

ANÁLISE NUMÉRICA PARA UMA EQUAÇÃO
DE ONDAS COM DISSIPACÃO LOCALIZADA

por

CRISTINA DE OLIVEIRA LOPES

IM/NCE - UFRJ

2007

Análise Numérica para uma Equação de Ondas com Dissipação Localizada

por

Cristina de Oliveira Lopes

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Informática.

Área de concentração : Algoritmos, Métodos Numéricos e Robótica

Aprovada por:

Mauro Antônio Rincon
(Orientador)

Ademir Fernando Pazoto
(Co-orientador)

Ângela Cássia Biazutti

Marcello Goulart Teixeira

Luziane Ferreira de Mendonça

L864 Lopes, Cristina de Oliveira

Análise numérica para uma equação de ondas com dissipação localizada/
Cristina de Oliveira Lopes. - Rio de Janeiro, 2007.
093f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, 2007.

Orientador: Mauro Antônio Rincon

Co-orientador: Ademir Fernando Pazoto

1. Resultados Preliminares - Teses. 2. Existência e Unicidade de Soluções - Teses. 3. Decaimento da Energia - Teses. 4. Análise Numérica - Teses. 5. Penalização da Equação Dissipativa - Teses. 6. Simulações Numéricas - Teses. I. Mauro Antônio Rincon (Orient.). II. Ademir Fernando Pazoto (Co-orient.). III. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Núcleo de Computação Eletrônica. IV. Análise Numérica para uma Equação de Ondas com Dissipação Localizada.

CDD

À Deus, acima de tudo, por ter me dado perseverança para vencer mais este desafio.

Agradecimentos

Àquele que é poderoso para fazer infinitamente mais do que tudo quanto pedimos ou pensamos. Ao único que é digno de receber toda a honra e toda a glória, e todo o elogio que temos para dar: Deus.

Ao meu marido André pelo amor incondicional; por sempre estar ao meu lado em todos os momentos. Pela paciência, compreensão e incentivo essenciais para que eu pudesse concluir esse trabalho.

À minha família, em especial aos meus pais Solange e João Carlos, e minhas irmãs Renata, Patrícia e Mariana, por acreditarem em mim e me encorajarem sempre; sobretudo pelo amor, sentimento que abrange com precisão tudo de bom que me deram.

Aos meus sogros Fernando e Rosalba pelo apoio e carinho fundamentais para que eu pudesse seguir em frente.

Ao professor e orientador Mauro Antônio Rincon pela oportunidade e pelos conhecimentos transmitidos durante meus estudos.

Ao professor e co-orientador Ademir Fernando Pazoto pela atenção e importantes contribuições dedicadas à este trabalho.

Aos amigos e colegas Bianca, Bruno, Ênio, Michaelle, Renata e Vinícius pela motivação e por incontáveis horas de descontração; em especial ao amigo Alessandro pela valiosa ajuda.

Aos funcionários do NCE: Lina, Adriana, Deise, Regina e Edileusa pela assistência prestada durante todo o curso.

À CAPES e ao Núcleo de Computação Eletrônica pela bolsa de estudos que me permitiu desenvolver essa dissertação.

À banca pela disposição de tempo e colaboração para a finalização deste projeto.

À todos que de alguma maneira fazem parte dessa vitória.

Resumo

Neste trabalho, estudamos um problema de contorno que modela a equação de ondas, na presença de uma dissipação localizada. São estabelecidos resultados de existência e unicidade de solução, e a estabilização da energia do sistema com taxas de decaimento exponencial é obtida via funcional de Lyapunov. Além disso, para a obtenção da solução numérica, utilizamos o Método de Elementos Finitos associado ao Método de Diferenças Finitas. Na implementação numérica, usamos a linguagem de programação C e mostramos as soluções numéricas do problema com seus gráficos.

Abstract

In this work, we study a boundary problem that model a wave equation under the presence of a localized dissipation. We also establish results of existence and uniqueness of solutions, and the estabilization of energy with exponential decay is obtained via Lyapunov's functional. In order to obtain the numerical solution, we use Finite Element's Method associated with Difference Finite's method. In numerical implementation, we use C programming language and show numerical solutions of the problem with their graphics.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados Preliminares	4
1.1 Algumas Noções de Análise Funcional	4
1.2 Espaço das Distribuições Escalares	8
1.3 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	8
1.4 Espaços $L^p(\Omega)$	9
1.4.1 Espaços $L_{loc}^p(\Omega)$	10
1.5 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$	11
1.6 Espaços de Sobolev	12
1.6.1 Convergência em L^p e no dual do L^p	12
1.7 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	14
1.8 Desigualdades Importantes	16
1.9 Outros Resultados Úteis	18
2 Existência e Unicidade de Soluções	19
2.1 Existência de Soluções	19
2.2 Formulação Variacional	19
2.3 Método de Faedo-Galerkin	21
2.4 Estimativas para as Soluções Aproximadas:	24
2.5 Passagem ao Limite	27
2.6 Análise das Condições Iniciais	30
2.7 Unicidade	31

3	Decaimento da Energia	32
3.1	Técnica de Multiplicadores	32
4	Análise Numérica	38
4.1	Método de Elementos Finitos	38
4.2	Função de Interpolação	40
4.3	Cálculo das Matrizes	41
4.3.1	Matriz A	41
4.3.2	Matriz B	42
4.3.3	Matriz C	43
4.4	Interpolação de $a(x)$	44
4.5	Condições de Fronteira	49
4.6	Método de Diferenças Finitas	50
4.6.1	Notação	50
4.6.2	Método da Diferença Central	51
5	Penalização da Equação Dissipativa	53
6	Simulações Numéricas	57
6.1	Exemplo 1	58
6.1.1	Solução Numérica	61
6.2	Exemplo 2	66
6.2.1	Solução Numérica	68
6.3	Exemplo 3	74
6.3.1	Solução Numérica	76
6.4	Conclusão	82
	Referências Bibliográficas	83

