

Alessandro da Silva

Análise Numérica da Equação de Burgers
com Fronteira Móvel

Rio de Janeiro
2007

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração : Algoritmos, Métodos Numéricos e Robótica

Aprovada por:

Mauro Antônio Rincon, D.Sc. - IM/UFRJ
(Orientador)

Haroldo Rodrigues Clark, D.Sc. - IM/UFF
(Co-orientador)

Ivo Fernandez Lopez, D.Sc. - IM/UFRJ

Gladson Octaviano Antunes, D.Sc. - IME/UERJ

Luziane Ferreira de Mendonça, D.Sc. - IM/UFRJ

S586 Silva, Alessandro da.

Análise numérica da equação de Burgers com Fronteira móvel/ Alessandro da Silva.-Rio de Janeiro,2007.

91 f.:il.

Dissertação (Mestrado em Informática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, 2007.

Orientador: Mauro Antônio Rincon

Co-orientador: Haroldo Rodrigues Clark

1. Resultados Básicos - Teses. 2.Equação de burgers Dissipativa com Fronteira Móvel - Teses.3. Métodos dos Elementos Finitos - Teses.4. Simulações Numéricas - Teses.
I. Mauro Antônio Rincon (Orient.).II. Haroldo Rodrigues Clark(Co-orient.) III.Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Núcleo de Computação Eletrônica.
III. Título

Dedicatória

Aos meus pais

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me dado forças durante todo o tempo em que fiz este curso e poder ampliar meus conhecimentos.

Aos meus pais por terem me ajudado e incentivado a completar mais esta etapa em minha vida.

Aos professores Mauro Antônio Rincon e Haroldo Rodrigues Clark por terem me concedido esta oportunidade.

Aos meus amigos do mestrado: Bianca, Cristina, Michaelle, Vinícius e especialmente à Renata que não me deixou desistir nos momentos mais difíceis.

A todos que de certa forma me ajudaram.

Resumo

Nosso objetivo é estudar teoricamente a Equação de Burgers unidimensional em um domínio com fronteiras móveis, verificando a existência de soluções usando o Método de Faedo-Galerkin. Em seguida, aplicaremos os métodos numéricos ao problema: o Método dos Elementos Finitos no espaço e o Método das Diferenças Finitas no tempo. Por estes e outros métodos, obtemos um sistema linear de Equações Diferenciais Ordinárias, o qual será resolvido computacionalmente por implementação numérica em linguagem C. Alguns exemplos numéricos serão mostrados para ilustrar o comportamento das soluções obtidas.

Abstract

Our main purpose is studied the one dimensional Burgers' Equation in a bounded domain with the ends are moving. We prove the existence, uniqueness and a rate decay of solutions. The existence is proved by using Faedo-Galerkin Method. Moreover, a numeric analysis of the solutions is investigated through: the Finite Element Method, in space and the Finite Difference Method, at the time. For these, we obtain a linear system of Differential Ordinary equations, which will be solved computationally by numerical implementation in C programming language. Some numerical examples will be shown to illustrate the behavior of solutions.

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Proposta de Pesquisa	10
2	Resultados Básicos	12
2.1	Espaço das Distribuições Escalares	12
2.2	Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	12
2.3	Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$	14
2.4	Espaços de Sobolev	14
2.4.1	Convergência em L^p e no dual de L^p	14
2.5	Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	16
2.6	Outros Resultados Úteis	18
3	Equação de Burgers Dissipativa com Fronteira Móvel	22
3.1	Soluções Aproximadas	24
3.2	Estimativas “a priori”	25
3.3	Convergência do Sistema Aproximado	29
3.4	Verificação do Dado Inicial e Unicidade	30
3.5	Comportamento Assintótico	31
4	Método dos Elementos Finitos	34
4.1	Formulação Variacional	34
4.2	O Método de Faedo-Galerkin	34
4.3	Problema Aproximado	35
4.4	Método das Diferenças Finitas	37
4.4.1	Notação	37
4.4.2	Família de Métodos	38
4.5	Linearizando o sistema não linear	38

4.5.1	Procedimento 1: Linearizando o termo v do produto vv_y	38
4.5.2	Procedimento 2: Linearizando o termo v_y do produto vv_y	39
4.5.3	Procedimento 3: Tornando o Tensor Simétrico	40
4.6	Função de Interpolação	41
4.6.1	Cálculo das Matrizes	43
4.6.2	Calculando os elementos da Matriz A	43
4.6.3	Calculando os elementos da Matriz B	47
4.6.4	Calculando os elementos da Matriz E	51
4.6.5	Calculando os elementos da Matriz \hat{B}_{ij}	54
5	Simulações Numéricas	60
5.1	Exemplo 1	61
5.1.1	Convergência Numérica	64
5.1.2	Decaimento da Energia	65
5.2	Exemplo 2	66
5.2.1	Convergência Numérica	68
5.3	Exemplo 3	70
5.3.1	Convergência Numérica	72
6	A Equação de Burgers em Domínio Cilíndrico	75
6.1	Formulação Variacional	75
6.2	O Método de Faedo-Galerkin	76
6.3	Problema Aproximado	76
6.3.1	Calculando os elementos da Matriz D	78
6.4	Método das Diferenças Finitas	83
6.5	Simulações Numéricas para o Problema em Domínio Cilíndrico	84
6.5.1	Exemplo 1	84
6.5.2	Convergência Numérica	87
	Bibliografia	90

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho considera-se uma equação clássica da Física Matemática, a saber, a Equação de Burgers com viscosidade

$$u_t + u_x + uu_x - \nu u_{xx} = 0.$$

Esta equação diferencial não linear de 2ª ordem é usada na dinâmica dos fluidos, como um modelo simplificado para turbulência, na formação de ondas de choque, propagação de ondas solitárias, entre outras.

1.1 Proposta de Pesquisa

A proposta é estudar o seguinte problema misto:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, t) + u_x(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) - \nu u_{xx}(x, t) = 0 \text{ em } Q_t, \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0 \text{ para } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega_0, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

onde o domínio $Q_t \subset \mathbb{R}^2$ é definido por

$$Q_t = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T); x \in \Omega_t\} \quad \text{e} \quad \Omega_t = \{x \in \mathbb{R}; \alpha(t) < x < \beta(t)\},$$

sendo α e β funções reais com valores reais e regulares. A solução u do problema (3.1) é uma função que depende da variável espacial x e temporal t . A constante ν do termo u_{xx} é chamado constante de viscosidade, a qual será considerado $\nu = 1$.

Estuda-se nesta dissertação os aspectos matemáticos e numéricos do sistema misto (3.1) com o objetivo de estabelecer existência e unicidade de soluções e análise numérica das mesmas.

No caso teórico usa-se basicamente os métodos de Faedo-Galerkin e Compacidade. Numericamente, usa-se os métodos de Elementos Finitos e Diferenças Finitas.

Capítulo 2

Resultados Básicos

Neste capítulo apresenta-se os pré-requisitos necessários para desenvolver os capítulos subsequentes.

2.1 Espaço das Distribuições Escalares

Definição 2.1. Dada uma função contínua, $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto, denomina-se suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega .$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω , com suporte compacto em Ω .

2.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima, será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que se uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergir, em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ , então,

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω .

Dado um aberto Ω do \mathbb{R}^N denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de *Lebesgue* em Ω , equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ denota-se por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega,$$

onde quase sempre significa a menos de um conjunto de medida nula.

Neste espaço considera-se a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess } |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, é um espaço de *Banach*. Em particular, quando $p = 2$, tem-se que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* cuja *norma* e *produto interno* serão definidos e denotados, respectivamente por

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

norma

Lema 2.2 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .*

Demonstração. Ver [1]. □

2.3 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

A seqüência de distribuições escalares $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < \infty.$$

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2.4 Espaços de Sobolev

2.4.1 Convergência em L^p e no dual de L^p

Diz-se que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será denotado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, é reflexivo. Para demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços $L^p(\Omega)$ consulte Brezis [1].

Teorema 2.3. *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge quase sempre para f em Ω , e existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ quase sempre em Ω .

Demonstração. Ver [1]. □

Definição 2.4. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que*

$$i) \|\omega_n\|_H = 1 \quad \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \quad \forall n, m, m \neq n;$$

ii) *O espaço gerado pela $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é denso em H .*

Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O *espaço de Sobolev de ordem m* , modelado sobre $L^p(\Omega)$, aqui denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, é por definição o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^p(\Omega)$ para as quais suas derivadas até a ordem α , no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e quando $p = \infty$, define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposição 2.5. *Os espaços lineares $W^{m,p}(\Omega)$ equipados das respectivas normas acima são espaços de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, que é denotado por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

cuja norma e produto interno são dados respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

O espaço $H^m(\Omega)$ com a estrutura topológica acima, é um espaço de *Hilbert*, continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é o espaço denotado por $H^{-m}(\Omega)$. A caracterização de $W^{-m,p}(\Omega)$ é dada por:

Teorema 2.6. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração. Ver [1]. □

Lema 2.7 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Demonstração. Ver [1]. □

Observação 2.8. *Usando a desigualdade de Poincaré conclui-se que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.*

2.5 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E . Uma função vetorial $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$. Define-se a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \varphi_i.$$

Diz-se que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é Bochner integrável (\mathcal{B} -integrável) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

i) $\varphi_\nu \rightarrow u$ em X , q.s. em $(0, T)$;

ii) $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0$.

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X . Diz-se que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à *Lebesgue*.

Denota-se por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lesbeque* em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$. A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0, T; X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, mostra-se que para cada $u \in [L^p(0, T; X)]'$, existe $\tilde{u} \in L^{p'}(0, T; X')$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle \tilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , o qual será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 2.9. *Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}'(0, T).$$

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$ representa-se o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da *convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$ denota-se o *espaço das funções* $u : [0, T] \rightarrow X$ *fracamente contínuas*, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$ para $\forall v \in H$.

Teorema 2.10 (Aubin-Lions). *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1 , $1 < p_0, p_1 < \infty$, e, W o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração. Ver [5]. □

Observação 2.11. *Uma consequência do Teorema de Aubin-Lions 2.10: se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W . Daí, segue que existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \rightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$.*

Proposição 2.12. *Sejam V e H espaços de Hilbert, V continuamente imerso em H , $u \in L^p(0, T; V)$ e $u' \in L^p(0, T; H)$, com $1 \leq p < \infty$, então*

$$u \in C^0([0, T]; H) \cap C_w^0([0, T]; V).$$

2.6 Outros Resultados Úteis

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ e $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N$. Diz-se que F satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando

- $F(t, \Upsilon)$ é mensurável em t , para cada Υ fixo;
- $F(t, \Upsilon)$ é contínua em Υ , para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D , existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|F(t, \Upsilon)| \leq m_K(t)$, para todo $(t, \Upsilon) \in D$.

Definição 2.13. *Uma solução no sentido estendido do problema de Cauchy*

$$\left| \begin{array}{l} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

é uma função $\Phi = \Phi(t)$ absolutamente contínua tal que, para algum β real, tenha-se

i) $(t, \Phi(t)) \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta];$

ii) $\Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$ para todo $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.

Considere-se o retângulo $R = \{(t, \Upsilon) \in \mathbb{R}^{N+1}; |t - t_0| \leq a, |\Upsilon - \Upsilon_0| \leq b\}$, com $a, b > 0$. Então tem-se os seguintes resultados:

Teorema 2.14 (Carathéodory). *Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R , então sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$), existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\left| \begin{array}{l} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = \Upsilon_0. \end{array} \right.$$

Corolário 2.15 (Prolongamento de solução). *Sejam $D = [0, \omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \{\Upsilon \in \mathbb{R}^N; |\Upsilon| \leq b\}$, $b > 0$ e F nas condições de Carathéodory. Seja $\Phi(t)$ uma solução de*

$$\left| \begin{array}{l} X' = F(t, X) \\ X(0) = X_0, |X_0| \leq b. \end{array} \right.$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde $\Phi(t)$ está definida, se tenha, $|\Phi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então Φ tem um prolongamento até $[0, \omega]$.

Lema 2.16 (Lions). *Sejam Q um aberto limitado do $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(Q)$, $1 < q < +\infty$, tal que $\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C$, $g_m \rightarrow g$ quase sempre em Q . Então $g_m \rightarrow g$ na topologia fraca de $L^q(Q)$.*

Demonstração. Ver [5]. □

Lema 2.17 (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial). *Seja $\eta(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$.*

i) Se η satisfaz para t q.s. a desigualdade diferencial

$$\eta'(t) \leq \psi(t) + \varphi(t)\eta(t), \quad (2.1)$$

onde $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas e integráveis em $[0, T]$, então

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leq e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} ds \right] \\ &\leq e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) Em particular, se $\eta' \leq \varphi\eta$ em $[0, T]$ e $\eta(0) = 0$, então

$$\eta \equiv 0 \quad \text{em } [0, T]$$

Demonstração. Multiplicando ambos os membros de (2.1) por $e^{-\int_0^s \varphi(r) dr}$ tem-se

$$\frac{d}{ds} \left(\eta(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \right) = (\eta'(s) - \varphi(s)\eta(s)) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \leq \psi(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr}$$

para $0 \leq t \leq T$ quase sempre.

Conseqüentemente, para cada $0 \leq t \leq T$, conclui-se

$$\eta(t) = e^{\int_0^t \varphi(r) dr} \left[\eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \psi(s) ds \right] \leq e^{\int_0^t \varphi(r) dr} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

para $0 \leq t \leq T$ quase sempre. □

Lema 2.18 (Desigualdade de Gronwall - Forma Integral). *Sejam u, φ, ψ funções reais não negativas em $[0, T]$ satisfazendo*

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(\sigma) u(\sigma) d\sigma \quad (2.3)$$

para todo $t \in [0, T]$. Então para todo $t \in [0, T]$ tem-se

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds.$$

Demonstração. Considerando o funcional auxiliar

$$\eta(t) = \int_0^t \psi(s) u(s) ds.$$

Assim, de (2.3)

$$\eta'(t) = \psi(t) u(t) \leq \psi(t) (\varphi(t) + \eta(t)). \quad (2.4)$$

Definindo

$$F(t) = \eta(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau} \quad (2.5)$$

obtem-se

$$F'(t) = -\psi(t) \eta(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau} + \eta'(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau}$$

portanto usando (2.4)

$$F'(t) \leq \psi(t) \varphi(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau}.$$

Integrando ambos os membros,

$$F(t) \leq \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{-\int_0^s \psi(\tau) d\tau} ds.$$

De (2.5) obtém-se

$$\eta(t) \leq \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds,$$

mas de (2.3) $u(t) - \varphi(t) \leq \eta(t)$ e assim

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds$$

e obtém-se o resultado desejado. □

Capítulo 3

Equação de Burgers Dissipativa com Fronteira Móvel

O objetivo neste capítulo é estabelecer a existência e unicidade de soluções para o problema de fronteiras móveis

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, t) + u_x(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \text{ em } Q_t, \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0 \text{ para } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega_0, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

onde as funções reais α e β são tais que

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t), t \geq 0\}$$

e o domínio Q_t é dado por

$$Q_t = \{(x, t) \in \mathbb{R}; x \in \Omega_t \text{ e } t \geq 0\}.$$

A existência e unicidade de soluções do problema misto (3.1) é mostrada por meio de uma mudança de variável de modo que o problema (3.1) seja transformado em um domínio cilíndrico cujas secções não dependam do tempo t .

