

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

GLADYS ELIZABETH CALLE CARDEÑA

**MODELAGEM COMPUTACIONAL
DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS
INTERNAS NÃO LINEARES**

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

Orientador: Daniel Gregorio Alfaro Vigo

Rio de Janeiro
21 de Dezembro de 2016

C157M Calle Cardeña, Gladys Elizabeth

Modelagem computacional da propagação de ondas internas não lineares / Gladys Elizabeth Calle Cardeña. – Dezembro, 2016.
119 f.: il.

Tese (Doutorado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, Dezembro, 2016.

Orientador: Daniel Gregorio Alfaro Vigo.

.

1. Propagação de ondas internas. 2. Ondas dispersivas. 3. Boa colocação de EDPs. 4. Métodos espectrais. 5. Estabilidade numérica. – Teses. I. Alfaro Vigo, Daniel Gregorio (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. III. Título

CDD

GLADYS ELIZABETH CALLE CARDEÑA

**Modelagem computacional da propagação de ondas internas
não lineares**

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Informática.

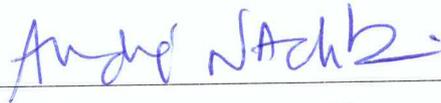
Aprovado em: Rio de Janeiro, 21 de dezembro de 2016.



Prof. Dr. Daniel Gregorio Alfaro Vigo (Orientador)



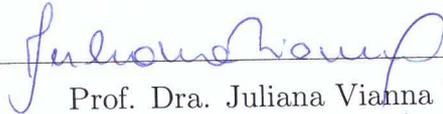
Prof. Dr. Marcello Goulart Teixeira



Prof. Dr. Andre Nachbin



Prof. Dr. Adán Jose Corcho Fernandez



Prof. Dra. Juliana Vianna Valério

Dedico este trabalho à Deus pelo amor que sempre me demonstra, e fortaleza que ele me dá sempre.

AGRADECIMENTOS

À Deus pela vida, a PEC/PG pelo apoio financeiro, ao Prof. Daniel Alfaro pelo apoio acadêmico, aos meus Professores pela paciência, aos meus pais pelo apoio moral, a minha irmã por ter cuidado de minha bebesinha Micaela sem neste apoio seria impossível estar concluindo esta tese aos meus amigos funcionários pela amizade que me proporcionam, a Bruno Alves, Fernando Gallego e Eduardo Soares pela enorme ajuda.

Endereço a todos eles a minha gratidão eterna.

RESUMO

Calle Cardaña, Gladys Elizabeth. **Modelagem computacional da propagação de ondas internas não lineares**. Dezembro 21, 2016. 117 f. Teses (Doutorado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, February 8, 2017.

Neste trabalho apresentamos uma família de modelos reduzidos para a modelagem da propagação de ondas internas na interface entre dois fluidos. Inicialmente faremos uma escolha de regiões que gerem o menor esforço computacional possível. Identificamos regiões no espaço dos parâmetros para as quais exista solução para o problema não linear, a seguir discretizaremos o espaço com método de Fourier-Galerkin, e para a variável temporal Leap-frog. Finalmente ilustraremos as taxas de convergência e estabilidade com exemplos numéricos.

Palavras-chave: Propagação de ondas internas, Ondas dispersivas, Boa colocação de EDPs, Métodos espectrais, Estabilidade numérica.

ABSTRACT

Computational modeling of internal waves propagation

Calle Cardeña, Gladys Elizabeth. **Modelagem computacional da propagação de ondas internas não lineares**. December 21, 2016. 117 f. Teses (Doutorado em Informática) - PPGI, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, February 8, 2017.

In this work we present a family of reduced models for modeling the propagation of internal waves at the interface between two fluids. Initially we will make a choice of regions that have the least possible computational effort, and we identify regions in the space of parameters for which there is a solution for the nonlinear problem, then we will discretization the space with Fourier- Galerkin, and for the temporal variable Leap-frog, we finally illustrate the convergence and stability with with numerical examples.

Keywords: Propagation of internal waves, Dispersive waves, Well-posedness of PDEs, Spectral methods, Numerical stability.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Ondas internas no mar de Sulu.	13
1.2	Ondas internas no mar [13, Figura 10.5]	13
1.3	Ondas internas na atmosfera [13, Figura 10.8]	14
3.1	Configuração física do sistema de dois fluidos.	55
6.1	Solução η para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_9 , $Nt = 2^7, N = 2^{12}, \Delta t = 1/2^3$	102
6.2	Solução u para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_9 , $Nt = 2^7, N = 2^{12}, \Delta t = 1/2^3$	103
6.3	Solução η para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{11} , $Nt = 2^7, N = 2^{12}, \Delta t = 1/2^3$	103
6.4	Solução u para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{11} , $Nt = 2^7, N = 2^{12}, \Delta t = 1/2^3$	104
6.5	Solução η para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{14} , $Nt = 2^7, N = 2^{12}, \Delta t = 1/2^3$	104
6.6	Solução u para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{14} , $Nt = 2^7, N = 2^{12}, \Delta t = 1/2^3$	105
6.7	Solução η para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{15} , $Nt = 2^7, N = 2^{12}, \Delta t = 1/2^3$	105
6.8	Solução u para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{15} , $Nt = 2^7, N = 2^{12}, \Delta t = 1/2^3$	106
6.9	Solução η de (3.21) para $t=0$ e $t=100$, $R_9, Nt = 2^{20}, N = 2^6$. . .	106
6.10	Solução η de (3.21) para $t=0$ e $t=100$, $R_{11}, Nt = 2^{20}, N = 2^6$. .	107
6.11	Solução η de (3.21) para $t=0$ e $t=100$, $R_{14}, Nt = 2^{20}, N = 2^6$. .	107
6.12	Solução η de (3.21) para $t=0$ e $t=100$, $R_{15}, Nt = 2^{20}, N = 2^6$. .	108

LISTA DE TABELAS

1.1	Valores de Δ_i e Γ_i para as diferentes regiões.	19
1.2	Valores de l_i para as diferentes regiões.	20
4.1	Valores de \bar{s}_i correspondente a estas regiões	74
4.2	Valores de s_i^* correspondente a estas regiões	75
6.1	R_9 , exibindo error temporal e taxa de convergência com $N = 2^7$ fixo, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$, $Nt = \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{14}\}$	109
6.2	Para R_{11} , exibindo error temporal e taxa de convergência com $N = 2^7$ fixo, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$, $Nt = \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{14}\}$	110
6.3	Para R_{14} , exibindo error temporal e taxa de convergência com $N = 2^7$ fixo, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$, $Nt = \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{14}\}$	110
6.4	Para R_{15} , exibindo error temporal e taxa de convergência com $N = 2^7$ fixo, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$, $Nt = \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{14}\}$	110
6.5	Estabilidade para a região R_9 , $Nt = 2^9$, $N = [2^8, \dots, 2^{12}]$, $t_{\max} =$ 2π , $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$	111
6.6	Estabilidade para a região R_{11} , $Nt = 2^{10}$, $N = [2^8, \dots, 2^{12}]$, $t_{\max} =$ 2π , $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$	111
6.7	Estabilidade para a região R_{14} , $Nt = 2^7$, $N = [2^8, \dots, 2^{12}]$, $t_{\max} =$ 2π , $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$	112
6.8	Estabilidade para a região R_{15} , $Nt = 2^7$, $N = [2^8, \dots, 2^{12}]$, $t_{\max} =$ 2π , $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$	112

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Principais resultados da dissertação de mestrado	16
1.1.1	Organização da Tese	20
2	MÉTODOS DE ANÁLISE	22
2.1	A Transformada de Fourier	22
2.1.1	Transformada de Fourier Discreta	28
2.2	Espaços de Sobolev	30
2.3	Método das diferenças finitas	36
2.4	Métodos espectrais	36
2.4.1	Método de Fourier Galerkin	36
2.4.2	Aproximação de Fourier	39
2.4.3	Estimativa para o erro de truncamento.	40
2.4.4	Exemplo de Aplicação de Métodos Espectrais	41
2.5	Diferenciação espectral	45
2.6	A Transformada de Hilbert	46
2.7	Resultados auxiliares	50
3	MODELOS REDUZIDOS DE ONDAS INTERNAS	53
3.1	Família de modelos	53
3.1.1	Modelo reduzido de Choi e Camassa	54
3.1.2	Família de modelos reduzidos fracamente não lineares	56
4	BOA COLOCAÇÃO	68
4.1	Teorema de existência e unicidade de soluções locais (no tempo)	68
5	ANÁLISE DO MÉTODO NUMÉRICO	79
5.1	Estudo da convergência	79
5.1.1	Discretização do Espaço.	79
5.2	Método espectral Leap-Frog	93
5.2.1	Convergência do Método Totalmente Discreto	94
6	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	101
6.1	Problema Não Linear	101
6.2	Taxa de Convergência Temporal	108
6.3	Estabilidade Numérica do Problema não Linear	111

7 CONCLUSÕES	113
REFERÊNCIAS	115

1 INTRODUÇÃO

As ondas internas são movimentos de ondas em fluidos com estratificação estável, onde o alcance máximo vertical do movimento ocorre na zona abaixo da interface, que está localizada entre as fronteiras (superfície e fundo) do fluido. Elas aparecem, por exemplo, devido à estratificação gerada pelas diferenças de temperatura e salinidade nas águas oceânicas. Estas ondas podem interagir com topografia profunda e estruturas submergidas assim como com ondas superficiais [19, 9, 2]. As ondas internas são muito mais lentas e maiores do que as ondas externas observadas na superfície. A principal força restauradora é a gravidade. A modelagem de ondas internas é de grande interesse no estudo da dinâmica oceânica. Ondas internas também ocorrem na atmosfera na corrente de ar descendo de uma montanha, e propagada como ondas ao longo de uma camada de inversão (camada de ar muito estável) [10]. Se consideramos uma configuração de água não pura compondo uma camada superior e uma camada inferior mais densa, a interface entre as camadas pode formar ondas. Este é um exemplo de uma onda interna. As Figuras 1.1 e 1.2 mostram as manifestações na superfície de ondas internas no mar de Sulu e no estuário do rio Derwent, em Hobart, Tasmânia [13].

Ondas internas também podem ser observadas na atmosfera, onde elas viajam na interface entre o ar quente e ar frio. A Figura 1.3 mostra um padrão de nuvens produzidas por uma onda interna.

Outro exemplo, é dado em [1] na recuperação de petróleo em águas profundas do mar, as ondas internas podem afetar as operações "offshore" e estruturas submersas.

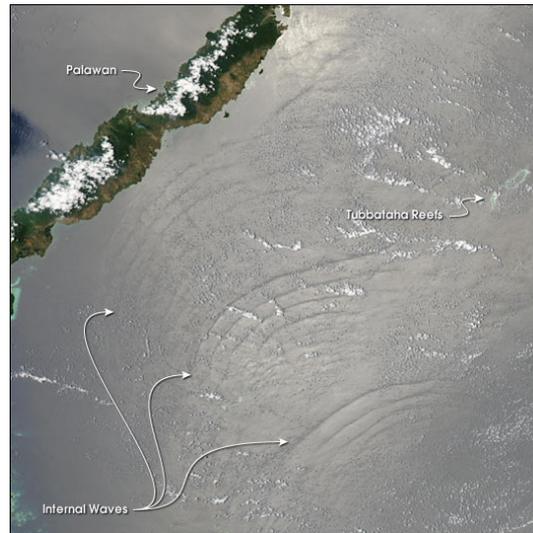


Figura 1.1: Ondas internas no mar de Sulu.



Figura 1.2: Ondas internas no mar [13, Figura 10.5]

Modelos reduzidos são um primeiro passo na produção de métodos computacionais eficientes para resolver problemas de engenharia em oceanografia.

A descrição matemática da propagação de ondas internas na interface entre dois fluidos tem sido desenvolvida em estudos sobre modelos reduzidos por pesquisadores da área. Assim, [19, 20] consideram duas camadas contendo fluidos não viscosos, imiscíveis e irrotacionais, e o fluido mais denso ocupa a camada inferior. A profundidade da camada superior é bem menor que o comprimento de onda característico da interface do sistema, ao passo que a profundidade da camada inferior é



Figura 1.3: Ondas internas na atmosfera [13, Figura 10.8]

comparável ao comprimento de onda característico. Além disso, eles também consideram profundidades pequenas em relação ao comprimento de onda em ambos fluidos. Em outro modelo, estes autores consideram que a profundidade do fluido inferior é maior. Noa autores de [1] trabalham sobre os resultados de [19, 20], portanto, considera um modelo com topografia de tampa plana e profundidade variável. O trabalho mais recente desenvolvido por [9] apresenta vários modelos, em várias dimensões, mas sempre os fluidos considerados têm profundidades semelhantes, e a técnica que usam para obter os modelos consiste em fazer uma expansão dos operadores Dirichlet-Neumann associados ao problema.

Por outro lado a parte numérica de propagação de ondas no contexto de modelos reduzidos foi desenvolvida primeiro por [18]. Os autores apresentaram a solução numérica para o problema de Cauchy para equação de Benjamin-Ono

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \mathcal{H}u_{xx} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{H}u(x) = PV \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x-y)}{y} dy$$

onde PV representa o valor principal de Cauchy de uma integral singular, que é aproximada de forma eficiente usando FFT. São usados o esquema de Crank-Nicholson no tempo, e aproximações por diferenças finitas no espaço.

Em [5] são considerados modelos de equações

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x - Au_x = 0, \\ u_t + u_x + uu_x + \mathcal{H}u_{xx} = 0, \end{cases}$$

onde u é uma função de variável real e A é um operador linear, não local e pseudo-diferencial. A discretização no espaço é realizada pelo método espectral de Fourier, e o tempo aproximado pelo esquema de Crank-Nicholson no tempo. Em [21] é introduzido um método de colocação discreto totalmente espectral, e usam um método de Runge-Kutta da quarta ordem para aproximar o tempo,

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t) + \partial_x F(U(x, t)) + \mathcal{T} \partial_x^2 U(x, t) = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, 0 < t \leq T, \\ U(x + 2\pi, t) = U(x, t), & x \in \mathbb{R}, 0 < t \leq T, \\ U(x, 0) = U_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

onde \mathcal{T} é um operador não local, linear, pseudo-diferenciável, $F(z)$ função diferenciável. Em [6] usam um método espectral totalmente discreto para achar a solução numérica do problema

$$u_t + u_x + uu_x - Au_x = 0$$

onde A é um operador linear, não local e pseudo-diferencial.

A discretização no espaço é feita pelo método de Fourier-Galerkin, e este autor faz a discretização explícita do tempo. Nesse trabalho, o método numérico é desenvolvido usando a discretização espectral no espaço, esquema Leap frog ou Runge-Kutta 4 no tempo e fator integrante para o termo não linear.

É interessante termos uma grande variedade de modelos assintoticamente equivalentes que nos permita escolher aquele ou aqueles modelos com as características mais apropriadas. Esse tipo de estudo foi apresentado em [8] para um modelo assintótico de propagação de ondas de superfície.

Este trabalho tem os seguintes objetivos: obter um modelo matemático para o estudo da propagação de ondas internas; fazer a análise matemática da boa colocação do sistema no caso não linear; fazer a análise numérica do sistema discretizado para

a variável espacial por Fourier-Galerkin e para a variável temporal pelo método Leap-Frog; e fazer simulações numéricas do sistema não linear utilizando Matlab. Analisar a convergência das soluções numéricas.

A motivação principal em abordar novamente a modelagem de ondas internas surgiu da limitação de somente ter estudado o problema linearizado, as contribuições desta tese serão o estudo do problema não linearizado, faremos uma análise numérico dos métodos para discretização espacial e temporal e também faremos simulações numéricas.

1.1 Principais resultados da dissertação de mestrado

Na dissertação do mestrado[23] consideramos o modelo reduzido de Choi & Camassa, transformamos ele por médio de operações algébricas em um modelo fracamente não linear. A seguir apresentamos equações Choi & Camassa. A variável $\eta(x, t)$ indica o deslocamento da interface e a varável $u(x, t)$ a velocidade horizontal média na camada superior

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)\bar{u}]_x = 0 \\ \bar{u}_t + \alpha\bar{u}\bar{u}_x - \eta_x = -\sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}_\delta[(1 - \alpha\eta)\bar{u}]_{xt} + \frac{\beta}{3}\bar{u}_{txx} + O(\beta^{3/2}) \end{cases}$$

$$\beta = \left(\frac{h_1}{L}\right)^2, \text{ é pequena, } \delta = \frac{h_2}{L} \text{ é } O(1)$$

$$\mathcal{T}_\delta[f](x) = \frac{1}{2\delta} PV \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(\tilde{x} - x)\right) d\tilde{x}$$

onde PV indica o valor principal de Cauchy. Como mencionando no inicio obtivemos uma família de modelos reduzidos fracamente não lineares Introduzimos u_0 como velocidade horizontal na profundidade ξ_0 considerando $\alpha = \mathcal{O}(\beta)$, e usando a técnica de Bona(2002). Assim, obtemos no mestrado a família de sistemas assintoticamente

associado com a dispersão, e

$$\delta = \frac{\text{profundidade da camada inferior}}{\text{comprimento de onda característico}}.$$

Considera-se adicionalmente que $\beta \ll 1$. O operador \mathcal{T}_δ representa a transformada de Hilbert na faixa de altura δ definida por

$$\mathcal{T}_\delta[f](x) = \frac{1}{2\delta} PV \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(\tilde{x} - x)\right) d\tilde{x},$$

onde a integral está definida no sentido do valor principal de Cauchy. No caso do regime de águas profundas ($\delta \rightarrow \infty$), no lugar do operador \mathcal{T}_δ aparecerá o operador de Hilbert \mathcal{H} , mencionado anteriormente.

Na dissertação do mestrado [23] se fez uma análise matemática da boa colocação do sistema no caso linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t - a\beta\eta_{txx} = u_{0x} + b\beta u_{0xxx} \\ u_{0t} - c\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \sqrt{\beta}\mathcal{T}_\delta[u_{0tx}] - f\beta u_{0txx} - d\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \beta\mathcal{T}_\delta^2[u_{0txx}] \\ \qquad \qquad \qquad = \eta_x + h\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \sqrt{\beta}\mathcal{T}_\delta[\eta_{xx}] + g\beta\eta_{xxx} + e\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \beta\mathcal{T}_\delta^2[\eta_{xxx}]. \end{array} \right.$$

Entre os principais resultados temos o Teorema da boa colocação.

Teorema 1.1. [23] *Para cada região R_i , $i = 1, \dots, 20$, no espaço dos parâmetros existe Δ_i tal que para qualquer real $s \geq \max\{0, \Delta_i\}$, o sistema linearizado será bem posto em $H^s \times H^{s-\Delta_i}$. Além disso, existe Γ_i tal que para qualquer inteiro $r \geq 0$, temos que $[\partial_t^r \eta(t, x), \partial_t^r u(t, x)]^T \in C([0, +\infty), H^{s-r\Gamma_i} \times H^{s-\Delta_i-r\Gamma_i})$.*

Região	Δ_i	Γ_i	Região	Δ_i	Γ_i
R_1	-1	2	R_{11}	1	0
R_2	0	3	R_{12}	2	1
R_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	R_{13}	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
R_4	-2	1	R_{14}	0	-1
R_5	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	R_{15}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
R_6	0	1	R_{16}	0	1
R_7	1	2	R_{17}	1	2
R_8	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	R_{18}	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
R_9	-1	0	R_{19}	-1	0
R_{10}	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	R_{20}	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabela 1.1: Valores de Δ_i e Γ_i para as diferentes regiões.

Em seguida, realizou-se uma análise numérica do sistema utilizando o método de *Von Neumann*, e um estudo espectral para o espaço e para o tempo usaremos Leap-Frog.

Para garantir a estabilidade precisamos escolher o tamanho de passo no tempo de forma apropriada. Obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.2. *Existem constantes $C_i > 0$ e $l_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 20$ tais que a discretização do sistema correspondente à região R_i será estável se*

$$\Delta t \leq C_i N^{-l_i},$$

onde Δt é o tamanho do passo e N o número de pontos na discretização espacial.

No caso de ser $l_i = 0$ a estabilidade não depende de discretização espacial e sempre temos $\Delta t \leq C$. Então escolhemos da Tabela 1.2 as regiões que se caracterizam por essa condição, por tanto estudaremos somente as regiões $R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15}, R_{19}$ onde podemos tomar o tamanho do passo Δt menor sem importar quão grande é a discretização espacial. Este fato servirá como uma vantagem numérica que garanta

Regiões	l_i
$R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15}, R_{19}$	0
R_{10}, R_{13}, R_{20}	$\frac{1}{2}$
R_4, R_6, R_{12}, R_{16}	1
R_5, R_8, R_{18}	$\frac{3}{2}$
R_1, R_7, R_{17}	2
R_3	$\frac{5}{2}$
R_2	3

Tabela 1.2: Valores de l_i para as diferentes regiões.

a estabilidade para o caso linearizado, neste trabalho mostraremos que essa condição é mantida também no caso não linear.

1.1.1 Organização da Tese

No capítulo 1, faremos recapitulação dos resultados obtidos no mestrado, uma revisão sobre os assuntos abordados, e assim poder estender propriedades características do caso linear para poder ser estudadas agora no caso de um sistema não linear assunto desta tese.

No capítulo 2, faremos uma revisão da transformada de Fourier e de sua forma discreta, também falaremos sobre os espaços de Sobolev dando sua importância as desigualdades necessárias para obter resultados sobre taxas de convergência. Falaremos sobre método Fourier Galerkin, e introduziremos a transformada de Hilbert, a qual será redefinida para um domínio periódico, para as implementações numéricas. Finalmente enunciaremos resultados auxiliares que usaremos nos capítulos seguintes.

No capítulo 3, faremos uma revisão das famílias de modelos reduzidos fracamente não lineares obtidos na dissertação de mestrado.

No capítulo 4, faremos uma análise da boa colocação para uma família de EDP's não - lineares, obtidas no capítulo 3. Iremos então garantir a existência e unicidade da solução para tal sistema não linear.

No capítulo 5, primeiro discretizaremos o espaço usando o método espectral de Fourier-Galerkin, provaremos também que a solução semi-discreta converge para a solução exata. Discretizaremos o tempo para um sistema de EDO's, resultado da semi- discretização. Para isso usaremos o método explícito de Leap-Frog, de forma similar. Portanto, provaremos a convergência da solução exata.

No capítulo 6, faremos simulações numéricas, para validar a aproximação da solução numérica para a solução exata. Ilustraremos por meio de tabelas as expectativas para a taxa de convergência do método Leap Frog e finalmente provaremos a estabilidade para as regiões escolhidas no capítulo 4. Por fim, as conclusões do texto.

2 MÉTODOS DE ANÁLISE

2.1 A Transformada de Fourier

Assim como os problemas periódicos em intervalos finitos levam às séries de Fourier, os problemas em toda reta real conduzem às integrais de Fourier. Para entender essa relação, seja f uma função periódica, com período $2l$, integrável, absolutamente integrável e de classe C^1 por partes definida no intervalo $(-l, l)$. Sua série de Fourier na forma complexa é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \quad (2.1)$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{-in\pi y/l} dy, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Note que em c_n tanto o intervalo de integração quanto o integrando dependem de l . Se escrevermos $\kappa_n = n\pi/l$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e substituirmos c_n na série (2.1) obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_l(\kappa_n) e^{i\kappa_n x},$$

sendo

$$\Delta\kappa_n = \frac{\pi}{l}$$

e

$$\hat{f}_l(\kappa) = \int_{-l}^l f(y) e^{-i\kappa y} dy.$$

Definição 2.1. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida, $Y = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e $p \in [1, \infty)$.*

Definimos $\mathcal{L}^p(X) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, Y)$ como

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow Y \mid f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Definição 2.2. *Seja $Y = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita essencialmente limitada quando existe algum $r \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq r$ para quase todo $x \in X$, i.e., $|f| \leq r$ q.t.p.*

Definição 2.3. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $Y = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Definimos $\mathcal{L}^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, Y)$ como*

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ é mensurável e essencialmente limitada}\}.$$

Assim definidos, $\mathcal{L}^p(X)$ e $\mathcal{L}^\infty(X)$ são espaços vetoriais reais, respectivamente complexos, além disso

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}^p(X)$$

é uma semi-norma em $\mathcal{L}^p(X)$ e

$$\|f\|_\infty = \inf\{r \geq 0 \mid |f| \leq r \text{ q.t.p.}\}, \quad f \in \mathcal{L}^\infty(X)$$

é uma semi-norma em $\mathcal{L}^\infty(X)$, a semi-norma do supremo essencial.

Definição 2.4. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida, $Y = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e $p \in [1, \infty]$. Definimos $L^p(X) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu, Y)$ como o quociente de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, Y)$ pela relação de equivalência $f \sim g \iff f = g$ q.t.p., i.e.,*

$$L^p(X) = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p\},$$

onde

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X) \mid g = f \text{ q.t.p.}\}.$$

O espaço $L^p(X)$ é um espaço de Banach para a norma

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \quad p \in [1, +\infty].$$

Dado $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, os seguintes limites existem:

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x) dx, \quad e \quad \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N |f(x)| dx,$$

onde M e N tendem independentemente para infinito, veja [7, pag. 196]. Seja $(f_l)_{l \in \mathbb{R}^+}$ uma família de funções periódicas tais que $f_l = f|_{[-l, l]}$. Pode-se mostrar que a família de funções $(\hat{f}_l(\kappa))_{l \in \mathbb{R}^+}$ converge para

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\kappa y} dy$$

e que o seguinte limite existe

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \hat{f}_l(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa.$$

Em particular escolhendo a partição $\kappa_n = n\Delta\kappa$ para a soma de Riemann,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa \sim \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_l(\kappa_n) e^{i\kappa_n x} \Delta\kappa.$$

Assim procedemos a dar a definição da transformada de Fourier de $f(x)$.

Definição 2.5. *Seja f uma função de $L^1(\mathbb{R})$. A FT de f é denotada por \hat{f} e definida como uma função de κ , sendo*

$$\hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\kappa x} dx, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

A transformada de Fourier $\hat{f}(\kappa)$ de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ está bem definida para todo $\kappa \in \mathbb{R}$ e é uma função uniformemente contínua e limitada com $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Proposição 2.1. (Lema de Riemann-Lebesgue). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolutamente integrável e suponha que é seccionalmente contínua em cada intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Então $\hat{f}(\kappa) \rightarrow 0$ quando $|\kappa| \rightarrow \infty$.*

Definição 2.6. (Espaço de Schwartz). *O espaço de Schwartz ou espaço das funções de decaimento rápido, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, é a coleção das $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^k D^\alpha f(x) = 0,$$

quaisquer que sejam $k, \alpha \in \mathbb{N}$, onde D^α denota a derivada de ordem α .