Introdução

Nos últimos anos, o estudo de modelos matemáticos relacionados a estruturas flexíveis sujeitas à vibração tem sido consideravelmente estimulado pelo número crescente de questões de interesse prático. Dentre esses modelos, podemos destacar aqueles relacionados à engenharia estrutural moderna que requerem mecanismos de controle ativos para estabilizar estruturas intrinsecamente instáveis ou que possuem um amortecimento natural muito fraco. No presente trabalho, estamos interessados no estudo do modelo que descreve as vibrações transversais de uma corda finita de comprimento L , fixa nos seus extremos e sujeita a uma força axial. A posição $u(x, t)$ de um ponto x da corda, num instante t , deve satisfazer

$$(*) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t = 0 & , \quad 0 < x < L & , \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & , \quad 0 < x < L, \end{cases}$$

onde $a(x) > 0, \forall x \in [0, L]$. A energia associada ao modelo é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + u_x^2) dx \quad (\diamond)$$

e verificamos através de um cálculo direto que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L a(x) u_t^2 dx;$$

ou seja; que $E(t)$ é decrescente.

Nessas condições, podemos dizer que $(*)$ tem uma natureza dissipativa, e o termo $a(x)u_t$ funciona como um mecanismo de controle (dissipação) e poderia ser forte o suficiente para estabilizar a energia associada à $(*)$.

O presente trabalho tem como objetivo principal tratar as seguintes questões:

I) Existência e Unicidade de Soluções

Tomando dados iniciais $u_0 \in H_0^1(0, L)$ e $u_1 \in L^2(0, L)$, utilizaremos o método de Faedo-Galerkin para mostrar que (*) possui uma única solução fraca; ou seja, que existe uma única função u satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_t(t), \varphi) + (u_x, \varphi_x) + (a(x)u_t, \varphi) &= 0 \quad , \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, L) \text{ em } D'(0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \end{aligned}$$

II) Decaimento Exponencial da Energia

Mostraremos que $E(t)$ decai exponencialmente a zero quando $t \rightarrow \infty$. Este resultado será obtido via funcional de Lyapunov, ou seja, construiremos um funcional $\mathcal{L}(t)$ proporcional à $E(t)$, cuja derivada é negativa e proporcional a ele mesmo

$$c_1 \mathcal{L}(t) \leq E(t) \leq c_2 \mathcal{L}(t),$$

com c_1 e $c_2 > 0$, e

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -c \mathcal{L}(t) \quad , \quad c > 0,$$

donde obtemos que

$$E(t) \leq \beta E(0) e^{-ct} \quad , \quad \beta > 0 \quad , \quad c > 0.$$

Devido ao caráter introdutório dessa parte do trabalho, consideraremos $a(x) > a_0 > 0$.

III) Aproximações numéricas

Outro tema de importância no contexto desse trabalho, está intimamente relacionado com as aplicações numéricas desses modelos.

É bem sabido que quando o modelo contínuo original apresenta determinadas propriedades assintóticas, estas podem ser perdidas ao introduzirmos discretização. Esse fenômeno já foi observado em [15] e [17], e nesse trabalho visamos a obtenção de esquemas discretos que preservam as propriedades do modelo contínuo; ou seja; cuja energia associada tenha decaimento exponencial e que convirja em uma topologia adequada.

Todos os resultados teóricos como existência, unicidade e comportamento assintótico são fundamentais para a implementação de métodos numéricos.

Apresentamos a Análise Numérica do problema, utilizando o Método de Elementos Finitos no espaço associado ao Método de Diferenças Finitas no tempo. Para isso desenvolveremos um programa computacional utilizando a linguagem C e algumas simulações numéricas são apresentadas. Destacamos também as soluções numéricas e seus respectivos gráficos.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos que serão necessários nos capítulos posteriores. Algumas demonstrações serão omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados podem ser encontrados.

1.1 Algumas Noções de Análise Funcional

Definição 1.1.1 (Norma). *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} . Uma aplicação*

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma norma em E se, para quaisquer $u, v \in E$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são satisfeitas:

i) $\|u\| \geq 0$;

ii) a relação $\|u\| = 0$ implica $u = 0$;

iii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$;

iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Observação 1.1.1. *Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial no qual está dada uma norma. Sendo $v \in E$, em todo trabalho, denotaremos por $\|v\|_E$ a norma do vetor v*

do espaço vetorial E . No entanto, em algumas ocasiões, para não sobrecarregar a notação denotaremos simplesmente $\|v\|$ deixando subentendido que se trata da norma do espaço vetorial ao qual consideramos que v pertence.

Definição 1.1.2 (Espaço de Banach). Um espaço normado E é dito um espaço de Banach se E é um espaço métrico completo relativamente à métrica (noção de distância) proveniente de sua norma. Em outras palavras: toda seqüência de Cauchy é convergente com relação à métrica dada por: $d(u, v) = \|u - v\|$.

Definição 1.1.3 (Produto Interno). Um produto interno num espaço vetorial E é um funcional bilinear simétrico e positivo em E . Mais precisamente, é uma função

$$(\cdot, \cdot)_E : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

para qual são válidas as seguintes propriedades: para quaisquer $u, v, w \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

Bilinearidade:

$$\begin{aligned} (u + v, w)_E &= (u, w)_E + (v, w)_E & , & & (\alpha u, v)_E &= \alpha(u, v)_E, \\ (u, v + w)_E &= (u, v)_E + (u, w)_E & , & & (u, \alpha v)_E &= \alpha(u, v)_E; \end{aligned}$$

Comutatividade (Simetria): $(u, w)_E = (w, u)_E$;

Positividade: $(u, u)_E > 0$ se $u \neq 0$.

Observação 1.1.2. Analogamente ao caso da norma, às vezes podemos omitir o subíndice E da notação $(\cdot, \cdot)_E$, levando em consideração que, provavelmente, o contexto não cause confusão com a notação de par ordenado.

Definição 1.1.4 (Espaço de Hilbert). Um espaço com produto interno V é dito um espaço de Hilbert V , se V é um espaço de Banach com respeito à norma proveniente de seu produto interno; ou seja; com relação à norma dada por: $\|v\|_E = \sqrt{(v, v)_E}$.

