

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TERCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

JOÃO LUIZ LAGÔAS DE ALMEIDA
BERTOLINO

**ALGORITMOS E
TRIANGULAÇÕES PARA O
GRADIENTE DISCRETO**

Rio de Janeiro
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO TÉRCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS
COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA

JOÃO LUIZ LAGÔAS DE ALMEIDA
BERTOLINO

**ALGORITMOS E
TRIANGULAÇÕES PARA O
GRADIENTE DISCRETO**

Dissertação de Mestrado submetida ao
Corpo Docente do Departamento de Ci-
ência da Computação do Instituto de Ma-
temática, e Instituto Tércio Pacitti de
Aplicações e Pesquisas Computacionais da
Universidade Federal do Rio de Janeiro,
como parte dos requisitos necessários para
obtenção do título de Mestre em Informá-
tica.

Orientador: João Antônio Recio da Paixão, D.Sc., UFRJ

Rio de Janeiro
2017

B546

Bertolino, João Luiz Lagôas de Almeida

Algoritmos e Triangulações para o Gradiente Discreto / João Luiz Lagôas de Almeida Bertolino. – Rio de Janeiro, 2017.

101 f.: il.

Orientador: João Antônio Recio da Paixão, D.Sc., UFRJ.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática, Rio de Janeiro, 2017.

1. Gradiente Discreto. 2. Teoria Discreta de Morse. 3. Casamento Geométrico de Morse. 4. Cancelamento. 5. Triangulação. 6. Casamento Guloso. – Teses. I. Paixão, João Antônio Recio da (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Programa de Pós-Graduação em Informática. III. Título

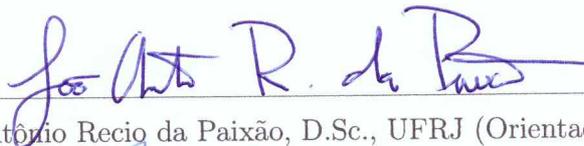
CDD:

JOÃO LUIZ LAGÔAS DE ALMEIDA BERTOLINO

**ALGORITMOS E TRIANGULAÇÕES PARA O
GRADIENTE DISCRETO**

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática, e Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Informática.

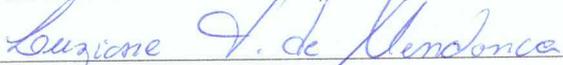
Aprovado em: Rio de Janeiro, 09 de Março de 2017.



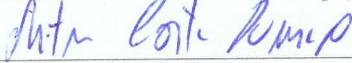
João Antônio Recio da Paixão, D.Sc., UFRJ (Orientador)



Marcello Goulart Teixeira, D.Sc., UFRJ



Luziane Ferreira de Mendonça, D.Sc., UFRJ



Mitre Costa Dourado, D.Sc., UFRJ



Thomas Lewiner, Ph.D., Boston Consulting Group

Rio de Janeiro
2017

RESUMO

A teoria discreta de Morse, introduzida por Forman em 1995, é uma ferramenta que torna possível estudar funções escalares a partir de construções específicas em um espaço. Visando estudar a geometria dessas funções, essa teoria busca criar um objeto importante conhecido como campo gradiente discreto. Comumente a teoria faz uso de complexos simpliciais gerais de forma combinatória e estruturas baseadas em grafos, resumindo o problema na obtenção de um casamento. Isso a torna extremamente atraente para computadores. Mesmo assim, o estudo geométrico procurado pode ser comprometido em alguns casos: seja em virtude da forma de processamento ou seja em virtude de dados inexatos.

Este trabalho busca levantar ideias e determinar conjunturas no sentido de tornar o entendimento geométrico de funções escalares ainda mais confiável através do gradiente discreto. Isso é feito entendendo melhor os algoritmos de casamento envolvidos na sua construção e adicionando novos resultados que a aproxima do que chamamos de fidelidade geométrica.

Dentro desse contexto, outras diretrizes também são propostas. Definimos um novo casamento geométrico que introduz um tipo de noção de suavização, isto é, que reduz uma espécie de ruído encontrado no próprio gradiente discreto. Além disso, através da alteração de triangulações, procuramos motivar a importância do objeto discreto de entrada na construção de um gradiente discreto geométrico.

Palavras-chave: Gradiente Discreto, Teoria Discreta de Morse, Casamento Geométrico de Morse, Cancelamento, Triangulação, Casamento Guloso.

ABSTRACT

The discrete Morse theory, introduced by Forman in 1995, is a tool that makes it possible to study scalar functions from specific constructions in a space. Aiming to study the geometry of functions, this theory seeks to create an important object called the discrete gradient field. Commonly the theory makes use of general simplified complexes of combined form and structures based on graphs, summarizing the problem in obtaining a graph matching. This becomes extremely attractive to computers. Even so, the geometric study sought may be compromised in some cases: by virtue of the form of processing or by virtue of inaccurate data.

This work seeks to raise ideas and determine conjunctures in order to make the geometric understanding of scalar functions even more reliable through the discrete gradient. This is done by better understanding the graph matching algorithms involved in its construction and adding new results that approximate what we call geometric fidelity.

Within this context, other guidelines are also proposed. We define a new geometric matching algorithms that introduces a kind of notion of smoothing, in other words, that reduces a kind of noise found in the discrete gradient itself. In addition, through new kinds of triangulations, we try to motivate the importance of the discrete input object in the construction of a discrete geometric gradient.

Keywords: Discrete Gradient, Discrete Morse Theory , Geometric Morse Matching, Cancellation, Triangulation, Greedy Matching.

LISTA DE FIGURAS

1.1	A Figura (a) ilustra uma função f com seus respectivos pontos críticos destacados em azul e branco. Já a Figura (b) sinaliza em por meio das setas o gradiente de f . A região marcada em vermelho exemplifica uma região de decrescimento que conecta os pontos críticos P_{Max} e P_{min}	14
1.2	A Figura (a) ilustra uma função f de duas variáveis. Já a Figura (b) destaca seus pontos críticos através de circunferências azuis e brancas e, por meio das setas, destaca o gradiente de f . A região marcada em vermelho exemplifica uma região particionada de f cujo comportamento é uniforme e de decrescimento.	15
1.3	Exemplo de um objeto discreto: uma triangulação planar.	16
1.4	Comparativo entre gradiente suave e discreto. Do lado esquerdo temos duas funções representadas no domínio suave, enquanto que do lado direito temos as mesmas funções, mas agora representadas no domínio discreto. Em ambos os casos as circunferências coloridas de azul e branco representam pontos críticos (suaves e discretos) e as setas ilustram a direção do campo gradiente (suave e discreto).	18
1.5	Exemplo do significado envolvido na operação de cancelamento no domínio suave. A imagem retirada do trabalho de Edelsbrunner, Harer e Zomorodian, e alterado por nós para destacar o fluxo por meio de setas, representa o processo (da esquerda para a direita) de cancelamento de dois pontos críticos	22
1.6	Exemplo de cancelamento de dois pontos críticos discretos em um gradiente discreto. Temos do lado esquerdo um ponto crítico de máximo e outro de mínimo. O cancelamento consiste essencialmente de uma pequena mudança na orientação do gradiente discreto. Isso é destacado pelos círculos vermelhos.	23
1.7	Função $f(x, y) = x^2 + y^2$ amostradas nos vértices de uma triangulação. Em vermelho destacam-se pontos críticos discretos não desejáveis e em verde ponto crítico discreto desejável.	24
2.1	Um grafo G com $V(G) = \{a, b, c, d\}$ e $E(G) = \{ab, ac, bc, cd\}$	29
2.2	Uma árvore de largura 3.	30

2.3	Um possível casamento no grafo da Figura 2.1. As arestas sinalizadas em vermelho estão casadas e as tracejadas não. Todos os vértices do grafo estão saturados.	31
2.4	Um caminho alternante $P = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sinalizamos em vermelho as arestas casadas e tracejamos as arestas não casadas. . .	31
2.5	Um caminho alternante de aumento $P = \{e_1, e_2, e_3\}$. Os vértices extremos do caminho são não saturados já que todas as arestas incidentes a eles não estão casadas.	32
2.6	Um digrafo D com $N(D) = \{a, b, c, d\}$ e $A(D) = \{ab, bc, ca, cd\}$. .	32
2.7	Um complexo simplicial Δ de dimensão 2. Seus simplexes são dados por: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}$ e $\{b, c, d\}$	33
2.8	Um exemplo do que não é um complexo simplicial.	34
2.9	Um diagrama de Hasse H associado ao complexo simplicial da Figura 2.7. Destacamos de acordo como indicado na legenda da direita a natureza dos nós do digrafo.	35
2.10	Temos da esquerda para a direita o processo que constrói um campo gradiente discreto: o complexo simplicial de entrada (a), a construção do seu diagrama de Hasse (b) e por fim um casamento em sua estrutura (c).	37
2.11	Caracterização dos nós críticos no campo vetorial discreto. A parte superior da imagem ilustra os comportamentos dos pontos críticos indicados de acordo com um gradiente suave. Já a parte inferior mostra o comportamento dos pontos críticos de acordo com um gradiente discreto.	38
2.12	Dois \mathcal{V} -paths distintos: à esquerda de dimensão 0 para dimensão 1 (vértice-aresta) e à direita de dimensão 1 para dimensão 2 (aresta-face).	39
2.13	Dois \mathcal{V} -paths distintos e fechados: à esquerda de dimensão 0 para dimensão 1 (vértice-aresta) e à direita de dimensão 1 para dimensão 2 (aresta-face).	39
2.14	Um campo gradiente discreto. As setas amarelas ilustram os \mathcal{V} -paths de dimensão 0 para 1 (vértice-aresta) e as setas verdes ilustram os \mathcal{V} -paths de dimensão 1 para dimensão 2 (aresta-face). Em vermelho destacam-se simplexes críticos (temos um nó-vértice crítico, um nó-aresta crítico e um nó-face crítico). . . .	40
3.1	Um exemplo de grafo qualquer G com pesos sinalizados em vermelho para cada uma de suas arestas.	45

3.2	Na esquerda temos um grafo cuja aresta de peso mínimo é 1. Portanto o denotaremos como G_1 . A direita temos sinalizada em vermelho a aresta que será casada de acordo com o casamento guloso.	46
3.3	Na esquerda temos um grafo cuja aresta de peso mínimo é 4. Portanto o denotaremos como G_4 . A direita temos sinalizada em vermelho a aresta que será casada de acordo com o casamento guloso.	46
3.4	Exemplo de caminhos alternantes maximais. Os vértices destacados em vermelho são insaturados e os azuis saturados. As arestas tracejadas não estão casadas e as arestas cheias estão casadas. . .	47
3.5	Exemplo de caminho alternante maximal que nunca é produzido pelo casamento guloso. Vértices vermelhos são insaturados e aresta tracejada está não casada.	49
3.6	Um complexo simplicial Δ de dimensão 1 tendo o peso de seus vértices induzidos para os pesos dos seus arcos.	50
3.7	Um complexo simplicial Δ de dimensão 2 tendo o peso de seus vértices induzidos para os pesos dos seus arcos.	50
3.8	Exemplo de \mathcal{V} - <i>path</i> construído dada a forma como o denotamos os arcos casados e não casados do seu diagrama de Hasse. Arcos vermelhos estão casados e os azuis não casados.	52
3.9	Em azul destaca-se um arco casado com peso $f(v_i)$ e em vermelho destaca-se um arco não casado com peso $f(w_i)$	53
3.10	O gráfico de quatro funções de duas variáveis. Temos na imagem, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = -x^2 - y^2$, $f(x, y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y)$ e $f(x, y) = \text{arctan}(xy)$; todas elas definidas tal que $x = [2, 2]$ e $y = [2, 2]$	56
3.11	Legenda de pontos críticos e simplexos críticos.	57
3.12	A figura (a) denota o campo vetorial do gradiente no domínio suave enquanto que a figura (b) mostra o campo gradiente discreto. A função em questão é $f(x, y) = x^2 + y^2$	58
3.13	A figura (a) denota o campo vetorial do gradiente no domínio suave enquanto que a figura (b) mostra o campo gradiente discreto. A função em questão é $f(x, y) = \text{arctan}(xy)$	59
3.14	A figura (a) denota o campo vetorial do gradiente no domínio suave enquanto que a figura (b) mostra o campo gradiente discreto. A função em questão é $f(x, y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y)$	60
3.15	A figura (a) denota o campo vetorial do gradiente no domínio suave enquanto que a figura (b) mostra o campo gradiente discreto. A função em questão é $f(x, y) = -x^2 - y^2$	60

4.1	Aproximação do gradiente discreto associado à função $f(x, y) = -x^2 - y^2$. Destacamos na imagem a ocorrência de simplejos críticos indesejáveis.	62
4.2	Casamento Guloso aplicado ao grafo G_0 . Os vértices em vermelho denotam vértices insaturados no grafo.	62
4.3	Árvore de largura 3 com aresta central denotada por e	65
4.4	Possibilidades de caminhos alternantes maximais com $ P \leq 3$. Vértices saturados são denotados em azul e insaturados em vermelho. Arestas casadas estão sinalizadas por linhas cheias e arestas não casadas por linhas tracejadas.	66
4.5	Exemplo de componente conexa do grafo $H = G[M_g \Delta M_q]$. Em azul temos uma aresta presente no casamento M_g e em verde arestas presentes no casamento M_q	68
4.6	Na imagem da esquerda temos o gradiente discreto produzido pelo casamento guloso enquanto que na direita temos o gradiente discreto produzido pelo casamento quase guloso. A função avaliada nos vértices da triangulação é $f(x, y) = -x^2 - y^2$	71
4.7	O campo gradiente discreto para a função $f(x, y) = \arctan(xy)$ obtido por meio do casamento guloso ou quase guloso.	72
4.8	Em ambas as imagens temos o gradiente discreto associado com a função $f(x, y) = \arctan(xy) + \epsilon$ onde $\epsilon \sim N(0, 0.12)$ com domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$. Em particular, na esquerda o algoritmo de casamento utilizado foi o casamento guloso enquanto que na direita o algoritmo foi o casamento quase guloso.	73
4.9	Exemplo de produção de ruído. Note que, apesar da aresta de peso 0 não ser a aresta central de uma árvore de largura 3, seu casamento implicará na produção do caminho de aumento.	74
4.10	Em ambas as imagens temos o gradiente discreto associado com a função $f(x, y) = \arctan(xy) + \epsilon$ onde $\epsilon \sim N(0, 0.12)$ com domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$. Em particular, na esquerda o algoritmo de casamento utilizado foi o casamento guloso enquanto que na direita o algoritmo foi a alternativa citada ao casamento quase guloso.	75
5.1	Ambas as imagens ilustram parte do campo gradiente discreto da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ avaliada no domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$. O que diferencia as imagens é a triangulação e, por conta disso, do lado esquerdo tivemos ruído e do lado direito não.	78
5.2	Alterando o gradiente discreto por meio de flip de aresta.	80
5.3	Ilustração do passo a passo do algoritmo da triangulação estrela.	84

5.4	Resultado de um gradiente discreto na triangulação estrela. . . .	84
5.5	Flipando a aresta de um quadrilátero de modo a torná-la não incidente ao vértice de peso mínimo.	86
5.6	Exemplo de quadrilátero onde há garantia de casamento.	86
5.7	Flipando a aresta $\{p_i, p_j\}$	88
5.8	Exemplos de triangulações de curva. (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, (b) $f(x, y) = \arctan(xy)$, (c) $f(x, y) = \text{sen}(x)\cos(y)$ e (d) $f(x, y) =$ $-x^2 - y^2$	90
5.9	Exemplos de curvas de nível. (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, (b) $f(x, y) =$ $\arctan(xy)$, (c) $f(x, y) = \text{sen}(x)\cos(y)$ e (d) $f(x, y) = -x^2 - y^2$. .	91
5.10	Esquerda: curva de nível de $f(x, y) = (x^2 + y^2)$; direita: campo gradiente discreto associado feito com triangulação de curva. . . .	92
5.11	Esquerda: curva de nível de $f(x, y) = \arctan(xy)$; direita: campo gradiente discreto associado feito com triangulação de curva. . . .	92
5.12	Esquerda: curva de nível de $f(x, y) = \text{sen}(x)\cos(y)$; direita: campo gradiente discreto associado feito com triangulação de curva. . .	93
5.13	Esquerda: curva de nível de $f(x, y) = -x^2 - y^2$; direita: campo gradiente discreto associado feito com triangulação de curva. . . .	93

LISTA DE TABELAS

2.1	Mapeamento de conceitos entre grafos, complexos simpliciais e teoria discreta de Morse.	41
2.2	Mapeamento de conceitos entre o domínio suave e o domínio discreto.	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	DOMÍNIO DISCRETO VS. DOMÍNIO SUAVE	16
1.2	TEORIA DE MORSE DISCRETA	17
1.3	FIDELIDADE GEOMÉTRICA	19
1.4	RUIDO NO GRADIENTE DISCRETO	21
1.5	NOSSA HISTÓRIA	24
1.6	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	25
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	28
2.1	TEORIA DOS GRAFOS	28
2.2	COMPLEXO SIMPLICIAL	32
2.3	DIAGRAMA DE HASSE	34
2.4	GRADIENTE DISCRETO	36
2.5	DICIONÁRIO DE NOTAÇÕES E CONCEITOS	41
3	CASAMENTO GULOSO GEOMÉTRICO	42
3.1	CASAMENTO GULOSO	42
3.2	PROPRIEDADES	47
3.3	APLICAÇÕES NO GRADIENTE DISCRETO	49
3.4	EXEMPLOS COMPUTACIONAIS	55
4	SUAVIZAÇÃO DO GRADIENTE DISCRETO	61
4.1	RUIDO NO GRADIENTE DISCRETO	61
4.2	CASAMENTO QUASE GULOSO	63
4.3	PROPRIEDADES	65
4.4	APLICAÇÕES NO GRADIENTE DISCRETO	69
4.5	EXEMPLOS COMPUTACIONAIS	70
4.6	MELHORAMENTOS PARA O CASAMENTO QUASE GULOSO	74
5	TRIANGULAÇÕES PARA O GRADIENTE DISCRETO	77
5.1	IMPORTÂNCIA DA TRIANGULAÇÃO	78
5.2	CORREÇÃO DO GRADIENTE DISCRETO COM FLIPS	79
5.3	TRIANGULAÇÕES PARA O GRADIENTE DISCRETO	81
5.4	TRIANGULAÇÃO ESTRELA	83
5.5	TRIANGULAÇÃO DE CURVA	85
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	94

REFERÊNCIAS	98
--------------------------	----

1 INTRODUÇÃO

“A good beginning makes a good end.” (Louis L’Amour)

Dados científicos estão ficando cada vez mais complexos, e especialistas no assunto estão sempre em busca por técnicas mais sofisticadas para sua análise. Para tal, faz-se necessário entender a natureza dos dados para melhor selecionar a forma de estudá-los. Quando estamos defrontando dados que representam funções definidas num domínio suave, os conceitos de cálculo diferencial e integral são capazes de descrever de maneira intuitiva seu comportamento.

Vamos imaginar que queremos entender uma função $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde S é um domínio suave. Para exemplificar, vamos começar com conceitos básicos de Cálculo. Considere a função apresentada na Figura 1.1 (a), é sabido que o *gradiente* da curva em um ponto no seu gráfico, expresso como a inclinação da linha tangente nesse ponto, representa a taxa de variação do valor da função. Ele é obtido por meio do cálculo da derivada da função no ponto x e é denotado por $f'(x)$.

É importante mencionar que nesta dissertação, sempre que nos referirmos à direção do gradiente, estaremos considerando a direção de decrescimento, o contrário do que estamos acostumados.

Já nos pontos do gráfico onde o comportamento da função muda, por exemplo, de crescimento para decrescimento, o sinal de sua derivada (do gradiente) muda e passa por zero. Esses tipos de pontos que apresentam suas derivadas com valor zero são chamados de *pontos críticos*. Os pontos críticos de uma função de uma variável podem ser mínimos, máximos ou pontos de inflexão (onde a segunda derivada

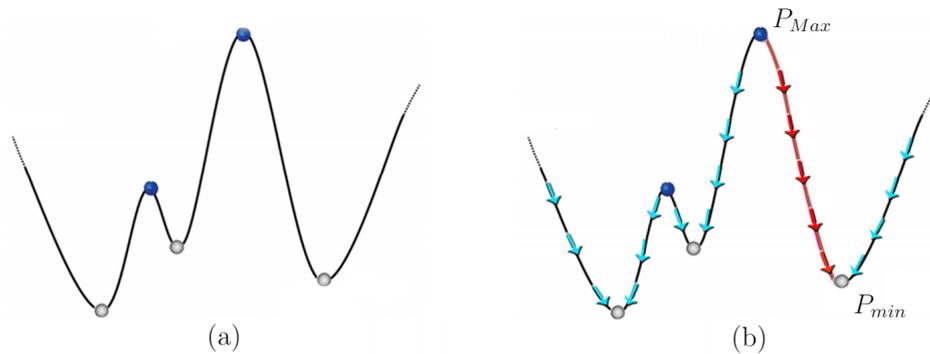


Figura 1.1: A Figura (a) ilustra uma função f com seus respectivos pontos críticos destacados em azul e branco. Já a Figura (b) sinaliza em por meio das setas o gradiente de f . A região marcada em vermelho exemplifica uma região de decrescimento que conecta os pontos críticos P_{Max} e P_{min} .

também é zero). Nesse trabalho vamos trabalhar com funções suaves que não contêm pontos de inflexão, chamadas de *funções de Morse*. Essa é uma restrição fraca porque toda função suave está a uma perturbação de ser uma função de Morse. Na Figura 1.1 (a), temos pontos críticos retratados como pontos de máximo e mínimo de uma função de Morse sinalizados em azul e branco, respectivamente.

Observe agora a Figura 1.1 (b). Qualquer ponto localizado dentro da região destacada em vermelho, de acordo com seu gradiente, segue em direção ao mesmo ponto de mínimo P_{min} , e no sentido oposto do seu gradiente segue em direção ao mesmo ponto de máximo P_{Max} . Esses pontos essencialmente seguem o que é chamado de *linha de fluxo*. A função f pode ser decomposta em regiões desta maneira e essa decomposição ajuda a entender o comportamento da função.

Todos os três conceitos: *gradiente*, *pontos críticos* e *linhas de fluxos*, vistos acima em funções de uma variável, são elementares. O estudo começa a ficar mais interessante quando a função é definida por duas ou mais variáveis. Nesse contexto, para ser função de Morse, pontos críticos não podem ter suas Hessianas iguais à zero, o que significa que seus pontos críticos são bem comportados e podem ser somente

mínimos, máximos e selas.

Como um segundo exemplo, seja uma outra função de Morse $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ onde S também é um domínio suave. Ela é apresentada na Figura 1.2. Os pontos brancos são os mínimos, os listrados são as selas e os azuis são os máximos. Funções de Morse com mais variáveis também podem ser decompostas da mesma maneira que fizemos anteriormente. Para exemplificar, qualquer ponto localizado dentro da região vermelha destacada, de acordo com seu gradiente, segue em direção ao mesmo ponto de mínimo P_{min} , e no sentido oposto do seu gradiente segue em direção ao mesmo ponto de máximo P_{Max} . Podemos fazer isso para qualquer ponto. Então concluímos que por meio dos conceitos de campo gradiente, pontos críticos e linhas de fluxo, conseguimos criar decomposições do domínio em regiões de comportamento semelhante [6, 22]. Dessa forma, somos capazes de particionar uma função e entender melhor os dados que ela descreve. Essa decomposição é chamada de decomposição de Morse-Smale.

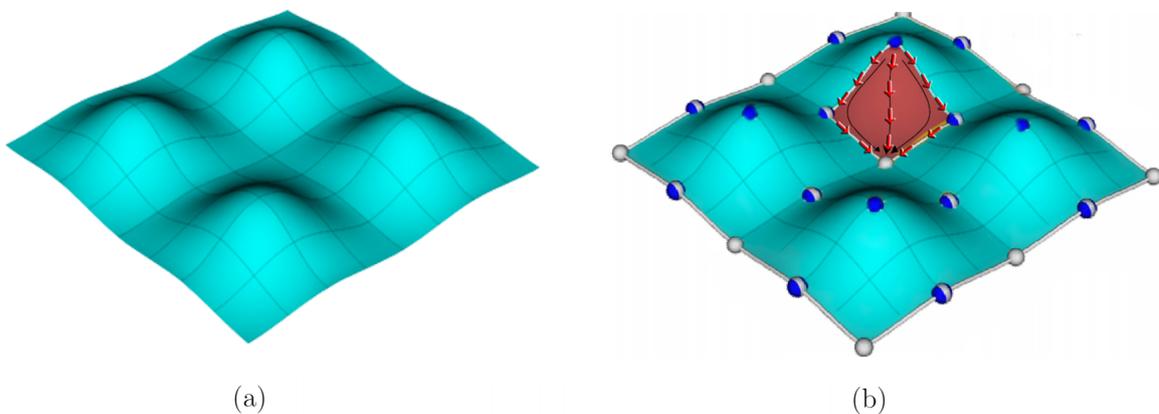


Figura 1.2: A Figura (a) ilustra uma função f de duas variáveis. Já a Figura (b) destaca seus pontos críticos através de circunferências azuis e brancas e, por meio das setas, destaca o gradiente de f . A região marcada em vermelho exemplifica uma região particionada de f cujo comportamento é uniforme e de decréscimo.