Podemos reconstruir f a partir de $\hat{f}(\kappa)$ usando a fórmula da inversa da transformada de Fourier. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então vale

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Definição 2.7. (Espaço de Sequências). *Seja $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z})$ como*

$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{ \mathbf{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|^p < \infty \right\},$$

com norma

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

O espaço $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{Z})$ é definido como

$$\ell^\infty = \left\{ \mathbf{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| < +\infty \right\},$$

com norma

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|.$$

Assim definidos, ℓ^p e ℓ^∞ são espaços de Banach.

Definição 2.8. (Transformada Semidiscreta de Fourier). *Seja $f \in \ell^2$. Definimos a transformada semidiscreta de Fourier (SFT) como*

$$\hat{f}(\kappa) = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j e^{-i\kappa x_j}, \quad \kappa \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x], \quad (2.4)$$

sendo $x_j = j\Delta x$, $f_j = f(x_j)$, $\Delta x = x_{j+1} - x_j$, para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Podemos reconstruir f a partir de \hat{f} usando fórmula da transformada inversa de (2.4)

$$f_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \hat{f}(\kappa) e^{i\kappa x_j} d\kappa, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Esta é a síntese de Fourier. A variável x é a variável física e κ é a variável de Fourier ou número de onda.

Exemplo 2.1. Se a função $R(x)$ é definida da seguinte maneira

$$R(x) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{Se } |x| < \pi, \\ 0 & \text{Se } |x| \geq \pi, \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} \hat{R}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{e^{-i\pi k} - e^{i\pi k}}{-2i\pi k} \\ &= \frac{\text{sen}\pi k}{\pi k}. \end{aligned}$$

A transformada de fourier da função R é portanto a função sinc.

Teorema 2.2. Seja \mathcal{F} o operador transformada de Fourier, i.e., $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}$. Tem-se as seguintes propriedades:

(i) **Linearidade:** Para a e b números complexos quaisquer tem-se,

$$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{f}(\kappa) + b\hat{g}(\kappa).$$

(ii) **Extensão e Compressão:** Para cada constante $\rho > 0$ tem-se,

$$f\left(\frac{x}{\rho}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \rho \hat{f}(\rho\kappa) \quad e \quad f(\rho x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho} \hat{f}\left(\frac{\kappa}{\rho}\right).$$

(iii) **Deslocamento:** Para cada constante real c tem-se,

$$f(x - c) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\kappa) e^{-ic\kappa}.$$

(iv) **Modulação:** Para cada constante real c tem-se,

$$f(x) e^{icx} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\kappa - c).$$

(v) **Derivação:** Para todo $n \geq 0$ tem-se,

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\kappa)^n \hat{f}(\kappa).$$

(vi) **Convolução:**

$$(f * g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\kappa) \hat{g}(\kappa).$$

Demonstração: (i) aplicação direta da definição e da linearidade da integral.

(ii) Precisamos fazer uma mudança de variável $s = x/\rho$ na transformada de Fourier, i.e.,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{\rho}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{\rho}\right) e^{-2\pi i \kappa x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i \kappa (\rho s)} d(\rho s) \\ &= \rho \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-2\pi i (\rho \kappa) s} ds \\ &= \rho \hat{f}(\rho \kappa). \end{aligned}$$

Assim, $f(x/\rho) \xrightarrow{\mathcal{F}} \rho \hat{f}(\rho\kappa)$. Substituindo $1/\rho$ no lugar de ρ , $f(\rho x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/\rho) \hat{f}(\kappa/\rho)$, e o item (ii) é verificado. (iii) só precisamos fazer uma mudança de variáveis $s = x - c$. (iv) só precisamos considerar que $e^{-2\pi i c x} e^{-2\pi i \kappa x} = e^{-2\pi i (\kappa - c)x}$. (v) e (vi) [14, pags. 401-404].

Exemplo 2.2. *Seja a função δ de Dirac definida como:*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ +\infty & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

a qual satisfaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Pela propriedade (3) de deslocamento sabemos que $\delta(x - a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ia\kappa} \hat{\delta}(\kappa)$. Portanto temos que

$$\frac{1}{2}(\delta(x + a) + \delta(x - a)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \cos(a\kappa) \hat{\delta}(\kappa).$$

2.1.1 Transformada de Fourier Discreta

A transformada rápida de Fourier pode ser implementado em Matlab, ou em outras linguagens que permitem aproximar de maneira eficiente e dinâmica a transformada de Fourier Discreta (DFT). Na Transformada de Fourier discreta (DFT), tanto x quanto κ são variáveis periódicas definidas num domínio discreto limitado. O domínio espacial fundamental que consideraremos será o intervalo $[0, 2\pi]$ sem perda de generalidade. Seja N um inteiro positivo par, $\Delta x = x_{j+1} - x_j = h$ e

$$\Delta x = \frac{2\pi}{N}.$$

Definamos $x_j = j\Delta x$ para qualquer j . Assim, a malha de pontos de nosso domínio fundamental é $x_1 = \Delta x, \dots, x_{N-1} = 2\pi - \Delta x, x_N = 2\pi$.

Uma igualdade que devemos lembrar daqui em diante é dada por:

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{\pi}{N}. \quad (2.6)$$

Seja ℓ_N^2 o conjunto das funções definidas em $\{x_j\}$, veja [12, pag. 11], que são N -periódicas com respeito a j , i.e., 2π -periódicas com respeito a x , com a norma

$$\|v\|_{\Delta x} = \left[\Delta x \sum_{j=1}^N |v_j|^2 \right]^{1/2}. \quad (2.7)$$

Como a soma é finita, a norma é finita, assim, toda função do tipo exigido pertence a ℓ_N^2 . Assim procedemos a dar a definição da DFT.

Definição 2.9. *Seja $v \in \ell_N^2$. A DFT de v é denotada por \hat{v} e definida como sendo*

$$\hat{v}_k = \Delta x \sum_{j=1}^N e^{-ikx_j} v_j, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (2.8)$$

Neste caso, a inversa da DFT é dada pela seguinte fórmula

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{v}_k, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.9)$$

Podemos escrever a DFT e sua inversa na forma matricial da seguinte maneira: sejam $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$, $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_{-N/2+1}, \hat{v}_{-N/2+2}, \dots, \hat{v}_{N/2}]^T$, $\beta_j = j - N/2$, $\theta_k = 2\pi k/N$ e F é uma matriz $N \times N$ com entradas $F_{j,k} = e^{-i\beta_j \theta_k}$, para $j, k = 1, \dots, N$, i.e.,

$$F = \begin{bmatrix} e^{-i\beta_1 \theta_1} & e^{-i\beta_1 \theta_2} & \dots & e^{-i\beta_1 \theta_{N-1}} & 1 \\ e^{-i\beta_2 \theta_1} & e^{-i\beta_2 \theta_2} & \dots & e^{-i\beta_2 \theta_{N-1}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{-i\beta_N \theta_1} & e^{-i\beta_N \theta_2} & \dots & e^{-i\beta_N \theta_{N-1}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Assim, a DFT é

$$\hat{\mathbf{v}} = \Delta x F \mathbf{v}, \quad (2.11)$$

e a inversa da DFT é

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \overline{F}^T \hat{\mathbf{v}}. \quad (2.12)$$

Temos que a matriz F tem colunas ortogonais dois a dois e norma Euclidiana igual a \sqrt{N} , i.e., a matriz $\frac{1}{\sqrt{N}} F$ é unitária, a inversa de F é $\frac{1}{\sqrt{N}} \overline{F}^T$. De fato, representemos F da seguinte maneira

$$F = [\mathbf{F}^{(1)} | \mathbf{F}^{(2)} | \dots | \mathbf{F}^{(N)}],$$

sendo $\mathbf{F}^{(s)}$ as colunas de F , para $s = 1, \dots, N$, logo, as entradas do vetor $\mathbf{F}^{(s)}$ são dadas por $e^{-i(k-N/2)\theta_s}$, para $k = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^{(s)}, \mathbf{F}^{(p)} \rangle &= \overline{\mathbf{F}^{(s)}}^T \mathbf{F}^{(p)} \\ &= \sum_{k=1}^N e^{i(k-\frac{N}{2})(\theta_p-\theta_s)}, \end{aligned}$$

de onde temos dois casos: se $p = s$, então $\langle \mathbf{F}^{(s)}, \mathbf{F}^{(p)} \rangle = N$ e se $p \neq s$, então

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^{(s)}, \mathbf{F}^{(p)} \rangle &= \sum_{k=1}^N e^{i(k-\frac{N}{2})\frac{2\pi}{N}(p-s)} \\ &= \sum_{k=1}^N e^{ik\frac{2\pi}{N}(p-s)} e^{-i\frac{N}{2}\frac{2\pi}{N}(p-s)} \\ &= (-1)^{p-s} \left(\sum_{k=0}^N e^{ik\frac{2\pi}{N}(p-s)} - 1 \right) \\ &= (-1)^{p-s} \left(\frac{1 - [e^{i2\pi(p-s)/N}]^{N+1}}{1 - e^{i2\pi(p-s)/N}} - 1 \right) \\ &= (-1)^{p-s} \left(\frac{1 - e^{i2\pi(p-s)/N}}{1 - e^{i2\pi(p-s)/N}} - 1 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso a DFT de v é única.

2.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção introduzimos os chamados espaços de Sobolev (do tipo L^2). Estes são extremamente úteis na análise de equações diferenciais parciais. Eles são os espaços adequados para usar e fornecem uma classificação de elementos de \mathcal{P}' em termos da sua suavidade, onde \mathcal{P}' é o conjunto das distribuições periódicas.

Definição 2.10. *Seja $s \in \mathbb{R}$. O espaço Sobolev $H_{per}^s = H_{per}^s([-\pi, \pi])$ é o conjunto de todo $f \in \mathcal{P}'$ tais que*

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 < \infty. \quad (2.13)$$

Em outras palavras, uma distribuição periódica f pertence a H_{per}^s se e somente se $\left((1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2 = l^2(\mathbb{Z})$. Denotamos por $l_s^2 = l_s^2(\mathbb{Z})$ o espaço das sequências $\alpha = \alpha_k$ $k \in \mathbb{Z}$ com

$$\|\alpha\|_{l_s^2} = \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

Assim $f \in H_{per}^s$ se e somente se $\left(\hat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_s^2$; neste caso, $\|f\|_s = \|\hat{f}\|_{l_s^2}$. É fácil ver que para $s \in \mathbb{R}$, H_{per}^s é um espaço de Hilbert com respeito ao produto inteiro

$$(f|g)_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}. \quad (2.15)$$

No caso $s = 0$, obtemos um espaço de Hilbert que é isometricamente isomórfico a $L^2([-\pi, \pi])$, o espaço das (classes equivalentes de) funções com quadrado integrável no sentido de Lebesgue. Começamos o nosso estudo dos espaços de Sobolev provando que eles formam uma sequência decrescente de espaços de Hilbert e caracterizando seus duais topológicos.

Proposição 2.3. *Seja $s, r \in \mathbb{R}$. Então $H_{per}^s \longrightarrow H_{per}^r$, que é, H_{per}^s é continuamente e densamente embebido em H_{per}^s e*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \forall f \in H_{per}^s. \quad (2.16)$$

Em particular, se $s \geq 0$, $H_{per}^s \subset L^2([-\pi, \pi])$. Além disso, $(H_{per}^s)'$, o dual topológico de H_{per}^s , é isometricamente isomórfico a H_{per}^{-s} para todo $s \in \mathbb{R}$. A dualidade é implementada pelos pares

$$\langle f, g \rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{g}(k), f \in H_{per}^{-s}, g \in H_{per}^s. \quad (2.17)$$

Prova. É fácil ver que

$$0 \leq \frac{(1 + |k|^2)^r}{(1 + |k|^2)^s} \leq 1$$

quando $s \geq r$. Na verdade

$$\|f\|_r^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + |k|^2)^r |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(1 + |k|^2)^r}{(1 + |k|^2)^s} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_s^2.$$

. Segue que H_{per}^s é continuamente incluído em H_{per}^r . Em seguida, como $\mathcal{P} \subset H_{per}^s$ para todo $s \in \mathbb{R}$ onde \mathcal{P} é o espaço das funções teste; e para mostrar que a inclusão é densa, é suficiente mostrar que \mathcal{P} é denso em H_{per}^s . Dado $g \in H_{per}^s$ seja g_n definido por

$$\hat{g}_n(k) = \begin{cases} \hat{g}(k), & \text{se } |k| \leq n, \\ 0, & \text{se } |k| > n. \end{cases}$$

Então $g_n \in \mathcal{P}$ e

$$\|g - g_n\|_r^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^r |\hat{g}(k) - \hat{g}_n(k)|^2 = \sum_{|k| > n} (1 + |k|^2)^r |\hat{g}(k)|^2 \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Se $f \in H_{per}^{-s}$ é claro que (2.8) define um funcional linear contínuo em H_{per}^s . Inversamente, se $\psi : H_{per}^s \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo em H_{per}^s , pelo lema de Riesz existe um único $\varphi \in H_{per}^s$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \psi, g \rangle &= (g|\varphi)_s = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s \hat{g}(k) \overline{\hat{\varphi}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) \overline{(1 + k^2)^s \hat{\varphi}(k)} \quad \forall g \in H_{per}^s. \end{aligned}$$

Sendo $\varphi \in H_{per}^s$, $\left((1 + k^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$, assim a distribuição periódica $f \in \mathcal{P}'$ satisfazendo $\hat{f}(k) = \frac{(1 + k^2)^{\frac{s}{2}} \overline{\hat{\varphi}(k)}}{(1 + k^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}(k)}$ pertence a H_{per}^{-s} e

$$\langle \psi, g \rangle = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) \hat{f}(k) = \langle f|g \rangle_s \quad \forall g \in H_{per}^s.$$

□

Daremos agora o significado preciso para a passagem de que o espaço Sobolev fornece uma classificação de elementos de \mathcal{P}' em termos da sua suavidade.

Proposição 2.4. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então $f \in H_{per}^m$ se e somente se $\partial^j f = f^{(j)} \in L_{per}^2$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ onde as derivadas são tomadas no sentido de \mathcal{P}' . Além disso, $\|f\|_m$ e*

$$\|f\|_m^2 = \left[\sum_{j=0}^m \|\partial^j f\|_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.18)$$

são equivalentes, ou seja, existem constantes positivas C_m e C'_m tais que

$$C_m \|f\|_m^2 \leq \|f\|_m^2 \leq C'_m \|f\|_m^2 \quad \forall f \in H_{per}^m.$$

Prova. Seja $f \in H_{per}^m$ de modo que tenhamos $\left((1 + |k|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$. De

$$|(ik)^j \hat{f}(k)| \leq (1 + |k|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{f}(k) \quad \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, m\},$$

Segue que $(ik)^j \hat{f}(k) \in l^2$, para todo $j = 0, 1, 2, \dots, m$. Pela propriedade (V) do teorema 2.2 (versão periódica) isso implica que $\partial^j f = f^{(j)} \in L_{per}^2$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots, m$ e

$$\|f\|_m^2 = \sum_{j=0}^m \|\partial^j f\|_0^2 = 2\pi \sum_{j=0}^m \|(ik)^j \hat{f}\|_{l(\mathbb{Z})}^2 \leq 2\pi(m+1) \|f\|_m^2.$$

Se $\partial^j f = f^{(j)} \in L^2([-\pi, \pi])$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots, m$, é possível mostrar que $\left(l^2(ik)^j \hat{f}(k) \right)_{k \in l^2}$. Visto que $|i^j| = 1$ e $(1 + |ik|^2)^m = \sum_{j=0}^m c_j (ik)^{2j}$, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_m^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^m |\hat{f}(k)|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^m c_j (ik)^{2j} \right) |\hat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{j=0}^m c_j \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |(ik)^j \hat{f}(k)|^2 \right) = 2\pi \sum_{j=0}^m c_j \|\partial^j f\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \leq (2\pi \max_j c_j) \|f\|_m^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Esta expressão termina a prova. □

É de extrema importância e útil nas equações de evolução não lineares os seguintes teoremas.

Teorema 2.5 (Estimativa de Moser [22]). *Sejam $s > 0$ e $f, g \in L^\infty \cap H^s$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|fg\|_{H^s} \leq C (\|f\|_{L^\infty} \|g\|_{H^s} + \|f\|_{H^s} \|g\|_{L^\infty})$$

Teorema 2.6. (ver [22]) *Para todo s, t com $s + t > 0$. Se $f \in H^s$ e $g \in H^t$, então $fg \in H^r$ para todo $r \leq \min(s, t)$ tal que $r < s + t - d/2$ (d é a dimensão do domínio da definição de f e g). Além disso, existe uma constante C (dependendo de r, s, t e d) tal que*

$$\|fg\|_{H^r} \leq C \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^t}.$$

O próximo resultado é conhecido como lema de Sobolev.

Teorema 2.7. *Se $s > \frac{1}{2}$, então $H_{per}^s \rightarrow C_{per}$ e*

$$\|f\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_{l^1} \leq C \|f\|_s \quad \forall f \in H_{per}^s. \quad (2.19)$$

Prova. Se $s > \frac{1}{2}$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(k)}{(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}}} \\ &\leq \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2) |\hat{f}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} \|f\|_s < \infty \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assim $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^1$ e

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx),$$

converge absolutamente e uniformemente no intervalo $[-\pi, \pi]$. Portanto, $g \in C_{per}$. f e g coincidem como distribuições. Portanto, pela convergência uniforme das séries, temos

$$\begin{aligned} \langle g, \varphi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx) \right) \varphi(x) dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \exp(ikx) dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{\varphi}(-k) \\ &= \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

a fim de $f = g$ no sentido de \mathcal{P}' . A desigualdade (2.19) segue de (2.20) porque

$$|f(x)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| \leq \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} \|f\|_s \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

A continuidade é uma consequência imediata da inclusão $\mathcal{P} \subset H_{per}^s$. \square

Seja $f, g \in H_{per}^s$, $s > \frac{1}{2}$. Devido ao lema de Sobolev podemos definir o produto $fg \in C_{per} \subset \mathcal{P}'$ pela fórmula

$$\langle fg, \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}. \quad (2.21)$$

O ponto importante acerca deste produto é de que ele torna H_{per}^s , para $s > \frac{1}{2}$, numa álgebra de Banach. Os espaços de Sobolev são apropriados para a análise de equações de evolução. Quando o dado inicial pertence a um espaço de funções continuamente diferenciáveis, em geral a solução perde regularidade e vive num espaço maior. Este não é o caso quando trabalhamos com espaços de Sobolev. Soluções das equações de evolução geralmente deixam a mesma condição inicial do que os espaços de Sobolev.

2.3 Método das diferenças finitas

Gostaríamos de substituir a derivada por diferenças finitas substituindo assim a equação diferencial parcial em x e t por um sistema de equações diretamente algébricas. Consideremos uma malha uniforme, onde $k = \Delta t$ e $h = \Delta x$. Os pontos da malha são (t_n, x_j) , onde $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $t_n = nk$, $n = 0, 1, 2, \dots$. A solução $u(t, x)$ é aproximada para pontos de malha:

$$v_j^n = v(t_n, x_j) \approx u(nk, jh).$$

A função v é chamada de função malha. Seja denotada $v^n = \{v_0^n, v_{\pm 1}^n, v_{\pm 2}^n, \dots\}$. Para a seguinte equação $u_t = au_x$ consideramos o seguinte esquema aplicado para (t_n, x_j) :

$$\frac{1}{2k}(v_j^{n+1} - v_j^{n-1}) = \frac{a}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n).$$

Este é um esquema de segunda ordem de precisão em ambos, t e x . As aproximações das derivadas são centradas em ambos, t e x . Este é também um esquema de três níveis (ou seja que precisa dos dois passos anteriores) cujo nome é esquema Leap-Frog. Este método não se auto-inicializa, deve ser usado num método de dois níveis para calcular o primeiro passo.

2.4 Métodos espectrais

2.4.1 Método de Fourier Galerkin

Algumas das equações de evolução podem ser escritas como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(u) \tag{2.22}$$

onde $u(x, t)$ é solução e $M(u)$ é um operador (linear ou não linear) que contém derivada espacial de u . A equação (2.22) tem condição inicial $u(x, 0)$. Para simplificar suponha a variável espacial no domínio de $(0, 2\pi)$. As condições iniciais são periódicas, e a solução aproximada pode ser escrita na forma

$$u^N(x, t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_k(t) \phi_k(x) \quad (2.23)$$

onde ϕ_k são as funções teste e a_k os coeficientes de expansão. Em geral u^N não satisfaz (2.22), ou seja,

$$\frac{\partial u^N}{\partial t} \neq M(u).$$

A aproximação é obtida selecionando do conjunto das funções teste as ψ_k e satisfazendo o seguinte

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial u^N}{\partial t} - M(u^N) \right] \psi_k(x) dx = 0,$$

para $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2}$. Os mais diretos métodos espectrais para o problema com condições limitadas periódicas são baseados nos polinômios trigonométricos

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &= e^{ikx}, \\ \psi_k(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-ikx}, \end{aligned}$$

onde ambos são essencialmente os mesmos e satisfazem condições de ortonormalidade

$$\int_0^{2\pi} \phi_k(x) \psi_l(x) dx = \delta_{kl}.$$

Usaremos isso para o problema de aproximação então $u^N(x, t)$ que poderia ser escrito como uma série de Fourier, desde que conheça $u(x, t)$:

$$a_k(t) = \int_0^{2\pi} u(x, t) \psi_k(x) dx.$$

Quando não conhecemos $u(x, t)$ e tem uma aproximação determinada por (2.23). Resolvendo o problema hiperbólico temos.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow M(u) = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.24)$$

Pela condição (2.24) temos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_l(t) e^{ilx} \right] e^{-ikx} dx = 0.$$

usando a derivação e integração obtemos

$$\frac{d}{dt} a_k - ika_k = 0, k = \frac{-N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$$

com condição inicial

$$a_k(0) = \int_0^{2\pi} u(x, 0) \psi_k(0) dx$$

poderíamos usar $u(x, 0) = \text{sen}(\pi \cos(x))$, para ilustrar o método de Fourier Galerkin para (2.22), a solução exata

$$u(x, t) = \text{sin}[\pi \cos(x + t)]$$

cuja expansão de Fourier $u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) e^{ikx}$ onde os coeficientes de Fourier são $a_k(t) = \text{sin}\left(\frac{k\pi}{2}\right) J_k(\pi) e^{ikt}$ e $J_k(t)$ é a função do Bessel de ordem k . A propriedade assintótica da função de Bessel implica $k^p a_k(t) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$; $\forall p \in \mathbb{N}^+$ Assim a série truncada de Fourier converge para qualquer potência de $\frac{1}{N}$.

$$u^N(x, t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_k(t) e^{ikx}.$$

2.4.2 Aproximação de Fourier

Nesta seção vamos definir o conjunto S_N , como um subespaço de L_2 de dimensão finita.

$$S_N = \text{span} \left\{ e^{ikx}; -\frac{N}{2} \leq K \leq \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

Desigualdade inversa para polinômios trigonométricos

Consideremos a norma L^p para polinômios trigonométricos de uma função u sobre $(0, 2\pi)$

$$\|u\|_{L^p(0,2\pi)} = \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,2\pi)} = \sup |u(x)|, \quad p = \infty, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Se $p, q \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e se $u \in L^q(0, 2\pi)$ então $u \in L^p(0, 2\pi)$, com $\|u\|_{L^p} \leq c\|u\|_{L^q}$, onde c depende de p e q . Se u é função periódica com expansão finita a desigualdade poderia ser invertida chamada de Nikolski.

$$\|\phi\|_{L^q} \leq cN^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\phi\|_{L^p}, \quad \forall \phi \in S_N$$

Assim temos o equivalente para as derivadas

$$\|\phi^{(r)}\|_{L^p} \leq N^r \|\phi\|_{L^p}, \quad \forall \phi \in S_N$$

onde $\phi^{(r)}$ denota a derivada de ordem r para ϕ .

2.4.3 Estimativa para o erro de truncamento.

Seja $P_N : L^2(0, 2\pi) \rightarrow S_N$ a projeção ortogonal sobre S_N com produto interno em $L_2(0, 2\pi)$:

$$(u - P_N u, \phi) = 0, \forall \phi \in S_N.$$

$P_N u$ é a série truncada de Fourier de u ,

$$P_N \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{u}_k \phi_k \right) = \sum_{k=-N}^{N-1} \widehat{u}_k \phi_k, \text{ onde } \phi_k(x) = e^{ikx}$$

Da comutatividade dos operadores $\frac{d}{dx}$ e P_N em $H^1(0, 2\pi)$.

$$(P_N u)' = P_N u, \forall u \in H_P^1(0, 2\pi)$$

Agora $\forall k$

$$2\pi \widehat{(u')}_k = (u', \phi_k) = -(u, \phi'_k) = ik(u, \phi_k) = ik \widehat{u}_k$$

com a mesma ideia podemos caracterizar $H_P^m(0, 2\pi)$, substituindo a primeira derivada pela n -ésima derivada. A primeira estimativa de erro de truncamento será a norma de L_2 , onde $P_N u$ é a melhor aproximação de u em L^2 para qualquer função em S_N , a estimativa para o erro truncamento para norma de Sobolev, segue

$$\|u - P_N u\|_{H^l(0, 2\pi)} \leq C N^{l-m} \|u^{(m)}\|_{L^2(0, 2\pi)}, \text{ para } m \geq 0 \text{ e } 0 \leq l \leq m \quad (2.25)$$

Desigualdade de Sobolev. Existe uma constante $C > 0$, tal que $\forall f \in H^1$

$$\|f\|_\infty \leq c \|f\|_1^{\frac{1}{2}} \|f\|_1^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

Desigualdade Inversa em S_N . Dados $0 \leq s \leq r$, existe C_0 independente de N , tal que $\forall \psi \in S_N$

$$\|\psi\|_r \leq N^{r-s} \|\psi\|_s; \|\psi\|_\infty \leq C_0 N^{\frac{1}{2}} \|\psi\| \quad (2.27)$$

2.4.4 Exemplo de Aplicação de Métodos Espectrais

Como já mencionado, os métodos espectrais são utilizados para obter soluções aproximadas de equações diferenciais parciais. Com algumas poucas exceções, esses métodos tem sido somente aplicados para a aproximação de derivadas espaciais e não temporais.