Definição 1.1.5 (Imersão). Sejam $V \subset H$ espaços de Hilbert. Ao operador linear, injetivo, $\tau : V \longrightarrow H$, que a cada $v \in V$ faz corresponder τv como elemento de H , chamamos imersão τ de V em H . Quando existe $k > 0$, tal que

$$\|\tau v\|_H \leq k\|v\|_V, \quad \forall v \in V,$$

dizemos que τ é uma imersão contínua. Quando o fecho da imagem de conjuntos limitados de V , por τ , forem compactos dizemos que τ é uma imersão compacta.

Definição 1.1.6 (Espaço Separável). Um espaço normado E é dito separável se existe um subconjunto enumerável D de E , tal que D é denso em E (isto é, para todo $v \in E$ e para todo $r > 0$, $B(v, r) \cap D \neq \emptyset$).

Notação 1.1.1. Designaremos por E' o dual (topológico) de E , i.e., o espaço de todas as formas lineares contínuas sobre E . Quando $f \in E'$ e $x \in E$ denotaremos $\langle f, x \rangle$ ao invés de $f(x)$.

Sejam E um espaço de Banach e $f \in E'$, designamos por $T_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por $T_f(x) = \langle f, x \rangle$.

Definição 1.1.7. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínua todas as aplicações $(T_f)_{f \in E'}$.

Notação 1.1.2. Dada uma seqüência x_n em E denotaremos por $x_n \rightarrow x$ a convergência em $\sigma(E, E')$, convergência fraca, e por $x_n \rightarrow x$ a convergência forte, i.e., na norma de E .

Proposição 1.1.1. Se x_n é uma seqüência em E , então

i) $x_n \rightarrow x$ em $\sigma(E, E') \iff \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$.

ii) $x_n \rightarrow x$ em $E \iff x_n \rightarrow x$ em $\sigma(E, E')$

Demonstração: Ver [2]. ■

Observação 1.1.3. Sendo E um espaço normado, podemos definir uma imersão canônica J da seguinte forma

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle J_x, f \rangle_{E'' \times E'} = \langle f, x \rangle_{E' \times E'} \end{aligned}$$

onde, $\langle J_x, f \rangle_{E'' \times E'}$ denota $J_x \in E''$ aplicada em $f \in E'$. A imersão J é uma isometria, i.e., $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$ (ver [2]).

Definição 1.1.8 (Espaço Reflexivo). *Um espaço normado E é reflexivo quando a imersão canônica J é sobrejetiva.*

Para cada $x \in E$ consideremos a aplicação $T_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_x(f) = \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$. Quando x percorre E obtemos uma família de aplicações $(T_x)_{x \in E}$ de E' em \mathbb{R} .

Definição 1.1.9. *A topologia fraca \star (lê-se: fraca estrela) denotada também por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações $(T_x)_{x \in E}$.*

Notação 1.1.3. *Dada uma seqüência f_n em E' , denotaremos por $f_n \xrightarrow{\star} f$ a convergência de f_n à f na topologia fraca \star .*

Proposição 1.1.2. *Se E é um espaço de Banach e f_n uma seqüência de E' então*

i) $f_n \xrightarrow{\star} f$ em $\sigma(E', E) \iff \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E$.

ii) $f_n \rightarrow f \implies f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$.

iii) $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'') \implies f_n \xrightarrow{\star} f$ em $\sigma(E', E)$.

iv) $f_n \xrightarrow{\star} f$ em $\sigma(E', E) \implies \|f_n\|$ é limitado e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

v) $f_n \xrightarrow{\star} f$ em $\sigma(E', E)$ e $x_n \rightarrow x$ em $E \implies \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.1.1. *Sejam E um espaço de Banach separável e f_n uma seqüência limitada em E' . Então existe uma subseqüência (f_{n_k}) que converge na topologia $\sigma(E', E)$.*

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.1.2. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma seqüência limitada em E . Então existe uma subseqüência (x_{n_k}) que converge na topologia $\sigma(E, E')$.*

Demonstração: Ver [2]. ■

1.2 Espaço das Distribuições Escalares

Definição 1.2.1. Dada uma função contínua, $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto, denominamos suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x , tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente,

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas infinitamente deriváveis em Ω , com suporte compacto em Ω .

1.3 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado *espaço das funções testes*.

Definição 1.3.1. Denominamos distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear contínua com respeito à topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz às seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega);$

ii) T é contínua, isto é, se uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_\nu)$ converge para $T(\varphi)$ em \mathbb{R} .

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω .

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor da distribuição T aplicado na função teste φ .

1.4 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.4.1. Dado um aberto Ω do \mathbb{R}^n denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω , equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C \quad \text{quase sempre em } \Omega.$$

Neste espaço consideramos a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess } |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, é um espaço de *Banach*. Em particular, quando $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* cuja norma e produto interno serão definidos e denotados, respectivamente, por

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Teorema 1.4.1. $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.4.2 (Interpolação dos Espaços $L^p(\Omega)$). *Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in (p, q)$. Além disso,*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\frac{1}{r} = \alpha \frac{1}{p} + (1 - \alpha) \frac{1}{q}$.

1.4.1 Espaços $L_{loc}^p(\Omega)$

Definição 1.4.2. *Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^n e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L_{loc}^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $u\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω , onde χ_K é a função característica do compacto K .*

Observação 1.4.1. $L_{loc}^1(\Omega)$ é chamado espaço das funções localmente integráveis.

Para $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx,$$

define uma distribuição sobre Ω .

Lema 1.4.1 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .*

Demonstração: Ver [14]. ■

Se $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ então a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

é uma distribuição. Além disso, T_u é univocamente determinada por u . De fato, como φ possui suporte compacto contido em Ω e $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, a integral acima é finita e, portanto, T_u está bem definida. Sendo T_u linear, é suficiente mostrar que ela é contínua: seja φ_n convergente para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Então, $\forall \delta > 0$ existe um compacto fixo $K \subset \Omega$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \implies \sup_{x \in K} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \delta.$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, para $n > n_0$ temos que

$$|\langle T_u, \varphi \rangle - \langle T_u, \varphi_n \rangle| \leq \int_K |u(x)| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \delta C; \quad C = \int_K |u(x)| dx.$$

Fixando $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ na última expressão segue que T_u é contínua e, conseqüentemente, uma distribuição. Supondo T_u igualmente definida por u e $v \in L_{loc}^1(\Omega)$, do Lema 1.4.1 segue que $u = v$.