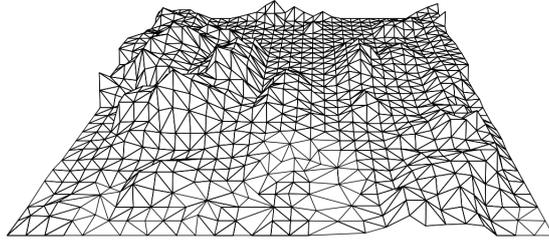


Figura 1.3: Exemplo de um objeto discreto: uma triangulação planar.

1.1 Domínio Discreto vs. Domínio Suave

Comumente, no entanto, em aplicações e medições, o domínio S não é suave. A função é amostrada ou está definida em um domínio discreto. Como exemplo podemos citar uma estrutura triangularizada T que apresenta uma função f definida no seu conjunto de vértices V , isto é, existe função f tal que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Observe a Figura [1.3](#).

O tratamento de funções definidas em domínios discretos enfrenta um problema recorrente: nossas noções teóricas discutidas anteriormente, baseadas em domínios suaves, não são mais válidas.

Por meio de abordagens numéricas clássicas com interpolações e aproximações, por exemplo, é possível tentar recuperar noções aproximadas de *gradiente*, *pontos críticos* e *linhas de fluxos* no contexto discreto [\[10\]](#).

Muitas vezes essa abordagem é utilizada na prática com sucesso, mas, para descobrir pontos críticos, integrar as linhas de fluxos e construir a decomposição de Morse-Smale em dimensões acima de 2, as abordagens numéricas contêm muitos erros, perdem várias garantias teóricas e os algoritmos apresentam alta complexidade.

Como então é possível definir o gradiente, os pontos críticos e as linhas de

fluxo de uma função definida em um domínio discreto para estudar o seu comportamento?

1.2 Teoria de Morse discreta

Robin Forman, em 1995 [11], desenvolveu uma teoria combinatória para responder a essa última pergunta que dispensa integrações numéricas, diferenciações, aproximações e estabelece diversas garantias teóricas do domínio suave no domínio discreto. Além disso, essa teoria conta com algoritmos combinatoriais eficientes e precisos, tornando-a adequada para computadores.

A formulação de Forman é conhecida como *teoria discreta de Morse* e cria uma ligação entre os conceitos de cálculo que descrevemos e objetos discretos. Para isso, ele definiu um objeto chamado de *campo gradiente discreto*, que vamos chamar de *gradiente discreto*. Trata-se de uma estrutura composta por *pontos críticos discretos* e *linhas de fluxo discretas* que tenta reproduzir o que, no suave, esses conceitos representam (essas formulações ficarão claras no Capítulo 2). Para exemplificar e ganhar intuição, observe a Figura 1.4. Temos do lado esquerdo duas funções definidas no domínio suave e do lado direito definidas no domínio discreto; ambas associadas de seus respectivos gradientes suave e discreto.

Forman definiu o que é um gradiente discreto e suas propriedades análogas do domínio suave (Capítulo 2), mas não determinou precisamente um algoritmo para construí-lo de uma maneira que o gradiente discreto seja semelhante ao gradiente suave dada uma função. Então desde a concepção da teoria discreta de Morse, diversos métodos foram propostos para se construir campos gradiente discreto, dando origem a vários algoritmos eficientes [6, 22, 9]. Dessa forma, torna-se possível construir decomposições análogas às decomposições vistas na última seção. Mesmo assim,

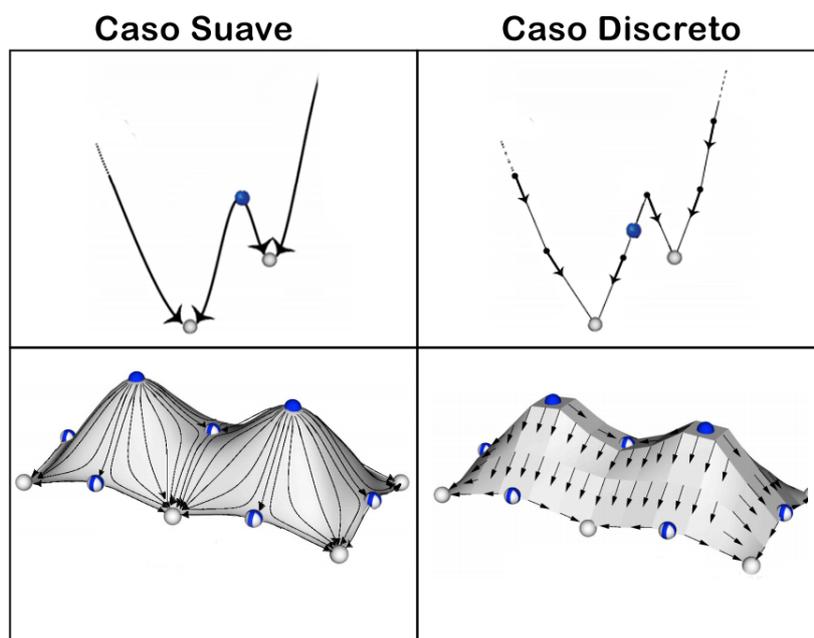


Figura 1.4: Comparativo entre gradiente suave e discreto. Do lado esquerdo temos duas funções representadas no domínio suave, enquanto que do lado direito temos as mesmas funções, mas agora representadas no domínio discreto. Em ambos os casos as circunferências coloridas de azul e branco representam pontos críticos (suaves e discretos) e as setas ilustram a direção do campo gradiente (suave e discreto).

algumas dificuldades ainda são encontradas: a construção, propriamente, de um campo gradiente discreto dada uma função amostrada nos vértices do objeto discreto e o tratamento de ruídos no campo gradiente discreto [19, 17, 14, 27], são exemplos de desafios.

1.3 Fidelidade Geométrica

Vimos até então que a teoria discreta de Morse é importante no sentido de criar um elo entre os conceitos de cálculo e a estrutura de objetos discretos. Isso é feito através do campo gradiente discreto.

O primeiro desafio que citamos trata do algoritmo de construção do campo gradiente discreto. O quão fiel o campo gradiente discreto construído é se comparado à geometria da função (gradiente, pontos críticos, linhas de fluxo, etc) que foi amostrada nos vértices do objeto discreto (por exemplo, em uma malha triangulada)?

Essa *fidelidade geométrica* é estudada na literatura de acordo com alguns critérios intuitivos [19, 17, 14, 27]. Esses critérios representam de certa maneira indicadores que tentam descrever a semelhança do campo gradiente suave do discreto.

- **Posição:** esse critério deve indicar como a posição do ponto crítico da função se aproxima do ponto crítico discreto retratado no gradiente discreto. Isso significa que se no suave um ponto crítico se encontra na posição p do domínio contínuo, o ponto crítico discreto deve estar localizado próximo de p no domínio discreto.
- **Quantidade:** esse critério procura calcular a diferença entre a quantidade de

pontos críticos da função em relação aos pontos críticos discretos do gradiente de acordo com suas naturezas. Por exemplo, se uma função apresenta dois máximos e um mínimo, é esperado que o gradiente discreto capture dois pontos de máximo discretos e um ponto de mínimo discreto.

- **Fluxo decrescente:** é sabido que o gradiente suave indica as direções de decrescimento da função. Através das suas linhas de fluxo somos capazes de percorrer a função partindo de um ponto crítico e caminhar em direção a outro. Esse critério busca retratar no gradiente discreto, por meio das linhas de fluxo discretas, esse comportamento.
- **Órbitas fechadas:** um campo gradiente no domínio suave não apresenta órbitas fechadas. Durante a construção de um campo gradiente discreto, esse tipo de critério deve ser respeitado para que a teoria de Forman funcione. A partir de qualquer ponto e seguindo as linhas de fluxo discretas, é esperado que nenhuma espécie de órbita ou ciclo seja formado.

Como exemplos de algoritmos derivados da teoria de Morse introduzida por Forman e que respeitam construções geométricas propostas para o campo gradiente discreto, podemos citar os seguintes autores em conjunto com suas respectivas contribuições: T. Lewiner em [19] apresentou a primeira técnica para construir um campo gradiente discreto que concorda ou combina com o comportamento de fluxo de uma função escalar. Henry King, Kevin Knudson e Neža Mramor em [17] introduziram uma técnica para gerar funções discretas de Morse em complexos simpliciais modificando o diagrama de Hasse. A. Gyulassy, P. T. Bremer, B. Hamann e V. Pascucci introduziram em [14] um algoritmo que atribui células em ordem de valores crescentes de função e dimensão, usando a ordenação para evitar checagens acíclicas. J. Reininghaus, C. Lowen e I. Hotz em [27] apresentaram uma abordagem para gerar campos gradiente discreto em escalas múltiplas computando casamentos de um grafo de células usando o método Húngaro.

Mais recentemente, Paixão e Lewiner [26, 21] propuseram uma construção de um gradiente discreto geométrico através de um algoritmo guloso [12] que funciona em qualquer dimensão. A principal vantagem é que o algoritmo guloso é caracterizado por uma simples condição local, que estende e simplifica as provas que contemplam garantias geométricas comparando-se com os resultados anteriores [21, 20]. Por exemplo, a condição local é usada para provar resultados sobre a localização de pontos críticos discretos. Além disso, sob algumas hipóteses em f , o quarto critério que enumeramos na fidelidade geométrica é automaticamente satisfeito [25]. Sob tais hipóteses, a construção do gradiente discreto acaba se tornando equivalente a uma construção gulosa [21, 20] que já é usada em várias aplicações [6, 22, 30].

A maioria das construções para o gradiente discreto partem de algoritmos gulosos. Nesta dissertação, nós utilizaremos o algoritmo guloso que foi citado no último parágrafo com esse objetivo. Iremos ao longo do Capítulo 3 levantar novas notações, propor mudanças no algoritmo, simplificar algumas das provas, em especial, a relacionada com o critério das órbitas não fechadas e derivar uma nova garantia geométrica do mesmo que é generalizada para qualquer dimensão: a noção de fluxo decrescente do campo gradiente discreto.

1.4 Ruído no Gradiente Discreto

Outro problema encontrado na prática é a presença de ruído no gradiente discreto. Na teoria discreta de Morse, os *algoritmos de simplificação* têm sido desenvolvidos a fim de eliminar pontos críticos discretos incorretos ou indesejáveis [8]. Essa simplificação é alcançada através de uma operação conhecida como *cancelamento*.

Um cancelamento é uma operação aplicada comumente após a construção

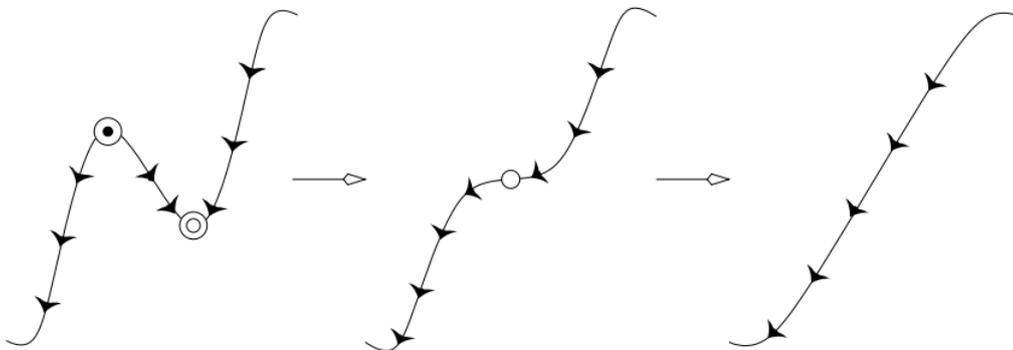


Figura 1.5: Exemplo do significado envolvido na operação de cancelamento no domínio suave. A imagem retirada do trabalho de Edelsbrunner, Harer e Zomorodian, e alterado por nós para destacar o fluxo por meio de setas, representa o processo (da esquerda para a direita) de cancelamento de dois pontos críticos .

do campo gradiente discreto. Por meio dela, é possível transformar um gradiente discreto em outro, com menos pontos críticos discretos, fazendo mudanças locais em seu comportamento. Na Figura [1.5](#) temos o que significa realizar uma operação de cancelamento no suave (basicamente uma suavização da função) e na Figura [1.6](#) um exemplo de cancelamento aplicado a um gradiente discreto.

Dentre os algoritmos de cancelamento que merecem destaque podemos citar preliminarmente o trabalho seminal em teoria discreta de Morse introduzido por Forman [\[11\]](#). Nele, o autor apresenta um cancelamento genérico que consiste essencialmente da inversão de um \mathcal{V} -*path* (este conceito será definido no Capítulo [2](#)). Em seguida, Edelsbrunner, Harer e Zomorodian em [\[10\]](#) aventaram o cancelamento de pontos críticos para complexos de Morse-Smale de duas dimensões. Já em [\[5\]](#), P. T. Bremer, B. Hamann, H. Edelsbrunner e V. Pascucci estenderam essa abordagem para uma hierarquia de resolução múltipla com cancelamentos independentes. Dois anos depois, A. Gyulassy, Vijay Natarajan, V. Pascucci, P. T. Bremer e B. Hamann

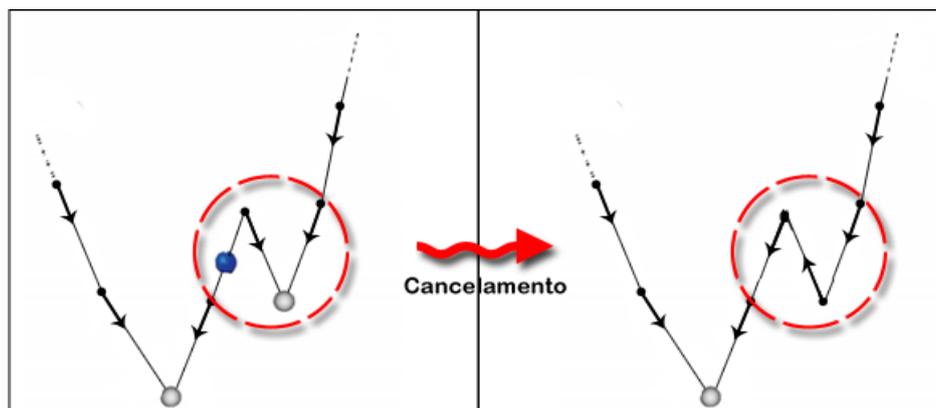


Figura 1.6: Exemplo de cancelamento de dois pontos críticos discretos em um gradiente discreto. Temos do lado esquerdo um ponto crítico de máximo e outro de mínimo. O cancelamento consiste essencialmente de uma pequena mudança na orientação do gradiente discreto. Isso é destacado pelos círculos vermelhos.

introduziram cancelamentos em três dimensões na estrutura algébrica do complexo [13] e, mais tarde, em conjunto com H. Hagen, N. Kotava, M. Kim e C. D. Hansen, mostraram como computar o incorporamento geométrico das características de qualquer nível da sequência de um cancelamento [15].

No Capítulo 4, propomos um novo algoritmo de construção geométrica para o gradiente discreto que tem o mesmo objetivo que uma operação de cancelamento: reduzir pontos críticos discretos indesejáveis. Trata-se de uma abordagem paralela ao que vem sendo feito pelas técnicas de casamento.

A ideia é fazer checagens em tempo de execução buscando minimizar pontos críticos discretos que, contrapondo o que normalmente é feito, ou seja, após a construção. O capítulo mencionado contempla o passo a passo da construção assim como as garantias teóricas relacionadas ao que definimos como fidelidade geométrica.

1.5 Nossa história

Logo nas primeiras reuniões que tive com meu orientador, fiquei entusiasmado com o que ele tinha me mostrado a respeito da teoria discreta de Morse. Resolvi então implementar um programa que buscava compreender o comportamento de funções através de estruturas discretas induzidas por ela - basicamente triangulações planares.

Depois de alguns refinamentos, a aplicação estava funcionando corretamente e um fato interessante me intrigou. Pontos críticos discretos muito próximos às vezes eram identificados no gradiente discreto, não representando bem a função amostrada nos vértices da triangulação em locais específicos. Vamos considerar o objeto discreto ilustrado na Figura [1.7](#).

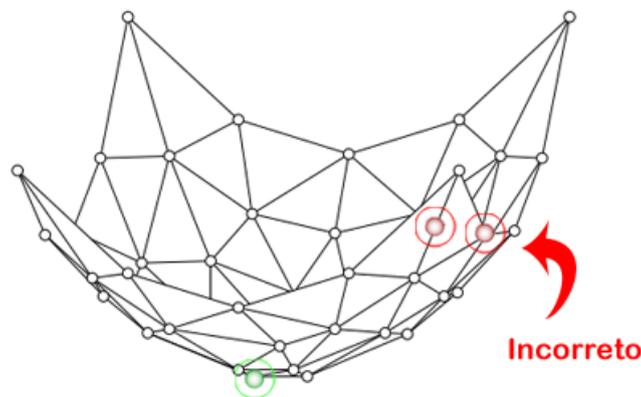


Figura 1.7: Função $f(x, y) = x^2 + y^2$ amostradas nos vértices de uma triangulação. Em vermelho destacam-se pontos críticos discretos não desejáveis e em verde ponto crítico discreto desejável.

A função que foi amostrada nos seus vértices foi $f(x, y) = x^2 + y^2$ e os pontos destacados em verde e vermelho representam pontos críticos discretos. Ora, como se trata de um parabolóide, é esperado que apenas um ponto crítico discreto seja encontrado no gradiente discreto - aquele que representa o ponto de mínimo do

paraboloide.

Então por que o gradiente discreto produzido contém esses pares de pontos críticos discretos indesejáveis que não existem na função ou não a representam? Esse tipo de ocorrência é o que definiremos como ruído do gradiente discreto no Capítulo 4.

Motivados pela pergunta citada, fez-se necessário obter um entendimento mais detalhado do processo de construção do gradiente discreto, principal diretriz que orientou a concepção do Capítulo 3. Com uma melhor compreensão do algoritmo, decidimos propor um novo processo de geração do campo gradiente discreto que tenta evitar a ocorrência de ruídos no gradiente discreto; que é feito no Capítulo 4.

Depois de tentar tratar o ruído do gradiente discreto durante o casamento, tivemos a ideia de tentar tratá-lo antes mesmo da execução. Pensamos em verificar como alterações na estrutura do objeto discreto que é passado como entrada para o algoritmo de construção do gradiente altera seu resultado. Inserimos então no nosso sistema a funcionalidade de modificar, em particular, a triangulação do objeto por meio de trocas de arestas. Sendo assim, no Capítulo 5 tentamos entender, mesmo sem garantias teóricas, como que a triangulação impacta o gradiente discreto.

1.6 Estrutura da Dissertação

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: o Capítulo 2 se encarrega de explicar todo o embasamento teórico necessário para a compreensão do objeto mais importante desta dissertação:

o campo gradiente discreto. Qualquer dúvida referente aos assuntos, notações e termos relacionados com o texto pode ser referenciada aqui. Sendo assim, o leitor que estiver confortável com as áreas de pesquisa que norteiam o trabalho pode utilizá-lo apenas como uma referência.

- Capítulo [3](#): este capítulo procura entender e descrever a construção geométrica de um gradiente discreto através de um algoritmo guloso. Aqui propomos mudanças no algoritmo guloso que tomamos como base [\[26, 21\]](#). Dada a forma como o escrevemos, derivaremos novas notações que nos auxiliam a simplificar a prova que garante o critério geométrico das órbitas não fechadas. Isso é feito por intermédio não só das notações, mas também pela criação de lemas que garantem propriedades especiais do algoritmo guloso. Não somente, derivamos uma nova garantia geométrica do mesmo que é generalizada para qualquer dimensão. Trata-se de uma tentativa de se aproximar do critério de fluxo decrescente. Por meio deste resultado mostramos que um campo gradiente discreto associado ao algoritmo guloso que propomos gera linhas de fluxo discretas que, quando seguidas, convergem sempre para um ponto crítico discreto mínimo. Vale ressaltar que todos os resultados são válidos para qualquer dimensão.
- Capítulo [4](#): aqui propomos o que chamamos de algoritmo quase guloso. Tentamos combinar tanto o aspecto geométrico do algoritmo guloso que constrói o gradiente discreto quanto a ideia dos algoritmos de simplificação como o cancelamento num só processo. O objetivo é desenvolver uma forma de se obter um gradiente discreto buscando reduzir pontos críticos discretos indesejáveis. Sendo assim, neste capítulo deixamos como contribuição o processo que busca reduzir ruídos no gradiente discreto. Assim como foi feito no algoritmo guloso, contribuimos com uma série de provas necessárias que trazem as garantias teóricas que o caracterizam como um algoritmo de construção geométrico para o gradiente. Mostramos que o gradiente discreto associado ao algoritmo quase

gulo não apresenta órbitas fechadas, mantém a noção dos fluxos decrescentes que enunciamos no capítulo anterior e que, se comparado com o algoritmo gulo, reduz ruído do gradiente discreto. Mais uma vez, todos os resultados se verificam para qualquer dimensão.

- Capítulo 5: neste momento estudamos a importância da triangulação e suas operações geométricas para o gradiente discreto. Fazemos isso combinando a operação de flip presente na geometria computacional com a construção do gradiente discreto. Nossa primeira contribuição se dá na forma de um sistema que dá a liberdade para o usuário de modificar a triangulação de entrada (estrutura de um objeto discreto em particular) por meio de trocas de arestas. Isso se mostrou interessante no sentido de oferecer uma ferramenta para modificar e até corrigir o gradiente discreto associado à triangulação. Contribuímos também levantando um breve estudo sobre as possibilidades de diferentes triangulações associadas à construção do gradiente discreto. Mostramos algumas desvantagens e vantagens dessa abordagem propondo duas diferentes triangulações: a triangulação estrela e curva, respectivamente.
- Capítulo 6: a partir deste ponto iremos retomar resumidamente todas as contribuições da dissertação e, depois, apresentar algumas das muitas ideias e perguntas que foram surgindo ao longo da pesquisa na forma de sugestões e trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

“Get the fundamentals down and the level of everything you do will rise.” (Michael Jordan)

O objetivo principal deste capítulo é definir o que é um campo gradiente discreto. Para isso, os conceitos que dão base para tal definição serão explicitados. Inicialmente, na Seção 2.1, nós revisaremos alguns conceitos fundamentais de teoria dos grafos, em particular, o problema de casamento. Logo em seguida, veremos na Seção 2.2 e na Seção 2.3, respectivamente, conceitos sobre complexos simpliciais e sobre um grafo importante associado a ele, o diagrama de Hasse. Com esses dois assuntos abordados, poderemos por fim definir o gradiente discreto como um casamento - com certas propriedades - no diagrama de Hasse. Isso é feito na Seção 2.4.

O leitor que se sentir confortável com tais assuntos pode seguir com o texto. Mesmo assim, recomendamos minimamente verificar o Algoritmo 1 encontrado no final da Seção 2.4, uma vez que será enunciado diversas vezes ao longo do trabalho, e a tabela de notações situada na Seção 2.5 por motivos de nomenclatura.

2.1 Teoria dos grafos

A maioria dos conceitos de teoria dos grafos e suas notações foram derivados de [4].

Definição 2.1. *Um grafo G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ consistindo de um conjunto de vértices $V(G)$ e um conjunto de arestas $E(G)$ disjunto de $V(G)$. Cada aresta de G está associada a um par não ordenado de vértices de G .*

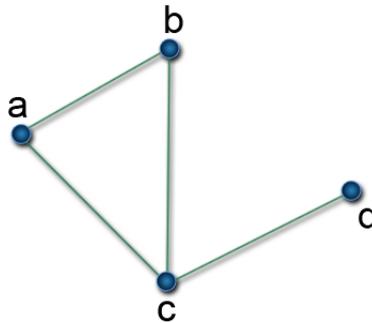


Figura 2.1: Um grafo G com $V(G) = \{a, b, c, d\}$ e $E(G) = \{ab, ac, bc, cd\}$.

Para $x, y \in V(G)$, uma aresta $e = \{x, y\} \in E(G)$ é denotada por xy ou yx sem distinção. Dizemos que x e y são *extremos* da aresta e e que e é *incidente* aos vértices x e y .

Dizemos que o *grau* de um vértice é escrito por $d(v)$ e representa o número de arestas incidentes para com o vértice.

Definição 2.2. Um caminho P em um grafo G é uma sequência de vértices denotada por v_1, v_2, \dots, v_n tal que de cada um de seus vértices há uma aresta para o próximo vértice da sequência.

Retomando a Figura [2.1](#), $P = \{a, b, c, d\}$ é um exemplo de caminho. Note que podemos denotar um caminho também em termos de suas arestas.