O objetivo dessa seção é ilustrar como aproximações espectrais são realmente construídas para soluções de EDP's. Para isso, vamos utilizar a equação não linear de Burgers, dada na sua formulação forte por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ em } \Omega \text{ e } \forall t > 0, \quad (2.28)$$

com ν constante positiva e condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ em Ω .

Essa equação foi proposta por Burgers em 1948 como um modelo simplificado da equação de Navier - Stokes. Soluções de (2.28) exibem uma relação entre advecção e difusão.

Observação 2.1. *Como já mencionado, a equação (2.28) é dita formulação forte da equação de Burgers. Podemos obter uma formulação fraca desta equação se exigirmos que a integral da equação vezes todas as funções de um espaço apropriado X de funções teste seja satisfeito. Isto é, se considerarmos por exemplo $\Omega = (a, b)$,*

temos:

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_a^b u \frac{\partial v}{\partial x} dx - \nu \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx = 0, \quad \forall v \in X \text{ e } \forall t > 0.$$

Observação 2.2. Os métodos espectrais podem considerar a EDP tanto na sua formulação forte quanto na fraca. Por exemplo, o método da colocação utiliza a formulação forte, enquanto que os métodos de Galerkin e Tau utilizam a formulação fraca.

Procuramos por uma função u^N , solução periódica em $(0, 2\pi)$ da equação (2.28). Primeiramente, vamos aplicar o método de Fourier Galerkin. Nesse caso, tanto o espaço de funções teste S_N , quanto o espaço de funções de aproximação X_N são tomados como

$$S_N = \text{span} \left\{ e^{ikx}; -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \right\}.$$

Portanto,

$$u^N(x, t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{u}_k(t) e^{ikx}. \quad (2.29)$$

Estamos interessados em determinar os coeficientes $\hat{u}_k(t)$, para $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$

1. Para isso, consideramos então a formulação fraca de (2.28) dada por:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u^N}{\partial t} + u^N \frac{\partial u^N}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right) e^{-ikx} dx = 0,$$

para cada $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Devido a propriedade de ortogonalidade entre as funções teste e de aproximação, obtemos um sistema de EDO's em \hat{u}_k dado por:

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} + \left(u^N \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)_k + k^2 \nu \hat{u}_k = 0,$$

para cada $k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$, com condição inicial $\hat{u}_k(0) = \int_0^{2\pi} u(x, 0) e^{-ikx} dx$.

O sistema de EDO's acima é geralmente resolvido através da integração no tempo, com a utilização de métodos numéricos que tratem da parte não linear (termo de advecção) de maneira explícita, e da parte linear (termo de difusão) de maneira implícita.

Note que o termo $\left(u^N \frac{\partial u^N}{\partial x}\right)_k$ pode ser visto como uma soma de convolução, se considerarmos (2.29) e a propriedade de ortogonalidade das funções de S_N . Uma soma de convolução tem o número de operações da ordem de $O(N^2)$, o que computacionalmente não é bom. Felizmente, existem métodos de transformação que permitem realizar esse cálculo com número de operações da ordem $O(N \log N)$ (ver detalhes em [11], seção 3.4).

Vamos agora aplicar o método da colocação de Fourier. Novamente, estamos procurando por uma solução u^N de (2.28) em $X_N = S_N$, periódica em $(0, 2\pi)$. Contudo, u^N agora é representada por seus valores na malha de pontos $x_j = \frac{2\pi j}{N}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Sendo assim, a função u^N está relacionada com seus coeficientes discretos de Fourier dados na seção anterior.

Para esse método, exigimos que a equação (2.28) seja satisfeita em todos os pontos x_j da malha descrita acima. Ou seja,

$$\left. \frac{\partial u^N}{\partial t} + u^N \frac{\partial u^N}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.30)$$

com condição inicial dada em cada ponto da malha por $u^N(x_j, t) = u_0(x_j)$.

Se tomarmos $\mathbf{u}(t) = (u^N(x_0, t), u^N(x_1, t), \dots, u^N(x_{N-1}, t))^T$, podemos rees-

crever (2.30) de maneira vetorial por:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \otimes D_N \mathbf{u} - \nu D_N^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.31)$$

ou

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{2} D_N (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu D_N^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.32)$$

onde $u \otimes v$ indica cada componente do produto entre u e v , e D_N é uma matriz que representa a derivada da interpolação de Fourier (ver detalhes na seção 2.1 de [11]).

Note que para obter (2.32) consideramos que $u^N \frac{\partial u^N}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^N)^2$. Além disso, temos que as equações (2.31) e (2.32) não são equivalentes, em contraste com o método de Fourier Galerkin que produz as mesmas equações discretas, independente da forma utilizada para a EDP.

Para a resolução dos sistemas de EDO's (2.31) e (2.32) a partir da utilização de ou uma discretização temporal explícita para o termo de advecção e implícita para a difusão são utilizadas ou uma discretização temporal totalmente explícita, temos que cada passo de tempo pode ser obtido em $O(N \log_2 N)$, que computacionalmente é uma vantagem sobre o método apresentado anteriormente.

Os métodos espectrais aproximam as derivadas usando decomposições espectrais [11]. No presente trabalho, usaremos séries de Fourier a partir da transformada rápida de Fourier (FFT). A diferença é que a transformada semi-discreta é substituída pela transformada de Fourier (DFT), a qual se calculará de uma forma eficiente usando a FFT. O nosso período básico é um subconjunto de $[0, 2\pi]$. Quando falamos acerca de uma malha periódica significa que quaisquer valores dados em um intervalo vem da avaliação de uma função periódica. Por analogia, podemos dizer que o intervalo periódico é um ciclo de tamanho N quando o intervalo é infinito e satisfaz

$$v_{j+mN} = v_j, \quad \forall j, m \in \mathbb{Z}.$$

Todos os resultados têm analogia para algum N , mas as fórmulas são diferentes e pouco seria ganho se escrevêssemos tudo duas vezes. O espaçamento entre pontos do intervalo é $h = \frac{2\pi}{N}$.

2.5 Diferenciação espectral

Seja v uma função periódica de período 2π . Associamos à v o vetor $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$ definido por $v_j = v(x_j)$, $j = 1, \dots, N$. Além disso, seja $\hat{\mathbf{v}}$ o vetor correspondente à DFT de \mathbf{v} de acordo com as equações (2.15) e (2.16)

$$[v_1, v_2, \dots, v_N]^T \xrightarrow{DFT} [\hat{v}_{-N/2+1}, \hat{v}_{-N/2+2}, \dots, \hat{v}_{N/2}]^T,$$

$$[\hat{v}_{-N/2+1}, \hat{v}_{-N/2+2}, \dots, \hat{v}_{N/2}]^T \xrightarrow{(DFT)^{-1}} [v_1, v_2, \dots, v_N]^T.$$

Para a diferenciação espectral da função periódica v precisamos de um interpolante de banda limitada de \mathbf{v} , o qual é obtido da equação (2.16) para todo x em vez de apenas na malha. Para isto, consideramos $\hat{v}_{-N/2} = \hat{v}_{N/2}$ e substituímos (2.16) por

$$v_j = \frac{1}{2\pi} \sum'_{k=-N/2}^{N/2} e^{ikx_j} \hat{v}_k, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.33)$$

onde aspa indica que os termos $k = \pm N/2$ são multiplicados por $1/2$. Nosso interpolante $p(x)$ será

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \sum'_{k=-N/2}^{N/2} e^{ikx} \hat{v}_k, \quad x \in [-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x]. \quad (2.34)$$

Temos que: $\frac{\partial v}{\partial x}(x_j) \approx w_j = \frac{\partial p}{\partial x}(x_j)$, logo

$$w_j = \frac{1}{2\pi} \sum'_{k=-N/2}^{N/2} (ik) e^{ikx_j} \hat{v}_k.$$

Analogamente para qualquer $m > 0$ a derivada de ordem m pode ser aproximada pelo método espectral como:

$$\frac{\partial^m v}{\partial x^m}(x_j) \approx w_j^{(m)} = \frac{1}{2\pi} \sum'_{k=-N/2}^{N/2} (ik)^m e^{ikx_j} \hat{v}_k.$$

Em particular, a transformada de Fourier poderia ser usada:

- Dada v calculamos \hat{v} .
- Definimos a $\hat{w}_k = ik\hat{v}_k$, exceto $\hat{w}_{\frac{N}{2}} = 0$.
- Calculamos w usando \hat{w} .

Para derivadas de maior ordem, multiplicamos pela potência apropriada para ik , tomando especial cuidado do termo $\hat{w}_{\frac{N}{2}} = 0$. Para derivadas ímpares se perde a simetria, e temos que $\hat{w}_{\frac{N}{2}} = 0$, caso contrário $\hat{w}_{\frac{N}{2}}$ é dada pela mesma fórmula de \hat{w}_k . Em conclusão para aproximar a derivada de ordem m :

- Dada v calculamos \hat{v} .
- Definimos a $\hat{w}_k^m = (ik)^m \hat{v}_k$, exceto $\hat{w}_{\frac{N}{2}}^m = 0$, se o m for ímpar.
- Calculamos w^m usando \hat{w}^m .

2.6 A Transformada de Hilbert

A transformada de Hilbert \mathcal{H} de uma função $f(x)$ é usualmente definida como sendo a convolução desta com $1/\pi x$ [3, 7.2], i.e.,

$$\mathcal{H}[f](x) = f(x) * \frac{1}{\pi x} = \frac{1}{\pi} P.V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds.$$

onde P.V representa valor principal de Cauchy. É claro que a transformada de Hilbert é um operador linear, além disso é uma integral imprópria, já que para $s = x$ o integrando tem uma singularidade. Para solucionar este problema calculamos a integral de forma simétrica em torno de $s = x$, de acordo com a seguinte equação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{f(s)}{s-x} ds + \int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{f(s)}{s-x} ds,$$

procedemos a dar a definição da transformada de Hilbert.

Definição 2.11. (Transformada de Hilbert) *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. A transformada de Hilbert de f é denotada como $\mathcal{H}[f]$ é definida como*

$$\mathcal{H}[f](x) = \frac{1}{\pi} \text{P.V} \int \frac{f(s)}{s-x} ds. \quad (2.35)$$

É necessário redefinir a transformada de Hilbert na faixa. Vamos relembrar a definição do operador \mathcal{T}_δ :

Definição 2.12. *A transformada de Hilbert de $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ na faixa de altura $\delta > 0$ é definida como*

$$\mathcal{T}_\delta[g](x) = \frac{1}{2\delta} \text{P.V} \int g(\tilde{x}) \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(\tilde{x}-x)\right) d\tilde{x}.$$

Devido à definição não local da transformada de Hilbert na faixa é necessário redefiní-la quando restringimos nosso problema para um domínio periódico para implementações numéricas. Para esse efeito, temos em mente sua interpretação geométrica, ou seja, o operador que transforma a derivada normal da função harmônica na fronteira, na derivada tangencial na fronteira.

Considere o seguinte problema para x periódico em $[0, 2l]$

$$\begin{cases} \Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0, & -\delta < z < 0, \quad 0 < x < 2l, \\ \Phi(0, z) = \Phi(2l, z), \\ \Phi_z(x, 0) = g(x), \\ \Phi_z(x, -\delta) = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Seja $\tilde{x} = \pi x/l$. Nas novas coordenadas $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, z) = \Phi(x, z)$ satisfaz

$$\begin{cases} (\pi/l)^2 \tilde{\Phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\Phi}_{zz} = 0, & -\delta < z < 0, \quad 0 < \tilde{x} < 2\pi, \\ \tilde{\Phi}(0, z) = \tilde{\Phi}(2\pi, z), \\ \tilde{\Phi}_z(\tilde{x}, 0) = \tilde{g}(\tilde{x}), \\ \tilde{\Phi}_z(\tilde{x}, -\delta) = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Consideremos agora a série de Fourier em $\tilde{x} \in [0, 2\pi]$ na forma complexa [16, pag. 51]

$$\tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{h}(k) e^{ik\tilde{x}}, \quad (2.38)$$

com coeficientes dados por

$$\hat{h}(k) = \int_0^{2\pi} \tilde{h}(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x}.$$

Para solucionar (2.39)

$$\begin{cases} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \hat{\Phi} + \hat{\Phi}_{zz} = 0, & -\delta < z < 0 \\ \hat{\Phi}_z(k, 0) = \hat{g}(k), \\ \hat{\Phi}_z(k, -\delta) = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\hat{\Phi}(k, z) = \begin{cases} \frac{\hat{g}(k) \cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\pi k/l \sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} & k \neq 0, \\ \hat{g}(0) \left[\frac{1}{\delta}z + 1\right], & k = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{x}, z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(k, z) e^{ik\tilde{x}}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{\hat{g}(k) \cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\pi k/l \sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} e^{ik\tilde{x}} + \frac{\hat{\Phi}(0, z)}{2\pi}, \end{aligned}$$

com convergência uniforme em $0 < \tilde{x} < 2\pi$ e também em $-\delta < z < 0$ devido a

$$\left| \frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} \right| \leq \left| \frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} \right| \leq \left| \coth\left(\frac{\pi}{l}\delta\right) \right|, \quad (2.40)$$

para todo inteiro $k \neq 0$.

Agora precisamos Φ_x , voltando à variável original

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{\hat{g}(k) \cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\pi k/l \sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} e^{ikx\pi/l} + \frac{\hat{g}(0)}{2\pi} \left[\frac{1}{\delta}z + 1\right], \quad (2.41)$$

calculando a derivada de Φ com respeito a x

$$\Phi_x(x, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \hat{g}(k) \frac{i \cosh\left(\frac{k\pi}{l}(z + \delta)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} e^{ikx\pi/l}.$$

Fazendo $z \rightarrow 0$ obtemos a derivada tangencial na fronteira

$$\Phi_x(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \hat{g}(k) \frac{i \cosh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right)} e^{ikx\pi/l}.$$

Por tanto, a transformada de Hilbert na faixa em $[0, 2\pi]$ é dada por

$$\mathcal{T}_{[0,2\pi]}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} i \coth\left(\frac{k\pi}{l}\delta\right) e^{ikx\pi/l} \hat{g}(k). \quad (2.42)$$

Note que

$$\hat{g}(k) = \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\tilde{x}) e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x} = \frac{\pi}{l} \int_0^{2l} g(x) e^{-ik\pi x/l} dx. \quad (2.43)$$

É importante mostrar que quando δ converge para infinito o operador \mathcal{T}_δ converge para \mathcal{H} que representa a transformada de Hilbert periódica.

De fato, calculando o limite em (2.31) quando δ tende a infinito obtemos

$$\mathcal{T}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} i \operatorname{sgn}(k) e^{ik\pi x/l} \hat{g}(k) = \mathcal{H}[g](x). \quad (2.44)$$

2.7 Resultados auxiliares

Estes resultados serão de muita utilidade nos capítulos seguintes, com o fim de facilitar as provas de teoremas e proposições.

Teorema 2.8 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $k \in L^1([a, b])$, $k \geq 0$ e $f, g \in C([a, b])$ tais que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s)f(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Então,

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) \exp \left[\int_a^s k(r)dr \right] g(s)ds, \quad t \in [a, b]. \quad (2.45)$$

Se $g(t) = g = \text{constante}$, segue em particular que

$$f(t) \leq g \exp \left[\int_a^t k(s)ds \right], \quad t \in [a, b].$$

Proposição 2.9. *Sejam C_*, C_1, C_2 constantes positivas, Δt variação do tempo, $\Delta t \geq 0$ e $M \geq 1$. Se $A^1 \leq C_1 \Delta t^4$ e*

$$(1 - C_* \Delta t) A^{m+1} \leq (1 + C_* \Delta t) A^m + C_2 \Delta t^5,$$

Então para Δt suficientemente pequeno, temos que $A^m \leq C \Delta t^4$, onde C é uma constante positiva que não depende de Δt e M .

Prova. Dividindo por $(1 - C_* \Delta t) > 0$

$$A^{m+1} \leq \left[\frac{1 + C_* \Delta t}{1 - C_* \Delta t} \right] A^m + \left[\frac{C_1}{1 - C_* \Delta t} \right] \Delta t^5, \quad \text{para } m = 1, \dots, \bar{m}.$$

Seja $q = (1 + C_* \Delta t) / (1 - C_* \Delta t)$, $a_0 = C_1 \Delta t^5 / (1 - C_* \Delta t)$

$$A^{m+1} \leq q A^m + a_0.$$

Observamos que

$$A^2 \leq qA + a_0;$$

$$\begin{aligned} A^3 &\leq qA^2 + a_0 \leq q(qA^1 + a_0) + a_0 \\ &\leq q^2A^1 + (q+1)a_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^4 &\leq qA^2 + a_0 \leq q(q^2A^1 + (q+1)a_0) + a_0 \\ &\leq q^3A^1 + q^2a_0 + qa_0 + a_0 \\ &\leq q^3A^1 + (q^2 + q + 1)a_0. \end{aligned}$$

Então, para n , temos

$$A^n \leq q^{n-1}A^1 + (q^{n-2} + \dots + q + 1)a_0, \quad \forall n = 2, \dots, \bar{m} + 1$$

$$A^n \leq q^{n-1}A^1 + \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right) a_0.$$

Mas lembrando que $q = \left[\frac{1+C_*\Delta t}{1-C_*\Delta t} \right]$.

$$\begin{aligned} \text{Se } \Delta t \leq \frac{1}{2C_*} \quad \Rightarrow \quad 1 - C_*\Delta t \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad q &= 1 + \frac{2C_*\Delta t}{1 - C_*\Delta t} \\ &\Rightarrow \quad q \leq 1 + 4C_*\Delta t. \end{aligned}$$

Assim,

$$q^{m-1} \leq (1 + 4C_*\Delta t)^{\bar{m}} \leq e^{4C_*\bar{m}\Delta t} \leq Ce^{4C_*T}$$

sempre que $(1 + 4C_*\Delta t) \leq e^{4C_*\Delta t}$, $\bar{m}\Delta t \leq T$, $n = 2, \dots, \bar{m} + 1$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right) a_0 &= (q^{n-1} - 1) \left(\frac{1}{q - 1} \right) a_0 \\ &= (q^{n-1} - 1) \left(\frac{1 - C_*\Delta t}{2C_*\Delta t} \right) \left(\frac{C_1}{1 - C_*\Delta t} \right) \Delta t^5 \\ &\leq \frac{(Ce^{4C_*T} - 1) C_1 \Delta t^5}{2C_*\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) a_0 \leq K\Delta t^4 &\Rightarrow A^n \leq q^{n-1}A^1 + K\Delta t^4 \\ &\Rightarrow A^n \leq Ce^{4C_*T}A^1 + K\Delta t^4 \leq C\Delta t^4, \quad \forall n \end{aligned}$$

□

3 MODELOS REDUZIDOS DE ONDAS INTERNAS

3.1 Família de modelos

Uma das principais contribuições para a dinâmica de fluidos foi dada por Leonhard Euler (1707 – 1783). Utilizando a segunda lei de Newton, que estabelece que a variação da quantidade de movimento de uma porção de um fluido é igual a resultante das forças externas que atuam nele, Euler conseguiu calcular a aceleração de qualquer partícula do fluido. Tendo em consideração a lei de conservação de massa, em 1755 Euler estabeleceu as leis que regem o movimento de fluidos invíscidos, incompressíveis e homogêneos, as quais são de grande interesse prático em engenharia [4]. As equações de Euler na forma vetorial são dadas por:

$$\begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}, \\ \frac{D\rho}{Dt} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

com condição de contorno

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_t,$$

sendo $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ um campo de velocidades, p é a pressão, $\rho(t, \mathbf{x})$ é a densidade do fluido na posição \mathbf{x} e no instante t , onde consideramos uma porção do fluido que, num determinado instante t , ocupa a região Ω_t . Sendo o fluido incompressível e homogêneo, satisfaz $\partial\rho/\partial t = 0$ e $\partial\rho/\partial x_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$, então $\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 > 0$ é constante.

O operador D/Dt , dado por

$$\frac{D}{Dt} := \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

é conhecido como a derivada material.

É importante ressaltar que o sistema anterior representa uma aproximação para a equação de Navier-Stokes quando as componentes dissipativas são desprezíveis frente às convectivas. As equações de movimento para fluidos viscosos e incompressíveis são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

com condição de contorno e condições iniciais apropriadas

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{em } \partial\Omega_t,$$

sendo $\nu = \mu/\rho$ a viscosidade cinemática e μ a viscosidade dinâmica. A primeira equação do sistema acima é conhecida como equação de Navier-Stokes. A partir de agora vamos nos concentrar em um regime de dois fluidos e os modelos resultantes obtidos a partir das equações de Euler. Como ponto de partida consideramos o modelo reduzido fortemente não linear [20] dado por um sistema que descreveremos abaixo.

3.1.1 Modelo reduzido de Choi e Camassa

Considerando a configuração bidimensional do sistema de dois fluidos para fundo plano com tampa rígida na parte superior Figura 3.1, em [20] foi obtido um modelo reduzido fortemente não linear dado em (3.1). Os autores consideraram o regime assintótico onde a profundidade da camada superior é bem menor que o comprimento de onda característico da interface entre os fluidos, enquanto que a profundidade da camada inferior é comparável ao comprimento de onda característico, e o fluido mais denso ocupa a camada inferior, ou seja $h_1 < \lambda$, $h_2 = \theta(\lambda)$.

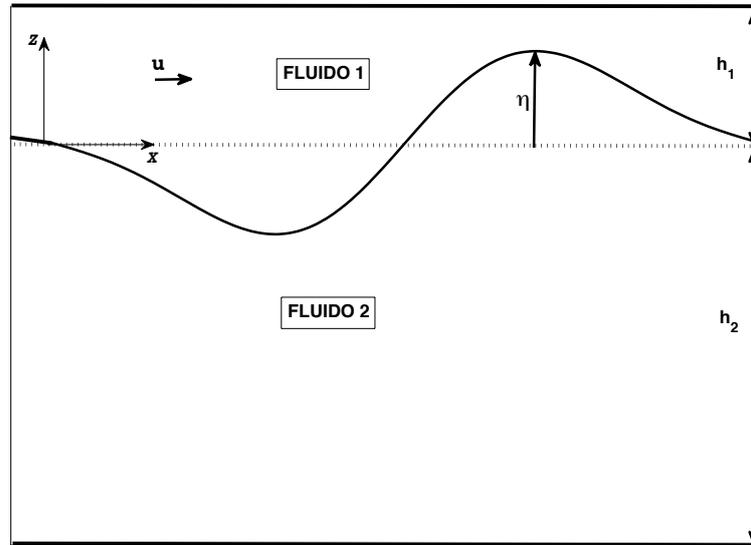


Figura 3.1: Configuração física do sistema de dois fluidos.