Observação 1.4.2. *Freqüentemente, identificamos a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}$. Nesse sentido temos que $L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω , isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.*

1.5 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5.1. *A seqüência de distribuições escalares $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T , isto é, $T_\nu \rightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando*

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e temos as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < \infty.$$

Definição 1.5.2 (Derivada de uma Distribuição). *A derivada de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a distribuição representada por $\frac{dT}{dx}$, definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por*

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Uma grande vantagem desta noção de derivada é que uma distribuição possui derivadas de todas as ordens. Representando por $\frac{d^n T}{dx^n}$ (ou $T^{(n)}$) a derivada n -ésima de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ temos

$$\left\langle \frac{d^n T}{dx^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se denotarmos $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ podemos definir a derivada distribucional de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição temos que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u . Assim, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.6 Espaços de Sobolev

1.6.1 Convergência em L^p e no dual do L^p

Dizemos que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será denotado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, é reflexivo. Para demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços $L^p(\Omega)$, consulte [2].

Teorema 1.6.1. *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então, existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge quase sempre para f em Ω , e existe $h \in L^p(\Omega)$, tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, quase sempre em Ω .

Demonstração: Ver [2]. ■

Definição 1.6.1. *Seja H um espaço de Hilbert. Chamamos base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que*

i) $\|\omega_n\|_H = 1 \quad \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \quad \forall n, m, m \neq n;$

ii) *O espaço gerado pela $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é denso em H .*

Definição 1.6.2. *Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem m , modelado sobre $L^p(\Omega)$, aqui denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^p(\Omega)$ para as quais suas derivadas até a ordem α , no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com norma*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |(D^\alpha u)(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e quando $p = \infty$, definimos

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposição 1.6.1. *Os espaços lineares $W^{m,p}(\Omega)$ equipados das respectivas normas acima são espaços de Banach.*

Demonstração: Ver [1]. ■

Observações:

1. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.
2. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, que é denotado por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

cuja norma e produto interno são dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

3. O espaço $H^m(\Omega)$ com a estrutura topológica acima, é um espaço de *Hilbert*, continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

Definição 1.6.3. *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Definição 1.6.4. *Suponhamos $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Observações:

1. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é o espaço denotado por $H^{-m}(\Omega)$.
2. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A caracterização de $W^{-m,p}(\Omega)$ é dada por

Teorema 1.6.2. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: Ver [1]. ■

Definição 1.6.5. Dado $1 \leq p < \infty$, designamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, denotamos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Observação 1.6.1. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é dotado da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, $W_0^{1,p}(\Omega)$ é de Banach separável e reflexivo para $1 < p < \infty$.

O próximo teorema dá uma caracterização às funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.6.3. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Demonstração: Ver [2]. ■

1.7 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E .

- Uma função vetorial $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos.
- Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é Bochner integrável (\mathcal{B} -integrável) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

- i)* $\varphi_\nu \rightarrow u$ em X , q.s. em $(0, T)$;
- ii)* $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0$.

Neste caso, a integral de *Bochner* (Ver [19]) de u é, por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t) dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X .

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X . Dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à *Lebesgue*.

Denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lebesgue* em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$. A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável (ver [16]), cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0, T; X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, podemos verificar que para cada $u \in [L^p(0, T; X)]'$, existe $\tilde{u} \in L^{p'}(0, T; X')$, tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle \tilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$. Uma demonstração para este resultado encontramos em [6].

Para uma maior discussão sobre espaços de funções com valores vetoriais consulte [9].

Definição 1.7.1. *O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , o qual será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.*

Definição 1.7.2. *Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$, com valores em X , dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}'(0, T).$$

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$, representamos o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$ denotamos o *espaço das funções* $u : [0, T] \rightarrow X$ *fracamente contínuas*, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente à continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$, $\forall v \in H$.

1.8 Desigualdades Importantes

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = 1$ se $p = \infty$, e $q = \infty$ se $p = 1$). Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Desigualdade de Young

Se $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.

Desigualdade de Cauchy-Schwartz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de quadrado integrável, então

$$|(f, g)_{L^2}| = \left| \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Desigualdade de Poincaré

Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n . Então, existe uma constante $C > 0$ (dependendo de Ω), tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ para toda } u \in H_0^1(\Omega).$$

A constante $C = C(\Omega)$ citada na desigualdade acima é chamada de constante de Poincaré para Ω . Esta desigualdade também é válida se Ω for limitado em apenas uma direção.

Observações:

1. A desigualdade de Poincaré também é válida se $u \in H^1(\Omega)$ e o traço de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ anular sobre apenas uma parte de Γ (ver [2]).
2. A desigualdade de Poincaré continua válida em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Conseqüências da Desigualdade de Poincaré:

1. A norma de Sobolev $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente à norma do gradiente em $L^2(\Omega)$. De fato, a desigualdade de Poincaré diz que existe $c > 0$ tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, naturalmente, temos que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ para toda $u \in H^1(\Omega)$.
2. A norma de Sobolev $\|\cdot\|_{H^2\Omega}$ é equivalente à norma do Laplaciano em $L^2(\Omega)$ para funções em $H_0^2(\Omega)$, isto é, existe $c > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^2(\Omega)$. Isso segue do fato de que se $u \in H_0^2(\Omega)$ então $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ e ainda da desigualdade de Poincaré.

1.9 Outros Resultados Úteis

Considerando a seqüência $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ definida pelos elementos

$$w_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{\nu\pi x}{L} \quad (1.1)$$

e a seqüência $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\lambda_\nu = \left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2, \quad (1.2)$$

autovetores e autovalores, respectivamente, associados ao operador $-\frac{d^2}{dx^2}$, podemos enunciar o teorema abaixo.