Para fazer tal transformação usa-se o seguinte difeomorfismo: a função f definida em Q_t com valores em $Q = \Omega \times [0, +\infty)$, onde $\Omega = (0, 1)$, é tal que

$$f(x, t) = \left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}, t \right), \quad (3.2)$$

onde $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$. Fazendo $y = \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}$ tem-se que $y \in (0, 1)$. De fato, da definição de Ω_t obtém-se

$$0 < x - \alpha(t) < \beta(t) - \alpha(t).$$

Daí, e da definição de γ tem-se que $\gamma(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ e

$$0 < \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} < 1.$$

Faz-se as seguintes hipóteses sobre α e β :

- $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'' \in L^1(0, +\infty)$
 - $\exists \gamma_0 > 0$ tal que $\gamma(t) \geq \gamma_0$ para todo $t \geq 0$.
- (3.3)

Usando o difeomorfismo (3.2), observando que $x = \alpha(t) + y\gamma(t)$ e denotando por

$$v(y, t) = (u \circ f^{-1})(y, t) = u(x, t)$$

$$\begin{array}{ccc} Q_t & \xrightarrow{f} & Q \\ u \downarrow & \swarrow v & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

tem-se que

$$u_t(x, t) = v_t(y, t) - \frac{1}{\gamma(t)} (\alpha'(t) + y\gamma'(t)) v_y(y, t), \quad (3.4)$$

$$\partial_x^k u(x, t) = \frac{1}{\gamma^k(t)} \partial_y^k v(y, t) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Substituindo (3.4) e (3.5) em (3.1) obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t(y, t) + a(y, t) v_y(y, t) + \frac{1}{\gamma(t)} v(y, t) v_y(y, t) - \frac{1}{\gamma^2(t)} v_{yy}(y, t) = 0 \quad \text{em } Q, \\ v(y, 0) = v_0(y) \quad \text{em } \Omega = (0, 1), \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad \text{para todo } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

onde o coeficiente $a(y, t)$ é definido por

$$a(y, t) = \frac{1}{\gamma(t)} \left[1 - (\alpha'(t) + y\gamma'(t)) \right]. \quad (3.7)$$

Definição 3.1. *Uma solução global e fraca do problema (3.1) é uma função real $u = u(x, t)$ definida em Q_t tal que*

$$u \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega_t)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega_t)), \quad u_t \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega_t)),$$

a equação (3.1)₁ é verificada no sentido de $L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega_t))$ e

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega.$$

Teorema 3.2. *Se $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)$, α e β satisfizerem as hipóteses em (3.3), então existe uma única solução u de (3.1) no sentido da definição (3.1).*

Devido ao difeomorfismo f , a função u é uma solução do problema (3.1) no sentido da definição (3.1) se, e somente se, v é uma solução de (3.6) no seguinte sentido

Definição 3.3. *A função real $v = v(y, t)$ definida em Q na classe*

$$v \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad v_t \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$$

satisfaz o problema (3.6) no sentido de $L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$ e

$$v(y, 0) = v_0(y) \quad \text{em } \Omega.$$

Assim, o Teorema 3.2 é equivalente a:

Teorema 3.4. *Se $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, α e β satisfizerem as hipóteses em (3.3), então existe uma única solução v de (3.6) no sentido da Definição (3.3).*

O problema misto com coeficientes variáveis (3.6) está definido no domínio cilíndrico Q . Assim, pode-se estabelecer a existência e unicidade de soluções usando técnicas apropriadas para domínios cilíndricos.

A demonstração do Teorema 3.4 é baseada no *Método de Faedo-Galerkin*, seguindo as seguintes etapas:

- i)* Existência de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita;
- ii)* Estimativas sobre as soluções aproximadas;
- iii)* Limite das soluções aproximadas;
- iv)* Verificação dos dados iniciais;
- v)* Unicidade de soluções.

3.1 Soluções Aproximadas

Sejam $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ autovetores da base especial de $H_0^1(\Omega)$ solução do Problema Espectral:

$$\begin{cases} -(w_i)_{yy} = \lambda_i w_i & \text{em } \Omega \\ (w_i)(0) = (w_i)(1) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

e V^m o subespaço gerado pelos m primeiros autovetores em $H_0^1(\Omega)$, ou seja, $V^m = [w_1, \dots, w_m]$. Procura-se $v^m \in V^m$ tal que $v^m(y, t) = \sum_{\nu=1}^m g_{\nu m}(t) w_\nu(y)$ seja solução do problema aproximado, a ser estabelecido como se segue:

Tomando $v^m(t)$ pertencente a V^m , então o sistema (3.6) é projetado sobre V^m e desse modo obtém-se o sistema

$$\begin{cases} (v_t^m(t), \varphi) + (a(y, t) v_y^m(t), \varphi) + \frac{1}{\gamma(t)} (v^m(t) v_y^m(t), \varphi) \\ - \frac{1}{\gamma^2(t)} (v_{yy}^m(t), \varphi) = 0, \\ v^m(y, 0) = v_{0m}(y), \end{cases} \quad (3.9)$$

para todo $\varphi \in V^m$, onde v_{0m} é definido por $v_{0m} = \sum_{\nu=1}^m v_0(w_\nu) w_\nu$ e supõe-se que

$$v_{0m} \longrightarrow v_0 \text{ forte em } H_0^1(\Omega). \quad (3.10)$$

Note que (\cdot, \cdot) em (3.9) representa o produto interno de $L^2(\Omega)$ onde $\Omega = (0, 1)$. O sistema aproximado (3.9) possui soluções v^m definidas em $[0, t_m[$. Essas soluções são obtidas por meio do Teorema de Carathéodory (2.14).

3.2 Estimativas “a priori”

Obtém-se agora estimativas que permitirão estender as soluções aproximadas v^m ao intervalo $[0, \infty)$ e passar o limite no problema (3.9). Assim, fazendo $\varphi = v^m(t)$ em (3.9)₁ tem-se:

$$(v_t^m(t), v^m) + (a(y, t) v_y^m(t), v^m) + \frac{1}{\gamma(t)} (v^m(t) v_y^m(t), v^m) - \frac{1}{\gamma^2(t)} (v_{yy}^m(t), v^m) = 0, \quad (3.11)$$

Desenvolvendo as integrais de (3.11), tem-se: o primeiro termo:

$$(v_t^m(t), v^m(t)) = \int_0^1 v_t^m(y, t) v^m(y, t) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} |v^m(y, t)|^2 dy \quad (3.12)$$

O segundo termo:

$$\begin{aligned}
& (a(y, t) v_y^m(t), v^m(t)) = \\
&= \int_0^1 a(y, t) v_y^m(y, t) v^m(y, t) dy = \\
&= a(y, t) [v^m(y, t)]^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 a_y(y, t) [v^m(y, t)]^2 dy - (a(y, t) v_y^m(t), v^m(t)) \\
&= -\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} |v^m(t)|^2 - (a(y, t) v_y^m(t), v^m(t))
\end{aligned}$$

Logo,

$$(a(y, t) v_y^m(t), v^m(t)) = \frac{1}{2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} |v^m(t)|^2. \quad (3.13)$$

O terceiro termo:

$$\frac{1}{\gamma(t)} (v^m(t) v_y^m(t), v^m(t)) = \frac{1}{3} \frac{1}{\gamma(t)} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} (v^m(y, t))^3 dy = 0 \quad (3.14)$$

Por fim, integrando por partes o quarto termo e substituindo (3.12), (3.13) e (3.14) em (3.11) tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v^m(t)|^2 + \frac{1}{\gamma^2(t)} |v_y^m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} |v^m(t)|^2 = 0 \quad (3.15)$$

Integrando (3.15) de 0 a t , resulta:

$$\frac{1}{2} |v^m(t)|^2 + \int_0^t \frac{1}{\gamma^2(s)} |v_y^m(s)|^2 ds \leq \frac{1}{2} |v_{0m}|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{|\gamma'(s)|}{\gamma(s)} |v^m(s)|^2 ds \quad (3.16)$$

Observação 3.5. Usando a hipótese (3.3)₁ conclui-se que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\gamma(t) \leq C_0 \text{ para todo } t \geq 0.$$

De fato, como $\alpha', \beta' \in L^1(0, +\infty)$ tem-se

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)| &\leq |\alpha(0)| + \int_0^t |\alpha'(\xi)| d\xi \\
&\leq |\alpha(0)| + \int_0^{+\infty} |\alpha'(t)| dt \\
&\leq C_1.
\end{aligned}$$

Analogamente, existe uma constante C_2 tal que $|\beta(t)| \leq C_2$. Logo,

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| \leq |\alpha(t)| + |\beta(t)| \leq C_1 + C_2 = C_0. \quad \square$$

Usando a Observação 3.5 e a hipótese (3.3)₂ tem-se de (3.16) que

$$\frac{1}{2} |v^m(t)|^2 + \frac{1}{C_0^2} \int_0^t |v_y^m(s)|^2 ds \leq \frac{1}{2} |v_{0m}|^2 + \frac{1}{2\gamma_0} \int_0^t |\gamma'(s)| |v^m(s)|^2 ds,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |v^m(t)|^2 + \frac{1}{C_0^2} \int_0^t |v_y^m(s)|^2 ds \leq \\ & \leq \frac{1}{2} |v_{0m}|^2 + \int_0^t \frac{1}{\gamma_0} |\gamma'(s)| \left(\frac{1}{2} |v^m(s)|^2 + \frac{1}{C_0^2} \int_0^s |v_y^m(\xi)|^2 d\xi \right) dt. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade (2.3), obtém-se

$$\frac{1}{2} |v^m(t)|^2 + \frac{1}{C_0^2} \int_0^t |v_y^m(s)|^2 ds \leq \frac{1}{2} |v_{0m}|^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0} \int_0^t |\gamma'(s)| e^{\frac{1}{\gamma_0} \int_s^t |\gamma'(\tau)| d\tau} ds \right) \quad (3.17)$$

De (3.10), $(v_{0m})_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada, ou seja existe $M_1 > 0$ tal que $|v_{0m}| < M_1$. Usando a hipótese (3.3)₂, tem-se

$$\int_0^{+\infty} |\gamma'(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |\alpha'(t)| dt + \int_0^{+\infty} |\beta'(t)| dt = C_0 - |\alpha(0)| - |\beta(0)| < +\infty.$$

De posse desses resultados e (3.17) tem-se

$$\frac{1}{2} |v^m(t)|^2 + \frac{1}{C_0^2} \int_0^t |v_y^m(s)|^2 ds < \frac{1}{2} M_1^2 (1 + C_3 e^{C_3}) = M_2^2,$$

para todo $t \geq 0$, onde $C_3 = \frac{C_0 - |\alpha(0)| - |\beta(0)|}{\gamma_0}$. Assim, como o integrando do segundo termo do primeiro membro é não negativo

$$\frac{1}{2} |v^m(t)|^2 + \frac{1}{C_0^2} \int_0^{+\infty} |v_y^m(t)|^2 dt \leq M_2^2. \quad (3.18)$$

De (3.18) segue-se que

$$(v^m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)), \quad (3.19)$$

$$(v_y^m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)), \quad (3.20)$$

o que é suficiente para afirmar-se que:

$$(v^m) \text{ é limitada em } L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega)), \quad (3.21)$$

Logo pode-se obter uma subsucessão, ainda representada por $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$v^m \rightharpoonup v \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (3.22)$$

Como o operador Laplaciano $-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é um isomorfismo de $H_0^1(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$, então da estimativa (3.19)₂ obtém-se que

$$(v_{yy}^m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, +\infty; H^{-1}(\Omega)). \quad (3.23)$$

Daí existe uma subsequência, ainda representada por $(v_{yy}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$v_{yy}^m \rightarrow v_{yy} \text{ fraco em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (3.24)$$

Finalmente, utilizando a equação aproximada

$$v_t^m = -av_y^m - \frac{1}{\gamma}v^m v_y^m + \frac{1}{\gamma^2}v_{yy}^m,$$

e as estimativas (3.19) e (3.20) conclui-se que

$$(v_t^m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, +\infty; H^{-1}(\Omega)),$$

pois o termo $-av_y^m - \frac{1}{\gamma}v^m v_y^m$ pertence a $L^2(\Omega)$ haja vista que $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^\infty(\Omega)$, o que nos permite tomar uma subsequência, ainda representada por $(v_t^m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$v_t^m \rightarrow v_t \text{ fraco em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (3.25)$$

Usando as estimativas acima mencionadas e o Teorema de Aubin-Lions (2.10), obtém-se uma subsucessão, ainda representada por $(v^m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$v^m \rightarrow v \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e q.s. em } Q. \quad (3.26)$$

Análise do termo não linear: de (3.20) tem-se

$$\|u^m\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} = \sup \text{ess } |u_x^m(t)| \leq M_0. \quad (3.27)$$

A seqüência $(u^m u_x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, pois, para todo $t \in [0, T]$ fixo, tem-se pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |u^m(t) u_x^m(t)|^2 &= \int_0^\ell |u^m(x, t)|^2 |u_x^m(x, t)|^2 dx \\ &\leq \|(u^m(t))^2\|_{L^\infty(\Omega)} \|(u_x^m(t))^2\|_{L^1(\Omega)} = \|u^m(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 |u_x^m(t)|^2. \end{aligned}$$

Usando agora que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, existe uma constante $c_3 > 0$ tal que $\|\cdot\|_{L^\infty(\rightarrow\Omega)} \leq c_3 \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ independente de t , donde obtém-se através de (3.20) que

$$|u^m(t) u_x^m(t)|^2 \leq c_3^2 |u_x^m(t)|^4 \leq c_3^2 M_0^4 = M_1^2. \quad (3.28)$$

E assim,

$$\|u^m u_x^m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup \text{ess } |u^m(t) u_x^m(t)| \leq M_1. \quad (3.29)$$

De (3.29), existe uma subsequência de $(u^m u_x^m)_{m \in \mathbb{N}}$ (que denotar-se-á da mesma forma) que converge na topologia fraco estrela para $\chi \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

Afirma-se que $\chi = uu_x$. De fato, a seqüência $((u^m)^2)_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(Q)$, pois,

$$\begin{aligned} |(u^m)^2|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^T \int_\Omega |(u^m(x, t))^2|^2 dxdt = \int_0^T \int_\Omega |u^m(x, t)|^4 dxdt \\ &= \int_0^T \|u^m(t)\|_{L^4(\Omega)}^4 dt, \end{aligned}$$

e como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ tem-se

$$|(u^m)^2|_{L^2(Q)}^2 \leq c_2^4 \int_0^T |u_x^m(t)|^4 dt \leq c_2^4 M_0^4 T.$$

Como $s \mapsto s^2$ é contínua, então $|u^m(x, t)|^2$ converge para $|u(x, t)|^2$ quase sempre em \mathbb{R} . De posse dessas informações, aplica-se o Lema 2.16 e conclui-se que

$$(u^m)^2 \rightharpoonup u^2 \text{ em } L^2(Q), \quad (3.30)$$

bem como no sentido das distribuições $\mathcal{D}'(Q)$. Neste sentido, conclui-se que $((u^m)^2)_x \rightharpoonup (u^2)_x$ em $\mathcal{D}'(Q)$, ou seja, $u^m u_x^m \rightharpoonup uu_x$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Como $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q) \subset \mathcal{D}'(Q)$, e pela unicidade do limite na topologia fraco estrela, obtém-se finalmente que $\chi = uu_x$, ou seja,

$$u^m u_x^m \xrightarrow{*} uu_x \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.31)$$

3.3 Convergência do Sistema Aproximado

As convergências (3.22), (3.24), (3.25), (3.26) e (3.31) são suficientes para tomar-se o limite no problema aproximado (3.11). Então, multiplicando o problema (3.11) por $\theta(t) \in L^2(0, \infty)$ e integrando em t , obtém-se para $\varphi(y) \in H_0^1(\Omega)$ que

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \langle v_t^m, \varphi \rangle \theta(t) dt + \int_0^\infty (a(t, y) v_y^m, \varphi) \theta(t) dt + \\ &\int_0^\infty \frac{1}{\gamma(t)} (v^m v_y^m, \varphi) \theta(t) dt - \int_0^\infty \frac{1}{\gamma^2(t)} \langle v_{yy}^m, \varphi \rangle \theta(t) dt = 0, \quad (3.32) \\ &\forall \theta(t) \in L^2(0, \infty) \text{ e } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap V^m \end{aligned}$$

De (3.25), tem-se que:

$$\int_0^\infty \langle v_t^m, \varphi \rangle \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^\infty \langle v_t, \varphi \rangle \theta(t) dt, \quad \forall \theta(t) \in L^2(0, \infty) \text{ e } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap V^m \quad (3.33)$$

De (3.20), tem-se que:

$$\int_0^\infty \langle v_y^m, \varphi \rangle \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^\infty \langle v_y, \varphi \rangle \theta(t) dt, \quad \forall \theta(t) \in L^2(0, \infty) \text{ e } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap V^m \quad (3.34)$$

Da observação 3.5,

$$\int_0^\infty \langle a(y, t)v_y^m, \varphi \rangle \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^\infty \langle a(y, t)v_y, \varphi \rangle \theta(t) dt, \quad \forall \theta(t) \in L^2(0, \infty) \quad (3.35)$$

e $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap V^m$

De (3.24), tem-se que:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\gamma^2(t)} \langle v_{yy}^m, \varphi \rangle \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\gamma^2(t)} \langle v_{yy}, \varphi \rangle \theta(t) dt, \quad \forall \theta(t) \in L^2(0, \infty) \quad (3.36)$$

e $\forall \varphi \in H^{-1}(\Omega)$

Finalmente, de (3.31) pode-se escrever

$$v^m v_y^m \rightharpoonup v v_y \quad \text{fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap V^m. \quad (3.37)$$

Logo,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\gamma(t)} \langle v^m v_y^m, \varphi \rangle \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\gamma(t)} \langle v v_y, \varphi \rangle \theta(t) dt, \quad \forall \theta(t) \in L^2(0, \infty) \text{ e } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (3.38)$$

Das convergências (3.33) a (3.38) obtém-se funções $v : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem (3.6) no sentido da Definição (3.3).

3.4 Verificação do Dado Inicial e Unicidade

A verificação do dado inicial é feito de modo usual em virtude da regularidade da solução do problema (3.6), ou seja

$$v \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \quad \text{e} \quad v_t \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$$

A unicidade de solução do sistema (3.6) é verificada de modo usual pelo Método da Energia, haja vista que a dualidade $\langle v_t, v \rangle$ faz sentido.