Um tipo particular de grafos é conhecido como *árvore*. Essa estrutura consiste de um grafo onde para qualquer par de vértices, existe exatamente um caminho que os conecta (portanto, trata-se de um grafo conexo e acíclico). O *diâmetro* ou *largura* é o número de arestas no maior caminho entre dois vértices na árvore. A próxima figura exemplifica uma árvore de largura igual a 3. As arestas e_1 e e_3 podem ser chamadas de *externas* enquanto que a aresta e_2 pode ser chamada de *central*.

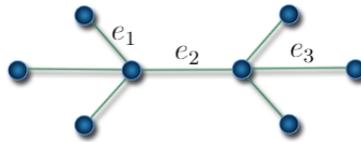


Figura 2.2: Uma árvore de largura 3.

Além disso, as arestas de um grafo podem ter um peso associado. Em um *grafo ponderado*, toda aresta está associada a um número real e finito ao qual chamaremos de *peso*. Definiremos \bar{e} ou $\overline{\{x, y\}}$ como o peso associado à aresta $e = \{x, y\} \in E$.

Definição 2.3. Um grafo H é um subgrafo de G denotado por $H \subseteq G$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Dizemos que um subgrafo H é um *subgrafo induzido* de G e denotado por $G[S]$, onde S é um subconjunto de vértices de G , se, para qualquer par de vértices x e y de H , xy é uma aresta de H se e somente se xy é uma aresta de G . Isso significa que H é um subgrafo induzido de G se ele tem todas as arestas que estão em G sobre o mesmo conjunto de vértices.

Definição 2.4. Um *casamento* ou *emparelhamento* M em um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto de arestas $M \subseteq E(G)$ tal que todo vértice está contido em no máximo uma aresta de M .

Arestas em M são chamadas de *arestas casadas* e vértices extremos às arestas casadas são chamados de *vértices saturados*. De modo análogo, arestas que não estão em M são ditas *não casadas* e os vértices onde todas as arestas incidentes são não casadas são chamados de *vértices insaturados*. O número de arestas em M denota o tamanho $|M|$ do casamento [23].

Definição 2.5. Um *caminho alternante* P em um casamento M , definido em um grafo G , é um caminho cujas arestas alternam entre aquelas que estão em M e aque-

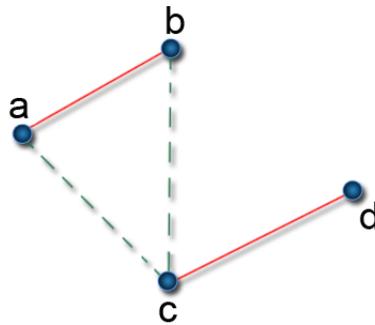


Figura 2.3: Um possível casamento no grafo da Figura 2.1. As arestas sinalizadas em vermelho estão casadas e as tracejadas não. Todos os vértices do grafo estão saturados.

las que não estão em M . P portanto pode ser definido como $P = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ onde n é o número de arestas no caminho, isto é, o seu comprimento $|P|$. Se $e_i \in M$ então $e_{i+1} \notin M$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

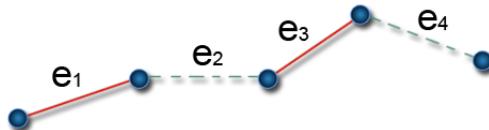


Figura 2.4: Um caminho alternante $P = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sinalizamos em vermelho as arestas casadas e tracejamos as arestas não casadas.

Um caminho é alternante em relação a um casamento M se suas arestas estão alternadamente em M e fora de M . Além disso, um caminho alternante é de *aumento* se começa e termina num vértice não saturado e tem pelo menos uma aresta.

Definição 2.6. Um digrafo D é um par ordenado $(N(D), A(D))$ consistindo de um conjunto não vazio de nós $N(D)$ e um conjunto de arcos $A(D)$ disjunto de $N(D)$. A cada aresta de D um par ordenado de nós de D é associado.

Um digrafo nada mais é que um grafo dirigido; os pares de nós que constituem

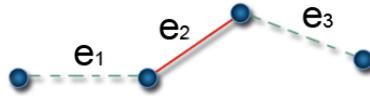


Figura 2.5: Um caminho alternante de aumento $P = \{e_1, e_2, e_3\}$. Os vértices extremos do caminho são não saturados já que todas as arestas incidentes a eles não estão casadas.

um arco agora são ordenados. Para $u, v \in N$, um arco $a = \{u, v\} \in A$ é denotado por uv e implica que a é direcionado de u para v . Assim como em grafos, um digrafo pode ser ponderado, tendo todos seus arcos associados a um número finito e real.

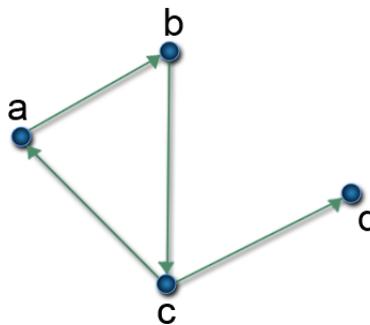


Figura 2.6: Um digrafo D com $N(D) = \{a, b, c, d\}$ e $A(D) = \{ab, bc, ca, cd\}$.

Encerramos aqui os conceitos da teoria dos grafos que serão úteis para o entendimento deste trabalho. O próximo campo de conhecimento a ser estudado constitui basicamente uma generalização da definição de grafos que acabamos de ver e é conhecido como complexo simplicial.

2.2 Complexo Simplicial

Definição 2.7. *Um complexo simplicial finito é um conjunto de vértices V juntamente com um conjunto Δ de subconjuntos de V , tal que Δ deve satisfazer algumas propriedades:*

1. $V \subset \Delta$
2. se $\tau \in \Delta$ e $\sigma \subset \tau$, então $\sigma \in \Delta$

Nós iremos nos referir ao complexo simplicial como Δ . Os elementos de Δ são chamados de simplexos. Um simplexo $\tau \in \Delta$ é dito de *dimensão* p , denotado por $\dim(\tau) = p$, se τ contém $p + 1$ vértices.

Vamos entender esses últimos conceitos com um exemplo. Observe o complexo simplicial Δ mostrado na Figura 2.7. Nela, temos simplexos de dimensões iguais a 0, 1 e 2. Os simplexos cuja dimensão tem tamanho 0 são os subconjuntos:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}.$$

Já os simplexos de dimensão 1 são os subconjuntos:

$$\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}.$$

Por fim, os simplexos de dimensão 2 são os subconjuntos:

$$\{a, b, c\}, \{b, c, d\}.$$

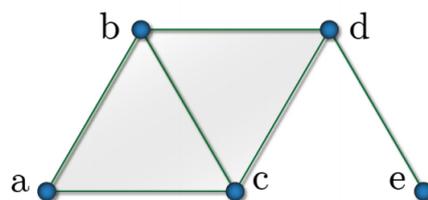


Figura 2.7: Um complexo simplicial Δ de dimensão 2. Seus simplexos são dados por: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{d, e\}$, $\{a, b, c\}$ e $\{b, c, d\}$.

Dessa forma fica fácil compreender que um complexo simplicial é uma coleção de agrupamentos de vértices seguindo as regras enumeradas na Definição 2.7. Cada

grupo de vértices é um simplexo enquanto que o número de vértices por grupo indica sua dimensão de acordo como foi descrito.

Um simplexo σ também é dito uma *faceta* de um outro simplexo τ , denotado por $\sigma \prec \tau$, se $\sigma \subset \tau$ e $\dim(\sigma) = \dim(\tau) - 1$. Novamente cabe um exemplo. Na Figura 2.7 temos que o simplexo $\sigma = \{a, b\}$ é faceta do simplexo $\tau = \{a, b, c\}$ pois $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$ e $\dim(\{a, b\}) = \dim(\{a, b, c\}) - 1$.

Dizemos por fim que a dimensão de Δ é a maior dimensão desses simplexos. Dessa forma, no exemplo da Figura 2.7 temos que $\dim(\Delta) = 2$.

Para consolidar a Definição 2.7, podemos nos perguntar o que não é um complexo simplicial. A Figura 2.8 ilustra isso através de um outro complexo Δ . Nela, temos um simplexo de dimensão 2 $\{a, b, c\}$, dois simplexos de dimensão 1 $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$ e três simplexos de dimensão 0 $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{c\}$. Seja τ e σ grupos de vértices tal que $\tau = \{a, b, c\}$ e $\sigma = \{a, b\}$. Note que $\tau \in \Delta$ e $\sigma \subset \tau$, mas $\sigma \notin \Delta$.

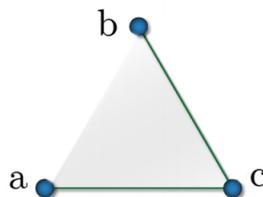


Figura 2.8: Um exemplo do que não é um complexo simplicial.

2.3 Diagrama de Hasse

Uma outra forma muito comum de se enxergar um complexo simplicial é em termos de um digrafo. A ideia é “desenhar” todo o complexo representando cada um dos seus simplexos como um nó e depois traçando um arco de cada faceta para seu

respectivo simplexo de dimensão maior. Essa estrutura é chamada de *diagrama de Hasse* e está definida e ilustrada a seguir [7].

Definição 2.8. Dado um complexo simplicial Δ , o seu diagrama de Hasse H é o grafo direcionado onde o conjunto de nós de H é o conjunto de simplexos de Δ e o conjunto de arcos de H é composto por todos os pares $\{\sigma, \tau\}$ se e somente se $\sigma \prec \tau$.

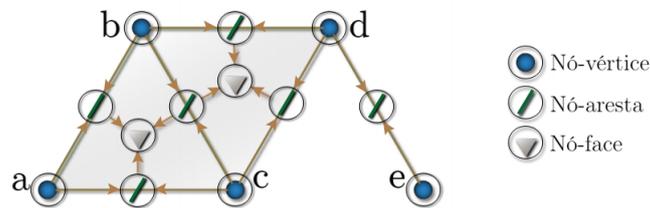


Figura 2.9: Um diagrama de Hasse H associado ao complexo simplicial da Figura 2.7. Destacamos de acordo como indicado na legenda da direita a natureza dos nós do digrafo.

Observe que para cada simplexo criamos um nó e para cada faceta traçamos um arco que a conecta com seus simplexos de dimensão maior. Dessa forma produzimos um digrafo, o qual é chamado de diagrama de Hasse.

Os nós do diagrama de Hasse são comumente referenciados de acordo com a natureza do simplexo que ele representa. Por exemplo, na Figura 2.9, os simplexos de dimensão 0 foram mapeados em nós-vértice, os simplexos de dimensão 1 foram mapeados em nós-aresta e os simplexos de dimensão 2 foram mapeados em nós-face.

O diagrama de Hasse, portanto, funciona como uma espécie de dicionário entre os conceitos de grafos e complexos simpliciais. É por meio da sua estrutura que poderemos entender como o gradiente discreto é construído.

2.4 Gradiente Discreto

A principal definição deste capítulo se encontra nesta seção. Relembrando ao leitor, o gradiente discreto é uma estrutura definida em um objeto discreto, por exemplo, um complexo simplicial. Sendo assim, a estrutura de onde iremos construir um campo gradiente discreto pode ser definida como um complexo Δ .

De modo informal, Forman ao criar o gradiente discreto, o definiu simplesmente como um casamento M . Esse casamento M é feito no diagrama de Hasse H de um complexo Δ com uma propriedade acíclica. Sendo assim, vamos a uma primeira definição do assunto.

Definição 2.9. *Um campo vetorial discreto \mathcal{V} em Δ é uma coleção de pares de simplexes $\{\sigma, \tau\}$ em Δ com $\sigma \prec \tau$, tal que cada simplexo está em no máximo um par de \mathcal{V} .*

Um campo vetorial discreto é, portanto, simplesmente um casamento no diagrama de Hasse (que já vimos que é um digrafo) do complexo simplicial. Nós escrevemos $\sigma \rightarrow \tau$ se $\{\sigma, \tau\} \in \mathcal{V}$, ou seja, se o arco $\{\sigma, \tau\}$ está casado, e $\sigma \not\rightarrow \tau$ caso contrário. É importante que essa noção fique clara. Vejamos o exemplo mostrado na Figura 2.10. Ela mostra primeiramente um complexo simplicial qualquer Δ , depois seu diagrama de Hasse associado H e por fim o campo vetorial discreto \mathcal{V} (um casamento em H).

Os arcos destacados na Figura 2.10 (c) representam os arcos de H que estão casados. Já as estruturas em vermelho representam os nós que não foram casados (um nó-aresta e dois nós-vértice). Esses nós são essencialmente o que chamamos de pontos críticos discretos na introdução.

Definição 2.10. *Um simplexo σ é dito crítico para um campo vetorial discreto se*

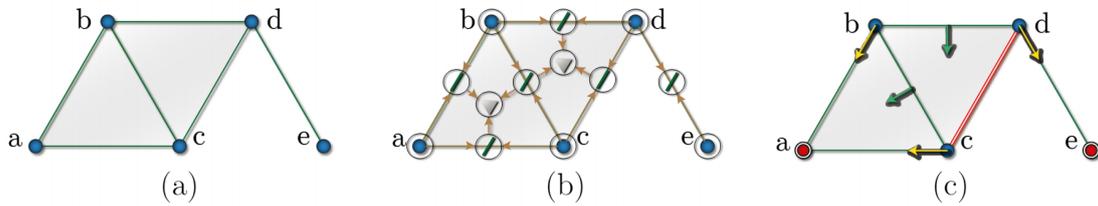


Figura 2.10: Temos da esquerda para a direita o processo que constrói um campo gradiente discreto: o complexo simplicial de entrada (a), a construção do seu diagrama de Hasse (b) e por fim um casamento em sua estrutura (c).

ele não pertence a nenhum par de \mathcal{V} , ou seja, se ele é um nó no diagrama de Hasse insaturado.

Para exemplificar, quando tratamos complexos simpliciais de duas dimensões, a dimensão do simplexo crítico caracteriza um ponto de mínimo caso seja um nó-vértice insaturado, um ponto de sela caso seja um nó-aresta insaturado ou um ponto de máximo caso seja um nó-face insaturado. A Figura 2.11 tenta mostrar essa analogia que interliga o conceito de simplexo crítico no domínio discreto com o conceito de ponto crítico no domínio suave.

De forma semelhante, existe uma definição formal para o que chamamos de linha de fluxo discreta na introdução.

Definição 2.11. *Dado um campo vetorial discreto \mathcal{V} em um complexo simplicial Δ , um \mathcal{V} -path é uma sequência de simplexos $\langle \sigma_n \tau_n \sigma_{n-1} \tau_{n-1} \dots \sigma_1 \tau_1 \rangle$ tal que para todo i temos que $\sigma_i \rightarrow \tau_i$ e $\tau_i \succ \sigma_{i-1} \neq \sigma_i$.*

Observe que um \mathcal{V} -path é um caminho alternante em H com a restrição de que todas as dimensões dos simplexos alternam entre p ou $p + 1$, com $p = \dim(\sigma_0)$. A Figura 2.12 ilustra dois \mathcal{V} -paths com dimensões diferentes.

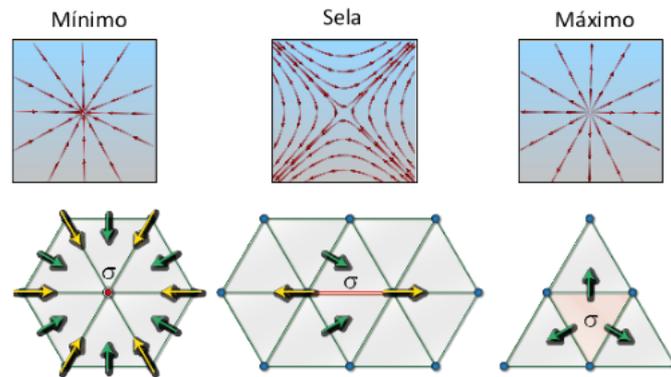


Figura 2.11: Caracterização dos nós críticos no campo vetorial discreto. A parte superior da imagem ilustra os comportamentos dos pontos críticos indicados de acordo com um gradiente suave. Já a parte inferior mostra o comportamento dos pontos críticos de acordo com um gradiente discreto.

Nós dizemos que tal caminho é *não trivial fechado* se $n > 0$ e $\sigma_0 = \sigma_n$. Vide exemplos na Figura [2.13](#).

Finalmente iremos apresentar agora a definição mais importante para o trabalho. Entendemos até este ponto que um campo vetorial discreto nada mais é que um casamento no diagrama de Hasse de um complexo simplicial. Os arcos casados e os nós insaturados trazem significado no sentido de simular os vetores e os pontos críticos de um campo vetorial definido num domínio contínuo.

Um campo gradiente discreto nada mais é que uma especialização do campo vetorial discreto. Quando este não contém nenhuma órbita fechada, ou seja, nenhum \mathcal{V} - *path* não trivial fechado, dizemos que \mathcal{V} é um campo gradiente discreto.

Definição 2.12. *Um campo vetorial discreto \mathcal{V} é um campo gradiente discreto se e somente não contém \mathcal{V} - *path* não trivial fechado.*

A Figura [2.13](#) mostra um campo vetorial discreto que não é um campo gradiente discreto. Basta notar que nele temos \mathcal{V} - *paths* fechados, o que de certo modo

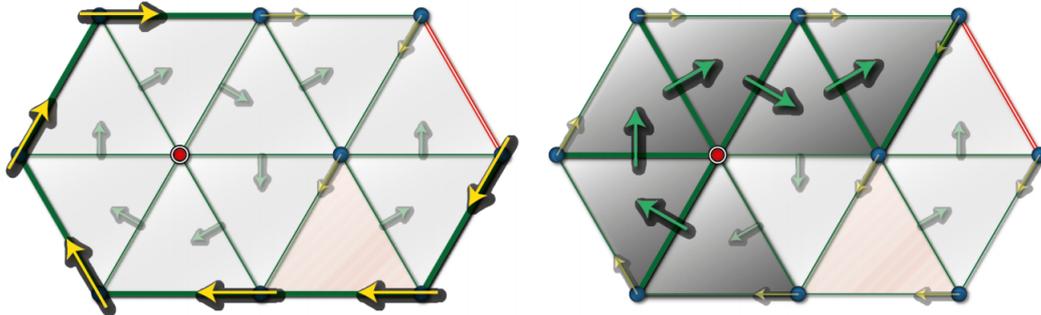


Figura 2.12: Dois \mathcal{V} – *paths* distintos: à esquerda de dimensão 0 para dimensão 1 (vértice-aresta) e à direita de dimensão 1 para dimensão 2 (aresta-face).

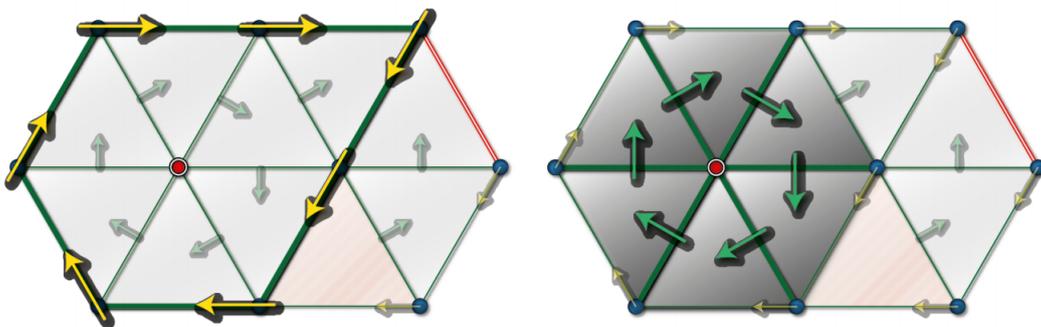


Figura 2.13: Dois \mathcal{V} – *paths* distintos e fechados: à esquerda de dimensão 0 para dimensão 1 (vértice-aresta) e à direita de dimensão 1 para dimensão 2 (aresta-face).

se assemelha às órbitas fechadas no domínio suave.

Já a Figura [2.14](#) mostra um campo vetorial discreto que de fato é um campo gradiente discreto. Basta notar que não temos \mathcal{V} – *paths* não triviais fechados. Os elementos destacados em vermelho são os simplexos insaturados, ou seja, os simplexos críticos.

Para encerrar a discussão acerca do gradiente discreto, precisamos descrever como se construir esse objeto. Dado o complexo simplicial Δ associado a um objeto

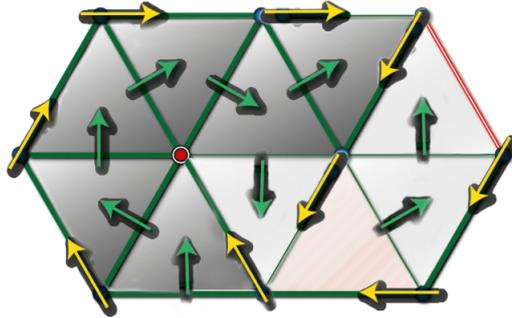


Figura 2.14: Um campo gradiente discreto. As setas amarelas ilustram os \mathcal{V} -paths de dimensão 0 para 1 (vértice-aresta) e as setas verdes ilustram os \mathcal{V} -paths de dimensão 1 para dimensão 2 (aresta-face). Em vermelho destacam-se simplexes críticos (temos um nó-vértice crítico, um nó-aresta crítico e um nó-face crítico).

discreto, a construção do gradiente é dada pelo próximo algoritmo.

Algoritmo 1: CONSTRUIRCAMPOGRADIENTEDISCRETO(Δ)

Entrada: complexo simplicial Δ

Saída: campo vetorial discreto \mathcal{V}

- 1 H = criar diagrama de hasse a partir de Δ ;
 - 2 \mathcal{V} = aplicar algoritmo de casamento^a em H ;
 - 3 **retorna** \mathcal{V} ;
-

^aO algoritmo deve gerar um casamento que não contém \mathcal{V} -path não trivial fechado.

Vale sinalizar que existem diversas formas de se realizar esse casamento e, dependendo de como ele é feito, o resultado pode ser caracterizado como um campo gradiente discreto ou não. O algoritmo de casamento deve garantir a condição de que o casamento produzido mantenha a propriedade acíclica, conforme descrito pela Definição 2.12. Caso contrário, ele seria apenas um campo vetorial discreto.

2.5 Dicionário de Notações e Conceitos

Mencionamos na introdução que buscamos estudar o comportamento de funções definidas em objetos discretos através do gradiente discreto. Os próximos capítulos se encarregam de aplicar os conceitos aqui descritos de modo a fazer essa associação. Pensando nisso, as tabelas a seguir buscam auxiliar o leitor em termos de notações e analogias. A primeira constitui um dicionário que mapeia conceitos de grafos, complexos simpliciais e teoria discreta de Morse. Já a segunda mapeia conceitos do domínio discreto com conceitos do domínio suave.

Grafo Direcionado D	Complexo Simplicial Δ
nós de D	simplexos de Δ
arcos	incidência dos simplexos
$\{\sigma, \tau\} \in A$	$\sigma \prec \tau$
$\{\sigma, \tau\} \in M$	$\sigma \rightarrow \tau$
$\{\sigma, \tau\} \notin M$	$\sigma \nrightarrow \tau$
nó n não está casado	simplexo σ é crítico
casamento em H	campo vetorial discreto em H
casamento sem ciclos alternantes em H	campo gradiente discreto em H

Tabela 2.1: Mapeamento de conceitos entre grafos, complexos simpliciais e teoria discreta de Morse.

Domínio Suave	Domínio Discreto
gradiente suave	gradiente discreto
pontos críticos	simplexos críticos
linhas de fluxo	\mathcal{V} - <i>paths</i>
direção de $-\nabla f$	arcos casados (setas)
órbita fechada	\mathcal{V} - <i>path</i> não trivial fechado

Tabela 2.2: Mapeamento de conceitos entre o domínio suave e o domínio discreto.

3 CASAMENTO GULOSO GEOMÉTRICO

“Inspiration is needed in geometry, just as much as in poetry.”
(Alexander Pushkin)

Este capítulo num primeiro momento visa fazer um estudo mais detalhado do algoritmo de construção do campo gradiente discreto que foi estudado na literatura [26, 21, 1]. Trata-se essencialmente de um algoritmo guloso de casamento em grafos. Sua importância se dá pois a fidelidade geométrica do gradiente discreto está diretamente associada à implementação do casamento.

Toda nossa inspiração na busca de um novo algoritmo de casamento que tente resolver o problema dos simplexos críticos indesejáveis se inicia com um melhor entendimento do que já foi feito. Dentro desse contexto, proporemos novas notações, simplificaremos provas e levantaremos novos resultados.

3.1 Casamento Guloso

Mencionamos na introdução que um algoritmo guloso é utilizado para gerar um gradiente discreto (vide Algoritmo 1). O algoritmo em questão se trata simplesmente de um casamento guloso em grafos. Reescrevemos o seu passo a passo como

mostrado a seguir na forma de pseudocódigo.