Teorema 1.9.1. *Consideremos a seqüência $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ definida acima. Então*

- i) $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base hilbertiana para $L^2(0, L)$;*
- ii) $\left(\frac{w_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}}\right)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base hilbertiana para $H_0^1(0, L)$;*
- iii) $\left(\frac{w_\nu}{\lambda_\nu}\right)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base hilbertiana para $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$.*

Demonstração: Ver [14]. ■

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções

2.1 Existência de Soluções

Usando o Método de Faedo-Galerkin, demonstraremos neste capítulo a existência de soluções fracas do problema abaixo para a equação da onda, dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t = 0 & , & 0 < x < L & , & t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , & u_t(x, 0) = u_1(x) & , & 0 < x < L \end{cases} \quad (2.1)$$

onde

$$a \in L^\infty(0, L) \text{ e } a = a(x) > a_0 > 0, \forall x \in (0, L).$$

O termo dissipativo $a(x)u_t$ representa a força axial, isto é, a força que atua na direção de um dos eixos, e faz com que a energia associada ao problema seja decrescente.

2.2 Formulação Variacional

O Método de Elementos Finitos não é aplicável diretamente ao problema (2.1). Assim, é necessário expressar o problema numa forma mais adequada, ou seja, a formulação variacional, para que seja possível aplicar o Método de Faedo-Galerkin.

Representaremos por $u(t)$ a função que a cada $x \in [0, L]$ faz corresponder $u(x, t)$.

Multiplicando formalmente a primeira equação do problema (2.1) por v e integrando de 0 a L , obtemos, já fazendo a integração por partes na segunda integral,

$$\int_0^L u''(t) v(x) dx + \int_0^L \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} dx + \int_0^L a(x) u'(t) v(x) dx = 0, \quad \forall v = v(x) \in H_0^1(0, L); \quad (2.2)$$

ou seja;

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + ((u(t), v)) + (a(x)u'(t), v) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T). \quad (2.3)$$

A formulação variacional do problema (2.1) consiste em trocarmos a igualdade pontual dada pela primeira equação de (2.1) pela igualdade variacional (2.3).

Definição 2.2.1. Chamamos de *solução fraca* de (2.1) às funções que verificam (2.3) e as condições iniciais e de *soluções fortes* as que verificam a primeira equação de (2.1) e as condições iniciais.

Observação 2.2.1. Pela maneira como obtemos (2.3) vemos que toda solução forte também é fraca. Além disso, assumindo maior regularidade para funções que satisfaçam (2.3) verificamos que também satisfazem a primeira equação de (2.1). De fato, toda solução fraca, sob certas condições, também é forte.

Teorema 2.2.1. Sejam $T > 0$ (arbitrário fixo), $a \in L^\infty(0, L)$ e tal que $a = a(x) > 0$. Se $u_0 \in H_0^1(0, L)$ e $u_1 \in L^2(0, L)$, então existe uma única função real $u : [0, T] \rightarrow L^2(0, L)$ satisfazendo

$$u \in C^0([0, T], H_0^1(0, L)) \quad (2.4)$$

$$u' \in C^0([0, T], L^2(0, L)) \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + ((u(t), v)) + (a(x)u'(t), v) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in H_0^1(0, L) \quad (2.6)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad (2.7)$$

onde

$$((u(t), v))_{H_0^1(0, L)} = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx$$

$$(u(t), v)_{L^2(0, L)} = \int_0^L u(x, t) v(x) dx.$$

2.3 Método de Faedo-Galerkin

A idéia da demonstração consiste em projetar o problema do Teorema 2.2.1 em subespaços de dimensão finita; ou seja; aproximá-lo por problemas análogos de dimensão finita. Essa forma de procedimento foi introduzida por Faedo-Galerkin. Faremos a demonstração desse teorema em várias etapas.

Demonstração:

Problema Aproximado

Consideremos $\{w_j\}$ a base hilbertiana de $H_0^1(0, L)$ introduzida no Teorema 1.9.1 e $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ o subespaço de $H_0^1(0, L)$, de dimensão m , gerado pelos m primeiros vetores w_1, w_2, \dots, w_m .

Procuramos

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x) \quad (2.8)$$

onde $g_{im}(t)$, $1 \leq i \leq m$ é uma função real, solução de

$$\begin{cases} (u_m''(t), w_i) + ((u_m(t), w_i)) + (a(x)u_m'(t), w_i) = 0, \\ u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ forte em } H_0^1(0, L) \\ u_m'(0) = u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ forte em } L^2(0, L) \end{cases} \quad (2.9)$$

onde

$$\begin{cases} u_{0m} = \sum_{i=1}^m \left(\left(u_m(t), \frac{w_i}{L} \right) \right) \frac{w_i}{L} = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i \\ u_{1m} = \sum_{i=1}^m (u_1, w_i) w_i \end{cases}$$

são as aproximações de u_0 e u_1 , para $i = 1, 2, \dots, m$, respectivamente.

Vamos mostrar que para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo, existe uma função u_m da forma (2.8), que satisfaz o problema (2.9). O problema se reduz a achar a função $g_{im}(t)$.

A idéia é provar que existe uma função u , tal que

$$u_m = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x) \rightarrow u(t)$$

em algum sentido, e que u seja solução de (2.1). Então, devemos ter

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i &= u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^m g_{im}(0) w_i \\ \sum_{i=1}^m (u_1, w_i) w_i &= u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{i=1}^m g'_{im}(0) w_i.\end{aligned}$$

Como $\{w_i\}$ é L. I., devemos impor que $g_{im}(0) = (u_0, w_i)$ e $g'_{im}(0) = (u_1, w_i)$, para $1 \leq i \leq m$.