3.5 Comportamento Assintótico

Nesta seção o objetivo é mostrar que a energia do sistema (3.1) decai exponencialmente quando o tempo t torna-se bastante grande. Essa propriedade será demonstrada dentro do domínio não cilíndrico Q_t . Para isso, será usada a Regra de Leibniz, *i.e.*, para $\alpha, \beta \in C^1(0, +\infty)$ e $f \in C^1(Q_t)$, então

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t). \quad (3.39)$$

Multiplicando ambos os membros de (3.1)₁ por $u(x, t)$ e integrando em Ω_t tem-se

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left[u_t(x, t) + u_x(x, t) + u(x, t) u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) \right] u(x, t) dx = 0. \quad (3.40)$$

Fazendo uso de (3.39) pode-se reescrever o primeiro termo assim

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(x, t) u_t(x, t) dx &= \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} [u^2(x, t)] dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u(x, t)|^2 dx - \frac{1}{2} u^2(\beta(t), t) \beta'(t) + \frac{1}{2} u^2(\alpha(t), t) \alpha'(t). \end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira (3.1)₂ tem-se

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(x, t) u_t(x, t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u(x, t)|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \quad (3.41)$$

Usando novamente as condições de fronteira (3.1) os demais termos de (3.40) são modificadas como segue:

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(x, t) u_x(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} [u^2(x, t)] dx = \frac{1}{2} u^2(x, t) \Big|_{\alpha(t)}^{\beta(t)} = 0, \quad (3.42)$$

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u^2(x, t) u_x(x, t) dx = \frac{1}{3} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial x} [u^3(x, t)] dx = 0, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(x, t) u_{xx}(x, t) dx &= -u(x, t) u_x(x, t) \Big|_{\alpha(t)}^{\beta(t)} + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_x^2(x, t) dx \\ &= |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Substituindo (3.41) a (3.44) em (3.40) resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 = - |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \quad (3.45)$$

Daí, a energia do sistema (3.1) é naturalmente dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} |u(t)|^2. \quad (3.46)$$

De (3.45) e (3.46) vê-se que a energia $E(t)$ é não crescente. Usando essa propriedade, mostra-se que $E(t)$ decai exponencialmente. Antes porém, mostra-se o seguinte resultado:

Lema 3.6. *Se $u \in H_0^1(\Omega_t)$, então a desigualdade de Poincaré é verificada. Isto é,*

$$|u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq \gamma^2(t) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2.$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$u(x, t) = \int_{\alpha(t)}^x \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, t) d\xi.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |u(x, t)|^2 &= \left(\int_{\alpha(t)}^x 1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, t) d\xi \right)^2 \leq \left(\int_{\alpha(t)}^x \left| 1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, t) \right| d\xi \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |1| \cdot |u_x(x, t)| dx \right)^2 \\ &\leq (\beta(t) - \alpha(t)) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_x(x, t)|^2 dx \\ &= \gamma(t) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \end{aligned}$$

Integrando em Ω_t obtém-se

$$\begin{aligned} |u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 &\leq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \gamma(t) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 dx \\ &= \gamma(t) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} dx \\ &= \gamma^2(t) |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.7. *Assumindo as hipóteses do Teorema 3.2 então a energia $E(t)$ associada às soluções fracas do sistema (3.1) satisfaz*

$$E(t) \leq E(0) e^{-\frac{1}{C_0^2} t} \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde C_0 é uma constante positiva definida na Observação 3.5.

Demonstração. Da Observação 3.5 e do Lema 3.6 resulta

$$|u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq C_0^2 |u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2, \quad (3.47)$$

ou ainda

$$-|u_x(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq -\frac{1}{C_0^2} |u(t)|_{L^2(\Omega_t)}^2. \quad (3.48)$$

De (3.45) e (3.48) tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 \leq -\frac{1}{C_0^2} |u(t)|^2. \quad (3.49)$$

De (3.46) e (3.49) obtém-se

$$\frac{1}{2} E'(t) + \frac{1}{C_0^2} E(t) \leq 0,$$

ou equivalentemente

$$\frac{d}{dt} \left\{ e^{\frac{2}{C_0^2} t} E(t) \right\} \leq 0. \quad (3.50)$$

Integrando esta última desigualdade a demonstração do Teorema 3.7 está concluída. \square

Capítulo 4

Método dos Elementos Finitos

4.1 Formulação Variacional

O Método de Elementos Finitos não é aplicável diretamente ao Problema (3.6). Assim, é necessário expressar o problema numa forma mais adequada, ou seja, a formulação variacional, para que seja possível aplicar o Método de Faedo-Galerkin.

Seja $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções teste, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e $w \in \mathcal{D}(\Omega)$. Multiplicando a primeira equação do Problema (3.6) por w e integrando em $\Omega = (0, 1)$, obtem-se

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} w dy + \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} w dy + \frac{1}{\gamma(t)} \int_0^1 v \frac{\partial v}{\partial y} w dy - \frac{1}{\gamma^2(t)} \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w dy = 0 \quad (4.1)$$

4.2 O Método de Faedo-Galerkin

Consiste em aproximar o espaço das soluções $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ por um subespaço de dimensão finita.

Denota-se por φ_i , $i \in \mathbb{N}$, uma base de $H_0^1(\Omega)$ e seja $V^m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$ um subespaço de $H_0^1(\Omega)$ formado pelos m primeiros vetores base do espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Agora, buscamos uma solução aproximada $v^m(y, t) \in V^m$ do Problema (3.6) no subespaço V^m .

4.3 Problema Aproximado

Aproxima-se o Problema (3.6) pelo problema de determinar, no espaço das soluções V^m , uma função $v^m = v^m(y, t)$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_t^m, w) + (a(y, t)v_y^m, w) + \frac{1}{\gamma(t)}(v^m v_y^m, w) - \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yy}^m, w) = 0 \text{ em } Q, \\ v^m(y, 0) = v_0^m(y) \text{ em } \Omega = (0, 1), \\ v^m(0, t) = v^m(1, t) = 0 \text{ para todo } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

para todo $w \in V^m$. A formulação variacional em V^m é dada por:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial v^m}{\partial t} w dy + \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial v^m}{\partial y} w dy + \frac{1}{\gamma(t)} \int_0^1 v^m \frac{\partial v^m}{\partial y} w dy \\ - \frac{1}{\gamma^2(t)} \int_0^1 \frac{\partial^2 v^m}{\partial y^2} w dy = 0, \forall w \in V^m. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Integrando por partes a última integral, obtém-se

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 v^m}{\partial y^2} w dy = w \frac{\partial v^m}{\partial y} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial v^m}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy = - \int_0^1 \frac{\partial v^m}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy,$$

pois $w(0) = w(1) = 0$. Substituindo em (4.3), tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial v^m}{\partial t} w dy + \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial v^m}{\partial y} w dy + \frac{1}{\gamma(t)} \int_0^1 v^m \frac{\partial v^m}{\partial y} w dy \\ + \frac{1}{\gamma^2(t)} \int_0^1 \frac{\partial v^m}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy = 0, \forall w \in V^m. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Procura-se uma solução aproximada do problema (4.2), dado por:

$$v^m(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y) \in V^m \quad (4.5)$$

onde $d_i(t)$ são os coeficientes à determinar. De (4.5) deduzimos:

$$v_t^m(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i'(t) \varphi_i(y) \quad (4.6)$$

$$v_y^m(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.5),(4.6) e (4.7) no problema aproximado (4.4), obtem-se:

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^m d'_i(t) \varphi_i(y) w dy + \int_0^1 a(y, t) \sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} w dy +$$

$$\frac{1}{\gamma(t)} \int_0^1 \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y) \sum_{k=1}^m d_k(t) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} w dy + \frac{1}{\gamma^2(t)} \int_0^1 \sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy = 0$$
(4.8)

Tomando em particular $w = \varphi_j(y) \in V^m$ e substituindo em (4.8):

$$\sum_{i,k,j=1}^m \left[d'_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j dy + d_i(t) \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy +$$

$$\frac{1}{\gamma(t)} d_i(t) d_k(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy + \frac{1}{\gamma^2(t)} d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy \right] = 0$$
(4.9)

Definindo as matrizes A, B e E, tem-se:

$$A = a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy$$

$$B = b_{ij} = \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy$$

$$E = e_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy$$

Definimos, ainda, o Tensor de 3ª ordem $B_{ikj} = \left(\varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial x}, \varphi_j \right)$

E assim obtem-se o seguinte Sistema Não Linear de Equações Diferenciais Ordinárias:

$$Ad'(t) + Bd(t) + \frac{1}{\gamma(t)} B_{ikj} d^2(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} Ed(t) = 0$$
(4.10)

As matrizes A, B e E são quadradas de ordem m e $d = [d_1, d_2, \dots, d_m]^t$ é o vetor incógnita.

O sistema de Equações Diferenciais Ordinárias a seguir será resolvido pelo Método das Diferenças Finitas.

$$\begin{cases} Ad'(t) + \frac{1}{\gamma(t)} B_{ikj} d^2(t) + (B + \frac{1}{\gamma^2(t)} E)d(t) = 0 \\ d(0) = d_0 \end{cases}$$
(4.11)

4.4 Método das Diferenças Finitas

Seja $d(t) \in C^{n+1}(0, T)$. Do Teorema de Taylor pode-se expandir a função $d(t)$ da seguinte forma:

$$d(t + \Delta(t)) = d(t) + \Delta(t)d'(t) + \frac{\Delta^2(t)}{2!}d''(t) + \frac{\Delta^3(t)}{3!}d'''(t) + \dots \quad (4.12)$$

Desprezando os termos de potência maior ou igual a 2 de $\Delta(t)$ em (4.12) tem-se a seguinte aproximação para a primeira derivada:

$$d'(t) = \frac{d(t + \Delta t) - d(t)}{\Delta t} \quad (4.13)$$

A aproximação acima é uma Diferença Adiantada e possui erro de aproximação de ordem $\mathcal{O}(\Delta t)$

4.4.1 Notação

Supõe-se que $d(y, t)$ seja uma função das variáveis independentes $y \in [0, 1]$ e $t \in [0, T]$ e seja a seguinte discretização uniforme: $0 = y_1 < y_2 < \dots < y_m = 1$ e $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, onde $h = y_{i+1} - y_i$ e $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ são denominados passos. Assim, $h = \frac{1}{m-1}$ e $\Delta t = \frac{T}{N-1}$ e cada elemento discreto pode ser obtido por:

$$y_i = y_1 + (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e}$$

$$t_n = (n-1)\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Denota-se a função $d(y, t)$ nos pontos discretos (y_i, t_n) da seguinte forma:

$$d(y_i, t_n) = d\left(y_1 + (i-1)h, t_1 + (n-1)\Delta t\right) = d_i^n = d^n$$

Com essa notação a diferença adiantada (4.13) é dada por:

$$\left(\frac{d(y, t)}{\partial t}\right)_{i,n} \simeq \frac{1}{\Delta t}(d_i^{n+1} - d_i^n) = \left(\frac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t}\right) \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta t) \quad (4.14)$$

Por abuso de notação, usa-se de agora em diante o símbolo $=$ em lugar de \simeq .

4.4.2 Família de Métodos

Aproxima-se:

$$d(t) = d(t_n) = d^n, \text{ onde } d^n = \theta d^{n+1} + (1 - \theta)d^n, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Se

(i) $\theta = 0$, então obtém-se o Esquema de Euler.

(ii) $\theta = \frac{1}{2}$, então obtém-se o Esquema de Crank - Nicolson.

4.5 Linearizando o sistema não linear

Sistemas não lineares do ponto de vista numérico não apresentam bons resultados e são de difícil resolução. Objetivando solucionar esse problema, adotamos os seguintes procedimentos possíveis:

4.5.1 Procedimento 1: Linearizando o termo v do produto vv_y

Do termo não linear pode-se fazer a seguinte linearização no tempo $t = t_n$

$$\bar{B}_{kj}^n \frac{1}{2} (d_k^n + d_k^{n+1}) = \frac{1}{2} \bar{B}_{kj}^n(t) d_k^n + \frac{1}{2} \bar{B}_{kj}^n(t) d_k^{n+1} \quad (4.15)$$

onde $\bar{B}_{kj}^n = (B_{ikj} d_i^n)$ é uma matriz de ordem $m \times m$.

Por outro lado $d'_k(t) = \frac{(d_k^{n+1} - d_k^n)}{\Delta t}$, para o tempo $t = t_n$.

Substituindo as duas aproximações no sistema não linear (4.10), obtem-se

$$\begin{aligned} A \left(\frac{d_k^{n+1} - d_k^n}{\Delta t} \right) + B \left(\frac{d_k^{n+1} + d_k^n}{2} \right) + \frac{1}{\gamma(t)} \bar{B}_{kj}(t) \left(\frac{d_k^{n+1} + d_k^n}{2} \right) \\ + \frac{1}{\gamma^2(t)} E \left(\frac{d_k^{n+1} + d_k^n}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

Como a solução é conhecida no tempo t_n os termos d^n são conhecidos e dessa forma multiplicando a equação por $2\Delta t$ obtem-se

$$\begin{aligned} 2Ad_k^{n+1} + \Delta t B d_k^{n+1} + \frac{\Delta t}{\gamma(t)} \overline{B}_{kj}(t) d_k^{n+1} + \frac{\Delta t}{\gamma^2(t)} E d_k^{n+1} = \\ 2Ad_k^n - \Delta t B d_k^n - \frac{\Delta t}{\gamma(t)} \overline{B}_{kj}(t) d_k^n - \frac{\Delta t}{\gamma^2(t)} E d_k^n, \end{aligned} \quad (4.17)$$

Portanto tem-se o seguinte sistema linear com relação ao vetor incógnita d :

$$\begin{aligned} \left(2A + \left(B + \frac{1}{\gamma(t)} \overline{B}_{kj}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} E \right) \Delta t \right) d^{n+1} = \\ \left(2A - \left(B + \frac{1}{\gamma(t)} \overline{B}_{kj}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} E \right) \Delta t \right) d^n, \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.5.2 Procedimento 2: Linearizando o termo v_y do produto vv_y

Considere agora, a matriz $\widehat{B}_{ij}(t) = (B_{ikj} d_k(t))$ de ordem $m \times m$, então o sistema não linear (4.10), pode ser escrito na forma.

$$Ad'(t) + Bd(t) + \frac{1}{\gamma(t)} \widehat{B}_{ij} d(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} Ed(t) = 0 \quad (4.19)$$

Do termo não linear pode-se fazer a seguinte linearização no tempo $t = t_n$

$$\widehat{B}_{ij}^n \frac{1}{2} (d_i^n + d_i^{n+1}) = \frac{1}{2} \widehat{B}_{ij}^n d_i^n + \frac{1}{2} \widehat{B}_{ij}^n d_i^{n+1} \quad (4.20)$$

onde $\widehat{B}_{ij}^n = (B_{kij} d_k^n)$ é uma matriz de ordem $m \times m$.

Por outro lado $d_i'(t) = \frac{1}{\Delta t} (d_i^{n+1} - d_i^n)$, para o tempo $t = t_n$.

Substituindo as duas aproximações no sistema não linear (4.19), obtem-se

$$\begin{aligned}
A \left(\frac{d_i^{n+1} - d_i^n}{\Delta t} \right) + B \left(\frac{d_i^{n+1} + d_i^n}{2} \right) + \frac{1}{\gamma(t)} \widehat{B}_{ij}(t) \left(\frac{d_i^{n+1} + d_i^n}{2} \right) \\
+ \frac{1}{\gamma^2(t)} E \left(\frac{d_i^{n+1} + d_i^n}{2} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Organizando os termos, teremos:

$$\begin{aligned}
2Ad_i^{n+1} + \Delta t B d_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\gamma(t)} \widehat{B}_{ij}(t) d_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\gamma^2(t)} E d_i^{n+1} \\
= 2Ad_i^n - \Delta t B d_i^n - \frac{\Delta t}{\gamma(t)} \widehat{B}_{ij}(t) d_i^n - \frac{\Delta t}{\gamma^2(t)} E d_i^n,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Portanto tem-se o seguinte sistema linear com relação ao vetor incognita d :

$$\begin{aligned}
\left(2A + \left(B + \frac{1}{\gamma(t)} \widehat{B}_{ij}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} E \right) \Delta t \right) d^{n+1} \\
= \left(2A - \left(B + \frac{1}{\gamma(t)} \widehat{B}_{ij}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} E \right) \Delta t \right) d^n,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Observação: Note que as matrizes \widehat{B}_{ij}^n e \overline{B}_{kj}^n são, em geral, diferentes.

4.5.3 Procedimento 3: Tornando o Tensor Simétrico

Pode-se simetrizar o termo da seguinte forma

$$B_{ikj} = \frac{1}{2} \left(\left(\varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial y}, \varphi_j \right) + \left(\varphi_k(y) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}, \varphi_j \right) \right) = B_{kij} \tag{4.24}$$

Note que agora

$$\overline{B}_{kj} = B_{ikj} d_i = B_{ikj} d_k = \widehat{B}_{ij}$$

De forma análoga ao procedimento 1, pode-se definir $\overline{B}_{kj}^n = B_{ikj} d_i^n$. Substituindo no sistema linear, obtém-se que

$$\begin{aligned}
& \left(2A + \left(B + \frac{1}{\gamma(t)} \overline{B}_{kj}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} E \right) \Delta t \right) d^{n+1} \\
& = \left(2A - \left(B + \frac{1}{\gamma(t)} \overline{B}_{kj}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} E \right) \Delta t \right) d^n,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Retonando ao sistema de equações diferenciais ordinárias (4.11). Ao aplicar o Método de Elementos Finitos no espaço obtem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias cuja variável é o tempo t . Esse sistema então será resolvido pelo Método de Diferenças Finitas no tempo.

