha - \sum \rho^\alpha \epsilon^\alpha \mathbf{v} + \sum \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha (\mathbf{v}_\alpha^2 - \mathbf{v}^2) - \sum \frac{1}{2} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2 \mathbf{v} \Leftrightarrow \\
&\sum \rho^\alpha \epsilon^\alpha (\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{v}) + \sum \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{u}_\alpha^2 (\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{v}) \Leftrightarrow \sum \rho^\alpha \epsilon^\alpha \mathbf{u}^\alpha + \sum \frac{1}{2} \rho^\alpha \mathbf{u}_\alpha^2 \mathbf{u}^\alpha \Leftrightarrow \\
(i) &= \sum \rho^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{u}_\alpha^2 \right) \mathbf{u}^\alpha,
\end{aligned}$$

obtemos:

$$\mathbf{q} = \sum \left(\rho^\alpha \left(\epsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{u}_\alpha^2 \right) \mathbf{u}^\alpha + \mathbf{q}^\alpha - T_\alpha^T \mathbf{u}^\alpha \right) \quad (3.35)$$

Balço de entropia para a mistura:

Tomando as seguintes quantidades, $\psi^\alpha = \rho^\alpha \eta^\alpha$, $\Phi_\psi^\alpha = \Phi^\alpha$, $\sigma_\psi^\alpha = \rho^\alpha s^\alpha$ e $\pi_\psi^\alpha = \zeta^\alpha$, na equação de balanço para a mistura (3.23), temos

$$\sum \frac{\partial \rho^\alpha \eta^\alpha}{\partial t} + \sum \operatorname{div}(\rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{v}^\alpha + \Phi^\alpha) - \sum \rho^\alpha s^\alpha - \sum \zeta^\alpha = 0. \quad (3.36)$$

As quantidades de balanço parciais devem respeitar as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\rho \eta &= \sum \rho^\alpha \eta^\alpha, \\
\rho \eta \mathbf{v} + \Phi &= \sum (\rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{v}^\alpha + \Phi^\alpha), \\
\rho s &= \sum \rho^\alpha s^\alpha, \\
\zeta &= \sum \zeta^\alpha.
\end{aligned} \quad (3.37)$$

Logo,

$$\eta = \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} \eta^\alpha. \quad (3.38)$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \sum(\rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{v}^\alpha + \Phi^\alpha) - \rho \eta - \Phi &= 0, \\ \Phi &= \sum(\rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{v}^\alpha + \Phi^\alpha) - \rho \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} \eta^\alpha \mathbf{v}, \\ \Phi &= \sum(\rho^\alpha \eta^\alpha (\mathbf{v}^\alpha - \mathbf{v}) + \Phi^\alpha). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi = \sum(\rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{u}^\alpha + \Phi^\alpha). \quad (3.39)$$

E, finalmente,

$$\sum \rho^\alpha s^\alpha - \rho s = 0 \quad \text{portanto,} \quad s = \sum \frac{\rho^\alpha}{\rho} s^\alpha. \quad (3.40)$$

Para que a mistura se comporte como um corpo simples, respeitando a desigualdade de entropia, é necessário que a contribuição de cada constituinte, quando somado na produção de entropia, seja não negativa. Ou seja,

$$\sum \frac{\partial \rho^\alpha \eta^\alpha}{\partial t} + \sum \operatorname{div}(\rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{v}^\alpha + \Phi^\alpha) - \sum \rho^\alpha s^\alpha \geq 0, \quad \text{se} \quad \sum \zeta^\alpha \geq 0.$$

Ressaltamos que a condição sobre $\sum \zeta^\alpha$ não implica que para cada constituinte essa quantidade seja não negativa, apenas a contribuição de todos os constituintes quando somadas é não negativa.

Para um estudo mais detalhado sobre teoria de misturas, as seguintes referências podem ser consultadas [11],[12], [33], [13], [29] e [6].

4 MISTURA ELÁSTICA DE SÓLIDO E FLUIDO

A teoria de poroelasticidade em [30, 31] é obtida através da teoria de misturas ao introduzir os conceitos provenientes do meio poroso, tais como a *fração de volume* por meio da variável macroscópica chamada porosidade ou a *pressão em poro*, que abordaremos futuramente. Portanto, para determinar as equações de balanço para a teoria de meios poroelásticos é necessário fornecer um modelo para teoria de misturas, em que devemos exigir a consistência com algumas leis básicas da física, como por exemplo, a segunda lei da termodinâmica, objetividade material e simetria material.

A partir de agora, vamos considerar uma mistura não reagente de sólido e fluido ($\alpha = s, f$) com as seguintes equações de balanço de massa parciais e momento linear para cada constituinte, e equação de energia da mistura para o campo de variáveis, $\{\rho_s, \rho_f, \chi_s, \chi_f, \theta\}$, como abordado em [30], onde

ρ_s	densidade parcial do sólido,
ρ_f	densidade parcial do fluido,
χ_s	movimento do sólido,
χ_f	movimento do fluido,
θ	temperatura.

Vamos considerar que todos os constituintes da mistura possuem a mesma temperatura (o que não significa que a temperatura é constante). Sendo assim, só é necessária a equação de balanço de energia para a mistura ao invés de a conside-

rarmos para cada constituinte.

$$\begin{cases} \dot{\rho}_s + \rho_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ \dot{\rho}_f + \rho_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ \rho_s \dot{\mathbf{v}}_s - \operatorname{div} T_s + \mathbf{m}_f = \rho_s \mathbf{b}_s, \\ \rho_f \dot{\mathbf{v}}_f - \operatorname{div} T_f - \mathbf{m}_f = \rho_f \mathbf{b}_f, \\ \rho \dot{\epsilon} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{tr}(T \operatorname{grad} \mathbf{v}) = \rho r, \end{cases} \quad (4.1)$$

Para mistura total, exigimos que as leis sejam consistentes com as equações de balanço para um corpo simples. Em decorrência dessa exigência, temos a seguinte condição

$$\sum_{\alpha} \mathbf{m}_{\alpha} = 0, \quad \text{então} \quad \mathbf{m}_s = -\mathbf{m}_f.$$

que foi utilizada no sistema de equações anterior, Eq. (4.1).

Além disso, devemos especificar equações constitutivas para as quantidades físicas

$$f = \{T_s, T_f, \epsilon, \mathbf{q}, \mathbf{m}_f\}, \quad (4.2)$$

que aparecem nas equações de balanço com o objetivo de estabelecer as equações de campo para as variáveis básicas $\{\rho_s, \rho_f, \chi_s, \chi_f, \theta\}$.

Para uma mistura sólido-fluido elástica, consideramos o seguinte conjunto de equações constitutivas:

$$f = \mathfrak{F}(\theta, F_s, F_f, \operatorname{grad} \theta, \operatorname{grad} F_s, \operatorname{grad} F_f, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f), \quad (4.3)$$

onde F_s e F_f são os gradientes de deformação dos constituintes sólido e fluido, respectivamente. Com o objetivo de descrever uma teoria coerente, é necessário considerar os segundos gradientes de deformação do sólido e do fluido nas variáveis de estado. A ausência dos gradientes de ordem superior na função constitutiva

resulta em uma teoria mais simples. Por exemplo, um modelo para misturas simples (ver pag. 516, [42]).

Além de caracterizar a constituição dos materiais ao descrever tanto o comportamento macroscópico quanto o comportamento microscópico, a teoria constitutiva também tem o objetivo de fornecer restrições sobre as funções constitutivas com base em alguns princípios físicos. A exigência desses princípios impõem severas restrições sobre o modelo e, portanto, implicam em grandes simplificações nas relações constitutivas gerais, reduzindo as relações constitutivas de uma função constitutiva geral para uma mais específica e matematicamente mais simples. Um dos princípios físicos utilizados para este fim é o da objetividade material, que afirma a independência das propriedades materiais em relação ao observador. Dessa forma, as equações constitutivas não podem depender da localização do observador. Por exemplo, vamos supor que estejamos interessados em medir a deformação causada em um determinado material sujeito a uma carga e que tenhamos dois observadores em pontos distintos do espaço. Assim que a ação é efetivada, a carga deforma o material. Seria desejável que as medidas de deformação realizadas pelos dois observadores concordassem. Portanto, a equação constitutiva em (4.3), que possui quantidades tensoriais, vetoriais e escalares deve respeitar esse princípio. Entretanto, a velocidade de cada constituinte sólido e fluido não são quantidades físicas *indiferentes por referenciais* (ou objetivas). Logo, a equação constitutiva não pode depender das velocidades parciais do sistema isoladamente, ao invés disso, deve depender da velocidade relativa $V = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s$, que é objetiva. Uma outra restrição à função \mathfrak{F} é a condição de simetria material. Como o fluido é um material isotrópico, pode-se demonstrar, (cap.3, pág.84, [29]), que a dependência da equação constitutiva sobre o gradiente de deformação se reduz à dependência do determinante do gradiente de deformação para o constituinte fluido da mistura e, portanto, depende da densidade do fluido. Munidos das considerações acima, podemos reescrever (4.3)

em termos das seguintes quantidades:

$$f = \mathfrak{F}(\theta, \rho_f, F_s, \text{grad}\theta, \text{grad}\rho_f, \text{grad}F_s, V). \quad (4.4)$$

Para os campos de suprimento externo $\{\mathbf{b}_s(\mathbf{x}, t), \mathbf{b}_f(\mathbf{x}, t), r(\mathbf{x}, t)\}$, qualquer solução do sistema de equações de campo $\{\rho_f(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t), F_s(\mathbf{x}, t), \theta(\mathbf{x}, t)\}$ será chamado de um processo termodinâmico admissível, uma vez que é possível fornecer condições externas (por exemplo, com ambiente controlado), que satisfaçam as equações de campo para as variáveis básicas.

4.1 Princípio de Entropia

O comportamento de um corpo deve obedecer à segunda lei da termodinâmica, ou seja, um processo termodinâmico deve ser consistente com a desigualdade de entropia:

$$\rho\dot{\eta} + \text{div}\Phi - \rho s \geq 0. \quad (4.5)$$

Mais precisamente, as relações constitutivas clássicas são usualmente formuladas do ponto de vista empírico ou experimental, que juntamente com as equações de balanço, fornecem soluções que são chamadas de processos termodinâmicos. Esses processos devem ser consistentes com a segunda lei da termodinâmica e, assim, se tornarem processos fisicamente admissíveis. Em geral, esse é o papel da segunda lei da termodinâmica na formulação tradicional dos problemas físicos. Entretanto, verificar se as relações constitutivas, após sua formulação, constituem um processo que é termodinamicamente admissível pode não ser, em geral, um procedimento eficaz. Portanto, foi necessário formular um método que atendesse a esse propósito.

Seguindo a ideia estabelecida por *Coleman e Noll* em [17], na moderna *Termodinâmica Racional*, a segunda lei da termodinâmica desempenha um papel mais

importante, que é a utilização do princípio de entropia para obter restrições às equações constitutivas. A tarefa essencial do procedimento criado por *Coleman e Noll* reside na avaliação da teoria constitutiva, na medida em que exige a consistência de qualquer processo termodinâmico com a desigualdade de entropia (4.5). Essa exigência, ao contrário do que era estabelecido na formulação tradicional, faz com que a teoria constitutiva seja concebida de forma a satisfazer a segunda lei da termodinâmica. Esse método tem sido extensivamente estudado e tem gerado resultados muito positivos em diversas áreas da Mecânica do Contínuo. Entretanto, no procedimento criado por *Coleman e Noll*, é necessário realizar algumas hipóteses sobre a forma do fluxo de entropia/suprimento e fluxo de energia/suprimento, o que em alguns casos pode gerar resultados restritivos. Mais tarde, considerando que as propriedades do material não devem depender de suprimentos externos, ou seja, não há mudança nas propriedades do material devido ao ambiente no qual o mesmo esteja inserido, *I. Müller e Liu*, [27], assumiram a hipótese da ausência de força de corpo e suprimento de energia externa e modificaram o método através do uso de *Multiplicadores de Lagrange*, impondo que as leis de balanço são funções de restrição para a desigualdade de entropia. Essa abordagem generaliza os resultados alcançados por *Coleman e Noll* e traz uma visão um pouco mais geométrica ao que antes era tratado por meio de manipulações algébricas nas equações constitutivas e desigualdade de entropia.

Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Existem multiplicadores de Lagrange $\Lambda^{L_s}, \Lambda^{\rho_f}, \Lambda^{v_s}, \Lambda^{v_f}$ e Λ^ϵ , dependendo do conjunto de variáveis de estado, tais que a desigualdade

$$\begin{aligned} & \rho\dot{\eta} + \text{div}\Phi - \Lambda^{L_s} \cdot \rho_s(-\dot{F}_s F_s^{-1} + \text{grad}\mathbf{v}_s) - \Lambda^{\rho_f}(\dot{\rho}_f + \rho_f \text{div}\mathbf{v}_f) & (4.6) \\ & - \Lambda^{v_s} \cdot (\rho_s \dot{\mathbf{v}}_s - \text{div}T_s + \mathbf{m}_f) - \Lambda^{v_f} \cdot (\rho_f \dot{\mathbf{v}}_f - \text{div}T_f - \mathbf{m}_f) \\ & - \Lambda^\epsilon(\rho\dot{\epsilon} + \text{div}\mathbf{q} - \text{tr}(T\text{grad}\mathbf{v})) \geq 0, \end{aligned}$$

deve ser satisfeita para qualquer campo analítico $\{\rho_f(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t), F_s(\mathbf{x}, t), \theta(\mathbf{x}, t)\}$.

As consequências dessa formulação são consistentes com os resultados obtidos em [13] na teoria de misturas sob a ótica do procedimento criado por *Coleman-Noll*.

4.1.1 Sumário de Resultados

Resumiremos os resultados obtidos pelo método dos Multiplicadores de Lagrange por meio do seguinte conjunto de equações constitutivas

$$\begin{aligned} \psi_I &= \psi_I(\theta, \rho_f, F_s), & \eta &= -\frac{\partial \psi_I}{\partial \theta}, \\ \psi_f &= \psi_f(\theta, \rho_f, F_s, V), & \psi_s &= \psi_s(\theta, \rho_f, F_s, V), \\ T_f &= \rho_f \psi_f I - \frac{\partial \rho \psi_I}{\partial \rho_f} \rho_f I + \rho_f \frac{\partial \psi_f}{\partial V} \otimes V, \\ T_s &= \rho_s \psi_s I + \frac{\partial \rho \psi_I}{\partial F_s} F_s^T + \rho_s \frac{\partial \psi_s}{\partial V} \otimes V, \\ \epsilon &= \psi_I - \theta \frac{\partial \psi_I}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\rho_s \rho_f}{\rho^2} V \cdot V, \end{aligned} \quad (4.7)$$

e, em equilíbrio, $V = 0$ e $\nabla \theta = 0$,

$$\mathbf{m}_f^0 = \frac{\partial \rho_s \psi_s^0}{\partial \rho_f} \text{grad} \rho_f - \frac{\partial \rho_f \psi_f^0}{\partial F_s} \cdot \text{grad} F_s, \quad \mathbf{q}^0 = 0, \quad (4.8)$$

onde ψ_I , ψ_f e ψ_s são a energia interna, a energia livre do constituinte fluido e a energia livre do constituinte sólido, respectivamente. A quantidade \mathbf{m}_f^0 é a força de interação do constituinte fluido em equilíbrio e \mathbf{q}^0 é o fluxo de calor em equilíbrio.

Além disso, de (4.7) a tensão interna e a tensão total podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} T_I &= \rho \psi_I I - \frac{\partial \rho \psi_I}{\partial \rho_f} \rho_f I + \frac{\partial \rho \psi_I}{\partial F_s} F_s^T \\ T &= T_I(\theta, \rho_f, F_s) - \frac{1}{2} \frac{\rho_s \rho_f}{\rho} V \otimes V, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Embora as energias livres parciais ψ_f e ψ_s dependam da velocidade relativa V , a energia interna ψ_I ,

$$\rho\psi_I = \rho_f\psi_f + \rho_s\psi_s \quad (4.10)$$

não depende de V . De maneira similar, as tensões parciais T_f e T_s podem depender de V , mas a soma das tensões parciais T_I , não dependem,

$$\begin{aligned} T_f + T_s &= \rho_f\psi_f I - \frac{\partial\rho\psi_I}{\partial\rho_f}\rho_f I + \rho_f\frac{\partial\psi_f}{\partial V} \otimes V + \rho_s\psi_s I + \frac{\partial\rho\psi_I}{\partial F_s}F_s^T + \rho_s\frac{\partial\psi_s}{\partial V} \otimes V, \\ &= \rho\psi_I I - \frac{\partial\rho\psi_I}{\partial\rho_f}\rho_f I + \frac{\partial\rho\psi_I}{\partial F_s}F_s^T + \frac{\partial(\rho\psi_I)}{\partial V} \otimes V, \\ &= \rho\psi_I I - \frac{\partial\rho\psi_I}{\partial\rho_f}\rho_f I + \frac{\partial\rho\psi_I}{\partial F_s}F_s^T, \\ &= T_I, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde usamos o fato da energia interna ψ_I não depender da velocidade relativa V .

Para deduzir Eq. (4.7)₃ e Eq. (4.9)₂, basta notar que $T = \sum_{\alpha} (T^{\alpha} - \rho^{\alpha}\mathbf{u}^{\alpha} \otimes \mathbf{u}^{\alpha})$ e $\epsilon = \sum_{\alpha} \left(\frac{\rho^{\alpha}}{\rho} (\epsilon^{\alpha} + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{\alpha}^2) \right)$, com $\mathbf{u}_s = -\frac{\rho_f}{\rho}V$ e $\mathbf{u}_f = \frac{\rho_s}{\rho}V$.

Se definirmos a pressão parcial do fluido em equilíbrio como

$$p_f = \rho_f \left(\frac{\partial\rho\psi_I}{\partial\rho_f} - \psi_f^0 \right), \quad (4.12)$$

temos que

$$\rho_f \frac{\partial\rho\psi_I}{\partial\rho_f} = p_f + \rho_f\psi_f^0,$$

então a tensão do fluido pode ser escrita como

$$T_f = -p_f I + \rho_f(\psi_f - \psi_f^0)I + \rho_f\frac{\partial\psi_f}{\partial V} \otimes V, \quad (4.13)$$

onde a tensão de equilíbrio no fluido se reduz a $T_f^0 = -p_f I$.

Utilizando as equações (4.8),(4.12), temos que a força de interação pode ser escrita como:

$$\mathbf{m}_f^0 = \frac{p_f}{\rho_f} \text{grad} \rho_f - \rho_f (\text{grad} \psi_f^0) \Big|_0. \quad (4.14)$$

Basta notar que

$$\begin{aligned} & \frac{p_f}{\rho_f} \text{grad} \rho_f - \rho_f (\text{grad} \psi_f^0) = \\ &= \frac{\rho_f}{\rho_f} \left(\frac{\partial \rho \psi_I}{\partial \rho_f} - \psi_f^0 \right) \text{grad} \rho_f - \rho_f \left(\frac{\partial \psi_f^0}{\partial \rho_f} \text{grad} \rho_f + \frac{\partial \psi_f^0}{\partial F_s} \cdot \text{grad} F_s \right) \\ &= \left(\frac{\partial (\rho_f \psi_f + \rho_s \psi_s)}{\partial \rho_f} - \psi_f^0 \right) \text{grad} \rho_f - \rho_f \left(\frac{\partial \psi_f^0}{\partial \rho_f} \text{grad} \rho_f + \frac{\partial \psi_f^0}{\partial F_s} \cdot \text{grad} F_s \right) \\ &= \left(\psi_f + \rho_f \frac{\partial \psi_f}{\partial \rho_f} + \frac{\partial (\rho_s \psi_s)}{\partial \rho_f} - \psi_f^0 \right) \text{grad} \rho_f - \rho_f \left(\frac{\partial \psi_f^0}{\partial \rho_f} \text{grad} \rho_f + \frac{\partial \psi_f^0}{\partial F_s} \cdot \text{grad} F_s \right), \end{aligned}$$

que em equilíbrio,

$$\begin{aligned} & \frac{p_f}{\rho_f} \text{grad} \rho_f - \rho_f (\text{grad} \psi_f^0) \Big|_0 = \\ &= \left(\psi_f + \rho_f \frac{\partial \psi_f}{\partial \rho_f} + \frac{\partial (\rho_s \psi_s)}{\partial \rho_f} - \psi_f^0 \right) \text{grad} \rho_f - \rho_f \left(\frac{\partial \psi_f^0}{\partial \rho_f} \text{grad} \rho_f + \frac{\partial \psi_f^0}{\partial F_s} \cdot \text{grad} F_s \right) \Big|_0 \end{aligned}$$

resulta em

$$\frac{p_f}{\rho_f} \text{grad} \rho_f - \rho_f (\text{grad} \psi_f^0) \Big|_0 = \frac{\partial \rho_s \psi_s^0}{\partial \rho_f} \text{grad} \rho_f - \frac{\partial \rho_f \psi_f^0}{\partial F_s} \cdot \text{grad} F_s = \mathbf{m}_f^0, \quad \mathbf{q} = 0.$$

5 MEIO POROSO

De um modo geral, a teoria de misturas e de meios porosos tem sido estudada ao longo dos séculos. Por exemplo, em teoria de misturas, foi observado no século 19 que em uma mistura de gases não reagentes, a pressão total exercida é equivalente a soma das pressões parciais dos gases individualmente. Essa lei é conhecida como a *lei de Dalton para a pressão parcial*. Anos mais tarde Darcy [20], deu início a uma área de pesquisa conhecida como meio poroso. Ele desenvolveu uma pesquisa pioneira que descreve o fluxo de um fluido através de um meio poroso. Mais precisamente, de forma empírica, ele postulou a existência de uma relação linear entre a taxa do fluxo de um fluido através de um meio poroso e o gradiente de pressão.

Podemos entender um meio poroso como um meio composto por uma rede de cavidades ou espaços (que podem variar quanto a forma e tamanho) em sua parte sólida, podendo estar vazios ou preenchidos com algumas substâncias. A essa parte sólida denominamos *matriz sólida*. Na figura (5.1), vemos alguns tipos de materiais porosos encontrados na natureza e sintéticos.

Classificamos o meio poroso como insaturado, parcialmente saturado ou saturado. Quando não existe a presença de nenhuma substância nos poros da matriz sólida dizemos que o meio poroso é insaturado, no caso de conter a presença de alguma substância na fase fluida na matriz sólida, de forma que nem todos os poros da matriz sólida contenham a fase fluida, denominamos esse meio poroso como parcialmente saturado e, por último, quando todos os poros da matriz sólida contém alguma substância na fase fluida, dizemos que o meio é saturado.

Essa classificação, à primeira vista parece inócua, mas é de fundamental



Figura 5.1: No sentido horário, imagem aproximada de uma formação óssea, solo argiloso seco compactado, vidro reciclado sinterizado, utilizado com o objetivo de isolamento acústico, rocha magmática.

importância ao analisarmos os fenômenos associados com a propagação de onda em meios porosos, pois existe uma relação de dependência da atenuação da amplitude da onda e da velocidade de propagação da onda com respeito à saturação do meio [2]. Sendo assim, na construção do modelo matemático, que visa estudar o decaimento da amplitude e a velocidade de propagação, devemos realizar alguma hipótese sobre a saturação do meio poroso. Ressaltamos, que, neste trabalho, o estudo é focado apenas no meio poroso saturado.

5.1 Meio Poroso Saturado

Em muitas áreas da engenharia, as diferentes reações de um determinado sistema sujeito a condições de forças externas e/ou internas, devem ser estudadas com o objetivo de obter uma descrição precisa dos fenômenos associados a esse sistema. Portanto, estabelecer alguma hipótese sobre a composição do corpo material a ser estudado é um passo importante na descrição dos fenômenos aos quais esse corpo está sujeito. O sistema material (ou corpo) pode ser composto de várias maneiras. Por exemplo, em um corpo sólido, podem existir diferentes constituintes sólidos em sua composição, tal como concreto denso, Fig. (5.2), sem uma quantidade de poros considerável. Por outro lado, podemos considerar corpos materiais que possuem poros abertos (que permitem que o fluido atravesse o corpo) ou fechados (caso em que o fluxo é interrompido), como é o caso das cerâmicas (ver Fig. (5.3)) e solos. Neste caso, os poros podem estar preenchidos de fluidos e devido à diferentes propriedades e diferentes movimentos, pode existir interação entre os constituintes (sólido e fluido). Dessa forma, a composição heterogênea do material pode ser investigada por meio do conceito de *fração de volume*, uma vez que a descrição precisa (para o tratamento matemático) da localização dos poros, preenchidos ou vazios e dos constituintes sólidos é quase impossível. Para contornar essa dificuldade, podemos considerar a mistura sólido-fluido como um modelo de meio poroso saturado, introduzindo a noção de porosidade.

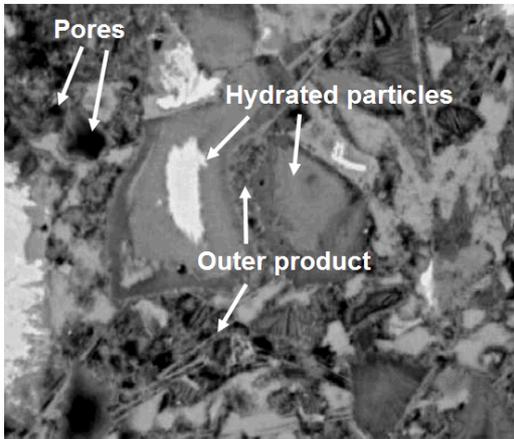


Figura 5.2: Poros presentes no concreto denso.
 Fonte: <http://iti.northwestern.edu/cement>

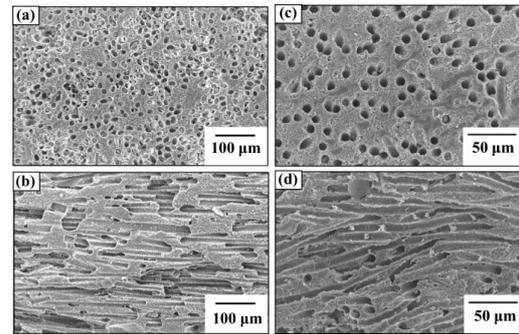


Figura 5.3: Visão aproximada dos poros que foram uni-direcionados através do método de extrusão em fibras de carbono presentes em cerâmicas.
 Fonte: Porous ceramics mimicking nature—preparation and properties of microstructures with unidirectionally oriented pores.

Para a teoria de mistura de meio poroso, um ponto material é visto como um elemento de volume representativo dV . Mais precisamente, assumimos que o volume representativo é grande o suficiente se comparado com os grãos do sólido (conectados ou não) e suficientemente pequeno se comparado ao tamanho do corpo material, de modo que esse elemento de volume contenha sempre amostras do constituinte sólido com poros preenchidos com o constituinte fluido presentes no corpo material.

Vamos denotar a fração de volume nos poros por ϕ , conseqüentemente, podemos inferir que o elemento de volume representativo do constituinte fluido e do constituinte sólido são dados, respectivamente, por

$$dV_f = \phi dV, \quad dV_s = (1 - \phi)dV,$$

assumindo que o meio poroso é saturado.

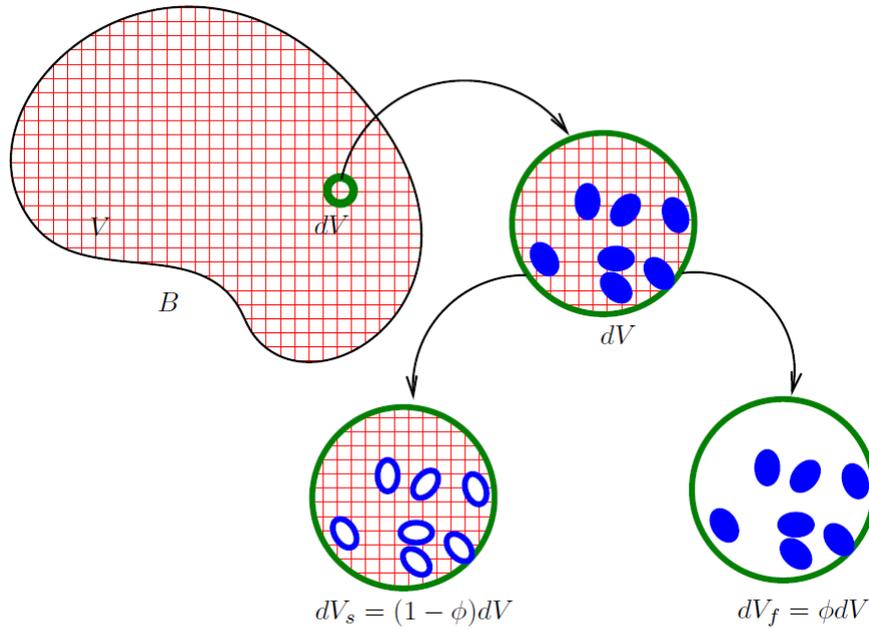


Figura 5.4: A imagem representa uma seção transversal de um meio poroso com volume V , onde no elemento de volume representativo dV , estão presentes os constituintes sólido (com volume dV_s com os poros não preenchidos pelo fluido) e os poros preenchidos pelo constituinte fluido, cujo o volume é dV_f .

Os elementos de massa do fluido e do sólido no elemento de volume representativo são definidos, respectivamente, por

$$dM_f = \rho_f dV = d_f dV_f,$$

$$dM_s = \rho_s dV = d_s dV_s.$$

Para a teoria de poroelasticidade, assim como na teoria de misturas, é importante distinguir as densidades de massa reais das densidades parciais. A densidade de massa real representa a massa do constituinte por unidade de volume ocupado por esse constituinte. A densidade de massa parcial representa a massa do constituinte por unidade de volume ocupado pela mistura. Se por exemplo, considerarmos

a fase sólida e fluida incompressíveis, suas densidades de massa reais, d_s e d_f , permanecem constantes durante um movimento induzido por algum estímulo no corpo. Logo, suas densidades de massa parciais dos constituintes sólido e fluido, denotadas respectivamente por, ρ_s e ρ_f , variam em resposta a mudanças nas frações de volume

$$\rho_f = \phi d_f, \quad \rho_s = (1 - \phi) d_s, \quad (5.1)$$

onde d_f e d_s são as densidades de massa reais dos constituintes fluido e sólido, respectivamente.

5.2 Pressão em Poro

Segundo a teoria de meios porosos, a pressão é usualmente introduzida como a pressão que um fluido exerce nos poros da matriz sólida, a *pressão em poro*. Considerando a pressão parcial do fluido p_f (na teoria de misturas) como o resultado da ação microscópica do contato do fluido com a fração de superfície do poro presente na matriz sólida ocupada pelo fluido, temos:

$$p_f dA = P dA_f \text{ e, portanto, } p_f = \phi_a P,$$

onde P é a *pressão em poro do fluido* e $\phi_a = \frac{dA_f}{dA}$ é a fração de área dos poros.

Em geral, a porosidade ϕ e a fração de área do poro ϕ_a podem ser diferentes. Entretanto, nas aplicações práticas, é razoável assumir que são as mesmas. Portanto, podemos definir a *pressão em poro do fluido* como:

$$P = \frac{p_f}{\phi}.$$

Em virtude das considerações acima, podemos escrever as tensões da seguinte forma,

$$\begin{aligned} T_f &= -\phi PI + \bar{T}_f, \\ T_s &= -(1 - \phi)PI + \bar{T}_s. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Chamamos usualmente \bar{T}_f e \bar{T}_s de *tensão extra do fluido* e *tensão efetiva do sólido*, respectivamente. Da equação (4.13), temos:

$$\bar{T}_f = \phi d_f (\psi_f - \psi_f^0) I + \phi d_f \frac{\partial \psi_f}{\partial V} \otimes V. \quad (5.3)$$

5.3 Equações de Movimento

A luz dos resultados obtidos na seção anterior, as equações de movimento em (4.1) para os constituintes fluido e sólido podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f &= -\phi \text{grad} P - P \text{grad} \phi + \text{div} \bar{T}_f + \mathbf{m}_f + \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1 - \phi) d_s \dot{\mathbf{v}}_s &= -(1 - \phi) \text{grad} P + P \text{grad} \phi + \text{div} \bar{T}_s - \mathbf{m}_f + (1 - \phi) d_s \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde a força de corpo é a força da gravidade \mathbf{g} .