Neste sistema as variáveis t e x representam o tempo e a coordenada no espaço. As funções $\eta(x, t)$ e $\bar{u}(x, t)$ representam o deslocamento da interface com relação à posição de repouso e a média da componente horizontal da velocidade do fluido na camada superior, respectivamente. As densidades das camadas superior e inferior são denotadas por ρ_1 e ρ_2 (considera-se que $\rho_1 < \rho_2$). O sistema de Choi e Camassa é dado por:

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)\bar{u}]_x = 0 \\ \bar{u}_t + \alpha\bar{u}\bar{u}_x - \eta_x = \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}_\delta[(1 - \alpha\eta)\bar{u}]_{xt} + \frac{\beta}{3}\bar{u}_{txx} + O(\beta^{3/2}). \end{cases} \quad (3.1)$$

Foram introduzidos os parâmetros adimensionais α , β e γ , definidos como

$$\alpha = \frac{\text{amplitude característica das ondas}}{\text{profundidade da camada superior}},$$

correspondente a não linearidade,

$$\beta = \left(\frac{\text{profundidade da camada superior}}{\text{comprimento de onda característico}} \right)^2,$$

associado com a dispersão, e

$$\delta = \frac{\text{profundidade da camada inferior}}{\text{comprimento de onda característico}}.$$

Considera-se adicionalmente que $\beta \ll 1$. O operador \mathcal{T}_δ representa a transformada de Hilbert na faixa de altura δ definida por

$$\mathcal{T}_\delta[f](x) = \frac{1}{2\delta} PV \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \coth\left(\frac{\pi}{2\delta}(\tilde{x} - x)\right) d\tilde{x},$$

onde a integral está definida no sentido do valor principal de Cauchy. No caso do regime de águas profundas ($\delta \rightarrow \infty$), no lugar do operador \mathcal{T}_δ aparecerá o operador de Hilbert \mathcal{H} de forma que:

$$\mathcal{H}[f](x) = PV \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x} - x}.$$

3.1.2 Família de modelos reduzidos fracamente não lineares

Nosso propósito agora é derivar uma família de sistemas formalmente equivalentes ao sistema de Choi e Camassa, no regime fracamente não linear, ou seja quando $\alpha = O(\beta)$. Isto será realizado usando a técnica de Bona [9] considerando mudanças nas variáveis dependentes e usando as relações assintóticas de ordem baixa em termos de relações de ordem mais alta. Como ponto de partida usamos o **modelo fracamente não linear de Choi e Camassa** [19], dado por:

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)\bar{u}]_x = 0 \\ \bar{u}_t + \alpha\bar{u}\bar{u}_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[\bar{u}_{xt}] + \frac{\beta}{3} \bar{u}_{txx} + O(\beta^{\frac{3}{2}}) \end{cases} \quad (3.2)$$

Consideremos a seguinte relação assintótica entre a velocidade horizontal média \bar{u} e a velocidade horizontal u_0 na profundidade ζ_0 , $0 \leq \zeta_0 \leq 1$, onde ζ_0 ponto intermediário na camada superior:

$$\bar{u} = u_0 + \frac{\beta}{2} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right) u_{0xx} + O(\beta^2). \quad (3.3)$$

O nosso objetivo é derivar uma classe de sistemas assintoticamente equivalentes a (3.2). Isto será conseguido fazendo alterações nos termos de ordem superior, usando os termos de ordem inferior sem mudar a ordem de aproximação das equações iniciais. Derivando (3.3) com respeito a x e a t :

$$\begin{cases} \bar{u}_x = u_{0x} + \frac{\beta}{2} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right) u_{0xxx} + O(\beta^2) \\ \bar{u}_t = u_{0t} + \frac{\beta}{2} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right) u_{0txx} + O(\beta^2). \end{cases} \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.2) e desprezando os termos de ordem maior ou igual a $\beta^{\frac{3}{2}}$ obtemos:

$$\eta_t - u_{0x} - \frac{\beta}{2} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right) u_{0xxx} + \alpha(\eta u_0)_x = O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right). \quad (3.5)$$

Agora é a vez de modificar a segunda equação do sistema (3.1) e desprezando os termos de ordem maior ou igual a β se obtem:

$$\bar{u}\bar{u}_x = u_0 u_{0x} + O(\beta), \quad \bar{u}_{xt} = u_{0xt} + O(\beta^2), \quad \bar{u}_{txx} = u_{0txx} + O(\beta^2). \quad (3.6)$$

Na equação (3.1) substituímos (3.6) e obtemos

$$u_{0t} + \frac{\beta}{2} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right) u_{0xxt} + \alpha u_0 u_{0x} - \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0tx}] - \frac{\beta}{3} u_{0xxt} = O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right). \quad (3.7)$$

A partir de (3.5) e (3.7) obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \eta_t - u_{0x} - \frac{\beta}{2} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right) u_{0xxx} + \alpha(\eta u_0)_x = O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right) \\ u_{0t} + \frac{\beta}{2} \left(\zeta_0^2 - 1 \right) u_{0xxt} + \alpha u_0 u_{0x} - \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0xt}] = O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right). \end{cases} \quad (3.8)$$

O sistema (3.8) acima, é assintoticamente equivalente ao sistema fracamente não linear de Choi e Camassa (3.2), mas considera como variáveis independentes o deslocamento da interface e a velocidade horizontal na profundidade $\zeta_0 h_1$ da camada superior. Quando consideramos $\zeta_0^2 = 1/3$ os dois sistemas coincidem. A partir do sistema (3.8) acharemos uma família de sistemas assintoticamente equivalentes no

caso quando $\alpha = O(\beta)$ usando a técnica assintótica apresentada em [8]. Partimos da seguinte relação assintótica que despreza os termos de ordem mais alta:

$$\begin{cases} \eta_t - u_{0x} = O(\beta) \\ u_{0t} - \eta_x - \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0xt}] = O(\beta). \end{cases} \quad (3.9)$$

Derivando a equação anterior com respeito a x duas vezes e desprezando os termos de ordem superior a β temos:

$$\begin{cases} u_{0xxx} = \eta_{txx} + O(\beta) \\ u_{0txx} = \eta_{xxx} + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta(u_{0txxx}) + O(\beta). \end{cases}$$

Para isso, introduziremos os números reais λ_0 , λ_1 , λ_2 e λ_3 . Tomando $\lambda_0 \in R$, da seguinte forma

$$\frac{\beta}{2} u_{0xxx} = \lambda_0 \frac{\beta}{2} u_{0xxx} + (1 - \lambda_0) \frac{\beta}{2} \eta_{txx} + O(\beta),$$

e substituindo na primeira equação do sistema (3.8):

$$\eta_t - u_{0x} - \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right) \left[\lambda_0 \frac{\beta}{2} u_{0xxx} + (1 - \lambda_0) \frac{\beta}{2} \eta_{txx} \right] + \alpha(\eta u_0)_x = O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right).$$

Derivando com respeito de x a segunda equação do sistema (3.9):

$$u_{0tx} = \eta_{xx} + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0txx}] + O(\beta). \quad (3.10)$$

Nesta equação aparece o termo $\mathcal{T}_\delta[u_{0txx}]$ assim que aproximaremos ele. Para isso introduziremos $\lambda_2 \in R$ da seguinte forma:

$$\sqrt{\beta} u_{0tx} = \lambda_2 \sqrt{\beta} u_{0tx} + (1 - \lambda_2) \sqrt{\beta} u_{0tx}$$

substituindo (3.10) nesta última equação fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta} u_{0tx} &= \lambda_2 \sqrt{\beta} u_{0tx} + (1 - \lambda_2) \sqrt{\beta} \left(\eta_{xx} + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0txx}] \right) + O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \lambda_2 \sqrt{\beta} u_{0tx} + (1 - \lambda_2) \sqrt{\beta} \eta_{xx} + (1 - \lambda_2) \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0txx}] + O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right), \end{aligned}$$

logo

$$\sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[u_{0tx}] = \lambda_2 \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[u_{0tx}] + (1 - \lambda_2) \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[\eta_{xx}] + (1 - \lambda_2) \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta^2[u_{0txx}] + O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right). \quad (3.11)$$

Derivando (3.9) com respeito x duas vezes obtemos:

$$u_{0txx} = \eta_{xxx} + \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0txx}] + O(\beta).$$

Desprezando os termos de ordem maior ou igual a $\beta^{\frac{3}{2}}$ temos:

$$\beta u_{0txx} = \beta \eta_{xxx} + O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right) \quad (3.12)$$

Substituindo (3.11) em (3.12), e dado que na equação (3.11) tem termos \mathcal{T}_δ^2 tomaremos então $\lambda_3 \in R$ da seguinte maneira:

$$\beta u_{0txx} = \beta \lambda_3 u_{0txx} + (1 - \lambda_3) \beta u_{0txx} \quad (3.13)$$

$$\beta u_{0txx} = \beta \lambda_3 u_{0txx} + (1 - \lambda_3) \beta \eta_{xxx} + O(\beta^{\frac{3}{2}}). \quad (3.14)$$

Substituindo a equação (3.13) em (3.11) daí temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta(u_{0xt}) &= \lambda_2 \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta(u_{0xt}) + (1 - \lambda_2) \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta(\eta_{xx}) + (1 - \lambda_2) \beta \lambda_3 \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta^2(u_{0txx}) \\ &\quad + (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3) \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta^2(\eta_{xxx}) + o(\beta^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Consideramos $\lambda_1 \in R$, no momento que aproximamos:

$$\frac{\beta}{2} u_{0txx} = \lambda_1 \frac{\beta}{2} u_{0txx} + (1 - \lambda_1) \frac{\beta}{2} u_{0txx} \quad (3.16)$$

Logo substituímos (3.12) na equação (3.16) e desprezando os termos de β cuja ordem é maior ou igual a $\frac{3}{2}$

$$\frac{\beta}{2} u_{0txx} = \lambda_1 \frac{\beta}{2} u_{0txx} + (1 - \lambda_1) \frac{\beta}{2} [\eta_{xxx}] + O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right). \quad (3.17)$$

Finalmente substituindo (3.17) e (3.15) na segunda equação do sistema (3.8) temos:

$$\begin{aligned} u_{0t} + \frac{\beta}{2} (\zeta_0^2 - 1) (\lambda_1 u_{0txx} + (1 - \lambda_1) \eta_{xxx}) - \lambda_2 \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0xt}] - (1 - \lambda_2) \beta \lambda_3 \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta^2[u_{0txx}] \\ = \eta_x - \alpha u_0 u_{0x} + (1 - \lambda_2) \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[\eta_{xx}] + (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3) \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta^2[\eta_{xxx}] + O(\beta^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
& u_{0t} + (\zeta_0^2 - 1) \lambda_1 \frac{\beta}{2} u_{0txx} - \lambda_2 \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0xt}] - (1 - \lambda_2) \beta \lambda_3 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \mathcal{T}_\delta^2[u_{0txx}] \\
& = \eta_x - \alpha u_0 u_{0x} + (1 - \lambda_2) \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[\eta_{xx}] + (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3) \beta \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta^2[\eta_{xxx}] \\
& \quad - (\zeta_0^2 - 1) (1 - \lambda_1) \frac{\beta}{2} \eta_{xxx} + o\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$

logo obtemos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\eta_t - u_{0x} - \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right) \left(\lambda_0 \frac{\beta}{2} u_{0xxx} + (1 - \lambda_0) \frac{\beta}{2} \eta_{txx} \right) + \alpha (\eta u_0)_x = O\left(\beta^{\frac{3}{2}}\right) \\
u_{0t} + (\zeta_0^2 - 1) \lambda_1 \frac{\beta}{2} u_{0txx} - \lambda_2 \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[u_{0xt}] - (1 - \lambda_2) \beta \lambda_3 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \mathcal{T}_\delta^2(u_{0txx}) = \\
\eta_x - \alpha u_0 u_{0x} + (1 - \lambda_2) \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}_\delta[\eta_{xx}] + (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3) \beta \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \mathcal{T}_\delta^2[\eta_{xxx}] \\
- (\zeta_0^2 - 1) (1 - \lambda_1) \frac{\beta}{2} \eta_{xxx} + O(\beta^{\frac{3}{2}}).
\end{array} \right. \quad (3.18)$$

Introduzindo os parâmetros reais:

$$\left\{ \begin{array}{l}
a = (\zeta_0^2 - \frac{1}{3}) \frac{(1-\lambda_0)}{2}, b = (\zeta_0^2 - \frac{1}{3}) \frac{\lambda_0}{2}, c = \lambda_2, \\
d = \lambda_3(1 - \lambda_2), e = (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3), \\
f = \frac{(\zeta_0^2 - 1)\lambda_1}{2}, g = (1 - \lambda_1) \frac{(\zeta_0^2 - 1)}{2}, \\
h = 1 - \lambda_2, 0 \leq \zeta_0 \leq 1, \\
p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), q = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - 1),
\end{array} \right.$$

nas equações (3.18), obtemos a seguinte **família de sistemas fracamente não lineares**, versão abcdBona, Chen, Saut,[8] com termo não local:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\eta_t - a\beta\eta_{txx} = u_{0x} + b\beta u_{0xxx} - \alpha(\eta u_0)_x \\
u_{0t} - c \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[u_{0tx}] - f\beta u_{0txx} - d \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \beta \mathcal{T}_\delta^2(u_{0txx}) = \eta_x - \alpha u_0 u_{0x} \\
\quad + h \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\beta} \mathcal{T}_\delta[\eta_{xx}] + g\beta \eta_{xxx} + e \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} \beta \mathcal{T}_\delta^2[\eta_{xxx}],
\end{array} \right. \quad (3.19)$$

Os modelos desenvolvidos devem ser estudados como problemas de valor inicial. Para isso consideramos as condições iniciais $\eta(t = 0, x) = \eta^0(x)$ e $u_0(t = 0, x) = u_0^0(x)$. Adicionalmente devem ser consideradas as condições de contorno. Neste trabalho, por simplicidade, iremos considerar condições de contorno periódicas.

Teorema 3.1. *Para cada região R_i , $i = 1, \dots, 20$, no espaço dos parâmetros existe Δ_i tal que para qualquer real $s \geq \max\{0, \Delta_i\}$, o sistema linearizado será bem posto em $H^s \times H^{s-\Delta_i}$. Além disso, existe Γ_i tal que para qualquer inteiro $r \geq 0$, temos que $[\partial_t^r \eta(t, x), \partial_t^r u(t, x)]^T \in C([0, +\infty), H^{s-r\Gamma_i} \times H^{s-\Delta_i-r\Gamma_i})$.*

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), 0 \leq \zeta_0 < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), c, d \in \mathbf{R} \\ e = 1 - c - d, \\ f > \max \left\{ \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \left(\left(\frac{c+1}{2} \right)^2 + d - 1 \right) + q; \frac{1}{4}c^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right\} \\ g = q - f, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), 0 \leq \zeta_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), c = 0, d \in \mathbf{R} \\ e = 1 - d, \\ f = d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ g = q - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ h = 1. \end{array} \right. \quad (\text{R}_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), 0 \leq \zeta_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), 0 < c < 2\sqrt{1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2} q - 1, \\ e = 1 - c - d, f = d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ g = q - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_3)$$

A região R_4 abaixo é não vazia quando $\frac{\rho_2}{\rho_1} < \sqrt{2}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), 0 \leq \zeta_0 = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2} \right\}, \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), c = 1, d \in \mathbf{R}, \\ e = -d, f = q + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ g = -d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ h = 0 \end{array} \right. \quad (\text{R}_4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), 0 \leq \zeta_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), d \in \mathbf{R}, \\ e = 1 - c - d, c_* < c < 2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{q} \right) \text{ onde } c_* = \max \left\{ 1, 2 \left(1 - \sqrt{q} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right) \right\}, \\ f = q - (1 - c - d) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, g = (1 - c - d) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \max\{p, 0\}, b = p - a, p = \frac{1}{2} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right), \zeta_0 \in [0, 1], \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), c, d \in \mathbf{R}, \\ e = 1 - c - d, \\ f > \max \left\{ \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \left(\left(\frac{c+1}{2} \right)^2 + d - 1 \right) + q; \frac{1}{4}c^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right\}, \\ g = q - f, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \max\{p, 0\}, b = p - a, p = \frac{1}{2} \left(\zeta_0^2 - \frac{1}{3} \right), \zeta_0 \in [0, 1], \\ c = 0, d \in \mathbf{R}, \\ e = 1 - c - d, f = d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ g = q - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ h = 1. \end{array} \right. \quad (\text{R}_7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \max\{p, 0\}, b = p - a, p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), \zeta_0 \in [0, 1], \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), 0 < c < 2\sqrt{1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2} q - 1, \\ e = 1 - c - d, \\ g = q - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_8)$$

A região R_9 existe quando $\frac{\rho_2}{\rho_1} < \sqrt{2}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \max\{p, 0\}, b = p - a, p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), 0 \leq \zeta_0 < \sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2}, \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), c = 1, d \in \mathbf{R}, \\ e = -d, f = q + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ g = -d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ h = 0 \end{array} \right. \quad (\text{R}_9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \max\{p, 0\}, b = p - a, p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), \zeta_0 \in [0, 1], \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), d \in \mathbf{R}, \\ e = 1 - c - d, c_* < c < 2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{q}\right) \text{ onde } c_* = \max \left\{1, 2 \left(1 - \sqrt{q} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\right)\right\}, \\ f = q - (1 - c - d) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, g = (1 - c - d) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{10})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0, a = p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), \zeta_0 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right], \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), e = 1 - c - d, c, d \in \mathbf{R}, \\ f > \max \left\{ \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \left(\left(\frac{c+1}{2}\right)^2 + d - 1\right) + q; \frac{1}{4}c^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 \right\}, \\ g = q - f, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{11})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0, a = p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), \zeta_0 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right], \\ c = 0, q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), d \in \mathbf{R}, \\ e = 1 - d, \\ f = d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ g = q - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ h = 1. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0, a = p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), \zeta_0 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right], \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), 0 < c < 2\sqrt{1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2} q - 1, \\ e = 1 - c - d, f = d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ g = q - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{13})$$

A região R_{14} existe quando $\frac{\rho_2}{\rho_1} < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0, a = p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), \frac{1}{\sqrt{3}} < \zeta_0 < \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2}, \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), c = 1, d \in \mathbf{R}, \\ e = -d, f = q + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ g = -d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ h = 0 \end{array} \right. \quad (\text{R}_{14})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0, a = p = \frac{1}{2}(\zeta_0^2 - \frac{1}{3}), \zeta_0 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right], \\ q = \frac{1}{2}(1 - \zeta_0^2), d \in \mathbf{R}, \\ e = 1 - c - d, c_* < c < 2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{q}\right) \text{ onde } c_* = \max \left\{1, 2 \left(1 - \sqrt{q} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\right)\right\}, \\ f = q - (1 - c - d) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, g = (1 - c - d) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{15})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = 0, \zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}, q = \frac{1}{3}, \\ e = 1 - c - d, c, d \in \mathbf{R}, \\ f > \max \left\{ \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \left(\left(\frac{c+1}{2} \right)^2 + d - 1 \right) + q; \frac{1}{4}c^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right\}, \\ g = \frac{1}{3} - f, \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = 0, \zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}, q = \frac{1}{3}, \\ c = 0, d \in \mathbf{R}, \\ e = 1 - d, \\ f = d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ g = - \left(\frac{1}{3} + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right), \\ h = 1. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{17})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = 0, \zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}, q = \frac{1}{3}, \\ 0 < c < 2\sqrt{1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2} q - 1, \\ e = 1 - c - d, f = d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ g = - \left(\frac{1}{3} + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right), \\ h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{18})$$

A região R_{19} será não vazia quando $\frac{\rho_2}{\rho_1} < \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = 0, \zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}, q = \frac{1}{3}, \\ c = 1, d \in \mathbf{R}, \\ e = -d, f = q + d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ g = -d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ h = 0 \end{array} \right. \quad (\text{R}_{19})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, b = 0, \zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}, q = \frac{1}{3}, \\ \max \left\{ 1, 2 \left(1 - \sqrt{q} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \right) \right\} < c < 2 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{q} \right), d \in \mathbb{R}, \\ e = 1 - c - d, f = q - (1 - c - d) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, \\ g = (1 - c - d) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2, h = 1 - c. \end{array} \right. \quad (\text{R}_{20})$$

4 BOA COLOCAÇÃO

O estudo da boa colocação permite determinar regiões onde o sistema é bem posto localmente, por tanto é uma etapa de vital importância para poder garantir a eficiência do estudo numérico.

4.1 Teorema de existência e unicidade de soluções locais (no tempo)

Ao longo deste capítulo nós discutiremos a existência e unicidade de soluções para um sistema de EDP's não lineares no espaço de Banach X . Na demonstração do teorema usaremos o teorema do ponto fixo e consideraremos que no lado direito da equação temos operadores Lipschitz.

Teorema 4.1. *Seja $F : \overline{B_R} \subset X \rightarrow X$ uma função Lipschitz contínua na bola $\overline{B_R} = \{v \in X : \|v\|_X \leq R\}$, $\phi \in \overline{B_R}$ tal que $F(0) = 0$, R é uma constante positiva fixa. Então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t = F(u) \\ u(0) = \phi \in B_R \end{cases} \quad (4.1)$$

tem solução local única em B_R . Mais exatamente, existe $T > 0$ e uma única $u \in C([0, T]; \overline{B_R})$ satisfazendo a equação (4.1).

Prova. Precisaremos mostrar a existência da solução do problema de valor inicial, ou seja que existe $T > 0$ e $u : [0, T] \rightarrow \overline{B_R}$ contínua que satisfaz (4.1). Re-escrevendo a equação na forma integral é preciso achar $u : [0, T] \rightarrow \overline{B_R}$ tal que

$$u(t) = \phi + \int_0^t F(u(t')) dt', \quad t \in [0, T].$$

Para isso usaremos o teorema do ponto fixo de Banach. Vamos a discutir a existência e unicidade de soluções locais. Para isso vamos definir o espaço métrico completo

$$\mathcal{X}_T = C([0, T], \overline{B_R})$$

cuja distância esta definida por

$$d(f, g) = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t) - g(t)\|_X,$$

Provaremos que é possível escolher um T tal que a aplicação

$$f \rightarrow Af, \quad \text{onde} \quad Af(t) = \phi + \int_0^t F(f(t')) dt', \quad \text{para } t \in [0, T], \quad \forall f \in \mathcal{X}_T$$

é uma contração em \mathcal{X}_T . Para começar se observa que $(Af) \in \mathcal{X}_T$, qualquer que seja $T > 0$. De fato, combinando as propriedades de F com (4.1) temos que dado $\varepsilon > 0$, devemos achar um $\delta > 0$ tal que para todo $t, t' \in [0, T]$ se $|t - t'| < \delta$ então

$$\begin{aligned} \|(Af)(t) - (Af)(t')\|_X &\leq \int_t^{t'} \|F(f(t''))\|_X dt'' \leq \int_t^{t'} \|F(f(t'')) - F(0)\|_X dt'' \\ &\leq c \int_t^{t'} \|f(t'') - 0\|_X dt'' \leq cR \int_t^{t'} dt'' = cR(t' - t). \end{aligned}$$

Logo basta escolher $\delta \leq \frac{\varepsilon}{cR}$, com $c > 0$ e $R > 0$ para obter $\|(Af)(t) - (Af)(t')\|_X < \varepsilon$, provando a continuidade de $(Af)(t)$. Agora provaremos que $(Af)(t) \in \overline{B_R}$, para $t \in [0, T]$, em que T depende de ϕ . Temos que

$$\begin{aligned} \|Af(t)\|_X &= \|\phi\|_X + \int_0^t \|F(f(t'))\|_X dt' \leq \|\phi\|_X + \int_0^t c\|f(t')\|_X dt' \\ &\leq \|\phi\|_X + cRT \end{aligned}$$

logo é suficiente escolher T tal que $T < \frac{R - \|\phi\|_X}{cR}$, aqui $C > 0$ representa a constante associada com a propriedade de F ser Lipschitz contínua.

Provaremos agora que existe um $T > 0$ tal que Af é uma contração em \mathcal{X}_T .

Se $f, g \in \mathcal{X}_T$ temos

$$\begin{aligned} \|(Af)(t) - (Ag)(t)\|_X &\leq \int_0^t \|F(f(t')) - F(g(t'))\|_X dt' \leq c \int_0^t \|f(t') - g(t')\|_X dt' \\ &\leq cd(f, g)T, \end{aligned}$$

logo escolhendo $0 < T < \min \left\{ \frac{1}{c}, \frac{R - \|\phi\|_X}{cR} \right\}$, por tanto A é uma contração em \mathcal{X}_T . Pelo Teorema de ponto fixo de Banach implica imediatamente a existência da solução de (4.1). \square

É importante notar que só obtivemos existência local, e a unicidade vale apenas em \mathcal{X}_T em que $T < \min \left\{ \frac{1}{c}, \frac{R - \|\phi\|_X}{cR} \right\}$. E para obter a continuidade da aplicação vamos utilizar o resultado clássico de Gronwall.

Lema 4.2. *Sejam $T > 0$ e $u, v \in C([0, T], \overline{B_R})$ soluções da equação em (4.1), tais que $u(0) = \phi$, $v(0) = \psi$ então*

$$\|u(t) - v(t)\|_X \leq \|\phi - \psi\|_X e^{cT}, \quad t \in [0, T].$$

Prova. Usaremos para demonstrar este lema a desigualdade de Gronwall. [Teorema 2.8]. Observe que

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|\phi - \psi\| + \int_0^t \|F(u(t')) - F(v(t'))\| dt' \\ &\leq \|\phi - \psi\| + \int_0^t c \|u(t') - v(t')\| dt' \leq \|\phi - \psi\| e^{\int_0^t c dt'}. \end{aligned}$$

Logo, $\|u(t) - v(t)\| \leq \|\phi - \psi\| e^{\int_0^t c dt'} \leq \|\phi - \psi\| e^{cT}$. \square

Corolário 4.3. *O problema de valor inicial (4.1) é localmente bem posto em $\overline{B_R}$. De maneira mais precisa, $\exists \tilde{T} > 0$ e uma única $u \in C([0, \tilde{T}], \overline{B_R})$ que satisfaz (4.1). Além disso, a aplicação $G : B_R \rightarrow C([0, \tilde{T}], \overline{B_R})$ tal que ϕ é transformada na solução u é contínua, no sentido que se $\phi_n \rightarrow \phi$ em B_R então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \tilde{T}]} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0.$$

Prova. A primeira parte é uma consequência direta do Teorema 4.1 e o Lema 4.2. Procedemos a provar a continuidade de G . Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$,

onde $G_n = G(\phi_n) = u_n$ e $G_\phi = G(\phi) = u$, $\|G_n - G_\phi\|_X < \varepsilon$. De fato

$$\|G_n - G_\phi\|_X = \|u_n(t) - u(t)\|_X \leq \sup_{[0, \tilde{T}]} \|u_n(t) - u(t)\|_X \leq \sup_{[0, \tilde{T}]} \|\phi_n - \phi\|_X e^{(c\tilde{T})}, \quad t \in [0, \tilde{T}],$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \|\phi_n - \phi\|_X e^{(c\tilde{T})} \right\} = 0.$$

□

Resta agora estudar a existência global de soluções de (4.1) quando F é localmente Lipschitz contínua em X , ou seja quando existe uma função $L : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ não decrescente tal que

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_X \leq L(R)\|u_1 - u_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2 \in B_R.$$

A ideia envolvida é exatamente a mesma que na teoria das EDOs ou a solução explode em tempo finito ou ela pode ser estendida a toda a semireta $[0, \infty)$.

Lema 4.4. *Seja $\overline{T}_\phi = \sup \{T > 0 : \exists! u \in C([0, T], X), \text{ com } u(0) = \phi \text{ satisfazendo (4.1)}\}$. Se $\overline{T}_\phi < \infty$ então*

$$\lim_{t \rightarrow \overline{T}_\phi} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Prova. Suponha que $\limsup_{T \rightarrow \overline{T}_\phi} \|u(t)\|_X \neq \infty$; logo, existe $k > 0$,

$$\|u(t)\|_X \leq k, \quad t \in [0, \overline{T}_\phi)$$

tal que $\limsup_{t \rightarrow \overline{T}_\phi} \|u(t)\|_X = \bar{u}$. Provemos que u é uniformemente contínua em $[0, \overline{T}_\phi)$ assim existe

$$\lim_{t \rightarrow \overline{T}_\phi} u(t),$$

de fato. Sejam $t, t + \tau \in [0, \overline{T}_\phi)$, dado $\varepsilon > 0$, tal que $\forall t, t + \tau$ em $t \leq t + \tau < \overline{T}_\phi$

$$\begin{aligned} \|u(t + \tau) - u(t)\|_X &= \left\| \int_t^{t+\tau} F(u(t')) dt' \right\|_X \leq c \int_t^{t+\tau} \|u(t')\|_X dt' \\ &\leq ck(t + \tau - t) = ck|\tau| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente u é uniformemente contínua em $[0, \bar{T}]$ por tanto pode ser estendida até $[0, \bar{T}]$ na topologia X . Para isso, escolhamos uma sequência de pontos $T_n \in [0, \bar{T})$ tal que

$$T_n \rightarrow \bar{T},$$

então $\forall \delta > 0, \exists n_0(\delta)$ tal que $\forall m, n \geq n_0(\delta)$, temos

$$|T_m - T_n| < \delta.$$

Sabe-se também que u é uniformemente contínua em $[0, \bar{T})$, então $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon$ tal que

$$\text{se } |t - t'| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|u(t) - u(t')\|_X < \varepsilon$$

Então para $n, m > n_0(\delta_\varepsilon)$ temos que

$$\|u(T_m) - u(T_n)\|_X < \varepsilon.$$

Ou seja, a sequência $\{u(T_n)\}$ é de Cauchy, logo existe $\lim_{t \rightarrow \bar{T}} u(t) = \bar{u}$ ou seja \bar{u} é uma solução, o qual é um absurdo pois se \bar{T} é o supremo não existe t nenhum superior a \bar{T} que admita solução. \square

Como uma aplicação dos resultados anteriores mostraremos um teorema de existência e unicidade de soluções locais no tempo para o sistema (3.21) no caso não linear.