Será usado o Procedimento 2, pois o mesmo apresentou melhor resultado computacional para a resolução do sistema:

$$\begin{cases} Ad'(t) + \frac{1}{\gamma(t)} \widehat{B}_{ij} d(t) + (B + \frac{1}{\gamma^2(t)} E) d(t) = 0 \\ d(0) = d_0 \end{cases} \tag{4.26}$$

4.6 Função de Interpolação

Para se trabalhar com o ajustamento e interpolação de funções, a aproximação por polinômios é muito conveniente, uma vez que os polinômios têm várias propriedades interessantes, dentre estas a de função analítica, que torna possível calcular as derivadas, de qualquer ordem, dos polinômios. Construímos polinômios por partes, pois dessa forma são permitidas descontinuidades das derivadas de ordem mais elevadas em alguns pontos. Essa característica confere às funções polinomiais por partes, chamadas splines, que possuem boas propriedades de aproximação, convergência e estabilidade.

Em geral, o Spline Matemático é um polinômio de grau k com continuidade de derivada de ordem $k - 1$ nos nós comuns entre segmentos.

A Spline Linear ($k = 1$) apresenta a desvantagem de ter derivada primeira descontínua nos nós. Se usarmos Splines Quadráticas ($k=2$), teremos derivadas contínuas até ordem 1 apenas e, portanto, a curvatura pode trocar nos nós.

Uma Spline Cúbica, é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte é um polinômio de grau 3 no intervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 2, 3, \dots, m - 1$, que tem a primeira e

segunda derivadas contínuas, o que faz com que a curva não tenha picos e nem troque abruptamente de curvatura nos nós.

Por esta razão, as funções bases $\varphi_i(y)$ do subespaço V^m serão tomadas como sendo as Splines Cúbicas ou B-splines definidas por

Para $i = 1, 2, \dots, m$

$$B_i(y) = \begin{cases} \frac{(y - y_{i-2})^3}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i-2}, y_{i-1}] \\ \frac{1}{4} + \frac{3(y - y_{i-1})}{4h} + \frac{3(y - y_{i-1})^2}{4h^2} - \frac{3(y - y_{i-1})^3}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i-1}, y_i] \\ \frac{1}{4} + \frac{3(y_{i+1} - y)}{4h} + \frac{3(y_{i+1} - y)^2}{4h^2} - \frac{3(y_{i+1} - y)^3}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_i, y_{i+1}] \\ \frac{(y_{i+2} - y)^3}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i+1}, y_{i+2}] \\ 0 & \text{se } y \notin [y_{i-2}, y_{i+2}] \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial B_i}{\partial y}(y) = \begin{cases} \frac{3(y - y_{i-2})^2}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i-2}, y_{i-1}] \\ \frac{3}{4h} + \frac{3(y - y_{i-1})}{2h^2} - \frac{9(y - y_{i-1})^2}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i-1}, y_i] \\ -\frac{3}{4h} - \frac{3(y_{i+1} - y)}{2h^2} + \frac{9(y_{i+1} - y)^2}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_i, y_{i+1}] \\ -\frac{3(y_{i+2} - y)^2}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i+1}, y_{i+2}] \\ 0 & \text{se } y \notin [y_{i-2}, y_{i+2}] \end{cases}$$

onde é assumindo que os pontos são igualmente espaçados, isto é, $h = x_{i+1} - x_i$, $x_1 = 0$ e $x_m = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$. Pode-se mostrar que $B_i(y)$ de fato é uma base para os splines cúbicos, ou seja, toda spline cúbica pode ser escrita como combinação linear das B-splines.

Note que para as funções B_0, B_1, B_m , e B_{m+1} , precisamos introduzir os pontos nodais auxiliares: $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{m+1}, y_{m+2}$ e y_{m+3} que dependem dos valores de fronteira. Consideremos o intervalo $\Omega = (0, 1)$ com $y_1 = 0$ e $y_m = 1$ e os valores de fronteira nulos.

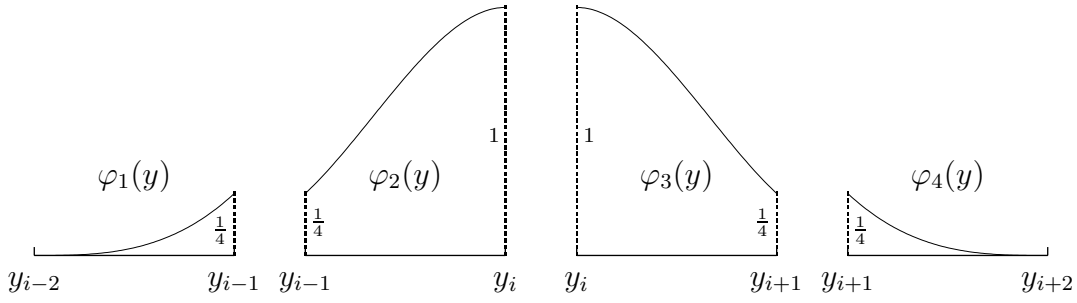


Figure 4.1: Função base local: spline cúbico

As funções B_3, \dots, B_{m-2} se anulam nas fronteiras de cada intervalo que as define, mas as funções B_1, B_2, B_{m-1} e B_m não satisfazem. Com esse objetivo considere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(y) = B_i(y), \quad i = 3, \dots, m-2 \\ \varphi_1(y) = B_1(y) - 4B_0(y), \quad \varphi_2(y) = B_2(y) - B_0(y) \\ \varphi_{m-1}(y) = B_{m-1}(y) - B_{m+1}(y), \quad \varphi_m(y) = B_m(y) - 4B_{m+1}(y) \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Temos que $B_i(y_i) = 1$ e $B_i(y_{i-1}) = B_i(y_{i+1}) = \frac{1}{4}$, então é fácil de verificar que $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_{m-1}(1) = \varphi_m(1) = 0$ e portanto satisfazem os valores de fronteira.

4.6.1 Cálculo das Matrizes

Calcularemos as matrizes A, B e E e o Tensor de 3ª Ordem B_{ikj} , usando as funções base, splines cúbicas, já definidas. Desde que $\varphi_i \varphi_j = 0$ para $|i - j| \leq 3$, cada matriz do sistema é uma matriz heptagonal e portanto somente os elementos a_{ij} , com $|i - j| \leq 3$ não são necessariamente nulos.

4.6.2 Calculando os elementos da Matriz A

$$A = a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy$$

A matriz A é simétrica, logo $a_{i,i+1} = a_{i+1,i}$, $a_{i,i+2} = a_{i+2,i}$ e $a_{i,i+3} = a_{i+3,i}$.

Assim, para $i \neq 1, 2, m-1, m$, tem-se:

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_i(y)dy = \int_0^1 \varphi_i(y)^2 dy = \int_{y_{i-2}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)^2 dy \\
&= \int_{y_{i-2}}^{y_{i-1}} \varphi_i(y)^2 dy + \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_i(y)^2 dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y)^2 dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)^2 dy \\
&= \frac{h}{112} + \frac{297h}{560} + \frac{297h}{560} + \frac{h}{112h} = \frac{151h}{140}
\end{aligned}$$

Para o elemento $a_{i,i+1}$ ($i \neq 1, 2, m-1, m$), tem-se:

$$\begin{aligned}
a_{i,i+1} = a_{i+1,i} &= \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy \\
&= \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy \\
&= \frac{129h}{2240} + \frac{933h}{2240} + \frac{129h}{2240} = \frac{1191h}{2240}
\end{aligned}$$

Para o elemento $a_{i,i+2}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
a_{i,i+2} = a_{i+2,i} &= \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_{i+2}(y)dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+2}(y)dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y)\varphi_{i+2}(y)dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+2}(y)dy \\
&= \frac{3h}{112} + \frac{3h}{112} = \frac{3h}{56}
\end{aligned}$$

Para o elemento $a_{i,i+3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
a_{i,i+3} = a_{i+3,i} &= \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_{i+3}(y)dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+3}(y)dy \\
&= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+3}(y)dy = \frac{h}{2240}
\end{aligned}$$

Os elementos da matriz A próximos das fronteiras $y = 0$ e $y = 1$ são calculados da seguinte forma:

Para o elemento a_{11} , tem-se:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 \varphi_1(y)\varphi_1(y)dy = \int_0^1 \varphi_1(y)^2 dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y)^2 dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y)^2 dy \\ &= \frac{17h}{80} + \frac{h}{112} = \frac{31h}{140} \end{aligned}$$

Para o elemento a_{12} , tem-se:

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{21} &= \int_0^1 \varphi_1(y)\varphi_2(y)dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y)\varphi_2(y)dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y)\varphi_2(y)dy \\ &= \frac{23h}{80} + \frac{129h}{2240} = \frac{773h}{2240} \end{aligned}$$

Para o elemento a_{13} , tem-se:

$$\begin{aligned} a_{13} = a_{31} &= \int_0^1 \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy \\ &= \frac{h}{40} + \frac{3h}{112} = \frac{29h}{560} \end{aligned}$$

Para o elemento a_{22} , tem-se:

$$\begin{aligned} a_{22} &= \int_0^1 \varphi_2(y)\varphi_2(y)dy = \int_0^1 \varphi_2(y)^2 dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_2(y)^2 dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_2(y)^2 dy + \int_{y_3}^{y_4} \varphi_2(y)^2 dy \\ &= \frac{17h}{15} + \frac{297h}{560} + \frac{h}{112} = \frac{41h}{40} \end{aligned}$$

Para o elemento $a_{m-1,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 a_{m-1,m-1} &= \int_0^1 \varphi_{m-1}(y)\varphi_{m-1}(y)dy = \int_0^1 \varphi_{m-1}(y)^2 dy \\
 &= \int_{y_{m-3}}^{y_{m-2}} \varphi_{m-1}(y)^2 dy + \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_{m-1}(y)^2 dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_{m-1}(y)^2 dy \\
 &= \frac{h}{112} + \frac{297h}{560} + \frac{17h}{15} = \frac{41h}{40}
 \end{aligned}$$

Para o elemento $a_{m,m}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 a_{m,m} &= \int_0^1 \varphi_m(y)\varphi_m(y)dy = \int_0^1 \varphi_m(y)^2 dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y)^2 dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y)^2 dy \\
 &= \frac{h}{112} + \frac{17h}{80} = \frac{31h}{140}
 \end{aligned}$$

Para o elemento $a_{m,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 a_{m,m-1} = a_{m-1,m} &= \int_0^1 \varphi_m(y)\varphi_{m-1}(y)dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y)\varphi_{m-1}(y)dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y)\varphi_{m-1}(y)dy \\
 &= \frac{23h}{80} + \frac{129h}{2240} = \frac{773h}{2240}
 \end{aligned}$$

Para o elemento $a_{m,m-2}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 a_{m,m-2} = a_{m-2,m} &= \int_0^1 \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy \\
 &= \frac{h}{40} + \frac{h}{112} = \frac{29h}{560}
 \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $A_{m \times m}$ na forma matricial será:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{31h}{140} & \frac{773h}{2240} & \frac{29h}{560} & \frac{h}{2240} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{773h}{2240} & \frac{41h}{40} & \frac{1191h}{2240} & \frac{3h}{56} & \frac{h}{2240} & \ddots & \vdots \\ \frac{29h}{560} & \frac{1191h}{2240} & \frac{151h}{140} & \frac{1191h}{2240} & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{h}{2240} & \frac{3h}{56} & \frac{1191h}{2240} & \ddots & \ddots & \frac{3h}{56} & \frac{h}{2240} \\ 0 & \frac{h}{2240} & \ddots & \ddots & \frac{151h}{140} & \frac{1191h}{2240} & \frac{29h}{560} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{3h}{56} & \frac{1191h}{2240} & \frac{41h}{140} & \frac{773h}{2240} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h}{2240} & \frac{29h}{560} & \frac{773h}{2240} & \frac{31h}{140} \end{bmatrix}$$

4.6.3 Calculando os elementos da Matriz B

Seja $a(y, t)$ uma função que depende de y e de t . Que-se calcular

$$\int_r^s a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy,$$

o que computacionalmente é um tanto quanto custoso. Para resolver este problema, usando o fato de que a função $a(y, t)$ é contínua em $y \in [0, 1]$, far-se a seguinte aproximação

$$\int_r^s a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \simeq \tilde{a}_{r,s}(t) \int_r^s \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy$$

onde $\tilde{a}_{r,s}(t) = a\left(\frac{r+s}{2}, t\right)$, o que não provocará grandes alterações em seu resultado quando o intervalo $[r, s]$ é pequeno, ou seja $s = r + h$, $h \ll 1$.

Consideremos a Matriz B

$$B = b_{ij} = \int_0^1 a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy$$

Pode-se calcular cada termo de B. Assim:

$$\begin{aligned}
b_{ii} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-2}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-2}}^{y_{i-1}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i-1}}^{y_i} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\
&+ \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{32} \tilde{a}_{y_{i-2}, y_{i-1}}(t) + \frac{15}{32} \tilde{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) - \frac{1}{32} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) - \frac{15}{32} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i,i+1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{i,i+1} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-1}}^{y_i} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&+ \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{71}{320} \tilde{a}_{y_{i-2}, y_{i-1}}(t) + \frac{183}{320} \tilde{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) - \frac{9}{320} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i+1,i}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{i+1,i} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-1}}^{y_i} a(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&+ \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{9}{320} \tilde{a}_{y_{i-2}, y_{i-1}}(t) + \frac{183}{320} \tilde{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) - \frac{71}{320} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i,i+2}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{i,i+2} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{19}{160} \tilde{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) + \frac{9}{160} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i+2,i}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{i+2,i} &= \int_0^1 \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{9}{160} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) - \frac{19}{160} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i,i+3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{i,i+3} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy = \\
&= \frac{1}{320} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i+3,i}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{i+3,i} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \\
&= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a(y, t) \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{1}{320} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento b_{11} , tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{32} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{1}{32} \tilde{a}_{y_2, y_3}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento b_{12} , tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{12} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{71}{160} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{9}{320} \tilde{a}_{y_2, y_3}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento b_{21} , tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{21} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a(y, t) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a(y, t) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \\
&= -\frac{9}{320} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) + \frac{71}{160} \tilde{a}_{y_2, y_3}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento b_{22} , tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{22} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&\quad + \int_{y_3}^{y_4} a(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{2} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{15}{32} \tilde{a}_{y_2, y_3}(t) - \frac{1}{32} \tilde{a}_{y_3, y_4}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m-1, m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{m-1, m-1} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-3}}^{y_{m-2}} a(y, t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a(y, t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&\quad + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a(y, t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{2} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{15}{32} \tilde{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) - \frac{1}{32} \tilde{a}_{y_{m-1}, y_m}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m, m}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{m, m} &= \int_0^1 a(y, t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a(y, t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a(y, t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{32} \tilde{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) - \frac{1}{32} \tilde{a}_{y_{m-1}, y_m}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{m,m-1} &= \int_0^1 a(y,t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a(y,t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a(y,t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{71}{160} \tilde{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) - \frac{9}{320} \tilde{a}_{y_{m-1}, y_m}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m-1,m}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{m-1,m} &= \int_0^1 a(y,t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a(y,t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a(y,t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{9}{320} \tilde{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) - \frac{71}{160} \tilde{a}_{y_{m-1}, y_m}(t)
\end{aligned}$$

4.6.4 Calculando os elementos da Matriz E

$$E = E_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy$$

Note que a matriz E é simétrica, ou seja, $E_{i,j} = E_{j,i}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$

Para o elemento $e_{i,i}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
e_{ii} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-2}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-2}}^{y_{i-1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&\quad + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{9}{80h} + \frac{51}{80h} + \frac{51}{80h} + \frac{9}{80h} = \frac{3}{2h}
\end{aligned}$$

Para o elemento $e_{i,i+1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
e_{i,i+1} = e_{i+1,i} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&+ \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy = \frac{21}{160h} - \frac{87}{160h} + \frac{21}{160h} = -\frac{9}{32h}
\end{aligned}$$

Para o elemento $e_{i,i+2}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
e_{i,i+2} = e_{i+2,i} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy \\
&+ \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{-9}{40h} - \frac{9}{40h} = -\frac{9}{20h}
\end{aligned}$$

Para o elemento $e_{i,i+3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
e_{i,i+3} = e_{i+3,i} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy = \frac{-3}{160h}
\end{aligned}$$

Para o elemento e_{11} , tem-se:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{111}{80h} + \frac{9}{80h} = \frac{3}{2h}
\end{aligned}$$