A força de interação, \mathbf{m}_f^0 , em equilíbrio (4.3), pode ser rescrita em termos da *pressão em poro*:

$$\mathbf{m}_f^0 = P \text{grad} \phi - \phi \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_0 = -\frac{P}{d_f} \text{grad} d_f + d_f (\text{grad} \psi_f^0) |_0. \quad (5.5)$$

Portanto as equações de movimento em (4.7) possuem a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f &= -\phi \text{grad} P + \text{div} \bar{T}_f + (\mathbf{m}_f - \mathbf{m}_f^0) - \phi \mathbf{r}_0 + \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1 - \phi) d_s \dot{\mathbf{v}}_s &= -(1 - \phi) \text{grad} P + \text{div} \bar{T}_s - (\mathbf{m}_f - \mathbf{m}_f^0) + \phi \mathbf{r}_0 + (1 - \phi) d_s \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.4 Teoria Linear

O objetivo dessa seção é fornecer uma teoria mais simples linearizando as equações de movimento descritas em (5.6) e mostrar que alguns resultados estão de acordo com conceitos clássicos da mecânica dos solos, tais como *lei de Darcy*, *empuxo* e o *princípio da tensão efetiva*, [31].

Uma vez que as condições de equilíbrio são caracterizadas por $\text{grad}\theta = 0$ e $V = 0$, na teoria linear vamos assumir que $|\text{grad}\theta|$ e $|V|$ são quantidades pequenas e representaremos por $o(2)$ os termos de segunda ordem ou de ordem mais elevada nessas quantidades. Com essa hipótese, a tensão extra do fluido (4.13)

$$\bar{T}_f = \phi d_f(\psi_f - \psi_f^0)I + \phi d_f \frac{\partial \psi_f}{\partial V} \otimes V = o(2) \quad (5.7)$$

é uma quantidade de segunda ordem. Para entender essa conclusão, devemos notar que a energia livre do fluido possui uma representação de uma função isotrópica escalar avaliada na variável vetorial $(V \cdot V)$ (ver [29] pag. 99), ou seja,

$$\psi_f = \hat{\psi}_f(V \cdot V).$$

Logo, tanto o primeiro termo, $(\psi_f - \psi_f^0)I$, quanto o último termo, $\frac{\partial \psi_f}{\partial V} \otimes V$ da Eq. (5.7) são de segunda ordem na variável $V \cdot V$. Escrevendo a aproximação de Taylor de segunda ordem para ψ_f ,

$$\hat{\psi}_f(x) = \hat{\psi}_f(0) + \partial_x \hat{\psi}_f(x)|_{x=0} x + \frac{1}{2} \partial_x^2 \hat{\psi}_f(x)|_{x=0} x^2 + o(3),$$

em que $\psi_f = \hat{\psi}_f(x)$ com $x = V \cdot V$. Logo, a representação da função escalar $\hat{\psi}_f$ possui a seguinte forma,

$$\hat{\psi}_f(V \cdot V) = \hat{\psi}_f^0 + \alpha(V \cdot V) + \beta(V \cdot V)^2,$$

onde os termos $\hat{\psi}_f^0 = \hat{\psi}_f(0)$, $\partial_x \hat{\psi}_f(0) = \alpha$ e $\frac{1}{2} \partial_x^2 \hat{\psi}_f(0) = \beta$ são constantes.

Portanto,

$$\psi_f - \psi_f^0 = \hat{\psi}_f(V \cdot V) = o(2).$$

De modo semelhante, temos $\frac{\partial \psi_f}{\partial V} \otimes V = o(2)$ e a tensão extra do fluido, \bar{T}_f , pode ser desprezada.

O resultado anterior possibilita reescrever o tensor de tensão efetiva do sólido. Observe que, $T = T_I(\theta, \rho_f, F_s) - \frac{1}{2} \frac{\rho_f \rho_s}{\rho} V \otimes V$, como o último é de segunda ordem e a tensão interna independe de V , temos $T = T_I$ e de $T_f + T_s = T_I$ implica que $T_f + T_s = T$. Logo,

$$-\phi PI + \bar{T}_f - (1 - \phi)PI + \bar{T}_s = T \Leftrightarrow \bar{T}_s = T + PI - \bar{T}_f.$$

Portanto, a tensão efetiva do sólido pode ser escrita como:

$$\bar{T}_s = T + PI + o(2), \quad (5.8)$$

que é conhecido como *princípio da tensão efetiva* na mecânica dos solos introduzida por *Terzaghi*, [37].

A parte que não se encontra em estado de equilíbrio da força de interação $\mathbf{m}_f - \mathbf{m}_f^0$, chamamos de *força resistiva*, pois essa força tem direção contrária ao fluxo do fluido através do meio. Além disso, em virtude de considerarmos as quantidades $|V|$ e $|\text{grad}\theta|$ pequenas, e uma vez que essa força é nula em equilíbrio, podemos escrever a força resistiva como função linear em V e $\text{grad}\theta$:

$$\mathbf{m}_f - \mathbf{m}_f^0 = -\phi RV - \phi G \text{grad}\theta + o(2), \quad (5.9)$$

onde os parâmetros materiais R e G são funções tensoriais em geral. O parâmetro R é chamado de *tensor de resistividade* e seu inverso R^{-1} é chamado de *tensor de permeabilidade*. Grosso modo, a permeabilidade é uma característica da estrutura porosa da matriz sólida que indica a propriedade que um fluido possui de fluir através

da rocha. Uma rocha pode ser altamente porosa, mas se os espaços dos poros não são conexos, então a matriz é não permeável.

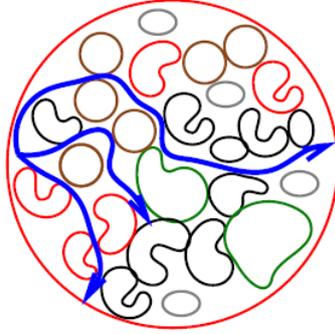


Figura 5.5: O diagrama representa caminhos de fluxo hipotéticos através de um meio poroso.

O tensor de resistividade R é usado para caracterizar o comportamento em macroescala relacionada à distribuição geométrica microestrutural do material. Ele fornece uma medida acumulativa da perda da velocidade do fluido em uma microescala.

Após as considerações acima, podemos deduzir as equações lineares de movimento dos constituintes da mistura.

A força de interação no fluido em equilíbrio é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_f^0 &= \frac{p_f}{\rho_f} \text{grad} \rho_f - \rho_f (\text{grad} \psi_f^0) |_0, \\ &= \frac{\phi P}{\phi d_f} \text{grad}(\phi d_f) - \phi d_f (\text{grad} \psi_f^0) |_0, \\ &= \frac{P}{d_f} \phi \text{grad}(d_f) + \frac{P}{d_f} d_f \text{grad} \phi - \phi d_f (\text{grad} \psi_f^0) |_0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$\mathbf{m}_f^0 = P \text{grad} \phi + \phi \left(\frac{P}{d_f} \text{grad} d_f - d_f (\text{grad} \psi_f^0) |_0 \right). \quad \text{Como} \quad \mathbf{m}_f^0 = P \text{grad} \phi - \phi \mathbf{r}_0,$$

substituindo na equação de movimento do fluido,

$$\begin{aligned}
\rho_f \dot{\mathbf{v}}_f - \operatorname{div} T_f - \mathbf{m}_f &= \rho_f \mathbf{g}, & \rho_f &= \phi d_f. \\
\phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f - \operatorname{div}(-\phi P I) - \mathbf{m}_f &= \phi d_f \mathbf{g}, \\
\phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \operatorname{div}(\phi P I) - \mathbf{m}_f &= \phi d_f \mathbf{g}, \\
\phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \phi \operatorname{grad}(P) + P \operatorname{grad} \phi - (\mathbf{m}_f - \mathbf{m}_f^0) - \mathbf{m}_f^0 &= \phi d_f \mathbf{g}, \\
\phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \phi \operatorname{grad}(P) + P \operatorname{grad} \phi - (\mathbf{m}_f - \mathbf{m}_f^0) - P \operatorname{grad} \phi + \phi \mathbf{r}_0 &= \phi d_f \mathbf{g}.
\end{aligned}$$

De $\mathbf{m}_f - \mathbf{m}_f^0 = -\phi R V - \phi G \operatorname{grad} \theta + o(2)$, temos

$$\phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \phi \operatorname{grad} P + \phi (R V + G \operatorname{grad} \theta + \mathbf{r}_0) = \phi d_f \mathbf{g}.$$

Logo, a equação de movimento para o fluido pode ser escrita na seguinte forma,

$$\phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \phi \operatorname{grad} P + \phi \mathbf{r} = \phi d_f \mathbf{g}.$$

De modo inteiramente análogo, temos:

$$(1 - \phi) d_s \dot{\mathbf{v}}_s + (1 - \phi) \operatorname{grad} P - \operatorname{div} \bar{T}_s - \phi \mathbf{r} = (1 - \phi) d_s \mathbf{g}.$$

Desprezando a tensão extra do fluido que é de segunda ordem em V , temos as equações linearizadas para o movimento dos constituintes fluido e sólido da mistura

$$\begin{aligned}
d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \operatorname{grad} P + \mathbf{r} &= d_f \mathbf{g}, \\
(1 - \phi) d_s \dot{\mathbf{v}}_s + (1 - \phi) \operatorname{grad} P - \operatorname{div} \bar{T}_s - \phi \mathbf{r} &= (1 - \phi) d_s \mathbf{g},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde $\mathbf{r} = R V + G \operatorname{grad} \theta + \mathbf{r}_0$.

A equação de movimento para o fluido (5.10)₁ é uma generalização da *lei de Darcy*. Se considerarmos apenas a contribuição do termo $\mathbf{r} = R V$ na equação e supusermos que a matriz sólida é estacionária, $\mathbf{v}_s = 0$, temos a Lei de Darcy:

$$\mathbf{v}_f = -\frac{\operatorname{grad} P - d_f \mathbf{g}}{R}. \tag{5.11}$$

Uma relação interessante para a equação do constituinte sólido pode ser deduzida das equações de movimento para os constituintes sólido e fluido. Se multiplicarmos a equação (5.10)₁ por $(1 - \phi)$ e subtrairmos de (5.10)₂, temos:

$$(1 - \phi)(d_s \dot{\mathbf{v}}_s - d_f \dot{\mathbf{v}}_f) = \text{div} \bar{\mathbf{T}}_s + \mathbf{r} + (1 - \phi)(d_s - d_f)\mathbf{g}, \quad (5.12)$$

que será utilizada na análise da propagação de ondas em meios porosos, devido ao caráter relacional entre as quantidades físicas dos constituintes. Isso pode ser observado no último termo que fornece a diferença entre as densidades dos constituintes fluido e sólido, que pode ser interpretado fisicamente pelo conceito de empuxo.

6 PROBLEMAS EM POROELASTICIDADE

Após as considerações da teoria de misturas elástica sólido-fluido (leis de balanço, equação constitutiva e restrições termodinâmicas) e dos conceitos obtidos para o meio poroso saturado, podemos rescrever as equações de balanço da teoria de mistura em termos das densidades de massa parciais, pressão em poro e tensões parciais para cada constituinte da mistura. Além disso, consideramos o modelo isotérmico, de forma que a equação de energia utilizada para a teoria de misturas não será necessária.

A teoria de poroelasticidade é formulada com base nas equações de balanço de massa parcial e de momento parcial para os constituintes fluido e sólidos [30],

$$\left\{ \begin{array}{l} (\phi d_f)' + \phi d_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ ((1 - \phi) d_s)' + (1 - \phi) d_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ \phi d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \phi \operatorname{grad} P - \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_f + \phi \mathbf{r} = \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1 - \phi) d_s \dot{\mathbf{v}}_s + (1 - \phi) \operatorname{grad} P - \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}_s - \phi \mathbf{r} = (1 - \phi) d_s \mathbf{g}, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

onde das Eqs. (5.7, 5.8, 5.10), temos as seguintes relações constitutivas:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_f &= \rho_f (\psi_f - \psi_f^0) \mathbf{I} + \rho_f \frac{\partial \psi_f}{\partial V} \otimes V = o(2), \\ \bar{\mathbf{T}}_s &= T + P \mathbf{I} + o(2), \\ \mathbf{r} &= R V + \mathbf{r}_0 + o(2), \quad \mathbf{r}_0 = -\frac{P}{d_f} \operatorname{grad} d_f + d_f (\operatorname{grad} \psi_f^0), \end{aligned} \quad (6.2)$$

em que os termos que apresentam $o(2)$ são termos de segunda ordem ou de ordens superiores na magnitude $|V|$. Além disso, a energia livre no constituinte fluido e a soma da tensão interna da mistura são funções das seguintes variáveis:

$$\begin{aligned}\psi_f^0 &= \psi_f^0(\phi, d_f, F_s), & \psi_f &= \psi_f(\phi, d_f, F_s, V), \\ P &= P(\phi, d_f, F_s), & T_I &= T_I(\phi, d_f, F_s).\end{aligned}$$

O sistema (6.1)₁₋₄, possui mais variáveis do que equações. Dessa forma, o sistema não possui uma solução única, sendo subdeterminado com o conjunto $\{\phi, d_f, d_s, \chi_f, \chi_s\}$ de variáveis a determinar. Isso ocorre, pois ao introduzirmos o conceito de porosidade, necessário para representar uma característica microestrutural do corpo, inserimos mais uma variável constitutiva no modelo. Com o objetivo de resolver esse problema, sem postular uma equação de balanço ou de evolução para lidar com essa variável microestrutural do meio, podemos supor que a porosidade é uma quantidade constitutiva, fornecendo a esta uma relação constitutiva. Dessa forma, obtemos o seguinte sistema determinado em sua forma não-linear:

Variáveis independentes: $\{d_f, d_s, \chi_f, \chi_s\}$.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\phi d_f)}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad}(\phi d_f) + \phi d_f \text{div} \mathbf{v}_f &= 0, \\ \frac{\partial((1-\phi)d_s)}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad}((1-\phi)d_s) + (1-\phi)d_s \text{div} \mathbf{v}_s &= 0, \\ \phi d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f \right) + \phi \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_f + \phi \mathbf{r} &= \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1-\phi)d_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \mathbf{v}_s \right) + (1-\phi) \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_s - \phi \mathbf{r} &= (1-\phi)d_s \mathbf{g}. \end{aligned} \right. \quad (6.3)$$

Variáveis constitutivas:

$$\begin{aligned}\bar{T}_s &= \bar{T}_s(d_f, F_s, V), & \bar{T}_f &= \bar{T}_f(d_f, F_s, V), & \mathbf{r} &= \mathbf{r}(d_f, F_s, V), \\ P &= P(d_f, F_s), & \phi &= \phi(d_f, F_s),\end{aligned} \quad (6.4)$$

em que a porosidade, ϕ , é uma variável constitutiva macroscópica que representa uma característica microestrutural, e assim como a pressão em poro, depende apenas da densidade do fluido e do gradiente de deformação do sólido. Além disso, retiramos a dependência da porosidade com relação as outras variáveis constitutivas do modelo.

Podemos ainda, com o objetivo de tornar o sistema (6.1)₁₋₄ determinado, realizar algumas hipóteses que consistem em considerar a incompressibilidade dos constituintes do meio.

Como mencionado anteriormente, concentraremos nossa atenção ao caso em que os constituintes possuem a mesma temperatura (o que não implica que a temperatura seja constante).

6.1 Incompressibilidade

Com a hipótese de incompressibilidade dos constituintes, podemos fornecer três sistemas unicamente determinados.

- Modelo-1: **Incompressibilidade do constituinte sólido** (d_s constante).

Variáveis independentes: $\{\phi, d_f, \chi_f, \chi_s\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\phi d_f)}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad}(\phi d_f) + \phi d_f \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \phi\right) + (1 - \phi) \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ \phi d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f\right) + \phi \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_f + \phi \mathbf{r} = \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1 - \phi) d_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \mathbf{v}_s\right) + (1 - \phi) \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_s - \phi \mathbf{r} = (1 - \phi) d_s \mathbf{g}. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Variáveis constitutivas:

$$\begin{aligned} \bar{T}_s &= \bar{T}_s(\phi, d_f, F_s, V), & \bar{T}_f &= \bar{T}_f(d_f, F_s, V), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\phi, d_f, F_s, V), & P &= P(\phi, d_f, F_s). \end{aligned} \quad (6.6)$$

- Modelo-2: **Incompressibilidade do constituinte fluido** (d_f constante).

Variáveis independentes: $\{\phi, d_s, \chi_f, \chi_s\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \phi \right) + \phi \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ \frac{\partial((1-\phi)d_s)}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad}((1-\phi)d_s) + (1-\phi)d_s \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ \phi d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f \right) + \phi \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_f + \phi \mathbf{r} = \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1-\phi)d_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \mathbf{v}_s \right) + (1-\phi) \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_s - \phi \mathbf{r} = (1-\phi)d_s \mathbf{g}. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Variáveis constitutivas:

$$\begin{aligned} \bar{T}_s &= \bar{T}_s(\phi, F_s, V), & \bar{T}_f &= \bar{T}_f(d_f, F_s, V), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\phi, F_s, V), & P &= P(\phi, F_s). \end{aligned} \quad (6.8)$$

- **Modelo-3: Incompressibilidade do meio poroso (d_s e d_f constantes).**

Ainda que o meio poroso seja composto por constituintes incompressíveis, o material não é necessariamente incompressível. Isso ocorre porque a porosidade pode variar. Entretanto, podemos considerar a a pressão em poro P como uma variável independente de modo a obter um sistema determinístico.

Variáveis independentes: $\{\phi, P, \chi_f, \chi_s\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \phi \right) + \phi \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \phi \right) + (1-\phi) \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ \phi d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f \right) + \phi \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_f + \phi \mathbf{r} = \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1-\phi)d_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \mathbf{v}_s \right) + (1-\phi) \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_s - \phi \mathbf{r} = (1-\phi)d_s \mathbf{g}. \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Variáveis constitutivas:

$$\bar{T}_s = \bar{T}_s(\phi, F_s, V), \quad \bar{T}_f = \bar{T}_f(d_f, F_s, V), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, F_s, V). \quad (6.10)$$

7 ONDAS DE ACELERAÇÃO

A demonstração da existência das ondas primárias e secundárias por meio da formulação apresentada por [31] passa pelo argumento da teoria de propagação de frente de onda. Segundo essa teoria, o movimento da frente de onda é modelado como o deslocamento de uma superfície singular, onde é considerada a descontinuidade de algum campo escalar, vetorial ou tensorial através da superfície. Essa abordagem representa uma boa aproximação tanto para a propagação de um sinal com amplitude finita, quanto para uma onda com frequências muito altas.

O objetivo desse capítulo é ilustrar os passos realizados em [31] para demonstrar a existência de duas ondas que se propagam longitudinalmente. A onda primária $P1$ tem velocidade de deslocamento superior à onda secundária $P2$, sendo facilmente observada nos fenômenos físicos. Devido ao forte decaimento da onda $P2$, sua observação foi tardia e só se deu experimentalmente em [32]. Na teoria de poroelasticidade, as ondas $P1$ e $P2$ foram previstas pelo modelo fenomenológico devido a *Biot* [8].

7.1 Propagação de Frente de Onda

Uma superfície singular $\sigma(t)$ se movendo em uma região R do espaço, em um tempo t , divide essa região em duas sub-regiões $R^+(t)$ e $R^-(t)$. Definimos a orientação positiva da normal unitária na direção da região $R^+(t)$, de modo que todas as quantidades físicas e geométricas serão assinaladas com os sinais de positivo (+) e negativo (-) de acordo com a região onde as mesmas se encontram.

Considere uma função tensorial $A(\mathbf{x}, t)$ contínua nas sub-regiões $R^+(t)$ e $R^-(t)$ e que possuem valores limites A^+ e A^- para qualquer ponto \mathbf{x} na superfície $\sigma(t)$ quando se aproxima por ambas as sub-regiões $R^+(t)$ e $R^-(t)$ respectivamente. Quando A é contínua através da superfície, esses dois valores limites são idênticos. Caso contrário, existe um salto através de $\sigma(t)$ em um ponto \mathbf{x} dado por:

$$[A] = A^+ - A^-.$$

A quantidade $[A]$ é uma função da posição na superfície $\sigma(t)$ e do tempo t . Portanto, é expressa somente em termos das coordenadas da superfície e do tempo. Quando $[A] \neq 0$, a superfície $\sigma(t)$ é chamada de *superfície singular relativa ao campo A* .

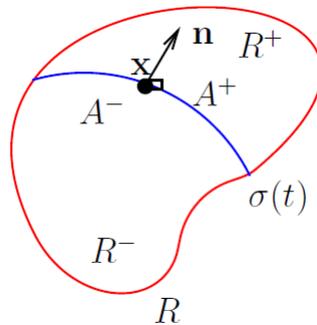


Figura 7.1: A imagem representa uma região R arbitrária do espaço dividida pela superfície singular $\sigma(t)$, gerando duas regiões R^+ e R^- com a convenção da normal \mathbf{n} apontando na direção R^+ no ponto $\mathbf{x} \in \sigma(t)$.

Essa definição pode ser estendida para incluir as derivadas temporais e espaciais do campo A . Portanto, se o campo A é contínuo através da superfície $\sigma(t)$, mas se alguma de suas derivadas não o for, podemos classificar a ordem de descontinuidade do campo A e ainda chamaremos $\sigma(t)$ de superfície singular. Além disso, podemos associar a ordem de descontinuidade das derivadas do campo A através de $\sigma(t)$ com as características físicas encontradas nas propagações de onda na natureza.

Seja \mathbf{n} a normal unitária apontando na direção da propagação e U a velo-

cidade normal do movimento da superfície singular na configuração corrente (ou atual). De acordo com o *lema de Hadamard* [23], se $[A] = 0$, temos as seguintes condições de compatibilidade geométrica e cinemática:

$$[\text{grad}A] = [\text{grad}A \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}, \quad \left[\frac{\partial A}{\partial t} \right] = -U[\text{grad}A \cdot \mathbf{n}]. \quad (7.1)$$

Um estudo mais profundo sobre deslocamento de superfícies singulares pode ser obtido em [12].

Vamos considerar a propagação de frente de onda em uma região homogênea do corpo poroso em equilíbrio, no qual $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s = 0$, ou seja imediatamente após a frente de onda o meio se encontra em estado de repouso.

Vamos considerar descontinuidades fracas, ou seja, onde a função $[A]$ é contínua, mas existe descontinuidade nas derivadas de primeira ordem, dessa forma, assumimos que

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_f] &= 0, & [\mathbf{v}_s] &= 0, & [F_s] &= 0 \\ [d_f] &= 0, & [d_s] &= 0, & [\phi] &= 0, \end{aligned}$$

e sejam:

$$\mathbf{a}_f = \left[\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right], \quad \mathbf{a}_s = \left[\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right], \quad \delta_f = \left[\frac{\partial d_f}{\partial t} \right], \quad \delta_s = \left[\frac{\partial d_s}{\partial t} \right], \quad \varphi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]. \quad (7.2)$$

A amplitude dos vetores \mathbf{a}_f e \mathbf{a}_s são os saltos da aceleração dos constituintes fluido e sólido. Como as descontinuidades ocorrem nessas derivadas, essas ondas são classificadas como *ondas de aceleração*. Os demais saltos são das funções escalares densidade do fluido, densidades do sólido e porosidade do meio, respectivamente.

Utilizando as condições de compatibilidade geométrica e cinemática (7.1),

podemos determinar o salto de cada uma das seguintes quantidades físicas:

$$\begin{aligned}
[\text{grad}v_f] &= -\frac{1}{U}\mathbf{a}_f \otimes \mathbf{n}, & [\text{grad}v_s] &= -\frac{1}{U}\mathbf{a}_s \otimes \mathbf{n}, \\
[\text{grad}d_f] &= -\frac{1}{U}\delta_f\mathbf{n}, & [\text{grad}d_s] &= -\frac{1}{U}\delta_s \otimes \mathbf{n}, \\
[\text{grad}\phi] &= -\frac{1}{U}\varphi\mathbf{n}, & [\text{grad}F_s] &= \frac{1}{U^2}\mathbf{a}_s \otimes F^T\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

A velocidade relativa $V = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s = 0$ desaparece na frente de onda, uma vez que, imediatamente à frente da propagação da onda, o meio ainda se encontra em repouso.

Podemos substituir as equações de movimento (5.10)₁ por (5.12) da teoria linear:

$$\begin{aligned}
d_f\dot{\mathbf{v}}_f + \text{grad}P + \mathbf{r} &= d_f\mathbf{g}, \\
(1 - \phi)(d_s\dot{\mathbf{v}}_s - d_f\dot{\mathbf{v}}_f) &= \text{div}\bar{T}_s + \mathbf{r} + (1 - \phi)(d_s - d_f)\mathbf{g}.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

no sistema de equações de governo (6.5),(6.7) e (6.9), sem perda de generalidade.

7.2 Meio Poroso com Constituinte Sólido Incompressível

Nesta seção exibiremos como é utilizado a teoria da seção anterior para a obter os resultados em [31], em que foi demonstrado a existência de duas ondas longitudinais para o modelo poroelástico. Consideraremos para este fim, apenas o caso com constituinte sólido incompressível (d_s constante) para o sistema de equações:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial(\phi d_f)}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad}(\phi d_f) + \phi d_f \text{div}\mathbf{v}_f &= 0, \\
-\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad}\phi\right) + (1 - \phi)\text{div}\mathbf{v}_s &= 0, \\
d_f\dot{\mathbf{v}}_f + \text{grad}P + \mathbf{r} &= d_f\mathbf{g}, \\
(1 - \phi)(d_s\dot{\mathbf{v}}_s - d_f\dot{\mathbf{v}}_f) - \text{div}\bar{T}_s - \mathbf{r} &= (1 - \phi)(d_s - d_f)\mathbf{g}.
\end{aligned} \right. \tag{7.5}$$

O resultado é obtido utilizando as relações (7.2) e (7.3) no sistema acima com as seguintes abreviações das derivadas parciais,

$$P_A = \frac{\partial P}{\partial A}, \quad H_A = \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial A}$$

e, observando a equação (6.5),

$$\mathbf{r} = RV - \frac{P}{d_f} \text{grad} d_f + d_f \text{grad} \psi_f^0 = RV + R_{d_f} \text{grad} d_f + R_\phi \text{grad} \phi + R_{F_s} \cdot \text{grad} F_s,$$

tomando o salto do sistema (7.5) escrevemos,

$$\begin{cases} U d_f \varphi + U \phi \delta_f - \phi d_f (\mathbf{a}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ U \varphi + (1 - \phi) (\mathbf{a}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ U (P_\phi + R_\phi) \varphi \mathbf{n} + U (P_{d_f} + R_{d_f}) \delta_f \mathbf{n} - U^2 d_f \mathbf{a}_f - \hat{\Pi} \mathbf{a}_s = 0, \\ U (R_\phi I + H_\phi) \varphi \mathbf{n} + U (R_{d_f} I + H_{d_f}) \delta_f \mathbf{n} - U^2 (1 - \phi) (d_f \mathbf{a}_f - d_s \mathbf{a}_s) - \hat{Q} \mathbf{a}_s = 0, \end{cases} \quad (7.6)$$

onde definimos,

$$\hat{\Pi}_{ik} = (R_{F_s} + P_{F_s})_{ka} F_s^{ja} n_j n_i, \quad \hat{Q}_{ik} = (\delta_{ij} (R_{F_s})_{ka} + (H_{F_s})_{ijka}) F_s^{la} n_l n_j, \quad (7.7)$$

em componentes cartesianas.

7.2.1 Ondas de Aceleração Longitudinais

Vamos supor que aceleração dos constituintes fluido e sólido são paralelos ao vetor normal \mathbf{n} . Logo,

$$\mathbf{a}_f = \hat{a}_f \mathbf{n}, \quad \mathbf{a}_s = \hat{a}_s \mathbf{n},$$

ou seja, os vetores amplitudes de aceleração do fluido e do sólido estão alinhados com a direção de propagação da onda.

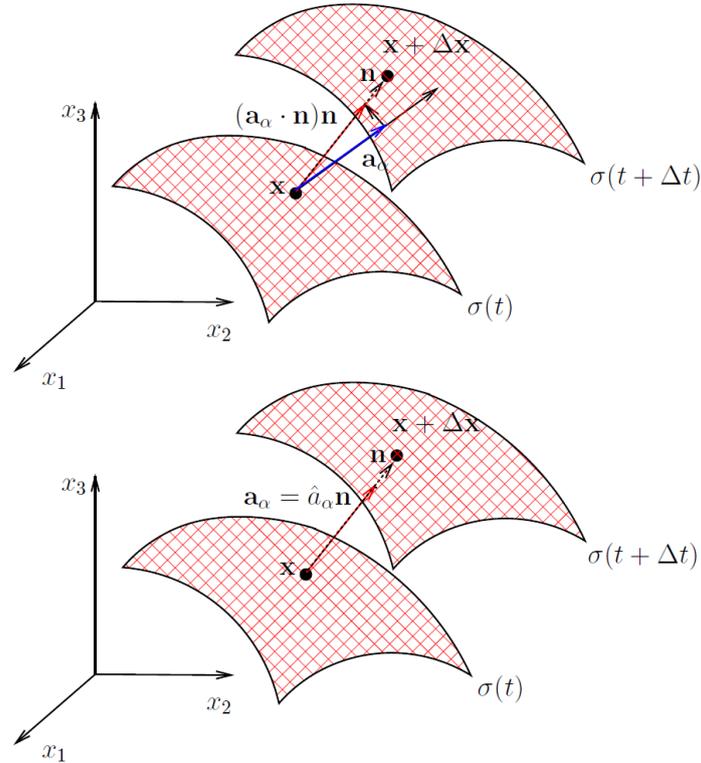


Figura 7.2: A imagem superior mostra que a direção da aceleração da onda pode não ser alinhada à direção do vetor normal \mathbf{n} . Na imagem inferior, realizamos a suposição feita para ondas longitudinais, ou seja, além da aceleração ser paralela ao vetor deslocamento $\Delta \mathbf{x}$, essa direção está alinhada com o vetor normal da superfície $\sigma(t)$.