Consequentemente, chegamos no seguinte resultado

Teorema 4.5. *Seja $F : X \rightarrow X$ uma função localmente Lipschitz. Então o problema de valor inicial (4.1) é localmente bem posto em X .*

Para isso escrevemos o problema de valor inicial para o sistema (3.21) na

forma

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \eta_t \\ u_t \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \eta(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^0 \\ u^0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $F(\cdot) = (F_1(\cdot), F_2(\cdot))$ satisfaz

$$F_1(\eta, u) = L_{01}u - L_{11}(\eta u)$$

$$F_2(\eta, u) = L_{02}\eta - L_{12}(u^2)$$

e $L_{0j}, L_{1j}, j = 1, 2$ são as aplicações lineares

$$L_{01} : H^{s-\Delta_i} \rightarrow H^{s-\Gamma_i}$$

$$L_{02} : H^s \rightarrow H^{s-\Delta_i-\Gamma_i}$$

$$L_{11} : H^{s+l_{i1}} \rightarrow H^s$$

$$L_{12} : H^{s-\Delta_i+l_{i2}} \rightarrow H^{s-\Delta_i}$$

definidas como

$$\begin{aligned} \widehat{L_{01}f} &= (ik) \left\{ \frac{w_3(k)}{w_1(k)} \right\} \widehat{f}, & \widehat{L_{11}f} &= (ik) \left\{ \frac{\alpha}{w_1(k)} \right\} \widehat{f}, \\ \widehat{L_{02}f} &= (ik) \left\{ \frac{w_4(k)}{w_2(k)} \right\} \widehat{f}, & \widehat{L_{12}f} &= (ik) \left\{ \frac{\alpha}{2w_1(k)} \right\} \widehat{f}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que

$$\begin{cases} w_1(k) = 1 + a\beta k^2, \\ w_2(k) = 1 + c \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sqrt{\beta}|k| + \left(f - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right) \beta k^2, \\ w_3(k) = 1 - b\beta k^2, \\ w_4(k) = 1 - h \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sqrt{\beta}|k| + \left(e \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 - g \right) \beta k^2. \end{cases} \quad (4.4)$$

Um estudo do comportamento das função F nas diferentes regiões R_i , nos permite obter o seguinte resultado

Teorema 4.6. *Para cada região R_i , $i = 9, 11, 14, 15$, no espaço dos parâmetros existem números reais Δ_i para qualquer real $s > \max\{\frac{\Delta_i}{2}, \Delta_i\}$, o sistema (3.21) será localmente bem posto em $H^s \times H^{s-\Delta_i}$.*

Prova. Para que F esteja bem definida deve-se ter que:

$$H^{s-\Gamma_i} \times H^{s-\Delta_i-\Gamma_i} \subseteq H^s \times H^{s-\Delta_i} \quad (4.5)$$

Isso acontece quando $\Gamma_i \leq 0$. Observemos na tabela ?? que isso vale nas regiões R_i , $i = 9, 11, 14, 15$ e 19 . Adicionalmente precisamos que a função F seja Lipschitz, nas bolas fechadas de $H^s \times H^{s-\Delta_i}$.

Para isso, temos que analisar a parte não linear de F , pois a parte linear foi estudada no mestrado [23]. Começamos estudando os operadores dos termos não lineares L_{11} e L_{12} .

Temos que $L_{11} : H^{r+l_{i1}} \rightarrow H^r$ quando $\left| \frac{ik}{w_1(k)} \right|^2 \leq C(1+k^2)^{l_{i1}}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$\|L_{11}f\|_r^2 = \Sigma(1+k^2)^r \left| \frac{ik}{w_1(k)} \widehat{f} \right|^2 \leq C\Sigma(1+k^2)^{r+l_{i1}} |\widehat{f}|^2 < \infty$$

Lembrando que $w_1(k) = 1 + a\beta k^2$ com $a > 0$, nas regiões R_9, R_{11}, R_{14} e R_{15} , temos então que $l_{i1} = -1$, mas $a = 0$ na região R_{19} e nesse caso $l_{i1} = 1$. Para garantir que $L_{11}(\eta u) \in H^s$ é preciso que $\eta u \in H^{s+l_{i1}}$. Como $\eta \in H^s$ e $u \in H^{s-\Delta_i}$ pelo Teorema 2.6, será suficiente que:

$$2s - \Delta_i > 0 \quad s + l_{i1} \leq \min\{s, s - \Delta_i\} \quad \text{e} \quad s + l_{i1} < 2s - \Delta_i - 1/2.$$

ou seja $l_{i1} \leq \min\{0, -\Delta_i\}$ e $s > \bar{s}_i = \max\{\Delta_i/2, l_{i1} + \Delta_i + \frac{1}{2}\}$. Na região R_{19} , a condição para l_{i1} não sera valida. Para os outras regiões de interesse $\bar{s}_i = \max\{\Delta_i/2, \Delta_i - 1/2\}$ e os valores são apresentado na tabela 4.1.

R_i	l_{i1}	\bar{s}_i	$l_{i1} + \Delta_i + \frac{1}{2}$
R_9	-1	-1/2	-3/2
R_{11}	-1	1/2	1/2
R_{14}	-1	0	-1/2
R_{15}	-1	1/4	0

Tabela 4.1: Valores de \bar{s}_i correspondente a estas regiões

Por outro lado, temos que $L_{12} : H^{r+l_{i2}} \rightarrow H^r$ quando $\left| \frac{ik}{w_2(k)} \right| \leq C(1+k^2)^{l_{i2}}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$\|L_{12}f\|_r^2 = \Sigma(1+k^2)^r \left| \frac{ik}{2w_2(k)} \right|^2 |\widehat{f}|^2 \leq \Sigma(1+k^2)^{r+l_{i2}} |\widehat{f}|^2. \quad (4.6)$$

onde

$$w_2(k) = 1 + c \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sqrt{\beta}|k| + \left(f - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right) \beta k^2, \quad \forall k,$$

$f - d \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \neq 0$, logo $l_{i2} = -1$. Para garantir que $L_{12}(u^2) \in H^{s-\Delta_i}$ é suficiente que $u^2 \in H^{s-\Delta_i+l_{i2}}$ logo pelo Teorema 2.6 será suficiente

$$2(s - \Delta_i) > 0 \quad s - \Delta_i + l_{i2} \leq s - \Delta_i \quad \text{e} \quad s - \Delta_i + l_{i2} < 2(s - \Delta_i) - 1/2,$$

ou seja

$$l_{i2} \leq 0 \quad \text{e} \quad s > \max \{ \Delta_i, l_{i2} + \Delta_i + 1/2 \} = \max \{ \Delta_i, \Delta_i - 1/2 \} = \Delta_i$$

Finalmente, nas regiões R_9, R_{11}, R_{14} , e R_{15} quando $s > s_i^* = \max \{ \Delta_i/2, \Delta_i - 1/2, \Delta_i \} = \max \{ \Delta_i/2, \Delta_i \}$ e os valores são apresentado na tabela 4.2.

R_i	l_{i2}	s_i^*	$l_{i2} + \Delta_i + \frac{1}{2}$
R_9	-1	-1/2	-3/2
R_{11}	-1	1	1/2
R_{14}	-1	0	-1/2
R_{15}	-1	1/2	0

Tabela 4.2: Valores de s_i^* correspondente a estas regiões

Portanto a função $F : H^s \times H^{s-\Delta_i} \rightarrow H^s \times H^{s-\Delta_i}$ esta bem definida. Para concluir provaremos que nessas regiões a função $\widetilde{F}(\eta, u) = \begin{bmatrix} L_{11}(\eta u) \\ L_{12}(u^2) \end{bmatrix}$ é Lipschitz na bola

$$B_R = \{ (\eta, u) \in H^s \times H^{s-\Delta_i} : \|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta_i}^2 < R \}$$

quando $s > \max\{s_i^*, \bar{s}_i\}$. De fato, usando novamente o 2.6 temos

$$\begin{aligned} \|L_{12}(u_1^2) - L_{12}(u_2^2)\|_{s-\Delta_i} &\leq C\|u_1^2 - u_2^2\|_{s-\Delta_i+l_{i2}} \\ &\leq C\|(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)\|_{s-\Delta_i+l_{i2}} \\ &\leq C\|u_1 - u_2\|_{s-\Delta_i}\|u_1 + u_2\|_{s-\Delta_i} \\ &\leq 2CR\|u_1 - u_2\|_{s-\Delta_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|L_{11}(\eta_1 u_1) - L_{11}(\eta_2 u_2)\|_s &\leq c\|\eta_1 u_1 - \eta_2 u_2\|_{s+l_{i1}} \\ &\leq C(\|\eta_1 u_1 - \eta_1 u_2\|_{s+l_{i1}} + \|\eta_1 u_2 - \eta_2 u_2\|_{s+l_{i1}}) \\ &\leq C(\|\eta_1\|_s\|u_1 - u_2\|_{s-\Delta_i} + \|u_2\|_{s-\Delta_i}\|\eta_1 - \eta_2\|_s) \\ &\leq CR(\|u_1 - u_2\|_{s-\Delta_i} + \|\eta_1 - \eta_2\|_s) \end{aligned}$$

□

Proposição 4.7. *Para cada região R_i , $i = 9, 11, 14, 15$, no espaço dos parâmetros existem números reais Δ_i para qualquer real $s > \max\{\frac{\Delta_i}{2}, \Delta_i\}$ com $s > s_i^*$. Seja $(\eta^\circ, u^\circ) \in H^s \times H^{s-\Delta_i}$ então existe $T_s = T(s, \|(\eta^\circ, u^\circ)\|_{s \times s-\Delta_i})$ e uma única $(\eta, u) \in C([0, T], H^s \times H^{s-\Delta_i})$ solução de (3.21). Além disso,*

$$\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta_i}^2 \leq \varrho(t) ; 0 \leq t \leq T$$

onde $\varrho = \varrho(t)$ é solução do P.V.I

$$\begin{cases} \frac{d\varrho}{dt} = C_1\varrho + C_2\varrho^{\frac{3}{2}}, t > 0 \\ \varrho(0) = \|\eta^\circ\|_s^2 + \|u^\circ\|_{s-\Delta_i}^2 \end{cases}$$

Prova. Para provar que $\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta_i}^2 \leq \varrho^{\frac{1}{2}}(t)$ com $0 \leq t \leq T$, precisamos limitar $\|\eta\|_s$ e $\|u\|_{s-\Delta_i}$. Primeiro majoraremos $\|\eta\|_s$, para isso consideremos $(\eta_t, \eta)_s$ usando a desigualdade de Cauchy - Schwartz, as propriedades dos operadores L_{01} , L_{02} , L_{11} , L_{12} lineares limitados e o teorema 2.6, temos:

$$\begin{aligned}
(\eta_t, \eta)_s &= (L_{01}u - L_{11}(\eta u), \eta)_s \\
&\leq (\|L_{01}u - L_{11}(\eta u)\|_s) \|\eta\|_s \\
&\leq (\|L_{01}u + L_{11}(\eta u)\|_s) \|\eta\|_s \\
&\leq (c_1 \|u\|_{s-\Delta i} + c_2 \|\eta u\|_{s-1}) \|\eta\|_s \\
&\leq (c_1 \|u\|_{s-\Delta i} + c_2 \|\eta\|_s \|u\|_{s-\Delta i}) \|\eta\|_s \\
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta\|_s^2 &\leq c_1 \|\eta\|_s \|u\|_{s-\Delta i} + c_2 \|\eta\|_s^2 \|u\|_{s-\Delta i}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Similarmente, vamos limitar $\|u\|_{s-\Delta i}$ usaremos $(u_t, u)_{s-\Delta i}$ a desigualdade do Cauchy-Schwarz, as propriedades dos operadores L_{01} , L_{02} , L_{11} , L_{12} lineares limitados e o teorema 2.6 obtemos,

$$\begin{aligned}
(u_t, u)_{s-\Delta i} &= (L_{02}\eta - L_{12}(u^2), u)_{s-\Delta i} \\
&\leq (\|L_{02}\eta - L_{12}(u^2)\|_{s-\Delta i}) \|\eta\|_{s-\Delta i} \\
&\leq (\|L_{02}\eta\|_{s-\Delta i} + \|L_{12}u^2\|_{s-\Delta i}) \|\eta\|_{s-\Delta i} \\
&\leq (c_3 \|\eta\|_s + c_4 \|u^2\|_{s-\Delta i-1}) \|\eta\|_{s-\Delta i} \\
&\leq (c_3 \|\eta\|_s + c_4 \|u\|_s \|u\|_{s-\Delta i-1}^2) \|\eta\|_{s-\Delta i} \\
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{s-\Delta i}^2 &\leq c_3 \|\eta\|_s \|u\|_{s-\Delta i} + c_4 \|u\|_{s-\Delta i}^3
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Somando (4.7) e (4.8)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2) \leq c_1 \|\eta\|_s \|u\|_{s-\Delta i} + c_2 \|\eta\|_s^2 \|u\|_{s-\Delta i} + c_3 \|\eta\|_s \|u\|_{s-\Delta i} + c_4 \|u\|_{s-\Delta i}^3$$

$$\begin{aligned}
&\leq (c_1 + c_3) \|\eta\|_s \|u\|_{s-\Delta i} + c_2 \|\eta\|_s^2 \|u\|_{s-\Delta i} + c_4 \|u\|_{s-\Delta i}^3 \\
&\leq \left(\frac{c_1+c_3}{2}\right) [\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2] + \|u\|_{s-\Delta i} [c_2 \|\eta\|_s^2 + c_4 \|u\|_{s-\Delta i}^2] \\
&\leq c_1 [\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2] + \max\{c_2, c_4\} \|u\|_{s-\Delta i} [\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2]
\end{aligned}$$

sabe-se que $\|u\|_{s-\Delta i} \leq \sqrt{\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2}$ então:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2) \leq C_1 [\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2] + C_2 [\|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2]^{\frac{3}{2}} \quad (4.9)$$

chamemos $\varrho = \|\eta\|_s^2 + \|u\|_{s-\Delta i}^2$ então substituindo ϱ em (4.9) temos

$$\frac{d\varrho}{dt} \leq C_1 \varrho + C_2 \varrho^{\frac{3}{2}} \quad (4.10)$$

Pela equação de Bernoulli e substituindo o valor de $\nu = \varrho^{-\frac{1}{2}}$ na equação (4.10) onde ν não pode ser zero e $\nu' = \frac{-1}{2} \varrho^{-\frac{3}{2}} \varrho'$, com C_1, C_2 constantes positivas temos:

$$\begin{cases} -2\nu' = C_2 + C_1\nu \\ \nu = \left(\frac{C_2}{C_1} + \nu(0)\right) e^{-\frac{C_1 t}{2}} - \frac{C_2}{C_1} \end{cases} \quad (4.11)$$

logo resolvendo a equação(4.11) temos,

$$\varrho = \frac{1}{\left[\left(\frac{C_2}{C_1} + \nu(0)\right) e^{-\frac{C_1 t}{2}} - \frac{C_2}{C_1}\right]^2} \quad (4.12)$$

Como estamos interessados em achar até que t podemos garantir a solução única, então analisando para que valores de t a equação (4.12) esta bem definida, então

$$\left(\frac{C_2}{C_1} + \nu(0)\right) e^{-\frac{C_1 t}{2}} = \frac{C_2}{C_1}$$

$$t = \frac{-2}{C_1} \ln \left(\frac{\frac{C_2}{C_1}}{\frac{C_2}{C_1} + \nu(0)} \right)$$

Para $T_s \leq t$ podemos garantir a validade do teorema. □

5 ANÁLISE DO MÉTODO NUMÉRICO

5.1 Estudo da convergência

5.1.1 Discretização do Espaço.

Nesta seção analisaremos o método de Fourier-Galerkin para a discretização na variável espacial que aproximará o sistema de equações originais (3.21). Para isso consideramos o sistema equivalente (4.2)

$$\begin{cases} \eta_t = L_{01}u - L_{11}(\eta u) \\ u_t = L_{02}\eta - L_{12}(u^2) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $L_{01}, L_{11}, L_{02}, L_{12}$ são os operadores multiplicadores de Fourier definidos por (4.3).

A discretização espacial pelo método de Fourier-Galerkin (capítulo 2), para o problema semi discreto, consiste em achar $(M, U) \in C([0, T], S_N \times S_N)$ tal que para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in S_N$,

$$\begin{cases} (M_t - L_{01}U + L_{11}(MU), \varphi_1) = 0, \\ (U_t - L_{02}M + L_{12}(U^2), \varphi_2) = 0, \\ M(0) = P_N\eta^0, \quad U(0) = P_Nu^0, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde P_N é a projeção ortogonal de L^2 sobre S_N .

Proposição 5.1. *Considere as regiões $R_i, i = 9, 11, 14$ e 15 . Sejam $s_1 = \max\{0, \Delta_i\}$, $s_2 = \max\{0, -\Delta_i\} = -\min\{0, -\Delta_i\}$, $\eta_1, \eta_2 \in H^{s_1} \cap L^\infty$ e $u_1, u_2 \in H^{s_2} \cap L^\infty$. Então*

os operadores lineares limitados definidos em (4.3) satisfazem as desigualdades

$$\begin{aligned}
\|L_{01}u_1 - L_{01}u_2\|_{s_1} &\leq C_1\|u_1 - u_2\|_{s_2}, & \|L_{02}\eta_1 - L_{02}\eta_2\|_{s_2} &\leq C_2\|\eta_1 - \eta_2\|_{s_1} \\
\|L_{11}(\eta_1u_1) - L_{11}(\eta_2u_2)\|_{s_1} &\leq C_3 \max\{\|\eta_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\} [\|\eta_1 - \eta_2\|_{s_1} + \|u_1 - u_2\|_{s_2}] \\
\|L_{12}(u_1^2) - L_{21}(u_2^2)\|_{s_2} &\leq C_4 \max_{j=1,2}\{\|u_j\|_\infty\} [\|u_1 - u_2\|_{s_2}],
\end{aligned} \tag{5.3}$$

em que $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ são constantes e

$$L_{01} : H^{s_2} \rightarrow H^{s_1}, \quad L_{02} : H^{s_1} \rightarrow H^{s_2}, \quad L_{11} : H^{s_1-1} \rightarrow H^{s_1}, \quad L_{12} : H^{s_2-1} \rightarrow H^{s_2}.$$

Prova. Para cada uma das regiões (R_i , $i = 9, 11, 14, 15$) nós demonstraremos que as equações (5.3) são satisfeitas.

Começando com a região R_9 , onde ($s_1 = 0, \Delta_i = -1 < 0, s_2 = 1, l = -1, \Gamma_i = 0$).

Logo temos que

$$L_{01} : H^1 \rightarrow H^0, \quad L_{02} : H^0 \rightarrow H^1, \quad L_{11} : H^{-1} \rightarrow H^0, \quad L_{12} : H^0 \rightarrow H^1.$$

Sendo de nosso interesse saber como é o comportamento dos termos não lineares, a seguir

$$\begin{aligned}
\|L_{11}(\eta_1u_1) - L_{11}(\eta_2u_2)\|_0 &\leq c\|\eta_1u_1 - \eta_2u_2\|_{-1} \\
&\leq c(\|\eta_1u_1 - \eta_1u_2 + \eta_1u_2 - \eta_2u_2\|_{-1}) \\
&\leq c(\|\eta_1u_1 - \eta_1u_2 + \eta_1u_2 - \eta_2u_2\|_0) \\
&\leq c(\|\eta_1\|_\infty\|u_1 - u_2\|_0 + \|u_2\|_\infty\|\eta_1 - \eta_2\|_0) \\
&\leq c \max\{\|\eta_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\} [\|u_1 - u_2\|_1 + \|\eta_1 - \eta_2\|_0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|L_{12}(u_1^2 - u_2^2)\|_1 &\leq c\|u_1^2 - u_2^2\|_0 \\
&\leq c\|u_1 + u_2\|_\infty\|u_1 - u_2\|_0 \\
&\leq c(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)\|u_1 - u_2\|_0 \\
&\leq c\left(2\max_{j=1,2}\|u_j\|_\infty\right)\|u_1 - u_2\|_0 \\
&\leq c2\max_{j=1,2}\|u_j\|_\infty\|u_1 - u_2\|_1
\end{aligned}$$

Agora observemos o comportamento dos operadores para a região R_{11} ($s_1 = 1, \Delta_i = 1 > 0, s_2 = 0, \Gamma_i = 0$), onde

$$L_{01} : H^0 \rightarrow H^1, \quad L_{02} : H^1 \rightarrow H^0, \quad L_{11} : H^0 \rightarrow H^1, \quad L_{12} : H^{-1} \rightarrow H^0,$$

para $\eta \in H^1, u \in H^0$, então para os termos não lineares temos

$$\begin{aligned}
\|L_{11}(\eta_1 u_1 - \eta_2 u_2)\|_0 &\leq c\|\eta_1 u_1 - \eta_2 u_2\|_0 \\
&\leq c(\|\eta_1\|_\infty\|u_1 - u_2\|_0 + \|u_2\|_\infty\|\eta_1 - \eta_2\|_0) \\
&\leq c\max\{\|\eta_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\}[\|u_1 - u_2\|_0 + \|\eta_1 - \eta_2\|_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|L_{12}(u_1^2 - u_2^2)\|_0 &\leq c\|u_1^2 - u_2^2\|_{-1} \\
&\leq c\|u_1 + u_2\|_\infty\|u_1 - u_2\|_0 \\
&\leq c(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty)\|u_1 - u_2\|_0 \\
&\leq \left(2c\max_{j=1,2}\|u_j\|_\infty\right)\|u_1 - u_2\|_0
\end{aligned}$$

Prosseguindo de maneira análoga para R_{14} ($s_1 = 0, \Delta_i = 0, s_2 = 0, \Gamma_i = -1, l = -1$), temos

$$L_{01} : H^0 \rightarrow H^0, \quad L_{02} : H^0 \rightarrow H^0, \quad L_{11} : H^{-1} \rightarrow H^0, \quad L_{12} : H^{-1} \rightarrow H^0,$$

onde $\eta \in H^0, u \in H^0$, portanto

$$\begin{aligned}
\|L_{11}(\eta_1 u_1 - \eta_2 u_2)\|_0 &\leq c\|\eta_1 u_1 - \eta_2 u_2\|_{-1} \\
&\leq c(\|\eta_1\|_\infty\|u_1 - u_2\|_0 + \|u_2\|_\infty\|\eta_1 - \eta_2\|_0) \\
&\leq c\max\{\|\eta_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\}[\|u_1 - u_2\|_0 + \|\eta_1 - \eta_2\|_0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|L_{12}(u_1^2 - u_2^2)\|_0 &\leq c\|u_1^2 - u_2^2\|_{-1} \\
&\leq c\|u_1 + u_2\|_\infty\|u_1 - u_2\|_0 \\
&\leq \left(2c \max_{j=1,2} \|u_j\|_\infty\right) \|u_1 - u_2\|_0
\end{aligned}$$

Finalmente, para R_{15} ($s_1 = 1/2, \Delta_i = 1/2, s_2 = 0, \Gamma_i = -1/2, l = -1$) dai,

$$L_{01} : H^0 \rightarrow H^{1/2}, \quad L_{02} : H^{1/2} \rightarrow H^0, \quad L_{11} : H^{-1/2} \rightarrow H^{1/2}, \quad L_{12} : H^{-1} \rightarrow H^0,$$

onde $\eta \in H^{1/2}, u \in H^0$, concluimos então que

$$\begin{aligned}
\|L_{11}(\eta_1 u_1 - \eta_2 u_2)\|_{1/2} &\leq c\|\eta_1 u_1 - \eta_2 u_2\|_{-1/2} \\
&\leq c(\|\eta_1\|_0\|u_1 - u_2\|_0 + \|u_2\|_0\|\eta_1 - \eta_2\|_0) \\
&\leq c \max\{\|\eta_1\|_0, \|u_2\|_0\} [\|u_1 - u_2\|_0 + \|\eta_1 - \eta_2\|_{1/2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|L_{12}(u_1^2 - u_2^2)\|_0 &\leq c\|u_1^2 - u_2^2\|_{-1} \\
&\leq c(\|u_1\|_\infty + \|u_2\|_\infty) \|u_1 - u_2\|_{-1} \\
&\leq (2c \max \|u_j\|_\infty) \|u_1 - u_2\|_0
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.2. *Considere que os parâmetros pertencem a uma das regiões R_i ($i = 9, 11, 14, 15$). Seja $(\eta, u) \in C([0, T], H^r \times H^{r-\Delta_i})$ solução de (5.1) com $(\eta^0, u^0) \in H^r \times H^{r-\Delta_i}$ onde r satisfaz $\max\{r, r - \Delta_i\} > 1/2$ e $r > s_i^*$. Então o sistema semi discreto (5.2) tem solução local única $(M, U) \in C([0, T], S_N \times S_N)$ com as condições iniciais $M^0 = P_N \eta^0, U^0 = P_N u^0$. Além disso, $\forall t \in [0, T]$ e para todo N suficientemente grande, existe uma constante C tal que se $\Delta_i \leq 0$, temos a estimativa*

$$\max_{t \in [0, T]} \left\{ \|M(t) - \eta(t)\|_s^2 + \|U(t) - u(t)\|_{s-\Delta_i}^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^{r-s}}$$

quando s satisfaz $0 \leq s \leq r$, e se $\Delta_i > 0$, temos

$$\max_{t \in [0, T]} \left\{ \|M(t) - \eta(t)\|_{s+\Delta_i}^2 + \|U(t) - u(t)\|_s^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{N^{r-\Delta_i-s}} \quad (5.4)$$

quando s satisfaz $0 \leq s \leq r - \Delta_i$.

Prova. Vamos começar pelo caso $s = 0$ e $\Delta_i \leq 0$. Para provar a convergência da solução do problema semi discreto para a solução do problema contínuo. Precisaremos supor que M, U solução de (5.2) sejam limitados a priori, por $2 \max \|u\|_\infty$ e $2 \max \|\eta\|_\infty$, respectivamente. Essa suposição se justificará no decorrer da prova.