Para o elemento e_{12} , tem-se:

$$\begin{aligned}
e_{12} = e_{21} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{21}{16h} + \frac{33}{80h} = \frac{69}{40h}
\end{aligned}$$

Para o elemento e_{13} , tem-se:

$$\begin{aligned}
 e_{13} = e_{31} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) dy \\
 &= -\frac{3}{20h} - \frac{40}{9h} = -\frac{3}{8h}
 \end{aligned}$$

Para o elemento e_{22} , tem-se:

$$\begin{aligned}
 e_{22} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy = \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
 &+ \int_{y_3}^{y_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy = \frac{243}{16h} + \frac{741}{80h} + \frac{9}{5h} = \frac{105}{4h}
 \end{aligned}$$

Para o elemento $e_{m-1,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 e_{m-1,m-1} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_{m-3}}^{y_{m-2}} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
 &+ \int_{y_{m-1}}^{y_m} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy = \frac{9}{5h} + \frac{741}{80h} + \frac{243}{16h} = \frac{105}{4h}
 \end{aligned}$$

Para o elemento e_{mm} , tem-se:

$$\begin{aligned}
 e_{mm} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
 &= \frac{9}{80h} + \frac{111}{80h} = \frac{3}{2h}
 \end{aligned}$$

Para o elemento $e_{m,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
e_{m,m-1} = e_{m-1,m} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \\
&= \frac{33}{80h} + \frac{21}{16h} = \frac{69}{40h}
\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $E_{m \times m}$ na forma matricial será:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{3}{2h} & \frac{69}{40h} & -\frac{3}{8h} & -\frac{3}{160h} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{69}{40h} & \frac{41h}{40} & -\frac{9}{32h} & -\frac{9}{20h} & -\frac{3}{160h} & \ddots & \vdots \\ -\frac{3}{8h} & -\frac{9}{32h} & \frac{3}{2h} & -\frac{9}{32h} & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{3}{160h} & -\frac{9}{20h} & -\frac{9}{32h} & \ddots & \ddots & -\frac{9}{20h} & -\frac{3}{160h} \\ 0 & -\frac{3}{160h} & \ddots & \ddots & \frac{3}{2h} & -\frac{9}{32h} & -\frac{3}{8h} \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{9}{20h} & -\frac{9}{32h} & \frac{3}{2h} & \frac{69}{40h} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{3}{160h} & -\frac{3}{8h} & \frac{69}{40h} & \frac{3}{2h} \end{bmatrix}$$

4.6.5 Calculando os elementos da Matriz \widehat{B}_{ij}

Considere o Tensor de 3ª ordem $B_{ikj} = \left(\varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial x}, \varphi_j \right)$. Definimos $\widehat{B}_{ij} = B_{ikj} d_k(t)$.

A matriz \widehat{B}_{ij} é quadrada, heptagonal e de ordem m . Definiremos seus elementos da seguinte forma:

$$\widehat{b}_{ii} = \sum_{k=1}^m b_{iki} d_k, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\widehat{b}_{i+1} = \sum_{k=1}^m b_{iki+1} d_k, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\widehat{b}_{ii+2} = \sum_{k=1}^m b_{iki+2} d_k, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\widehat{b}_{ii+3} = \sum_{k=1}^m b_{iki+3} d_k, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\widehat{b}_{i+1i} = \sum_{k=1}^m b_{i+1ki} d_k, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\widehat{b}_{i+2i} = \sum_{k=1}^m b_{i+2ki} d_k, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e}$$

$$\widehat{b}_{i+3i} = \sum_{k=1}^m b_{i+3ki} d_k, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Da definição acima pode-se calcular cada termo de \widehat{B}_{ij} .

Para o elemento $\widehat{b}_{i,i}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{ii} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_k = \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-3}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i-3} \\ &+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-2}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i-2} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i-1} \\ &+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i+1} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i+2} \\ &+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i+3} \\ &= -\frac{1}{5376} d_{i-3} - \frac{81}{1120} d_{i-2} - \frac{5947}{8960} d_{i-1} + \frac{5947}{8960} d_{i+1} + \frac{81}{1120} d_{i+2} + \frac{1}{5376} d_{i+3} \\ &\text{para } i = \{4, 5, \dots, m-3\} \end{aligned}$$

Para o elemento $\widehat{b}_{i,i+1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{i,i+1} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_k = \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-2}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i-2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i-1} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_i \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i+1} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i+2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i+3} = \\
&+ -\frac{43}{17920} d_{i-2} - \frac{271}{1792} d_{i-1} - \frac{5947}{17920} d_i + \frac{5947}{17920} d_{i+1} + \frac{271}{1792} d_{i+2} + \frac{43}{17920} d_{i+3} \\
&\text{para } i = \{3, 5, \dots, m-3\}
\end{aligned}$$

Como \widehat{B}_{ij} é simétrica, $\widehat{b}_{i+1i} = \widehat{b}_{ii+1}$.

Para o elemento $\widehat{b}_{i,i+2}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{i,i+2} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_k = \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_{i-1} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_i + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_{i+2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_{i+3} \\
&= -\frac{9}{4480} d_{i-1} - \frac{81}{2240} d_i + \frac{81}{2240} d_{i+2} - \frac{9}{4480} d_{i+3} \\
&\text{para } i = \{2, 5, \dots, m-3\}
\end{aligned}$$

Como \widehat{B}_{ij} é simétrica, $\widehat{b}_{i+2i} = \widehat{b}_{ii+2}$.

Para o elemento $\widehat{b}_{i,i+3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{i,i+3} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_k = \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_i \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_{i+1} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_{i+2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_{i+3} \\
&= -\frac{1}{10752} d_i - \frac{1}{2560} d_{i+1} + \frac{1}{2560} d_{i+2} + \frac{1}{10752} d_{i+3} \\
&\text{para } i = \{1, 2, \dots, m\}
\end{aligned}$$

Como \widehat{B}_{ij} é simétrica, $\widehat{b}_{i+3i} = \widehat{b}_{ii+3}$

Para o elemento \widehat{b}_{11} , tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{11} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_k = \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_2 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_3 + \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_4 \\
&= \frac{5897}{26880} d_2 + \frac{377}{6720} d_3 - \frac{37}{1792} d_4
\end{aligned}$$

Para o elemento \widehat{b}_{12} , tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{12} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_k = \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_1 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_2 + \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_3 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_4 \\
&= -\frac{5897}{53760} d_1 + \frac{12223}{53760} d_2 + \frac{1087}{7680} d_3 + \frac{43}{17920} d_4
\end{aligned}$$

Como \widehat{B}_{ij} é simétrica, $\widehat{b}_{21} = \widehat{b}_{12}$.

Para o elemento \widehat{b}_{22} , tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{22} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_k = \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_1 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_3 + \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_4 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_5}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_5 \\
&= -\frac{12223}{26880} d_1 + \frac{1267}{1920} d_3 - \frac{81}{1120} d_4 + \frac{1}{5376} d_5
\end{aligned}$$

Para o elemento $\widehat{b}_{m-1,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{m-1,m-1} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_k \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-4}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-4} \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-3} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_m \\
&= \frac{1}{5376} d_{m-4} + \frac{81}{1120} d_{m-3} - \frac{1267}{1920} d_{m-2} - \frac{12223}{26880} d_m
\end{aligned}$$

Para o elemento \widehat{b}_{mm} , tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{mm} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_m(y) dy \right) d_k \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial y}(y) \varphi_m(y) dy \right) d_{m-3} + \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial y}(y) \varphi_m(y) dy \right) d_{m-2} \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \varphi_m(y) dy \right) d_{m-1} = \frac{37}{1792} d_{m-3} - \frac{377}{6720} d_{m-2} - \frac{5897}{26880} d_{m-1}
\end{aligned}$$

Para o elemento $\widehat{b}_{m,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{m,m-1} &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_k \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-3} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-1} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_m \\
&= \frac{43}{17920} d_{m-3} + \frac{1087}{7680} d_{m-2} + \frac{12223}{53760} d_{m-1} - \frac{5897}{53760} d_4
\end{aligned}$$

Como \widehat{B}_{ij} é simétrica, $\widehat{b}_{m-1,m} = \widehat{b}_{m,m-1}$.

Capítulo 5

Simulações Numéricas

Alguns exemplos numéricos serão mostrados nesta seção para ilustrar características do problema associado à Equação de Burgers com fronteira móvel. Vimos que, para resolver o problema (3.1), fazemos uma mudança de variáveis de modo a termos primeiramente um problema cilíndrico. Obtivemos assim, o problema (3.6), o qual aproxima-se por (3.9). Logo encontrar solução aproximada para (3.9) implica em encontrar uma solução aproximada para o problema (3.6).

Pode-se verificar que se a condição inicial $v(y, 0) = v_0 \equiv 0$, a solução aproximada para o problema (3.6) será a função $v(y, t) \equiv 0$, o que não é interessante. Esse fato força-nos a tomar $v_0 \neq 0$. A justificativa para tal fato é que o sistema (4.23) se reduz, na 1ª iteração, a

$$\left(2A + \left(B + \frac{1}{\gamma(t)} \widehat{B}_{ij}(t) - \frac{1}{\gamma^2(t)} E \right) \Delta t \right) d^1 = 0, \quad (5.1)$$

que é um sistema do tipo $Kd^1 = 0$, sendo K uma matriz não singular. Isso implica em $d^1 = 0$, e conseqüentemente as demais soluções d^{n+1} com $n \geq 1$ também serão nulas.

A força externa aplicada é, em nosso caso, nula. Mas, para efeito de constatar que a solução aproximada está sendo obtida corretamente, fa-ze exemplos numéricos onde a força é não nula. Por isso é considerado o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t(y, t) + a(y, t) v_y(y, t) + \frac{1}{\gamma(t)} v(y, t) v_y(y, t) - \frac{1}{\gamma^2(t)} v_{yy}(y, t) = f(y, t) \quad \text{em } Q, \\ v(y, 0) = v_0(y) \quad \text{em } \Omega = (0, 1), \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad \text{para todo } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

nas mesmas condições de (3.6).

Para calcularmos essa força externa $f(y, t)$, basta substituir a solução exata $v(y, t)$, que definimos a priori, e suas derivadas na equação definida acima. Denotaremos por $v_h(y, t)$ a solução aproximada para $v(y, t)$.

Após o cálculo dessas soluções e constatar que estão próximas, retornamos ao problema (3.1), dado inicialmente, transformando o coordenada $y \in [0, 1]$ em x , tal que $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$. Assim teremos uma solução aproximada $u(x, t)$ em domínio móvel.

5.1 Exemplo 1

Consideremos a solução exata $v(y, t)$ para (5.2) dada por

$$v(y, t) = y^2 (t + 1) (y - 1)^2 \quad (5.3)$$

com posição inicial da onda dado por

$$v(y, 0) = y^2 (y - 1)^2 \quad (5.4)$$

e os valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0. \quad (5.5)$$

Definiremos as funções fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ assim:

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \text{ e } \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1} \quad (5.6)$$

Note que, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = -1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 3$.

Assim,

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = \frac{3t+1}{t+1} \text{ e}$$

$$a(y, t) = \frac{1}{\gamma(t)} \left[1 - (\alpha'(t) + y\gamma'(t)) \right] = \frac{-(t^2 - 2t - 2y + 2)}{(t+1)(3t+1)}$$

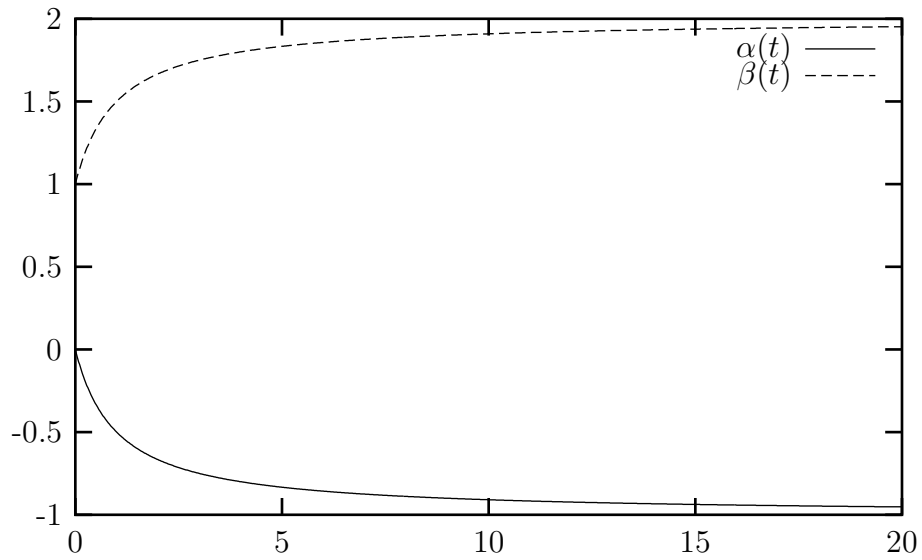


Figura 5.1: Movimento dos Extremos: $\alpha(t)$ e $\beta(t)$

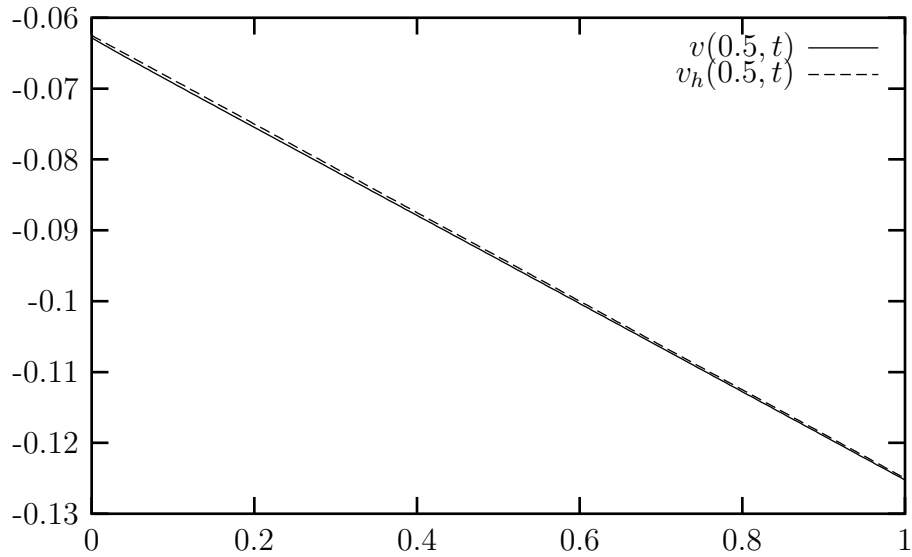


Figura 5.2: $v(0.5, t)$ e a solução aproximada

A Figura (5.1) representa graficamente as fronteiras $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ onde pode-se verificar que $\gamma(t)$ é crescente partindo de $\gamma(0) = 1$ e chegando a $\gamma(20) \simeq 3$, isto é, $\gamma(t) \in [1, 3]$.

Por meio de um programa computacional implementado em linguagem C, pode-se encontrar uma solução aproximada $v_h(y, t)$, de acordo com os dados que fornecemos: solução exata, condição inicial, etc. Pode-se fazer a transformação $x = y \gamma(t) + \alpha(t)$ passando a ter a solução aproximada $v_h(x, t)$ em domínio não-cilíndrico.

A Figura (5.2) representa as soluções exata e aproximada no ponto $x = 0.5$, para $\Delta t = 0.005$, $h = 0.01$ e $t \in [0, 1]$. Assim, tem-se que a solução aproximada está bem próxima da solução exata conhecida, já que o erro é

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} = 0.000328,$$

onde $E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$ representa o erro na norma $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$ e é definido por

$$\begin{aligned} E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} &= \max_{t_n \in [0,1]} (\| v(x_i, t_n) - v_h(x_i, t_n) \|_{L^2(\Omega_t)}) \\ &= \max_{t_n \in [0,1]} \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |v(x_i, t_n) - v_h(x_i, t_n)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $n = 1, \dots, N$.

Se considerarmos o erro na Norma Euclidiana tem-se

$$E_{\mathbb{R}} = 0.000508$$

onde

$$E_{\mathbb{R}} = \max_{t_n \in [0,1]} \left(|v(x_i, t_n) - v_h(x_i, t_n)|^2 \right)^{1/2}$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $n = 1, \dots, N$.

Com este resultado pode-se ter segurança de que a solução para o Problema (5.2) está sendo calculada corretamente, o que comprova a eficácia do método numérico empregado.