Considerando a seguinte definição,

$$\hat{P}_\phi = P_\phi + R_\phi, \quad \hat{P}_{d_f} = P_{d_f} + R_{d_f}, \quad \hat{H}_\phi = R_\phi + \mathbf{n} \cdot H_\phi \mathbf{n}, \quad \hat{H}_{d_f} = R_{d_f} + \mathbf{n} \cdot H_{d_f} \mathbf{n},$$

o sistema (7.6) pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} Ud_f & U\phi & -\phi d_f & 0 \\ U & 0 & 0 & (1-\phi) \\ U\hat{P}_\phi & U\hat{P}_{d_f} & -U^2 d_f & -\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi} \mathbf{n} \\ U\hat{H}_\phi & U\hat{H}_{d_f} & -U^2(1-\phi)d_f & U^2(1-\phi)d_s - \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta_f \\ \hat{a}_f \\ \hat{a}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Como desejamos obter soluções não triviais para o sistema (7.8), então a matriz de coeficientes deve ser singular. Os casos em que $U = 0$, bem como $\hat{a}_f = \hat{a}_s = 0$, não são interessantes. Dessa forma, estamos procurando por movimentos de onda longitudinais tais que $U \neq 0$. Portanto,

$$\det \begin{bmatrix} d_f & \phi & -\phi & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (1-\phi) \\ \hat{P}_\phi & \hat{P}_{d_f} & -U^2 & -\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi} \mathbf{n} \\ \hat{H}_\phi & \hat{H}_{d_f} & -U^2(1-\phi) & U^2(1-\phi)d_s - \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} \end{bmatrix} = 0, \quad (7.9)$$

onde o determinante foi simplificado e o polinômio característico proveniente é biquadrado em U e tem a forma:

$$aU^4 + bU^2 + c = 0,$$

com coeficientes:

$$a = \phi(1-\phi)d_s,$$

$$b = -\phi(\mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n}) + (1-\phi)\phi(\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi} \mathbf{n}) + (1-\phi)^2\phi\hat{P}_\phi - (1-\phi)(\phi d_s + (1-\phi)d_f)\hat{P}_{d_f} + (1-\phi)(d_f\hat{H}_{d_f} - \phi\hat{H}_\phi),$$

$$c = \phi\hat{P}_{d_f}(\mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n}) - \phi\hat{H}_{d_f}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi} \mathbf{n} - (1-\phi)\phi(\hat{P}_\phi\hat{H}_{d_f} - \hat{P}_{d_f}\hat{H}_\phi).$$

Resolvendo a equação biquadrada para U , temos quatro soluções reais. Duas raízes negativas que desprezaremos e duas raízes positivas que representam a velocidade das ondas longitudinais no corpo poroso. Exibir explicitamente as raízes desse polinômio na forma original é um processo muito trabalhoso, pois existe a dependência de vários parâmetros constitutivos que são coeficientes da equação. Entretanto, podemos exibir a velocidade das ondas longitudinais considerando um caso simples ao realizar algumas hipóteses nas relações constitutivas da equação anterior.

Vamos considerar que a energia livre em equilíbrio seja apenas uma função da densidade de massa real do fluido e que o tensor de tensão efetiva seja apenas

uma função do gradiente de deformação do constituinte sólido,

$$\psi_f^0 = \psi_f^0(d_f), \quad \bar{T}_s = \bar{T}_s(F_s), \quad (7.10)$$

temos

$$H_\phi = 0, \quad H_{d_f} = 0, \quad R_\phi = 0, \quad R_{F_s} = 0.$$

Além disso, assumindo que a energia livre $\psi_f^0(d_f)$ seja idêntica à de um fluido puro nos poros e que a pressão em poro seja da forma:

$$P = d_f^2 \frac{\partial \psi_f^0}{\partial d_f}, \quad \text{e, portanto,} \quad P_\phi = 0, \quad P_{F_s} = 0,$$

da consideração realizada em (6.2), temos:

$$R_{d_f} = -\left(\frac{P}{d_f} - d_f \frac{\partial \psi_f^0}{\partial d_f}\right) = 0.$$

Com essas simplificações, temos de (7.10):

$$\begin{aligned} \hat{P}_\phi &= 0, \quad \hat{\Pi} = 0, \quad \hat{H}_\phi = 0, \quad \hat{H}_{d_f} = 0, \\ \hat{Q}_{ik} &= (H_{F_s})_{ijk} F_s^{la} n_l n_j = L_{ijkl} n_j n_l. \end{aligned} \quad (7.11)$$

E da igualdade (5.2),

$$L_{ijkl} = \frac{\partial T_s^{ij}}{\partial F_s^{ka}} F_s^{la}$$

que é o tensor de elasticidade do constituinte sólido. Usualmente assumi-se, que o tensor de elasticidade seja fortemente elíptico e a compressibilidade seja positiva, ou seja,

$$P_{d_f} = \frac{\partial P}{\partial d_f} > 0, \quad L_{ijkl} u_i v_j u_k v_l > 0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0. \quad (7.12)$$

Essa condição implica que a velocidade de propagação seja real e não nula.

A equação biquadrada pode ser escrita da seguinte forma:

$$(U^2 - c_1^2)(U^2 - c_2^2) - \left(\frac{d_f}{d_s} \frac{1 - \phi}{\phi} c_2^2\right) U^2 = 0, \quad (7.13)$$

onde por (7.13)

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}}{(1-\phi)d_s}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial d_f}},$$

são as velocidades das ondas longitudinais no meio sólido elástico e no fluido elástico respectivamente. Nesse caso, ao resolvermos a equação (7.13), as velocidades das ondas longitudinais devem sofrer modificações devido à presença do último termo.

Na presente formulação de meio poroso saturado, com constituinte sólido incompressível, é razoável esperar que as velocidades das ondas longitudinais sejam as velocidades das ondas $P1$ e $P2$ dadas pela condição de propagação no caso geral (7.9) com adição dos termos anulados para o estudo da existência no caso simples.

7.2.2 Ondas de Aceleração Transversais

Para ondas transversais, vamos supor que a direção do vetor aceleração seja perpendicular ao vetor deslocamento da onda, ou seja, $\mathbf{a}_f \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\mathbf{a}_s \cdot \mathbf{n} = 0$. Com essas hipóteses, as três primeiras equações do sistema de equações (7.6) resultam em:

$$\varphi = 0, \quad \delta_f = 0, \quad d_f \mathbf{a}_f = -\frac{1}{U^2} \hat{\Pi} \mathbf{a}_s,$$

e substituindo esses resultados na última equação, temos:

$$((\hat{Q} - (1-\phi)\hat{\Pi}) - (1-\phi)d_s U^2 I) \mathbf{a}_s = 0. \quad (7.14)$$

Tomando $\mathbf{a}_s = \hat{a}_s \mathbf{m}$, onde \mathbf{m} é um vetor unitário perpendicular à direção de propagação da onda, ou seja, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, segue de (7.14) a existência de uma onda transversal com velocidade de propagação dada pela relação:

$$(1-\phi)d_s U^2 = \mathbf{m} \cdot (\hat{Q}(1-\phi)\hat{\Pi}) \mathbf{m}$$

Se realizarmos as mesmas hipóteses (7.10) e (7.11) para o caso simples, obtemos a velocidade de propagação da onda de cisalhamento no corpo elástico:

$$U = c_s = \sqrt{\frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}}{(1 - \phi)d_s}}.$$

Os demais modelos de propagação de onda de aceleração no meio poroelástico podem ser consultados em [31].

Obter as velocidades de propagação e decaimento da frente de onda para as ondas de aceleração pode ser uma tarefa muito trabalhosa. Portanto, o que faremos nas próximas seções é fornecer um modelo de propagação de onda no meio poroelástico que, assim como para as ondas de aceleração, exibam duas ondas longitudinais e uma transversal. A partir das quais poderemos estudar o comportamento da propagação das ondas no meio em termos das velocidades de fase e decaimento da frente de onda.

8 ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE ONDA EM MEIO POROSO VIA ONDAS HARMÔNICAS

Neste capítulo, vamos fornecer modelos alternativos de propagação de onda em um meio poroelástico saturado. As leis de propagação de onda descrevem por meio da análise da resposta do material no qual ela se propaga a natureza do mesmo. Essas leis fornecem uma descrição local e instantânea de como o material reage a pequenas mudanças ou impulsos em uma minúscula região. Estudar pequenos efeitos no movimento de um corpo de maneira global é muito complexo, mesmo sob considerações de uma teoria simples. Com o objetivo de ganhar alguma intuição para esses problemas é necessário realizar algumas limitações na forma do movimento, do qual importantes informações podem ser extraídas. Para esta finalidade serão realizadas algumas hipóteses. A primeira delas consiste na linearização dos sistemas de equações descritos em (6.5), (6.7) e (6.9). A segunda hipótese, vem do fato de que as pequenas deformações em um corpo material, podem ser consideradas como um deslocamento de uma onda com pequenas amplitudes. Dessa forma, podemos modelar esse deslocamento como uma onda harmônica e supor que o produto dessas amplitudes seja desprezível.

Uma explicação para a abordagem do fenômeno sob o ponto de vista de ondas harmônicas baseia-se na existência de uma interpretação que é análoga à modelagem do fenômeno de propagação de onda através do deslocamento de uma superfície singular. Para isso, basta lembrar que no caso das ondas de aceleração supomos que a propagação da onda ocorria pela descontinuidade nas segundas derivadas de certas quantidades, por exemplo, deslocamento. Essa descontinuidade pode ser entendida como o efeito de um estímulo instantâneo nesse campo, induzido por deformações no meio. Essas deformações se propagam no meio como ondas e provocam uma

mudança brusca nessa quantidade. Portanto, para o caso das ondas harmônicas, essas deformações que são induzidas por algum tipo de estímulo no meio, podem gerar altas frequências em uma certa região do material e serem interpretadas como "descontinuidades". Dessa forma, ao supor que um dado campo se desloca como uma onda harmônica, podemos inferir que por exemplo o deslocamento, tenha frequência muito alta em uma determinada região, podendo ser pensado como um salto (ou "descontinuidade") desse campo através da frente de onda.

O estudo qualitativo e quantitativo das velocidades de fase e atenuação para as ondas P1, P2 e S dos modelos de propagação de ondas harmônicas a seguir será realizado nas subseções contidas no capítulo 10, em que apresentamos os resultado numéricos.

8.1 Sistemas de Equações via Ondas Harmônicas com Constituinte Sólido Incompressível

A análise das ondas harmônicas longitudinais e transversais é realizada sob as hipóteses (7.10), (7.11) e com o sistema de equações para o meio poroso com constituinte sólido incompressível.

Variáveis independentes: $\{\phi, d_f, \chi_f, \chi_s\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\phi d_f)}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad}(\phi d_f) + \phi d_f \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \phi\right) + (1 - \phi) \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \text{grad} P + \mathbf{r} = d_f \mathbf{g}, \\ (1 - \phi) \left(d_s \dot{\mathbf{v}}_s - d_f \dot{\mathbf{v}}_f\right) - \text{div} \bar{\mathbf{T}}_s - \mathbf{r} = (1 - \phi)(d_s - d_f) \mathbf{g}. \end{array} \right. \quad (8.1)$$

Variáveis constitutivas:

$$\bar{T}_s = \bar{T}_s(\phi, d_f, F_s), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, d_f, F_s, V), \quad P = P(\phi, d_f, F_s).$$

Considerando o sistema (8.1), onde substituimos as duas últimas equações diferenciais parciais do modelo (6.5), pelas equações (5.10)₁₋₂ e desprezamos os termos de segunda ordem nas Eqs. (5.7, 5.8, 5.10), podemos escrever,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\phi d_f)}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad}(\phi d_f) + \phi d_f \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \phi\right) + (1 - \phi) \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f\right) + \text{grad} P + (RV + R_{d_f} \text{grad} d_f + R_\phi \text{grad} \phi + R_{F_s} \cdot \text{grad} F_s) = 0, \\ (1 - \phi) \left(d_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \mathbf{v}_s\right) - d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f\right)\right) - \text{div} \bar{T}_s \\ \quad - (RV + R_{d_f} \text{grad} d_f + R_\phi \text{grad} \phi + R_{F_s} \cdot \text{grad} F_s) = 0, \end{array} \right. \quad (8.2)$$

onde

$$\mathbf{r} = RV - \frac{P}{d_f} \text{grad} d_f + d_f \text{grad} \psi_f^0 = RV + R_{d_f} \text{grad} d_f + R_\phi \text{grad} \phi + R_{F_s} \cdot \text{grad} F_s$$

e mantemos as definições:

$$\frac{\partial P}{\partial A} = P_A, \quad \frac{\partial \bar{T}_s}{\partial A} = H_A,$$

para denotar as derivadas parciais com relação às quantidades A que podem ser tensoriais, vetoriais ou escalares. Reescrevendo o sistema acima em termos de com-

ponentes cartesianas, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} d_f \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial d_f}{\partial t} + v_i^f (\phi_{,i} d_f + \phi d_{f,i}) + \phi d_f v_{i,i}^f = 0, \\ - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i^s \phi_{,i} \right) + (1 - \phi) v_{i,i}^s = 0, \\ d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f \right) + (P_\phi \phi_{,i} + P_{d_f} d_{f,i} + P_{F_{s,jk}} F_{jk,i}^s) + \\ \quad (R(v_i^f - v_i^s) + R_{d_f} d_{f,i} + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_{s,jk}} F_{jk,i}^s) = 0, \\ (1 - \phi) \left(d_s \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial t} + v_j^s v_{i,j}^s \right) - d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f \right) \right) - (H_{\phi ij} \phi_{,j} + H_{d_f ij} d_{f,j} + H_{F_{sijkl}} F_{jk,l}^s) - \\ \quad (R(v_i^f - v_i^s) + R_{d_f} d_{f,i} + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_{s,jk}} F_{jk,i}^s) = 0. \end{array} \right. \quad (8.3)$$

O sistema anterior não é linear nas variáveis independentes, de forma que obter soluções analíticas para o mesmo se torna uma tarefa muito complicada. Para contornar essa dificuldade, podemos realizar algumas considerações para o deslocamento das quantidade $\{\phi, d_f, \chi_f, \chi_s\}$ a fim de obter alguns resultados como realizado na seção anterior, onde discutimos a propagação do ponto de vista de ondas de aceleração.

Vamos admitir que o sistema esteja em equilíbrio em $t = t_0$ e que as variáveis independentes $\{\phi, d_f, \chi_f, \chi_s\}$ sejam dadas por:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \bar{\phi}(\mathbf{x}, t_0) + \hat{\phi} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}, \\ d_f(\mathbf{x}, t) &= \bar{d}_f(\mathbf{x}, t_0) + \hat{d}_f e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}, \\ \chi_f(\mathbf{X}_f, t) &= \bar{\chi}_f(\mathbf{X}_f, t_0) + \hat{\chi}_f e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}, \\ \chi_s(\mathbf{X}_s, t) &= \bar{\chi}_s(\mathbf{X}_s, t_0) + \hat{\chi}_s e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

onde $\hat{\phi}, \hat{d}_f, \hat{\chi}_f, \hat{\chi}_s$ são vetores de amplitudes constantes, ω é uma dada frequência, $i = \sqrt{-1}$ e \mathbf{k} é o vetor de onda complexo. Isso significa que $k := \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} = \text{Re}(k) + i\text{Im}(k)$ é o número de onda complexo e definimos a direção de propagação, $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, onde \mathbf{n} é um vetor unitário na direção da propagação.

As funções em (8.4) podem ser entendidas como funções que se dividem nas contribuições de onda progressiva e de atenuação dadas, respectivamente, por:

$$e^{i(\omega t - \text{Re}(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}, \quad e^{\text{Im}(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}},$$

de modo que,

$$e^{i(\omega t - \text{Re}(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})} e^{\text{Im}(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} = e^{i(\omega t - \text{Re}(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - i\text{Im}(k)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})} = e^{i(\omega t - k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})},$$

e dessa forma, $U = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$ é a *velocidade de fase* e $\text{Im}(k)$ é o *fator de atenuação da onda*.

Vamos supor que o corpo na configuração de referência, no qual a onda se propaga, esteja homogeneamente deformado em seu estado de repouso. Portanto, no instante $t = t_0$, $\bar{\phi}$, \bar{d}_f , $\bar{\chi}_f$ e $\bar{\chi}_s$ são constantes que representam quantidades físicas no estado de equilíbrio do meio.

Por conveniência, denotaremos as variáveis livres em (8.4) de forma mais compacta por:

$$\phi = \bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta, \quad d_f = \bar{d}_f + \hat{d}_f e^\zeta, \quad \chi_f = \bar{\chi}_f + \hat{\chi}_f e^\zeta, \quad \chi_s = \bar{\chi}_s + \hat{\chi}_s e^\zeta,$$

com $\zeta = i(\omega t - k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} = \chi_s(\mathbf{X}_s, t_0)$. Essas soluções descrevem a propagação de ondas monocromáticas em um meio infinito, cuja frente de onda é perpendicular ao vetor \mathbf{n} .

Com essas hipóteses e definições, vamos deduzir algumas identidades necessárias para o restante do texto. A partir do movimento do constituinte sólido, temos:

$$\frac{\partial \chi_s}{\partial t} = i\omega \hat{\chi}_s e^\zeta, \quad \text{logo} \quad \mathbf{v}_s = \hat{\mathbf{v}}_s e^\zeta, \quad \text{em que} \quad \hat{\mathbf{v}}_s = i\omega \hat{\chi}_s. \quad (8.5)$$

Derivando a função de movimento do constituinte sólido em relação à coordenada material \mathbf{X}^s ,

$$\chi_{i,a}^s = \chi_{i,a}(\mathbf{X}^s, t_0) - ikn_i x_{i,a} \hat{\chi}_j^s e^\zeta, \quad \text{temos} \quad F_{ia}^s = F_{0ia}^s - \frac{k}{\omega} \hat{v}_j^s n_i F_{0s}^{ia} e^\zeta,$$

de onde segue que

$$F_s = F_0^s - \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_{0s}^T \mathbf{n} e^\zeta. \quad (8.6)$$

O gradiente de deformação, dado pelo tensor constante $F_{0ia}^s = \frac{\partial \chi_i^s(X_a^s, t_0)}{\partial X_a^s}$, representa uma deformação homogênea do meio em seu estado de equilíbrio.

Tomando a derivada do gradiente de deformação F_s , com respeito à configuração deformada, $\mathbf{x} = \chi_s(\mathbf{X}, t_0)$, obtemos o segundo gradiente de deformação do constituinte sólido,

$$F_s = F_0^s - \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{v}}_s F_{0s}^T \mathbf{n} e^\zeta$$

$$F_{ia,k}^s = (F_{0ia}^s - \frac{k}{\omega} \hat{v}_i^s n_j F_{0ja}^s e^\zeta)_{,k} = i \frac{k^2}{\omega} \hat{v}_i^s n_j F_{0ja}^s n_k e^\zeta$$

que fornece:

$$\text{grad} F_s = i \frac{k^2}{\omega} \hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_{0s}^T \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} e^\zeta. \quad (8.7)$$

Uma vez que o movimento do constituinte fluido é descrito com referência à configuração atual $\mathbf{x} = \chi_s(\mathbf{X}_s, t)$, ocupada pela matriz sólida, podemos definir a velocidade do fluido como $\mathbf{v}_f = \hat{\mathbf{v}}_f e^\zeta$ e obter as mesmas relações acima.

Dessa forma, podemos reescrever as equações (8.3)₍₁₋₄₎ em termos das identidades acima explicitadas.

Para a primeira equação do sistema (8.3)₍₁₋₄₎, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} d_f + \phi \frac{\partial d_f}{\partial t} + v_i^f (\phi_{,i} d_f + \phi d_{f,i}) + \phi d_f v_{i,i}^f = 0$$

$$i\omega \hat{\phi} e^\zeta (\bar{d}_f + \hat{d}_f e^\zeta) + i\omega (\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta) \hat{d}_f e^\zeta + \hat{v}_i^f e^\zeta [(-ikn_i) \hat{\phi} e^\zeta (\bar{d}_f + \hat{d}_f e^\zeta) -$$

$$ikn_i \hat{d}_f e^\zeta (\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)] - ikn_i \hat{v}_i^f e^\zeta (\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta) (\bar{d}_f + \hat{d}_f e^\zeta) = 0$$

$$\frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f n_i \hat{v}_i^f = 0,$$

onde, desprezando todos os produtos de amplitudes de segunda ordem ou superior e simplificando o termo e^ζ , comuns a todas as parcelas, obtemos:

$$\frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (8.8)$$

Vamos proceder de forma análoga nas equações (8.3)₍₂₋₄₎.

Equação (8.3)₂:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + v_i^s\phi_{,i}\right) + (1 - \phi)v_{i,i}^s = 0, \\ & -(ik\omega\hat{\phi}e^\zeta - ikn_i\hat{\phi}\hat{v}_i^s e^{2\zeta}) - ikn_i(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}))\hat{v}_i^s e^\zeta = 0 \\ & \hat{\phi} + \frac{k}{\omega}n_i\hat{v}_i^s - \frac{k}{\omega}\bar{\phi}\hat{v}_i^s n_i = 0, \end{aligned}$$

temos:

$$\frac{\omega}{k}\hat{\phi} + (1 - \bar{\phi})\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (8.9)$$

Equação (8.3)₍₃₋₄₎:

$$\begin{aligned} & d_f\left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f\right) + (P_\phi\phi_{,i} + P_{d_f}d_{f,i} + P_{F_s j k}F_{j k,i}^s) + \\ & (R(v_i^f - v_i^s) + R_{d_f}d_{f,i} + R_\phi\phi_{,i} + R_{F_s j k}F_{j k,i}^s) = 0 \\ & (\bar{d}_f + \hat{d}_f e^\zeta)(i\omega\hat{v}_i^s e^\zeta - ikn_i(\hat{v}^f)_i^2 e^{2\zeta}) + \\ & (-ikn_i P_\phi\hat{\phi}e^\zeta - ikn_i P_{d_f}\hat{d}_f e^\zeta + i\frac{k^2}{\omega}P_{F_s k a}\hat{v}_s^k F_s^{j a}n_j n_i e^\zeta) + \\ & (R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s)e^\zeta - ikn_i R_{d_f}\hat{d}_f e^\zeta - ikn_i R_\phi\hat{\phi}e^\zeta + i\frac{k^2}{\omega}R_{F_s k a}\hat{v}_s^k F_s^{j a}n_j n_i e^\zeta) = 0 \\ & i\omega\bar{d}_f\hat{v}_i^f - ikn_i\hat{\phi}P_\phi - ikn_i\hat{d}_f P_{d_f} - ikn_i\hat{d}_f R_{d_f} - ikn_i\hat{\phi}R_\phi + \\ & i\frac{k^2}{\omega}P_{F_s k a}\hat{v}_s^k F_s^{j a}n_j n_i + i\frac{k^2}{\omega}R_{F_s k a}\hat{v}_s^k F_s^{j a}n_j n_i + R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) = 0, \end{aligned}$$

multiplicando toda a equação por $\frac{\omega}{ik^2}$, temos:

$$\frac{\omega^2}{k^2}\bar{d}_f\hat{\mathbf{v}}_f - \frac{\omega}{k}\hat{\phi}(P_\phi + R_\phi)\mathbf{n} - \frac{\omega}{k}\hat{d}_f(P_{d_f} + R_{d_f})\mathbf{n} + ((P_{F_s} + R_{F_s}) \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_s^T \mathbf{n}))\mathbf{n} + \frac{\omega}{ik^2}R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \quad (8.10)$$

Equação (8.3)₍₄₋₄₎:

$$\begin{aligned}
& (1 - \phi) \left(d_s \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial t} + v_j^s v_{i,j}^s \right) - d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f \right) \right) - (H_{\phi ij} \phi_{,j} + H_{d_f ij} d_{f,j} + H_{F_s ijkl} F_{jk,l}^s) - \\
& (R(v_i^f - v_i^s) + R_{d_f} d_{f,i} + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s jk} F_{jk,i}^s) = 0 \\
& (1 - \bar{\phi} - \hat{\phi} e^\zeta) (i\omega \bar{d}_s \hat{v}_i^s e^\zeta - i\omega (\bar{d}_f + \hat{d}_f e^\zeta) \hat{v}_i^f e^\zeta) + \\
& \quad i k n_j H_{\phi ij} \hat{\phi} e^\zeta + i k n_j H_{d_f ij} \hat{d}_f e^\zeta - i \frac{k^2}{\omega} H_{F_s ijka} \hat{v}_s^k n_j x_s^{l,a} n_l e^\zeta - \\
& \quad R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta + i k n_i R_{d_f} \hat{d}_f e^\zeta + i k n_i R_\phi \hat{\phi} e^\zeta - i \frac{k^2}{\omega} R_{F_s ka} \hat{v}_s^k x_s^{j,a} n_j n_i e^\zeta = 0 \\
& (1 - \bar{\phi}) i\omega (\bar{d}_s \hat{v}_i^s - \bar{d}_f \hat{v}_i^f) e^\zeta + i k n_j (H_\phi + \delta R_\phi)_{ij} \hat{\phi} e^\zeta + i k n_j (H_{d_f} + \delta R_{d_f})_{ij} \hat{d}_f e^\zeta - \\
& \quad i \frac{k^2}{\omega} (((H_{F_s})_{ijka} + \delta_{ij} R_{F_s ka}) \hat{v}_s^k F^{la} n_l) n_j e^\zeta - R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta = 0,
\end{aligned}$$

multiplicando toda a equação por $\frac{\omega}{ik^2}$, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s - \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f) + \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (H_\phi + IR_\phi) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (H_{d_f} + IR_{d_f}) \mathbf{n} - \\
& ((H_{F_s} + I \otimes R_{F_s}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_s^T \mathbf{n}) \mathbf{n} - \frac{\omega}{ik^2} R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0.
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Logo, o sistema (8.3) pode ser rescrito como um sistema linear nas variáveis $\{\hat{\phi}, \hat{d}_f, \hat{\mathbf{v}}_f, \hat{\mathbf{v}}_s\}$ da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n} = 0, \\
\frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n} = 0, \\
\frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (P_\phi + R_\phi) \mathbf{n} - \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (P_{d_f} + R_{d_f}) \mathbf{n} + ((P_{F_s} + R_{F_s}) \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_s^T \mathbf{n})) \mathbf{n} + \\
\frac{\omega}{ik^2} R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0, \\
\frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s - \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f) + \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (H_\phi + IR_\phi) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (H_{d_f} + IR_{d_f}) \mathbf{n} - \\
((H_{F_s} + I \otimes R_{F_s}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_s^T \mathbf{n}) \mathbf{n} - \frac{\omega}{ik^2} R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0.
\end{array} \right. \tag{8.12}$$

Definindo

$$\hat{\Pi}_{ik} = (R_{F_s} + P_{F_s})_{ka} F_s^{ja} n_j n_i, \quad \hat{Q}_{ik} = (\delta_{ij} R_{F_s ka} + (H_{F_s})_{ijka}) F_s^{la} n_l n_j,$$

temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (P_\phi + R_\phi) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (P_{d_f} + R_{d_f}) \mathbf{n} - \frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}_s = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (H_\phi + IR_\phi) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (H_{d_f} + IR_{d_f}) \mathbf{n} + \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s - \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f) \\ - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q} \hat{\mathbf{v}}_s = 0. \end{array} \right. \quad (8.13)$$

8.1.1 Onda Harmônica Plana Longitudinal com Constituinte Sólido Incompressível

Restringimos o estudo ao caso em que o vetor velocidade dos constituintes fluido e sólido são paralelos ao vetor normal à frente de onda, $\hat{\mathbf{v}}_f = \hat{v}_f \mathbf{n}$ e $\hat{\mathbf{v}}_s = \hat{v}_s \mathbf{n}$, respectivamente. Com essa hipótese, podemos escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f \hat{v}_f = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{v}_s = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \hat{P}_\phi + \frac{\omega}{k} \bar{d}_f \hat{P}_{d_f} - \frac{\omega^2}{k^2} \left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f \right) \hat{v}_f + \frac{\omega^2}{k^2} \left(\frac{R}{i\omega} - \frac{k^2}{\omega^2} \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi} \mathbf{n} \right) \hat{v}_s = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \hat{H}_\phi + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f \hat{H}_{d_f} - \frac{\omega^2}{k^2} \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_f + \frac{R}{i\omega} \right) \hat{v}_f \\ + \frac{\omega^2}{k^2} \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_s \frac{R}{i\omega} - \frac{k^2}{\omega^2} \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} \right) \hat{v}_s = 0. \end{array} \right. \quad (8.14)$$

onde,

$$\hat{P}_\phi = P_\phi + R_\phi, \quad \hat{P}_{d_f} = P_{d_f} + R_{d_f}, \quad \hat{H}_\phi = R_\phi + \mathbf{n} \cdot H_\phi \mathbf{n}, \quad \hat{H}_{d_f} = R_{d_f} + \mathbf{n} \cdot H_{d_f} \mathbf{n}.$$

Definindo $U = \frac{\omega}{k}$ e substituindo no sistema anterior,

$$\begin{cases} U\hat{\phi}\bar{d}_f + U\bar{\phi}\hat{d}_f - \bar{\phi}\bar{d}_f\hat{v}_f = 0, \\ U\hat{\phi} + (1 - \bar{\phi})\hat{v}_s = 0, \\ U\hat{\phi}\hat{P}_\phi + U\bar{d}_f\hat{P}_{d_f} - U^2\left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f\right)\hat{v}_f + U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right)\hat{v}_s = 0, \\ U\hat{\phi}\hat{H}_\phi + U\hat{d}_f\hat{H}_{d_f} - U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right)\hat{v}_f + U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}\right)\hat{v}_s = 0. \end{cases} \quad (8.15)$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} U\bar{d}_f & U\bar{\phi} & -\bar{\phi}\bar{d}_f & 0 \\ U & 0 & 0 & (1 - \bar{\phi}) \\ U\hat{P}_\phi & U\hat{P}_{d_f} & -U^2\left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f\right) & U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right) \\ U\hat{H}_\phi & U\hat{H}_{d_f} & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s + \frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{d}_f \\ \hat{v}_f \\ \hat{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Esse problema pode ser entendido como um problema de autovalores, em que devemos obter autovalores para os quais os autovetores associados não são nulos. Isso significa, que desejamos obter soluções não triviais para o sistema anterior, para isso devemos exigir que o determinante da matriz de coeficientes seja nulo

$$\det \begin{bmatrix} \bar{d}_f & \bar{\phi} & -\bar{\phi}\bar{d}_f & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (1 - \bar{\phi}) \\ \hat{P}_\phi & \hat{P}_{d_f} & -U^2\left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f\right) & U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right) \\ \hat{H}_\phi & \hat{H}_{d_f} & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s + \frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}\right) \end{bmatrix} = 0. \quad (8.17)$$

Essa condição nos fornece o seguinte polinômio característico biquadrado,

$$\begin{aligned} & U^4\left(-\phi(1 - \bar{\phi})d_s d_f - \frac{R}{i\omega}\left(\phi d_f + (d_s - d_f)\phi(1 - \bar{\phi})\right)\right) + \\ & U^2\left(\phi d_f \mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} - \phi(1 - \bar{\phi})d_f \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n} + ((1 - \bar{\phi})d_f + \phi d_s)(1 - \bar{\phi})d_f \hat{P}_{d_f} - \right. \\ & (1 - \bar{\phi})d_f^2 \hat{H}_{d_f} - (1 - \bar{\phi})^2 \phi d_f \hat{P}_\phi + (1 - \bar{\phi})\phi d_f \hat{H}_\phi + \\ & \left. \frac{R}{i\omega}\left(\phi \mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} - \phi \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n} + (1 - \bar{\phi})d_f \hat{P}_{d_f} - (1 - \bar{\phi})d_f \hat{H}_{d_f} + (1 - \bar{\phi})\phi \hat{P}_\phi + (1 - \bar{\phi})\phi \hat{H}_\phi + \right. \right. \\ & \left. \left. \phi d_f (\hat{P}_{d_f} - \hat{H}_{d_f})\right)\right) + \phi d_f (\hat{H}_{d_f} \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n} - \hat{P}_{d_f} \mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}) + (1 - \bar{\phi})\phi d_f (\hat{P}_\phi \hat{H}_{d_f} - \hat{H}_\phi \hat{P}_{d_f}) = 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Assim como no caso das ondas de aceleração, existem quatro raízes para a equação biquadrada anterior. Entretanto, somente as raízes positivas apresentam significado físico e mostram a existência de duas ondas longitudinais que se propagam pelo meio poroelástico.

Devemos notar que diversos termos na equação anterior não possuem interpretação física adequada, o que gera dificuldades na análise da propagação por meio das velocidades de fase e atenuação a serem realizadas posteriormente (Cap. 10). Para entender essa dificuldade, no Cap. 10 iremos resolver a equação anterior pondo o número de onda k em função de ω , $k = k(\omega)$, uma vez que $U = \frac{\omega}{k}$ e em função dos parâmetros materiais (coeficientes da relação de dispersão). Realizada essa etapa, tendo isolado k em função de ω e dos parâmetros materiais, usaremos a computação simbólica para obter as partes reais e as partes imaginárias. Desse modo, podemos obter uma função para a velocidade de fase, que é definida tomando $v_f = \frac{\omega}{\text{Re}k(\omega)}$ e uma função para a atenuação, definida como $K = \text{Im}k(\omega)$. Logo, para obter os gráficos dessas funções, todos os coeficientes presentes devem possuir significado físico para que possamos analisar esses resultados.