Seja $h_1 = P_N \eta - M$, $h_2 = P_N u - U$. Precisamos limitar $\|\eta - M\|_0$ e $\|u - U\|_{-\Delta_i}$, para isso começamos limitando $\eta - M$, e usando as propriedades para a projeção enunciadas no capítulo 2 temos

$$\begin{aligned}
\|\eta - M\|_0 &= \|\eta - P_N \eta + P_N \eta - M\|_0 \\
&\leq \|\eta - P_N \eta\|_0 + \|P_N \eta - M\|_0 \\
&\leq C_p N^{0-r} \|\eta\|_r + \|P_N \eta - M\|_0 \\
&\leq C_p N^{-r} \|\eta\|_r + \|h_1\|_0.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Para limitar h_1 consideremos (h_{1t}, φ_1) e, usando propriedades dos operadores lineares limitados $L_{01} e L_{11}$, da projeção P_N , obtemos

$$\begin{aligned}
(h_{1t}, \varphi_1)_0 &= (P_N \eta_t - M_t, \varphi_1)_0 \\
&= (\eta_t - M_t, P_N \varphi_1)_0 \\
&= (L_{01} u - L_{11}(\eta u) - (L_{01} U + L_{11}(MU)), P_N \varphi_1)_0 \\
&= (L_{01}(u - U) - L_{11}(\eta u - MU), P_N \varphi_1)_0.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, consideramos $\varphi_1 = h_1$ e aplicando as desigualdades da Proposição 5.1 para L_{11} , observe que se $\Delta_i \leq 0$ então $s_1 = 0$ e

$s_2 = -\Delta_i$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_1\|_0^2 &\leq \|L_{01}(u - U) - L_{11}(\eta u - MU)\|_0 \|P_N h_1\|_0 \\
&\leq (\|L_{01}(u - U)\|_0 + \|L_{11}(\eta u - MU)\|_0) \|h_1\|_0 \\
&\leq [c_1 \|u - U\|_{-\Delta_i} + c_2 (\|u - U\|_{-\Delta_i} + \|\eta - M\|_0)] \|h_1\|_0 \\
&\leq [c_1 \|u - U\|_{-\Delta_i} + c_2 \|\eta - M\|_0] \|h_1\|_0 \\
&\leq [c_1 \|u - P_N u + P_N u - U\|_{-\Delta_i} + c_2 \|\eta - P_N \eta + P_N \eta - M\|_0] \|h_1\|_0 \\
&\leq [c_1 (\|u - P_N u\|_{-\Delta_i} + \|P_N u - U\|_{-\Delta_i}) + c_2 (\|\eta - P_N \eta\|_0 + \|P_N \eta - M\|_0)] \|h_1\|_0 \\
&\leq [c_1 (\|u - P_N u\|_{-\Delta_i} + \|h_2\|_{-\Delta_i}) + c_2 (\|\eta - P_N \eta\|_0 + \|h_1\|_0)] \|h_1\|_0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_1\|_0^2 \leq [c_1 (CN^{-r} \|u\|_r + \|h_2\|_{-\Delta_i}) + c_2 (N^{-r} \|\eta\|_r + \|h_1\|_0)] \|h_1\|_0. \quad (5.6)$$

Finalmente, majoraremos $u - U$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u - U\|_{-\Delta_i} &= \|u - P_N u + P_N u - U\|_{-\Delta_i} \\
&\leq \|u - P_N u\|_{-\Delta_i} + \|P_N u - U\|_{-\Delta_i} \\
&\leq C_p N^{-r} \|u\|_{r-\Delta_i} + \|h_2\|_{-\Delta_i}. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Para limitar $\|h_2\|_{-\Delta_i}$ consideramos φ_2 tal que $\widehat{\varphi}_2(k) = (1 + k^2)^{-\Delta_i} \widehat{h}_2(k)$ em (5.2), e usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Proposição 5.1

$$\begin{aligned}
(h_{2t}, \varphi_2)_{-\Delta_i} &= (h_{2t}, \varphi_2)_{-\Delta_i} \\
&= (P_N u_t - U_t, \varphi_2)_{-\Delta_i} \\
&= (u_t - U_t, P_N \varphi_2)_{-\Delta_i} \\
&= (L_{02} \eta - L_{12}(u^2) - (L_{02} M - L_{12}(U^2)), P_N \varphi_2)_{-\Delta_i} \\
&= (L_{02}(\eta - M) - L_{12}(u^2 - U^2), P_N \varphi_2)_{-\Delta_i} \\
&\leq \|L_{02}(\eta - M) - L_{12}(u^2 - U^2)\|_{-\Delta_i} \|h_2\|_{-\Delta_i} \\
&\leq (c \|\eta - M\|_0 + C (\|u\|_\infty + \|U\|_\infty)) \|u - U\|_{-\Delta_i} \|h_2\|_{-\Delta_i} \\
&\leq (c_1 \|\eta - M\|_0 + c_2 \|u - U\|_{-\Delta_i}) \|h_2\|_{-\Delta_i}
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_2\|_{-\Delta_i}^2 &\leq (C_1 \|\eta - P_N \eta + P_N \eta - M\|_0 + C_2 \|u - P_N u + P_N u - U\|_{-\Delta_i}) \|h_2\|_{-\Delta_i} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_2\|_{-\Delta_i}^2 &\leq (C_1 (N^{-r} \|\eta\|_r + \|h_1\|_0) + C_2 (CN^{-r} \|u\|_{r-\Delta_i} + \|h_2\|_{-\Delta_i})) \|h_2\|_{-\Delta_i} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Somaremos as inequações (5.6) e (5.8) e chamaremos de $\mathcal{E} = \|h_1\|_0^2 + \|h_2\|_{-\Delta_i}^2$, posteriormente aplicaremos a desigualdade de Cauchy e o Lema de Gronwall 2.45 , ouseja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{E} &\leq CN^{-r} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r) \|h_1\|_0 + CN^{-r} (\|\eta\|_r + \|u\|_{r-\Delta_i}) \|h_2\|_{-\Delta_i} \\ &\quad + 2C \|h_1\|_0 \|h_2\|_{-\Delta_i} + c\mathcal{E} \\ &\leq CN^{-2r} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r)^2 + C \|h_1\|_0^2 + CN^{-2r} (\|\eta\|_r + \|u\|_{r-\Delta_i})^2 + C \|h_2\|_{-\Delta_i}^2 \\ &\quad + (2C)^2 (\|h_1\|_0^2 + \|h_2\|_{-\Delta_i}^2) + c\mathcal{E} \\ &\leq CN^{-2r} [(\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r)^2 + (\|\eta\|_r + \|u\|_{r-\Delta_i})^2] \\ &\quad + C (\|h_1\|_0^2 + \|h_2\|_{-\Delta_i}^2) + c\mathcal{E} \\ &\leq 2CN^{-2r} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r)^2 + c\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{E}(t) \leq 2CN^{-2r} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r)^2 e^{ct}, \quad t \in [0, T]. \quad (5.9)$$

De (5.9) temos que

$$\begin{aligned} \|h_1\|_0^2 \leq \mathcal{E} &\rightarrow \|h_1\|_0 \leq \sqrt{\mathcal{E}} \\ \|h_2\|_{-\Delta_i}^2 \leq \mathcal{E} &\rightarrow \|h_2\|_{-\Delta_i} \leq \sqrt{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Das equações (5.5) e (5.7) e usando (5.10),

$$\begin{aligned} \|\eta - M\|_0^2 &\leq \left(C_p N^{-r} \|\eta\|_r + \sqrt{\mathcal{E}} \right)^2, \\ \|u - U\|_{-\Delta_i}^2 &\leq \left(C_p N^{-r} \|u\|_{r-\Delta_i} + \sqrt{\mathcal{E}} \right)^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \{ \|\eta - M\|_0^2 + \|u - U\|_{-\Delta_i}^2 \}^{1/2} &\leq [C_p^2 N^{-2r} (\|\eta\|_r^2 + \|u\|_{r-\Delta_i}^2) \\ &\quad + 2C_p N^{-r} \sqrt{\mathcal{E}} (\|\eta\|_r^2 + \|u\|_{r-\Delta_i}^2) + 2\mathcal{E}]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\max_{t \in [0, T]} \{ \|\eta - M\|_0^2 + \|u - U\|_{-\Delta_i}^2 \} \leq CN^{-r}.$$

Agora vamos justificar a estimativa apriori usada na primeira parte da prova, para $\Delta_i < 0$

$$\|U\|_\infty \leq 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_\infty \quad \text{e} \quad \|M\|_\infty \leq 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|\eta\|_\infty$$

Suponha que ambas desigualdades sejam apenas válidas para $t \in [0, T_N^*]$, com $T_N^* < T$ observando que $\|U - P_N u\|_0 \leq CN^{\Delta_i - r}$ e $\|U - P_N u\|_1 \leq CN^{1 + \Delta_i - r}$ as quais são verificadas usando a desigualdade inversa em S_N descritas no capítulo 2.

$$\begin{aligned} \|U\|_\infty &= \|U - P_N u + P_N u - u + u\|_\infty, \quad \text{para } r > 1/2 \\ &\leq \|U - P_N u\|_\infty + \|P_N u - u\|_\infty + \|u\|_\infty \\ &\leq \|u\|_\infty + [\|U - P_N u\|_0 \|U - P_N u\|_1]^{1/2} + [\|u - P_N u\|_0 \|u - P_N u\|_1]^{1/2} \\ &\leq \|u\|_\infty + C[N^{\Delta_i - r + 1 + \Delta_i - r}]^{1/2} + C_1[N^{\Delta_i - r + 1 + \Delta_i - r}]^{1/2} \\ &\leq \|u\|_\infty + C_2 N^{\Delta_i + 1/2 - r} \end{aligned}$$

Nesta vez usaremos a desigualdade inversa em S_N para limitar, $h_2 \in S_N$, $0 \leq s \leq r$, e $\Delta_i < 0$,

$$\|h_2\|_r \leq C_0 N^{r-s} \|h_2\|_s$$

Para $s = 0$, $r = 1$ temos

$$\|h_2\|_1 \leq C_0 N^1 \|h_2\|_0.$$

Então na equação (5.12)

$$\begin{aligned}
\|h_2\|_\infty &\leq c\|h_2\|_0^{1/2}\|h_2\|_1^{1/2}, && \text{(Desigualdade inversa de Sobolev)} \\
&\leq c\|h_2\|_0^{1/2}(C_1N\|h_2\|_0)^{1/2} \\
&\leq c\|h_2\|_0^{1/2}\left(\sqrt{C_1N}\|h_2\|_0\right)^{1/2} \\
&\leq c_2N^{1/2}\|h_2\|_0 \\
&\leq c_2N^{1/2}\|h_2\|_{-\Delta_i} \\
&\leq c_2N^{1/2}\sqrt{\mathcal{E}} \\
&< c_2N^{1/2}\sqrt{CN^{-r}} \\
&< cN^{-r+1/2}.
\end{aligned}$$

se $\Delta_i + 1/2 - r < 0$, escolhendo N suficientemente grande temos que

$$C_2N^{\Delta_i+1/2-r} < 1/2 \max \|u\|_\infty$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\|U\|_\infty &\leq \max \|u\|_\infty + 1/2 \max \|u\|_\infty \\
&\leq 3/2 \max \|u\|_\infty < 2 \max \|u\|_\infty
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Faremos a prova do Teorema para $\Delta_i \geq 0$ de forma semelhante, começaremos majorando

$$\begin{aligned}
\|\eta - M\|_{\Delta_i} &= \|\eta - P_N\eta + P_N\eta - M\|_{\Delta_i} \\
&\leq \|\eta - P_N\eta\|_{\Delta_i} + \|P_N\eta - M\|_{\Delta_i} \\
&\leq CN^{\Delta_i-r}\|\eta\|_r + \|h_1\|_{\Delta_i},
\end{aligned}$$

limitaremos $\|h_1\|_{\Delta_i}$, para isso, consideramos (h_{1t}, φ_1) onde $\widehat{\varphi}_1(k) = (1 + k^2)^{\Delta_i} \widehat{h}_1(k)$,

$$\begin{aligned}
(h_{1t}, h_1)_{\Delta_i} &= (h_{1t}, \varphi_1) \\
&= (\eta_t - M_t, P_N\varphi_1) \\
&= (L_{01}(u - U) - L_{11}(\eta u - MU), P_N h_1)_{\Delta_i}.
\end{aligned}$$

Usaremos a Proposição 5.1 especificamente as equações (5.3), e aplicaremos também a desigualdade de Cauchy-Schwarz, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_1\|_{\Delta_i}^2 &\leq \|L_{01}(u - U) - L_{11}(\eta u - MU)\|_{\Delta_i} \|P_N h_1\|_{\Delta_i} \\
&\leq (\|L_{01}(u - U)\|_{\Delta_i} + \|L_{11}(\eta u - MU)\|_{\Delta_i}) \|h_1\|_{\Delta_i} \\
&\leq [c_1 \|u - U\|_0 + c \max(\|\eta\|_\infty, \|u\|_\infty) (\|\eta - M\|_{\Delta_i} + \|u - U\|_0)] \|h_1\|_{\Delta_i} \\
&\leq [c_1 \|u - U\|_0 + c_2 \|\eta - M\|_{\Delta_i} + c_2 \|u - U\|_0] \|h_1\|_{\Delta_i} \\
&\leq [c \|u - U\|_0 + c_2 \|\eta - M\|_{\Delta_i}] \|h_1\|_{\Delta_i} \\
&\leq [c \|u - P_N u + P_N u - U\|_0 + c_2 \|\eta - P_N \eta + P_N \eta - M\|_{\Delta_i}] \|h_1\|_{\Delta_i} \\
&\leq [c_1 (\|u - P_N u\|_0 + \|P_N u - U\|_0) + c_2 (\|\eta - P_N \eta\|_{\Delta_i} + \|P_N \eta - M\|_{\Delta_i})] \|h_1\|_{\Delta_i} \\
&\leq [CN^{\Delta_i - r} \|u\|_{r - \Delta_i} + c_1 \|h_2\|_0 + c_2 N^{\Delta_i - r} \|\eta\|_r + c_2 \|h_1\|_{\Delta_i}] \|h_1\|_{\Delta_i}
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_1\|_{\Delta_i}^2 \leq [CN^{\Delta_i - r} (\|u\|_{r - \Delta_i} + \|\eta\|_r) + c_1 (\|h_1\|_{\Delta_i} + \|h_2\|_0)] \|h_1\|_{\Delta_i}.$$

De forma similar majoramos $\|u - U\|_0$

$$\begin{aligned}
\|u - U\|_0 &= \|u - P_N u + P_N u - U\|_0 \\
&\leq \|u - P_N u\|_0 + \|P_N u - U\|_0 \\
&\leq C_p N^{\Delta_i - r} \|u\|_{r - \Delta_i} + \|h_2\|_0.
\end{aligned}$$

Finalmente limitaremos $\|h_2\|_0$ para isso em (h_{2t}, φ_2) consideraremos $\varphi_2 = h_2$, usaremos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e, a Proposição 5.1, obteremos

$$\begin{aligned}
(h_{2t}, h_2)_0 &= (P_N u_t - U_t, h_2)_0 = (u_t - U_t, P_N h_2)_0 = \\
&\leq \|L_{02}(\eta - M) - L_{12}(u^2 - U^2)\|_0 \|P_N h_2\|_0 \\
&\leq [c \|\eta - M\|_{\Delta_i} + c_1 \max(\|u\|_\infty, \|U\|_\infty) \|u - U\|_0] \|h_2\|_0 \\
&\leq [c \|\eta - M\|_{\Delta_i} + c_2 \|u - U\|_0] \|h_2\|_0 \\
&\leq [c \|\eta - P_N \eta + P_N \eta - M\|_{\Delta_i} + c_2 \|u - P_N u + P_N u - U\|_0] \|h_2\|_0 \\
&\leq [c \|\eta - P_N \eta\|_{\Delta_i} + c \|P_N \eta - M\|_{\Delta_i} + c_2 \|u - P_N u\|_0 + c_2 \|P_N u - U\|_0] \|h_2\|_0 \\
&\leq [CN^{\Delta_i - r} \|\eta\|_r + c \|h_1\|_{\Delta_i} + c_2 N^{\Delta_i - r} \|u\|_{r - \Delta_i} + c_2 \|h_2\|_0] \|h_2\|_0.
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_2\|_0^2 \leq [CN^{\Delta_i-r} (\|\eta\|_r + \|u\|_{r-\Delta_i}) + c_3 (\|h_1\|_{\Delta_i} + \|h_2\|_0)] \|h_2\|_0.$$

Considerando as duas equações que contém as derivadas de $\|h_1\|_{\Delta_i}$ e $\|h_2\|_0$ e fazendo

$$\tilde{\mathcal{E}} := \|h_1\|_{\Delta_i}^2 + \|h_2\|_0^2,$$

usando a desigualdade de Cauchy obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|h_1\|_{\Delta_i}^2 + \|h_2\|_0^2) &\leq [CN^{\Delta_i-r} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r) + c_3 (\|h_1\|_{\Delta_i} + \|h_2\|_0)] (\|h_1\|_{\Delta_i} + \|h_2\|_0) \\ &\leq CN^{\Delta_i-r} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r) (\|h_1\|_{\Delta_i} + \|h_2\|_0) \\ &\quad + c_3 (\|h_1\|_{\Delta_i} + \|h_2\|_0) (\|h_1\|_{\Delta_i} + \|h_2\|_0) \\ &\leq CN^{2(\Delta_i-r)} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r)^2 + c_4 (\|h_1\|_{\Delta_i}^2 + \|h_2\|_0^2) \\ &\quad + c_3 (\|h_1\|_{\Delta_i}^2 + \|h_2\|_0^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{E}} \leq CN^{2(\Delta_i-r)} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r)^2 + C\tilde{\mathcal{E}}.$$

Aplicamos o Lema de Gronwall (2.45) e chegamos a

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) \leq CN^{2(\Delta_i-r)} (\|u\|_{r-\Delta_i} + \|\eta\|_r)^2 e^{CT}, \quad t \in [0, T].$$

Também é de nosso conhecimento que

$$\|h_1\|_{\Delta_i}^2 \leq \|h_1\|_{\Delta_i}^2 + \|h_2\|_0^2 = \tilde{\mathcal{E}} \quad \Rightarrow \quad \|h_1\|_{\Delta_i} \leq \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}}$$

$$\|h_2\|_0^2 \leq \|h_1\|_{\Delta_i}^2 + \|h_2\|_0^2 = \tilde{\mathcal{E}} \quad \Rightarrow \quad \|h_2\|_0 \leq \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}}.$$

Portanto, para $\|u - U\|_0^2$ e $\|\eta - M\|_{\Delta_i}^2$,

$$\begin{aligned} \|\eta - M\|_{\Delta_i}^2 &\leq \left(C_p N^{\Delta_i-r} \|\eta\|_r + \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}} \right)^2 \\ \|u - U\|_0^2 &\leq \left(C_p N^{\Delta_i-r} \|u\|_{r-\Delta_i} + \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}} \right)^2. \end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \{ \|\eta - M\|_{\Delta_i}^2 + \|u - U\|_0^2 \}^{1/2} &\leq [C_p^2 N^{2(\Delta_i - r)} (\|\eta\|_r^2 + \|u\|_{r - \Delta_i}^2) \\ &\quad + 2c_p N^{\Delta_i - r} \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}} (\|\eta\|_r^2 + \|u\|_{r - \Delta_i}^2) + 2\tilde{\mathcal{E}}]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\max_{t \in [0, T]} \{ \|\eta - M\|_{\Delta_i}^2 + \|u - U\|_0^2 \}^{1/2} \leq C_p N^{\Delta_i - r}.$$

Agora vamos justificar a estimativa a priori usada na primeira parte da prova, para $\Delta_i > 0$, ou seja

$$\|U\|_\infty \leq 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_\infty \quad \text{e} \quad \|M\|_\infty \leq 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|\eta\|_\infty$$

Suponha que ambas desigualdades sejam apenas válidas para $t \in [0, T_N^*]$, com $T_N^* < T$ considerando também $\|U - P_N u\|_0 \leq CN^{\Delta_i - r}$ e $\|U - P_N u\|_1 \leq CN^{1 + \Delta_i - r}$.

$$\begin{aligned} \|U\|_\infty &= \|U - P_N u + P_N u - u + u\|_\infty, \quad \text{para } r > 1/2 \\ &\leq \|U - P_N u\|_\infty + \|P_N u - u\|_\infty + \|u\|_\infty \\ &\leq \|u\|_\infty + [\|U - P_N u\|_0 \|U - P_N u\|_1]^{1/2} + [\|u - P_N u\|_0 \|u - P_N u\|_1]^{1/2} \\ &\leq \|u\|_\infty + C[N^{\Delta_i - r + 1 + \Delta_i - r}]^{1/2} + C_1[N^{\Delta_i - r + 1 + \Delta_i - r}]^{1/2} \\ &\leq \|u\|_\infty + C_2 N^{\Delta_i + 1/2 - r}. \end{aligned}$$

Na continuação usaremos a desigualdade inversa de Sobolev para $\Delta_i \geq 0$ considerando que devemos limitar para $(h_2 \in H^0)$

$$\|h_2\|_\infty \leq c \|h_2\|_0^{1/2} \|h_2\|_1^{1/2}. \quad (5.12)$$

Usaremos a desigualdade inversa em S_N para limitar, $h_2 \in S_N$, $0 \leq s \leq r$, e $\Delta_i \geq 0$,

$$\|h_2\|_r \leq C_0 N^{r-s} \|h_2\|_s$$

Para $s = 0$, $r = 1$ temos

$$\|h_2\|_1 \leq C_0 N^1 \|h_2\|_0.$$

Então na equação (5.12)

$$\begin{aligned}
\|h_2\|_\infty &\leq c\|h_2\|_0^{1/2}\|h_2\|_1^{1/2}, && \text{(Desigualdade inversa de Sobolev)} \\
&\leq c\|h_2\|_0^{1/2}(C_1N\|h_2\|_0)^{1/2} \\
&\leq c\|h_2\|_0^{1/2}\left(\sqrt{C_1N}\|h_2\|_0\right)^{1/2} \\
&\leq c_2N^{1/2}\|h_2\|_0 \\
&\leq c_2N^{1/2}\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}} \\
&< c_2N^{1/2}\sqrt{CN^{\Delta_i-r}} \\
&< cN^{\Delta_i-r+1/2}.
\end{aligned}$$

e $\Delta_i + 1/2 - r < 0$, escolhendo N suficientemente grande temos que

$$C_2N^{\Delta_i+1/2-r} < 1/2 \max \|u\|_\infty$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\|U\|_\infty &\leq \max \|u\|_\infty + 1/2 \max \|u\|_\infty \\
&\leq 3/2 \max \|u\|_\infty < 2 \max \|u\|_\infty
\end{aligned} \tag{5.13}$$

O caso $s > 0$ a equação (5.4) fica demonstrada usando a desigualdade inversa. \square

Teorema 5.3. *Seja $(M, U) \in C([0, T]; S_N \times S_N)$ solução de (5.2) satisfazendo as condições do Teorema 5.2, então se s é tal que $\min\{s, s - \Delta_i\} > 1/2$ e $s > s_i^*$ temos que existem uma constante $B > 0$ independente de N tal que*

$$\max_{t \in [0, T]} \left\{ \|\partial_t^l M(t)\|_s, \|\partial_t^l U(t)\|_{s-\Delta_i}, l = 0, 1, 2, 3 \right\} \leq B.$$

Prova. Para $M \in H^s, U \in H^{s-\Delta_i}$ com $l = 1$ temos da equação (5.2), usando o Teorema 2.6 e a Proposição 5.1, com $\|U\|_{s-\Delta_i} \leq \bar{B}_0$ e $\|M\|_s \leq B_0$

$$M_t = P_N(L_{01}U - L_{11}(MU))$$

$$\begin{aligned}
\|M_t\|_s &\leq \|L_{01}U - L_{11}(MU)\|_s \\
&\leq \|L_{01}U\|_s + \|L_{11}(MU)\|_s \\
&\leq C\|U\|_{s-\Delta_i} + C_1\|(MU)\|_{s-1} \quad \text{Teorema 2.6} \\
&\leq C\|U\|_{s-\Delta_i} + C_1\|M\|_s\|U\|_{s-\Delta_i} \\
&\leq C\|U\|_{s-\Delta_i} + C_1\|M\|_s\|U\|_{s-\Delta_i} \\
&\leq \|U\|_{s-\Delta_i} (C + C_1\|M\|_s) \\
&\leq \bar{B}_0 (C + C_1B_0)
\end{aligned}$$

$$\|M_t\|_s \leq B_1. \quad (5.14)$$

De forma semelhante

$$U_t = P_N (L_{02}M - L_{12}(U^2))$$

$$\begin{aligned}
\|U_t\|_{s-\Delta_i} &\leq \|L_{02}M - L_{12}(U^2)\|_{s-\Delta_i} \\
&\leq \|L_{02}M\|_{s-\Delta_i} + \|L_{12}(U^2)\|_{s-\Delta_i} \\
&\leq C\|M\|_s + C_1\|U^2\|_{s-\Delta_i-1} \\
&\leq CB_0 + C_1\|U\|_{s-\Delta_i}^2 \\
&\leq CB_0 + C_1\bar{B}_0^2
\end{aligned}$$

$$\|U_t\|_{s-\Delta_i} \leq \bar{B}_1. \quad (5.15)$$

Provando que para $l = 2$, também se cumprirá a limitação

$$\begin{aligned}
(M_t)_t &= P_N (L_{01}U - L_{11}(MU))_t \\
&= P_N (L_{01}U_t - L_{11}(MU)_t) \\
&= P_N (L_{01}U_t - L_{11}(M_tU + MU_t)) \\
&= P_N (L_{01}U_t - L_{11}(M_tU) - L_{11}(MU_t)).
\end{aligned}$$

Aplicando a norma adequada,

$$\begin{aligned} \|M_{tt}\|_s &\leq \|L_{01}U_t - L_{11}(M_tU) - L_{11}(MU_t)\|_s \\ &\leq \|L_{01}U_t\|_s + \|L_{11}(M_tU)\|_s + \|L_{11}(MU_t)\|_s \\ &\leq C\|U_t\|_{s-\Delta_i} + C_1\|M_t\|_s\|U\|_{s-\Delta_i} + C_2\|M\|\|U_t\|_{s-\Delta_i} \end{aligned}$$

Pelo (5.14)-(5.15) temos

$$\|M_{tt}\|_s \leq C\bar{B}_1 + C_1B_1B + C_2B_0\bar{B}_1$$

$$\|M_{tt}\|_s \leq B_2.$$

De forma semelhante obtemos,

$$\|U_{tt}\|_{s-\Delta_i} \leq \bar{B}_2.$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado para $l = 3$ assim fica provado o Teorema. \square

5.2 Método espectral Leap-Frog

Agora discretizaremos a EDO do sistema (5.2) na variável temporal por um esquema explícito simples o esquema Leap-Frog. Para EDO do (5.2) se usará este método de passo no tempo envolvendo condições sobre N e Δt , nesse caso $\Delta t \leq C_*$ para alguma constante C_* .