Algoritmo 2: CASAMENTO GULOSO(G)

Entrada: grafo ponderado $G = (E, V)$

Saída: conjunto de arestas casadas M

```

1  $M \leftarrow \emptyset$ ;
2 while  $E \neq \emptyset$  do
3    $E_{min} \leftarrow \operatorname{argmin}_{e \in E(G)} \bar{e}$ ;
4    $M \leftarrow M \cup E_{min}$ ;
5    $G \leftarrow G$  após remoção dos vértices extremos a todas as arestas em  $E_{min}$ ;
6 end
7 retorna  $M$ ;

```

A cada iteração, o algoritmo seleciona as arestas de menor peso do grafo criando o conjunto de arestas selecionadas mínimas E_{min} (linha 3), as adiciona no casamento M (linha 4) e por fim remove os vértices que são extremos dessas arestas e, por conseguinte, suas arestas incidentes (linha 5). Dessa forma, cria-se a cada iteração um subgrafo induzido de G pelos vértices que não foram removidos. Esses passos de selecionar arestas, casar e remover vértices se repetem até que todas as arestas em E tenham sido removidas.

Observação 3.1. *Neste momento vale destacar que M só é um casamento se as arestas incidentes entre si (arestas vizinhas) do grafo são livres de empate. Isso significa que em G não há aresta e_1 adjacente a aresta e_2 tal que $\bar{e}_1 = \bar{e}_2$. É fundamental internalizar essa condição suficiente (e não necessária) pois será utilizada ao longo do trabalho.*

Dada a forma como reescrevemos o pseudocódigo do casamento guloso, é importante verificar que $E_{min}(G) = \operatorname{argmin}_{e \in E(G)} \bar{e}$ constitui o conjunto de arestas e em G que apresentam peso \bar{e} mínimo. Dessa forma, somos capazes de propor e definir algumas notações que serão úteis no sentido de simplificar provas relacionadas às garantias teóricas do algoritmo.

Em primeiro lugar, faz-se necessário relembrar que denotamos a função $- : E \rightarrow \mathbb{R}$ avaliada em uma aresta e como o peso dessa aresta \bar{e} . Estamos ratificando isso pois iremos definir uma outra função, nomeada também como $-$, mas definida nos vértices do grafo induzido pelo casamento M .

Sendo assim, para um casamento M em G , definiremos uma função $- : V(G) \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ tal que

$$\bar{v} = \begin{cases} \bar{e}, & \text{se } v \text{ está saturado por } e \text{ em } M \\ \infty, & \text{se } v \text{ não está saturado em } M \end{cases}$$

e chamaremos a função $-$ portanto de *função de saturação*. A função de saturação está bem definida porque M é um casamento, então cada vértice só pode ser saturado por no máximo uma aresta. Além disso, o tipo de casamento M sempre estará implícito no contexto.

Repare que enquanto \bar{e} representa o peso de uma aresta e , \bar{v} representa a função de saturação de um vértice v . Isso será útil mais pra frente dados os resultados teóricos que mostraremos.

Em seguida definiremos $V_a = \{v \in V(G) | \bar{v} \geq a\}$ como o conjunto de vértices de G cuja função de saturação é maior ou igual ao número real a . Considere então $G_a = G[V_a]$ como o subgrafo induzido de G pelo conjunto de vértices V_a . Esse subgrafo induzido contém apenas os vértices cuja função de saturação é maior ou igual ao número real a . Denotaremos portanto o conjunto de vértices e o conjunto de arestas de G_a como $V(G_a) = V_a$ e $E(G_a) = E_a$, respectivamente. Isso implica o próximo lema.

Lema 3.1. *Se H é um subgrafo de G tal que $\forall v \in V(H)$ temos $\bar{v} \geq a$, então H é um subgrafo de G_a .*

Prova. Se H é um subgrafo de G , então $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Além

disso, se $\forall v \in V(H)$ temos que $\bar{v} \geq a$, então $v \in V_a$. Logo, $V(H) \subseteq V_a$. Considere agora uma aresta qualquer $e = \{x, y\} \in E(H)$. É fácil verificar que $\bar{x} \geq a$ e $\bar{y} \geq a$. Isso significa que $x \in V_a$ e $y \in V_a$. Como G_a é subgrafo induzido de G por V_a , segue que $e = \{x, y\} \in G_a$ e, portanto, $E(H) \subseteq E_a$. Logo, H é subgrafo de G_a . \square

É importante notar que, pela definição, G_a é um subgrafo de G onde o peso mínimo das suas arestas vale a . Essas notações são interessantes pois identificam o subgrafo de G no momento em que as arestas de um certo peso serão selecionadas na Etapa [3](#) do casamento. Podemos identificar, assim, a iteração em que o algoritmo se encontra ao nos referirmos a um subgrafo G_a . Por exemplo: vamos considerar o grafo G mostrado a seguir.

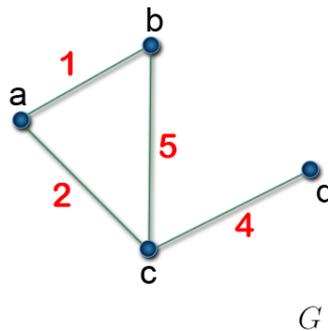


Figura 3.1: Um exemplo de grafo qualquer G com pesos sinalizados em vermelho para cada uma de suas arestas.

O peso mínimo das arestas de G é 1, então o grafo que está sendo considerado na primeira iteração é G_1 (que é propriamente G). Veja a Figura [3.2](#).

Depois de casada a aresta de peso 1, os vértices a e b são removidos do grafo de acordo com o algoritmo, produzindo assim um subgrafo de G_1 . Esse subgrafo agora tem como peso mínimo uma aresta de peso 4 e, portanto, o chamaremos de G_4 . Veja a Figura [3.3](#).

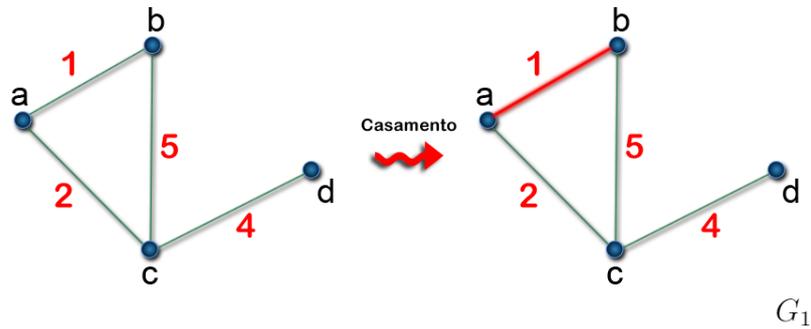


Figura 3.2: Na esquerda temos um grafo cuja aresta de peso mínimo é 1. Portanto o denotaremos como G_1 . A direita temos sinalizada em vermelho a aresta que será casada de acordo com o casamento guloso.

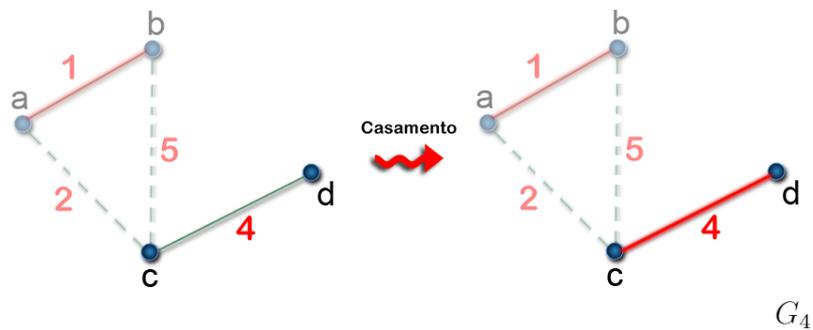


Figura 3.3: Na esquerda temos um grafo cuja aresta de peso mínimo é 4. Portanto o denotaremos como G_4 . A direita temos sinalizada em vermelho a aresta que será casada de acordo com o casamento guloso.

Novamente, a aresta de peso mínimo será casada e seus vértices extremos removidos.

Com esse último exemplo, fica fácil notar também que se uma aresta de peso \bar{e} existe no grafo $G_{\bar{e}}$, mais precisamente, em $E_{\bar{e}}$, então certamente essa aresta está casada. O próximo lema formaliza essa ideia.

Lema 3.2. *Seja M um casamento guloso num grafo G . Se $e \in E_{\bar{e}}$, então $e \in M$.*

Prova. Em $G_{\bar{e}}$, as arestas com menor peso são as arestas de peso igual a \bar{e} . A

Etapa 3 do Algoritmo 2 selecionará todas as arestas de peso mínimo, isto é, todas as arestas de peso igual a \bar{e} (o conjunto $E_{\bar{e}}$). Na Etapa 5, essas arestas selecionadas, que incluem a aresta e , serão casadas. Logo, $e \in M$. \square

3.2 Propriedades

O casamento guloso apresenta algumas propriedades em relação ao seu conjunto de arestas M . Essas propriedades estão fortemente relacionadas a um tipo particular de caminho alternante e serão úteis no sentido de auxiliar diversas provas sobre o gradiente discreto mais para frente.

A princípio, iremos definir através de uma nomeação, alguns casos particulares de caminhos alternantes. Segue a definição do que chamamos de *caminho alternante maximal* junto de alguns exemplos (Figura 3.4).

Definição 3.1. Denotamos como *caminho alternante maximal*, qualquer caminho alternante P tal que se um vértice está saturado, então ele está saturado por uma aresta em P .

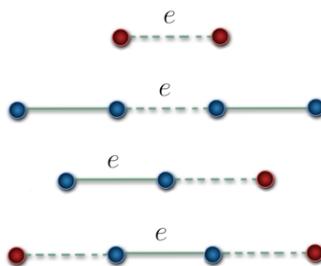


Figura 3.4: Exemplo de caminhos alternantes maximais. Os vértices destacados em vermelho são insaturados e os azuis saturados. As arestas tracejadas não estão casadas e as arestas cheias estão casadas.

Essa última definição deriva diretamente o próximo lema.

Lema 3.3. *Seja $e \in E_{\min}(P)$. Se P é um caminho alternante maximal, então $\forall v \in P$ temos que $\bar{v} \geq \bar{e}$.*

Prova. Considere $e \in E_{\min}(P)$ como uma das arestas de peso mínimo em P . Se P é um caminho alternante maximal, então $\forall v \in P$ temos que v está saturado por uma aresta de P ou v é insaturado, por definição. Desse modo, $\forall v \in P$ segue que $\bar{v} \geq \bar{e}$ ou $\bar{v} = \infty$, respetivamente. \square

Um resultado importante consequente do algoritmo guloso é a noção de ocorrência de arestas de peso mínimo em determinados caminhos alternantes maximais. Por meio do Lema 3.4, podemos afirmar que para qualquer caminho alternante maximal, as arestas de peso mínimo estarão casadas.

Lema 3.4. *Se P é um caminho alternante maximal, então $E_{\min}(P) \subseteq M$.*

Prova. Seja e uma aresta pertencente ao conjunto de arestas de peso mínimo em P , isto é, $e \in E_{\min}(P)$. Se P é um caminho alternante maximal, então $\forall v \in P$ temos que $\bar{v} \geq \bar{e}$ pelo Lema 3.3. Já pelo Lema 3.1, temos que P é um subgrafo de $G_{\bar{e}}$. Em particular $e \in P \subset E_{\bar{e}}$. Finalmente temos que $e \in M$, pelo Lema 3.2. Segue que $E_{\min}(P) \subseteq M$. \square

Observação 3.2. *O caminho alternante maximal P tal que $|P| = 1$ e seus vértices estão insaturados, merece uma certa atenção. Note que esse tipo de construção nunca acontece em um casamento guloso. Apesar de não ser tão intuitivo, note que isso é verificável pelo último teorema.*



Figura 3.5: Exemplo de caminho alternante maximal que nunca é produzido pelo casamento guloso. Vértices vermelhos são insaturados e aresta tracejada está não casada.

3.3 Aplicações no Gradiente Discreto

No Capítulo 1, vimos que utilizaríamos o gradiente discreto como uma forma de se estudar uma função f avaliada nos vértices de um objeto discreto representado por Δ . Já no Capítulo 2, definimos que um gradiente discreto é essencialmente um casamento M em grafos.

Mencionamos também que existem diversos algoritmos que visam propor métodos de construção do gradiente discreto. A grande maioria deles se resume a algoritmos de casamentos gulosos em digrafos ponderados em conjunto com uma escolha de indução dos pesos de f para os arcos de H .

Existem diversas formas de se induzir o peso da função f para os arcos de H (e, desse modo, tornar H um digrafo ponderado) [19, 17, 14, 27, 26, 21]. Nesta dissertação, estamos seguindo a escolha de indução proposta em [26, 21]. Iremos adiante mostrar sua definição e explicar suas características através de exemplos.

Definição 3.2. *Dada uma função f definida nos vértices de um complexo simplicial, o peso induzido por ela nos arcos $\{\sigma, \tau\}$ do seu diagrama de Hasse H é dado por $\overline{\{\sigma, \tau\}} = f(\tau \setminus \sigma)$, onde \setminus constitui a operação de subtração em conjuntos.*

O peso do arco $\{\sigma, \tau\}$ é o peso do vértice $v = \tau \setminus \sigma$. Lembrando o leitor, de acordo com o diagrama de Hasse, σ é faceta de τ . Sendo assim, a operação $\tau \setminus \sigma$ resulta sempre em um vértice v tal que $v \in \tau$ mas $v \notin \sigma$. Deste modo, $\overline{\{\sigma, \tau\}} = f(v)$.

Para facilitar o entendimento, levantaremos dois exemplos. O primeiro está mostrado na Figura 3.6 pelo complexo de dimensão 1, Δ . Considere que a função f avaliada nos vértices de Δ vale 3 e 5, como indicado.

Para encontrar o peso do arco $\{\sigma_1, \tau\}$, por exemplo, teríamos que aplicar a definição dada $\overline{\{\sigma_1, \tau\}} = f(\tau \setminus \sigma_1)$. Ora, basta fazer a subtração dos simplexos do arco: $f(\tau \setminus \sigma_1) = 5$. De forma similar, para encontrar o peso induzido no arco $\{\sigma_2, \tau\}$, bastaria fazer a subtração dos simplexos: $f(\tau \setminus \sigma_2) = 3$. Portanto, $\overline{\{\sigma_1, \tau\}} = 5$ e $\overline{\{\sigma_2, \tau\}} = 3$.

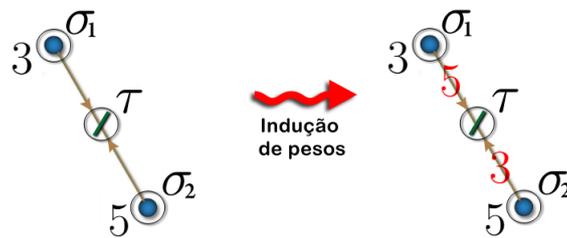


Figura 3.6: Um complexo simplicial Δ de dimensão 1 tendo o peso de seus vértices induzidos para os pesos dos seus arcos.

Vamos considerar um segundo exemplo para fixar a noção de indução. Seja Δ um complexo de dimensão 2 e ilustrado na Figura 3.7. Considere o arco $\{\sigma_1, \tau\}$. Para saber o peso deste arco iremos aplicar definição mais uma vez: $\overline{\{\sigma_1, \tau\}} = f(\tau \setminus \sigma_1) = 3$. O mesmo pode ser feito para os arcos $\{\sigma_2, \tau\}$ e $\{\sigma_3, \tau\}$. Temos que $\overline{\{\sigma_2, \tau\}} = 7$ e $\overline{\{\sigma_3, \tau\}} = 5$.

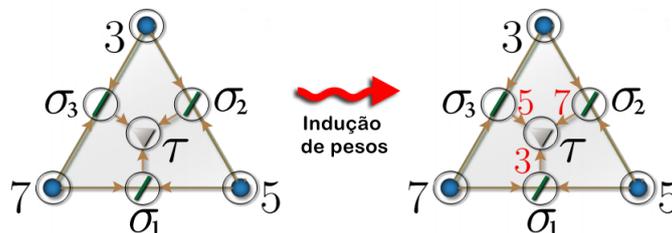


Figura 3.7: Um complexo simplicial Δ de dimensão 2 tendo o peso de seus vértices induzidos para os pesos dos seus arcos.

Informalmente, percebe-se que o peso de cada arco é o peso do vértice que ele aponta visualmente. Por exemplo, observe novamente a Figura 3.6. O arco que aponta para o vértice de peso 5 é o arco $\{\sigma_1, \tau\}$ cujo peso induzido vale 5. Essa forma de indução cria intuição pois tenta atribuir aos arcos (às setas) do diagrama de Hasse, o significado envolvido nos vetores de um campo gradiente suave: sabemos que o vetor gradiente no domínio contínuo aponta para a direção de decrescimento da função, ou seja, aponta para pontos da função de menor valor.

Uma vez definido como atribuir pesos para os arcos do diagrama de Hasse e como que o casamento guloso funciona, podemos enunciar com mais detalhes o algoritmo de construção do gradiente discreto.

Algoritmo 3: CONSTRUIRCAMPOGRADIENTEDISCRETO(Δ, f)

Entrada: complexo simplicial Δ e função $f : V(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}$

Saída: campo gradiente discreto \mathcal{V}

- 1 $H =$ criar diagrama de hasse a partir de Δ ;
 - 2 induzir pesos nos arcos de H através de f ;
 - 3 $\mathcal{V} =$ aplicar algoritmo de casamento ponderado^a em H ;
 - 4 **retorna** \mathcal{V} ;
-

^aO algoritmo deve gerar um casamento que não contém \mathcal{V} - *path* não trivial fechado.

A construção do gradiente discreto através do casamento guloso foi definida. Precisamos agora entender quais são as garantias teóricas que derivam de tal combinação.

Primeiramente iremos expor o porquê do campo vetorial discreto \mathcal{V} associado ao casamento guloso ser de fato um campo gradiente discreto (o que equivale ao gradiente suave no sentido de não ter órbitas fechadas). Em seguida iremos enunciar uma outra noção geométrica para o mesmo: uma noção de fluxo decrescente. O primeiro resultado já é conhecido na literatura para o algoritmo guloso, em particular, e outras construções; nós apenas simplificamos sua prova. Já o segundo, constitui

um resultado novo. Vale ressaltar também que da forma como escrevemos, todos os resultados aqui valem para qualquer dimensão.

Mostrar que o campo vetorial discreto \mathcal{V} associado ao casamento guloso é de fato um campo gradiente discreto, é o mesmo que mostrar que tal algoritmo não gera \mathcal{V} -*path* não trivial fechado (Lema 2.12). Para isso, iremos propor algumas notações que tornarão essa prova simples. As notações e provas que se seguem são contribuições nossas no sentido de simplificar provas presentes na literatura [26, 21].

Considerando a Definição 2.5 e a Definição 2.11, podemos escrever um \mathcal{V} -*path* denotado por

$$\blacktriangleleft \sigma_n \tau_n \sigma_{n-1} \tau_{n-1} \dots \sigma_1 \tau_1 \blacktriangleright$$

como um caminho alternante

$$P = \{\sigma_n, \tau_n\} \{\sigma_{n-1}, \tau_n\} \{\sigma_{n-1}, \tau_{n-1}\} \{\sigma_{n-2}, \tau_{n-1}\} \dots \{\sigma_2, \tau_2\} \{\sigma_2, \tau_1\} \{\sigma_1, \tau_1\}$$

onde n é o número de arcos no caminho (comprimento do caminho). Dessa forma, de acordo com os índices, temos que $\{\sigma_i, \tau_i\} \in M$ e $\{\sigma_{i-1}, \tau_i\} \notin M$. Observe a Figura 3.8.

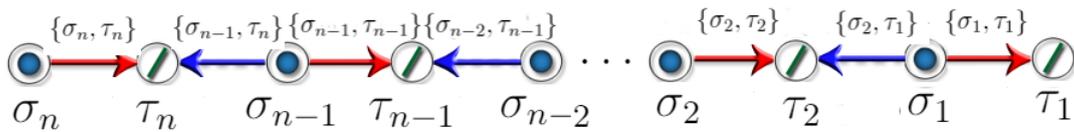


Figura 3.8: Exemplo de \mathcal{V} -*path* construído dada a forma como o denotamos os arcos casados e não casados do seu diagrama de Hasse. Arcos vermelhos estão casados e os azuis não casados.

Iremos definir também como $v_i = \tau_i \setminus \sigma_i$ e $w_i = \tau_i \setminus \sigma_{i-1}$ onde v_i e w_i são vértices (Definição 2.11). Assim, nomearemos como $V_k = \{v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{k+1}\}$ e $W_k = \{w_n, w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_{k+1}\}$ dois conjuntos de vértices.

Sabemos também que $\overline{\{\sigma_i, \tau_i\}} = f(\tau_i \setminus \sigma_i) = f(v_i)$ e $\overline{\{\sigma_{i-1}, \tau_i\}} = f(\tau_i \setminus \sigma_{i-1}) = f(w_i)$ (Definição 3.2). Dito isso, vamos definir $f(\sigma)$ como o conjunto de pesos associados aos vértices de σ , ou seja, $f(\sigma) = \{f(v) | \forall v \in \sigma\}$. Dessa forma, $f(V_n)$ é o conjunto dos pesos das arestas casadas do \mathcal{V} -path e $f(W_n)$ é o conjunto dos pesos das arestas não casadas do \mathcal{V} -path.

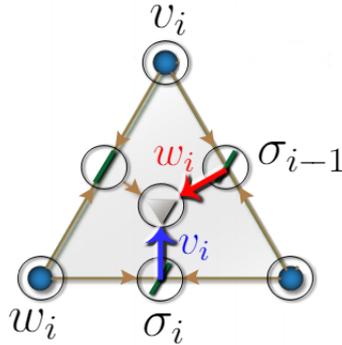


Figura 3.9: Em azul destaca-se um arco casado com peso $f(v_i)$ e em vermelho destaca-se um arco não casado com peso $f(w_i)$.

Por fim, note que dada a forma como escrevemos um \mathcal{V} -path em termos de um caminho alternante, as igualdades de conjuntos $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_i = v_i$ e $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_i = w_i$, se verificam. Além disso, temos também que $\sigma_{i-1} = (\sigma_i \cup v_i) \setminus w_i$. Com essas propriedades, o próximo lema é comprovado.

Lema 3.5. *Para um caminho alternante qualquer, digamos*

$$P = \{\sigma_n, \tau_n\} \{\sigma_{n-1}, \tau_n\} \{\sigma_{n-1}, \tau_{n-1}\} \{\sigma_{n-2}, \tau_{n-1}\} \dots \{\sigma_1, \tau_1\}$$

temos que $\sigma_k \setminus \sigma_n = V_k \setminus W_k$ e $\sigma_n \setminus \sigma_k = W_k \setminus V_k$ para $0 \leq k \leq n$.

Prova. Indução simples nas propriedades $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_i = v_i$, $\sigma_{i-1} \setminus \sigma_i = w_i$ e $\sigma_{i-1} = (\sigma_i \cup v_i) \setminus w_i$. □

Com esses conceitos em mente, o teorema que associa o casamento guloso com o gradiente discreto é facilmente comprovado.

Teorema 3.1. *O campo vetorial discreto \mathcal{V} associado ao casamento guloso M no diagrama de Hasse H é um campo gradiente discreto.*

Prova. Suponha por contradição que \mathcal{V} não é um campo gradiente discreto. Portanto, pela Definição 2.12, existe um \mathcal{V} – *path* não trivial fechado denotado por $P = \{\sigma_n, \tau_n\}\{\sigma_{n-1}, \tau_n\}\{\sigma_{n-1}, \tau_{n-1}\}\{\sigma_{n-2}, \tau_{n-1}\} \dots \{\sigma_1, \tau_1\}$ onde $n \geq 2$, $\sigma_1 = \sigma_n$ e $\tau_1 = \tau_n$. P , por ser um ciclo alternante, é também um caminho alternante maximal, então $E_{min}(P) \subset M$ (Lema 3.4). Como $f(V_n)$ é o conjunto de pesos das arestas casadas em P e $f(W_n)$ é o conjunto de pesos das arestas não casadas em P , temos que $\min f(V_n \cup W_n) \in f(V_n \setminus W_n) = f(\sigma_1 \setminus \sigma_n)$ (Lema 3.5). Ora, como $\sigma_1 = \sigma_n$, então $f(\sigma_n \setminus \sigma_1) = \emptyset$. Contradição. \square

Dando seguimento às garantias teóricas, o próximo teorema que será enunciado garante uma noção de fluxo decrescente em um \mathcal{V} – *path* e constitui uma contribuição nossa. Essencialmente, queremos mostrar que a partir de um simplexo qualquer, ao seguir o \mathcal{V} – *path* até o simplexo crítico, então este último é menor que qualquer outro simplexo no caminho. Mas para isso, precisamos saber como ordenar simplexos. A ordem lexicográfica foi uma das primeiras formas utilizadas de se construir gradientes discretos e constitui uma maneira natural de se comparar simplexos [1].