Com o objetivo de estudar o comportamentos tanto da velocidade de fase quanto da atenuação das ondas longitudinais, será necessário recuperar a mesma ideia utilizada para as ondas de aceleração, fornecendo um caso mais simples, em que muitos dos termos da Eq. (8.18) serão anulados.

Realizando as mesmas hipóteses (7.10) e (7.11), onde consideramos as seguintes relações constitutivas:

$$\psi_f^0 = \psi_f^0(d_f), \quad \bar{T}_s = \bar{T}_s(F_s),$$

tais que

$$H_\phi = 0, \quad H_{d_f} = 0, \quad R_\phi = 0, \quad R_{F_s} = 0,$$

e considerando que a energia livre no fluido $\psi_f^0(d_f)$ é idêntica a um fluido puro e que a pressão em poro é dada por

$$P = d_f^2 \frac{\partial \psi_f^0}{\partial d_f}, \quad \text{e, portanto,} \quad P_\phi = 0, \quad P_{F_s} = 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\hat{P}_\phi &= 0, & \hat{\Pi} &= 0, & \hat{H}_\phi &= 0, & \hat{H}_{d_f} &= 0, \\ \hat{Q}_{ik} &= (H_{F_s})_{ijk\alpha} F_s^{l\alpha} n_l n_j = L_{ijkl} n_j n_l.\end{aligned}$$

Com as consequências acima, obtemos o seguinte polinômio característico:

$$\begin{aligned}U^4 \left(\phi(1-\phi)d_f d_s + \frac{R}{i\omega} \left(\phi(1-\phi)d_s + \phi^2 d_f \right) \right) + \\ U^2 \left(-\phi d_f \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} - (\phi d_s + (1-\phi)d_f)(1-\phi)d_f \hat{P}_{d_f} - \right. \\ \left. \frac{R}{i\omega} \left(\phi \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} + d_f \hat{P}_{d_f} \right) \right) + \phi d_f \hat{P}_{d_f} \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} = 0.\end{aligned}\quad (8.19)$$

Podemos escrever a equação biquadrada como:

$$\left(U^2 - \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n}}{(1-\phi)d_s} \right) \left(U^2 - \hat{P}_{d_f} \right) - \frac{(1-\phi)d_f}{\phi} \frac{d_f}{d_s} \hat{P}_{d_f} U^2 + \frac{R}{i\omega} (\gamma U^4 - \eta U^2) = 0, \quad (8.20)$$

onde

$$\gamma = \frac{(1-\phi)d_s + \phi d_f}{(1-\phi)d_f d_s}, \quad \eta = \frac{c_1^2}{d_f} + \frac{c_2^2}{\phi(1-\phi)d_s},$$

que pode ser escrita como:

$$(U^2 - c_1^2)(U^2 - c_2^2) - \frac{(1-\phi)d_f}{\phi} \frac{d_f}{d_s} c_2^2 U^2 + \frac{R}{i\omega} (\gamma U^4 - \eta U^2) = 0,$$

com

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n}}{(1-\phi)d_s}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\partial \hat{P}}{\partial d_f}},$$

velocidades elásticas no sólido e fluido, respectivamente.

Em nossa análise da propagação das ondas P1 e P2, utilizaremos a equação (8.20) ao invés do polinômio dado pela Eq. (8.18). Essa escolha é motivada pela ausência dos parâmetros materiais dos quais não dispomos de dados na literatura. Um ponto que também deve ser mencionado é o fato de ocorrer um desacoplamento entre as tensões parciais dos constituintes sólido e fluido do modelo de propagação quando consideramos o caso simples, (7.10) e (7.11), dado pelas relações constitutivas $\psi_f^0(d_f)$ e $\bar{T}_s(F_s)$. Entretanto, ressaltamos que essa limitação não é teórica, mas determinada pela necessidade de obter resultados que possam ser comparados com os resultados de outros modelos de propagação de ondas harmônicas planas em meios poroelásticos. Esse acoplamento foi proposto na teoria clássica de *M.A. Biot*

em [9, 10], de forma intuitiva e posteriormente formalizado do ponto de vista da Termodinâmica do Contínuo por *K. Wilmanski* em [42].

A determinação analítica da convergência para altas e baixas frequências das relações de dispersão abaixo, permite um meio de verificar se as soluções obtidas para as velocidades de fase, por meio da computação simbólica, são compatíveis com esses resultados teóricos. Nesse sentido, devemos notar que quando $\omega \rightarrow \infty$ para a equação (8.20), recuperamos a equação (7.13), obtida para as ondas de aceleração em [31]

$$(U^2 - c_1^2)(U^2 - c_2^2) - \left(\frac{d_f}{d_s} \frac{1 - \phi}{\phi} c_2^2 \right) U^2 = 0. \quad (8.21)$$

E quando $\omega \rightarrow 0$, temos:

$$U^2 = \frac{\phi(1 - \phi)d_s c_1^2 + c_2^2 d_f}{\phi(1 - \phi)d_s + \phi^2 d_f} \quad \text{ou} \quad U = 0. \quad (8.22)$$

As condições acima mostram que as velocidades de fase das ondas *P1* e *P2* possuem assíntotas horizontais, Eq. (8.21). Já a equação (8.22), mostra a existência da onda *P1*, para frequências muito baixas e a ausência da onda *P2* para frequências próximas de zero.

De um modo geral, as velocidades de propagação das ondas *P1* e *P2* sofrem alterações devido a presença do último termo na relação de dispersão 8.20. Essa influência também constará nos outros modelos a serem discutidos posteriormente.

8.1.2 Ondas Transversais com Constituinte Sólido Incompressível

Do sistema de equações de governo para meio poroso saturado com densidade do constituinte sólido (d_s) constante, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (P_\phi + R_\phi) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (P_{d_f} + R_{d_f}) \mathbf{n} - \frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}_s = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} (H_\phi + IR_\phi) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} \hat{d}_f (H_{d_f} + IR_{d_f}) \mathbf{n} + \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s - \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f) \\ - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q} \hat{\mathbf{v}}_s = 0. \end{array} \right. \quad (8.23)$$

Supondo $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ e $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ tal que $\hat{\mathbf{v}}_f = \hat{v}_f \mathbf{m}$ e $\hat{\mathbf{v}}_s = \hat{v}_s \mathbf{m}$, para o sistema de equações (8.23), segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f (\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n}) &= 0 \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f - \bar{\phi} \bar{d}_f (\hat{v}_f \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) &= 0 \frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{\omega}{k} \hat{\phi} \bar{d}_f + \frac{\omega}{k} \bar{\phi} \hat{d}_f = 0. \quad (8.24)$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) (\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n}) &= 0 \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) (\hat{v}_s \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) &= 0 \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\omega}{k} \hat{\phi} = 0. \quad (8.25)$$

Das equações (8.24) e (8.25) temos

$$\begin{cases} \frac{\omega}{k}\hat{\phi}\bar{d}_f + \frac{\omega}{k}\bar{\phi}\hat{d}_f = 0, \\ \frac{\omega}{k}\hat{\phi} = 0 \Leftrightarrow \hat{\phi} = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{k}\hat{\phi}\hat{d}_f = 0 \Leftrightarrow \hat{d}_f = 0. \end{cases}$$

Portanto, $\begin{cases} \hat{d}_f = 0, \\ \hat{\phi} = 0. \end{cases}$

A partir desse resultado podemos simplificar as duas equações restantes. Para a penúltima, temos

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{ik^2}R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \frac{\omega^2}{k^2}\bar{d}_f\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\Pi}\hat{\mathbf{v}}_s &= 0 \\ -\frac{\omega}{ik^2}R(\hat{v}_f - \hat{v}_s)\mathbf{m} - \frac{\omega^2}{k^2}\bar{d}_f\hat{v}_f\mathbf{m} - \hat{\Pi}\hat{v}_s\mathbf{m} &= 0 \\ -\frac{\omega}{ik^2}R(\hat{v}_f - \hat{v}_s) - \frac{\omega^2}{k^2}\bar{d}_f\hat{v}_f - \mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m}\hat{v}_s &= 0, \end{aligned}$$

que nos fornece a seguinte equação:

$$-\frac{\omega}{ik^2}R(\hat{v}_f - \hat{v}_s) - \frac{\omega^2}{k^2}\bar{d}_f\hat{v}_f - \mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m}\hat{v}_s = 0. \quad (8.26)$$

E para a última equação,

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2}(1 - \bar{\phi})(\bar{d}_s\hat{\mathbf{v}}_s - \bar{d}_f\hat{\mathbf{v}}_f) - \frac{\omega}{ik^2}R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q}\hat{\mathbf{v}}_s &= 0 \\ \frac{\omega^2}{k^2}(1 - \bar{\phi})(\bar{d}_s\hat{v}_s - \bar{d}_f\hat{v}_f)\mathbf{m} - \frac{\omega}{ik^2}R(\hat{v}_f - \hat{v}_s) - \hat{Q}\hat{v}_s\mathbf{m} &= 0 \\ \frac{\omega^2}{k^2}(1 - \bar{\phi})(\bar{d}_s\hat{v}_s - \bar{d}_f\hat{v}_f) - \frac{\omega}{ik^2}R(\hat{v}_f - \hat{v}_s) - \mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}\hat{v}_s &= 0. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\frac{\omega^2}{k^2}(1 - \bar{\phi})(\bar{d}_s\hat{v}_s - \bar{d}_f\hat{v}_f) - \frac{\omega}{ik^2}R(\hat{v}_f - \hat{v}_s) - \mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}\hat{v}_s = 0. \quad (8.27)$$

As duas equações acima, 8.26, 8.27, nos fornecem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{\omega}{ik^2}R - \mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m}\right)\hat{v}_s - \left(\frac{\omega}{ik^2}R + \frac{\omega^2}{k^2}\bar{d}_f\right)\hat{v}_f = 0, \\ \left(\frac{\omega^2}{k^2}(1 - \bar{\phi})\bar{d}_s + \frac{\omega}{ik^2}R - \mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}\right)\hat{v}_s - \left(\frac{\omega^2}{k^2}(1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{\omega}{ik^2}R\right)\hat{v}_f = 0. \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega}{ik^2}R - \mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m} & -\left(\frac{\omega}{ik^2}R + \frac{\omega^2}{k^2}\bar{d}_f\right) \\ \frac{\omega^2}{k^2}(1 - \bar{\phi})\bar{d}_s + \frac{\omega}{ik^2}R - \mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m} & -\left(\frac{\omega^2}{k^2}(1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{\omega}{ik^2}R\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_s \\ \hat{v}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.28)$$

Fazendo $U = \frac{\omega}{k}$ e colocando o termos U^2 em evidência temos,

$$\begin{bmatrix} U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m}\right) & -U^2\left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f\right) \\ U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s + \frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}\right) & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_s \\ \hat{v}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Como já mencionado em (7.8), a matriz de coeficientes deve ser singular para a existência de soluções não triviais. Logo,

$$\det \begin{bmatrix} U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m}\right) & -U^2\left(\frac{R}{i\omega} + \bar{d}_f\right) \\ U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s + \frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}\right) & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) \end{bmatrix} = 0. \quad (8.30)$$

Resolvendo (8.30), obtemos o seguinte polinômio:

$$-U^4\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m}\right)\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) + U^4\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s + \frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}\right) = 0.$$

Realizando algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} & U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f\bar{d}_s + \frac{R}{i\omega}\left((1 - \bar{\phi})(\bar{d}_s - \bar{d}_f) + \bar{d}_f\right)\right) + \\ & \left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f\mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m} - \bar{d}_f\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m} + \frac{R}{i\omega}\left(\mathbf{m} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}\right)\right) = 0. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Com as hipóteses (7.10) e (7.11), nesse caso $\hat{\Pi} = 0$, obtemos o seguinte polinômio,

$$U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f\bar{d}_s + \frac{R}{i\omega}\left((1 - \bar{\phi})(\bar{d}_s - \bar{d}_f) + \bar{d}_f\right)\right) - \left(\bar{d}_f\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m} + \frac{R}{i\omega}\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}\right) = 0, \quad (8.32)$$

equivalentemente,

$$U^2 + \frac{R}{i\omega}\left(\frac{(1 - \bar{\phi})(\bar{d}_s - \bar{d}_f) + \bar{d}_f}{(1 - \bar{\phi})\bar{d}_s\bar{d}_f}\right)U^2 - \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}}{(1 - \bar{\phi})\bar{d}_s} - \frac{R}{i\omega}\frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}}{(1 - \bar{\phi})\bar{d}_s\bar{d}_f} = 0, \quad (8.33)$$

que pode ser escrito:

$$(U^2 - c_s^2) + \frac{R}{i\omega} \left(\frac{(1 - \phi)d_s + \phi d_f}{(1 - \phi)d_s d_f} U^2 - \frac{cs^2}{d_f} \right) = 0,$$

onde

$$c_s = \sqrt{\frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}}{(1 - \phi)d_s}} = \sqrt{\frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}}{\rho_s}}.$$

Analisando o comportamento para baixas frequências, ou seja, quando $\omega \rightarrow 0$,

$$U^2 = \frac{c_s^2(1 - \phi)d_s}{((1 - \phi)d_s + \phi d_f)} = \frac{c_s^2 \rho_s}{\rho_s + \rho_f} = \frac{c_s^2 \rho_s}{\rho}. \quad (8.34)$$

E para frequências muito altas ($\omega \rightarrow \infty$),

$$U^2 = \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}}{(1 - \phi)d_s} = c_s^2. \quad (8.35)$$

A análise desses resultados será realizada na seção 10, em que exibiremos os gráficos das velocidades de fase e atenuações para as ondas de cisalhamento.

8.2 Sistemas de Equações de Governo via Ondas Harmônicas com Constituinte Fluido Incompressível

Consideremos agora o modelo linearizado, cuja densidade do fluido é constante,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \phi \right) + \phi \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ \frac{\partial((1-\phi)d_s)}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad}((1-\phi)d_s) + (1-\phi)d_s \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ d_f \dot{\mathbf{v}}_f + \text{grad} P + \mathbf{r} = d_f \mathbf{g}, \\ (1-\phi) \left(d_s \dot{\mathbf{v}}_s - d_f \dot{\mathbf{v}}_f \right) - \text{div} \bar{T}_s - \mathbf{r} = (1-\phi)(d_s - d_f) \mathbf{g}, \end{array} \right. \quad (8.36)$$

onde substituímos as duas últimas equações diferenciais parciais do modelo (6.7), pelas equações (5.10)₁₋₂ e desprezamos os termos de segunda ordem nas Eqs. (5.7, 5.8, 5.10).

O conjunto de variáveis independentes nesse caso é $\{\phi, d_s, \chi_f, \chi_s\}$, e as variáveis constitutivas são:

$$P = P(\phi, F_s), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, F_s, V), \quad \bar{T}_s = \bar{T}_s(\phi, F_s),$$

onde $\mathbf{r} = RV + R_\phi \text{grad} \phi + R_{F_s} \cdot \text{grad} F_s$.

Escrevendo em termos de componentes cartesianas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i^f \phi_{,i} + \phi v_{i,i}^f = 0, \\ \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} d_s + (1-\phi) \frac{\partial d_s}{\partial t} + v_i^s (1-\phi)_{,i} d_s + v_i^s (1-\phi) d_{s,i} + (1-\phi) d_s v_{i,i}^s = 0, \\ d_f \frac{\partial v_i^f}{\partial t} + P_\phi \phi_{,i} + P_{F_s j k} F_{j k, i}^s + R_{ij} (v_j^f - v_j^s) + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s = d_f g_i, \\ (1-\phi) \left(d_s \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial t} + v_j^s v_{i,j}^s \right) - d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f \right) \right) - (H_{\phi i j} \phi_{,j} + H_{F_s i j k l} F_{j k, l}^s) - \\ (R(v_i^f - v_i^s) + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s) = (1-\phi)(d_s - d_f) g_i. \end{array} \right. \quad (8.37)$$

Usando as seguintes relações para as variáveis independentes:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \bar{\phi}(\mathbf{x}, t_0) + \hat{\phi}e^{i(\omega t - k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}, \\ d_s(\mathbf{x}, t) &= \bar{d}_s(\mathbf{x}, t_0) + \hat{d}_se^{i(\omega t - k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}, \\ \chi_f(\mathbf{X}_f, t) &= \bar{\chi}_f(\mathbf{X}_f, t_0) + \hat{\chi}_fe^{i(\omega t - k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}, \\ \chi_s(\mathbf{X}_s, t) &= \bar{\chi}_s(\mathbf{X}_s, t_0) + \hat{\chi}_se^{i(\omega t - k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}.\end{aligned}$$

Por simplicidade, denotaremos por

$$\phi = \bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta, \quad d_s = \bar{d}_s + \hat{d}_se^\zeta, \quad \chi_f = \bar{\chi}_f + \hat{\chi}_fe^\zeta, \quad \chi_s = \bar{\chi}_s + \hat{\chi}_se^\zeta,$$

com $\zeta = i(\omega t - k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}_s, t_0)$.

Substituindo as relações acima no sistema de equações (8.37) e supondo nula a ação de força externa, temos:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial(\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)}{\partial t} + (\hat{v}_i^f e^\zeta)(\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)_{,i} + (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)(\hat{v}_i^f e^\zeta)_{,i} = 0, \\ &\frac{\partial(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))}{\partial t}(\bar{d}_s + \hat{d}_se^\zeta) + (1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))\frac{\partial(\bar{d}_s + \hat{d}_se^\zeta)}{\partial t} + \\ &\quad \hat{v}_i^s e^\zeta(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))_{,i}(\bar{d}_s + \hat{d}_se^\zeta) + \hat{v}_i^s e^\zeta(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))(\bar{d}_s + \hat{d}_se^\zeta)_{,i} + \\ &\quad (1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))(\bar{d}_s + \hat{d}_se^\zeta)(\hat{v}_i^s e^\zeta)_{,i} = 0, \\ &\bar{d}_f \frac{\partial(\hat{v}_i^f e^\zeta)}{\partial t} + P_\phi(\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)_{,i} + P_{F_s j k} F_{j k, i}^s + R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s)e^\zeta + R_\phi(\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s = 0, \\ &(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))\left((\bar{d}_s + \hat{d}_se^\zeta)\left(\frac{\partial(\hat{v}_i^s e^\zeta)}{\partial t} + \hat{v}_j^s e^\zeta(\hat{v}_i^s e^\zeta)_{,j}\right) - \bar{d}_f \left(\frac{\partial(\hat{v}_i^f e^\zeta)}{\partial t} + \hat{v}_j^f e^\zeta(\hat{v}_i^f e^\zeta)_{,j}\right)\right) \\ &\quad - (H_{\phi i j}(\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)_{,j} + H_{F_s i j k l} F_{j k, l}^s) - (R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s)e^\zeta + R_\phi(\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s) = 0. \end{aligned} \right. \quad (8.38)$$

Desenvolvendo o sistema de equações acima, utilizando as mesmas identidades obtidas em (8.5), (8.6) e (8.7):

De (8.38)₁:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)}{\partial t} + (\hat{v}_i^f e^\zeta)(\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)_{,i} + (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)(\hat{v}_i^f e^\zeta)_{,i} = 0 \\
& i\omega\hat{\phi}e^\zeta + \hat{v}_i^f e^\zeta(-ikn_i\hat{\phi}e^\zeta) + (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta)(-ikn_i\hat{v}_i^f e^\zeta) = 0 \\
& i\omega\hat{\phi}e^\zeta - ik\bar{\phi}n_i\hat{v}_i^f e^\zeta = 0 \Leftrightarrow i\omega\hat{\phi} - ik\bar{\phi}n_i\hat{v}_i^f = 0 \\
& \frac{\omega}{k}\hat{\phi} - \bar{\phi}n_i\hat{v}_i^f = 0,
\end{aligned}$$

Segue que:

$$\frac{\omega}{k}\hat{\phi} - \bar{\phi}(\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n}) = 0. \quad (8.39)$$

De (8.38)₂,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))}{\partial t}(\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta) + (1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))\frac{\partial(\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta)}{\partial t} + \\
& \hat{v}_i^s e^\zeta(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))_{,i}(\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta) + \hat{v}_i^s e^\zeta(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))(\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta)_{,i} + \\
& (1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))(\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta)(\hat{v}_i^s e^\zeta)_{,i} = 0 \\
& -i\omega\hat{\phi}e^\zeta(\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta) + (1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))(i\omega\hat{d}_s) + \hat{v}_i^s e^\zeta(ikn_i\hat{\phi}e^\zeta)(\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta) + \\
& \hat{v}_i^s e^\zeta(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))(-ikn_i\hat{d}_s e^\zeta) + (1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi}e^\zeta))(\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta)(-ikn_i\hat{v}_i^s n_i e^\zeta) = 0 \\
& -i\omega\bar{d}_s\hat{\phi}e^\zeta + i\omega(1 - \bar{\phi})\hat{d}_s e^\zeta - (1 - \bar{\phi})\bar{d}_s ikn_i\hat{v}_i^s e^\zeta = 0 \\
& i\omega\bar{d}_s\hat{\phi} - i\omega(1 - \bar{\phi})\hat{d}_s + (1 - \bar{\phi})\bar{d}_s ik(\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n}) = 0,
\end{aligned}$$

Que nos fornece:

$$\frac{\omega}{k}\bar{d}_s\hat{\phi} - \frac{\omega}{k}(1 - \bar{\phi})\hat{d}_s + (1 - \bar{\phi})\bar{d}_s(\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n}) = 0. \quad (8.40)$$

De (8.38)₃:

$$\begin{aligned} & \bar{d}_f \frac{\partial(\hat{v}_i^f e^\zeta)}{\partial t} + P_\phi(\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)_{,i} + P_{F_s j k} F_{j k, i}^s + R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta + R_\phi(\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s = 0 \\ & i\omega \bar{d}_f \hat{v}_i^f e^\zeta - ik n_i \hat{\phi} P_\phi e^\zeta + i \frac{k^2}{\omega} P_{F_s k a} \hat{v}_s^k F_s^{j a} n_j n_i e^\zeta + R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta - \\ & \quad ik n_i \hat{\phi} R_\phi e^\zeta + i \frac{k^2}{\omega} R_{F_s k a} \hat{v}_s^k F_s^{j a} n_j n_i e^\zeta = 0 \\ & i\omega \bar{d}_f \hat{v}_i^f - ik(P_\phi + R_\phi) n_i \hat{\phi} + i \frac{k^2}{\omega} (P_{F_s} + R_{F_s})_{k a} \hat{v}_s^k F_s^{j a} n_j n_i + R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) = 0 \\ & i\omega \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - ik(P_\phi + R_\phi) \mathbf{n} \hat{\phi} + i \frac{k^2}{\omega} ((P_{F_s} + R_{F_s}) \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_s^T \mathbf{n})) \mathbf{n} + R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \end{aligned}$$

Definindo $\hat{\Pi}_{ik} = (P_{F_s} + R_{F_s})_{k a} F_s^{j a} n_j n_i$ e multiplicando por $\frac{\omega}{ik^2}$, obtemos:

$$\frac{\omega}{k} (P_\phi + R_\phi) \mathbf{n} \hat{\phi} - \frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}_s - \frac{\omega}{ik^2} R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \quad (8.41)$$

De (8.38)₄:

$$\begin{aligned} & (1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)) \left((\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta) \frac{\partial(\hat{v}_i^s e^\zeta)}{\partial t} - \bar{d}_f \frac{\partial(\hat{v}_i^f e^\zeta)}{\partial t} \right) - (H_{\phi ij}(\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)_{,j} + H_{F_s ijkl} F_{j k, l}^s) - \\ & \quad (R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta + R_\phi(\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s) = 0 \\ & i\omega(1 - (\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)) ((\bar{d}_s + \hat{d}_s e^\zeta) \hat{v}_i^s - \bar{d}_f \hat{v}_i^f) e^\zeta + ik n_j H_{\phi ij} \hat{\phi} e^\zeta - i \frac{k^2}{\omega} H_{F_s ijka} \hat{v}_s^k F_s^{l a} n_l n_j e^\zeta - \\ & \quad (R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta - ik n_i R_\phi \hat{\phi} e^\zeta + i \frac{k^2}{\omega} R_{F_s k a} \hat{v}_s^k F_s^{l a} n_l n_i e^\zeta) = 0 \\ & i\omega(1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_s \hat{v}_i^s - \bar{d}_f \hat{v}_i^f) e^\zeta - i \frac{k^2}{\omega} (H_{F_s ijka} + \delta_{ij} R_{F_s ka}) \hat{v}_s^k F_s^{l a} n_l n_j e^\zeta + ik (H_\phi + \delta R_\phi)_{ij} n_j \hat{\phi} e^\zeta - \\ & \quad R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta = 0, \end{aligned}$$

multiplicando a equação por $\frac{\omega}{ik^2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_s \hat{v}_i^s - \bar{d}_f \hat{v}_i^f) - (H_{F_s ijka} + \delta_{ij} R_{F_s ka}) \hat{v}_s^k F_s^{l a} n_l n_j + \frac{\omega}{k} (H_\phi + \delta R_\phi)_{ij} n_j \hat{\phi} \\ & \quad - \frac{\omega}{ik^2} R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) = 0 \\ & \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s - \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f) - ((H_{F_s} + I \otimes R_{F_s}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \otimes F_s^T \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{\omega}{k} (H_\phi + I R_\phi) \mathbf{n} \hat{\phi} \\ & \quad - \frac{\omega}{ik^2} R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \end{aligned}$$

Definindo $\hat{Q}_{ik} = (H_{F_s ijka} + \delta_{ij} R_{ka}) F_s^{la} n_l n_j$, temos:

$$\frac{\omega}{k} (H_\phi + IR_\phi) \mathbf{n} \hat{\phi} - \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q} \hat{\mathbf{v}}_s - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \quad (8.42)$$

Obtemos o seguinte sistema de equações linear nas variáveis $\{\hat{\phi}, \hat{d}_s, \hat{\mathbf{v}}_f, \hat{\mathbf{v}}_s\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{k} \hat{\phi} - \bar{\phi} (\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{\omega}{k} \bar{d}_s \hat{\phi} - \frac{\omega}{k} (1 - \bar{\phi}) \hat{d}_s + (1 - \bar{\phi}) \bar{d}_s (\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{\omega}{k} (P_\phi + R_\phi) \mathbf{n} \hat{\phi} - \frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}_s - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0, \\ \frac{\omega}{k} (H_\phi + IR_\phi) \mathbf{n} \hat{\phi} - \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q} \hat{\mathbf{v}}_s - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \end{array} \right. \quad (8.43)$$

Fazendo $U = \frac{\omega}{k}$ e substituindo no sistema anterior

$$\left\{ \begin{array}{l} U \hat{\phi} - \bar{\phi} (\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ U \bar{d}_s \hat{\phi} - U (1 - \bar{\phi}) \hat{d}_s + (1 - \bar{\phi}) \bar{d}_s (\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ U (P_\phi + R_\phi) \mathbf{n} \hat{\phi} - U^2 \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}_s - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0, \\ U (H_\phi + IR_\phi) \mathbf{n} \hat{\phi} - U^2 (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q} \hat{\mathbf{v}}_s - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \end{array} \right. \quad (8.44)$$

8.2.1 Onda Harmônica Plana Longitudinal com Constituinte Fluido Incompressível

Supondo o deslocamento da onda alinhado com o vetor normal à frente de onda como ilustrado na figura (7.2) temos, $\hat{\mathbf{v}}_s = \hat{v}_s \mathbf{n}$ e $\hat{\mathbf{v}}_f = \hat{v}_f \mathbf{n}$, que substituindo

no sistema (8.44) nos fornece:

$$\begin{cases} U\hat{\phi} - \bar{\phi}\hat{v}_f = 0, \\ U\bar{d}_s\hat{\phi} - U(1 - \bar{\phi})\hat{d}_s + (1 - \bar{\phi})\bar{d}_s\hat{v}_s = 0, \\ U\hat{P}_\phi\hat{\phi} - U^2\bar{d}_f\hat{v}_f - \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\hat{v}_s - \frac{\omega}{ik^2}R(\hat{v}_f - \hat{v}_s) = 0, \\ U\hat{H}_\phi\hat{\phi} - U^2(1 - \bar{\phi})(\bar{d}_f\hat{v}_f - \bar{d}_s\hat{v}_s) - \mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}\hat{v}_s - \frac{\omega}{ik^2}R(\hat{v}_f - \hat{v}_s) = 0. \end{cases} \quad (8.45)$$

Onde definimos $\hat{P}_\phi = P_\phi + R_\phi$ e $\hat{H}_\phi = R_\phi + \mathbf{n} \cdot H_\phi\mathbf{n}$. Agrupando os termos de forma conveniente no sistema acima

$$\begin{cases} U\hat{\phi} - \bar{\phi}\hat{v}_f = 0, \\ U\bar{d}_s\hat{\phi} - U(1 - \bar{\phi})\hat{d}_s + (1 - \bar{\phi})\bar{d}_s\hat{v}_s = 0, \\ U\hat{P}_\phi\hat{\phi} - U^2\left(\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right)\hat{v}_f + U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right)\hat{v}_s = 0, \\ U\hat{H}_\phi\hat{\phi} - U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right)\hat{v}_f + U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right)\hat{v}_s = 0. \end{cases} \quad (8.46)$$

Rescrevendo na forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} U & 0 & -\bar{\phi} & 0 \\ U\bar{d}_s & -U(1 - \bar{\phi}) & 0 & (1 - \bar{\phi})\bar{d}_s \\ U\hat{P}_\phi & 0 & -U^2\left(\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & M_{34} \\ U\hat{H}_\phi & 0 & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{d}_s \\ \hat{v}_f \\ \hat{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.47)$$

em que, $M_{34} = U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right)$ e $M_{44} = U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right)$.

De forma equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{\phi} & 0 \\ \bar{d}_s & 1 & 0 & (1 - \bar{\phi})\bar{d}_s \\ \hat{P}_\phi & 0 & -U^2\left(\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right) \\ \hat{H}_\phi & 0 & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{d}_s \\ \hat{v}_f \\ \hat{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.48)$$

O determinante da matriz de coeficientes se reduz

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -\bar{\phi} & 0 \\ \hat{P}_\phi & -U^2\left(\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right) \\ \hat{H}_\phi & -U^2\left((1-\bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left((1-\bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right) \end{bmatrix} = 0, \quad (8.49)$$

de onde obtemos o polinômio característico:

$$\begin{aligned} & U^4(1-\phi)d_s d_f - U^2\left(\hat{P}_\phi(1-\phi)\phi d_s - (1-\phi)d_f \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n} + d_f \mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}\right) - \hat{H}_\phi \phi \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n} \\ & + \hat{P}_\phi \phi \mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} - U^4 \frac{R}{i\omega} \left((1-\phi)d_f - d_f - (1-\phi)d_s\right) \\ & + U^2 \frac{R}{i\omega} \left(-\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} - \hat{P}_\phi \phi + \mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n} + \hat{H}_\phi \phi\right) = 0. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Considerando o caso especial, no qual a energia livre do fluido em equilíbrio e a pressão em poro independem do gradiente de deformação, F_s ,

$$\psi_f^0 = \psi_f^0(\phi, d_f), \quad P = P(\phi),$$

de onde obtemos

$$R_{F_s} = 0, \quad P_{F_s} = 0.$$

Logo,

$$\hat{\Pi} = 0,$$

$$\hat{Q}_{ik} = (H_{F_s})_{ijka} F_s^{la} n_l n_j = L_{ijkl} n_j n_l,$$

que substituindo no polinômio característico (8.50) nos fornece:

$$\begin{aligned} & U^4(1-\phi)d_s d_f - U^2\left(\hat{P}_\phi(1-\phi)\phi d_s + d_f \mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}\right) + \hat{P}_\phi \phi \mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} \\ & + \frac{R}{i\omega} \left(U^4(\phi d_f + (1-\phi)d_s) - U^2(\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \hat{P}_\phi \phi)\right) = 0. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Reescrevendo a equação anterior

$$(U^2 - c_1^2)(U^2 - c_2^2) + \frac{R}{i\omega} \left(U^4 \left(\frac{\phi d_f + (1-\phi)d_s}{(1-\phi)d_s d_f}\right) - U^2 \left(\frac{c_1^2}{d_f} + \frac{c_2^2}{(1-\phi)d_s}\right)\right) = 0,$$

onde

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}}{(1-\phi)d_s}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\phi \hat{P}_\phi}{d_f}}.$$

Portanto, para este modelo também existem duas ondas longitudinais que se propagam no meio poroelástico. Ambas velocidades de propagação das ondas são alteradas pela presença dos termos que multiplicam a resistividade R .