Para definir o esquema totalmente discreto dado $t \in [0, T]$, trocaremos o passo do tempo por Δt e um inteiro R tal que $R\Delta t = t$, então para $m = 0, \dots, R$ denotamos $t_m = m\Delta t$. A solução do sistema totalmente discreto é definida como uma sequência $\{U^m\} \{M^m\}$ de elementos de S_N , tal que para cada m, U^m, M^m são

aproximações de $U(t_m), M(t_m)$, que são as soluções do esquema semi discreto no tempo $t = t_m$ com U^0, U^1, M^0, M^1 dados em S_N , satisfazendo que $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S_N$.

Temos então a seguinte equação

$$\begin{cases} (M^{m+1} - M^{m-1}, \varphi_1) + 2\Delta t (-L_{01}U^m + L_{11}M^mU^m, \varphi_1) = 0, \\ (U^{m+1} - U^{m-1}, \varphi_2) + 2\Delta t (-L_{02}M^m + L_{12}(U^m)^2, \varphi_2) = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Como sabemos, o método Leap-Frog é um método de dois passos, portanto ele não auto-inicializa e por isso foi escolhido o método de Euler avançado para o cálculo do nível de tempo t_1 .

$$\begin{cases} (M^1 - M^0, \varphi_1) + \Delta t (-L_{01}U^0 + L_{11}M^0U^0, \varphi_1) = 0, \\ (U^1 - U^0, \varphi_2) + \Delta t (-L_{02}M^0 + L_{12}(U^0)^2, \varphi_2) = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

5.2.1 Convergência do Método Totalmente Discreto

Teorema 5.4. *Considere que os parâmetros pertencem a uma das regiões R_i ($i = 9, 11, 14, 15$). Seja $(\eta, u) \in C([0, T], H^r \times H^{r-\Delta_i})$ solução de (5.1) com $(\eta^0, u^0) \in H^r \times H^{r-\Delta_i}$ onde r satisfaz $\max\{r, r - \Delta_i\} > 1/2$ e $r > s_i^*$. Seja $\{U^m\}, \{M^m\}$ soluções de (5.16). Suponha $M^0 = P_N \eta^0, U^0 = P_N u^0$, e que U^1, M^1 são calculados tal que:*

$$\|M^1 - \eta(\Delta t)\|_r + \|U^1 - u(\Delta t)\|_{r-\Delta_i} \leq C\Delta t^2.$$

Então existe uma constante C independente de N e Δt tal que se $\Delta_i \leq 0$ quando s satisfaz $0 \leq s \leq r$, temos

$$\max_{t_m \in [0, T]} \{ \|M^m - \eta(t_m)\|_s^2 + \|U^m - u(t_m)\|_{s-\Delta_i}^2 \} \leq C_1 \Delta t^2 + CN^{-r+s}$$

se $\Delta_i \geq 0$, quando $s, 0 \leq s \leq r - \Delta_i$.

$$\max_{t_m \in [0, T]} \{ \|M^m - \eta(t_m)\|_{s+\Delta_i}^2 + \|U^m - u(t_m)\|_s^2 \} \leq C_1 \Delta t^2 + CN^{-r+\Delta_i+s},$$

Prova. As soluções U, M do esquema semi-discreto, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S_N$, satisfazem

$$\begin{cases} (M(t_{m+1}) - M(t_{m-1}), \varphi_1)_r + 2\Delta t (-L_{01}U(t_m) + L_{11}M(t_m)U(t_m), \varphi_1)_r = (\theta^m, \varphi_1)_r \\ (U(t_{m+1}) - U(t_{m-1}), \varphi_2)_{r-\Delta_i} + 2\Delta t (-L_{02}M(t_m) + L_{12}U^2(t_m), \varphi_2)_{r-\Delta_i} = (\overline{\theta^m}, \varphi_2)_{r-\Delta_i} \end{cases} \quad (5.18)$$

onde $\theta^m, \overline{\theta^m}$ são definidos por

$$\begin{aligned} \overline{\theta^m} &= U(t_{m+1}) - U(t_{m-1}) - 2\Delta t U_t(t_m) \\ \theta^m &= M(t_{m+1}) - M(t_{m-1}) - 2\Delta t M_t(t_m). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Taylor e o Teorema 5.3, temos

$$\begin{aligned} \|\overline{\theta^m}\|_{r-\Delta_i} &\leq C\Delta t^3 \max_{t_{m-1} \leq s \leq t_{m+1}} \left\| \frac{\partial^3 U(s)}{\partial t^3} \right\|_{r-\Delta_i} \leq CB\Delta t^3 \\ \|\theta^m\|_r &\leq C\Delta t^3 \max_{t_{m-1} \leq s \leq t_{m+1}} \left\| \frac{\partial^3 M(s)}{\partial t^3} \right\|_r \leq CB\Delta t^3 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Faremos a diferença de (5.16) e (5.18)

$$\begin{cases} ((M^{m+1} - M(t_{m+1})) - (M^{m-1} - M(t_{m-1})), \varphi_1)_r \\ \quad + 2\Delta t (-L_{01}(U^m - U(t_m)) + L_{11}(M^m U^m - M(t_m)U(t_m)), \varphi_1)_r = (-\theta^m, \varphi_1)_r \\ ((U^{m+1} - U(t_{m+1})) - (U^{m-1} - U(t_{m-1})), \varphi_2)_{r-\Delta_i} \\ \quad + 2\Delta t (-L_{02}(M^m - M(t_m)) + L_{12}((U^2)^m - U^2(t_m)), \varphi_2)_{r-\Delta_i} = (-\overline{\theta^m}, \varphi_2)_{r-\Delta_i}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Para $m = 1, 2, 3, \dots, r$ definiremos $e^m, \overline{e^m} \in S_N$

$$\begin{aligned} e^m &= M^m - M(t_m) \\ \overline{e^m} &= U^m - U(t_m), \end{aligned}$$

substituindo \bar{e}^m e e^m na equação (5.20) se obtém usando

$$\left\{ \begin{array}{l} (e^{m+1} - e^{m-1}), \varphi_1)_r \\ \quad + 2\Delta t (-L_{01}\bar{e}^m + L_{11}(M^m U^m - M(t_m)U(t_m)), \varphi_1)_r = (-\theta^m, \varphi_1)_r \\ \\ (\bar{e}^{m+1} - \bar{e}^{m-1}), \varphi_2)_{r-\Delta_i} \\ \quad + 2\Delta t (-L_{02}e^m + L_{12}((U^2)^2 - U^2(t_m)), \varphi_2)_{r-\Delta_i} = (-\bar{\theta}^m, \varphi_2)_{r-\Delta_i} \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{m+1} + e^{m-1} \\ \varphi_2 &= \bar{e}^{m+1} + \bar{e}^{m-1} \end{aligned}$$

e substituindo o valor de φ_1 e φ_2 na equação (5.21) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} (e^{m+1} - e^{m-1}, e^{m+1} + e^{m-1})_r \\ \quad = 2\Delta t (L_{01}\bar{e}^m - L_{11}(M^m U^m - M(t_m)U(t_m)), e^{m+1} + e^{m-1})_r \\ \quad \quad \quad + (-\theta^m, e^{m+1} + e^{m-1})_r \\ \\ (\bar{e}^{m+1} - \bar{e}^{m-1}, \bar{e}^{m+1} + \bar{e}^{m-1})_{r-\Delta_i} \\ \quad = 2\Delta t (L_{02}e^m - L_{12}((U^2)^2 - U^2(t_m)), \bar{e}^{m+1} + \bar{e}^{m-1})_{r-\Delta_i} \\ \quad \quad \quad + (-\bar{\theta}^m, \bar{e}^{m+1} + \bar{e}^{m-1})_{r-\Delta_i} \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Para (5.22) aplicaremos a desigualdade de Cauchy-Schwartz, assim

$$\left\{ \begin{array}{l} \|e^{m+1}\|_r^2 - \|e^{m-1}\|_r^2 \leq 2\Delta t \|L_{01}\bar{e}^m - L_{11}(M^m U^m - M(t_m)U(t_m))\|_r \|\varphi_1\|_r \\ \quad \quad \quad + \|\theta^m\|_0 \|\varphi_1\|_0 \\ \\ \|\bar{e}^{m+1}\|_{r-\Delta_i}^2 - \|\bar{e}^{m-1}\|_{r-\Delta_i}^2 \leq 2\Delta t \|L_{02}e^m - L_{12}((U^2)^2 - U^2(t_m))\|_{r-\Delta_i} \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i} \\ \quad \quad \quad + \|\bar{\theta}^m\|_{r-\Delta_i} \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i} \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Agora usaremos a estimativa a priori que depende de $\|U^m\|_{r-\Delta_i}$, $\|M^m\|_r$ limitadas por

$$2 \max \|U(t)\|_{r-\Delta_i} = 2\overline{B_0}$$

$$2 \max \|M(t)\|_r = 2B_0$$

para todo $t \in [0, T]$ onde B_0 e $\overline{B_0}$ são constantes independentes de N (veja o Teorema 5.3) para todo $m \leq m^*$. Substituindo em (5.23), e sabendo que os termos não lineares estão associados com operadores de Lipchitz (como já foi mostrado no capítulo 4), temos:

$$\begin{cases} \|e^{m+1}\|_r^2 - \|e^{m-1}\|_r^2 \leq [2\Delta t (C \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i} + C_1 \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i} + c \|e^m\|_r)] \|\varphi_1\|_r + \|\theta^m\|_r \|\varphi_1\|_r \\ \|\overline{e^{m+1}}\|_{r-\Delta_i}^2 - \|\overline{e^{m-1}}\|_{r-\Delta_i}^2 \leq [2\Delta t (c \|e^m\|_r + c \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i})] \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i} + \|\overline{\theta^m}\|_{r-\Delta_i} \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i}. \end{cases}$$

Reorganizando e usando outras constantes, obtemos

$$\begin{cases} \|e^{m+1}\|_r^2 - \|e^{m-1}\|_r^2 \leq 2\Delta t (C_1 \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i} + C_2 \|e^m\|_r) \|\varphi_1\|_r + \|\theta^m\|_r \|\varphi_1\|_r \\ \|\overline{e^{m+1}}\|_{r-\Delta_i}^2 - \|\overline{e^{m-1}}\|_{r-\Delta_i}^2 \leq 2\Delta t (C_1 \|e^m\|_r + c_2 \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i}) \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i} + \|\overline{\theta^m}\|_{r-\Delta_i} \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i}. \end{cases} \quad (5.24)$$

Antes de continuar é necessário limitar alguns termos

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\|_r^2 &\leq c_1 \|e^{m+1}\|_r^2 + c_2 \|e^{m-1}\|_r^2 \\ \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i}^2 &\leq c_3 \|\overline{e^{m+1}}\|_{r-\Delta_i}^2 + c_4 \|\overline{e^{m-1}}\|_{r-\Delta_i}^2 \\ \|\varphi_1\|_r^2 + \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i}^2 &\leq c_1 \|e^{m+1}\|_0^2 + c_2 \|e^{m-1}\|_r^2 + c_3 \|\overline{e^{m+1}}\|_{r-\Delta_i}^2 + c_4 \|\overline{e^{m-1}}\|_{r-\Delta_i}^2, \end{aligned}$$

também limitamos os termos:

$$\begin{aligned} \|\theta^m\|_r \|\varphi_1\|_r &\leq CB (\Delta t^{1/2} \|\varphi_1\|_r) (\Delta t^{5/2}) \\ &\leq CB \left((\Delta t^{1/2} \|\varphi_1\|_r)^2 + (\Delta t^{5/2})^2 \right) \end{aligned}$$

$$\|\theta^m\|_r \|\varphi_1\|_r \leq CB \Delta t \|\varphi_1\|_r^2 + CB \Delta t^5. \quad (5.25)$$

De maneira similar,

$$\|\overline{\theta^m}\|_{r-\Delta_i}\|\varphi_2\|_{r-\Delta_i} \leq CB (\Delta t\|\varphi_2\|_{r-\Delta_i}^2 + \Delta t^5). \quad (5.26)$$

Por tanto, somando (5.25) e (5.26)

$$\|\theta^m\|_r\|\varphi_1\|_r + \|\overline{\theta^m}\|_{r-\Delta_i}\|\varphi_2\|_{r-\Delta_i} \leq CB (\Delta t (\|\varphi_1\|_r^2 + \Delta t\|\varphi_2\|_{r-\Delta_i}^2) + \Delta t^5).$$

Assim definimos

$$\mathcal{E}^m = \|e^m\|_r^2 + \|e^{m-1}\|_r^2 + \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i}^2 + \left\| \overline{e^{m-1}} \right\|_{r-\Delta_i}^2,$$

somaremos as duas equações originais de (5.24), e adicionaremos e subtraendo $\|e^m\|_r^2$ e $\|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i}^2$, e usando a desigualdade de Cauchy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{m+1} - \mathcal{E}^m &\leq 2\Delta t \left(c_1 \|e^m\|_r^2 + c_2 \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i}^2 \right) + \Delta t CB (\|\varphi_1\|_r^2 + \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i}^2) + CB\Delta t^5 \\ &\leq \Delta t \left(c_1 \|e^m\|_r^2 + c_2 \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i}^2 + c_3 \|\varphi_1\|_r^2 + c_4 \|\varphi_2\|_{r-\Delta_i}^2 \right) + \Delta t^5 \\ &\leq C\Delta t(\mathcal{E}^m) + \Delta t \left(c_3 \|e^{m+1}\|_r^2 + c_3 \left\| \overline{e^{m+1}} \right\|_{r-\Delta_i}^2 \right) + \Delta t^5 \\ &\leq C\Delta t(\mathcal{E}^m) + \Delta t \left(c_3 \|e^{m+1}\|_r^2 + c_3 \left\| \overline{e^{m+1}} \right\|_{r-\Delta_i}^2 + \|e^m\|_r^2 + \|\overline{e^m}\|_{r-\Delta_i}^2 \right) + \Delta t^5 \\ &\leq C (\Delta t(\mathcal{E}^m) + \Delta t(\mathcal{E}^{m+1})) + CB\Delta t^5 \end{aligned}$$

$$(1 - C\Delta t)\mathcal{E}^{m+1} < (1 + C\Delta t)\mathcal{E}^m + CB\Delta t^5,$$

da Proposição 2.9, obtemos que

$$\mathcal{E}^m \leq C\Delta t^4, \quad 1 < m \leq m^* + 1. \quad (5.27)$$

Usaremos a estimativa (5.27) para justificar a limitação a priori de $\|U^m\|_{r-\Delta_i}$ para $m \leq m^*$

$$U^{m+1} = U^{m+1} - U(t_{m+1}) + U(t_{m+1})$$

$$\|U^{m+1}\|_{r-\Delta_i} \leq \|U(t_{m+1})\|_{r-\Delta_i} + \|e^{m+1}\|_{r-\Delta_i} \leq \|U(t_{m+1})\|_{r-\Delta_i} + C\Delta t^2,$$

sabendo que $\|e^{m+1}\|_{r-\Delta_i}^2 \leq \mathcal{E}^m$ por tanto

$$\|U^{m+1}\|_{r-\Delta_i} \leq \bar{B}_0$$

se escolhermos Δt suficientemente pequeno, logo para $0 \leq s \leq r$. Então

$$\max_{t_m \in [0, T]} \left\{ \|M^m - M(t_m)\|_s^2 + \|U^m - U(t_m)\|_{s-\Delta_i}^2 \right\}^{1/2} \leq C(\Delta t)^2. \quad (5.28)$$

Continuando com a prova,

$$\begin{aligned} \|M^m - \eta\|_s &= \|M^m - M + M - \eta\|_s \\ &\leq \|M^m - M\|_s + \|M - \eta\|_s. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Também faremos o mesmo para U

$$\begin{aligned} \|U^m - u\|_{s-\Delta_i} &= \|U^m - U + U - u\|_{s-\Delta_i} \\ &\leq \|U^m - U\|_{s-\Delta_i} + \|U - u\|_{s-\Delta_i}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

De (5.29) e (5.30), e usando a desigualdade de Cauchy,

$$\begin{aligned} \|M^m - \eta\|_s^2 + \|U^m - u\|_{s-\Delta_i}^2 &\leq (\|M^m - M\|_s + \|M - \eta\|_s)^2 \\ &\quad + (\|U^m - U\|_{s-\Delta_i} + \|U - u\|_{s-\Delta_i})^2 \\ &\leq \|M^m - M\|_s^2 + 2\|M^m - M\|_s\|M - \eta\|_s + \|M - \eta\|_s^2 \\ &\quad + \|U^m - U\|_{s-\Delta_i}^2 + 2\|U^m - U\|_{s-\Delta_i}\|U - u\|_{s-\Delta_i} + \|U - u\|_{s-\Delta_i}^2 \\ &\leq 2(\|M^m - M\|_s^2 + \|M - \eta\|_s^2 + \|U^m - U\|_{s-\Delta_i}^2 + \|U - u\|_{s-\Delta_i}^2) \end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.2 sobre Discretização espacial e por (5.28), temos

$$\begin{aligned} \|M^m - \eta\|_s^2 + \|U^m - u\|_{s-\Delta_i}^2 &\leq s(C\Delta t^2 + CN^{s-r}) \\ &\leq C\Delta t^2 + CN^{s-r}. \end{aligned}$$

Assim

$$\max_{t_m \in [0, T]} \left\{ \|M^m - \eta\|_s^2 + \|U^m - u\|_{s-\Delta_i}^2 \right\} \leq C\Delta t^2 + CN^{s-r}$$

de forma analoga para $\Delta_i > 0$ obteremos a outra equação. \square

Proposição 5.5. *Se o primeiro passo pelo método de Euler é satisfeito para (5.17), então*

$$\|M^1 - M(\Delta t)\|_r^2 + \|U^1 - U(\Delta t)\|_{r-\Delta_i}^2 \leq C \Delta t^2$$

Prova. Pelo método de Euler e rescrevendo a equação (5.17) temos

$$\begin{cases} (M^1 - M^0 + \Delta t (-L_{01}U^0 + L_{11}M^0U^0), \varphi_1) = 0, \\ (U^1 - U^0 + \Delta t (-L_{02}M^0 + L_{12}(U^0)^2), \varphi_2) = 0. \end{cases}$$

e pela expansão da série de Taylor para M e U ao redor do Δt obtemos

$$\begin{cases} M(\Delta t) = M^0 + \Delta t (-L_{01}U^0 + L_{11}M^0U^0) + \frac{\Delta t^2}{2} M''(\xi), \\ U(\Delta t) = U^0 + \Delta t (-L_{02}M^0 + L_{12}(U^0)^2) + \frac{\Delta t^2}{2} U''(\xi). \end{cases}$$

onde $\xi \in (0, \Delta t)$

$$\begin{cases} \left(M^1 - M(\Delta t) - \frac{\Delta t^2}{2} M''(\xi), \varphi_1 \right)_r = 0, \\ \left(U^1 - U(\Delta t) - \frac{\Delta t^2}{2} U''(\xi), \varphi_2 \right)_{r-\Delta_i} = 0. \end{cases}$$

definamos

$$\begin{cases} \varphi_1 = M - M(\Delta t) \\ \varphi_2 = U - U(\Delta t) \end{cases}$$

finalmente usando o (5.3) obtemos

$$\begin{cases} \|M^1 - M(\Delta t)\|_r^2 \leq \frac{\Delta t^2}{2} \|M''(\xi)\|_r \|M^1 - M(\Delta t)\| \leq \frac{\|M''(s)\|_r}{2} (\Delta t)^2 \leq \frac{B_2}{2} \Delta t^2 \\ \|U^1 - U(\Delta t)\|_{r-\Delta_i}^2 \leq \frac{\Delta t^2}{2} \|U''(\xi)\|_{r-\Delta_i} \|U^1 - U(\Delta t)\| \leq \frac{\Delta t^2}{2} \|U''(\xi)\|_{r-\Delta_i} \leq \frac{\overline{B_2}}{2} (\Delta t)^2 \end{cases} \quad (5.31)$$

Pelas equações (5.31) temos

$$\|M^1 - M(\Delta t)\|_r^2 + \|U^1 - U(\Delta t)\|_{r-\Delta_i}^2 \leq \left(\frac{B_2 + \overline{B_2}}{2} \right) \Delta t^2$$

Logo,

$$\|M^1 - M(\Delta t)\|_r^2 + \|U^1 - U(\Delta t)\|_{r-\Delta_i}^2 \leq C \Delta t^2$$

□

6 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentaremos resultados de vários experimentos numéricos para as regiões $(R_i, i = 9, 11, 14, 15)$. Para validar os códigos de Matlab e ilustrar a estabilidade numérica, mostraremos que para estas regiões a estabilidade numérica não depende da discretização espacial e sempre obteremos $\Delta t \leq C$ de acordo com teorema 5.2. Observamos que sem importar quão pequena seja Δt mesmo para uma discretização espacial grande a estabilidade estará garantida e o esforço computacional para obter a solução aproximada das EDP's não lineares (3.21) será mínimo.

Na segunda parte, apresentaremos experimentos exibindo o comportamento do erro e da taxa de convergência entre a solução exata e a solução aproximada para nossas regiões de estudo $(R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15})$ para a variável temporal. Finalmente na última seção ilustramos que a condição de estabilidade é satisfeita.

6.1 Problema Não Linear

Em esta seção exibiremos a solução numérica $\eta(x, t)$ e $u(x, t)$ ao longo do tempo nas diferentes regiões estudadas sendo apresentados as soluções numéricas para (3.21) na figuras de 6.1, até 6.8.

Consideramos os seguintes valores para as regiões $R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15}$ onde Nt é o número de intervalos para variável temporal para $[0, t_{\max}]$ e N número de pontos da

discretização espacial em $[-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{t_{\max}}{Nt} = \frac{1}{2^3}, N = 2^{12}, Nt = 2^7 \\ \alpha &= 0.005, \beta = 0.001, t_{\max} = 16 \\ \eta^0 &= \exp(-5 * x.^2), u^0 = -\exp(-5 * x.^2), \\ \rho_2/\rho_1 &= 1.023.\end{aligned}$$

Começamos com a região R_9 os parâmetros usados serão: $a=0.1$, $b=-0.24667$, $c=1$, $d=2$, $e=-2$, $f=2.573058$

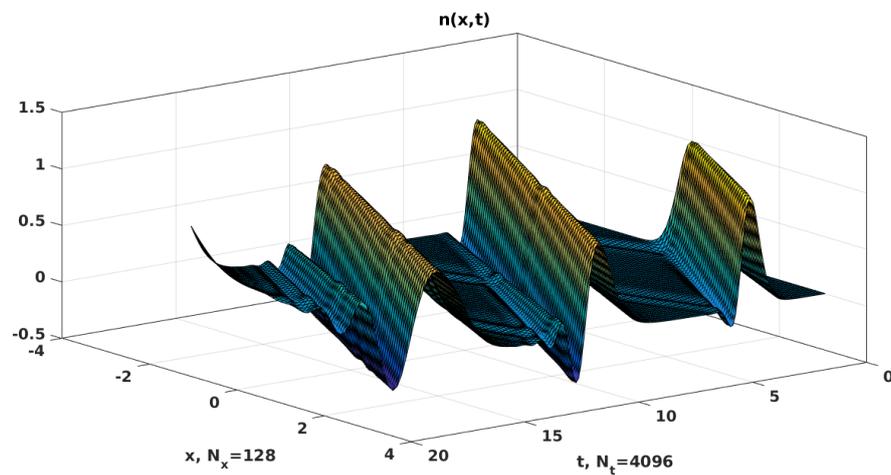


Figura 6.1: Solução η para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_9 , $Nt = 2^7$, $N = 2^{12}$, $\Delta t = 1/2^3$

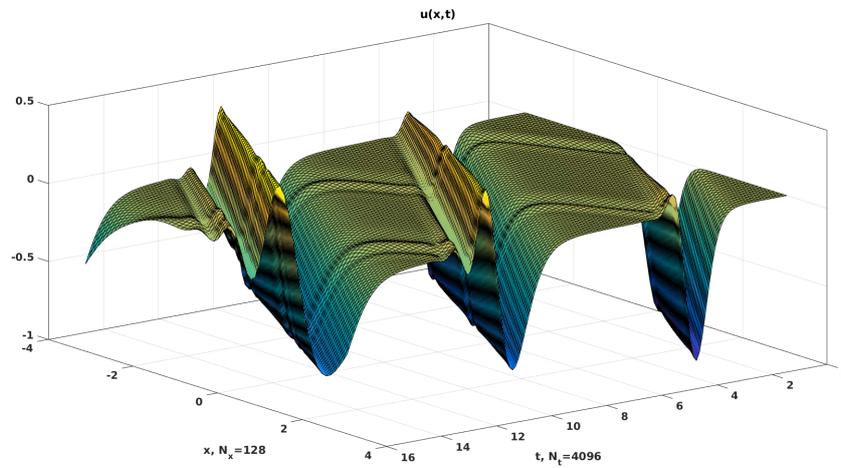


Figura 6.2: Solução u para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_9 , $Nt = 2^7$, $N = 2^{12}$, $\Delta t = 1/2^3$

Seguidamente consideremos a região R_{11} os parâmetros

$$\begin{aligned} a &= 0.07833, & b &= 0, & c &= 1, & d &= -1, & e &= 1, & f &= 0 \\ g &= 0.255, & h &= 0, \end{aligned}$$

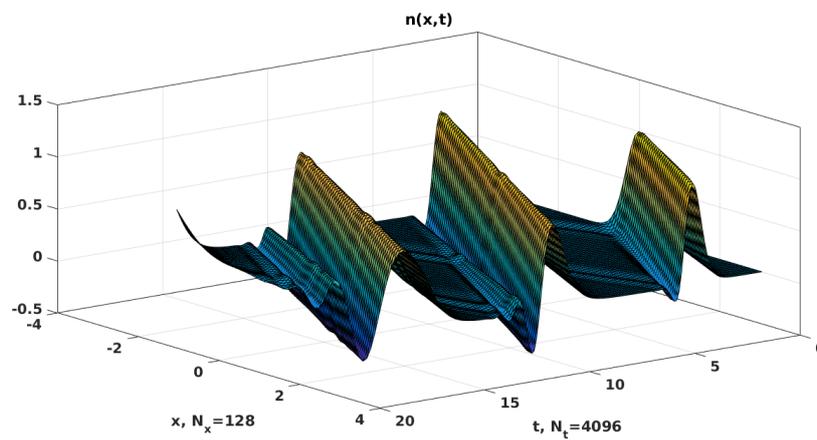


Figura 6.3: Solução η para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{11} , $Nt = 2^7$, $N = 2^{12}$, $\Delta t = 1/2^3$