Definição 3.3. $\sigma <_{lex} \sigma'$ se e somente se $\min f((\sigma \setminus \sigma') \cup (\sigma' \setminus \sigma)) \in f(\sigma \setminus \sigma')$.

Teorema 3.2. *Se $P = \{\sigma_n, \tau_n\}\{\sigma_{n-1}, \tau_n\}\{\sigma_{n-1}, \tau_{n-1}\}\{\sigma_{n-2}, \tau_{n-2}\} \dots \{\sigma_1, \tau_1\}\{\tau_1, \sigma_0\}$ representa um \mathcal{V} – *path* e σ_0 é crítico, então $\sigma_0 <_{lex} \sigma_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Prova. Seja $P_i = \{\sigma_i, \tau_i\}\{\sigma_{i-1}, \tau_i\}\{\sigma_{i-1}, \tau_{i-1}\}\{\sigma_{i-2}, \tau_{i-2}\} \dots \{\sigma_1, \tau_1\}\{\tau_1, \sigma_0\}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sabemos que σ_0 é crítico, então P_i é um caminho alternante maximal para todo $1 \leq i \leq n$. Pelo Lema 3.4, temos que $E_{min}(P_i) \subset M$. Análogo ao último lema,

como $f(V_i)$ é o conjunto de pesos das arestas casadas em P_i e $f(W_i)$ é o conjunto de pesos das arestas não casadas em P , temos que $\min f(V_i \cup W_i) \in f(V_i \setminus W_i)$. Em termos de conjuntos, isso significa que $\min f((V_i \setminus W_i) \cup (W_i \setminus V_i)) \in f(V_i \setminus W_i)$. Pelo Lema 3.5 e sabendo que σ_0 é crítico, segue diretamente que $\min f((\sigma_0 \setminus \sigma_i) \cup (\sigma_i \setminus \sigma_0)) \in f(\sigma_0 \setminus \sigma_i)$, isto é, $\sigma_0 <_{lex} \sigma_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. \square

Ainda no Teorema 3.2, vale mencionar que se σ_0 não fosse crítico, então qualquer P_i não seria alternante maximal. Dessa forma, não poderíamos chamar o Lema 3.5 em sua prova. Essa característica de certo modo indica que um \mathcal{V} – *path* é decrescente de uma forma global ao invés de local. Em outras palavras, há garantia que o simplexo crítico onde o \mathcal{V} – *path* se encerra é o menor de todos os simplexos no caminho, no entanto, não podemos dizer o mesmo para qualquer caminho intermediário de simplexos nesse \mathcal{V} – *path* (eles podem crescer e decrescer).

3.4 Exemplos Computacionais

Até aqui mostramos as propriedades do casamento guloso e suas implicações no que tange a construção do gradiente discreto. Percebemos que alguns dos critérios de fidelidade geométrica que definimos na introdução são alcançados dada a construção. Nossos resultados, portanto, são teóricos e já foram explicitados no decorrer das seções anteriores. Não somente, é importante destacar que valem para qualquer dimensão.

Vamos dar seguimento ao texto mostrando alguns exemplos práticos aplicados a triangulações planares (complexos simpliciais de dimensão 2, em particular) apenas por motivos de ilustração; constituem essencialmente execuções do sistema de criação de gradiente discreto que implementamos. As próximas imagens que se

seguem constituem quadros comparativos entre o campo vetorial de um gradiente no domínio suave em contraste com o campo gradiente discreto. Isso é feito para uma série de funções diferentes de duas variáveis aplicadas em um objeto discreto.

Primeiramente iremos apresentar as funções que foram utilizados para exemplificar a aplicação do algoritmo de construção do gradiente discreto; elas estão ilustradas na Figura 3.10 e seus domínios foram definidos como $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$.

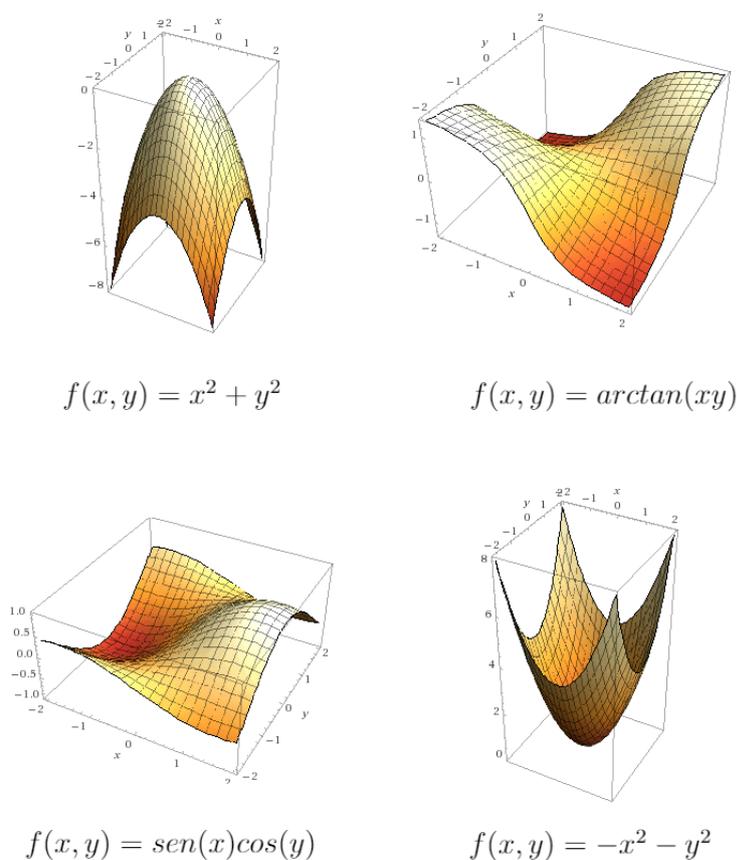


Figura 3.10: O gráfico de quatro funções de duas variáveis. Temos na imagem, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = -x^2 - y^2$, $f(x, y) = \text{sen}(x)\cos(y)$ e $f(x, y) = \arctan(xy)$; todas elas definidas tal que $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$

As funções que citamos foram avaliadas nos vértices de uma triangulação

planar em forma de *grid*¹. Esse é o objeto discreto que será a entrada do Algoritmo 1 para cada uma das funções. O casamento utilizado é o guloso (Algoritmo 2).

Para todos os resultados que se seguem, iremos denotar através de círculos vermelho, amarelo e verde, os pontos críticos de máximo, de sela e de mínimo, respectivamente, no gradiente suave. Utilizando as mesmas cores, denotaremos também por meio de circunferências vermelha, amarela e verde, os simplexos críticos que representam máximos (nó-face), selas (nó-aresta) e mínimos (nó-vértice) no gradiente discreto.

Ponto Crítico	Simplexo Crítico
 Máximo	 Nó-Face
 Sela	 Nó-Aresta
 Mínimo	 Nó-Vértice

Figura 3.11: Legenda de pontos críticos e simplexos críticos.

Vamos ao primeiro resultado. Nele, avaliamos a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ nos vértices da triangulação. Do lado esquerdo da Figura 3.12 mostramos o campo vetorial do gradiente no domínio contínuo e temos um ponto crítico destacado em verde (o ponto de mínimo do paraboloide). Agora observe o lado direito da figura; note que um simplexo crítico foi capturado e representa também um mínimo (que é um nó-vértice insaturado no casamento). Além disso, as setas no gradiente discreto (que são os arcos casados) estão orientadas no fluxo de decrescimento da função assim como no gradiente suave. Convidamos o leitor a observar a semelhança entre os dois campos de acordo com o que foi mencionado.

O segundo exemplo que é tomado representa a função $f(x, y) = \arctan(xy)$. Novamente, os pontos críticos foram localizados nas posições corretas (um ponto de sela no meio do gráfico) e o gradiente discreto se aproxima do fluxo do gradiente

¹Um grid triangular, também chamada de grid, é uma estrutura formada pela decomposição regular do plano por meio de triângulos equiláteros [31].

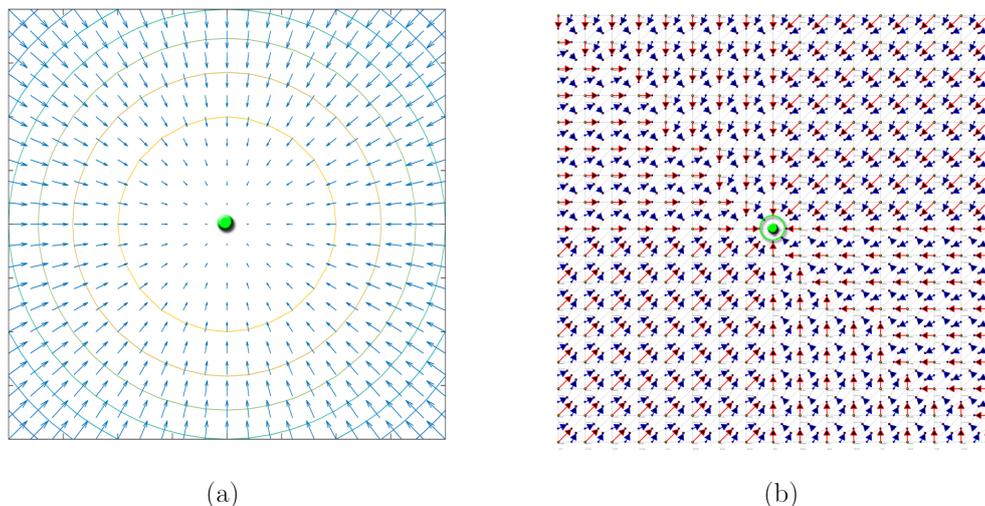


Figura 3.12: A figura (a) denota o campo vetorial do gradiente no domínio suave enquanto que a figura (b) mostra o campo gradiente discreto. A função em questão é $f(x, y) = x^2 + y^2$.

suave. No entanto, note que no bordo do caso discreto temos alguns outros simplexos críticos sendo identificados incorretamente, mais precisamente, dois simplexos críticos mínimos. Isso na verdade não constitui um erro, é mais uma questão de bordo e limites de fronteiras.

O terceiro exemplo contempla uma superfície que contém mais pontos críticos que os últimos exemplos dados os domínios; estamos tratando a função $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$. Na figura temos simplexos críticos localizados nas posições corretas e representando bem a natureza dos pontos críticos no contínuo (um máximo, um mínimo e duas selas). Novamente, não precisamos nos preocupar com os simplexos críticos do bordo.

Por fim, tomemos a função $f(x, y) = -x^2 - y^2$. De acordo com a nossa análise, o fluxo do gradiente discreto está de acordo com o fluxo do gradiente suave. No entanto, percebemos que, excetuando os simplexos críticos do bordo, um par de

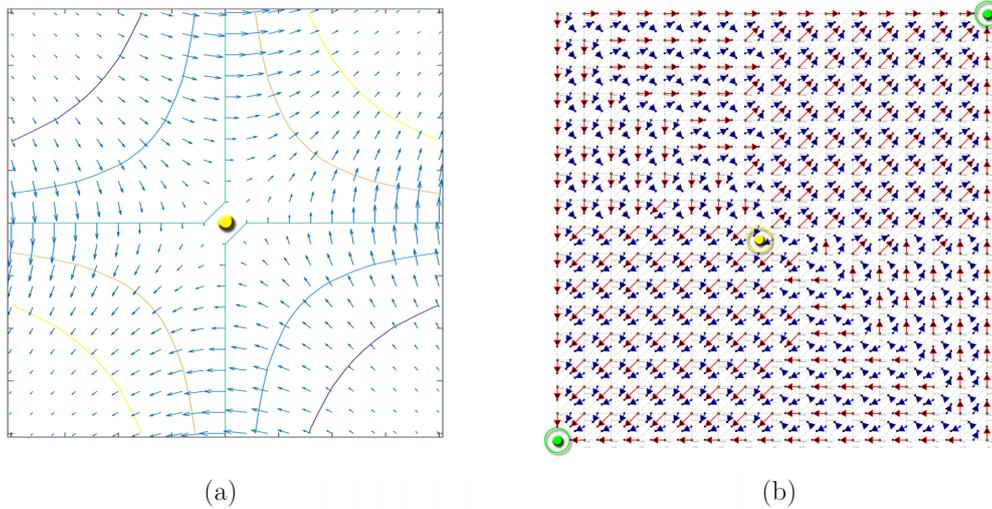


Figura 3.13: A figura (a) denota o campo vetorial do gradiente no domínio suave enquanto que a figura (b) mostra o campo gradiente discreto. A função em questão é $f(x, y) = \arctan(xy)$.

simplexos críticos indesejáveis é capturado no gradiente. Note que perto do simplexo crítico de máximo, existe um par de simplexos críticos que não representa a função no contínuo. Gostaríamos de encerrar este capítulo chamando a atenção para essa ocorrência.

De acordo com nossos resultados computacionais, percebemos que tais simplexos críticos indesejáveis não são raros. Acreditamos que tais ocorrências podem estar associadas à estrutura do objeto discreto, ao próprio algoritmo de casamento guloso ou até mesmo à presença de perturbações nos dados amostrados. De qualquer forma, nos próximos dois capítulos iremos tentar entender melhor esse problema e propor alternativas de resolução.

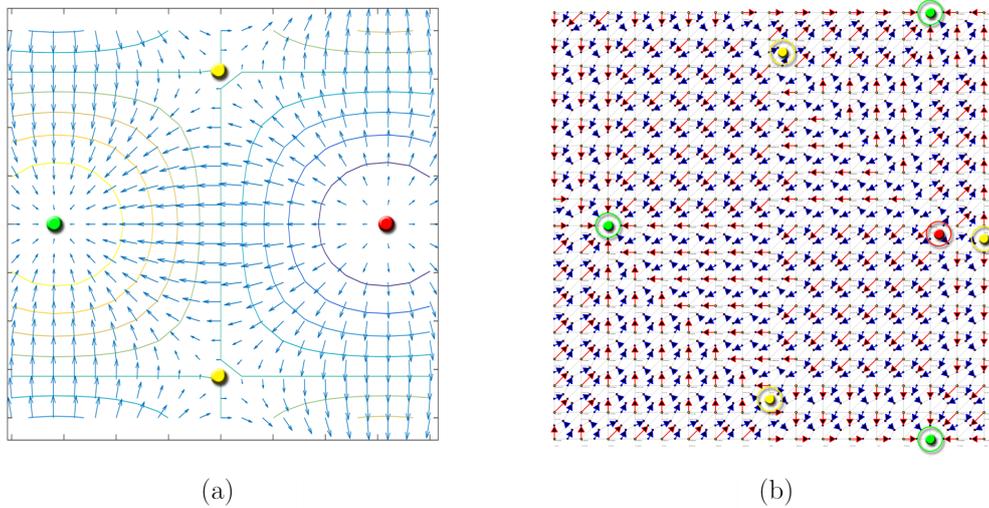


Figura 3.14: A figura (a) denota o campo vetorial do gradiente no domínio suave enquanto que a figura (b) mostra o campo gradiente discreto. A função em questão é $f(x, y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y)$.

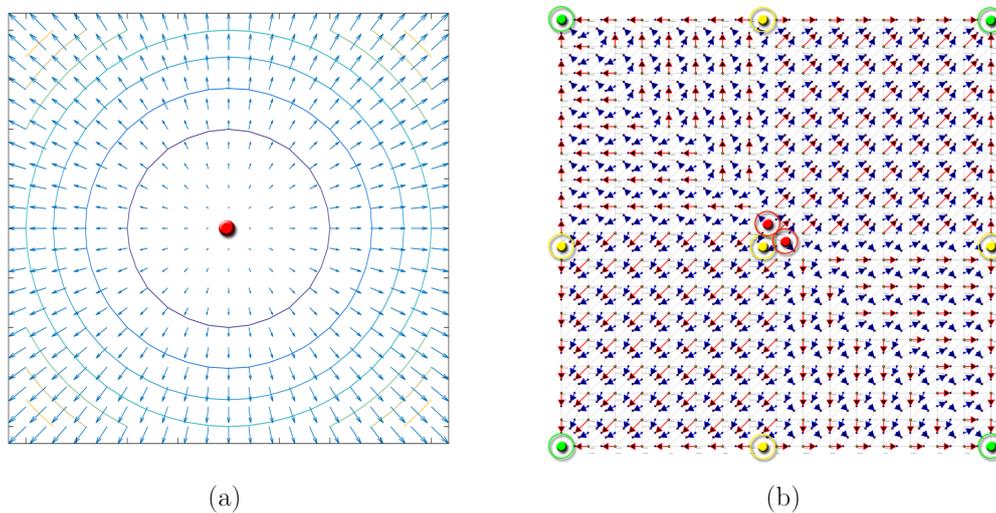


Figura 3.15: A figura (a) denota o campo vetorial do gradiente no domínio suave enquanto que a figura (b) mostra o campo gradiente discreto. A função em questão é $f(x, y) = -x^2 - y^2$.

4 SUAVIZAÇÃO DO GRADIENTE DISCRETO

“Greed, in the end, fails even the greedy.” (Cathrin Louis)

Vimos no capítulo anterior que o casamento guloso pode gerar um gradiente discreto que apresenta simplexos críticos indesejáveis. Levantamos a possibilidade desse problema estar associado ao próprio algoritmo de casamento.

Pensando nisso, iremos neste capítulo buscar entender como esses simplexos críticos indesejados são construídos. Depois disso, iremos propor um novo algoritmo de casamento visando reduzir a ocorrência desses simplexos críticos.

4.1 Ruído no Gradiente Discreto

Retomemos o exemplo no final do Capítulo 3. Temos, na Figura 4.1, uma aproximação do campo gradiente discreto da função $f(x, y) = -x^2 - y^2$ (Figura 3.15).

Em termos de estrutura, note que os simplexos críticos indesejáveis constituem essencialmente caminhos de aumento de comprimento igual a 3 no casamento do diagrama de Hasse. Chamaremos este tipo de estrutura de *ruído do gradiente discreto* ao longo da dissertação.

Definição 4.1. *Denotaremos como ruído do gradiente discreto os caminhos de aumento de comprimento 3 presentes em um casamento de um diagrama de Hasse.*

Mas quando será que o algoritmo constrói esse tipo de estrutura? Em um

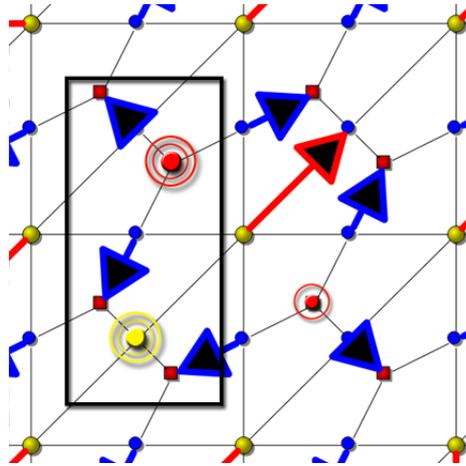


Figura 4.1: Aproximação do gradiente discreto associado à função $f(x, y) = -x^2 - y^2$. Destacamos na imagem a ocorrência de simplexos críticos indesejáveis.

primeiro momento, é fácil verificar que esses caminhos de aumento de tamanho 3 podem ser produzidos pelo algoritmo de casamento guloso quando a aresta central de uma árvore de largura 3 é casada. Tomemos como exemplo a Figura 4.2 (a). Nela, temos um grafo G_0 que constitui uma árvore de largura 3. A aresta central e é tal que $\bar{e} = 0$. Se M é um casamento guloso, de acordo com o Lema 3.4, $e \in M$ (Figura 4.2 (b)).

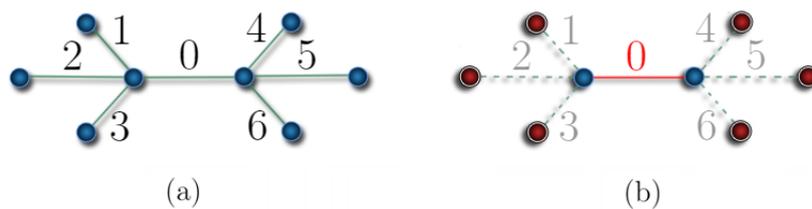


Figura 4.2: Casamento Guloso aplicado ao grafo G_0 . Os vértices em vermelho denotam vértices insaturados no grafo.

É importante observar que o casamento da aresta e gerou diretamente seis vértices insaturados. Pensando nisso, decidimos criar um algoritmo de casamento que evita casar arestas que certamente irão resultar em caminhos de aumento de tamanho 3 no grafo e, portanto, produzir menos vértices insaturados.

Isso é feito através de uma condição local que evita tomar a decisão gulosa: se e é aresta central de uma árvore T de largura 3 onde T é subgrafo de $G_{\bar{e}}$, então não case e . Por conta disso, chamaremos esse algoritmo de *casamento quase guloso*.

4.2 Casamento Quase Guloso

Um casamento quase guloso trata-se basicamente de uma alteração do casamento guloso apresentado no Capítulo 3 contemplando uma condição adicional. Essa condição evita que certas escolhas de arestas para casar sejam tomadas em detrimento a diminuir o número de vértices insaturados que se encontram próximos no grafo (em particular, vértices que estão separados por uma distância de três arestas). Vejamos o algoritmo.

Algoritmo 4: CASAMENTOQUASEGULOSO(G)

Entrada: grafo ponderado $G = (E, V)$

Saída: conjunto de arestas casadas M

```

1  $M \leftarrow \emptyset$ ;
2 while  $E \neq \emptyset$  do
3    $E_{min} \leftarrow \operatorname{argmin}_{e \in E(G)} \bar{e}$  tal que  $e$  não é aresta central de uma árvore de
   largura 3;
4    $M \leftarrow M \cup E_{min}$ ;
5    $G \leftarrow G$  após remoção dos vértices extremos a todas as arestas em  $E_{min}$ ;
6 end
7 retorna  $M$ 

```

Assim como no casamento guloso, o algoritmo que acabamos de apresentar, a cada iteração, seleciona as arestas de menor peso do grafo - exceto aquelas que são a aresta central de uma árvore de largura 3 - criando o conjunto de arestas selecionadas mínimas E_{min} (linha 3). Depois, as adiciona no casamento M (linha 4) e então remove os vértices que são extremos a essas arestas (linha 5). Dessa forma,

cria-se a cada iteração um subgrafo de G . Esses passos se repetem até que todas as arestas em E tenham sido removidas.

A mudança que propomos no casamento quase guloso está presente na Etapa [3](#). Ao invés de a cada iteração selecionarmos todas as arestas de peso mínimo, no nosso novo algoritmo selecionamos o conjunto de arestas de peso mínimo do grafo que não constituem a aresta central de uma árvore de largura 3. Dessa forma, estaríamos impedindo algumas arestas de casar.

Dada a modificação do casamento, faz-se necessário reescrever os resultados associados ao novo algoritmo que dependem da condição adicional. O próximo lema é o primeiro deles; uma implicação direta do Algoritmo [4](#).

Lema 4.1. *Seja M um casamento quase guloso num grafo G . Se $e \in G_{\bar{e}}$, então $e \notin M$ se e somente se a aresta e constitui a aresta central de uma árvore de largura 3 em $G_{\bar{e}}$.*

Um outro resultado associado à condição local do novo algoritmo, diz que mesmo se uma aresta foi impedida de casar, seus vértices estarão saturados no casamento quase guloso.

Lema 4.2. *Seja M um casamento quase guloso num grafo G . Se $e \in G_{\bar{e}}$, os vértices de e estão saturados por M .*

Prova. Seja $e = \{x, y\} \in G_{\bar{e}}$. Se $e \in M$, a prova é trivial. Considere então que $e \notin M$. Pelo Lema [4.1](#), e é a aresta central de uma árvore T de largura 3 em $G_{\bar{e}}$. Suponha por contradição que pelo menos um dos vértices de e é insaturado em M , digamos o vértice y . Considere então a aresta $e_y = \{y, z\}$ incidente a y . É fácil ver que $d(z) = 1$ em $G_{\bar{e}}$ (Figura [4.3](#)).

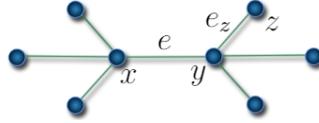


Figura 4.3: Árvore de largura 3 com aresta central denotada por e .

Se $\bar{e} < \bar{e}_z$, então $G_{\bar{e}_z}$ é subgrafo de $G_{\bar{e}}$ e, portanto, pelo Lema 4.1, $e_z \in M$ já que e_z em $G_{\bar{e}_z}$ não constitui aresta central de árvore de largura 3. Isso significa que y está saturado em M . Agora, se $\bar{e} > \bar{e}_z$ então $G_{\bar{e}}$ é subgrafo de $G_{\bar{e}_z}$ e, assim, pelo Lema 4.1, $e_z \in M$ pois e_z em $G_{\bar{e}_z}$ não constitui aresta central de árvore de largura 3 também. Isso implica que y está saturado em M . Dos dois modos, y está saturado. Contradição. \square

4.3 Propriedades

Assim como o casamento guloso, o nosso novo algoritmo também apresenta garantias teóricas que irão nos auxiliar a provar, mais para frente, conceitos do que definimos como fidelidade geométrica para o gradiente discreto. O resultado que se segue se assemelha ao casamento guloso no sentido de determinar que em caminhos alternantes maximais a aresta de peso mínimo se encontra casada. Vamos a essa implicação do casamento quase guloso.