A partir da relação de dispersão, podemos obter os seguintes limites:
Para $\omega \rightarrow 0$ temos

$$U^2 \left(\frac{\phi d_f + (1 - \phi) d_s}{(1 - \phi) d_s d_f} \right) - \left(\frac{c_1^2}{d_f} - \frac{c_2^2}{(1 - \phi) d_s} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad U = 0. \quad (8.52)$$

e para $\omega \rightarrow \infty$ temos

$$(U^2 - c_1^2)(U^2 - c_2^2) = 0, \quad (8.53)$$

em que recuperamos os resultados obtidos em [31].

Podemos observar que para altas frequências a velocidade c_1 é a mesma do sólido elástico, enquanto a velocidade c_2 da segunda onda é essencialmente uma onda de compressão do fluido presente nos poros.

Para a onda harmônica plana transversal o sistema de equações é análogo ao caso com constituinte sólido incompressível, Eq. (8.33).

8.3 Sistemas de Equações de Governo via Ondas Harmônicas com Constituintes Sólido e Fluido Incompressíveis

Vamos considerar o sistema de equações cujo meio poroso seja incompressível. Nesse caso, tanto a densidade real do constituinte sólido d_s quanto a do constituinte fluido d_f são constantes. Ressaltamos ainda que essa condição não implica na incompressibilidade do meio, uma vez que a porosidade pode variar. Desse modo, com o objetivo de tornar o sistema de equações (6.9) determinado, consideramos a *pressão em poro* P como variável independente. Portanto, o conjunto de variáveis independentes para esse sistema é $\{\phi, \chi_f, \chi_s, P\}$.

Considere o sistema de equações como citado acima:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \phi \right) + \phi \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \phi \right) + (1 - \phi) \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ \phi d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f \right) + \phi \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_f + \phi \mathbf{r} = \phi d_f \mathbf{g}, \\ (1 - \phi) d_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \mathbf{v}_s \right) + (1 - \phi) \text{grad} P - \text{div} \bar{T}_s - \phi \mathbf{r} = (1 - \phi) (d_s - d_f) \mathbf{g}. \end{array} \right. \quad (8.54)$$

Variáveis constitutivas:

$$\bar{T}_s = \bar{T}_s(\phi, F_s, V), \quad \bar{T}_f = \bar{T}_f(\phi, F_s, V), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, F_s, V).$$

Substituindo as equações (5.10)₁₋₂, desprezando os termos de segunda ordem no sistema acima e supondo o sistema livre de ações de forças externas, podemos reescrever o sistema (8.54) em sua forma linearizada:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \phi \right) + \phi \text{div} \mathbf{v}_f = 0, \\ - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \phi \right) + (1 - \phi) \text{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f \right) + \text{grad} P + (RV + R_\phi \text{grad} \phi + R_{F_s} \cdot \text{grad} F_s) = 0 \\ (1 - \phi) \left(d_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \text{grad} \mathbf{v}_s \right) - d_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \text{grad} \mathbf{v}_f \right) \right) - \text{div} \bar{T}_s \\ - (RV + R_\phi \text{grad} \phi + R_{F_s} \cdot \text{grad} F_s) = 0, \end{array} \right. \quad (8.55)$$

onde $\mathbf{r} = RV + R_\phi \text{grad}\phi + R_{F_s} \text{grad}F_s$.

Variáveis constitutivas:

$$\bar{T}_s = \bar{T}_s(\phi, F_s), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, F_s, V). \quad (8.56)$$

Escrevendo em termos de componentes cartesianas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i^f \phi_{,i} + \phi v_{i,i}^f = 0, \\ -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i^s \phi_{,i}\right) + (1 - \phi)v_{i,i}^s = 0, \\ d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f\right) + P_{,i} + R(v_i^f - v_i^s) + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s = 0, \\ (1 - \phi) \left(d_s \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial t} + v_j^s v_{i,j}^s\right) - d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f\right)\right) - (H_{\phi i j} \phi_{,j} + H_{F_s i j k l} F_{j k, l}^s) \\ - (R(v_i^f - v_i^s) + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s) = 0. \end{array} \right. \quad (8.57)$$

Usando as seguintes relações para as variáveis independentes:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \bar{\phi}(\mathbf{x}, t_0) + \hat{\phi} e^{i(\omega t - \mathbf{k n} \cdot \mathbf{x})}, \\ \chi_f(\mathbf{X}_f, t) &= \bar{\chi}_f(\mathbf{X}_f, t_0) + \hat{\chi}_f e^{i(\omega t - \mathbf{k n} \cdot \mathbf{x})}, \\ \chi_s(\mathbf{X}_s, t) &= \bar{\chi}_s(\mathbf{X}_s, t_0) + \hat{\chi}_s e^{i(\omega t - \mathbf{k n} \cdot \mathbf{x})}, \\ P(\mathbf{x}, t) &= \bar{P}(\mathbf{x}, t_0) + \hat{P} e^{i(\omega t - \mathbf{k n} \cdot \mathbf{x})}, \end{aligned}$$

que, por simplicidade, denotaremos por:

$$\phi = \bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta, \quad \chi_f = \bar{\chi}_f + \hat{\chi}_f e^\zeta, \quad \chi_s = \bar{\chi}_s + \hat{\chi}_s e^\zeta, \quad P = \bar{P} + \hat{P} e^\zeta,$$

com $\zeta = i(\omega t - \mathbf{k n} \cdot \mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}_s, t_0)$.

Além das relações obtidas em (8.5), (8.6) e (8.7), temos que admitir que o gradiente da pressão em poro é dado por:

$$P_{,i} = (\bar{P} + \hat{P} e^\zeta)_{,i} = (-ikn_i) \hat{P} e^\zeta \quad \text{logo} \quad \text{grad}P = -ik \hat{P} \mathbf{n} e^\zeta.$$

Utilizando essas relações no sistema anterior, (8.57), temos

$$\frac{\omega}{k} \hat{\phi} - \bar{\phi}(\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n}) = 0,$$

$$\frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n} = 0.$$

que já foram deduzidas e escritas nas primeiras linhas para os sistemas de equações com densidade do constituinte sólido incompressível (8.13) e densidade do constituinte fluido incompressível (8.43).

Para a penúltima equação:

$$\begin{aligned} d_f \frac{\partial v_i^f}{\partial t} + P_{,i} + R(v_i^f - v_i^s) + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s &= 0 \\ \bar{d}_f \frac{\partial (\hat{v}_i^f e^\zeta)}{\partial t} + (\bar{P} + \hat{P} e^\zeta)_{,i} + R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta + R_\phi (\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s &= 0 \\ i\omega \bar{d}_f \hat{v}_i^f e^\zeta - i k n_i \hat{P} e^\zeta + R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta - i k n_i R_\phi \hat{\phi} e^\zeta + i \frac{k^2}{\omega} R_{F_s k a} \hat{v}_s^k F^{j a} n_j n_i e^\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Lembrando que $R_{F_s k a} F^{j a} n_j n_i = \hat{\Pi}_{i k}$ e multiplicando a equação por $\frac{\omega}{i k^2}$, obtemos

$$\frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{v}_i^f e^\zeta - \frac{\omega}{k} n_i \hat{P} e^\zeta + \frac{\omega}{i k^2} R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta - \frac{\omega}{k} n_i R_\phi \hat{\phi} e^\zeta + \hat{\Pi}_{i k} \hat{v}_s^k e^\zeta = 0$$

que nos fornece

$$\frac{\omega}{k} R_\phi \mathbf{n} \hat{\phi} - \frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f + \frac{\omega}{k} \hat{P} \mathbf{n} - \frac{\omega}{i k^2} R(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}_s = 0. \quad (8.58)$$

E, finalmente, para última equação:

$$\begin{aligned} (1 - \phi) \left(d_s \left(\frac{\partial v_i^s}{\partial t} + v_j^s v_{i,j}^s \right) - d_f \left(\frac{\partial v_i^f}{\partial t} + v_j^f v_{i,j}^f \right) \right) - (H_{\phi i j} \phi_{,j} + H_{F_s i j k l} F_{j k, l}^s) \\ - (R(v_i^f - v_i^s) + R_\phi \phi_{,i} + R_{F_s j k} F_{j k, i}^s) &= 0 \\ (1 - \bar{\phi} - \hat{\phi} e^\zeta) \left(\bar{d}_s \frac{\partial (\hat{v}_i^s e^\zeta)}{\partial t} - \bar{d}_f \frac{\partial (\hat{v}_i^f e^\zeta)}{\partial t} \right) - \left(H_{\phi, i j} (\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)_{,j} + i \frac{k^2}{\omega} H_{F_s i j k a} v_s^k F_s^{l a} n_l n_j e^\zeta \right) - \\ \left(R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta + R_\phi (\bar{\phi} + \hat{\phi} e^\zeta)_{,i} + i \frac{k^2}{\omega} R_{F_s k a} \hat{v}_s^k F_s^{l a} n_l n_j e^\zeta \right) &= 0 \\ i\omega (1 - \bar{\phi} - \hat{\phi} e^\zeta) (\bar{d}_s \hat{v}_i^s - \bar{d}_f \hat{v}_i^f) e^\zeta + i k n_j H_{\phi i j} \hat{\phi} e^\zeta - i \frac{k^2}{\omega} H_{F_s i j k a} v_s^k F_s^{l a} n_l n_j e^\zeta \\ - R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) e^\zeta + i k n_i R_\phi \hat{\phi} e^\zeta - i \frac{k^2}{\omega} R_{F_s k a} \hat{v}_s^k F_s^{l a} n_l n_j e^\zeta &= 0 \\ -i\omega (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_f \hat{v}_i^f - \bar{d}_s \hat{v}_i^s) + i k n_j (H_{\phi i j} + \delta_{i j} R_\phi) \hat{\phi} - i \frac{k^2}{\omega} (H_{F_s i j k a} + \delta_{i j} R_{F_s k a}) v_s^k F_s^{l a} n_l n_j - \\ R(\hat{v}_i^f - \hat{v}_i^s) &= 0. \end{aligned}$$

Lembrando que $\hat{Q}_{ik} = (H_{F_s ijka} + \delta_{ij} R_{F_s ka}) F_s^{la} n_l n_j$ e multiplicando a equação por $\frac{\omega}{ik^2}$, segue que

$$\frac{\omega}{k} (H_\phi + IR_\phi) \hat{\phi} \mathbf{n} - \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q} \hat{\mathbf{v}}_s - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \quad (8.59)$$

Podemos escrever o seguinte sistema de equações linear nas variáveis $\{\hat{\phi}, \hat{P}, \hat{\mathbf{v}}_f, \hat{\mathbf{v}}_s\}$:

$$\begin{cases} \frac{\omega}{k} \hat{\phi} - \bar{\phi} (\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{\omega}{k} \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \frac{\omega}{k} R_\phi \mathbf{n} \hat{\phi} - \frac{\omega^2}{k^2} \bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f + \frac{\omega}{k} \hat{P} \mathbf{n} - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{\Pi} \hat{\mathbf{v}}_s = 0, \\ \frac{\omega}{k} (H_\phi + IR_\phi) \hat{\phi} \mathbf{n} - \frac{\omega^2}{k^2} (1 - \bar{\phi}) (\bar{d}_f \hat{\mathbf{v}}_f - \bar{d}_s \hat{\mathbf{v}}_s) - \hat{Q} \hat{\mathbf{v}}_s - \frac{\omega}{ik^2} R (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) = 0. \end{cases}$$

Definindo $U = \frac{\omega}{k}$ e agrupando os termos de forma conveniente temos:

$$\begin{cases} U \hat{\phi} - \bar{\phi} (\hat{\mathbf{v}}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ U \hat{\phi} + (1 - \bar{\phi}) \hat{\mathbf{v}}_s \cdot \mathbf{n} = 0, \\ UR_\phi \mathbf{n} \hat{\phi} + U \hat{P} \mathbf{n} - U^2 \left(\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega} \right) \hat{\mathbf{v}}_f + U^2 \left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2} \hat{\Pi} \right) \hat{\mathbf{v}}_s = 0, \\ U (H_\phi + IR_\phi) \hat{\phi} \mathbf{n} - U^2 \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_f + \frac{R}{i\omega} \right) \hat{\mathbf{v}}_f + U^2 \left((1 - \bar{\phi}) \bar{d}_s - \frac{1}{U^2} \hat{Q} + \frac{R}{i\omega} \right) \hat{\mathbf{v}}_s = 0. \end{cases} \quad (8.60)$$

8.3.1 Onda Harmônica Plana Longitudinal com Constituintes Sólido e Fluido Incompressível

Supondo que o vetor velocidade do constituinte sólido e do constituinte fluido estejam alinhados com o vetor normal à frente de onda, $\mathbf{v}_s = \hat{v}_s \mathbf{n}$ e $\mathbf{v}_f = \hat{v}_f \mathbf{n}$ e

substituindo no sistema anterior,

$$\begin{cases} U\hat{\phi} - \bar{\phi}\hat{v}_f = 0, \\ U\hat{\phi} + (1 - \bar{\phi})\hat{v}_s = 0, \\ UR_\phi\hat{\phi} + U\hat{P} - U^2\left(\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right)\hat{v}_f + U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right)\hat{v}_s = 0, \\ U\mathbf{n} \cdot (H_\phi + IR_\phi)\hat{\phi}\mathbf{n} - U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right)\hat{v}_f \\ + U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right)\hat{v}_s = 0. \end{cases} \quad (8.61)$$

Definindo $\mathbf{n} \cdot (H_\phi + IR_\phi)\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \hat{H}_\phi\mathbf{n}$ e rescrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} U & 0 & -\bar{\phi} & 0 \\ U & 0 & 0 & (1 - \bar{\phi}) \\ UR_\phi & U & -U^2\left(\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right) \\ U\hat{H}_\phi & 0 & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{P} \\ \hat{v}_f \\ \hat{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Simplificando,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{\phi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (1 - \bar{\phi}) \\ R_\phi & 1 & -U^2\left(\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left(\frac{R}{i\omega} - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{\Pi}\mathbf{n}\right) \\ \hat{H}_\phi & 0 & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{P} \\ \hat{v}_f \\ \hat{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.62)$$

o determinante da matriz de coeficientes se reduz a:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -\bar{\phi} & 0 \\ 1 & 0 & (1 - \bar{\phi}) \\ \hat{H}_\phi & -U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) & U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right) \end{bmatrix} = 0. \quad (8.63)$$

Resolvendo o determinante obtemos o polinômio característico:

$$U^2(1 - \bar{\phi})\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_f + \frac{R}{i\omega}\right) + \bar{\phi}\left(U^2\left((1 - \bar{\phi})\bar{d}_s - \frac{1}{U^2}\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} + \frac{R}{i\omega}\right) - (1 - \bar{\phi})\hat{H}_\phi\right) = 0. \quad (8.64)$$

Reescrevendo a equação acima:

$$U^2\left(\frac{\bar{\phi}\bar{d}_s + (1 - \bar{\phi})\bar{d}_f}{\bar{\phi}\bar{d}_s}\right) - \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}}{(1 - \bar{\phi})\bar{d}_s} - \frac{1}{\bar{d}_s}\hat{H}_\phi + \frac{1}{\bar{\phi}(1 - \bar{\phi})\bar{d}_s}\frac{R}{i\omega}U^2 = 0. \quad (8.65)$$

Analisando a relação de dispersão para baixas frequências ($\omega \rightarrow 0$), obtemos

$$U^2 = 0. \quad (8.66)$$

Para frequências altas ($\omega \rightarrow \infty$):

$$U^2 = \frac{\phi \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n} + \phi(1 - \phi) \hat{H}_\phi}{\phi(1 - \phi)d_s + (1 - \phi)^2 d_f}. \quad (8.67)$$

No caso simples da relação de dispersão (8.20), onde as hipóteses (7.10) e (7.11) foram empregadas, basta considerarmos $\hat{H}_\phi = 0$, em que obtemos:

$$U^2 \left(\frac{\phi d_s + (1 - \phi) d_f}{\phi d_s} \right) - \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n}}{(1 - \phi) d_s} + \frac{1}{\phi(1 - \phi) d_s} \frac{R}{i\omega} U^2 = 0, \quad (8.68)$$

que podemos escrever em termos da velocidades de propagação em um sólido elástico

$$U^2 \left(\frac{\phi d_s + (1 - \phi) d_f}{\phi d_s} \right) - c_1^2 + \frac{1}{\phi(1 - \phi) d_s} \frac{R}{i\omega} U^2 = 0,$$

onde

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n}}{(1 - \phi) d_s}}.$$

Logo, para esse caso, os limites para as velocidades na relação de dispersão são:

Para $\omega \rightarrow 0$,

$$U^2 = 0, \quad (8.69)$$

e para $\omega \rightarrow \infty$,

$$U^2 = \frac{\phi \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \mathbf{n}}{\phi(1 - \phi) d_s + (1 - \phi)^2 d_f}. \quad (8.70)$$

Ou, de forma equivalente,

$$U^2 = \frac{\phi d_s c_1^2}{(1 - \phi) d_f + \phi d_s}.$$

Como apontado em [31], não existe a segunda onda, $P2$, para este modelo. A onda de cisalhamento (S) tem a mesma equação das seções anteriores.

9 VELOCIDADES DE ONDAS E ESTADO DE REFERÊNCIA HOMOGENEAMENTE DEFORMADO

Relembre que consideramos as ondas harmônicas como um movimento de pequenas deformações no estado de referência, e o estado de referência é assumido como homogeneamente deformado, caracterizado pelo tensor de deformação F_0 dado na equação (8.6). Como as relações de dispersão obtida dependem implicitamente dos tensores $\hat{\Pi}$ e \hat{Q} , as velocidades de propagação através do meio não são necessariamente iguais em qualquer direção. Em outras palavras, o corpo deformado é efetivamente anisotrópico em geral.

Deduzimos anteriormente que o tensor acústico é da forma:

$$\hat{Q}_{ik} = (H_{F_s ij} + \delta_{ij} R_{F_s})_{ka} F_{0s}^{la} n_l n_j. \quad (9.1)$$

Considerando o caso especial (7.10) e (7.11), onde a energia interna do constituinte fluido em equilíbrio e o tensor de tensão efetiva no sólido são dados respectivamente por

$$\psi_f^0 = \psi_f^0(d_f), \quad \bar{T}_s = \bar{T}_s(F_s),$$

obtemos:

$$H_\phi = 0, \quad H_{d_f} = 0, \quad R_\phi = 0, \quad R_{F_s} = 0.$$

Supondo

$$P = d_f^2 \frac{\partial \psi_f^0}{\partial d_f}, \quad \text{o que implica em } P_\phi = 0, \quad P_{F_s} = 0.$$

Das considerações acima, obtemos:

$$\hat{P}_\phi = 0, \quad \hat{\Pi} = 0, \quad \hat{H}_\phi = 0, \quad \hat{H}_{d_f} = 0,$$

$$\hat{Q}_{ik} = (H_{F_s})_{ijka} F_{0s}^{la} n_l n_j = L_{ijkl} n_j n_l.$$

Portanto,

$$\hat{Q}\mathbf{a} = \left((\partial_F \bar{T}_s)[\mathbf{a} \otimes F^T \mathbf{n}] \right) \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{a},$$

onde $\bar{T}_s(F)$ é a função constitutiva da tensão efetiva do sólido, \mathbf{a} é o vetor amplitude e \mathbf{n} é a direção de propagação. Omitimos o índice subscrito 0 e escrevemos F ao invés de F_s por conveniência nas presentes considerações.

Com o objetivo de determinar a dependência explícita das velocidades das ondas no estado de referência deformado, consideraremos o material Mooney–Rivlin [28] como um exemplo, dado pela seguinte equação constitutiva para a tensão efetiva no sólido

$$\bar{T}_s = -p(\rho)I + s_1B + s_2B^{-1},$$

onde $B = FF^T$ é o tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda e s_1, s_2 são constantes materiais. Assumiremos que a pressão depende somente do $(\det F)$, tal que $\rho_s = \rho_{s0}/|\det F|$ e $p(I) = s_1 + s_2$ e, conseqüentemente, não existe tensão efetiva no estado não deformado.

Por definição, temos o gradiente da função constitutiva

$$\partial_F \bar{T}_s(F)[H] = \left. \frac{d}{d\tau} \bar{T}_s(F + \tau H) \right|_{\tau=0} \quad \forall H,$$

a partir do qual pelo uso dos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} \det(F + \tau H) \right|_{\tau=0} &= (\det F) \operatorname{tr}(HF^{-1}), \\ \left. \frac{d}{d\tau} (F + \tau H)^{-T} \right|_{\tau=0} &= -F^{-T} H^T F^{-T}, \end{aligned}$$

nos fornece,

$$\begin{aligned} (\partial_{F_s} T)[H] &= \left. \frac{d}{dt} (-p(\rho)I + s_1(F_s + Ht)(F_s + Ht)^T + s_2((F_s + Ht)^{-T})(F_s + Ht)^{-1}) \right|_{t=0} = \\ &= \beta \operatorname{tr}(HF^{-1})I + s_1(HF_s^T + F_s H^T) - s_2(F_s^{-T} H^T B^{-1} + B^{-1} H F_s^{-1}), \end{aligned} \quad (9.2)$$

onde $\beta = \frac{dp}{d\rho}$ é assumido constante.

Como

$$\hat{Q}_{ik} a^k = (\partial_{F_s} T(F_s))_{ijka} a^k n_l F_s^{la} n_j,$$

então $\hat{Q}\mathbf{a} = ((\partial_{F_s} T(F_s))[\mathbf{a} \otimes F_s^T \mathbf{n}])\mathbf{n}$. Fazendo $H = \mathbf{n} \otimes F_s^T \mathbf{n}$ em (9.2), temos:

$$\hat{Q}\mathbf{a} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + s_1((\mathbf{n} \cdot B\mathbf{n})\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})B\mathbf{n}) - s_2((\mathbf{n} \cdot B^{-1}\mathbf{a})\mathbf{n} + B^{-1}\mathbf{a}), \quad (9.3)$$

que pode ser escrito da seguinte forma,

$$\hat{Q}(\mathbf{n}) = \beta \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + s_1 \left((\mathbf{n} \cdot B\mathbf{n})I + B\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) - s_2 \left(\mathbf{n} \otimes B^{-1}\mathbf{n} + B^{-1} \right), \quad (9.4)$$

em que podemos notar que a menos que a vetor normal, \mathbf{n} , seja autovetor do tensor de deformação Cauchy-Green B , o tensor acústico $\hat{Q}(\mathbf{n})$ não é simétrico.

A partir do tensor $\hat{Q}(\mathbf{n})$, dado em Eq. (9.4), podemos calcular explicitamente a dependência do tensor acústico em função da direção, do tensor de deformação B e dos parâmetros materiais do modelo Mooney-Rivlin. Para isso, basta supor $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$, que obtemos as relações para direção longitudinal,

$$\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n} = (\beta + 2(s_1(\mathbf{n} \cdot B\mathbf{n}) - s_2(\mathbf{n} \cdot B^{-1}\mathbf{n}))), \quad (9.5)$$

e para a direção transversal,

$$\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m} = (s_1(\mathbf{n} \cdot B\mathbf{n}) - s_2(\mathbf{m} \cdot B^{-1}\mathbf{m})). \quad (9.6)$$

As relações acima determinam as velocidades longitudinais

$$c_{\mathbf{nn}}^2 = \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}}{(1 - \phi)d_s} = \frac{\beta + 2(s_1(\mathbf{n} \cdot B\mathbf{n}) - s_2(\mathbf{n} \cdot B^{-1}\mathbf{n}))}{(1 - \phi)d_s} \quad (9.7)$$

e transversais

$$c_{\mathbf{nm}}^2 = \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}}{(1 - \phi)d_s} = \frac{(s_1(\mathbf{n} \cdot B\mathbf{n}) - s_2(\mathbf{m} \cdot B^{-1}\mathbf{m}))}{(1 - \phi)d_s}, \quad (9.8)$$

nas relações de dispersão dos modelos de propagação de onda.

Ao substituirmos a identidade (9.7) e (9.8) nas relações de dispersão para os modelos de propagação de onda com densidade do sólido constante, densidade do fluido constante e densidades dos constituintes sólido e fluido constantes, obtemos as relações de dispersão em função dos parâmetros do modelo Mooney-Rivlin e das direções de propagação.

9.1 Velocidade de onda nas direções principais

No estado de referência deformado, o tensor de deformação $B = FF^T$ pode ser representado a partir das bases principais, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ como,

$$B = b_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

e, podemos considerar $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_2$ ou $\mathbf{m} = \mathbf{e}_3$ de forma que existe uma velocidade longitudinal ($c_1 = U_{11}$) e duas transversais ($c_s = U_{12}$ ou U_{13}), em que

$$\begin{aligned} U_{11} &= \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left(\beta + 2 \left(s_1 b_1 - \frac{s_2}{b_1} \right) \right)}, \\ U_{12} &= \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left(s_1 b_1 - \frac{s_2}{b_2} \right)}, \\ U_{13} &= \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left(s_1 b_1 - \frac{s_2}{b_3} \right)}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Em geral, existem nove velocidades principais, três longitudinais e seis transversais em um corpo deformado. Os resultados da Eq.(9.9), podem ser obtidos pelas já conhecidas fórmulas na literatura para ondas principais em um corpo elástico deformado (ver Wang & Truesdell [40] Eqs.(5.16) e (5.18)). Mostramos acima que tais direções preferenciais existem se os eixos acústicos coincidem com as direções principais do tensor de deformação do meio. E neste caso, a onda pode se propagar em uma dessas direções do eixo principal, sendo chamada de onda principal.

A partir das considerações anteriores, podemos estabelecer uma relação entre as velocidades de propagação das ondas $P1$, $P2$ e S e as direções principais do tensor de deformação do modelo Mooney-Rivlin. A partir das relações de dispersão para cada modelo de propagação (8.20), (8.33), (8.51) e (8.68), ao substituirmos as velocidades dadas pelo modelo Mooney-Rivlin Eq. (9.9), como exemplificado nas igualdades Eqs. (9.7), (9.8) e (9.12).

9.1.1 Velocidade da onda no estado de referência natural

Se o estado de referência é o estado natural, então $B = I$ e $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, e o resultado da equação Eq. (9.9) se torna

$$c_1 = U_{11} = \sqrt{\frac{\beta + 2(s_1 - s_2)}{\rho_s}}, \quad c_s = U_{12} = U_{13} = \sqrt{\frac{s_1 - s_2}{\rho_s}}. \quad (9.10)$$

Por comparação com os resultados conhecidos da teoria de elasticidade linear, podemos identificar as constantes de Lamé com os parâmetros materiais do material Mooney-Rivlin,

$$\lambda = \beta, \quad \mu = s_1 - s_2, \quad (9.11)$$

no estado isotrópico natural.

Observando o resultado anterior, vamos exibir os cálculos realizados para obter as velocidades de fase e as atenuações sofridas pela onda $P1$ para o caso isotrópico (quando o estado de referência do meio é o natural). Para isso, considere por exemplo a relação de dispersão para o modelo com densidade do sólido e fluido constante, Eq. (8.68), abaixo:

$$U^2 \left(\frac{\phi d_s + (1 - \phi) d_f}{\phi d_s} \right) - c_{\mathbf{nn}}^2 + \frac{1}{\phi(1 - \phi) d_s} \frac{R}{i\omega} U^2 = 0, \quad (9.12)$$

onde $c_{\mathbf{nn}}^2 = \frac{\beta + 2(s_1(\mathbf{n} \cdot B\mathbf{n}) - s_2(\mathbf{n} \cdot B^{-1}\mathbf{n}))}{(1 - \phi)d_s}$. Podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma,

$$U^2 \left(\frac{(1 - \phi)(\phi d_s + (1 - \phi) d_f) - \frac{Ri}{\omega}}{\phi(1 - \phi) d_s} \right) = c_{\mathbf{nn}}^2$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\omega c_{\mathbf{nn}}^2 \phi(1 - \phi) d_s}{\omega(1 - \phi)(\phi d_s + (1 - \phi) d_f) - Ri}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2(1 - \phi)(\phi d_s + (1 - \phi) d_f) - \omega Ri}{c_{\mathbf{nn}}^2 \phi(1 - \phi) d_s},$$

em que

$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2(1 - \phi)(\phi d_s + (1 - \phi) d_f) - \omega Ri}}{c_{\mathbf{nn}} \sqrt{\phi(1 - \phi) d_s}}.$$

Definindo $\alpha = (1 - \phi)(\phi d_s + (1 - \phi) d_f)$, temos:

$$\sqrt{\omega^2 \alpha - \omega Ri} = a + bi, \quad \text{então} \quad \omega^2 \alpha - \omega Ri = a^2 + 2abi - b^2.$$

Logo,

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \omega^2 \alpha \\ 2ab = -\omega R. \end{cases}$$

De onde segue que

$$4a^4 - 4a^2 \omega^2 \alpha - \omega^2 R^2 = 0, \quad x = a^2,$$

temos:

$$4x^2 - 4x \omega^2 \alpha - \omega^2 R^2 = 0.$$

Resolvendo a equação biquadrada acima em termos da variável x e depois levando em consideração a relação $a^2 = x$, obtemos os seguintes valores para a :

$$\left\{ \pm \frac{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}{\sqrt{2}}, \pm \frac{\sqrt{\omega^2 \alpha - \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Portanto, a parte imaginária b pode ser escrita como:

$$\left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega R}{\sqrt{\omega^2 \alpha - \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}} \right\}.$$

Logo,

$$a + bi = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}{\sqrt{2}} \pm \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega Ri}{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega Ri}{\sqrt{\omega^2 \alpha - \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}} \right\}$$

ou

$$a + bi = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 \alpha - \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}{\sqrt{2}} \pm \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega Ri}{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega Ri}{\sqrt{\omega^2 \alpha - \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}} \right\}.$$

Podemos agora explicitar a parte real e a parte imaginária do número de onda k da relação de dispersão em função de ω , tomando por exemplo

$$k(\omega) = \frac{\pm \frac{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}{\sqrt{2}} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega Ri}{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}}{c_{\text{nn}} \sqrt{\phi(1-\phi)} d_s},$$

onde a parte real

$$\text{Re}k(\omega) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}{c_{\text{nn}} \sqrt{\phi(1-\phi)} d_s},$$

e a parte imaginária, responsável pelo amortecimento ou atenuação da amplitude da frente de onda, é dada por:

$$\text{Im}k(\omega) = \pm \frac{\sqrt{2} \omega R}{2 c_{\text{nn}} \sqrt{\phi(1-\phi)} d_s \sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}. \quad (9.13)$$

Escrevemos a velocidade de fase para a relação de dispersão (8.68) da seguinte maneira:

$$v_f = \frac{\omega}{\text{Re}k(\omega)} = \pm \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\omega c_{\text{nn}} \sqrt{\phi(1-\phi)} d_s}{\sqrt{\omega^2 \alpha + \omega \sqrt{\omega^2 \alpha^2 + R^2}}}. \quad (9.14)$$

Ressaltamos que quando ω tende para frequências muito altas ($\omega \rightarrow \infty$), o valor limite para a velocidade de fase e atenuação é dado, respectivamente por:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} v_f = \pm c_{\mathbf{nn}} \sqrt{\frac{\phi d_s}{(\phi d_s + (1 - \phi) d_f)}},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}k(\omega) = \pm \frac{R}{2c_{\mathbf{nn}} \sqrt{\phi(1 - \phi)^2(\phi d_s + (1 - \phi) d_f) d_s}},$$

onde o resultado do limite da velocidade de fase v_f é equivalente ao resultado obtido em (8.70), se tomarmos $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ e o tensor de tensão de Cauchy como o tensor identidade, $B = I$.