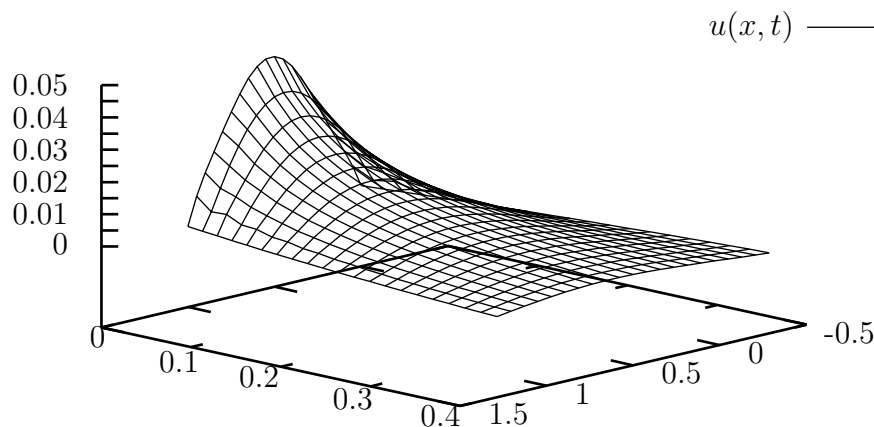


Figura 5.3: $u(x, t)$ solução aproximada para (3.1)

Considerando, agora, a força externa nula, pode-se encontrar uma solução aproximada para o Problema (3.1). A figura (5.3) representa esta solução, isto é, o movimento da onda em um domínio com fronteira móvel ao longo do tempo, onde pode-se observar o decaimento da solução quando o tempo t cresce.

5.1.1 Convergência Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (5.2). A tabela abaixo mostra o erro, para $\theta = 0.5$, isto é, o Método de Crank-Nicolson. Fixamos o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variamos o espaçamento h , onde $h = \frac{1}{m-1}$, para $m = 11, 21, 51, 101$ e 1001 , onde m é o número de nós do intervalo $[0, 1]$.

Δt	h	$E_{\mathbb{R}}$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.01	0.1	0.008092	0.005508
0.01	0.05	0.002672	0.001853
0.01	0.02	0.001107	0.000723
0.01	0.01	0.000984	0.000631
0.01	0.001	0.000941	0.000599

Pode-se observar que o erro é inversamente proporcional ao tamanho da malha. Verifica-se, variando o número de elementos finitos que, para $m > 1161$ a solução diverge. Isso mostra que aumentar o número de divisões no espaço, isto é, refinar a malha, não implicará sempre na melhora do resultado obtido, pois existe um ponto ótimo, onde o erro computacional e o erro provocado pelo método estão em equilíbrio.

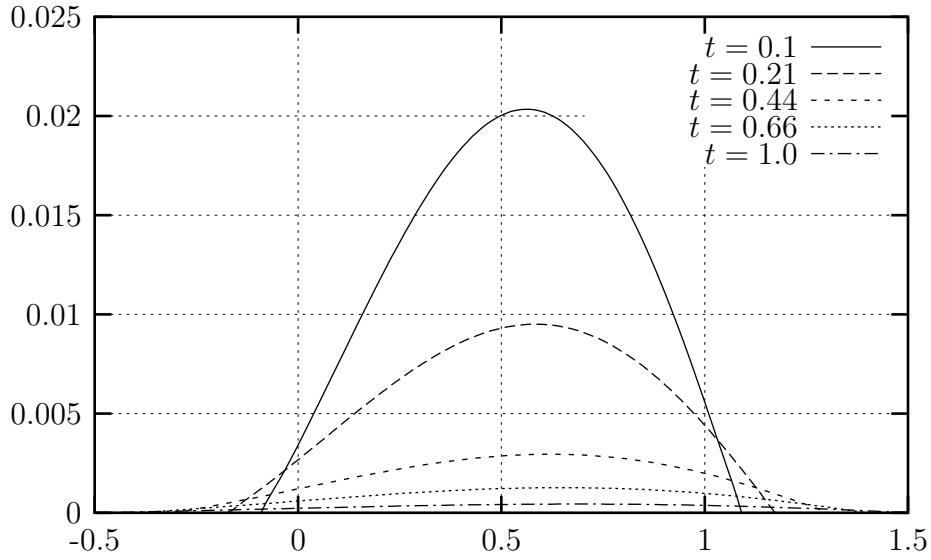


Figura 5.4: Solução Aproximada $u(x, t)$ para $t= 0.1, 0.21, 0.44, 0.66, 1.0$

A figura (5.4) mostra a solução aproximada para (3.1) fixado os tempos em $t = 0.1; 0.21; 0.44; 0.66$ e 1.0 .

5.1.2 Decaimento da Energia

Como definido anteriormente, a energia associada ao problema (3.6) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u(x, t)\|_{L^2(\Omega_t)}^2 = \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u(x, t)|^2 dx.$$

Para verificarmos o decaimento da energia, como a força é nula, teremos somente a solução aproximada que será calculada pontualmente e portanto teremos o valor da energia para cada tempo.

Usando o Método do Trapézio para calcular a integral da energia encontramos

$$\begin{aligned} E(t_n) &= \frac{1}{2} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u(x_i, t_n)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} \left(|u(x_1, t_n)|^2 + 2 \sum_{i=2}^{m-1} |u(x_i, t_n)|^2 + |u(x_m, t_n)|^2 \right) \right] \end{aligned}$$

onde $h = \frac{1}{m-1}$ é o passo no espaço e $u(x_i, t_n)$ é a solução aproximada para (3.1) aplicado no elemento x_i , $i = 1, \dots, m$ e no tempo t_n , $n = 1, \dots, N$.

Dessa forma, encontraremos a energia para todo tempo t_n . O gráfico abaixo representa seu decaimento exponencial.

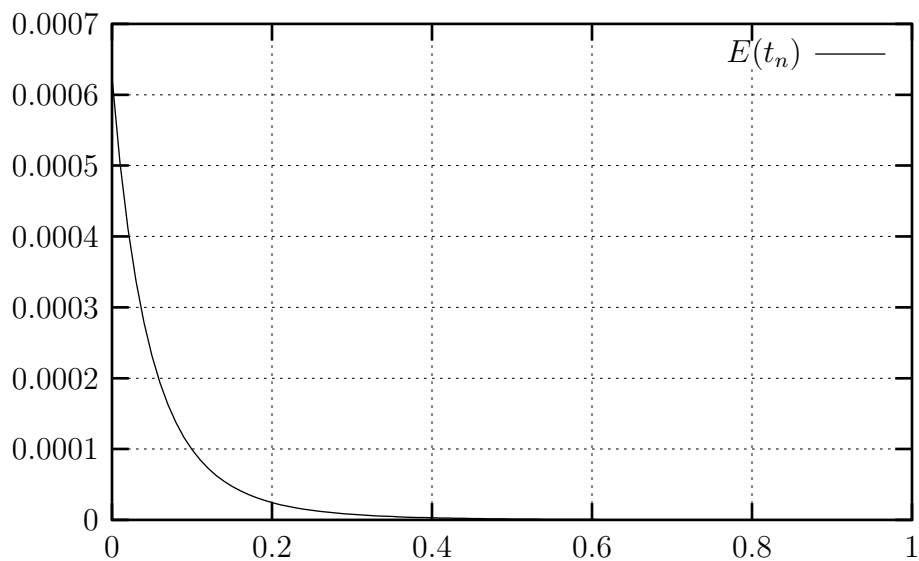


Figura 5.5: Decaimento exponencial da Energia

5.2 Exemplo 2

Consideraremos a solução exata para o problema (5.2) dada por

$$v(y, t) = \text{sen}(\pi y)(\cos(\pi t) + \text{sen}(\pi t)) \quad (5.7)$$

com posição inicial da onda dado por

$$v(y, 0) = \text{sen}(\pi y) \quad (5.8)$$

e os valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0. \quad (5.9)$$

Definiremos as funções fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, como

$$\alpha(t) = -1 + 2e^{(-t-1)} \text{ e } \beta(t) = 1 - 2e^{(-t-1)} \quad (5.10)$$

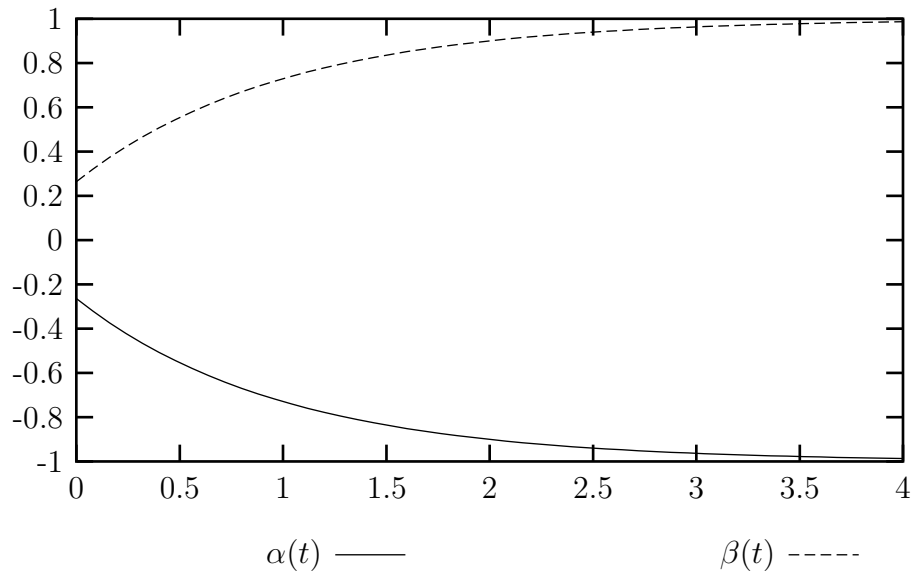


Figura 5.6: Movimento dos Extremos: $\alpha(t)$ e $\beta(t)$

Note que, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = -1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 2$.

Assim,

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - 4e^{-(t-1)} \quad e$$

$$a(y, t) = \frac{1}{\gamma(t)} \left[1 - (\alpha'(t) + y\gamma'(t)) \right] = \frac{-1 - 2e^{-(t-1)} + 4ye^{-(t-1)}}{-2 + 4e^{-(t-1)}}$$

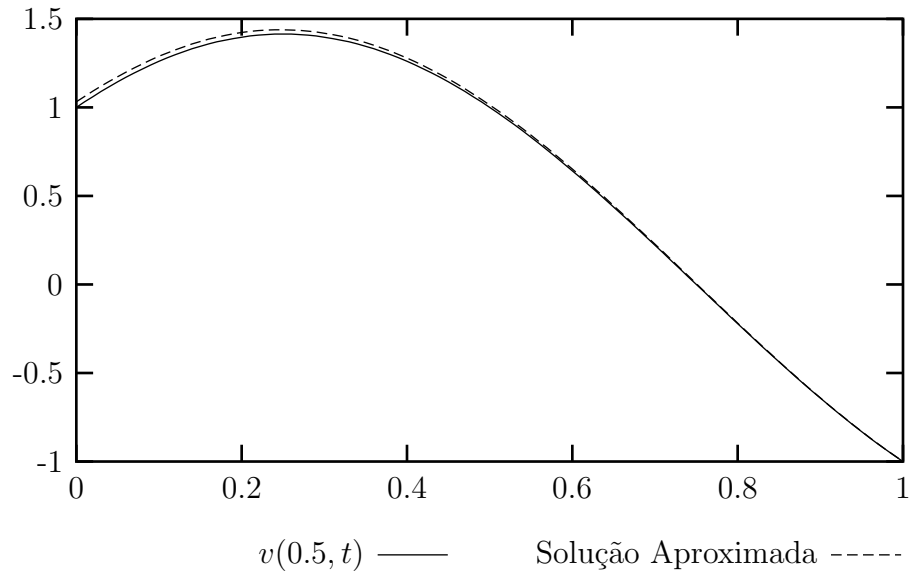


Figura 5.7: $v(0.5, t)$ e a solução aproximada

A figura (5.6) representa as fronteiras $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, enquanto a Figura (5.7) representa as soluções exata e aproximada no ponto $x = 0.5$, com $x = y\gamma(t) + \alpha(t)$, para $\Delta t = 0.01$, $h = 0.01$ e $t \in [0, 1]$. Pode-se verificar que inicialmente, para $t = 0$, o erro é percebido, e a medida que o tempo cresce, este erro diminui fazendo com que as soluções exata e aproximada estejam muito próximas.

5.2.1 Convergência Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada. A tabela abaixo mostra o erro, fixando o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variando o número de elementos finitos $m = 11, 21, 51, 101$ e 1001 .

Δt	h	$E_{\mathbb{R}}$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.01	0.1	0.077662	0.053304
0.01	0.05	0.044727	0.030929
0.01	0.02	0.041553	0.024995
0.01	0.01	0.041385	0.024881
0.01	0.001	0.041330	0.024842

Pode-se observar que o erro é inversamente proporcional ao tamanho da malha, mas ao aumentarmos significativamente o número de elementos finitos não implica em termos um resultado muito melhor .

Analisaremos agora o comportamento do erro da solução aproximada para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o número de elementos finitos $m = 11, 21, 51, 101$ e 1001 , onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$E_{\mathbb{R}}$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.001	0.1	0.058671	0.018292
0.001	0.05	0.026325	0.008369
0.001	0.02	0.010411	0.004935
0.001	0.01	0.005905	0.003561
0.001	0.001	0.005171	0.002127

Pode-se observar que o erro também é inversamente proporcional ao tamanho da malha.

Agora, considerando a força externa nula e $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$, pode-se encontrar uma solução aproximada para (3.1).

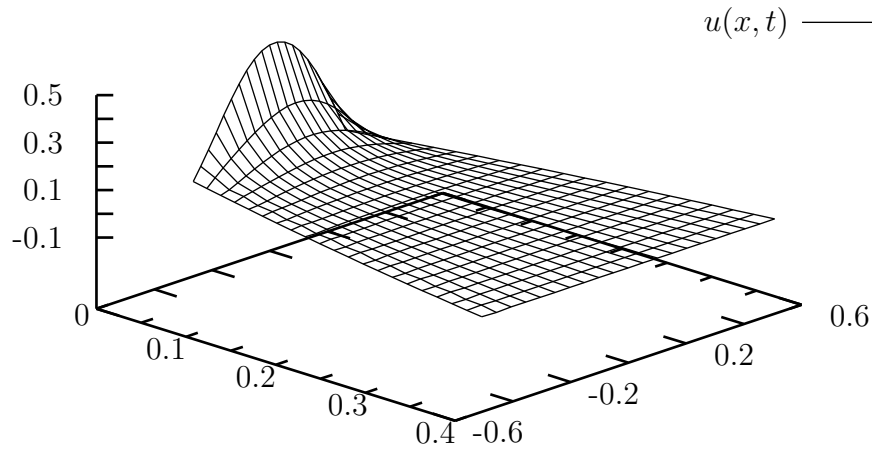


Figura 5.8: $u(x, t)$ solução aproximada para (3.1)

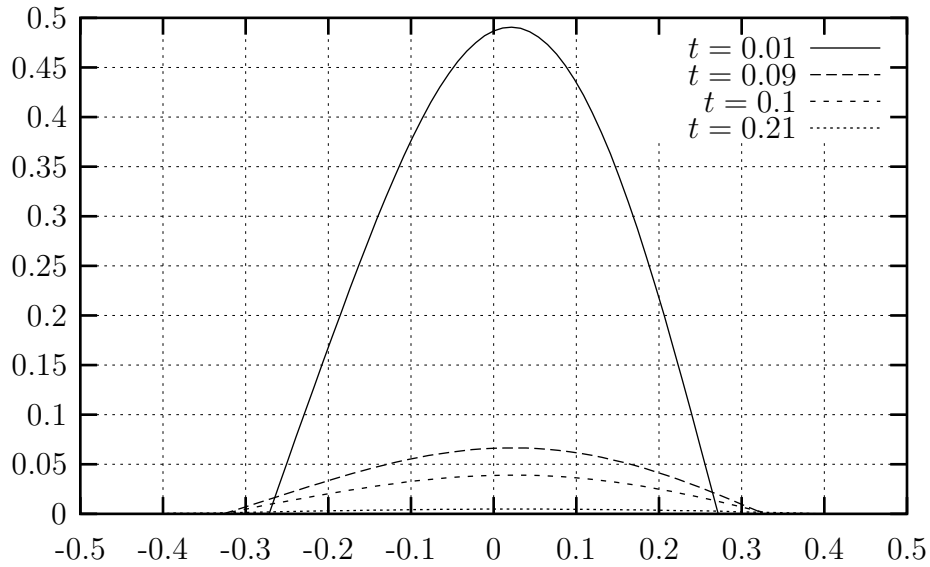


Figura 5.9: Solução Aproximada para $t=0.01, 0.09, 0.1, 0.21$

A figura (5.8) representa a solução aproximada $u(x, t)$ e a figura (5.9) mostra esta solução para os tempos $t = 0.01; 0.09; 0.1$ e 0.21 .

O gráfico abaixo mostra o decaimento exponencial da energia.