Lema 4.3. *Seja M um casamento quase guloso num grafo G . Se P é um caminho alternante maximal e temos que $e \in E_{\min}(P)$, então $e \in M$ exceto quando $|P| = 3$ com duas arestas casadas em M .*

Prova. Seja $e \in E_{\min}(P)$. Como P é um caminho alternante maximal, então pelo Lema 3.3, $\forall v \in P$ temos que $\bar{v} \geq \bar{e}$. Já pelo Lema 3.1, P é um subgrafo de $G_{\bar{e}}$. Em particular $e \in P \subseteq E_{\bar{e}}$.

1. Seja $|P| \leq 3$. Suponha, por contradição, que $e \notin M$. É fácil verificar que toda aresta que não está em M tem um vértice insaturado para qualquer caminho alternante maximal tal que $|P| \leq 3$, exceto quando $|P| = 3$ com duas arestas casadas em M (veja Figura 4.3).

Então se $e \in E_{\bar{e}}$ e pelo menos um dos seus vértices é insaturado por M , temos uma contradição pelo Lema 4.2.

2. Seja $|P| > 3$. É trivial verificar que para qualquer aresta e em P , e não é a aresta central de uma 3-árvore em $G_{\bar{e}}$. Então temos que $e \in M$, pelo Lema 4.1.

□

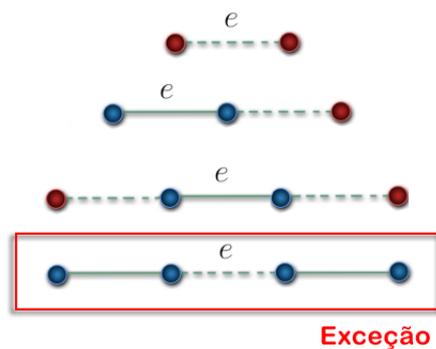


Figura 4.4: Possibilidades de caminhos alternantes maximais com $|P| \leq 3$. Vértices saturados são denotados em azul e insaturados em vermelho. Arestas casadas estão sinalizadas por linhas cheias e arestas não casadas por linhas tracejadas.

Observação 4.1. *Assim como no casamento guloso, o caminho alternante maximal P tal que $|P| = 1$ com seus vértices insaturados, merece destaque. Note que esse tipo de construção nunca acontece em um casamento quase guloso. Isso é verificável pelo último teorema.*

Os próximos resultados que veremos estabelecem uma relação entre os dois algoritmos de casamento (do capítulo anterior e deste capítulo). Eles indicam quais

as potenciais diferenças entre o casamento guloso e quase guloso. No primeiro iremos observar tal diferença em termos de estruturas e no segundo em termos da quantidade de vértices insaturados.

Teorema 4.1. *Seja M_g um casamento guloso e M_q um casamento quase guloso. $M_g \Delta M_q$ é um conjunto, possivelmente vazio, de caminhos de tamanho 3 aonde as arestas externas estão em M_q . A operação denotada por Δ significa a diferença simétrica dos conjuntos.*

Prova. Seja $H = G[M_g \Delta M_q]$ o subgrafo induzido pelos vértices das arestas da diferença simétrica entre os dois casamentos. Cada vértice de H tem grau 1 ou 2 em H , uma vez que ele pode ser extremo de no máximo uma aresta de M_q e uma aresta de M_g . Então cada componente conexa de H é: ou um ciclo par com arestas alternando em M_g e M_q , ou um caminho com arestas alternando em M_g e M_q .

1. Assuma por contradição que uma componente conexa de H é um ciclo par C com arestas alternando em M_g e M_q . Sabemos que, desse modo, C é um caminho alternante maximal. Tome uma das arestas de menor peso desse ciclo e a denote como $e = \operatorname{argmin}_{e \in E(C)} \bar{e}$. Pelo Lema 3.4 e pelo Lema 4.3, $e \in M_g$ e $e \in M_q$, respectivamente. Contradição pois assumimos que C é um ciclo onde as arestas estão alternando em M_g e M_q .
2. Assuma que uma componente conexa de H é um caminho P com arestas alternando em M_g e M_q . P portanto constitui caminho alternante maximal. Tome uma das arestas de menor peso desse caminho e a denote como $e = \operatorname{argmin}_{e \in E(P)} \bar{e}$. Pelo Lema 3.4, temos que $e \in M_g$. Em contrapartida, o Lema 4.3 assegura que $e \in M_q$ exceto quando $|P| = 3$ com duas arestas casadas em M_q .

É fácil verificar então que as componentes conexas de $H = G[M_g \Delta M_q]$ podem constituir apenas caminhos alternantes de tamanho 3 cujas arestas externas estão em M_q (Figura 4.5).



Figura 4.5: Exemplo de componente conexa do grafo $H = G[M_g \Delta M_q]$. Em azul temos uma aresta presente no casamento M_g e em verde arestas presentes no casamento M_q .

□

Corolário 4.1.1. *Se M_g é um casamento guloso em um grafo G e M_q um casamento quase guloso também em G , então $|M_q| \geq |M_g|$.*

Prova. Pelo lema anterior, temos que o subgrafo $H = G[M_g \Delta M_q]$, induzido pelos vértices das arestas da diferença simétrica entre os dois casamentos, é vazio ou composto por componentes conexas particulares. Essas componentes são essencialmente caminhos de tamanho 3 onde as duas arestas externas estão em M_q e a aresta central está em M_g . Isso significa que se $\omega(H)$ representa o número de componentes conexas de H , então $|M_q| = |M_g| + \omega(H)$. Portanto, $|M_q| \geq |M_g|$. □

Esse resultado indica que o número de componentes conexas $\omega(H)$ representa exatamente o número de vezes em que a condição do casamento quase guloso foi atendida, ou seja, o número de vezes que uma aresta foi deixada de casar de forma gulosa. Não somente, é importante notar que todos os outros simplexos críticos do gradiente discreto produzidos pelo casamento guloso são exatamente os mesmos do casamento quase guloso. Sendo assim, ambos os resultados são muito próximos, diferindo apenas em termos de ruídos do gradiente discreto.

4.4 Aplicações no Gradiente Discreto

Nesta seção iremos mostrar os resultados que fazem do casamento quase guloso um melhoramento do casamento guloso quando se pretende reduzir o número de ruídos do gradiente. Nesse sentido, o Teorema 4.1 e o Corolário 4.1.1 já criam intuição: quando combinados, fica claro perceber que o ruído do gradiente discreto pode ser removido através da construção quase guloso.

No entanto, isso não é suficiente. Faz-se necessário manter alguns dos critérios geométricos que definimos na introdução. Iremos mostrar com os próximos dois resultados que a construção feita por meio do casamento quase guloso gera, de fato um gradiente discreto e que a noção de decrescimento relacionada aos \mathcal{V} - *path* também é assegurada. As provas são praticamente idênticas às encontradas nos Teoremas 3.1 e 3.2; a diferença encontra-se apenas na aplicação do Lema 3.4 e Lema 4.3.

Teorema 4.2. *O campo vetorial discreto \mathcal{V} associado ao casamento quase guloso M no diagrama de Hasse H é um campo gradiente discreto.*

Prova. Suponha por contradição que \mathcal{V} não é um campo gradiente discreto. Portanto, pela Definição 2.12, existe um \mathcal{V} - *path* não trivial fechado denotado por $P = \{\sigma_n, \tau_n\}\{\sigma_{n-1}, \tau_n\}\{\sigma_{n-1}, \tau_{n-1}\}\{\sigma_{n-2}, \tau_{n-1}\} \dots \{\sigma_1, \tau_1\}$ onde $n \geq 2$, $\sigma_1 = \sigma_n$ e $\tau_1 = \tau_n$. P , por ser um ciclo alternante, é também um caminho alternante maximal, então $E_{min}(P) \subset M$, exceto quando $|P| = 3$ com duas arestas casadas (Lema 4.3) - o que não é o caso, afinal, uma árvore é um grafo acíclico. Como $f(V_n)$ é o conjunto de pesos das arestas casadas em P e $f(W_n)$ é o conjunto de pesos das arestas não casadas em P , temos que $\min f(V_n \cup W_n) \in f(V_n \setminus W_n) = f(\sigma_1 \setminus \sigma_n)$ (Lema 3.5). Ora, como $\sigma_1 = \sigma_n$, então $f(\sigma_n \setminus \sigma_1) = \emptyset$. Contradição. \square

Teorema 4.3. *Se $P = \{\sigma_n, \tau_n\}\{\sigma_{n-1}, \tau_n\}\{\sigma_{n-1}, \tau_{n-1}\}\{\sigma_{n-2}, \tau_{n-2}\} \dots \{\sigma_1, \tau_1\}\{\tau_1, \sigma_0\}$*

representa um \mathcal{V} -path e σ_0 é crítico, então $\sigma_0 <_{lex} \sigma_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Prova. Seja $P_i = \{\sigma_i, \tau_i\}\{\sigma_{i-1}, \tau_i\}\{\sigma_{i-1}, \tau_{i-1}\}\{\sigma_{i-2}, \tau_{i-2}\} \dots \{\sigma_1, \tau_1\}\{\tau_1, \sigma_0\}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Sabemos que σ_0 é crítico, então P_i é um caminho alternante maximal para todo $1 \leq i \leq n$. Pelo Lema 4.3, temos que $E_{min}(P_i) \subset M$, exceto quando $|P_i| = 3$ com duas arestas casadas - o que não é o caso, afinal, $|P_i|$ é par. Análogo ao último lema, como $f(V_i)$ é o conjunto de pesos das arestas casadas em P_i e $f(W_i)$ é o conjunto de pesos das arestas não casadas em P , temos que $\min f(V_i \cup W_i) \in f(V_i \setminus W_i)$. Em termos de conjuntos, isso significa que $\min f((V_i \setminus W_i) \cup (W_i \setminus V_i)) \in f(V_i \setminus W_i)$. Pelo Lema 3.5 e sabendo que σ_0 é crítico, segue diretamente que $\min f((\sigma_0 \setminus \sigma_i) \cup (\sigma_i \setminus \sigma_0)) \in f(\sigma_0 \setminus \sigma_i)$, isto é, $\sigma_0 <_{lex} \sigma_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. \square

4.5 Exemplos Computacionais

Mais uma vez, gostaríamos de destacar que o foco do trabalho foi teórico. Os nossos resultados referentes a esse capítulo foram mostrados ao longo das seções anteriores através dos lemas e teoremas e valem para qualquer dimensão. Decidimos incluir essa seção apenas para mostrar algumas execuções do sistema que implementamos que constrói um campo gradiente discreto de acordo com o casamento em questão.

Com o algoritmo bem definido e as garantias geométricas provadas, nosso próximo passo é ver o casamento quase guloso aplicado na prática. Os resultados são muito parecidos com os resultados do Capítulo 3. Dadas as nossas garantias geométricas que comparam o casamento guloso com o quase guloso, isso não é uma surpresa. Em alguns dos casos, os gradientes discretos resultantes vão diferir em

relação aos ruídos e ao número de simplexes críticos insaturados.

Assim como no capítulo anterior, os exemplos computacionais foram realizados através de triangulações planares (complexos simpliciais de dimensão 2) em forma de grid.

O primeiro resultado é mostrado na Figura 4.6. Nele retomamos o exemplo que motiva a noção de ruído no gradiente. Do lado esquerdo temos o gradiente discreto produzido pelo casamento guloso enquanto que do lado direito temos o gradiente discreto produzido pelo casamento quase guloso. A função avaliada nos vértices da triangulação é $f(x, y) = -x^2 - y^2$ e novamente o domínio é dado por $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$.

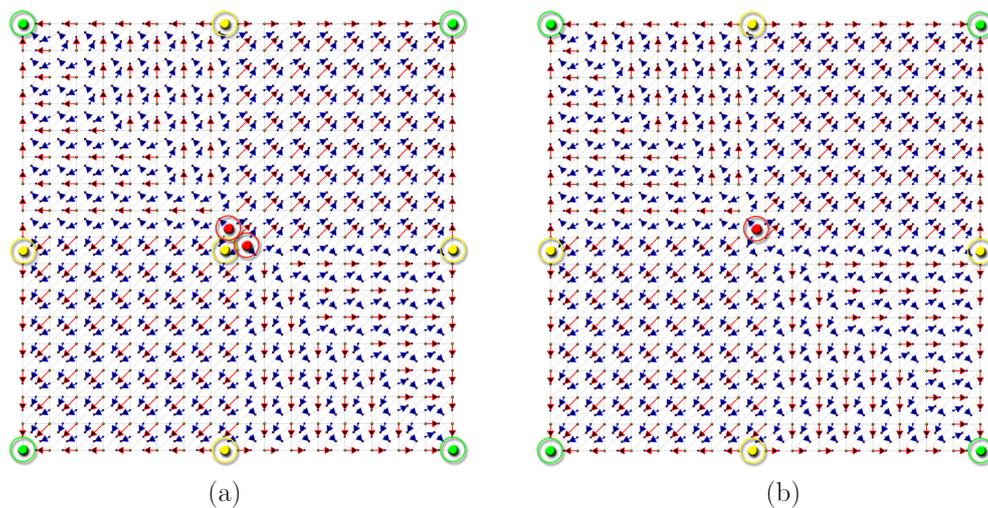


Figura 4.6: Na imagem da esquerda temos o gradiente discreto produzido pelo casamento guloso enquanto que na direita temos o gradiente discreto produzido pelo casamento quase guloso. A função avaliada nos vértices da triangulação é $f(x, y) = -x^2 - y^2$.

Ainda na Figura 4.6, note que o casamento quase guloso não produziu o ruído presente no gradiente discreto construído pelo casamento guloso. Esse tipo de

resultado sugere que, da forma como implementamos o novo algoritmo, ele age de modo a suavizar o gradiente discreto; afinal de contas, ele elimina ruído do gradiente discreto.

Pensando nesse sentido, decidimos perturbar a função de modo a induzir erros no peso de seus vértices avaliados. Gostaríamos de testar se o casamento quase guloso pode remover ruídos do gradiente discreto fruto de dados de entrada inexatos. Para exemplificar, considere $f(x, y) = \arctan(xy)$ no domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$ avaliada nos vértices de uma triangulação planar e seu respectivo gradiente discreto associado de acordo com o casamento guloso ou casamento quase guloso (Figura 4.7).

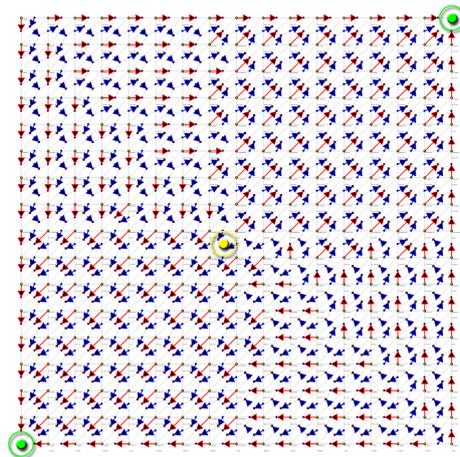


Figura 4.7: O campo gradiente discreto para a função $f(x, y) = \arctan(xy)$ obtido por meio do casamento guloso ou quase guloso.

Considere agora a função $f(x, y) = \arctan(xy) + \epsilon$ onde $\epsilon \sim N(0, 0.12)$ inclui um erro de acordo com a distribuição normal¹ com mesmo domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$. O gradiente discreto construído através do casamento guloso e quase guloso é mostrado através da Figura 4.8 (a) e Figura 4.8 (b), respectivamente.

¹Após incluirmos ϵ na última soma, f , formalmente, seria considerado como uma distribuição.

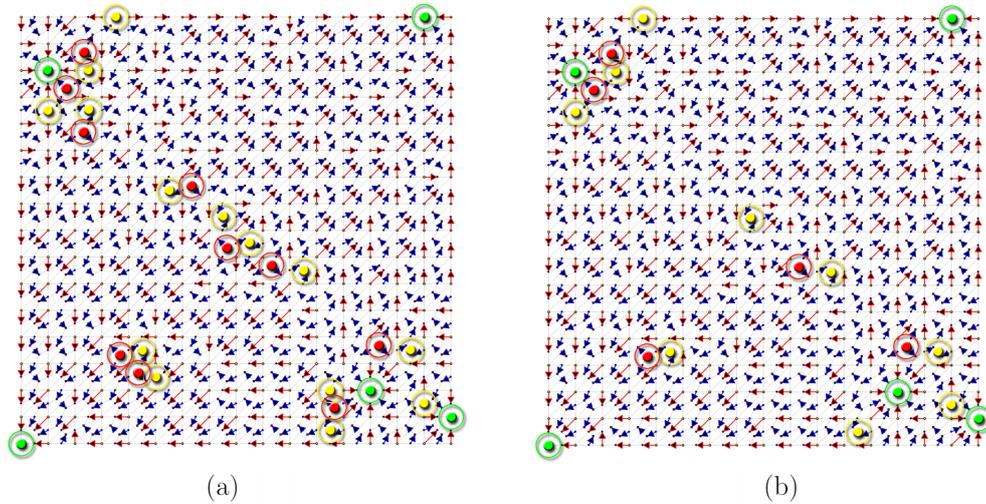


Figura 4.8: Em ambas as imagens temos o gradiente discreto associado com a função $f(x, y) = \arctan(xy) + \epsilon$ onde $\epsilon \sim N(0, 0.12)$ com domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$. Em particular, na esquerda o algoritmo de casamento utilizado foi o casamento guloso enquanto que na direita o algoritmo foi o casamento quase guloso.

Enquanto que no primeiro caso tivemos um total de 6 ruídos do gradiente discreto identificados, no segundo tivemos apenas 2.

Esse último resultado prático motiva que de fato o casamento quase guloso pode diminuir ruídos no gradiente discreto a partir de dados de entrada com erros. No entanto, na Figura 4.8 (b) e comparando-a com a Figura 4.7, ainda temos 2 ruídos do gradiente presentes - além de outros simplexos críticos indesejáveis que não tratamos nesta dissertação. Isso sugere que nosso algoritmo não é capaz de capturar e reduzir todos os ruídos no gradiente discreto.

Pensando nisso, durante a pesquisa decidimos propor mudanças ao casamento quase guloso buscando melhorá-lo no sentido de tentar reduzir todos os ruídos no gradiente discreto.

4.6 Melhoramentos para o Casamento Quase Guloso

Em alguns casos, ocorrências de ruídos no gradiente discreto ainda se mantêm mesmo utilizando o casamento quase guloso. De fato, isso já era esperado. O que tratamos desde o início do capítulo foi uma estrutura que potencialmente iria gerar ruído no gradiente discreto. Nossa condição verificava, antes de selecionar uma aresta mínima para casar, se ela consistia da aresta central de uma árvore de largura 3. Mas será que o casamento dessa aresta central é a única forma do algoritmo gerar ruído no gradiente discreto (caminho aumentante de tamanho 3)?

A Figura 4.9 mostra um exemplo de construção no qual ainda teremos ruído no gradiente discreto mesmo sem ter produzido uma árvore de largura 3 no processo. Mais do que isso, essa última figura sugere outras estruturas que potencialmente geram vértices insaturados próximos. Note que a aresta de peso 0 será casada pelo algoritmo quase guloso e irá produzir caminho de aumento.

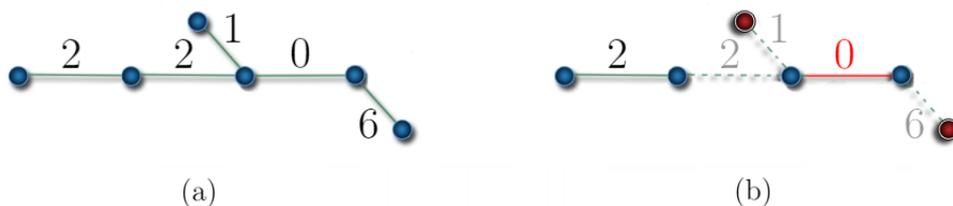


Figura 4.9: Exemplo de produção de ruído. Note que, apesar da aresta de peso 0 não ser a aresta central de uma árvore de largura 3, seu casamento implicará na produção do caminho de aumento.

Pensando no que foi dito, estendemos o algoritmo quase guloso tornando sua condição de quando não casar mais "frouxa". Isso é feito através de uma pequena modificação: ao invés de verificar se uma aresta constitui aresta central de uma árvore de largura 3, basta (sob alguns aspectos) checar se os vértices vizinhos de um dos extremos da aresta que será selecionada apresentam grau igual a 1.

Os resultados desse novo algoritmo de casamento quase guloso foram muito promissores no sentido de reduzir ainda mais ruídos do gradiente discreto. A próxima figura ilustra um exemplo. No lado esquerdo temos a construção do gradiente discreto a partir do casamento guloso e do lado direito a partir desse novo algoritmo mencionado. A função utilizada ainda é $f(x, y) = \arctan(xy) + \epsilon$ onde $\epsilon \sim N(0, 0.12)$ com domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$. Observe a Figura [4.10](#).

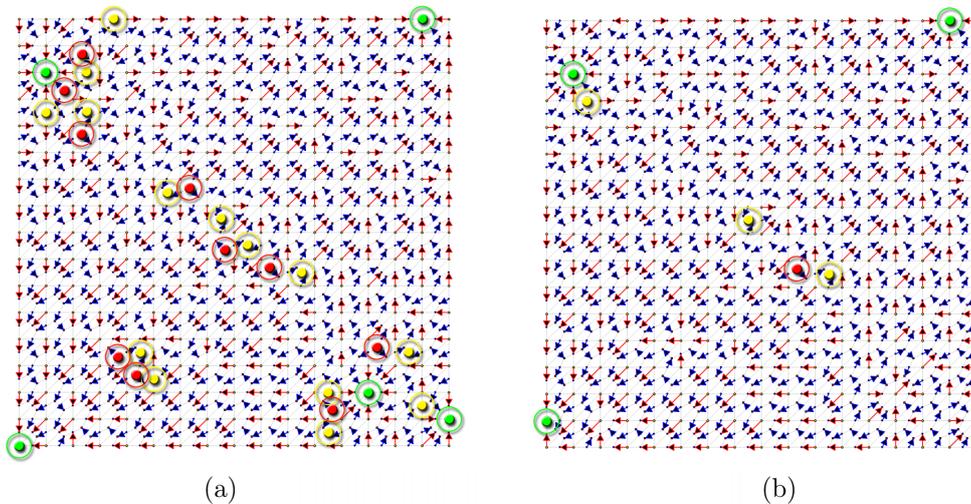


Figura 4.10: Em ambas as imagens temos o gradiente discreto associado com a função $f(x, y) = \arctan(xy) + \epsilon$ onde $\epsilon \sim N(0, 0.12)$ com domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$. Em particular, na esquerda o algoritmo de casamento utilizado foi o casamento guloso enquanto que na direita o algoritmo foi a alternativa citada ao casamento quase guloso.

Nesse exemplo, todos os 6 ruídos do gradiente discreto foram eliminados (em contraste com os 4 ruídos eliminados pelo casamento quase guloso). Não somente, diversos simplexos críticos indesejáveis (que não representam a função) foram também eliminados.

Não iremos incluir garantias teóricas desse algoritmo pois, além de complexas, não asseguram parte das garantias geométricas que os outros algoritmos mencionados na dissertação asseguram - como a questão do decrescimento (Teoremas [3.2](#), [4.3](#))

ou da comparação entre o casamento guloso e quase guloso (Teorema [4.1](#)). Mesmo assim, resolvemos citá-lo como diretriz para trabalhos futuros.

Acreditamos que o algoritmo quase guloso pode incorporar condições que o tornará um método para construir gradientes discretos mais suaves. Da forma como o implementamos, fica claro perceber que podemos estender o raciocínio e tentar atacar caminhos de aumento com tamanhos maiores que 3 e, assim, buscar eliminar simplexos críticos mais distantes. Sinalizamos também que tal proposta deve ser calibrada no sentido de evitar a eliminação de simplexos críticos que de fato representam a função no objeto discretizada. Pretendemos, assim, generalizar essa noção em breve.

5 TRIANGULAÇÕES PARA O GRADIENTE DISCRETO

“You need, as a historian, essential triangulation from your subject and the only way you get that triangulation is through time.” (Ken Burns)

Levantamos no capítulo anterior o que chamamos de ruído do gradiente discreto. Tentamos tratá-lo através da identificação de estruturas que potencialmente podem criá-los durante a construção do gradiente. Neste capítulo iremos fazer diferente; ainda procuraremos tratar o ruído, mas dessa vez pensando apenas na estrutura do objeto discreto que foi passado de entrada e não em seu algoritmo de construção.