10 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para determinar o comportamento quantitativo e qualitativo da propagação das ondas harmônicas nos três modelos considerados neste trabalho, calcularemos numericamente as relações de dispersão, pondo o número de onda como função da frequência, $k = k(\omega)$ e dos parâmetros materiais. Dessa forma, com o auxílio da computação simbólica, iremos separar a parte real e a parte imaginária da função $k(\omega)$ e obteremos as velocidades de fase $\omega/\text{Re}(k)$ e o coeficiente de atenuação, $\text{Im}(k)$, tal como realizado analiticamente para a relação de dispersão do Modelo-3, Eq. (9.12) a Eq. (9.14), onde foi possível obter as funções que descrevem a velocidade de fase e a atenuação por se tratar de um modelo mais simples, sem muitos coeficientes na relação de dispersão.

O nosso objetivo é comparar os resultados que obtivemos neste trabalho com os resultados obtidos por Wilmanski em [42]. Essa escolha foi feita, pois os resultados obtidos em [42] são comparados com os de M.A. Biot em sua teoria clássica de propagação de ondas harmônicas em meios poroelásticos, [9, 10]. Portanto, se os resultados apresentados neste trabalho forem compatíveis com os resultados alcançados por Wilmanski, então, conseqüentemente estarão de acordo com os resultados obtidos por Biot, cuja teoria desenvolvida, em geral, produz resultados bem aceitos nas aplicações da engenharia.

Na teoria desenvolvida em [42], além das velocidades elásticas de propagação das ondas no meio sólido c_1 e c_s , no fluido c_2 , densidades do constituinte sólido ρ_s , do constituinte fluido ρ_f e a porosidade ϕ (ou n em algumas literaturas), foi necessário introduzir o parâmetro de tortuosidade a e um fator de acoplamento entre as tensões parciais na matriz sólida e a pressão no fluido, que denotaremos por Q_w na equação de governo dos constituintes sólido e fluido, que serão utilizadas nas relações de dispersão quando realizarmos comparações com o modelo em [42]. O termo de acoplamento, Q_w , introduzido originalmente por Biot, insere na equação de movimento, a interdependência das velocidades de propagação das ondas longitudinais no meio poroso devido à interação entre os constituintes. A tortuosidade a , em termos microscópicos, atua como uma modificação da velocidade de propagação do fluido. Podemos observar que a teoria de poroelasticidade em *Wilmanski*, [42], necessita de alguns parâmetros cuja interpretação física é diferente das que utilizamos nesse trabalho. Os parâmetros descritos por ele, estão relacionados com

as considerações realizadas em [7] e [8] no sentido de alinhar a teoria desenvolvida por *Biot* com a abordagem moderna da Termodinâmica Racional. Portanto, muitos termos foram recuperados e ganharam um novo significado ou simplesmente foram adaptados aos argumentos da teoria da poroelasticidade atual. Ressaltamos ainda, que possíveis diferenças nos resultados obtidos na modelagem realizada no presente trabalho, quando comparadas com [42], se devem ao fato das diferentes formulações nas teorias. Uma diferença, por exemplo, se encontra nos termos que relacionam a porosidade do meio. Esse termo na teoria aqui apresentada é dado de forma explícita na relação de dispersão, por exemplo na equação (8.18). Entretanto, nos resultados obtidos em [42], essa relação é dada por uma expressão que depende da tortuosidade a , que introduz o efeito de massa adicional, que neste trabalho é representado pelo termo $-(1-\phi)d_f\dot{\mathbf{v}}_f$ nas equações de governo, Eqs. (8.1),(8.36),(8.54) e que pode ser entendido como a força de inércia que atua contra o deslocamento do fluido causada pelo movimento do sólido através dele.

Uma outra diferença entre o modelo apresentado neste trabalho e o criado por Wilmanski, [42], consiste na hipótese de deformação homogênea do meio. Essa deformação faz com que as velocidades de fase e atenuações dependam do estado de tensões do meio, além das direções de propagação. Para estudar os efeitos dessa hipótese, foi necessário introduzir o modelo material Mooney-Rivlin com o qual pudemos explicitar o tensor acústico \hat{Q} em função da relação constitutiva do tensor de tensão efetiva do sólido para o modelo Mooney-Rivlin e da deformação homogênea F_{0s} . Portanto, para estudar o comportamento das ondas P1, P2 e S, além da necessidade de fornecer uma relação constitutiva (fixar um modelo material) é preciso conhecer o estado de deformações do meio, porém não dispomos dessa informação na literatura. Logo, para comparar os nossos resultados com os resultados de Wilmanski em [42], tivemos que realizar algumas hipóteses sobre a relação constitutiva do modelo Mooney-Rivlin a fim de obter dados coerentes para realizar essa comparação. Essa hipótese levou a um tensor de tensão efetiva nulo ao considerarmos que o tensor de deformação Cauchy-Green é a identidade, o que significa que o meio é não deformado em seu estado de referência, situação que se traduz, neste trabalho, como isotropia. A partir dessas considerações, as velocidades de fase e decaimento da frente de onda podem ser estudadas para o meio isotrópico, caso abordado por Wilmanski. Portanto, poderemos obter das Eq. (9.10) e Eq. (9.11) dados para as velocidades elásticas do sólido e fluido no meio isotrópico por comparação com a teoria linear (Lei de Hooke) e utilizá-las nas relações de dispersão dos modelos de propagação de ondas harmônicas apresentados, uma vez que são compatíveis com os dados utilizados por Wilmanski.

Como, em alguns casos, realizaremos comparações quantitativas entre o modelo de propagação neste trabalho e o modelo descrito em [42] é conveniente definir uma notação para as velocidades limites alcançadas. Vamos definir essas velocidade por: $P1_\infty, P2_\infty, S_\infty := \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$; $P1_0, P2_0, S_0 := \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$. E, de maneira análoga, definimos as atenuações $K(1, 2, S)_\infty := \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}(k(\omega))$ e $K(1, 2, S)_0 := \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}(k(\omega))$. Empregaremos o uso da letra w sobrescrita $P(1, 2)^w, K(1, 2)^w$ e S^w , para denotar os resultados obtidos em [42].

Para cálculos numéricos posteriores, tomaremos por conveniência, os seguintes valores obtidos por meio de comparação extraídos de [42]

$$s_1 = 56.250 \text{ kPa}, \quad s_2 = 50.625 \text{ kPa}, \quad \beta = 4.375 \text{ kPa}, \quad d_s = 4.167 \text{ kg/m}^3, \quad (10.1)$$

onde foram utilizadas as equações Eq. (9.10) e Eq. (9.11). Além disso, adotaremos vários valores para a porosidade no estudo qualitativo das relações de dispersão dos Modelo-1, Modelo-2 e Modelo-3, como um estudo similar não é realizado em [42] é necessário adaptar os dados utilizados.

Com os resultados, Eq. (10.1) e Eq. (9.10), temos para o estado natural do meio, os seguintes valores para as velocidades c_1, c_2 e c_s , utilizados nos Modelos-1 e 3 (para o Modelo-2, c_2 não é a velocidade em um fluido elástico) em função da porosidade

$$c_1 = \frac{1.936}{\sqrt{1-\phi}} \text{ m/s}, \quad c_2 = 1.000 \text{ m/s}, \quad c_s = \frac{1.162}{\sqrt{1-\phi}} \text{ m/s}. \quad (10.2)$$

Esse valores foram estimados da seguinte forma. Em [42], a velocidade c_1 , para a porosidade $\phi = 0,4$ é dada por:

$$c_1 := \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s^R}} = 2.500 \text{ m/s},$$

onde $\rho_s^R = 4.167 \text{ kg/m}^3$ é a densidade real adotada. Utilizando as notações neste trabalho e por comparação com a velocidade c_1 dada em [42], obtemos a constante de proporcionalidade em função dos parâmetros do modelo Mooney-Rivlin, que será utilizada com o objetivo de "normalizar" a velocidade c_1 , quando variarmos a porosidade do meio

$$\sqrt{\frac{\beta + 2(s_1 - s_2)}{(1-\phi)d_s}} = 2.500, \quad \text{então} \quad \sqrt{\frac{\beta + 2(s_1 - s_2)}{d_s}} = \sqrt{0,6} \times 2.500 = 1.936 \text{ m/s}.$$

Portanto, de

$$c_1 = \sqrt{\frac{\beta + 2(s_1 - s_2)}{(1 - \phi)d_s}}, \quad \text{podemos deduzir que} \quad c_1 = \frac{1.936}{\sqrt{1 - \phi}}.$$

De forma análoga podemos determinar a velocidade da onda de cisalhamento, c_s , em função da porosidade.

Um vez que a velocidade da onda $P2$ para o Modelo-2 dada por $c_2 = \sqrt{\frac{\phi \hat{P}_\phi}{d_f}}$, não é a velocidade da onda em um fluido elástico puro, como ocorre para a velocidade c_2 no Modelo-1, devemos relacioná-la com resultados que conhecemos no Modelo-1, com o objetivo de realizar os estudos qualitativos nas relações de dispersão do Modelo-2 de forma coerente. Para isso, vamos analisar a pressão em um fluido puro e realizar algumas considerações a fim de obter alguma aproximação para velocidade c_2 no Modelo-2. Como ressaltado anteriormente, a pressão do fluido em função da energia livre é dada por,

$$p_f = \rho_f^2 \frac{\partial \psi_f^0(\rho_f)}{\partial(\rho_f)}, \quad \text{logo} \quad p_f = \phi^2 d_f \frac{\partial \psi_f^0(\phi d_f)}{\partial \phi},$$

onde d_f é constante no Modelo-2. Expandindo a energia livre, podemos aproximar para algum valor ϕ_0

$$\psi_f^0(\phi d_f) = \psi_f^0(\phi_0 d_f) + \left. \frac{\partial \psi_f^0(\phi d_f)}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_0} (\phi - \phi_0) + o(2).$$

Para $\phi_0 = 0,5$ e $0,2 \leq \phi \leq 0,8$, podemos assumir que o termo de segunda ordem em $|\phi - \phi_0|$ pode ser desprezado, e obter:

$$\frac{\partial \psi_f^0(\phi d_f)}{\partial \phi} \approx \left. \frac{\partial \psi_f^0(\phi d_f)}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = C_0,$$

onde C_0 é uma constante. O que implica em

$$P \approx \phi d_f C_0.$$

Vamos assumir que o tensor de resistividade é uma função apenas do gradiente de deformação do sólido e da velocidade relativa, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(F_s, V)$, obtemos que $\hat{P}_\phi = P_\phi$ e, portanto, a velocidade da onda $P2$ para o Modelo-2 é aproximada por

$$c_2 = \sqrt{\frac{\phi P_\phi}{d_f}} \approx \sqrt{\phi C_0}.$$

Para ser consistente com a Eq. (10.1), tomaremos $\sqrt{C_0} = 1.581$, de forma que podemos considerar a velocidade da onda $P2$ com o seguinte valor:

$$c_2 = 1.581\sqrt{\phi} \text{ m/s},$$

para substituir o valor c_2 correspondente na Eq. (10.2) do Modelo-2.

Os gráficos do problema $\det(A) = 0$, para o caso especial (7.10) e (7.11), foram gerados com o auxílio do *software Maple 13*.

Como os resultados obtidos no presente trabalho e em [42] não são comparados com dados experimentais, vamos usar a nomenclatura "*diferença relativa percentual*" com o objetivo de comparar numericamente os resultados. Definimos a diferença relativa percentual da seguinte forma, $d_r = \frac{|v_{P1_w, P2_w}^{0, \infty} - v_{P1, P2}^{0, \infty}|}{v_{P1_w, P2_w}^{0, \infty}} \cdot 100$.

10.1 Resultados Numéricos Para o Modelo com Sólido Incompressível

Geramos alguns gráficos que mostram as diferenças das velocidades de fase e atenuações nos modelos apresentados neste trabalho e em [42]. Os parâmetros utilizados nesta comparação foram $Q_w = 0,2$ GPa, $a = 1,75$, $c_1 = 2.500$ m/s, $c_2 = 1.000$ m/s, $\phi = 0,4$, $d_f = 625$ kg/m³, $d_s = 4.166,6$ kg/m³ e $R = 10^8$ kg/m³s. Com exceção dos parâmetros Q_w e a , que só são utilizados em [42], todo restante é comum a ambos os modelos.

A velocidade para frequências próximas da origem, para a onda $P1$ que utilizamos é dada pela equação $(U^2 - c_1^2)(U^2 - c_2^2) - \left(\frac{d_f}{d_s} \frac{1 - \phi}{\phi} c_2^2\right) U^2 = 0$ e, em [42] a mesma velocidade é dada por $U^2 = \frac{c_1^2 + r c_2^2 + 2 \frac{Q_w}{\rho_s}}{1 + r}$, onde $r = \frac{\rho_f}{\rho_s}$. Dessas equações seguem as velocidades limites encontradas em ambos os trabalhos. Obtivemos que as velocidades para baixas frequências das ondas $P1$ obtidas possuem valores bem próximos, $P1_0 = 2,499.422964$ m/s e $P1_0^w = 2.432,138354$ m/s, como podemos observar em Fig. 10.1 e apresentam uma diferença relativa percentual, $d_r = \frac{|P1_0^w - P1_0|}{P1_0^w} \cdot 100 = 2,766479542\%$. Assim como o limite para a velocidade de fase para altas frequên-

cias nos fornece $P1_\infty := U^2 = \frac{\phi(1-\phi)d_s c_1^2 + c_2^2 d_f}{\phi(1-\phi)d_s + \phi^2 d_f} = 2.551,987842 \text{m/s}$ e $P1_\infty^w := r\{(1-r(1-a))c_\infty^2 - c_1^2\}\{ac_\infty^2 - c_2^2\} - r\{r(1-a)c_\infty^2 - \frac{Q_w}{\rho_s}\}^2 = 2.468,0963231 \text{m/s}$, que foi retirada de [42]. A diferença relativa percentual entre as velocidades, nesse caso, é de $d_r = 3,399037396\%$.

A figura, Fig. 10.2, mostra a atenuação sofrida pela onda P1. Os valores limites para as atenuações foram $K1_\infty = 1,648725586 \text{ [1/m]}$ e $K1_\infty^w = 1,529421044 \text{ [1/m]}$ o que fornece uma diferença $d_r = 7,800634264\%$.

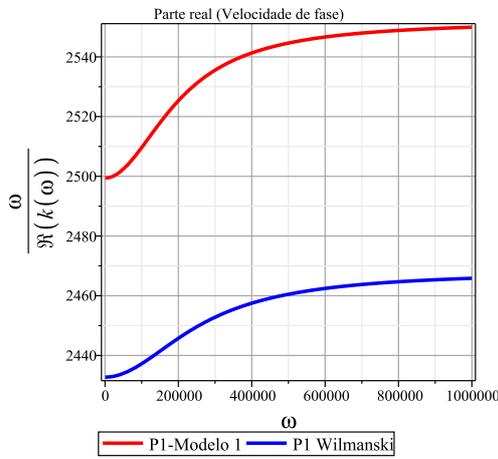


Figura 10.1: Velocidade de fase gerada nesse trabalho (vermelho) e em [42] (azul).

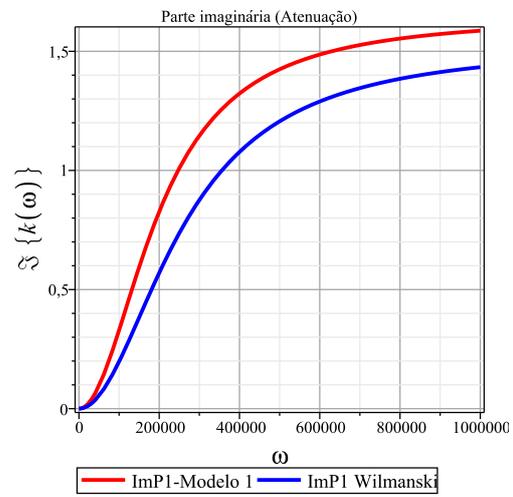


Figura 10.2: Atenuação gerada nesse trabalho (vermelho) e em [42] (azul).

Na figura 10.3, observamos uma diferença numérica mais acentuada entre os dois modelos de propagação. A velocidade de propagação da onda P2, para frequências muito altas, $\omega \rightarrow \infty$, possui o valor $P2_\infty = 979,3797652 \text{m/s}$, enquanto o resultado obtido em [42] vale $P2_\infty^w = 745,9529208 \text{m/s}$, gerando a diferença $d_r = 31,29243653\%$. A diferença entre esses valores pode ser consequência das diferentes formulações nas teorias de meios porosos. Por exemplo, a influência do parâmetro de acoplamento entre as tensões parciais, Q_w , dos constituintes do meio. Como ressaltado em [42], esse parâmetro altera quantitativamente as velocidades de fase, mas não qualitativamente.

A velocidade da onda P2, para frequências próximas de zero, deve desaparecer

como previsto teoricamente. Esse fato é ilustrado em Fig. 10.4, no qual exibimos as velocidades da onda $P2$ com $\omega \leq 10^{-3}$. Além disso, calculamos os valores limites para a atenuação da onda $P2$ do Modelo-1 e em [42]. Os valores limites encontrados para o nosso modelo foram: $K2_\infty = 85,55666501$ [1/m] e, para o modelo [42], Fig. 10.5 $K2_\infty^w = 156,5423996$ [1/m]. Esses resultados apresentam uma diferença relativa percentual de $d_r = 45,34601154\%$.

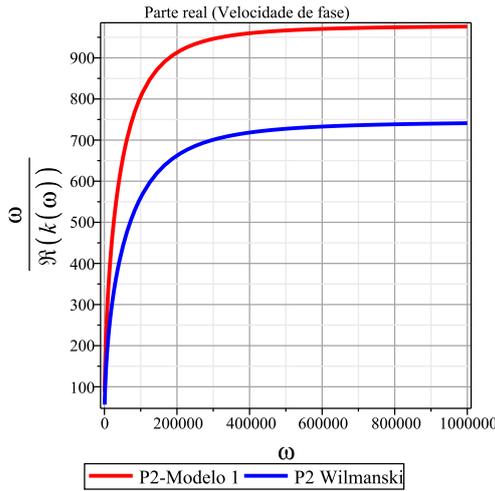


Figura 10.3: A diferença das velocidades de fase das ondas $P2_\infty$ e $P2_\infty^w$.

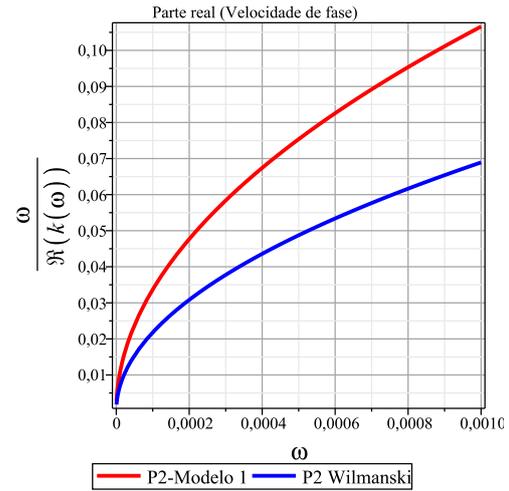


Figura 10.4: os valores limites para as ondas $P2_0$ e $P2_0^w$, com $\omega \leq 10^{-3}$.

Abaixo, comparamos as velocidades de fase das ondas transversais, Fig. 10.6 e as atenuações, Fig. 10.7 sofridas para o Modelo-1 e em [42]. As velocidades de fase limites encontradas foram $S_0 = 1.430,323126$ m/s e $S_0^w = 1.430,323126$ m/s. Obviamente, a diferença relativa é desprezível. E as atenuações para essa onda foram de $KS_\infty = 5,3328514$ [1/m] e $KS_\infty^w = 4,262957327$ [1/m] gerando uma diferença $d_r = 25,09746148\%$. Além disso, os limites para as ondas transversais em frequências muito altas, $\omega \rightarrow \infty$, para este trabalho é de $S_\infty = 1.500,135550$ m/s, que é muito próximo do resultado obtido no trabalho [42], que gerou $S_\infty^w = 1.468,987475$ m/s, apresentando uma diferença relativa $d_r = 2,120377099\%$.

Os dados utilizados para gerar os gráficos foram $c_s = 1.500$ m/s, $\phi = 0,4$, $d_f = 625$ kg/m³, $d_s = 4.166,6$ kg/m³, $a = 1,75$, $R = \pi = 10^8$ kg/m³s.

A figura 10.8 exhibe as velocidades de fase limite, $\omega \rightarrow 0$, para ambos os

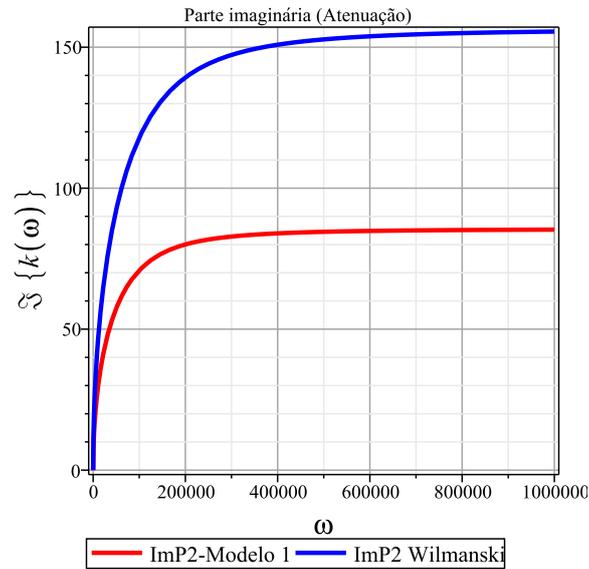


Figura 10.5: A diferença entre as ondas geradas pela teoria [42] e [31] está de acordo com os resultados obtidos para as velocidades de fase das ondas P2 Fig. 10.3.

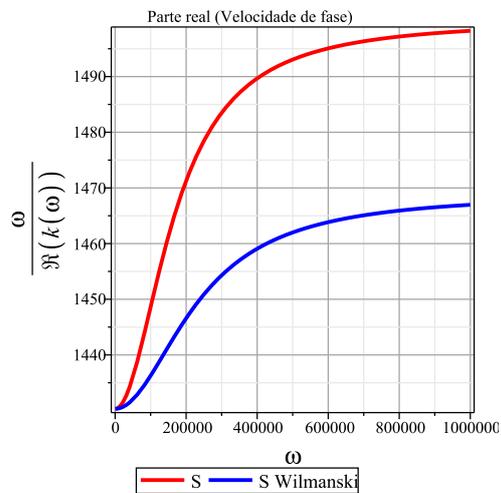


Figura 10.6: Velocidade de fase da onda de cisalhamento.

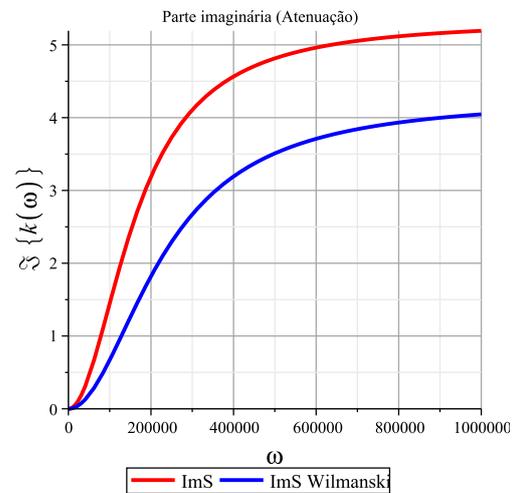


Figura 10.7: Atenuação sofrida pela onda de cisalhamento.

modelos. No caso das ondas transversais em [42], foi demonstrado a independência do termo de acoplamento entre as tensões parciais Q_w .

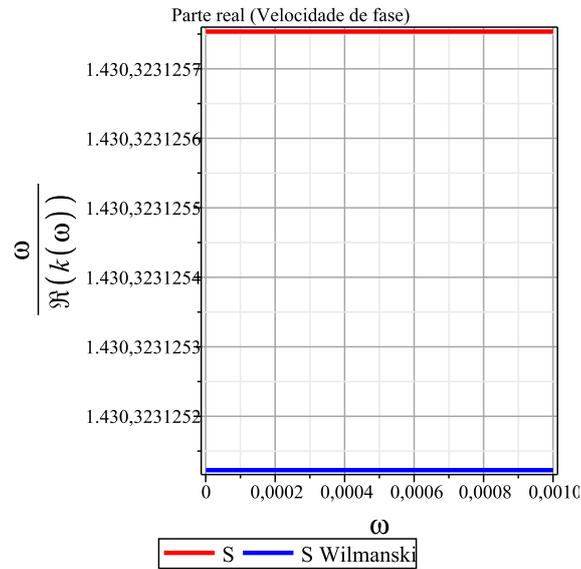


Figura 10.8: Diminuímos a escala do gráfico da velocidade de fase da onda S em torno da interseção com o eixo vertical.

10.2 Influência da porosidade na relação de dispersão

Nesta seção analisaremos como o comportamento das velocidades de fase e atenuações para as ondas $P1$, $P2$ e S mudam ao variarmos a porosidade do meio. Faremos essa análise para cada um dos modelos de propagação que nos referiremos como Modelo-1, para o modelo com sólido incompressível, Modelo-2 com fluido incompressível e Modelo-3 com sólido e fluido incompressíveis. Utilizaremos para este fim o seguinte conjunto de dados da tabela (10.1), em que c_1 é a velocidade de

Parâmetros	d_s	d_f	c_1	c_2	c_s	R
Unidades	kg/m ³	kg/m ³	m/s	m/s	m/s	kg/m ³ s ⁻¹
Valores	4.166,6	650	$\frac{1,936}{\sqrt{1-\phi}}$	1.000	$\frac{1,162}{\sqrt{1-\phi}}$	10^8

Tabela 10.1: Parâmetros utilizados nas relações de dispersão para os modelos com porosidade $\phi = \{0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$.

propagação da onda $P1$, c_s é a velocidade de propagação da onda de cisalhamento S em função da porosidade, ambas no sólido elástico. E c_2 , velocidade da onda $P2$ em um fluido elástico e R é a resistividade do meio.

Veremos que o comportamento dos gráficos das velocidades de fase e atenuações apresentam um crescimento nas velocidades limites a medida que aumentamos a porosidade do meio. Esse comportamento, embora não muito intuitivo, pode ser explicado ao notarmos que a velocidade de propagação no sólido elástico, $c_1 = \frac{1,936}{\sqrt{1-\phi}}$ para a onda P1 e $c_s = \frac{1,162}{\sqrt{1-\phi}}$ para a onda S, utilizada nas relações de dispersão para diferentes valores de porosidade mostram, que quanto maior a porosidade fixada para o meio, menor será o denominador das referidas velocidades e, portanto, os valores de c_1 e c_s serão maiores. Fato também observado nas soluções simplificadas (Eq. 8.20 e Eq. 8.33), que fornecem as relações de dispersão, cujo os termos $c_1 = \sqrt{\frac{\mathbf{n} \cdot \hat{Q}\mathbf{n}}{(1-\phi)d_s}}$ e $c_s = \sqrt{\frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q}\mathbf{m}}{(1-\phi)d_s}}$ aparecem.

Na legenda das imagens que apresentaremos, as notações $P(1,2)_{n\%}$, $ImP(1,2)_{n\%}$ e $S_{n\%}$, representam o valor em porcentagem (n) da porosidade considerada para o meio na relação de dispersão.

10.2.1 Influência da Porosidade nas Velocidades de Fase com Constituinte Sólido Incompressível

A onda $P1$ se propaga através da estrutura sólida em fase com o fluido (pp. 812-813, [25]). Como discutido no segundo parágrafo dessa seção, uma porcentagem maior de poros (preenchidos pelo fluido), não altera a característica de crescimento das velocidades de propagação da onda, como exibido em Fig. 10.9. Mais precisamente, podemos notar nos termos que apresentam as densidades parciais dos constituintes descritos nas soluções simplificadas das relações de dispersão, que na medida em que a porosidade do meio aumenta, a densidade parcial do sólido, ρ_s , diminui. Esse comportamento faz com que muitos dos coeficiente da equação biquadrada, que acompanham as velocidades elásticas no sólido e fluido, possuam valores muito altos. Portanto, é razoável presumir que as velocidades de propagação das ondas tendem a aumentar com o acréscimo da porosidade do meio. Uma outra característica nas velocidades de fase, é que em geral, elas sofrem pouca influência da variação da frequência. Esse fato é notado pelo comportamento quase constante nos gráficos das velocidades de fase, Fig. 10.9. Isso significa que a onda $P1$ sofre pouca dispersão ao se propagar pelo meio. Além disso, como já estabelecido na literatura, a onda $P1$ sofre pouca atenuação, Fig. 10.10. Essa característica também pode ser

justificada pelo fato da onda $P1$ induzir um movimento do constituinte fluido em fase com a matriz sólida (cap.1, [19]).

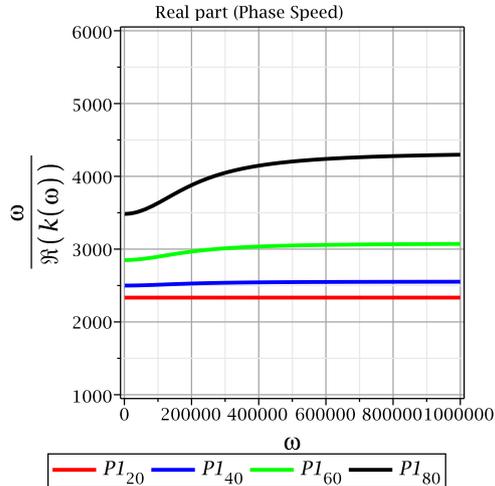


Figura 10.9: Velocidades de fase da onda $P1$ para vários valores de porosidade.

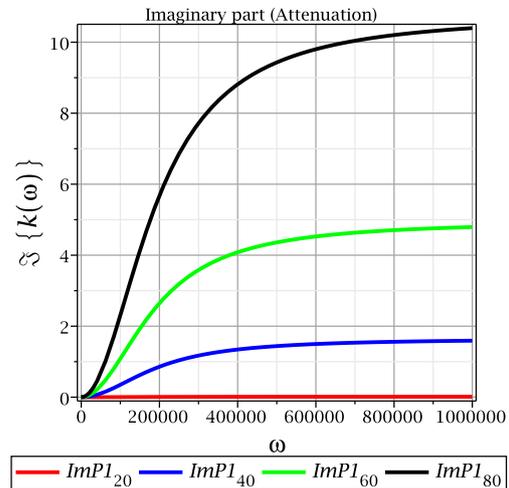


Figura 10.10: Atenuação da onda $P1$ para vários valores de porosidade.

A onda P -lenta ou $P2$, também se propaga na interface sólido-fluido, mas ao contrário da propagação da onda $P1$, a propagação é associada primeiramente ao movimento do fluido nos poros e modificada pela presença da matriz sólida (ver [34]), com esse movimento ocorrendo fora de fase. Em consequência, essa onda sofre uma maior atenuação ao se propagar pelo meio poroelástico, como podemos observar em Fig. 10.13. As velocidades de fase são sensíveis a baixas frequências como exibido em Fig. 10.12, na qual notamos que um aumento na frequência (para cada velocidade de fase associada a uma porosidade) resulta em uma diminuição na taxa de crescimento das velocidades de fase da onda, Fig. 10.11. Esses resultados vão ao encontro dos resultados obtidos em [1] e [3].