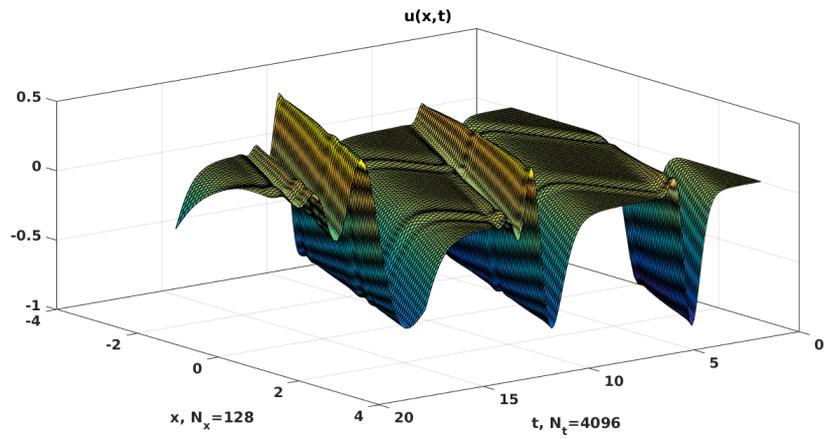


Figura 6.4: Solução u para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{11} , $Nt = 2^7$, $N = 2^{12}$, $\Delta t = 1/2^3$

. De forma equivalente para a região R_{14} os parâmetros são

$$\begin{aligned} a &= 0.013333, & b &= 0, & c &= 1, & d &= 1, & e &= -1, & f &= 1.366529 \\ g &= -1.046529, & h &= 0, \end{aligned}$$

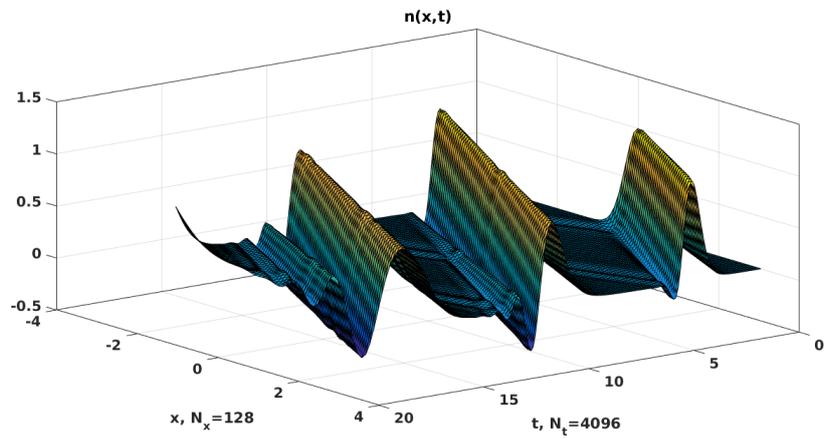


Figura 6.5: Solução η para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{14} , $Nt = 2^7$, $N = 2^{12}$, $\Delta t = 1/2^3$

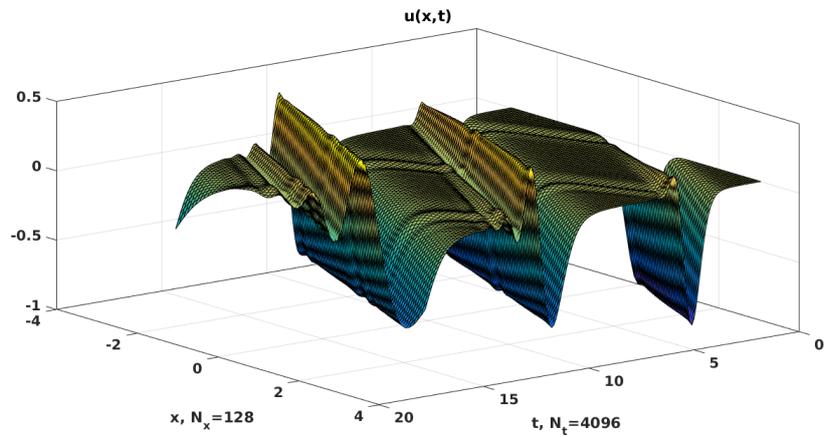


Figura 6.6: Solução u para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{14} , $Nt = 2^7$, $N = 2^{12}$, $\Delta t = 1/2^3$

Finalmente procederemos em mostrar a solução numérica para a região R_{15} com os seguintes parâmetros

$$\begin{aligned} a &= 0.07833, & b &= 0, & c &= 2, & d &= 1, & e &= -2, & f &= 2.348058 \\ g &= -2.093058, & h &= -1, \end{aligned}$$

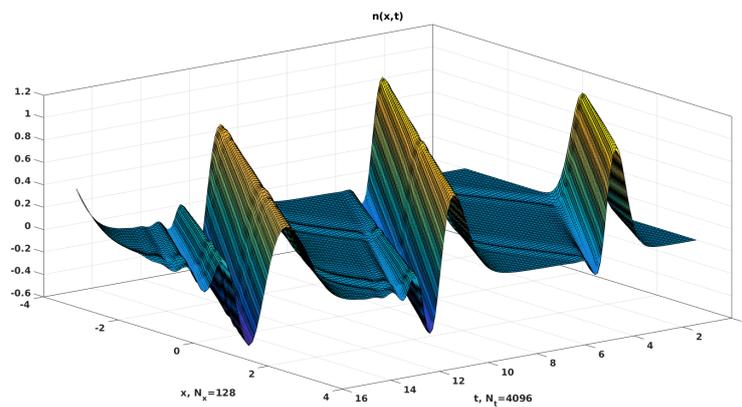


Figura 6.7: Solução η para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{15} , $Nt = 2^7$, $N = 2^{12}$, $\Delta t = 1/2^3$

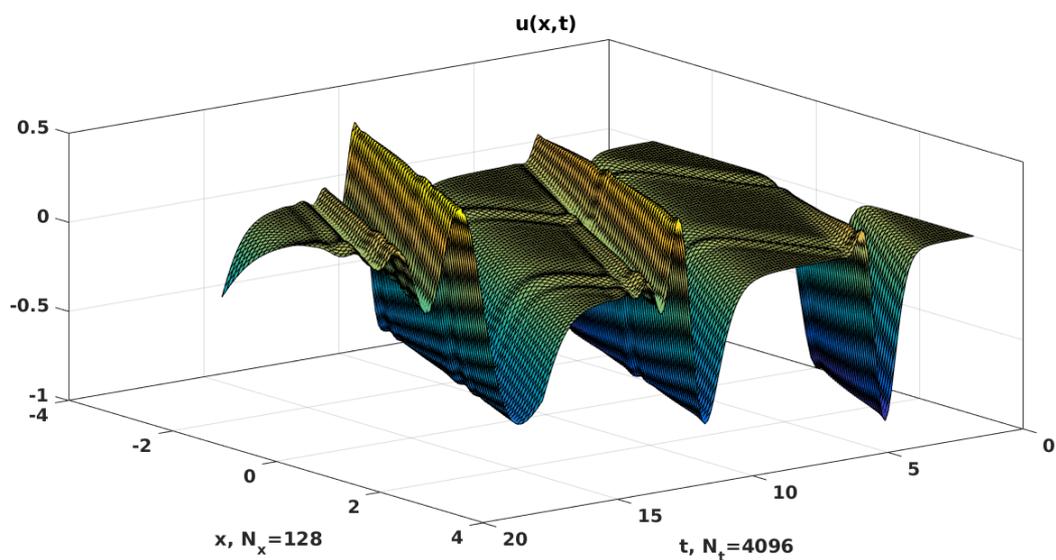


Figura 6.8: Solução u para (3.21) viajando ao longo do tempo no caso R_{15} , $Nt = 2^7$, $N = 2^{12}$, $\Delta t = 1/2^3$

Nas figuras 6.9, 6.10, 6.11 e 6.12 ilustramos η para as regiões $R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15}$, com tempos $t=0$, e $t=100$.

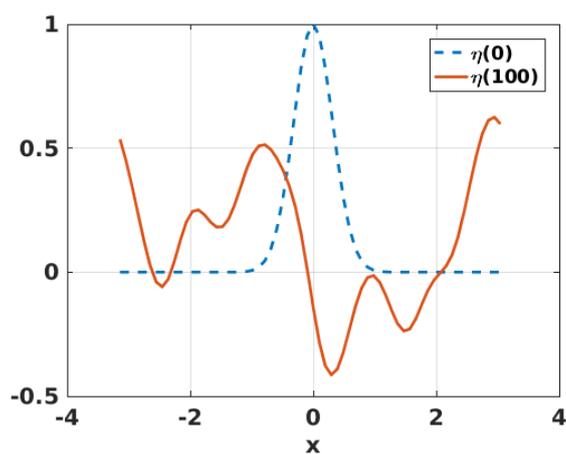


Figura 6.9: Solução η de (3.21) para $t=0$ e $t=100$, R_9 , $Nt = 2^{20}$, $N = 2^6$

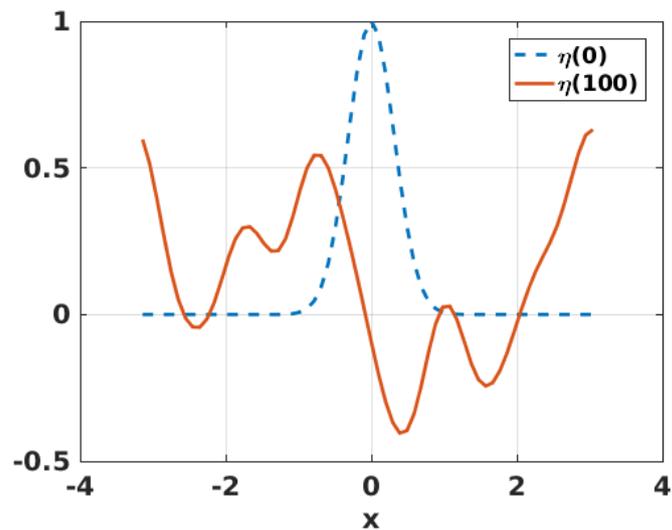


Figura 6.10: Solução η de (3.21) para $t=0$ e $t=100$, R_{11} , $Nt = 2^{20}$, $N = 2^6$

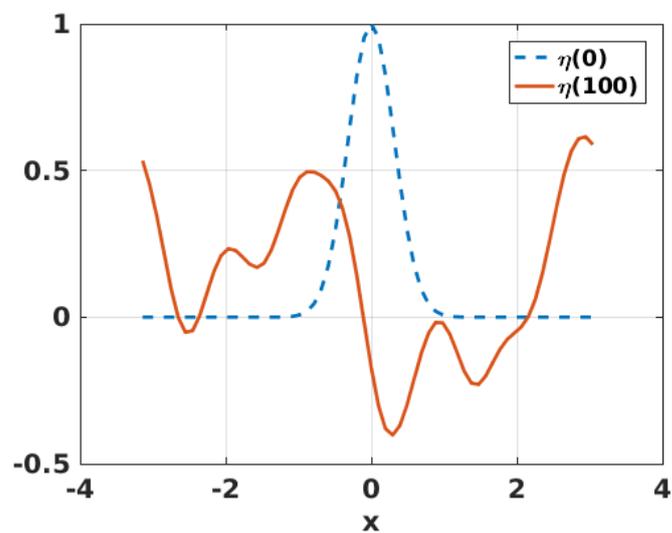


Figura 6.11: Solução η de (3.21) para $t=0$ e $t=100$, R_{14} , $Nt = 2^{20}$, $N = 2^6$

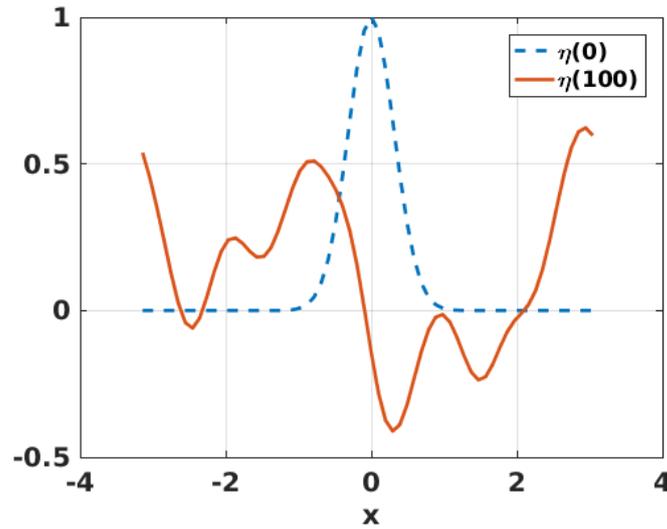


Figura 6.12: Solução η de (3.21) para $t=0$ e $t=100$, R_{15} , $Nt = 2^{20}$, $N = 2^6$

6.2 Taxa de Convergência Temporal

Nesta parte estudaremos a taxa de convergência temporal para o sistema não linear (3.21). Para isso iremos considerar duas aproximações diferentes da solução do problema para o mesmo tempo t . Os erros E_i e E_{i+1} correspondem aos tamanhos do passo do tempo Δt_i e Δt_{i+1} , respectivamente, então a taxa de convergência observada pode ser calculada por:

$$\text{taxa} = \frac{\log(E_{i+1}/E_i)}{\log(\Delta t_{i+1}/\Delta t_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1.$$

Como não são conhecidas soluções exatas do problema (3.21) iremos obter uma solução "quase"exata, usando um $\Delta t = \Delta t_0$ muito pequeno e $N = N_0$ muito grande. Sejam $\tilde{M}_{N_0}(t_m)$, $\tilde{U}_{N_0}(t_m)$ a solução obtida com a discretização muito refinada então vamos aproximar os erros nas aproximações menos refinadas M_N^n, U_N^n , por $\tilde{E}_{N_0}^m = \|\tilde{M}_{N_0}(t_m) - M_N^m\|_{s_1}$, $\tilde{E}_{N_1}^m = \|\tilde{U}_{N_1}(t_m) - U_N^m\|_{s_2}$, para s_1 e s_2 definidas no capítulo 4.

Vamos ter que

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{N_0}^m &= O(\Delta t^2) \approx C_1(\Delta t)^2 \\ \tilde{E}_{N_1}^m &= O(\Delta t^2) \approx C_2(\Delta t)^2\end{aligned}$$

onde Δt é o tamanho de passo usado. Assim, considerando os tamanhos do passo do tempo Δt_{i+1} e Δt_i tais que $\Delta t_{i+1} = \frac{\Delta t_i}{2}$, obtemos $\mathbb{E}_{i+1} \approx \tilde{E}(\Delta t_{i+1})$, $\mathbb{E}_i \approx \tilde{E}(\Delta t_i)$. Então

$$\text{taxa} \approx \frac{\log(C(\Delta t_{i+1}^2)/C(\Delta t_i^2))}{\log(\Delta t_{i+1}/\Delta t_i)} = 2. \quad (6.1)$$

Assim esperamos obter uma taxa de convergência temporal quadrática para nossos experimentos numéricos nas regiões $R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15}$. Resultados análogos são esperados para o erro de aproximação da variável u .

Nas tabelas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 mostramos que o erro temporal entre a solução e a solução numérica é pequeno e quando o Δt fica cada vez menor com $N = 2^7$ fixo, e $t_{\max} = 2\pi$. Observamos também que temos uma taxa de convergência temporal próxima de dois. Isto confirma o estudado na teoria (6.1) sendo esta a ordem do método Leap-Frog.

A seguir calculemos a taxa de convergência temporal para a região, $R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15}$.

N	Nt	η		u	
		Erro Temporal	Taxa de Convergência	Erro Temporal	Taxa de Convergência
2^7	2^{10}	0.001084917285777	2.002769304292163	0.000987041101116	2.002568738735712
	2^{11}	0.000271097270240	2.000702564187553	0.000246648824035	2.000651751903214
	2^{12}	0.000067765992490	2.000177224587323	0.000061655176336	2.000164480843851
	2^{13}	0.000016940931959	2.000048213864830	0.000015413313027	2.000045026535156
	2^{14}	0.000004235152163	2.000027533061449	0.000003853256835	2.000026740607513

Tabela 6.1: R_9 , exibindo error temporal e taxa de convergência com $N = 2^7$ fixo, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$, $Nt = \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{14}\}$.

N	Nt	η		u	
		Erro Temporal	Taxa de Convergência	Erro Temporal	Taxa de Convergência
2^7	2^{10}	0.000996370679129	2.002603393469018	0.000996370679129	2.002603393469018
	2^{11}	0.000248978565344	2.000661021548706	0.000248978565344	2.000661021548706
	2^{12}	0.000062237443712	2.000166834865604	0.000062237443712	2.000166834865604
	2^{13}	0.000015558868965	2.000045616546203	0.000015558868965	2.000045616546203
	2^{14}	0.000003889644755	2.000026885449831	0.000003889644755	2.000026885449831

Tabela 6.2: Para R_{11} , exibindo error temporal e taxa de convergência com $N = 2^7$ fixo, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$, $Nt = \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{14}\}$.

N	Nt	η		u	
		Erro Temporal	Taxa de Convergência	Erro Temporal	Taxa de Convergência
2^7	2^{10}	0.001080598328598	2.002757752705969	0.000988447430493	2.002576568952583
	2^{11}	0.000270018630939	2.000699495679429	0.000246999929294	2.000653610993332
	2^{12}	0.000067496402185	2.000176446629806	0.000061742923022	2.000164939336337
	2^{13}	0.000016873538910	2.000048019366785	0.000015435247803	2.000045139727312
	2^{14}	0.000004218304356	2.000027487475630	0.000003858740363	2.000026764791456

Tabela 6.3: Para R_{14} , exibindo error temporal e taxa de convergência com $N = 2^7$ fixo, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$, $Nt = \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{14}\}$.

N	Nt	η		u	
		Erro Temporal	Taxa de Convergencia	Erro Temporal	Taxa de Convergencia
2^7	2^{10}	0.001076775404524	2.002730728442554	0.000988052964633	2.002563480077709
	2^{11}	0.000269064627825	2.000692714870989	0.000246901915617	2.000650349788660
	2^{12}	0.000067258009672	2.000174749968491	0.000061718457245	2.000164124925046
	2^{13}	0.000016813947712	2.000047594932662	0.000015429133721	2.000044936684207
	2^{14}	0.000004203407152	2.000027380562049	0.000003857212001	2.000026716082507

Tabela 6.4: Para R_{15} , exibindo error temporal e taxa de convergência com $N = 2^7$ fixo, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$, $Nt = \{2^{10}, 2^{11}, \dots, 2^{14}\}$.

6.3 Estabilidade Numérica do Problema não Linear

Nesta seção, verificaremos numericamente a condição de estabilidade ($\Delta t \leq C$) para (3.21). Todas estas tabelas foram obtidas fazendo simulações com diferentes valores de Nt e $N = \{2^8, \dots, 2^{12}\}$ e o objetivo consistia em determinar para que valores se observa estabilidade ou seja escolher o menor valor para Nt para o qual o esquema é estável, podemos observar nas tabelas 6.5, 6.6, 6.7, e 6.8 que na região 9 a estabilidade começa em 2^9 , para região 11 começa em 2^{10} , e para as regiões 14 e 15 temos estabilidade a partir de 2^7 .

Nt Fixo	N Variável	Constante Estabilidade η_9 e u_9
2^9	2^8	0,012271484
	2^9	0,012271484
	2^{10}	0,012271484
	2^{11}	0,012271484
	2^{12}	0,012271484

Tabela 6.5: Estabilidade para a região R_9 , $Nt = 2^9$, $N = [2^8, \dots, 2^{12}]$, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$

Nt Fixo	N Variável	Constante Estabilidade η_{11} e u_{11}
2^{10}	2^8	0.00613281
	2^9	0.00613281
	2^{10}	0.00613281
	2^{11}	0.00613281
	2^{12}	0.00613281

Tabela 6.6: Estabilidade para a região R_{11} , $Nt = 2^{10}$, $N = [2^8, \dots, 2^{12}]$, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$

Nt Fixo	N Variável	Constante Estabilidade η_{14} e u_{14}
2^7	2^8	0,049085938
	2^9	0,049085938
	2^{10}	0,049085938
	2^{11}	0,049085938
	2^{12}	0,049085938

Tabela 6.7: Estabilidade para a região R_{14} , $Nt = 2^7$, $N = [2^8, \dots, 2^{12}]$, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$

Faremos a experiência, esta vez para a região R_{15} , com $Nt = 2^7$ e $vecN = [2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}]$ onde verificamos que a condição de estabilidade é cumprida também ($\Delta t \leq C$)

Nt Fixo	N Variável	Constante Estabilidade η_{15} e u_{15}
2^7	2^8	0,049085938
	2^9	0,049085938
	2^{10}	0,049085938
	2^{11}	0,049085938
	2^{12}	0,049085938

Tabela 6.8: Estabilidade para a região R_{15} , $Nt = 2^7$, $N = [2^8, \dots, 2^{12}]$, $t_{\max} = 2\pi$, $\Delta t = t_{\max}/(Nt)$

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, nos capítulos 1,2,3 analisamos modelos de ondas internas, onde estudamos a influencia de diversos parâmetros para garantir condições de estabilidade numérica apropriada e, assim, conseguir um bom nível de eficiência computacional. Conseguimos mostrar que a partir do sistema (3.21)(equações para modelos de propagação de ondas internas não lineares) se obtém certas regiões com um grupo de parâmetros nos quais é possível garantir a boa colocação para o sistema.

No capítulo 4 demonstramos o teorema de existência e unicidade aplicando o teorema do ponto fixo de Banach. Nessa análise consideramos as regiões onde a estabilidade numérica do sistema linearizado corresponde a $\Delta t \leq C$, caracterizando as regiões $(R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15}, R_{19})$ sendo que a região R_{19} (o lado direito da EDP) não cumpre com as propriedades de ser uma função Lipschitz. Logo estudamos apenas $(R_9, R_{11}, R_{14}, R_{15})$ que proporcionam uma vantagem numérica.

No capítulo 5, estudamos os métodos espectrais, entre eles o método Fourier-Galerkin para discretização espacial e Leap-Frog para discretização da variável temporal. Provamos também teoremas relacionados com o comportamento do error para os esquemas semi discretos e totalmente discreto.

No capítulo 6, ilustramos aspectos básicos de simulação numérica(estabilidade e taxa de convergência) onde mostramos que a taxa de convergência é coerente com o que foi estudado na teoria dos capítulos 4,5.

Propomos como trabalho futuro a obtenção de novas regiões nas quais obtaremos novos parâmetros, e diferentes restrições, que nós permitiram fazer um estudo

sobre a boa colocação, a taxa de convergência e novas simulações numéricas que serão desenvolvidas.

Além disso sugerimos o estudo da estabilidade numérica $\Delta t \leq C_i N^{-l_i}$ para $l_i = 1$, pois irá a requer mínimo esforço computacional.

Por fim, como trabalho futuro sugerimos a extensão global do teorema de boa colocação no tempo. De fato neste trabalho de tese conseguimos o tempo no qual o teorema de existência e unicidade é válido. Sendo assim, podemos continuar estudando com o fim de conseguir uma extensão global para o tempo.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Ruiz de Zárate e A. Nachbin, 2007. *A reduced model for internal waves interacting with topography at intermediate depth*, Comm. Math. Sci.
- [2] A. Ruiz de Zárate, D. G. Alfaro Vigo, A. Nachbin, e W. Choi, 2009. *A Higher-Order Internal Wave Model Accounting for Large Bathymetric Variations*, Stud. Appl. Math. 122, pp. 275-294.
- [3] A.D. Poularikas, 2009. *Transforms and applications handbook*, CRC Press.
- [4] A. Liñan, 2007. *Las ecuaciones de Euler de la mecánica de fluidos*, Lecture notes, Real Academia de Ciencias y Universidad Politécnica de Madrid, pp. 151- 177.
- [5] B. Pelloni and V.A Dougalis, 2000. *Numerical solution of some nonlocal, nonlinear dispersive wave equations*, J. Nonlinear Sci. Vol. 10, pp. 1-22.
- [6] B. Pelloni and V. Dougalis, 2001. *Error estimates for fully discrete spectral scheme for a class of nonlinear, nonlocal dispersive wave equations*, Appl. Num. Math. 37, pp. 95-107.
- [7] D.G. de Figueiredo, 1987. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- [8] J.L. Bona, M. Chen, e J.-C. Saut, 2002. *Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media I: Derivation and Linear Theory* J. Nonlinear Sci. Vol. 12, pp. 283-318.
- [9] J.L. Bona, D. Lannes, e J.-C. Saut, 2008. *Asymptotic models for internal waves*, J. Math. Pures Appl., 89, pp. 538-566.

- [10] J. Chiriguaya, 1989. *Aspectos teóricos sobre ondas internas*, Instituto Oceanográfico de la Armada, Guayaquil, Ecuador.
- [11] Claudio G Canuto, M. Yousuff Hussaini, Alfio Quarteroni, Thomas A. Zang, *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*, 3rd Printing, 2006.
- [12] L. N. Trefethen, 2000. *Spectral methods in matlab*, SIAM.
- [13] M. Tomczak, *An introduction to physical oceanography*, disponível em <http://www.es.flinders.edu.au/~mattom/Intro0c/lecture10.html>, acesso em (1/8/2011).
- [14] N.H. Asmar, (May 24, 2004). *Partial differential equations and boundary value problems with fourier series*, Prentice Hall, 2nd edition.
- [15] R. Iório, e V. Iório, 2001. *Fourier analysis and partial differential equations*, Cambridge University Press.
- [16] R. Iório and V. de Magalhães Iório, 2010. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- [17] Uri Ascher, *Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations*, SIAM, 2008. (<http://www.ec-securehost.com/SIAM/CS05.html>)
- [18] V. Tomee and S. V. Murthy, 1998. *A numerical method for the Benjamin-Ono equation*, BIT, vol. 38, no. 3, pp. 597-611.
- [19] W. Choi, e R. Camassa, 1996. *R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system*, J. Fluid Mech. 313, pp. 83-103.
- [20] W. Choi e R. Camassa, 1999 *Fully nonlinear internal waves in two fluid system*, J. Fluid Mech. 396 , pp. 1-36.
- [21] Z. Deng, e H. Ma., 2009. *Optimal error estimates of the Fourier spectral method for a class of nonlocal, nonlinear dispersive wave equations*, Appl. Num. Math. 59, pp. 988-1010.

- [22] S. Benzoni-Garage, e D. Serre, 2007. *Multidimensional hyperbolic partial differential equations*, Oxford University Press on Demand.
- [23] G.E.C. Cardena, 2012. *Modelagem computacional da propagação de ondas internas.* (Disertação de mestrado) Programa de Pós-graduação em informática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.