É importante destacar que o objeto discreto que foi discutido nos capítulos anteriores podia se tratar de um complexo simplicial de qualquer dimensão. Só que agora iremos limitar o escopo e considerar apenas uma triangulação planar T cujo conjunto de vértices V está associado a uma função f , isto é, $f : V(T) \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, para todos os resultados mostrados neste capítulo considere que o algoritmo de casamento que foi utilizado é o casamento guloso discutido no Capítulo 3. Tomamos essa escolha para não misturar a maneira como o casamento quase guloso trata o ruído do gradiente com o que iremos apresentar adiante.

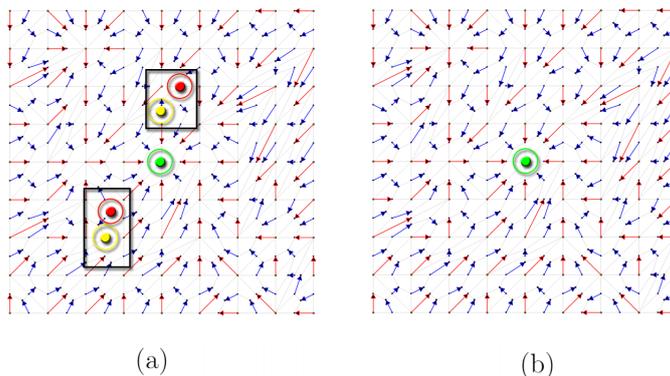


Figura 5.1: Ambas as imagens ilustram parte do campo gradiente discreto da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ avaliada no domínio $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$. O que diferencia as imagens é a triangulação e, por conta disso, do lado esquerdo tivemos ruído e do lado direito não.

5.1 Importância da Triangulação

Começemos com um exemplo para motivar a ideia central do capítulo. A Figura 5.1 (a) apresenta um campo gradiente discreto obtido a partir do conjunto de pontos P amostrado da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e cuja triangulação de P é T . Essencialmente P trata-se de uma nuvem de pontos que representam os vértices da triangulação e podemos defini-lo como o conjunto de $|P| \geq 3$ pontos distintos no plano Euclidiano.

Assim como foi discutido nos resultados computacionais dos últimos capítulos, as circunferências coloridas representam os simplexos críticos enquanto que as setas, a direção de decréscimo do gradiente discreto. Como trata-se de um parabolóide, a fidelidade geométrica (em termos de quantidade) estaria correta se um único simplexo crítico estivesse presente no gradiente. De fato ele é identificado inclusive na posição correta - na região central do campo - e sinaliza um ponto de mínimo. Mas mesmo assim outros simplexos críticos também foram identificados e constituem ruído do gradiente discreto.

Executamos então mais uma vez o casamento guloso para a mesma nuvem de pontos P com a mesma função f avaliada neles. A diferença aqui está na triangulação que foi usada. Por meio de algumas trocas de arestas, transformamos a triangulação T na triangulação T' . O resultado da execução é mostrado na Figura 5.1. Esse campo parece bem mais fiel à estrutura da função no que tange a quantidade de simplexos críticos: temos um único simplexo crítico representando o mínimo do parabolóide.

Apesar desse exemplo ser simples, ele motiva a ideia de que uma triangulação pode sofrer uma espécie de correção para que o casamento guloso produza um gradiente mais fiel à geometria da função. O que fizemos foi alterar localmente a estrutura discreta de entrada por meio de trocas de arestas e executar a construção do gradiente discreto novamente. Essa operação de troca de aresta é referida como operação de *flip*¹.

5.2 Correção do Gradiente Discreto com Flips

Dado uma triangulação T de um conjunto de pontos P no plano, uma aresta de T é dita *flipável* se ela é adjacente a dois triângulos cuja união é um quadrilátero convexo C . *Flipar* a aresta consiste da operação de remover e de T e repô-la pela outra diagonal de C . Dessa forma nós obtemos uma nova triangulação T' de P , e dizemos que T' foi obtida de T por meio de *flip* [16].

Nesta seção gostaríamos de deixar como contribuição a implementação de um sistema capaz de realizar flips em arestas de uma triangulação planar de modo a construir automaticamente o gradiente discreto associado com a nova triangulação

¹Como não há tradução apropriada, utilizaremos o termo *flip* como substantivo, verbo e suas conjugações. Seu significado consiste essencialmente da operação de troca de arestas em uma triangulação.

criada. O sistema e as rotinas foram implementados na linguagem de programação C++ juntamente com uma *framework* denominada Qt. A biblioteca e sub-rotinas relacionadas com os procedimentos de triangulação necessários foram extraídas da CGAL. Todo o código fonte, assim como os exemplos apresentados nesta dissertação estão disponíveis no repositório [Discrete Gradient System \(Google Drive\)](#).

Assim, torna-se possível estudar o comportamento do gradiente discreto mediante alterações no objeto discreto em questão.

Percebemos através de nossas execuções que de fato uma alteração no objeto discreto, em particular um flip de aresta numa triangulação planar, pode impactar no resultado da construção do gradiente discreto. Vimos também que, por meio desta diretriz, podemos reduzir ruído do gradiente.

A Figura 5.2 ilustra um exemplo onde o flip é capaz de remover ruído do gradiente. A aresta que está sinalizada pela cor rosa, após ser flipada, o desfaz. Repare que o nó-face e o nó-aresta críticos presentes na imagem da esquerda não existem mais no gradiente da direita.

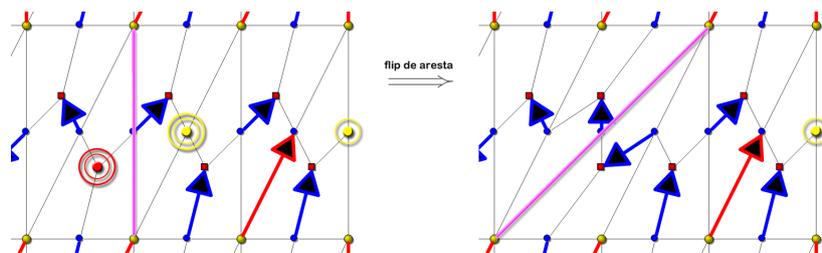


Figura 5.2: Alterando o gradiente discreto por meio de flip de aresta.

Existem diversas razões que fazem o estudo de flips em triangulações interessante. Uma delas versa sobre a noção de proximidade entre duas triangulações. O número de flips necessários para que T se transforme em T' seria uma métrica para indicar a distância entre T e T' . Tudo isso é possível pois quaisquer duas tri-

angulações para um mesmo conjunto de pontos podem ser alcançadas por meio de uma sequência de flips. O Teorema [5.1](#) enunciado por Charles L. Lawson na revista científica bi-semanal Matemática Discreta [\[18\]](#) ratifica o que foi dito.

Teorema 5.1. [\[18\]](#) *Dadas quaisquer duas triangulações em P - onde P consiste de um conjunto finito de pontos no plano - digamos T e T' - existe uma sequência finita de flips de arestas tal que a triangulação T pode ser transformada na triangulação T' .*

Infelizmente, não conseguimos caracterizar quando e quais arestas da triangulação, quando flipadas, são capazes de reduzir ruídos. Se estivéssemos de posse deste resultado, poderíamos sugerir para o usuário quais as arestas que, flipadas, iriam reduzir os ruídos. Mesmo assim, motivados com esses resultados e com o Teorema [5.1](#) em mente, por que não expandir a ideia e tentar encontrar triangulações que se adaptem à função de onde os pontos P foram amostrados de modo a construir um gradiente mais fiel?

5.3 Triangulações para o Gradiente Discreto

A pergunta que levantamos no final da última seção motiva uma mudança estrutural no Algoritmo [1](#). Ao invés de recebermos como entrada no processo de construção do gradiente discreto um complexo simplicial Δ associado a uma função f , iremos propor como entrada uma nuvem de pontos P associada a uma função f . Desse modo, poderemos criar a triangulação que for mais adequada para que a construção do gradiente discreto se dê buscando a fidelidade geométrica. Vamos ao

Algoritmo 5.

Algoritmo 5: CONSTRUIRCAMPOGRADIENTEDISCRETO(P, f)

Entrada: nuvem de pontos P e função $f : P \rightarrow \mathbb{R}$

Saída: campo gradiente discreto \mathcal{V}

- 1 $T =$ criar triangulação para P ;
 - 2 $\Delta =$ derivar complexo simplicial de T ;
 - 3 $H =$ criar diagrama de hasse a partir de Δ ;
 - 4 induzir pesos nos arcos de H através de f ;
 - 5 $\mathcal{V} =$ aplicar algoritmo de casamento ponderado^a em H ;
 - 6 **retorna** \mathcal{V} ;
-

^aO algoritmo deve gerar um casamento que não contenha ciclos

Como indica a primeira etapa do algoritmo, uma triangulação deve ser criada para o conjunto de pontos P . A triangularização de um conjunto de pontos é uma importante tarefa em várias áreas incluindo computação gráfica, geometria computacional e computação de elementos finitos. Seu problema é definido formalmente a seguir.

Problema 5.1. *Seja P o conjunto de $|P| \geq 3$ pontos distintos no plano Euclidiano. Nós assumimos que quaisquer três pontos não são colineares. Seja E o conjunto de $C_{|P|,2}$ segmentos de reta (arestas) entre vértices em P . Para duas arestas $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$, dizemos que elas se interceptam propriamente se elas se interceptam em um outro ponto além dos seus extremos. Uma triangulação de P é um grafo planar $G(P, E')$ onde E' é um subconjunto maximal de E tal que nenhum par de arestas de E' se intercepta propriamente.*

Existem diversas maneiras diferentes pelas quais podemos triangular um dado conjunto de pontos e, muito provavelmente, nós iremos preferir uma ao invés de outra. Comumente uma função que mapeia toda triangulação em uma espécie de medida de qualidade é introduzida e queremos maximizar essa medida por um algoritmo em sua construção [24, 2].

A métrica que estaríamos procurando seria, portanto, algo para minimizar o número de ruídos sem comprometer os simplexes críticos do campo gradiente discreto que representam de fato a função de entrada. É uma tarefa difícil pois não sabemos formalmente caracterizar o ruído. Mesmo assim, iremos propor algumas triangulações para a construção do gradiente discreto pensando em alguns indicadores.

5.4 Triangulação Estrela

A primeira sugestão que levantamos consiste de uma triangulação, a qual chamaremos de *triangulação estrela*, que exemplifica a importância da estrutura do objeto discreto para o algoritmo do gradiente discreto. Iremos descrever primeiro suas etapas.

Algoritmo 6: TRIANGULAÇÃO ESTRELA(T)

Entrada: conjunto de pontos P .
Saída: triangulação estrela de P .

- 1 seja T uma triangulação vazia;
- 2 $p_{min} \leftarrow \operatorname{argmin}_{p \in E(G)} f(p)$;
- 3 $P \leftarrow P \setminus p_{min}$;
- 4 **para** ($p \in P$; $p \neq$ último ponto de P ; $p \leftarrow$ próximo ponto de P) **faça**
- 5 | crie a aresta $\{p, p_{min}\}$ em T ;
- 6 **fim**
- 7 termine a triangulação T ;
- 8 **retorna** T

O algoritmo inicialmente seleciona o ponto de peso mínimo p_{min} em P . Depois disso, para cada ponto restante em p , cria uma aresta $\{p, p_{min}\}$. Por fim, completa a triangulação de forma arbitrária. Esses três passos são mostrados na Figura [5.3](#).

De acordo com o algoritmo, fizemos com que todos os vértices da triangulação

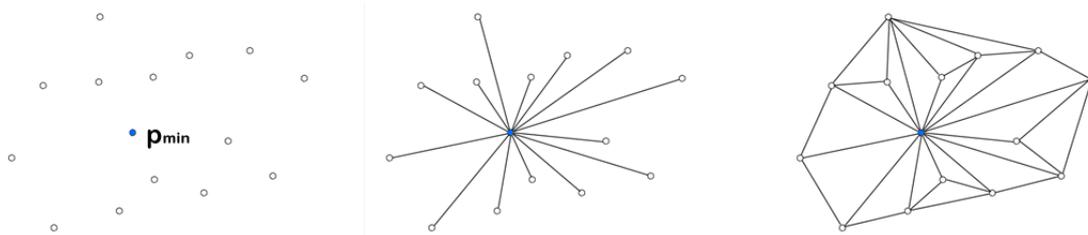


Figura 5.3: Ilustração do passo a passo do algoritmo da triangulação estrela.

sejam adjacentes ao vértice de menor peso; o vértice mínimo. Através do próximo lema, iremos entender como essa construção impacta no gradiente discreto.

Lema 5.1. *O gradiente discreto \mathcal{V} associado ao casamento guloso M por meio da triangulação estrela, apresenta um único simplexo crítico de mínimo.*

Prova. Se T é uma triangulação estrela, então todos os vértices de T são adjacentes ao vértice de menor peso em T . Dado o complexo simplicial Δ e o diagrama de Hasse H desta triangulação, temos que, de acordo com o Algoritmo 5, na primeira iteração todos os simplexos de dimensão 0 de H serão saturados, exceto aquele que representa p_{min} . Desse modo, teremos apenas um simplexo crítico mínimo (ou seja, um nó-vértice insaturado em H). \square

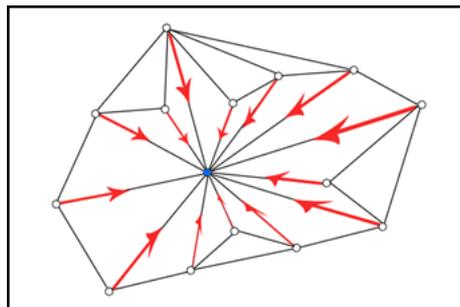


Figura 5.4: Resultado de um gradiente discreto na triangulação estrela.

Esse resultado mostra que a triangulação estrela é extremamente não adequada para se construir um gradiente discreto. Nós temos a garantia que, indepen-

dente da função, sempre haverá apenas um simplexo crítico mínimo num gradiente produzido através dela.

Imagine, por exemplo, o campo gradiente discreto de uma função $f(x, y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y)$ onde sabemos que existem diversos pontos de mínimo, obtido a partir da triangulação estrela. Ele estaria nos indicando que tal função apresenta apenas um mínimo.

Portanto, gostaríamos de mostrar por intermédio da triangulação estrela que a estrutura do objeto discreto (em particular, triangulações planares) impacta fortemente na construção do gradiente discreto. Não somente, como sabemos do Teorema [5.1](#) que todas as triangulações para um mesmo conjunto de pontos planares estão conectadas por flips, então uma sequência dessas operações inadequada pode nos levar também a triangulações profundamente não apropriadas para um gradiente discreto que busca se aproximar da fidelidade geométrica.

5.5 Triangulação de Curva

Vimos na seção anterior como uma triangulação pode arruinar o gradiente discreto no sentido geométrico. Nesta seção, vamos propor um algoritmo cuja abordagem será mais elaborada: iremos propor uma triangulação que vise ajudar a construção geométrica do gradiente.

A ideia é posicionar as arestas da triangulação de modo a aproximá-las do que o conceito de curva de nível representa no contínuo. Por conta dessa motivação, a chamaremos de *triangulação de curva*.

Curvas de nível representam linhas no contínuo que são perpendiculares à

direção de maior crescimento da função, ou seja, à direção do gradiente. Como nesta dissertação estamos considerando sempre a direção de decrescimento do gradiente, a nossa estratégia consiste em posicionar as arestas da triangulação de modo que não contenham o vértice mínimo do quadrilátero a que pertencem. Observe a Figura [5.5](#)

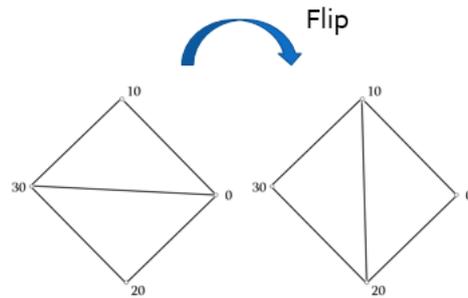


Figura 5.5: Flipando a aresta de um quadrilátero de modo a torná-la não incidente ao vértice de peso mínimo.

Mas por que esse tipo de estratégia é interessante? Perceba que em qualquer quadrilátero, se a sua diagonal (aresta) não for incidente ao vértice de menor peso do quadrilátero, então o casamento guloso irá casar o arco aresta-face associado à diagonal certamente. Isso é facilmente verificável através da Figura [5.6](#). Como o nó-aresta v e o nó-face w são tais que $\bar{v} \geq 0$ e $\bar{w} \geq 0$ então os Lemas [3.1](#) e [3.2](#) nos dão a garantia que $\{v, w\}$ está casado.

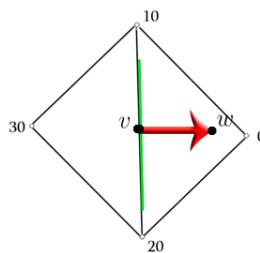


Figura 5.6: Exemplo de quadrilátero onde há garantia de casamento.

Dentro desse contexto, iremos chamar uma *aresta de ilegal* se ela pertence a um quadrilátero convexo e é incidente ao vértice de peso mínimo desse quadrilá-

tero. Nosso objeto, portanto, é minimizar o número de arestas ilegais. Vejamos o algoritmo de construção da triangulação de curva.

Algoritmo 7: TRIANGULAÇÃO DE CURVA(T)

Entrada: alguma triangulação T de um conjunto de pontos P .

Saída: uma triangulação de curva de P

```

1 while  $T$  contém uma aresta ilegal  $\{p_i, p_j\}$  do
2   |   Seja  $p_i p_j p_k$  e  $p_i p_j p_l$  os dois triângulos adjacentes à  $\{p_i, p_j\}$ ;
3   |   Remova  $\{p_i, p_j\}$  de  $T$ , e adicione  $\{p_k, p_l\}$  ao invés;
4 end
5 retorna  $T$ 

```

De acordo como sugerido acima, o algoritmo funciona da seguinte forma: dada uma triangulação arbitrária para um conjunto de pontos amostrados P , realize flips nas arestas que são incidentes a pontos de altura mínima do quadrilátero convexo do qual pertencem (isso é definido como uma aresta ilegal). Repita o procedimento até que toda aresta que possa ser flipada respeite essa condição. Isso levanta uma pergunta: o processo de fato termina? Vamos a uma formalização.

Seja T uma triangulação de P e suponha que ela tenha m triângulos. Defina $h(\Delta)$ como a *altura mínima* de cada triângulo Δ de T ; isto é, o peso mínimo associado aos vértices de Δ . Considere as m alturas mínimas de T , ordenadas por ordem crescente de valor. Seja h_1, h_2, \dots, h_m a sequência resultante dessas alturas; logo, $h_i \leq h_j$ para $i < j$. Nós chamaremos $H(T) = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ o vetor altura de T . Seja T' outra triangulação do mesmo conjunto de pontos P , e seja $H(T') = (h'_1, h'_2, \dots, h'_m)$ seu vetor altura. Nós iremos dizer que um vetor altura de T é maior que outro vetor altura de T' se $H(T)$ é lexicograficamente maior que $H(T')$, ou, em outras palavras, se existe um índice i com $1 \leq i \leq m$ tal que

$$h_j = h'_j \quad \forall j < i, \text{ e } h_i > h'_i.$$

Nós denotamos isso como $H(T) > H(T')$. Uma triangulação T é chamada de *altura*

ótima se $H(T) \geq H(T')$ para toda triangulação T' de P . Triangulações de altura ótima são interessantes porque buscam minimizar o número de arestas ilegais.

Para exemplificar, consideremos duas triangulações T e T' . A única diferença no vetor altura de T e T' após um flip de aresta são as alturas mínimas $h(\Delta_1)$ e $h(\Delta_2)$ que são repostos por $h(\Delta_3)$ e $h(\Delta_4)$ em $H(T')$. A Figura 5.7 ilustra isso.

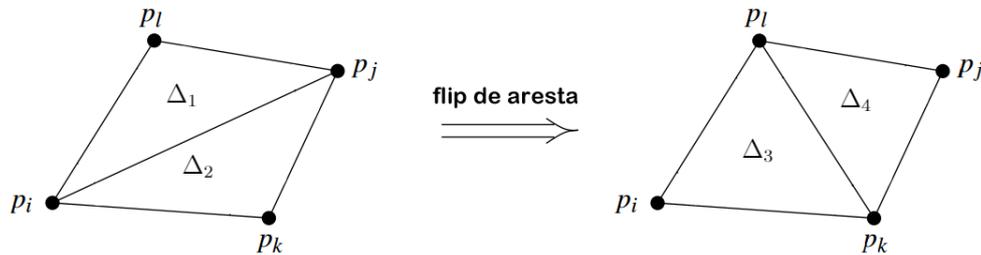


Figura 5.7: Flipando a aresta $\{p_i, p_j\}$.

Dentro desse contexto iremos chamar $e = \{p_i, p_j\}$ de aresta ilegal se

$$\min_{i=1,2} h(\Delta_i) < \min_{j=3,4} h(\Delta_j).$$

Em outras palavras, uma aresta é ilegal se nós podemos localmente aumentar a menor altura mínima flipando-a. Isso implica diretamente o seguinte lema.

Lema 5.2. *Seja T uma triangulação com uma aresta ilegal e . Seja T' a triangulação obtida de T flipando e . Então $H(T') > H(T)$.*

Segue do Lema 5.2 que o vetor altura de T aumenta a cada iteração do laço. Como existe apenas um número finito de triangulações de P [3, 28, 29], isso prova a terminação do processo e sua caracterização como um algoritmo.

As Figura 5.8 (a), 5.8 (b), 5.8 (c) e 5.8 (d) mostram alguns resultados da triangulação de curva associada às funções: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = \arctan(xy)$,

$f(x, y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y)$ e $f(x, y) = -x^2 - y^2$, respectivamente. O domínio utilizado em todos os casos foi definido por $x = [-2, 2]$ e $y = [-2, 2]$.

Compare os resultados da última imagem com a Figura 5.9 e note como a triangulação de curva aproxima-se, visualmente, das curvas de nível das funções utilizadas.

Para encerrar, vamos finalmente aos resultados que relacionam o campo gradiente discreto com a triangulação de curva. As Figuras 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 mostram o gradiente discreto associado a cada uma das funções citadas de modo que a triangulação planar utilizada é de curva.

Em termos de posição e quantidade visualmente falando (critérios geométricos), os resultados foram satisfatórios. Note a semelhança entre o gradiente suave e discreto em cada um dos casos. Mesmo assim, não levantamos garantias teóricas que asseguram essas e outras características geométricas para o gradiente discreto através desta triangulação. De fato, não exploramos com detalhes esses possíveis resultados.

Este capítulo se resume, portanto, a uma diretriz que pode ser seguida para trabalhos futuros. Esperamos que toda a motivação por trás da correção do gradiente discreto através de mudanças propostas para o objeto discreto de entrada (em particular, a triangulação) estimule o seu maior entendimento para outras pesquisas.