Fixada a porosidade do meio, a atenuação sofrida pela onda $P2$ é mais sensível para baixas frequências, Fig. 10.13, na qual observamos uma taxa de crescimento elevada para $\omega \leq 10^5$, se comparada com valores maiores no eixo das frequências em que, basicamente a influência da porosidade é observada. Esse comportamento fica evidente para valores muito altos de ω , onde as atenuações encontram valores assintóticos em todos os gráficos. Além disso, podemos notar que existe um padrão entre o crescimento da atenuação em função da diminuição da porosidade e do

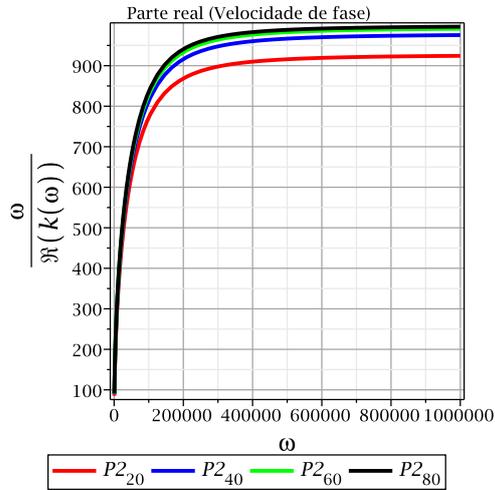


Figura 10.11: Velocidades de fase da onda P2 para vários valores de porosidade.

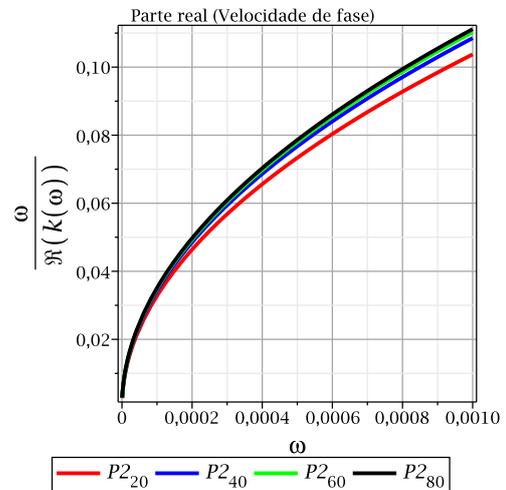


Figura 10.12: Gráfico da velocidade de fase da onda P2 para $\omega \leq 10^{-3}$.

crescimento da frequência (para baixos valores de ω), Fig. 10.14. Isso significa que quanto maior a frequência e menor a porosidade, mais rapidamente ocorre o decaimento da amplitude da onda. Dessa forma, quanto maior a densidade parcial do sólido, mais acentuado será o decaimento da frente de onda. Esse comportamento é oposto ao encontrado no gráfico que representa o decaimento da frente de onda P1, Fig. 10.10.

As imagens a seguir, Tab. 10.2, Fig. 10.15, Tab. 10.3 e Fig. 10.16, mostram as velocidades de fase da onda P1 em função da porosidade do meio para altas e baixas frequências, respectivamente. Em Tab. 10.4 e Fig. 10.17, temos a representação gráfica para a atenuação sofrida pela onda P1 em função da porosidade do meio com os valores limites, ($\omega \rightarrow \infty$).

A figura 10.18, mostra a diferença nas velocidades de fase, com frequências próximas de zero, $\omega \rightarrow 0$, em azul, e para o limite, $\omega \rightarrow \infty$, em vermelho, para onda P1 em função da variação da porosidade do meio. Como observado anteriormente, existe pouca influência da frequência nas velocidades de fase, então as mudanças se devem, essencialmente, à variação da porosidade do meio.

A representação das velocidades de fase limite, $\omega \rightarrow \infty$, e atenuações sofridas

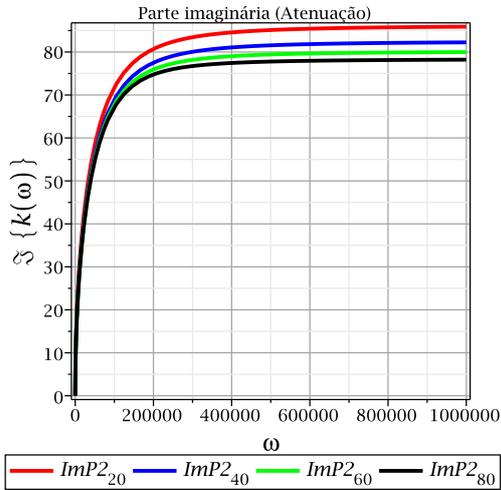


Figura 10.13: Atenuação da onda P2 para vários valores de porosidade.

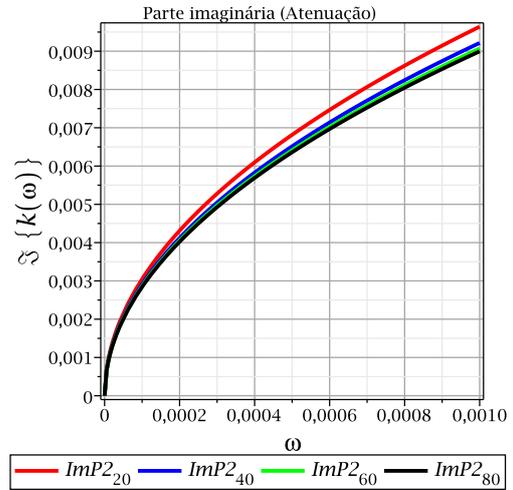


Figura 10.14: Gráfico da atenuação da onda P2 para $\omega \leq 10^{-3}$.

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	2.334,374751
0,4	2.554,050025
0,6	3.080,013877
0,8	4.333,782413

Tabela 10.2: Velocidade de fase da onda P1, variando a porosidade para altas frequências.

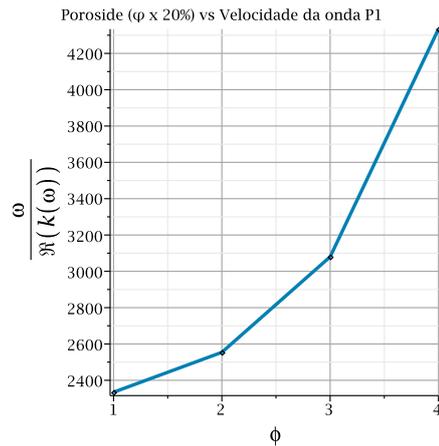


Figura 10.15: Representação gráfica da velocidade da onda P1 para altas frequências.

das pela onda P2 em função da variação da porosidade são exibidas nas imagens (Tab. 10.5, Fig. 10.19) e (Tab. 10.6, Fig. 10.20), respectivamente. De modo semelhante ao que encontramos para as ondas P1, quanto mais poroso o meio se torna, maior a velocidade de fase da onda P2, Tab. 10.5 e Fig.10.19. Além disso, quando a porosidade do meio atinge valores superiores a 60%, $\phi \geq 60\%$, não observamos mudanças significativas para as velocidades limites da onda P2. As imagens, Tab. 10.6

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	2.334,009962
0,4	2.499,425050
0,6	2.849,598340
0,8	3.484,307538

Tabela 10.3: Velocidade de fase da onda P1, variando a porosidade para baixas frequências.

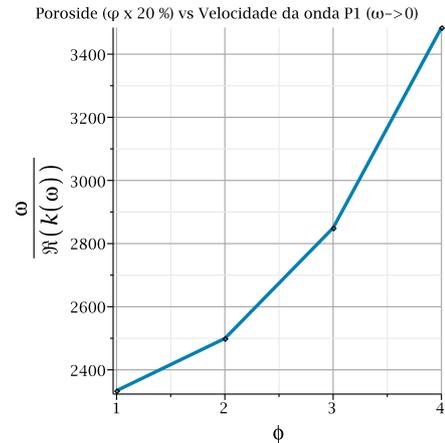


Figura 10.16: Representação gráfica da velocidade da onda P1 para baixas frequências.

Porosidade (ϕ)	Atenuação (1/m)
0,2	0,01473878751
0,4	1,649208403
0,6	4,954465161
0,8	10,76436264

Tabela 10.4: Atenuação da onda P1, variando a porosidade para altas frequências.

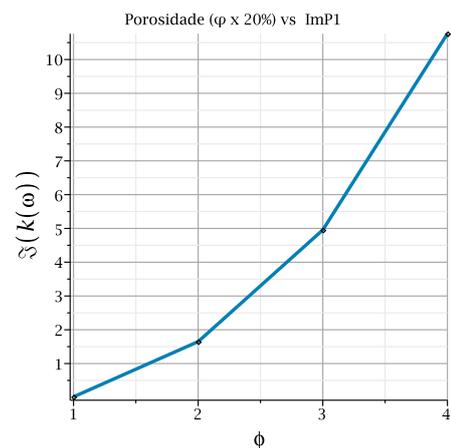


Figura 10.17: Representação gráfica da atenuação da onda P1 para frequências altas.

e Fig. 10.20, mostram os valores ($\omega \rightarrow \infty$) da atenuação sofrida pela onda P2 ao se propagar no meio para diferentes valores de porosidade. Fica evidente que quanto menos poroso o meio, maior é a atenuação da onda P2. Isso Mostra o comportamento difusivo da onda P2, em que o movimento do constituinte sólido ocorre fora de fase, provocando o decaimento da onda P2.

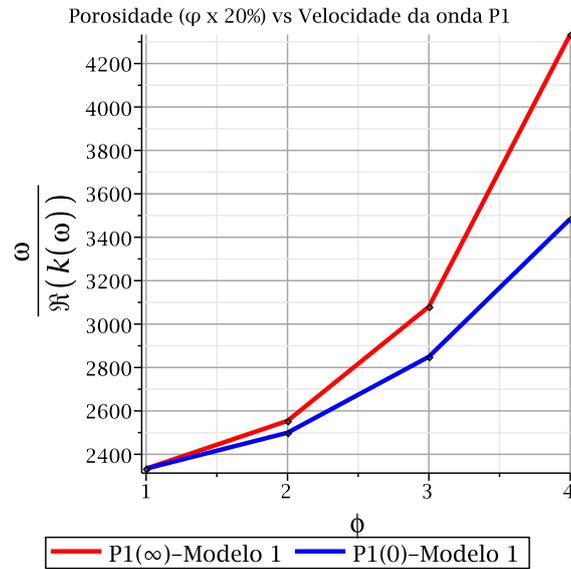


Figura 10.18: O gráfico mostra a diferença entre as velocidades de propagação da onda P1 sob a influência da mudança da porosidade do meio em baixas frequências (azul) e altas frequências (vermelho).

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	927,2349276
0,4	978,5889977
0,6	993,8542153
0,8	998,9028512

Tabela 10.5: Velocidade de fase da onda P2, variando a porosidade em altas frequências.

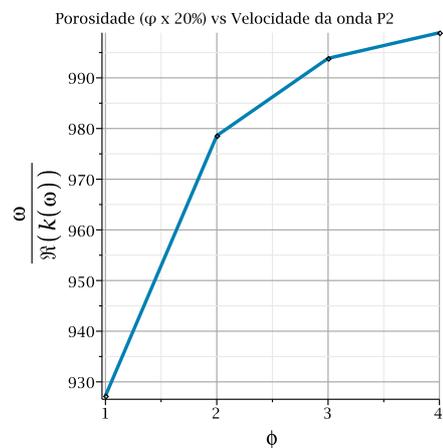


Figura 10.19: Representação gráfica da velocidade da onda P2 para frequências altas.

Os gráficos retratam a influência da mudança da resistividade do meio na velocidade de fase e atenuação da onda P1 figuras Fig. 10.21, Fig. 10.22 e P2 figuras Fig. 10.23 e Fig. 10.24. Os parâmetros utilizados para gerar o gráfico foram, $10^4 \leq$

Porosidade (ϕ)	Atenuação (1/m)
0,2	86,16282544
0,4	82,47625355
0,6	80,15445172
0,8	78,35490678

Tabela 10.6: Atenuação da onda P2, variando a porosidade em altas frequências.

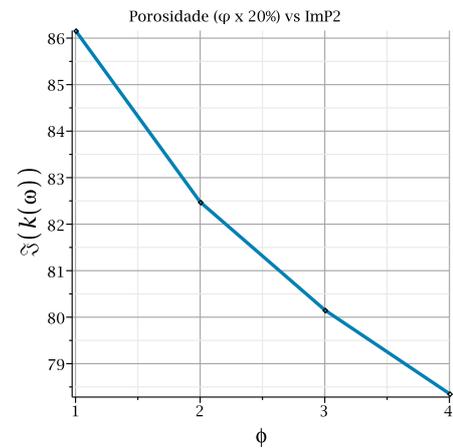


Figura 10.20: Representação gráfica da atenuação da onda P2 para frequências altas.

$R \leq 10^9 \text{ m}^2$, $d_s = 4.166,6 \text{ kg/m}^3$, $d_f = 625 \text{ kg/m}^3$, $\phi = 0,4$, $c_1 = 2.500 \text{ m/s}$, $c_2 = 1.000 \text{ m/s}$.

Velocidade de fase P1 como função da frequência e resistividade

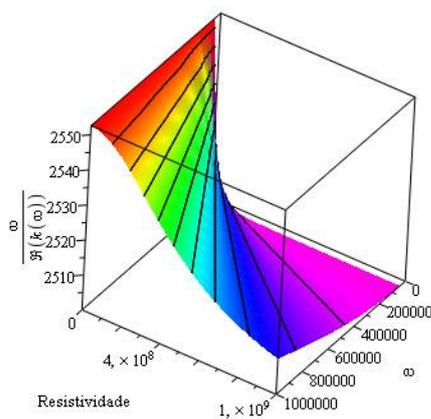


Figura 10.21: Velocidade de fase da onda P1 em função da frequência e resistividade do meio.

Atenuação P1 como função da frequência e resistividade

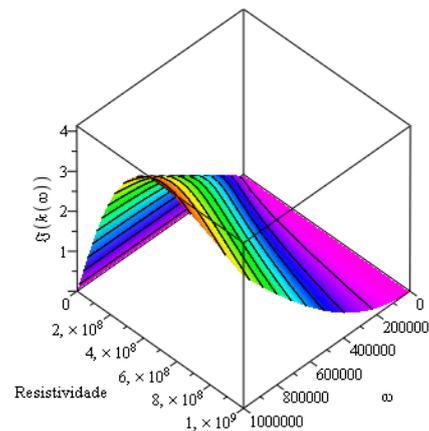


Figura 10.22: Atenuação sofrida pela onda P1 em função da frequência e resistividade do meio.

Velocidade de fase P1 como função da frequência e resistividade

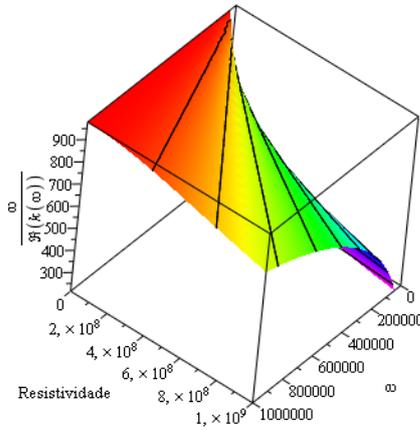


Figura 10.23: Velocidade de fase da onda P2 em função da frequência e resistividade do meio.

Atenuação P2 como função da frequência e resistividade

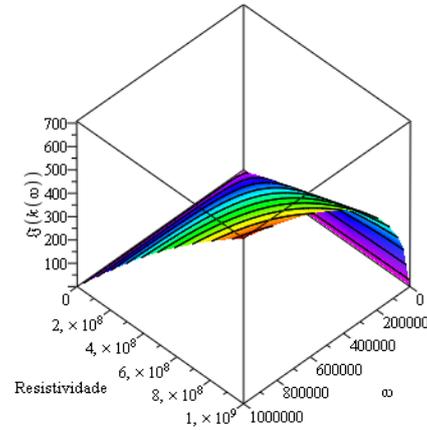


Figura 10.24: Atenuação sofrida pela onda P2 em função da frequência e resistividade do meio.

10.2.2 Resultados Numéricos Para o Modelo com Sólido Incompressível Ondas Transversais

A seguir analisamos alguns resultados obtidos para as ondas de cisalhamento. Os gráficos foram gerados com os parâmetros da tabela (10.1). Variamos apenas os valores para porosidade do meio, $\phi = \{0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$. Observamos que os limites para velocidades de propagação da onda S não se alteram significativamente quando variamos a frequência. Entretanto, quando consideramos a variação da velocidade de fase em função da porosidade, tanto para baixas quanto para altas frequências, notamos uma considerável influência no comportamento dos gráficos. Além disso, as velocidades alcançadas pela onda S , são menores que as que obtivemos para as ondas $P1$. Esse comportamento se deve ao fato da onda $P1$ ser uma onda de compressão e, dessa forma, ao transmitir energia para o meio, ela o faz de forma mais eficiente do que a onda S , que induz um movimento para as partículas em uma direção transversal à direção de propagação da onda (Seç. 2.8, [39]). Esses resultados estão de acordo com os que foram obtidos na parte teórica, na qual a velocidade de propagação para baixas frequências, $\omega \rightarrow 0$, é dada por

$$U^2 = \frac{c_s^2(1 - \phi)d_s d_f}{d_f((1 - \phi)d_s + \phi d_f)} = \frac{c_s^2 \rho_s}{\rho}, \quad (10.3)$$

e para altas frequências ($\omega \rightarrow \infty$),

$$U^2 = \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{Q} \mathbf{m}}{(1 - \phi) d_s} = c_s^2. \quad (10.4)$$

A figura 10.25, mostra que os valores para as velocidades de fase tanto para baixas frequências, ($\omega \rightarrow 0$), quanto para altas frequências, ($\omega \rightarrow \infty$), são sensíveis à variação da porosidade do meio. Para altas frequências, o resultado mostra uma convergência assintótica para velocidades de fase limites, dadas pelas equações Eq. (10.4). Não existe uma diferença significativa para baixas e altas frequências. Isso sugere que o meio é pouco dispersivo. Como a onda de cisalhamento se propaga pela matriz sólida em fase com o movimento do fluido, não ocorre um "processo difusivo" e, portanto, observamos baixos valores para o decaimento de sua amplitude, Fig. 10.26.

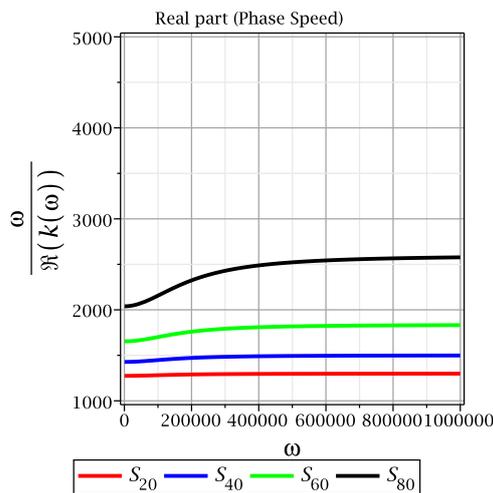


Figura 10.25: Velocidade de fase da onda de cisalhamento para $\phi = \{0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$.

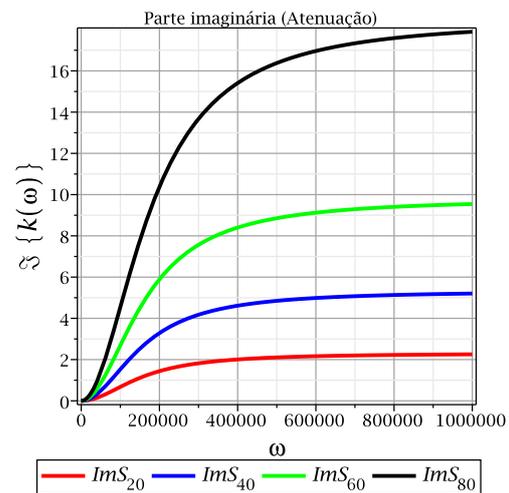


Figura 10.26: Atenuação da onda de cisalhamento para a porosidade do meio variando.

A seguir estão os valores alcançados pela onda de cisalhamento, Tab. 10.7 e a representação gráfica, Fig. 10.27, das velocidades de fase limite para altas frequências em função da variação da porosidade. Na figura 10.28, exibimos o comportamento da atenuação para a frequência limite, $\omega \rightarrow \infty$, da onda de cisalhamento. Na representação gráfica, Fig. 10.29, da tabela 10.9, exibimos as velocidades para baixas frequências das ondas de cisalhamento em função da porosidade.

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	1.299,155495
0,4	1.500,135549
0,6	1.837,283320
0,8	2.598,310989

Tabela 10.7: Velocidade de fase da onda S, variando a porosidade em altas frequências.

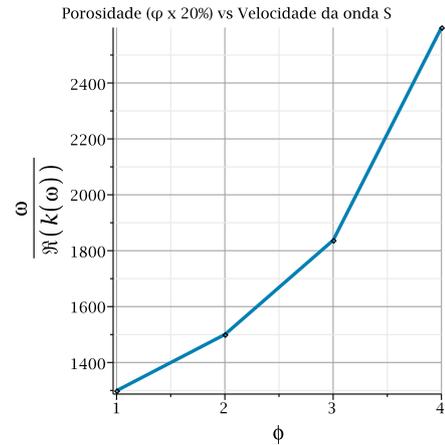


Figura 10.27: Representação gráfica da velocidade da onda S para frequências altas.

Porosidade (ϕ)	Atenuação (1/m)
0,2	2,3090077
0,4	5,3324249
0,6	9,796289935
0,8	18,47206145

Tabela 10.8: Atenuação da onda S, variando a porosidade em altas frequências.

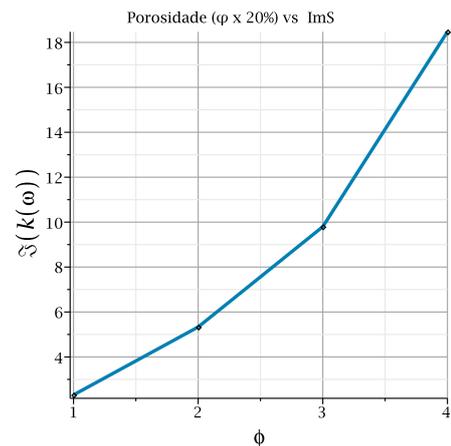


Figura 10.28: Atenuações da onda de cisalhamento, $\omega \rightarrow \infty$, e porosidade do meio variando $\phi = \{0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8\}$.

10.2.3 Resultados Numéricos Para o Modelo com Fluido Incompressível

Analisaremos a seguir, a influência da variação da porosidade do meio somente para a velocidade de propagação das ondas P1 e P2, uma vez que a relação de dispersão, que fornece a velocidade de fase e a atenuação para a onda S nesta

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	1.274,541593
0,4	1.427,734988
0,6	1.653,947982
0,8	2.038,941626

Tabela 10.9: Velocidade de fase da onda S, variando a porosidade em baixas frequências.

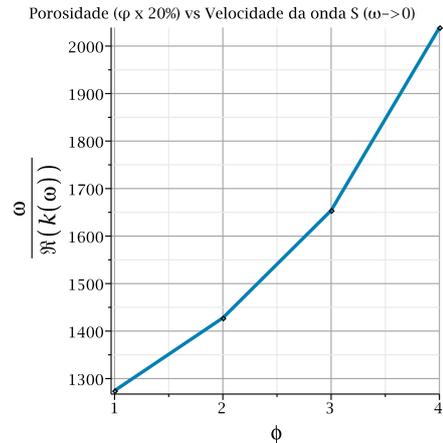


Figura 10.29: Velocidades limites para baixas frequências para a onda de cisalhamento com a porosidade do meio variando.

seção, é idêntica ao caso com densidade do constituinte sólido constante. Os dados utilizados nas relações de dispersão desse modelo são os mesmos descritos da tabela 10.1, exceto a para a velocidade, c_2 , de propagação da onda P2, que como vimos anteriormente, é dado por $c_2 = 1.581\sqrt{\phi}$ m/s.

Assim como no Modelo-1, tanto as velocidades limites para as ondas P1, Fig. 10.30, quanto as atenuações, Fig. 10.31, apresentam convergência para altas frequências e a influência do aumento na porosidade do meio, causa um aumento significativo nas velocidades de fase para frequências próximas de zero.

A velocidade de fase da onda P2, bem como sua atenuação, são apresentadas em Fig. 10.32 e em Fig. 10.33, respectivamente. Nesse caso, se compararmos os resultados para onda P2 do Modelo-1, perceberemos uma grande diferença quantitativa entre os gráficos. As imagens, Fig. 10.34 e Tab. 10.10 representam o limite das velocidades de fase para a onda P1 em altas frequências.

Nas imagens, Fig. 10.35 e Tab. 10.11, apresentamos os casos limites, $\omega \rightarrow \infty$, das atenuações alcançadas pela onda P1. Em Fig. 10.36 e Tab. 10.12, exibimos as velocidades de fase em baixas frequências para as ondas P1 com os valores da porosidade variando. Já as velocidades limites da onda P2 são apresentadas em Fig. 10.37 e Tab. 10.13 e suas respectivas atenuações estão representadas nas imagens

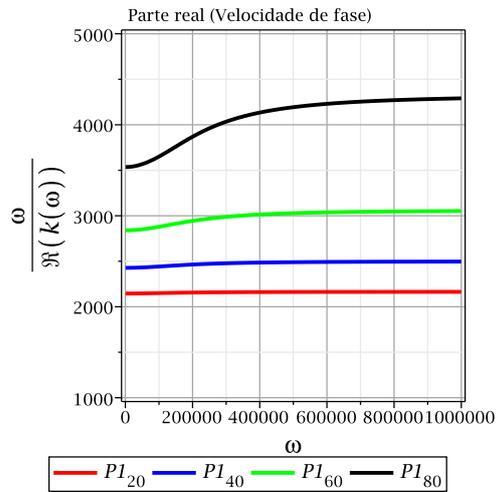


Figura 10.30: Velocidades de fase da onda P1 para vários valores de porosidade.

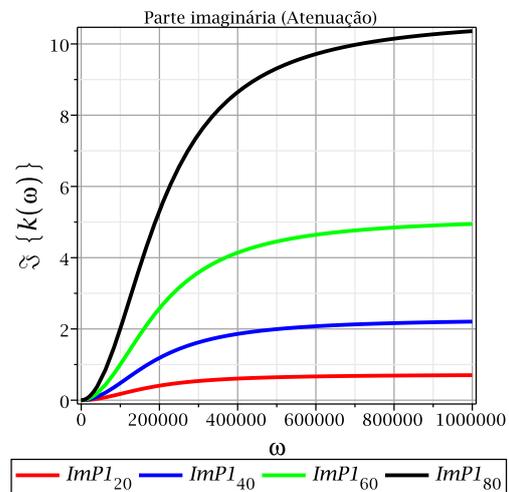


Figura 10.31: Atenuação da onda P1 para vários valores de porosidade.

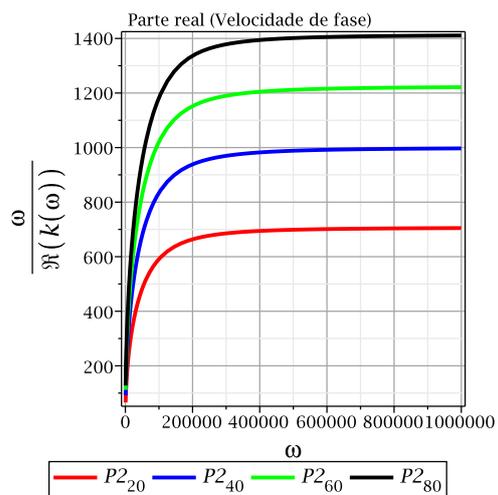


Figura 10.32: Velocidades de fase da onda P2 para vários valores de porosidade.

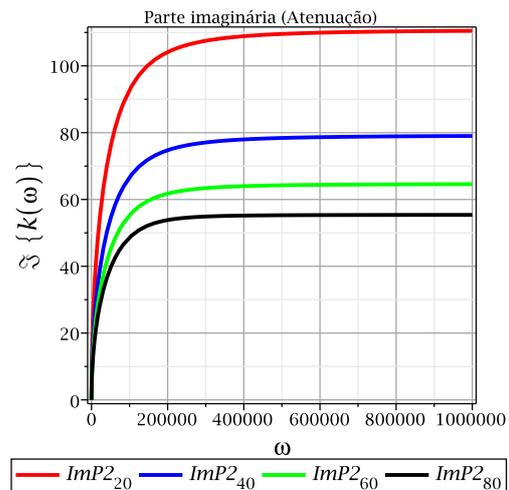


Figura 10.33: Atenuação da onda P2 para vários valores de porosidade.

Fig. 10.38 e Tab. 10.14.

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	2.164,513800
0,4	2.499,365251
0,6	3.061,084776
0,8	4.329,027599

Tabela 10.10: Velocidade de fase da onda P1, variando a porosidade em altas frequências.

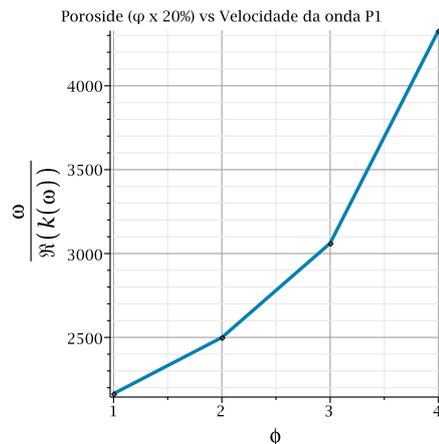


Figura 10.34: Velocidades limites para altas frequências da onda P1 com a porosidade do meio variando.

Porosidade (ϕ)	Atenuação (1/m)
0,2	0,7237218122
0,4	2,285750110
0,6	5,132861589
0,8	10,75597349

Tabela 10.11: Atenuação da onda P1, variando a porosidade em altas frequências.

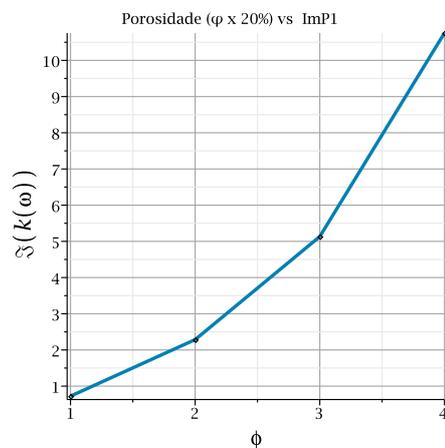


Figura 10.35: Valores limites de atenuação da onda P1 para altas frequências, com porosidade do meio variando.

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	2.145,481058
0,4	2.427,725058
0,6	2.840,326855
0,8	3.535,595322

Tabela 10.12: Velocidade da onda P1, variando a porosidade em baixas frequências

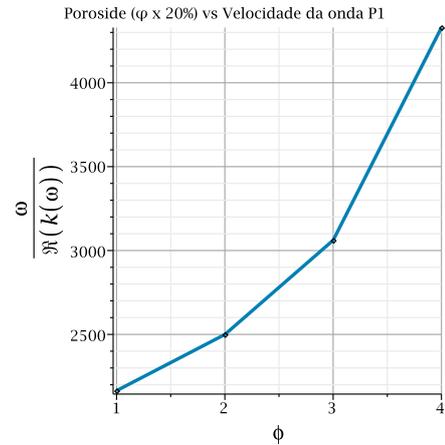


Figura 10.36: Valores limite para velocidade de fase da onda P1, para baixas frequências com porosidade do meio variando.

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	707,0446945
0,4	999,9121963
0,6	1.224,637334
0,8	1.414,089389

Tabela 10.13: Velocidade da onda P2, variando a porosidade em altas frequências.

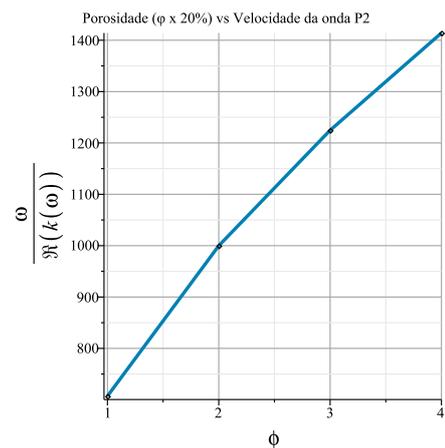


Figura 10.37: Valores limites da velocidade de fase da onda P2 para altas frequências, com porosidade do meio variando.