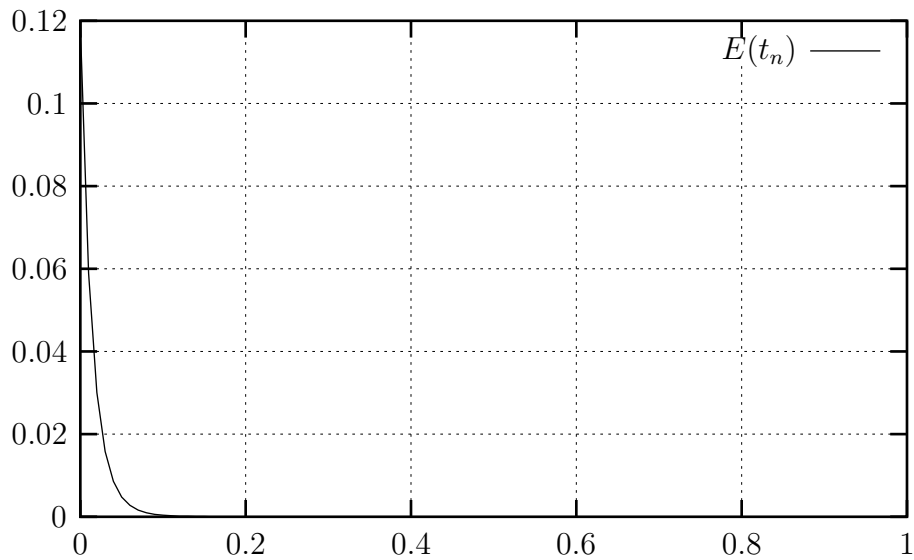


Figura 5.10: Decaimento exponencial da Energia

5.3 Exemplo 3

Consideraremos a solução exata dada por

$$v(y, t) = \text{sen}(\pi y)\text{cos}(\pi t) \quad (5.11)$$

com posição inicial da onda dado por

$$v(y, 0) = \text{sen}(\pi y) \quad (5.12)$$

e os valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0. \quad (5.13)$$

Definiremos também as funções fronteira $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, como

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \text{cos}(2\pi t) - \frac{1}{2} \text{ e } \beta(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \text{cos}(2\pi t) \quad (5.14)$$

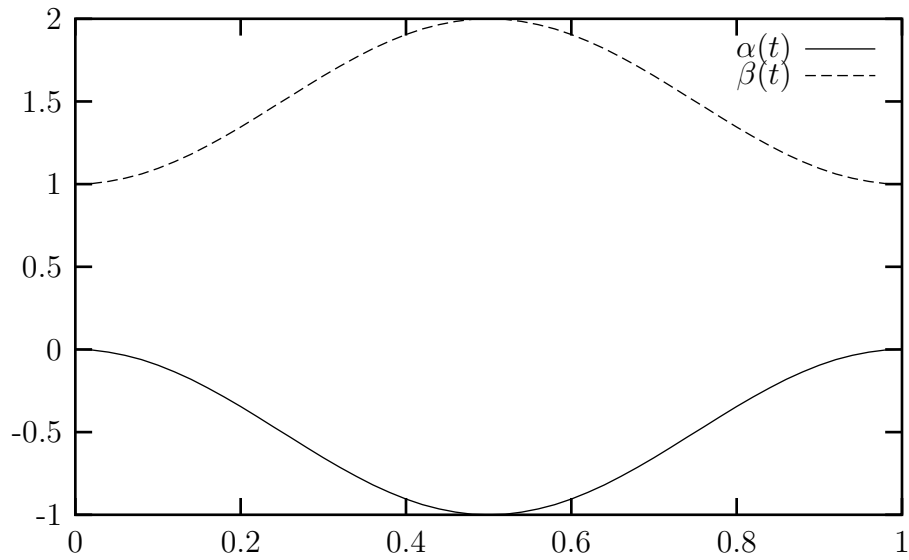


Figura 5.11: Movimento dos Extremos: $\alpha(t)$ e $\beta(t)$

Assim,

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - \cos(2\pi t) \quad e$$

$$a(y, t) = \frac{1}{\gamma(t)} \left[1 - (\alpha'(t) + y\gamma'(t)) \right] = \frac{-1 - \text{sen}(2\pi t)\pi + 2y \text{sen}(2\pi t)\pi}{-2 + \cos(2\pi t)}$$

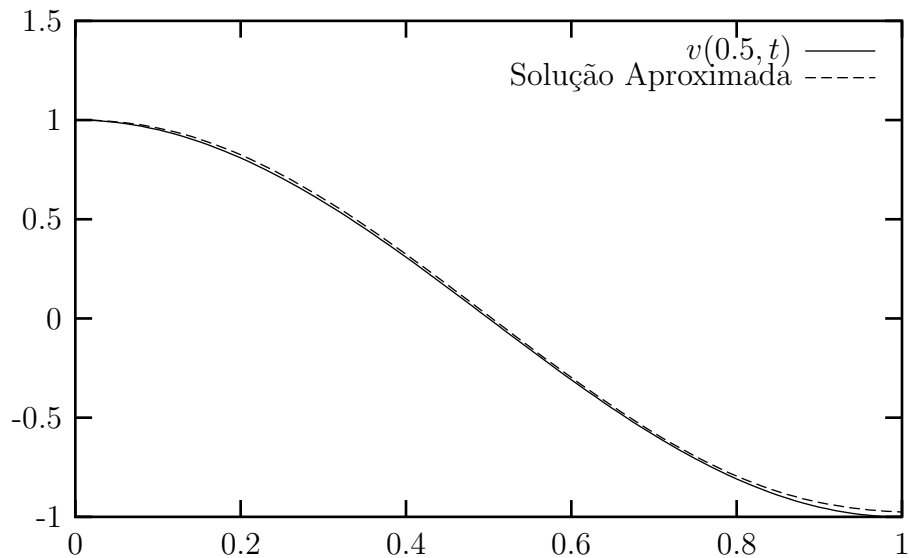


Figura 5.12: $v(0.5, t)$ e a solução aproximada

A Figura (5.11) mostra o movimento das fronteiras enquanto a Figura (5.12) representa as soluções exata e aproximada no ponto $x = 0.5$, no domínio móvel, para $\Delta t = 0.01$ e $t \in [0, 1]$. Pode-se perceber a proximidade entre as curvas que representam as soluções exata e aproximada.

5.3.1 Convergência Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada. A tabela abaixo mostra o erro fixando o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variando o número de elementos finitos $m = 11, 21, 51, 101$ e 1001 .

Δt	h	$E_{\mathbb{R}}$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.01	0.1	0.043043	0.028475
0.01	0.05	0.033386	0.024484
0.01	0.02	0.029938	0.022015
0.01	0.01	0.028196	0.020755
0.01	0.001	0.026353	0.019422

Pode-se observar que o erro é inversamente proporcional ao tamanho da malha, mas ao aumentarmos significativamente o número de elementos finitos não implica em termos um resultado muito melhor. Isso se deve aos erros computacionais que são acumulados durante as iterações juntamente com o erro do próprio método numérico.

Analisaremos agora o comportamento do erro da solução aproximada para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o número de elementos finitos $m = 11, 21, 51, 101$ e 1001 , onde o erro está definido como anteriormente.

Δt	h	$E_{\mathbb{R}}$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.001	0.1	0.027270	0.018292
0.001	0.05	0.012717	0.003869
0.001	0.02	0.006872	0.004935
0.001	0.01	0.004916	0.003561
0.001	0.001	0.002889	0.002127

Pode-se observar que o erro também é inversamente proporcional ao tamanho da malha como anteriormente.

Tendo como base esses resultados pode-se ter certeza de que a solução está sendo calculada corretamente. Por isso passamos a considerar o problema (3.1). Fazendo a transformação $x = y \gamma(t) + \alpha(t)$, encontramos a solução $u(x, t)$ representada a seguir.

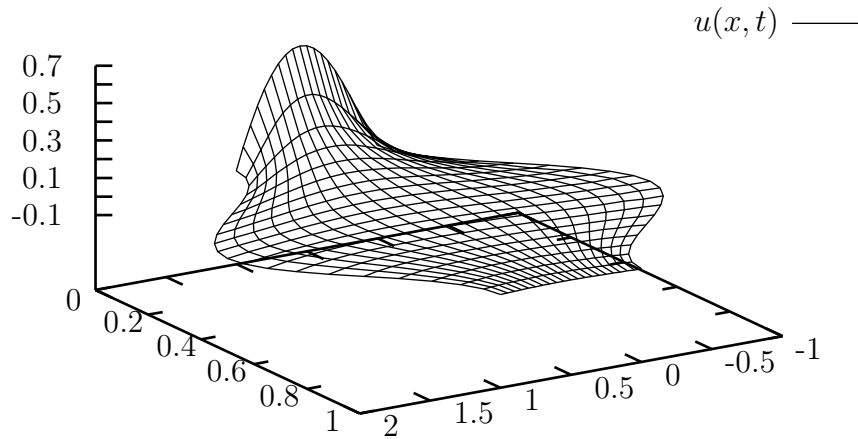


Figura 5.13: Movimento da onda ao longo do tempo

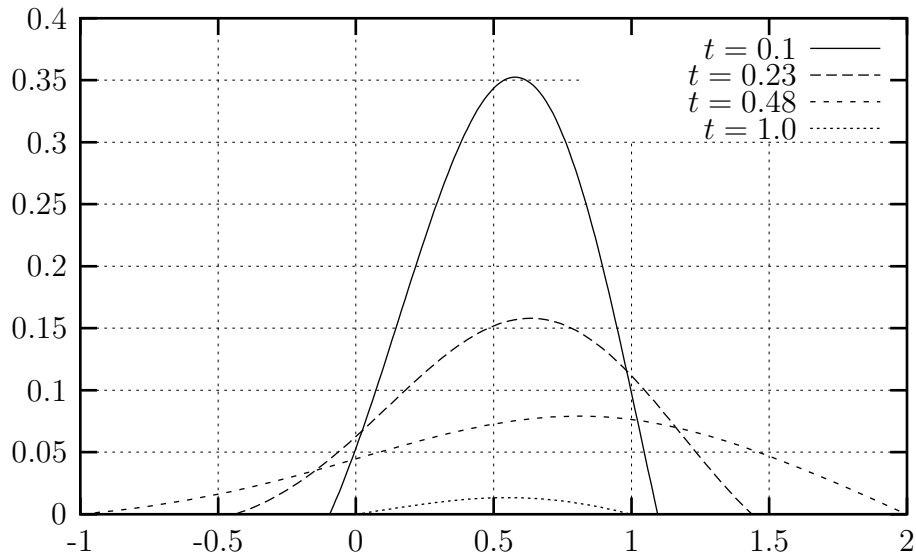


Figura 5.14: Solução Aproximada para $t=0.1, 0.23, 0.48, 1.0$

A figura (5.14) mostra a solução aproximada $u(x, t)$ para os tempos $t = 0.1; 0.23; 0.48$ e 1.0

O gráfico abaixo mostra o decaimento exponencial da energia.

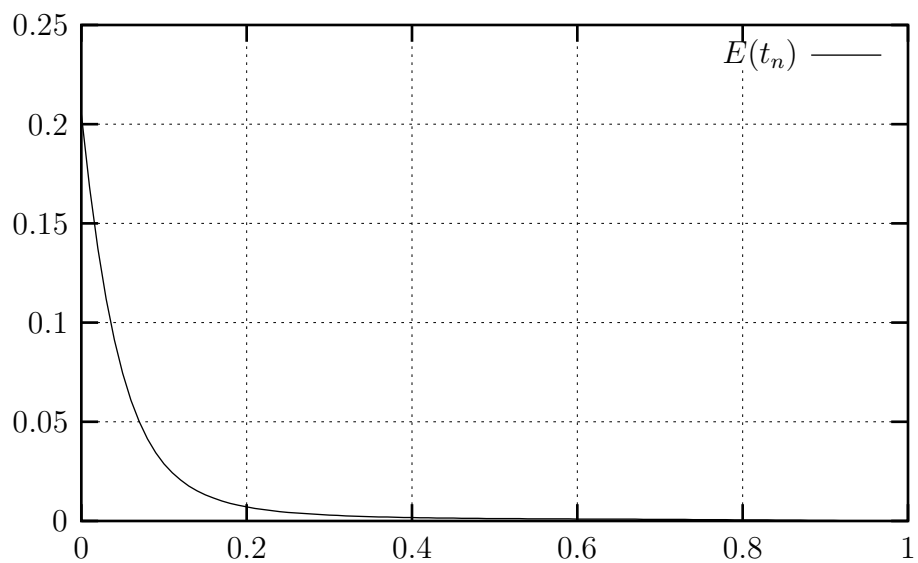


Figura 5.13: Decaimento exponencial da Energia

Capítulo 6

A Equação de Burgers em Domínio Cilíndrico

Neste capítulo abordaremos o Problema associado a Equação de Burgers, como visto anteriormente, mas para um domínio fixo. Consideremos então, o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, t) + u_x(x, t) + u(x, t) u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \text{ em } Q, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ para } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

onde

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$$

e o domínio Q é dado por

$$Q = \{(x, t) \in \mathbb{R}; x \in \Omega \text{ e } t \geq 0\}.$$

6.1 Formulação Variacional

O Método de Elementos Finitos não é aplicável diretamente ao Problema (6.1). Assim, é necessário expressar o problema numa forma mais adequada, ou seja, a formulação variacional, para que seja possível aplicar o Método de Faedo-Galerkin.

Seja $D(\Omega)$ o espaço das funções teste, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e $w \in D(\Omega)$. Multiplicando a primeira equação do Problema (6.1) por w e integrando em $\Omega = (0, 1)$, obtem-se

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} w dx + \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} w dx + \int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial x} w dx - \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w dx = 0 \quad (6.2)$$

6.2 O Método de Faedo-Galerkin

Denota-se por φ_i , $i \in \mathbb{N}$, uma base de $H_0^1(\Omega)$ e seja $V^m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$ um subespaço de $H_0^1(\Omega)$ formado pelos m primeiros vetores base do espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Agora, buscamos uma solução aproximada $u^m(x, t) \in V^m$ do Problema (6.1) no subespaço V^m .

6.3 Problema Aproximado

Aproxima-se a Problema (6.1) pelo problema de determinar, no espaço das soluções V^m , uma função $u^m = u^m(x, t)$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_t^m, w) + (u_x^m, w) + (u^m u_x^m, w) - (u_{xx}^m, w) = 0 \text{ em } Q, \\ u^m(x, 0) = u_0^m(x) \text{ em } \Omega = (0, 1), \\ u^m(0, t) = u^m(1, t) = 0 \text{ para todo } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (6.3)$$

para todo $w \in V^m$. Substituindo $u = u^m(x, t)$ em (6.2) tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial u^m}{\partial t} w dx + \int_0^1 \frac{\partial u^m}{\partial x} w dx + \int_0^1 u^m \frac{\partial u^m}{\partial x} w dx \\ - \int_0^1 \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} w dx = 0, \forall w \in V^m. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Integrando por partes a última integral, e substituindo em (6.4), tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial u^m}{\partial t} w dx + \int_0^1 \frac{\partial u^m}{\partial x} w dx + \int_0^1 u^m \frac{\partial u^m}{\partial x} w dx \\ - \int_0^1 \frac{\partial u^m}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0, \forall w \in V^m. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Procura-se uma solução aproximada do problema (6.5), dado por:

$$u^m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i(x) \in V^m \quad (6.6)$$

onde $d_i(t)$ são os coeficientes à determinar.