Substituindo $u_m = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(x)$ no problema aproximado, obtemos que (2.9) é equivalente ao seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) para a função $g_{im}(t)$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m g''_{im}(t)w_i, w_j \right) + \left(\left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i, w_j \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^m a(x)g'_{im}(t)w_i, w_j \right) = 0 \\ g_{im}(0) = (u_0, w_i) \\ g'_{im}(0) = (u_1, w_i) \end{cases} \quad (2.10)$$

onde $j = 1, 2, \dots, m$ e $i = 1, 2, \dots, m$. Usando a linearidade do produto interno de $L^2(0, L)$ em (2.10) temos que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m g''_{im}(t)(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^m g_{im}(t)((w_i, w_j)) + \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)(a(x)w_i, w_j) = 0 \\ g_{im}(0) = (u_0, w_i) \\ g'_{im}(0) = (u_1, w_i) \end{cases} \quad (2.11)$$

para $j = 1, 2, \dots, m$ e $i = 1, 2, \dots, m$. Fazendo alguns cálculos, obtemos que $((w_i, w_j)) = \lambda_j(w_i, w_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, onde $\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2$. Reescrevendo então, o problema acima, temos

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m g''_{im}(t)(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \lambda_j (w_i, w_j) + \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)(a(x)w_i, w_j) = 0 \\ g_{im}(0) = (u_0, w_i) \\ g'_{im}(0) = (u_1, w_i) \end{cases} \quad (2.12)$$

para $j = 1, 2, \dots, m$ e $i = 1, 2, \dots, m$.

Como (w_i) é base hilbertiana de $L^2(0, L)$ temos que $(w_i, w_j) = 0$, $i \neq j$ e $|w_i|^2 = 1$ logo, chamando

$$c_{ij} = (a(x)w_i, w_j)_{L^2(0,L)} \quad (2.13)$$

temos que o sistema (2.12) é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} g''_{jm}(t) + \lambda_j g_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m c_{ij} g'_{jm}(t) = 0 \\ g_{jm}(0) = (u_0, w_j) \\ g'_{jm}(0) = (u_1, w_j) \end{cases} \quad (2.14)$$

para $j = 1, 2, \dots, m$.

Este é um sistema linear de EDO's de segunda ordem com coeficientes constantes com condições iniciais para as funções $(g_{jm})_{j=1}^m$ e $(g'_{jm})_{j=1}^m$. Pelo **Teorema de Existência e Unicidade** para EDO's, esse problema tem uma única solução g_{jm} , para cada $j = 1, \dots, m$, definidas em $[0, t_m)$. Um sistema desse tipo pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} d''(t) + Bd(t) + Cd'(t) = 0 \\ d(0) = d_0 \\ d'(0) = d_1 \end{cases} \quad (2.15)$$

onde

$$\begin{cases} B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \\ C = (c_{ij})^t \\ d(0) = d_0 = (u_0, w_i)_{L^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ d'(0) = d_1 = (u_1, w_i)_{L^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

O sistema de Equações Diferenciais Ordinárias acima pode ser resolvido pelo Método de Diferenças Finitas.

Determinada a solução do sistema (2.15), dada por

$$d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_m(t)) \quad , \quad t \geq 0$$

então a solução aproximada $u_m(x, t)$ é obtida por

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) w_i(x). \quad (2.16)$$

2.4 Estimativas para as Soluções Aproximadas:

Nesta etapa da demonstração, faremos algumas estimativas com o objetivo de obtermos limitações das normas de u_m e u'_m . Estas estimativas serão usadas para passagem ao limite no problema aproximado e para mostrar que as soluções podem ser estendidas a todo intervalo $[0, T]$, $T > 0$.

Nosso objetivo agora, consiste em provar que as seqüências $(u_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ e $(u'_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ convergem para as funções u e u' , respectivamente, nas condições do Teorema 2.2.1.

$$\text{Convergência de } \begin{cases} (u_m(t))_{m \in \mathbb{N}} & \text{em } C^0([0, T]; H_0^1(0, L)) \\ (u'_m(t))_{m \in \mathbb{N}} & \text{em } C^0([0, T]; L^2(0, L)) \end{cases}$$

De fato, é suficiente provar que $(u_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $C^0([0, T]; H_0^1(0, L))$ e que $(u'_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $C^0([0, T]; L^2(0, L))$. Para tal, considere quaisquer dois índices $m, n \in \mathbb{N}$, supondo-se $m > n$.

Do problema (2.9), se $m > n$, fazendo a diferença entre os problemas aproximados para m e para n , $\forall w \in V_m$, temos

$$\left(u_m''(t) - u_n''(t), w \right) + \left(\left(u_m(t) - u_n(t), w \right) \right) + \left(a(x) u_m'(t) - a(x) u_n'(t), w \right) = 0.$$

Então considerando $w = u'_m(t) - u'_n(t)$ obtemos que

$$\begin{aligned} & \left(u_m''(t) - u_n''(t), u'_m(t) - u'_n(t) \right)_{L^2} + \left(\left(u_m(t) - u_n(t), u'_m(t) - u'_n(t) \right) \right)_{H_0^1} + \\ & + \left(a(x) u_m'(t) - a(x) u_n'(t), u'_m(t) - u'_n(t) \right)_{L^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

De (2.17) temos então

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u'_m(t) - u'_n(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u_m(t) - u_n(t) \right\|_{H_0^1}^2 + \\ & + \int_0^L \left(a(x) u'_m(t) - a(x) u'_n(t) \right) \left(u'_m(t) - u'_n(t) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u'_m(t) - u'_n(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| u_m(t) - u_n(t) \right\|_{H_0^1}^2 + \\ & + \int_0^L a(x) \left(u'_m(t) - u'_n(t) \right)^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a s , $0 < s < t_m$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \left\| u'_m(t) - u'_n(t) \right\|_{L^2}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \left\| u_m(t) - u_n(t) \right\|_{H_0^1}^2 dt + \\ & + \int_0^s \int_0^L a(x) \left(u'_m(t) - u'_n(t) \right)^2 dx dt = 0; \end{aligned}$$

ou seja;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| u'_m(s) - u'_n(s) \right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \left\| u'_m(0) - u'_n(0) \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \left\| u_m(s) - u_n(s) \right\|_{H_0^1}^2 + \\ & - \frac{1}{2} \left\| u_m(0) - u_n(0) \right\|_{H_0^1}^2 + \int_0^s \int_0^L a(x) \left(u'_m(t) - u'_n(t) \right)^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