10.2.4 Resultados Numéricos Para o Modelo com sólido e fluido Incompressíveis

Os resultados para o Modelo-3, estão representados nas imagens abaixo, Fig. 10.39 a Fig. 10.42. Assim como previsto em [31], obtivemos apenas uma onda

Porosidade (ϕ)	Atenuação (1/m)
0,2	110,8223167
0,4	79,21646807
0,6	64,67997533
0,8	55,41115839

Tabela 10.14: Atenuação da onda P2, variando a porosidade em altas frequências.

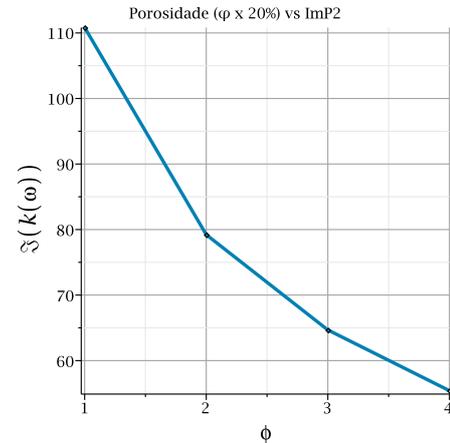


Figura 10.38: Valores limites da atenuação da onda P2 para altas frequências, com porosidade do meio variando.

de compressão P . Portanto, para gerar todos os gráficos, utilizamos os dados da tabela, Tab. 10.1, excluindo a velocidade da onda c_2 , pois para esse modelo a relação de dispersão independe dessa velocidade. O comportamento qualitativo das velocidades de fase e atenuações, apresentam coerência com os resultados obtidos nos Modelos 1 e 2. Não exibiremos os resultados para a onda S, uma vez que a relação de dispersão é a mesma encontrada para o Modelo-1. As atenuações da onda P para baixas e altas frequências são apresentadas em 10.40.

Abaixo apresentamos alguns valores limites para a propagação da onda P , Tab. 10.15, Fig. 10.41. Nos valores numéricos alcançados pelos gráficos que representam a atenuação, observamos que, em geral, quanto menor a porosidade do meio maior é a atenuação da amplitude da onda P , Tab. 10.16 e Fig. 10.42. Comportamento contrário ao que obtivemos para os dois primeiros modelos. No caso particular, em que ocorre uma mudança na posição dos gráficos da atenuação da onda P para o Modelo-3, ressaltamos que esse comportamento está previsto na literatura, por exemplo em [43] ou em [42].

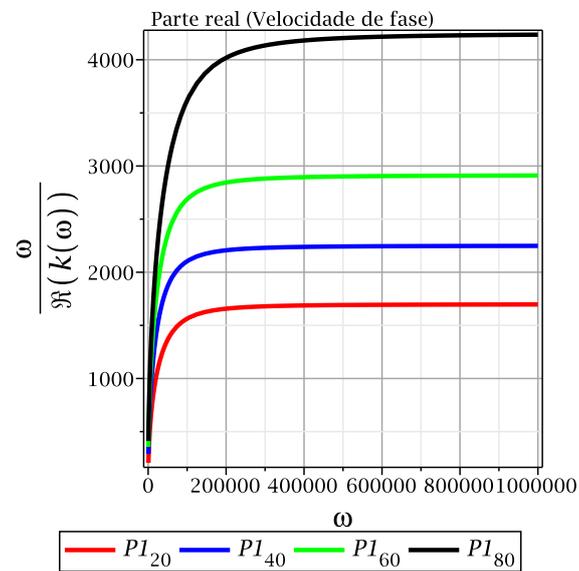


Figura 10.39: Velocidades de fase da onda P1 para vários valores de porosidade.

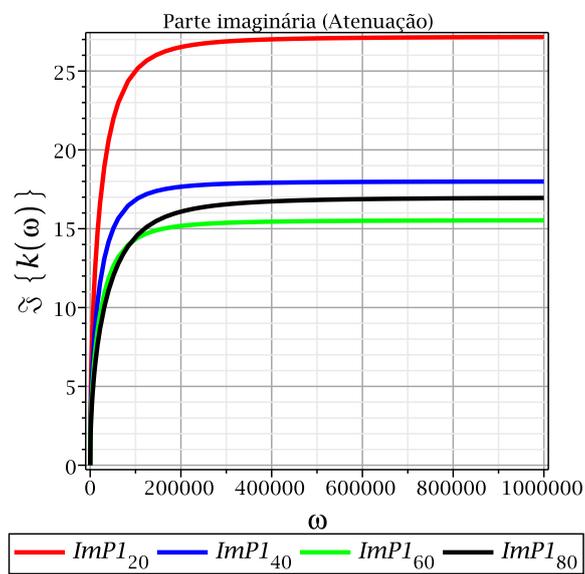


Figura 10.40: Atenuação da onda P1 para vários valores de porosidade.

Porosidade (ϕ)	Velocidade (m/s)
0,2	1.698,533127
0,4	2.249,963340
0,6	2.913,348622
0,8	4.247,009509

Tabela 10.15: Velocidade de fase da onda P1 para altas frequências.

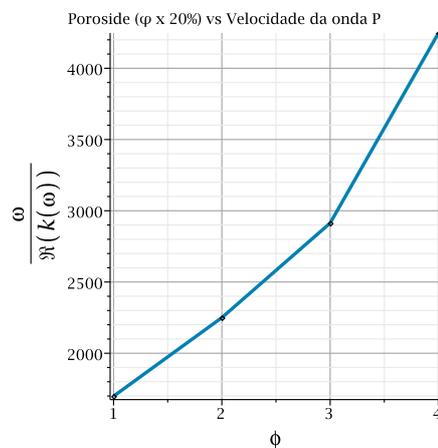


Figura 10.41: Valores limites da velocidade da onda P1 para frequências altas, com porosidade variando.

Porosidade (ϕ)	Atenuação (1/m)
0,2	27,18816043
0,4	18,00740982
0,6	15,54450884
0,8	16,99530818

Tabela 10.16: Atenuação da onda P1 quando ω tende a zero.

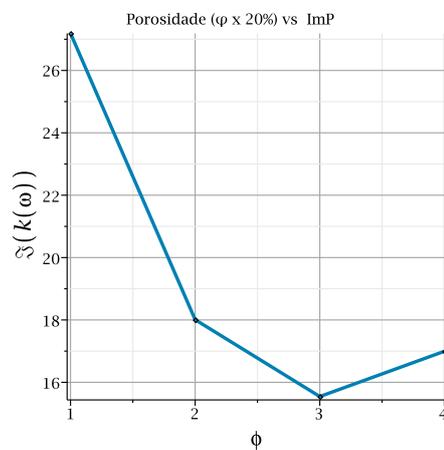


Figura 10.42: Valores limites da atenuação onda P1 para frequências altas, com porosidade variando.

10.2.5 Comparação Entre os Modelos com Constituinte Sólido, Constituinte Fluido e Meio Poroso Incompressíveis

Abaixo seguem algumas comparações entre os modelos apresentados neste trabalho. Definiremos por praticidade algumas notações:

$P(1, 2)_{\{0, \infty\}}^{M1} :=$ velocidade limite da onda P1/P2 para o modelo com constituinte sólido incompressível.

$P(1, 2)_{\{0, \infty\}}^{M2} :=$ velocidade limite da onda P1/P2 para o modelo com constituinte fluido incompressível.

$P(1, 2)_{\{0, \infty\}}^{M3} :=$ velocidade limite da onda P1/P2 para o modelo com constituintes sólido e fluido incompressíveis.

$K(1, 2)_{\infty}^{M1} :=$ atenuação limite da onda P1/P2 para o modelo com constituinte sólido incompressível.

$K(1, 2)_{\infty}^{M2} :=$ atenuação limite da onda P1/P2 para o modelo com constituinte fluido incompressível.

$K(1, 2)_{\infty}^{M3} :=$ atenuação limite da onda P1/P2 para o modelo com constituintes sólido e fluido incompressíveis.

As figuras, Fig. 10.43 e Fig. 10.44 abaixo, mostram o comportamento da onda P1 para o modelo com as densidades do constituinte sólido constante (Modelo-1), do constituinte fluido constante (Modelo-2) e de ambos constituintes sólido e fluido constantes (Modelo-3). Observamos que quase não existe influência no gráfico da velocidade de fase e da atenuação com relação ao aumento na frequência tanto para o Modelo-1 quanto para Modelo-2. Por outro lado, quando assumimos que os dois constituintes do meio são incompressíveis (Modelo-3) as velocidades de fase e atenuação se tornam sensíveis à variação na frequência para $0 < \omega < \infty$. Embora as velocidades de fase das ondas $P1^{M1}$ e $P2^{M2}$ não sofram influência do aumento da frequência, podemos observar que a mudança da baixa porosidade afeta os valores limites desses dois modelos, Fig. 10.43. As velocidades limites alcançadas pelo Modelo-2 vale, aproximadamente $P1_{\infty}^{M2} = 96.49\%P_{\infty}^{M1}$ e para baixas frequências, $P1_0^{M2} = 97.13\%P_0^{M1}$ aproximadamente. Isso mostra que, a diferença quantitativa entre esses dois modelos para a onda de compressão é quase insignificante.

Ao compararmos as velocidades de fase limite, $\omega \rightarrow \infty$, dos três modelos

em questão, observamos que a velocidade de fase da onda $P1$ para o Modelo-3 vale aproximadamente 75.72% da velocidade de fase do Modelo-1. Comportamento semelhante ocorre ao compararmos a velocidade de fase do Modelo-3 em relação à velocidade alcançada pelo Modelo-2. A velocidade de fase da onda $P1$ do Modelo-3 é 78.47% da velocidade de fase do modelo que considera o fluido incompressível.

Comparando as atenuações sofridas pelas amplitudes das ondas no três modelos, temos os seguintes resultados. A atenuação sofrida pela onda $P1$ para o Modelo-1 é aproximadamente $0.05\%K1_{\infty}^{M3}$ e para o Modelo-2 temos $2.66\%K1_{\infty}^{M3}$. Em relação ao comportamento da atenuação em altas frequências para os Modelos-1,2, temos os seguintes resultados que a atenuação da amplitude da onda $P1$ para o Modelo-1 vale $2.03\%K1_{\infty}^{M2}$.

Comparação entre os três modelos com a porosidade do meio fixada em $\phi = 20\%$.

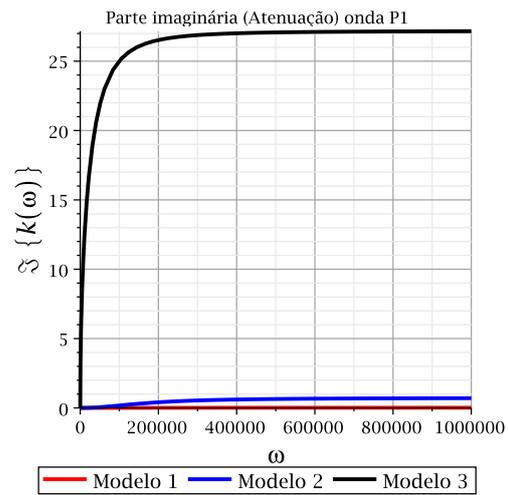
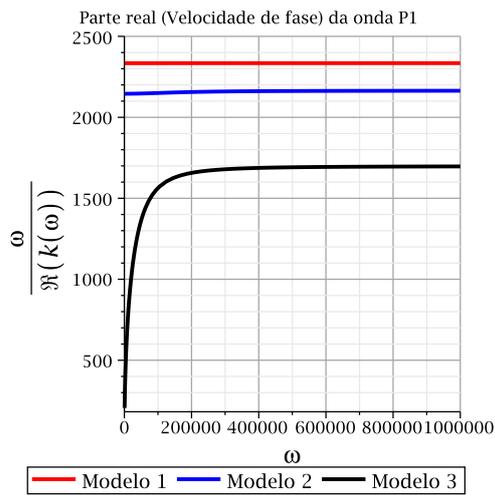


Figura 10.43: Velocidade de fase da onda $P1$ para os três modelos, com 20% de porosidade.

Figura 10.44: Atenuação da onda $P1$ para os três modelos, com 20% de porosidade.

Como observado anteriormente, não existe onda $P2$ para o Modelo-3. Abaixo, vamos analisar a relação de dispersão para os Modelos-1,2.

Nas figuras, Fig. 10.45 e Fig. 10.46 os resultados concordam com os resultados encontrados na literatura, por exemplo em [42, 18, 3]. A velocidade de fase limite

da onda $P2$ (ver Fig. 10.43 e Fig. 10.45) é 30.41% da velocidade limite da onda $P1$ ambos para o Modelo-1. Além disso, podemos notar uma forte atenuação sofrida pela onda $P2$, se comparado com a relação de dispersão da onda $P1$. Comparando os resultados obtidos para as velocidades limites ($\omega \rightarrow \infty$) dos Modelos-1 e 2, calculamos que a velocidade de fase da onda $P2$ para o Modelo-2 é aproximadamente 76.25% $P2_{\infty}^{M1}$. Em relação ao comportamento da atenuação da ondas $P2$ em altas frequências para os Modelos-1 e 2, temos os seguintes resultados. O Modelo-1 possui valor de, aproximadamente 77.74% K_{∞}^{M2} .

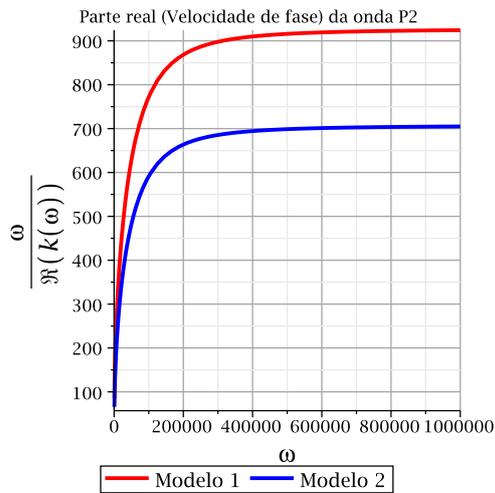


Figura 10.45: Velocidade de fase da onda $P2$ para os dois modelos, com 20% de porosidade.

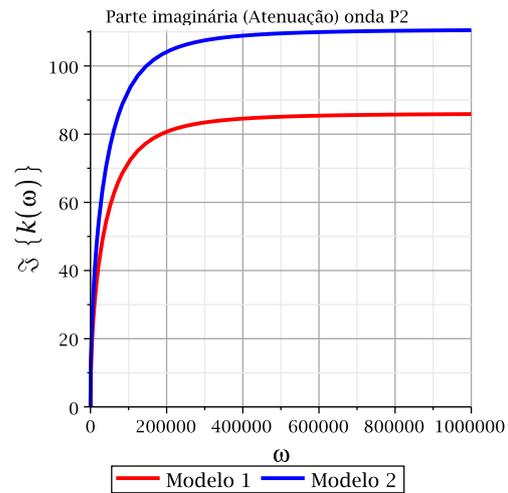


Figura 10.46: Atenuação da onda $P2$ para os dois modelos, com 20% de porosidade.

Considerando que o meio possua 40% de porosidade, obtemos os seguintes valores para a velocidade de fase.

Na figura, Fig. 10.47 a velocidade de fase $P1_{\infty}^{M3}$ para o Modelo-3 possui valor de 88,5% $P1_{\infty}^{M1}$ da velocidade de fase limite em altas frequências do Modelo-1, bem como a velocidade $P1_{\infty}^{M3} = 90,3\% P1_{\infty}^{M2}$. Uma diferença menos expressiva encontramos ao comparar os resultados obtidos pelos Modelos-1,2. Neste caso, a velocidade de fase $P1_{\infty}^{M2} = 97,9\% P1_{\infty}^{M1}$. Comparando as velocidades de fase para baixas frequências, $\omega \rightarrow 0$, encontramos $P1_0^{M2} = 97,2\% P1_0^{M1}$.

Uma diferença esperada se dá ao compararmos as velocidades limites da ondas $P1$, Fig. 10.47 e $P2$ Fig. 10.49 para o modelo com sólido incompressível $P2_{\infty}^{M1} = 38,3\% P1_{\infty}^{M1}$.

Comparando as atenuações sofridas nas amplitudes das ondas nos três modelos, obtemos os seguintes resultados. A atenuação sofrida pela onda $P1$ no Modelo-1 é aproximadamente $9,12\%K1_{\infty}^{M3}$ e para o Modelo-2, temos $12,6\%K1_{\infty}^{M3}$, Fig. 10.48. Em relação ao comportamento da atenuação, em altas frequências, para o Modelos-1 e Modelo-2, Fig. 10.50, temos que a atenuação do Modelo-1 é $72,1\%K1_{\infty}^{M2}$.

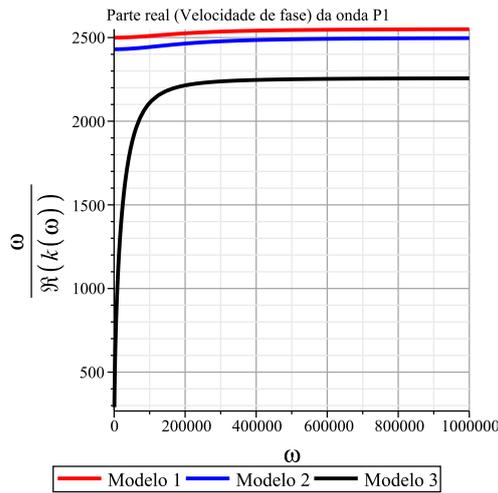


Figura 10.47: Velocidade de fase da onda $P1$ para os três modelos, com 40% de porosidade.

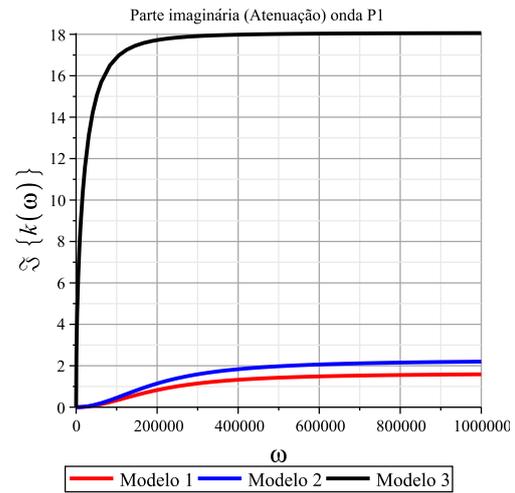


Figura 10.48: Atenuação da onda $P1$ para os três modelos, com 40% de porosidade.

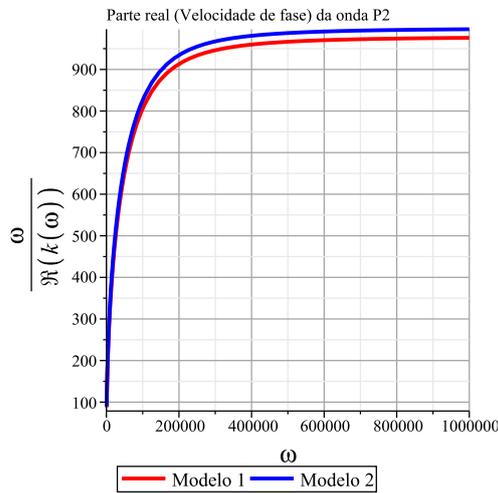


Figura 10.49: Velocidade de fase da onda $P2$ para os Modelos-1,2, com 40% de porosidade.

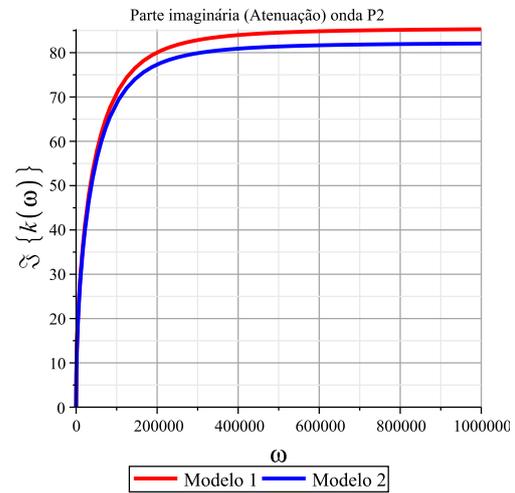


Figura 10.50: Atenuação da onda $P2$ para os Modelos-1,2, com 30% de porosidade.

11 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Propomos modelos de propagação de ondas harmônicas planas, cujo objetivo é verificar a validade dos resultados relativos à velocidade de fase e decaimento da frente de onda para a teoria de poroelasticidade em [30, 31], na abordagem proposta nesses artigos não são fornecidos resultados nesse sentido. Neste trabalho, os modelos de ondas harmônicas consideraram a propagação em uma região homogeneamente deformada, que em geral, é efetivamente anisotrópica, de modo que as velocidades de fase e atenuações dependem das direções de propagação e do estado tensões do meio. Embora os efeitos da deformação tenham sido analisados, Cap. 9, em nossa apresentação numérica, Cap. 10, apenas os casos isotrópicos foram tratados, uma vez que para se obter os resultados para o caso em que o corpo encontra-se no estado de referência homogeneamente deformado, necessitamos de dados experimentais que não foram encontrados na literatura. Logo, a comparação com outras teorias em meios anisotrópicos não foi abordada. No entanto, podemos ter certeza de que os resultados correspondentes para casos anisotrópicos serão qualitativamente indiferentes dos casos isotrópicos com uma ligeira variação dos valores de c_1 , c_2 e c_s , dependendo do estado de deformação do meio.

A partir da relação de dispersão, apresentamos um estudo qualitativo e quantitativo variando a porosidade para obter o comportamento das velocidades de fase e atenuações das ondas P1, P2 e S. Para comparar com resultados conhecidos na literatura, por exemplo em [41],[43] e [2], foi necessário fornecer um modelo material (Mooney-Rivlin), e considerar o meio em seu estado natural (isotrópico), ou seja, o meio é indeformado na configuração de referência. Além disso, foi preciso ajustar os dados utilizados em [42] para o modelo de propagação apresentado neste trabalho, pois o comportamento das velocidades de fase e atenuações estão sob influência da variação da porosidade do meio; consideração que não foi encontrada na literatura. A partir dessa análise, concluímos que esses resultados estão em uma boa concordância qualitativa. Apesar disso, devido a dificuldade em relacionar alguns parâmetros materiais e considerações conceituais entre as duas teorias, uma comparação minuciosa é impossível. Tais diferenças ficam evidentes, por exemplo, na utilização do conceito de tortuosidade, como motivação para introduzir o efeito de massa adicional ou o tensor de acoplamento entre as tensões parciais dos constituintes, ambos não utilizados em nossa teoria e foram considerados nos trabalhos de *M.A. Biot*[9, 10] e adotados nas obras de Wilmanski et all. ([42], [4], [5], [2], [43], [41]). Essas dife-

renças nas formulações da teoria geram diferenças quantitativas nos resultados das velocidades de fase e atenuações. Todavia, como foi observado no Cap. 10, não existe uma diferença qualitativa substancial ao compararmos com os resultados em [42], mesmo após a realização de simplificações nas relações constitutivas da energia livre do fluido e tensão efetiva do sólido que levaram a um desacoplamento do nosso modelo de propagação, que como apontamos, não é uma limitação teórica, mas uma escolha que tomamos com a intenção de obter resultados que pudessem ser comparados.

É importante ressaltar que os resultados obtidos em [42] foram comparados com a teoria clássica de *M.A. Biot* (ambos modelos isotrópicos) e se mostram com boa concordância. Sendo assim, conseqüentemente os resultados aqui apresentados, apontam para boas previsões em resultados práticos, uma vez que a teoria de Biot é amplamente aceita e aplicada em problemas da engenharia.

11.1 Trabalhos futuros

Uma possível direção a ser tomada como continuação do presente trabalho, concerne na caracterização dos parâmetros materiais não utilizados. Tais parâmetros foram desprezados com o objetivo de simplificar as relações de dispersão dos Modelos-1,2 e 3 e, conseqüentemente, obter resultados (velocidades de fase e atenuação) por meio da propagação das ondas harmônicas planas. A interpretação física e a aquisição de dados para tais quantidades podem levar a resultados mais precisos, tendo em vista que vários termos foram desprezados em prol da necessidade de visualização dos resultados. Uma outra direção que pode servir como fonte de pesquisa diz respeito à hipótese de homogeneidade da deformação no estado de referência do meio. Essa hipótese pode ser estendida ao caso de deformação não homogênea. Podemos citar ainda uma outra possibilidade. Neste trabalho nos preocupamos em responder questões relevantes às propagações do ponto de vista das velocidades de fase e atenuações. Entretanto, a teoria na qual este trabalho tem suporte, pode responder questões como deslocamento da fase sólida e/ou fluida provenientes dos fenômenos aqui estudados ou de processos de infiltração em solos com a utilização de métodos numéricos, como por exemplo, diferenças finitas ou elementos finitos. Esses métodos podem ser aplicados nos modelos com sólido incompressível, fluido incompressível ou sólido e fluido incompressíveis propostos. Para esse fim, devemos levar em consideração as condições de fronteiras como descritas em [31].

REFERÊNCIAS

- [1] ALBERS, B. **On the Influence of Saturation and Frequency on Monochromatic Plane Waves in Unsaturated Soils**. [S.l.]: Springer, 2008. 65-77p.
- [2] ALBERS, B. Main Drying and Wetting Curves of Soils: on measurements, prediction and influence on wave propagation. **Engineering Transactions**, [S.l.], v.63, n.1, p.5-34, 2015.
- [3] ALBERS, B.; WILMANSKI, K. On modeling acoustic waves in saturated poroelastic media. **J. Engn. Mech.**, [S.l.], v.Preprint 874, 2004.
- [4] ALBERS, B.; WILMANSKI, K. Modeling acoustic waves in saturated poroelastic media. **Journal of Engineering Mechanics**, [S.l.], v.131, n.4, p.974-985, 2005.
- [5] ALBERS, B.; WILMANSKI, K. Acoustics of two-component porous materials with anisotropic tortuosity. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, [S.l.], v.24, n.4, p.403-416, 2012.
- [6] ATKIN, R. J.; CRAIN, R. E. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, [S.l.], v.29, p.209-244, 1976.
- [7] BIOT, M. General theory of three dimensional consolidation. **Applied Physics**, [S.l.], v.12, n.2, p.155-164, 1941.
- [8] BIOT, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. **acoustical society of america**, [S.l.], v.28, n.2, p.168-178, 1956.
- [9] BIOT, M. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. II Higher frequency range. **The Journal of the Acoustical Society of America.**, [S.l.], v.28, n.2, p.179-191, 1956.
- [10] BIOT, M. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. **Journal of Applied Physics**, [S.l.], v.33, n.4, p.1482-1498, 1962.
- [11] BOER, R. **Theory of Porous Media**. [S.l.]: Springer, 2000. 285-297p.
- [12] BOER, R. **Trends in Continuum Mechanics of Porous Media**. [S.l.]: Springer, 2005. 138-160p.

- [13] BOWEN, R. **Theory of Mixtures in Continuum Mechanics**. Continuum physics Vol III.ed. [S.l.]: New York: Academic Press, 1976.
- [14] BOWEN, R. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. **International Journal Engineering Science**, [S.l.], v.18, p.1129–1148, 1980.
- [15] BOWEN, R. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. **International Journal Engineering Science**, [S.l.], v.20, p.1697–1736, 1982.
- [16] CARCIONE, J. M. Wave propagation in anisotropic, saturated porous media: plane-wave theory and numerical simulation. **The Journal of the Acoustical Society of America**, [S.l.], v.99, n.5, p.2655–2666, 1996.
- [17] COLEMAN, B.; NOLL, W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, [S.l.], v.13, n.1-2, p.167–178, 1963.
- [18] COWIN, S. C.; CARDOSO, L. Difficulties arising from different definitions of tortuosity for wave propagation in saturated poroelastic media models. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, [S.l.], v.94, n.9, p.694–704, 2014.
- [19] DALEN, K. V. **Multi-component acoustic characterization of porous media**. [S.l.]: Springer Science, 2013.
- [20] DARCY, H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. **Victor Dalmont, Paris**, [S.l.], 1856.
- [21] EDELMAN, I. Bifurcation of the Biot slow wave in a porous medium. **The Journal of the Acoustical Society of America**, [S.l.], v.114, n.1, p.90–97, 2003.
- [22] EHLERS, W. **Continuum and numerical simulation of porous materials in science and technology**. [S.l.]: Boston: Birkhäuser, 2002. 245-292p.
- [23] ERINGER, A. **Elastodynamics. Linear theory. Elastodynamics. Linear theory Vol. 2**. 1.ed. [S.l.]: Academic Press, Inc, 1975.
- [24] GOODMAN, M.; COWIN, S. A continuum theory of granular materials. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, [S.l.], v.44, p.249–266, 1972.

- [25] HUGHES, E. R. et al. Ultrasonic propagation in cancellous bone: a new stratified model. **Ultrasound in medicine & biology**, [S.l.], v.25, n.5, p.811–821, 1999.
- [26] LANDAU, L. D. Theory of the Superfluidity of Helium II. **Journal of Physics**, [S.l.], v.60, n.4, p.356–358, 1941.
- [27] LIU, I.-S. Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. **Arch. Rational Mech. Anal**, [S.l.], v.46, p.131–148, 1972.
- [28] LIU, I.-S. A note on the Mooney–Rivlin material model. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, [S.l.], p.1–8, 2012.
- [29] LIU, I.-S. **Continuum Mechanics**. 1.ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [30] LIU, I.-S. A solid–fluid mixture theory of porous media. **International Journal of Engineering Science**, [S.l.], v.84, p.133–146, 2014.
- [31] LIU, I.-S. A mixture theory of porous media and some problems of poroelasticity. **Continuous Media with Microstructure**, [S.l.], v.2, p.267–285, 2016.
- [32] PLONA, T. Observation of second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. **Appl. Phys. Lett.**, [S.l.], v.36, p.556–565, 1980.
- [33] RAJAGOPAL, K. R.; TAO, L. **Mechanics of mixtures**. 1.ed. [S.l.]: Singapore: Worlds Scientific, 1995.
- [34] TANG, X. M.; CHENG, C. H. A. **Permeability Estimation-Theory, Methods, and Field Examples**. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 2004. 109p.
- [35] TERZAGHI, K. Erdbaumechanik auf Bodenphysikabischer Grundlage. **Principle of soil mechanics**, [S.l.], 1925.
- [36] TERZAGHI, K. Theorie der Setzung von Toncschichten. **Wien**, [S.l.], 1936.
- [37] TERZAGHI, K. **Theoretical Soil Mechanics**. 1.ed. [S.l.]: London: Chapman and Hall, 1951.
- [38] TIZA, L. **Transport phenomena in He II**. [S.l.]: Nature, 1938.
- [39] VEEKEN, P. C. **Seismic stratigraphy, basin analysis and reservoir characterisation**. 37.ed. [S.l.]: Elsevier, 2006.

- [40] WANG, C.-C.; TRUESDELL, C. **Introduction to Rational Elasticity**. [S.l.]: Noordhoff International Publishing, 1973.
- [41] WILMANSKI, K. A thermodynamic model of compressible porous materials with the balance equation of porosity. **Transp Porous Media**, [S.l.], v.32, p.21–47, 1998.
- [42] WILMANSKI, K. A few remarks on Biot’s model and linear acoustics of poroelastic saturated materials. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, [S.l.], v.26, n.1-2, p.509–236, 2006.
- [43] WILMANSKI, K.; ALBERS, B. Acoustic Waves in Porous Solid-Fluid Mixtures. **Dynamic response of granular and porous materials under large and catastrophic deformations**, [S.l.], v.11, p.285–313, 2003.