De (6.6) deduzimos:

$$u_t^m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i'(t)\varphi_i(x) \quad (6.7)$$

$$u_x^m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t)\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x} \quad (6.8)$$

Substituindo (6.6),(6.7) e (6.8) no problema aproximado (6.5), obtem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{i=1}^m d_i'(t)\varphi_i(x)w dx + \int_0^1 \sum_{i=1}^m d_i(t)\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x}w dx + \\ & \int_0^1 \sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i(x) \sum_{k=1}^m d_k(t)\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x}w dx - \int_0^1 \sum_{i=1}^m d_i(t)\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dx = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Tomando em particular $w = \varphi_j(x) \in V^m$ e substituindo em (6.9):

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k,j=1}^m \left[d_i'(t) \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j dx + d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x}\varphi_j(x) dx + \right. \\ & \left. d_i(t)d_k(t) \int_0^1 \varphi_i(x)\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x}\varphi_j(x) dx - d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j(x)}{\partial x} dx \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Definindo as matrizes A, D e E, tem-se:

$$A = a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx$$

$$D = b_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}(x) dx$$

$$E = e_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx$$

e ainda, o Tensor de 3ª ordem $B_{ikj} = \left(\varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x}, \varphi_j \right)$, tem-se:

$$Ad'(t) + Dd(t) + B_{ikj}d^2(t) - Ed(t) = 0 \quad (6.11)$$

O sistema de Equações Diferenciais Ordinárias a seguir, após o processo de linearização, será resolvido pelo Método das Diferenças Finitas.

$$\begin{cases} Ad'(t) + B_{ikj}d^2(t) + (D + E)d(t) = 0 \\ d(0) = d_0 \end{cases} \quad (6.12)$$

6.3.1 Calculando os elementos da Matriz D

Consideremos a Matriz D

$$D = d_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx$$

Pode-se calcular cada termo de D. Assim:

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx \\ &= \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i,i+1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
d_{i,i+1} &= \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}(x) dx \\
&+ \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}(x) dx \\
&= -\frac{49}{64}
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i+1,i}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
d_{i+1,i} &= \int_0^1 \varphi_{i+1}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} \varphi_{i+1}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i+1}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx \\
&+ \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_{i+1}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx \\
&= \frac{9}{320}
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i,i+2}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
d_{i,i+2} &= \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial x}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial x}(x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial x}(x) dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial x}(x) dx \\
&= -\frac{7}{40}
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i+2,i}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
d_{i+2,i} &= \int_0^1 \varphi_{i+2}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi_{i+2}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+2}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_{i+2}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx \\
&= -\frac{7}{40}
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i,i+3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}d_{i,i+3} &= \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial x}(x) dx = \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial x}(x) dx = \\ &= \frac{1}{320}\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i+3,i}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{i+3,i} &= \int_0^1 \varphi_{i+3}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx = \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_{i+3}(x) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial x}(x) \varphi_i(x) dx \\
 &= \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_{i+3}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx \\
 &= -\frac{1}{320}
 \end{aligned}$$

Para o elemento d_{11} , tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= \int_0^1 \varphi_1(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x) dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_1(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Para o elemento d_{12} , tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{12} &= \int_0^1 \varphi_1(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_1(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) dx \\
 &= -\frac{133}{320}
 \end{aligned}$$

Para o elemento d_{21} , tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{21} &= \int_0^1 \varphi_2(x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x) dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) \varphi_1(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) \varphi_1(x) dx \\
 &= \frac{133}{320}
 \end{aligned}$$

Para o elemento d_{22} , tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{22} &= \int_0^1 \varphi_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) dx \\
 &\quad + \int_{x_3}^{x_4} \varphi_2(x) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Para o elemento $d_{m-1,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{m-1,m-1} &= \int_0^1 \varphi_{m-1}(x) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}(x) dx \\
 &= \int_{x_{m-3}}^{x_{m-2}} \varphi_{m-1}(x) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}(x) dx + \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_{m-1}(x) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}(x) dx \\
 &\quad + \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_{m-1}(x) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}(x) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Para o elemento $d_{m,m}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{m,m} &= \int_0^1 \varphi_m(x) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}(x) dx \\
 &= \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_m(x) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}(x) dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_m(x) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}(x) dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Para o elemento $d_{m,m-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{m,m-1} &= \int_0^1 \varphi_m(x) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}(x) dx \\
 &= \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_m(x) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}(x) dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_m(x) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}(x) dx \\
 &= \frac{133}{320}
 \end{aligned}$$

Para o elemento $d_{m-1,m}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 d_{m-1,m} &= \int_0^1 \varphi_{m-1}(x) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}(x) dx \\
 &= \int_{x_{m-2}}^{x_{m-1}} \varphi_{m-1}(x) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}(x) dx + \int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_{m-1}(x) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}(x) dx \\
 &= -\frac{133}{320}
 \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $D_{m \times m}$ na forma matricial será:

$$D = \begin{bmatrix}
 0 & -\frac{133}{320} & -\frac{13}{80} & -\frac{1}{320} & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{133}{320} & 0 & -\frac{61}{80} & -\frac{7}{40} & -\frac{1}{320} & \ddots & \vdots \\
 \frac{13}{80} & \frac{61}{80} & 0 & -\frac{49}{64} & -\frac{7}{40} & -\frac{1}{320} & 0 \\
 \frac{1}{320} & \frac{7}{40} & \frac{49}{64} & \ddots & \ddots & -\frac{7}{40} & -\frac{1}{320} \\
 0 & \frac{1}{320} & \ddots & \ddots & 0 & -\frac{49}{64} & -\frac{13}{80} \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \frac{7}{40} & \frac{49}{64} & 0 & -\frac{133}{320} \\
 0 & \dots & 0 & \frac{1}{320} & \frac{13}{80} & \frac{133}{320} & 0
 \end{bmatrix}$$

6.4 Método das Diferenças Finitas

Considerando a aproximação

$$d'(t) = \frac{d(t + \Delta t) - d(t)}{\Delta t}, \quad (6.13)$$

o Método de Crank-Nicolson e o processo de linearização do termo não linear pode-se escrever a E.D.O. (6.11) do seguinte modo:

$$(2A + (D + \overline{B}_{kj}(t) - E) \Delta t) d^{n+1} = (2A - (D + \overline{B}_{kj}(t) - E) \Delta t) d^n \quad (6.14)$$

Desde que d^0 é conhecido, pode-se dar início ao processo que calcula d^1, d^2, \dots, d^n . Após termos calculado esses valores, basta substituir cada d_i^n em (6.6) para obtermos a solução aproximada do problema.

6.5 Simulações Numéricas para o Problema em Domínio Cilíndrico

Nesta seção estaremos encontrando uma solução aproximada para o problema (6.1) proposto. Essa solução aproximada depende da condição inicial e de fronteira que são estabelecidos para o problema.

Como a priori não conhecemos essa solução aproximada, precisamos de um parâmetro para verificarmos que a solução aproximada que encontramos é válida. Para isso consideraremos o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t(x, t) + v_x(x, t) + v(x, t)v_x(x, t) - v_{xx}(x, t) = f(x, t) \text{ em } Q, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \text{ para } t \geq 0, \\ v(x, 0) = v_0(x) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (6.15)$$

nas mesmas condições de (6.1), onde teremos a função força $f(x, t)$ que funcionará como esse parâmetro. Essa força faz com que haja um equilíbrio no problema, e assim pode-se obter uma solução aproximada e comparar com a solução exata $v(x, t)$ que será conhecida. Se o resultado for bom, tem-se certeza que o método empregado e que a implementação numérica aplicada estão corretos.

6.5.1 Exemplo 1

Consideremos a solução exata para o problema (6.1) dada por

$$v(x, t) = \frac{1}{\pi} \text{sen}(\pi x) \cos(\pi t) \quad (6.16)$$

com posição inicial da onda dado por

$$v(x, 0) = \frac{1}{\pi} \text{sen}(\pi x) \quad (6.17)$$

e os valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0. \quad (6.18)$$

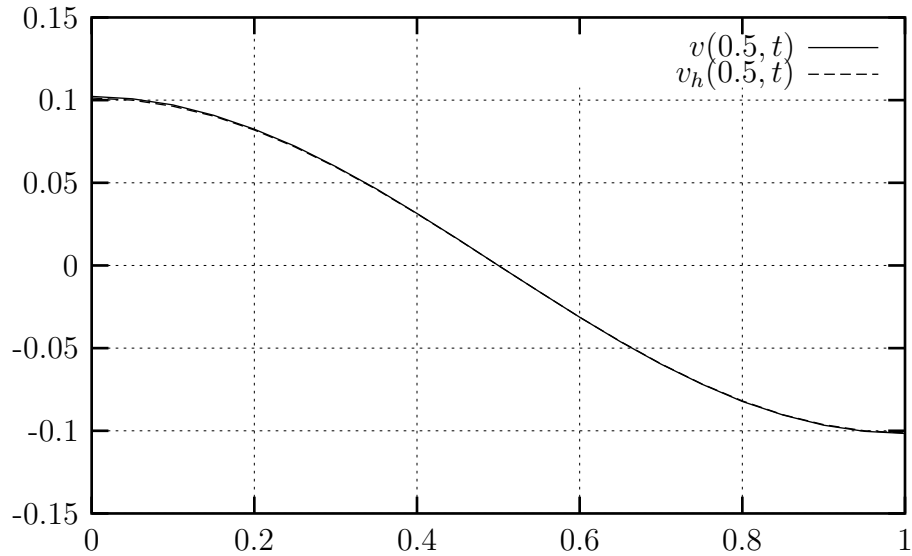


Figura 6.1: $v(0.5, t)$ e a solução aproximada $v_h(x, t)$

A Figura (6.1) representa as soluções exata e aproximada no ponto $x = 0.5$, para $\Delta t = 0.01$, $h = 0.01$ e $t \in [0, 1]$. Assim, tem-se que a solução aproximada encontrada para o Problema (6.15) está bem próxima da solução exata conhecida, pois o erro é

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = 0.000101,$$

na norma L^∞ e

$$E_{\mathbb{R}} = 0.000169$$

na norma Euclidiana.

Com este resultado pode-se ter segurança de que a solução está sendo calculada corretamente, o que comprova a eficácia do método numérico empregado.

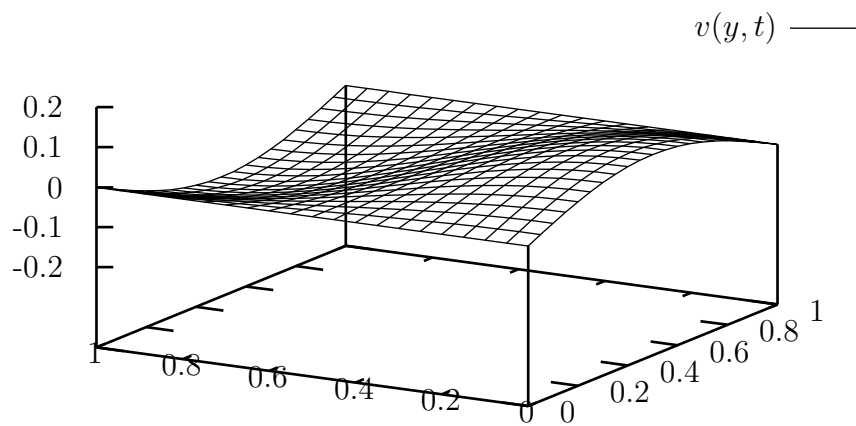


Figura 6.2: Gráfico da $v(y, t)$

A figura (6.2) representa a função $v(x, t)$, posição da onda ao longo do tempo.

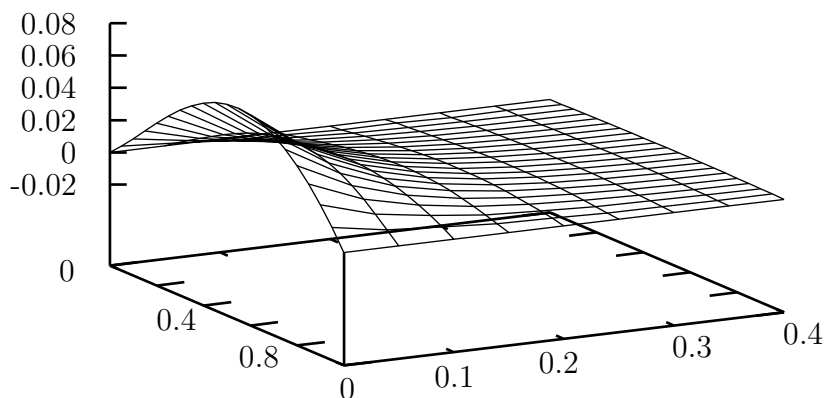


Figura 6.3: Movimento da onda ao longo do tempo

Considerando, agora, a força externa nula, pode-se encontrar uma solução aproximada para o Problema (6.1). A figura (6.3) representa esta solução, isto é, o movimento da onda em um domínio com fronteira fixa ao longo do tempo, onde pode-se observar o decaimento da solução quando o tempo t cresce.

6.5.2 Convergência Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (6.15). A tabela abaixo mostra o erro onde fixamos o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variamos o espaçamento h , onde $h = \frac{1}{m-1}$, para $m = 11, 21, 51, 101$ e 1001 , onde m é o número de nós do intervalo $[0, 1]$.

Δt	h	$E_{\mathbb{R}}$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.01	0.1	0.001235	0.000829
0.01	0.05	0.000369	0.000257
0.01	0.02	0.000173	0.000102
0.01	0.01	0.000169	0.000101
0.01	0.001	0.000167	0.000011

Pode-se observar que o método é bastante estável pois a medida que refinamos a malha, a solução $v_h(x, t)$ se aproxima de $v(x, t)$.

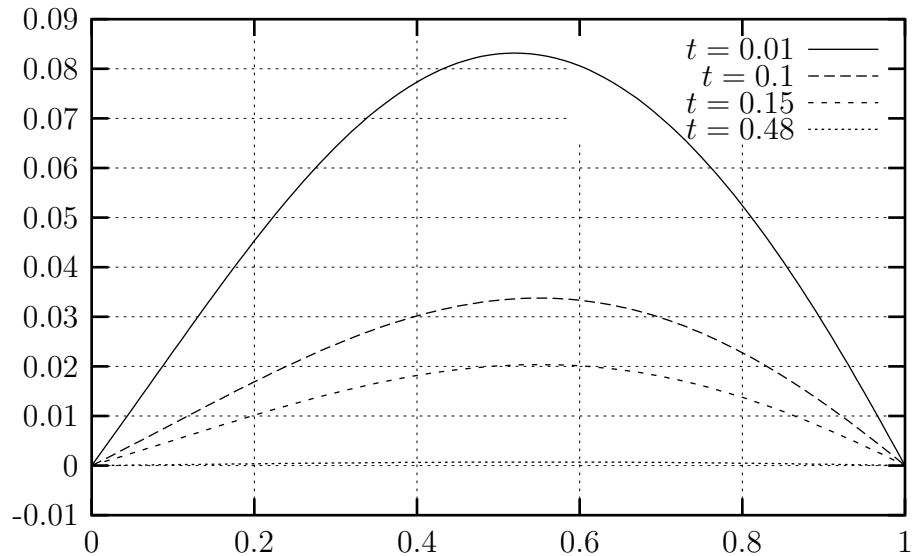


Figura 6.4: Solução Aproximada para $t= 0.01, 0.1, 0.15, 0.48$

A figura (6.4) mostra a solução aproximada para os tempos $t = 0.01; 0.1; 0.15$ e 0.48 .

A figura a seguir mostra o decaimento exponencial da energia associada ao problema (6.1).

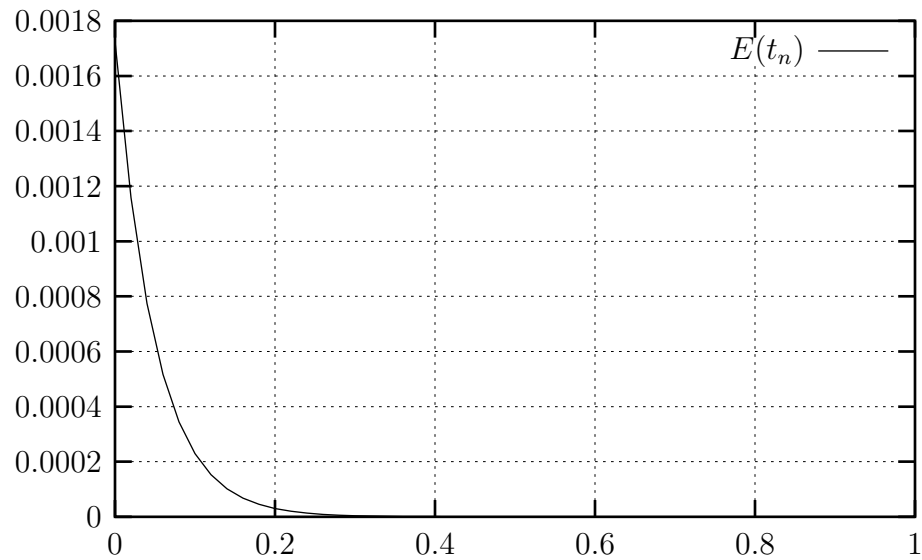


Figura 6.5: Decaimento exponencial da Energia

Conclusão

Os resultados numéricos obtidos usando a base B-Spline cúbica para a Equação Não Linear de Burgers mostrou-se eficiente. A medida que refina-se a malha o erro é proporcionalmente reduzido.

Bibliografia

- [1] BRÉZIS, Haïm. *Analise Funcionnelle. Théorie et applications*. DUNOD, Paris (1999).
- [2] BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J.; *Numerical Analysis, PWS Publishing Company (1993)*
- [3] CAVALCANTI, Cleber Araújo, *Sobre as Equações de Benjamim-Bona-Mahony e Burgers com Viscosidade*; UFRJ/IM - Rio de Janeiro (2003)
- [4] HUGLES, T. J. R.; *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis* Prentice Hall (1987)
- [5] LIONS, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
Weak Solutions for the Equations of Incompressible and Inviscid Fluid Dynamics. 22° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA 1999.
- [6] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A., *Weak Solutions for a Nonlinear Dispersive Equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol 59, N° 3, pp 432 - 441 (1977).
- [7] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos, N° 25 IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1993).
- [8] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos)*. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro (2000).

- [9] MEDEIROS, L. A. & MENZALA, G. P., *Existence and Uniqueness for Periodic Solutions of the Benjamin-Bona-Mahony Equation*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 8, N° 5 (1977)
- [10] MILLA, M. M. A., *Weak Solutions of a Modified KdV Equation*, Bol. Soc. Bras. Mat., N° 6, pp 57 - 63 (1975)
- [11] LIU, I-SHIIH; RINCON, M. A.; *Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Análise e Aplicações*, Editora IM/UFRJ (2001)
- [12] SOUZA, Beatriz Santos de, *Análise Numérica do Sistema Termoelástico linear em domínios com Fronteira Móvel*; UFRJ/IM-NCE, Rio de Janeiro (2002)
- [13] STOKER, J. J., *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*, Interscience Publishers, New York (1957)
- Vries
- [14] ZAUDERER, Erich, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics - 2nd ed.* Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons (1988)