Portanto, trocando s por t e observando que $a(x) > a_0 > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| u'_m(t) - u'_n(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \left\| u_m(t) - u_n(t) \right\|_{H_0^1}^2 = \frac{1}{2} \left\| u'_m(0) - u'_n(0) \right\|_{L^2}^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left\| u_m(0) - u_n(0) \right\|_{H_0^1}^2 - \int_0^t \int_0^L a(x) \left(u'_m(t) - u'_n(t) \right)^2 dx dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left\| u'_m(0) - u'_n(0) \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \left\| u_m(0) - u_n(0) \right\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

Do problema aproximado (2.9) temos que $u_m(0) = u_{0m}$ e $u'_m(0) = u_{1m}$ e consequentemente

$$\frac{1}{2} \left\| u'_m(t) - u'_n(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \left\| u_m(t) - u_n(t) \right\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left\| u_{1m} - u_{1n} \right\|_{L^2}^2}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\| u_{0m} - u_{0n} \right\|_{H_0^1}^2}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

pois $u_{0m} \rightarrow u_0$ e $u_{1m} \rightarrow u_1$, isto é, são seqüências convergentes, e toda seqüência convergente é de Cauchy.

Observe que a desigualdade acima nos garante que as soluções do problema aproximado podem ser estendidas a todo intervalo $[0, T]$.

Assim,

$$\frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\left\| u'_m(t) - u'_n(t) \right\|_{L^2}^2 \right) + \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\left\| u_m(t) - u_n(t) \right\|_{H_0^1}^2 \right) \rightarrow 0;$$

ou seja;

$$\frac{1}{2} \left\| u'_m(t) - u'_n(t) \right\|_{C^0([0, T], L^2(0, L))}^2 + \frac{1}{2} \left\| u_m(t) - u_n(t) \right\|_{C^0([0, T], H_0^1(0, L))}^2 \rightarrow 0.$$

Logo, u'_m e u_m são de Cauchy em $C^0([0, T], L^2(0, L))$ e em $C^0([0, T], H_0^1(0, L))$, respectivamente.

Como $C^0([0, T], L^2(0, L))$ e $C^0([0, T], H_0^1(0, L))$ são espaços completos, toda seqüência de Cauchy é convergente.

Logo, a seqüência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é convergente no espaço $C^0([0, T], H_0^1(0, L))$, para uma função u , isto é, uma função contínua de $[0, T]$ com valores em $H_0^1(0, L)$, provando assim a condição (2.4).

De maneira análoga, a seqüência $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é convergente no espaço $C^0([0, T], L^2(0, L))$, para uma função v , isto é, uma função contínua de $[0, T]$ com valores em $L^2(0, L)$.

Temos, portanto, as convergências

$$u_m \rightarrow u \quad \text{em} \quad C^0([0, T], H_0^1(0, L))$$

$$u'_m \rightarrow v \quad \text{em} \quad C^0([0, T], L^2(0, L))$$

e precisamos provar que $v = u'$. De fato:

Temos também que $C^0([0, T], H_0^1(0, L))$ e $C^0([0, T], L^2(0, L))$ estão imersos em $\mathcal{D}'((0, L) \times (0, T))$. Portanto,

$$\begin{cases} u_m \rightarrow u & \text{em} \quad \mathcal{D}'((0, L) \times (0, T)) \\ u'_m \rightarrow v & \text{em} \quad \mathcal{D}'((0, L) \times (0, T)) \end{cases} \quad (2.18)$$

Sendo a derivação uma operação contínua em $\mathcal{D}'\left((0, L) \times (0, T)\right)$, obtemos de (2.18) que

$$u'_m \rightarrow u' \text{ em } \mathcal{D}'\left((0, L) \times (0, T)\right). \quad (2.19)$$

Pela unicidade do limite, de (2.18) e (2.19), temos que $v = u'$ em $\mathcal{D}'\left((0, L) \times (0, T)\right)$, donde $v = u'$ em $C^0([0, T], L^2(0, L))$.

2.5 Passagem ao Limite

O próximo passo é demonstrar que u satisfaz (2.6).

Multiplicando (2.9) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando em $(0, T)$, obtemos

$$\int_0^T \left(u''_m(t), w_j\right) \theta dt + \int_0^T \left(\left(u_m(t), w_j\right)\right) \theta dt + \int_0^T \left(a(x) u'_m(t), w_j\right) \theta dt = 0. \quad (2.20)$$

Fazendo a integração por partes na primeira integral de (2.20), temos que

$$\int_0^T \left(u''_m(t), w_j\right) \theta dt = - \int_0^T \left(u'_m(t), w_j\right) \theta' dt.$$

Assim, (2.20) pode ser reescrito como

$$- \int_0^T \left(u'_m(t), w_j\right) \theta' dt + \int_0^T \left(\left(u_m(t), w_j\right)\right) \theta dt + \int_0^T \left(a(x) u'_m(t), w_j\right) \theta dt = 0. \quad (2.21)$$

Na seqüência, devemos mostrar as convergências abaixo

$$- \int_0^T \left(u'_m(t), w_j\right) \theta' dt \longrightarrow - \int_0^T \left(u'(t), w_j\right) \theta' dt \quad (2.22)$$

$$\int_0^T \left(\left(u_m(t), w_j\right)\right) \theta dt \longrightarrow \int_0^T \left(\left(u(t), w_j\right)\right) \theta dt \quad (2.23)$$

$$\int_0^T \left(a(x) u'_m(t), w_j\right) \theta dt \longrightarrow \int_0^T \left(a(x) u'(t), w_j\right) \theta dt. \quad (2.24)$$

Assim, teremos

$$- \int_0^T \left(u'(t), v\right) \theta' dt + \int_0^T \left(\left(u(t), v\right)\right) \theta dt + \int_0^T \left(a(x) u'(t), v\right) \theta dt = 0 \quad (2.25)$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, e $v \in H_0^1(0, L)$.