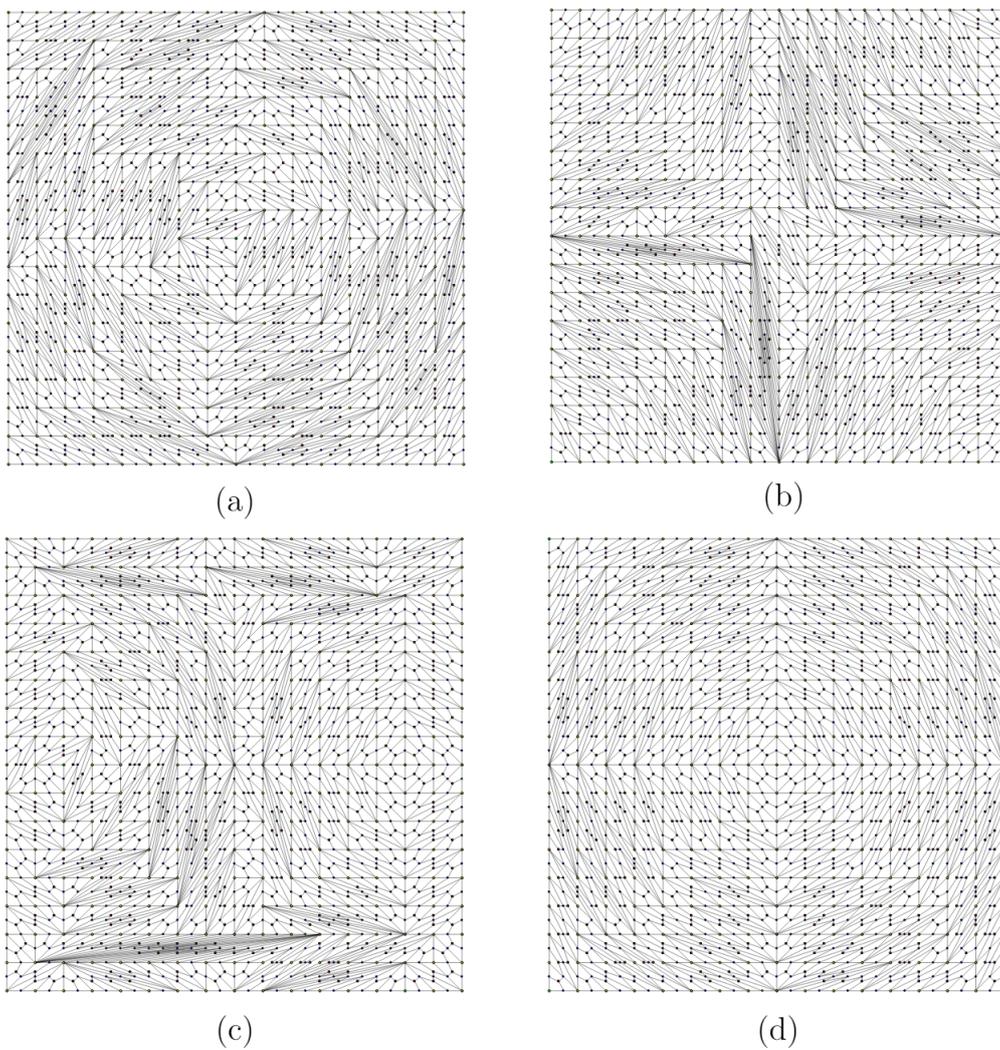
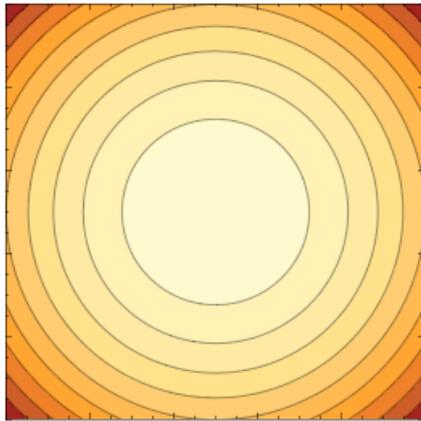
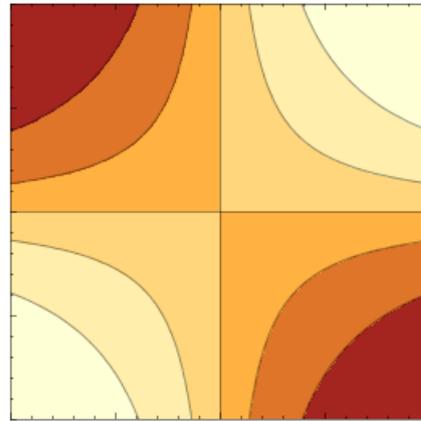


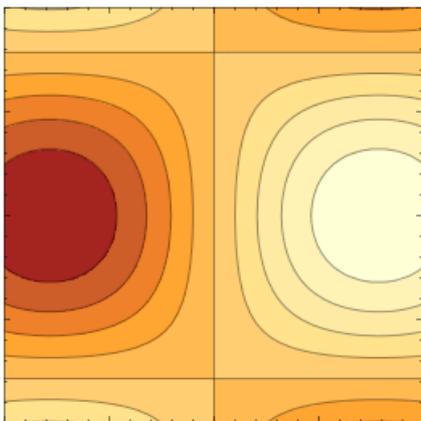
Figura 5.8: Exemplos de triangulações de curva. (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, (b) $f(x, y) = \arctan(xy)$, (c) $f(x, y) = \text{sen}(x)\cos(y)$ e (d) $f(x, y) = -x^2 - y^2$.



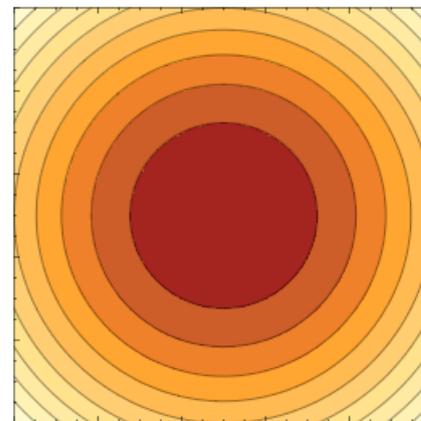
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.9: Exemplos de curvas de nível. (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, (b) $f(x, y) = \arctan(xy)$, (c) $f(x, y) = \text{sen}(x)\cos(y)$ e (d) $f(x, y) = -x^2 - y^2$.

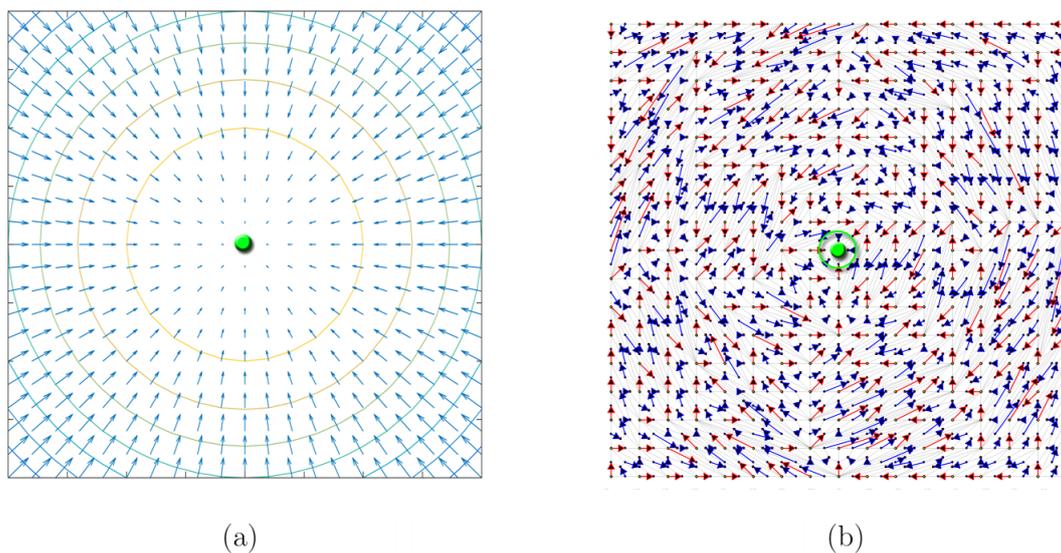


Figura 5.10: Esquerda: curva de nível de $f(x, y) = (x^2 + y^2)$; direita: campo gradiente discreto associado feito com triangulação de curva.

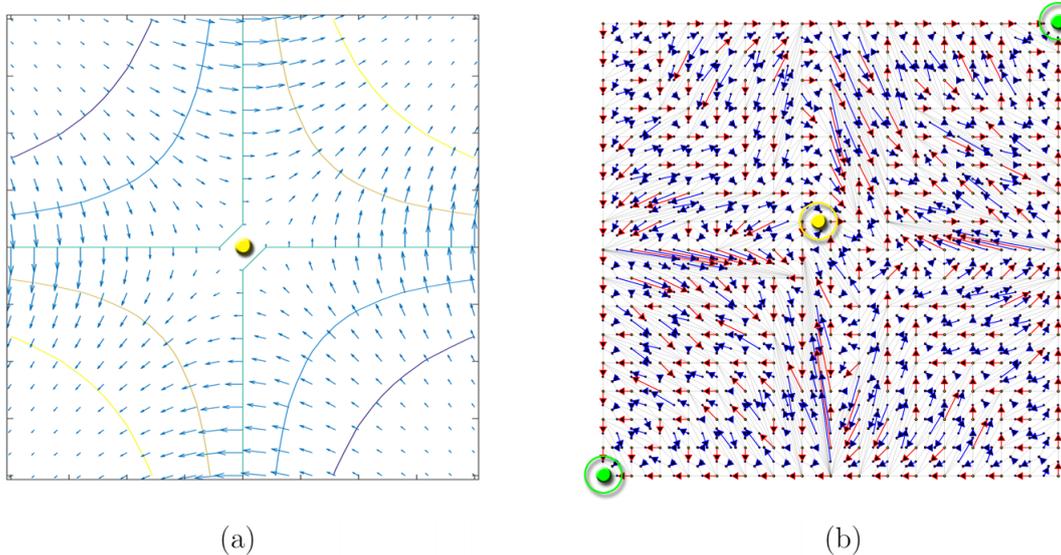


Figura 5.11: Esquerda: curva de nível de $f(x, y) = \arctan(xy)$; direita: campo gradiente discreto associado feito com triangulação de curva.

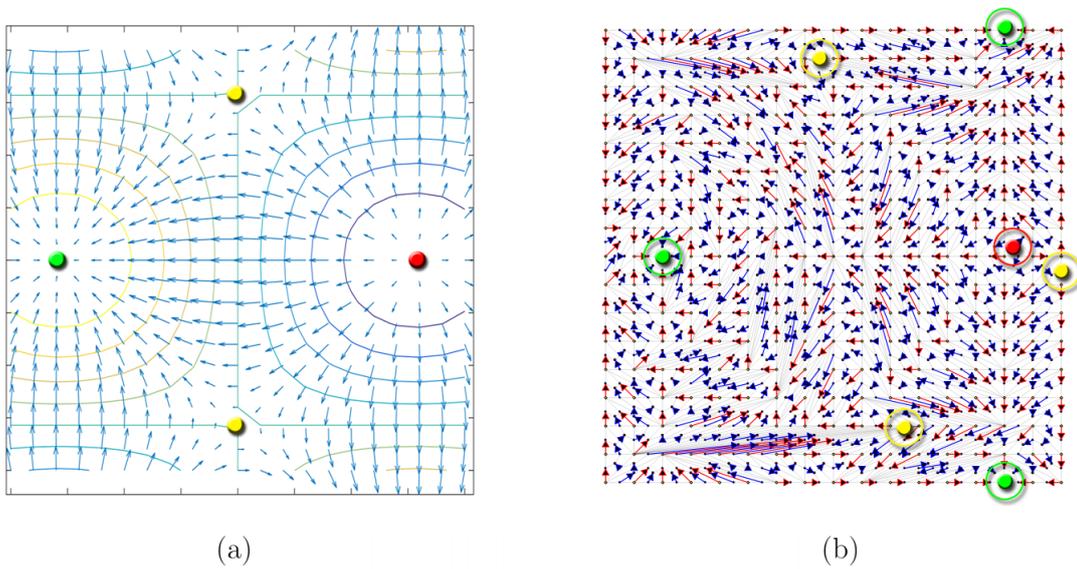


Figura 5.12: Esquerda: curva de nível de $f(x,y) = \text{sen}(x)\text{cos}(y)$; direita: campo gradiente discreto associado feito com triangulação de curva.

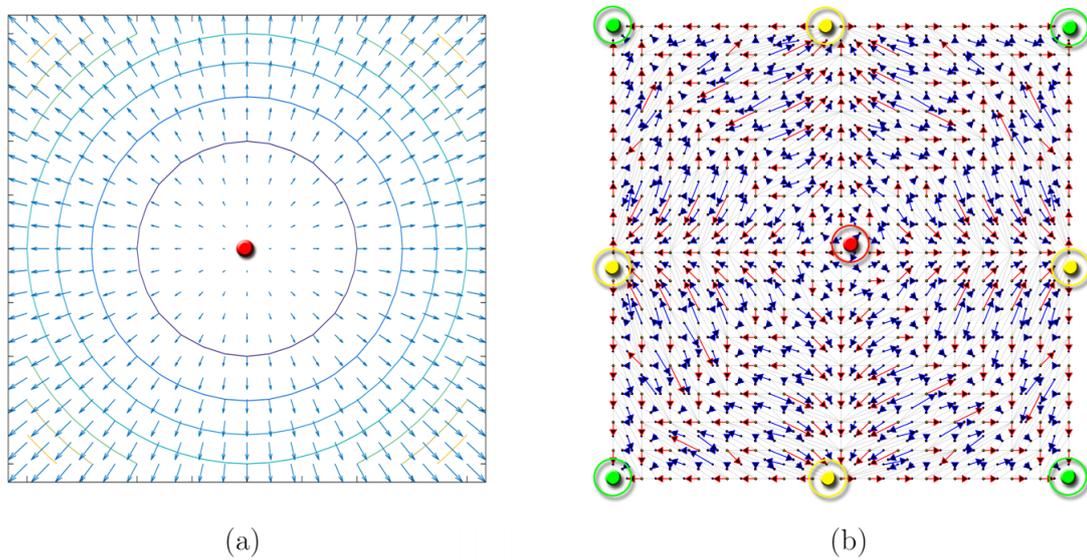


Figura 5.13: Esquerda: curva de nível de $f(x,y) = -x^2 - y^2$; direita: campo gradiente discreto associado feito com triangulação de curva.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

“Make sure what you do is a product of your own conclusion.” (Jim Rohn)

Esta dissertação focou no lado mais geométrico da teoria discreta Morse e introduziu novos resultados na construção e análise de algoritmos. Tentamos definir melhor o que são simplexes críticos indesejáveis e que constituem o que chamamos de ruído no gradiente discreto. Chegamos a conclusão que tal ocorrência pode ser fruto de três fatores: o próprio algoritmo de casamento, a presença de perturbações nos dados amostrados ou a estrutura do objeto discreto.

Iniciamos nosso trabalho voltando aos fundamentos. Sendo assim, criamos o Capítulo 2 na forma de embasamento teórico para que a dissertação seja acessível para qualquer leitor.

Depois, analisando cuidadosamente a construção dos casamentos geométricos que deram base para esta dissertação [26, 21, 1], desenvolvemos o Capítulo 3. Explicamos como se dá a obtenção do campo gradiente discreto através do casamento guloso já utilizado na literatura e então escrevemos o Algoritmo 2. Dada a forma como o escrevemos, definimos novas notações que nos levaram à criação de lemas que simplificam provas como as condições para que uma aresta esteja casada no casamento guloso (Lemas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4). Simplificamos também a prova que garante que o casamento guloso produz, de fato, um campo gradiente discreto. Isso é feito através do Lema 3.5 e do Teorema 3.1. Ainda no Capítulo 3, contribuimos com a adição de outro resultado muito importante que traz uma nova noção geométrica ao campo gradiente discreto associado ao casamento guloso através do

Lema [3.2](#). Mostramos que a função no simplexo crítico é menor que a função em todos os simplexo que estão em um \mathcal{V} -*path*. Isso é interessante pois simula no discreto, em um certo sentido, a noção de fluxo decrescente que as linhas de fluxo apresentam no domínio suave. É importante mencionar também que ambos esses dois últimos resultados são aplicados para qualquer dimensão. Acreditamos, assim, que tanto as notações que propomos quanto os resultados obtidos, podem ser úteis para a teoria de Morse discreta assim como para outros algoritmos baseados em paradigmas gulosos. Uma vez com todos esses conceitos esclarecidos e alguns até reformulados, nos preparamos para projetar um novo tipo de casamento guloso que seja capaz de evitar o que chamamos de ruído no gradiente discreto.

Chegamos então ao Capítulo [4](#) buscando tratar o ruído do gradiente discreto. Propomos e desenvolvemos nele o que chamamos de algoritmo quase guloso como apresentado no Algoritmo [4](#). Tentamos projetá-lo pensando nas motivações que conduziram às ideias do trabalho e tentando sempre fazer um paralelo com o algoritmo guloso. Como já foi visto durante a dissertação, o que criamos trata-se de uma espécie de casamento guloso mas menos restrito às escolhas gulosas. Por meio dos Lemas [4.1](#) e [4.2](#), além do Lema [4.3](#), conduzimos condições que indicam quando que uma aresta está casada ou não. Fizemos também uma análise que compara o casamento guloso com o casamento quase guloso. Por meio desta, verificamos que o casamento quase guloso apresenta no máximo o mesmo número de simplexos críticos se comparado ao casamento guloso e que todos os outros simplexos críticos não mudam de posição. Não somente, definimos quais são as estruturas que potencialmente diferem em ambos os casos. Todos esses resultados são derivados dos a partir do Teorema [4.1](#) e Corolário [4.1.1](#) que também são contribuições nossas. Feito isso, provamos que de fato o algoritmo quase guloso produz um campo gradiente discreto no Teorema [4.2](#) e que mantém a característica de fluxo decrescente que descrevemos no Teorema [4.3](#); outro resultado. Encerramos o capítulo mostrando alguns exemplos computacionais e, aproveitando o raciocínio, sugerimos possíveis trabalhos futuros.

No Capítulo 5, nossa abordagem foi menos teórica. Sugerimos a correção do ruído do gradiente discreto por meio da alteração do objeto discreto que é passado de entrada ao invés de fazê-lo durante a execução do algoritmo de casamento. Isso é feito por intermédio de um sistema por nós implementado e disponibilizado que permite que o usuário realize flips de arestas no objeto discreto (triangulação planar, no caso) depois de se ter construído um campo gradiente discreto. Essa abordagem mostrou-se promissora no sentido de indicar uma nova forma de tratamento de ruídos no gradiente discreto. Depois, nós analisamos o quão difícil é encontrar uma triangulação que provê a garantia de uma representação geométrica precisa do gradiente discreto. Nós estudamos o problema contribuindo com duas triangulações diferentes: estrela e curva. Criamos um algoritmo para cada uma delas e apontamos suas respectivas importâncias. Enquanto a primeira destacava a importância do objeto discreto para o gradiente discreto, a segunda se mostrou, no mínimo, intrigante no sentido de incorporar um conceito de cálculo diferencial e integral no discreto e apresentar bons resultados computacionais.

A medida que a pesquisa progredia, mais e mais questões foram surgindo. De qualquer forma, todas elas são interessantes pois norteiam possíveis trabalhos futuros. Vejamos algumas, pelo menos ao nosso entendimento, das mais atraentes:

- Como de fato podemos caracterizar o ruído no gradiente discreto? Qual sua relação de dependência em respeito ao algoritmo de construção, ao objeto discreto de entrada ou aos dados amostrados com inexatidão?
- Será que existe uma variação do algoritmo quase guloso que irá remover sempre todos os ruídos gerados pelo algoritmo guloso?
- É possível generalizar o algoritmo quase guloso de modo a evitar gerar ruídos cujo caminho que os conectam é maior que 3? Ou, em outras palavras, é

possível generalizar o algoritmo quase guloso de modo a permitir que o usuário defina o nível de "suavização" do mesmo?

- Quais são as condições necessárias e suficientes para que um flip de aresta desfaça ruídos?
- Existe uma triangulação ideal para que o campo gradiente discreto associado ao casamento guloso e uma dada função f em particular minimize o número de ruídos?
- Existe uma triangulação que sempre reduz o número de simplexes críticos a 1 independentemente da função? Ou seja, uma triangulação ainda mais drástica que a triangulação estrela?

Todas as perguntas aqui mostradas são estímulos de diversos trabalhos futuros. Acreditamos que a teoria discreta de Morse está longe de alcançar todo seu potencial. Sendo assim, esperamos que nossas contribuições auxiliem na busca de novos resultados de modo a tentar se aproximar cada vez mais de tudo que ela tem a oferecer.

Esperamos de verdade que nosso trabalho tenha motivado novas alternativas de pesquisa dentro de uma teoria que quanto mais se entende, mais perguntas são criadas. Portanto, encerramos este trabalho com uma conhecida frase do físico e matemático, Albert Einstein: *"The important thing is not to stop questioning."*

REFERÊNCIAS

- [1] BABSON, E.; HERSH, P. Discrete Morse functions from lexicographic orders. **Transactions of the American Mathematical Society**, Providence, v.357, n.2, p.509–534, 2005.
- [2] BERN, M.; EPPSTEIN, D. Mesh generation and optimal triangulation. In: Du, D.-Z.; Hwang, F. (Ed.). **Computing in Euclidean Geometry**, 2. ed. Singapore; River Edge: World Scienti, 1995, p.47 – 123.
- [3] BERN, M.; EPPSTEIN, D.; GILBERT, J. Provably good mesh generation. **Journal of Computer and System Sciences**, New York, v.48, n.3, p.384 – 409, 1994.
- [4] BONDY, J.-A.; MURTY, U. S. R. **Graph theory**. New York: Springer, 2007. (Graduate texts in mathematics, 244).
- [5] BREMER, P. T. et al. A topological hierarchy for functions on triangulated surfaces. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, New York, v.10, n.4, p.385–396, 2004.
- [6] CAZALS, F.; CHAZAL, F.; LEWINER, T. Molecular shape analysis based upon Morse–Smale complex and the Connolly function. In: SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, 19., 2003, San Diego. **Proceedings...** New York: ACM, 2003. p.351–360.
- [7] CHARI, M. K. On discrete Morse functions and combinatorial decompositions. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v.217, n.1, p.101 – 113, 2000.
- [8] ČOMIĆ, L.; DE FLORIANI, L.; IURICICH, F. Modeling three-dimensional morse and morse-smale complexes. In: BREUB; M.; BRUCKSTEIN, A.; MA-

- RAGOS, P. (Ed.). **Innovations for Shape Analysis** : models and algorithms, Berlin: Springer, 2013, p.3–34.
- [9] EDELSBRUNNER, H. et al. Morse-smale Complexes for Piecewise Linear 3-manifolds. In: ANNUAL SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, 19., 2003, San Diego. **Proceedings...** New York: ACM, 2003. p.361–370.
- [10] EDELSBRUNNER, H.; HARER, J.; ZOMORODIAN, A. Hierarchical Morse—Smale Complexes for Piecewise Linear 2-Manifolds. **Discrete & Computational Geometry**, New York, v.30, n.1, p.87–107, 2003.
- [11] FORMAN, R. A discrete Morse theory for cell complexes. In: GEOMETRY, TOPOLOGY 6 PHYSICS FOR RAOUL BOTT. , Anais... International Press, 1995.
- [12] GALE, D.; SHAPLEY, L. S. College admissions and the stability of marriage. **The American Mathematical Monthly**, Washington, v. 69, n.1, p.9–15, 1962.
- [13] GYULASSY, A. et al. A topological approach to simplification of three-dimensional scalar functions. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, New York, v.12, n.4, p.474–484, 2006.
- [14] GYULASSY, A. et al. A practical approach to morse-smale complex computation: scalability and generality. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, New York, v.14, n.6, p.1619–1626, 2008.
- [15] GYULASSY, A. et al. Direct Feature Visualization Using Morse-Smale Complexes. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, New York, v.18, n.9, p.1549–1562, 2012.
- [16] HURTADO, F.; NOY, M.; URRUTIA, J. Flipping Edges in Triangulations. **Discrete & Computational Geometry**, New York, v.22, n.3, p.333–346, 1999.

- [17] KING, H.; KNUDSON, K.; MRAMOR, N. Generating discrete morse functions from point data. **Experimental Mathematics**, Boston, v.14, n.4, p.435–444, 2005.
- [18] LAWSON, C. L. Transforming triangulations. **Discrete Mathematics**, Amsterdam, v.3, n.4, p.365 – 372, 1972.
- [19] LEWINER, T. **Constructing discrete Morse functions** 2002. 89 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- [20] LEWINER, T. **Geometric discrete Morse complexes** 2005. 131 f. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.
- [21] LEWINER, T. Critical sets in discrete Morse theories: relating Forman and piecewise-linear approaches. **Computer Aided Geometric Design**, Amsterdam, v.30, n.6, p.609–621, 2013.
- [22] LEWINER, T.; LOPES, H.; TAVARES, G. Applications of Forman’s discrete Morse theory to topology visualization and mesh compression. **Transactions on Visualization and Computer Graphics**, [S.l.], v.10, n.5, p.499–508, 2004.
- [23] LOVÁSZ, L.; PLUMMER, M. D. **Matching theory**. Amsterdam: North-Holland, 1986.
- [24] OSHEROVICH, E.; BRUCKSTEIN., A. M. All triangulations are reachable via sequences of edge-flips: an elementary proof. **Computer Aided Geometric Design**, Amsterdam, v. 25, n. 3, p. 157-161, 2007.
- [25] PAIXÃO, J.; LEWINER, T. **Discrete Morse Gradient Fields and Stable Matchings**, Disponível em: <http://www.mat.puc-rio.br/preprints/MAT-14_2013.pdf>. Acesso em: 13 abr. 2016.

- [26] PAIXÃO, J. A. R. **Analysis of Morse machings:** parameterized complexity and stable matching. 2014. 86 f. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.
- [27] REININGHAUS, J.; LOWEN, C.; HOTZ, I. Fast Combinatorial Vector Field Topology. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, New York, v.17, n.10, p.1433–1443, 2011.
- [28] SANTOS, F.; SEIDEL, R. A better upper bound on the number of triangulations of a planar point set. **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, New York, v.102, n.1, p.186 – 193, 2003.
- [29] KAUFMANN, M.; WAGNER, D. (Ed.). **The Number of Triangulations on Planar Point Sets**. Berlin: Springer, 2007. p.1–4.
- [30] WEINKAUF, T.; GINGOLD, Y.; SORKINE, O. Topology-based Smoothing of 2D Scalar Fields with C1-continuity. **Computer Graphics Forum**, Amsterdam, v. 29, n. 3, p. 1221-1230, 2010.
- [31] WEISSTEIN, E. W. Triangular Grid. **A Wolfram Web Resource**. 2017. , Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/TriangularGrid.html>>. Acesso em: 6 jan. 2017.