Sendo a função $t \rightarrow (u'(t), v)$, pertencente a $L^2(0, L)$, ela é derivável no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. Portanto, aplicando a definição de derivada no sentido das distribuições a (2.25), obtemos

$$\underbrace{- \int_0^T (u'(t), v) \theta' dt}_{\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta \right\rangle} + \underbrace{\int_0^T ((u(t), v)) \theta dt}_{\left\langle ((u(t), v)), \theta \right\rangle} + \underbrace{\int_0^T (a(x) u'(t), v) \theta dt}_{\left\langle (a(x) u'(t), v), \theta \right\rangle} = 0 \quad (2.26)$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$.

Pela linearidade das distribuições,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v) + ((u(t), v)) + (a(x) u'(t), v), \theta \right\rangle = 0 \quad , \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T);$$

ou seja;

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + ((u(t), v)) + (a(x) u'(t), v) = 0 \quad em \quad \mathcal{D}'(0, T).$$

provando assim a igualdade (2.6) do Teorema 2.2.1.

Provaremos agora (2.22), (2.23) e (2.24):

$$\int_0^T (u'_m(t), w_j) \theta' dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), w_j) \theta' dt \iff \left| \int_0^T (u'_m(t) - u'(t), w_j) \theta' dt \right| \longrightarrow 0.$$

De fato:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (u'_m(t) - u'(t), w_j) \theta' dt \right| &\leq \int_0^T |(u'_m(t) - u'(t), w_j) \theta'| dt \\ &= \int_0^T |(u'_m(t) - u'(t), w_j)_{L^2}|_{\mathbb{R}} |\theta'|_{\mathbb{R}} dt \\ &\leq \int_0^T \|u'_m(t) - u'(t)\|_{L^2} \|w_j\|_{L^2} |\theta'|_{\mathbb{R}} dt \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|u'_m(t) - u'(t)\|_{L^2} \int_0^T \|w_j\|_{L^2} |\theta'|_{\mathbb{R}} dt. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$u'_m \rightarrow u' \text{ em } C^0([0, T], L^2(0, L)) \iff \sup_{0 \leq t \leq T} \|u'_m(t) - u'(t)\|_{L^2(0, L)} \longrightarrow 0 \quad (2.27)$$

e, como a última integral não depende de m e é limitada, temos que $\left| \int_0^T (u'_m(t) - u'(t), w_j) \theta' dt \right| \longrightarrow 0$, o que demonstra (2.22).

De maneira análoga, mostraremos (2.23)

$$\int_0^T \left((u_m(t), w_j) \right) \theta dt \longrightarrow \int_0^T \left((u(t), w_j) \right) \theta dt \iff \left| \int_0^T \left((u_m(t) - u(t), w_j) \right) \theta dt \right| \longrightarrow 0.$$

De fato:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \left((u_m(t) - u(t), w_j) \right) \theta dt \right| &\leq \int_0^T \left| \left((u_m(t) - u(t), w_j) \right) \theta \right| dt \\ &= \int_0^T \left| \left((u_m(t) - u(t), w_j) \right)_{H_0^1} \right|_{\mathbb{R}} |\theta|_{\mathbb{R}} dt \\ &\leq \int_0^T \left\| u_m(t) - u(t) \right\|_{H_0^1} \|w_j\|_{H_0^1} |\theta|_{\mathbb{R}} dt \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| u_m(t) - u(t) \right\|_{H_0^1} \int_0^T \|w_j\|_{H_0^1} |\theta|_{\mathbb{R}} dt. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$u_m \rightarrow u \text{ em } C^0([0, T], H_0^1(0, L)) \iff \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| u_m(t) - u(t) \right\|_{H_0^1(0, L)} \longrightarrow 0 \quad (2.28)$$

e, como a última integral não depende de m e é limitada, temos que $\left| \int_0^T \left((u_m(t) - u(t), w_j) \right) \theta dt \right| \longrightarrow 0$, o que demonstra (2.23).

Para finalizar, mostraremos (2.24)

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(a(x) u'_m(t), w_j \right) \theta dt &\longrightarrow \int_0^T \left(a(x) u'(t), w_j \right) \theta dt \iff \\ &\iff \left| \int_0^T \left(a(x) u'_m(t) - a(x) u'(t), w_j \right) \theta dt \right| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \left(a(x) u'_m(t) - a(x) u'(t), w_j \right) \theta dt \right| &\leq \int_0^T \left\| a(x) \left(u'_m(t) - u'(t) \right) \right\|_{L^2} \|w_j\|_{L^2} |\theta|_{\mathbb{R}} dt \\ &\leq \int_0^T \left| \sup a(x) \right| \cdot \left\| u'_m(t) - u'(t) \right\|_{L^2} \|w_j\|_{L^2} |\theta|_{\mathbb{R}} dt \\ &\leq \left| \sup a(x) \right| \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| u'_m(t) - u'(t) \right\|_{L^2} \int_0^T \|w_j\|_{L^2} |\theta|_{\mathbb{R}} dt \\ &= \left\| a \right\|_{L^\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| u'_m(t) - u'(t) \right\|_{L^2} \int_0^T \|w_j\|_{L^2} |\theta|_{\mathbb{R}} dt \end{aligned}$$

e o resultado segue.

Se $w \in V_m$, então $w = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j$ e

$$- \int_0^T (u'(t), w_j) \theta' dt + \int_0^T ((u(t), w_j)) \theta dt + \int_0^T (a(x) u'(t), w_j) \theta dt = 0 \quad (2.29)$$

para $j = 1, 2, \dots, m$. Multiplicando (2.29) por α_j e somando de $j = 1$ até m , obtemos

$$- \int_0^T (u'(t), \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j) \theta' dt + \int_0^T ((u(t), \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j)) \theta dt + \int_0^T (a(x) u'(t), \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j) \theta dt = 0.$$

Logo,

$$- \int_0^T (u'(t), w) \theta' dt + \int_0^T ((u(t), w)) \theta dt + \int_0^T (a(x) u'(t), w) \theta dt = 0.$$

Como as combinações lineares finitas dos elementos de V_m são densas em $H_0^1(0, L)$, segue que a igualdade acima é válida para todo $w \in H_0^1(0, L)$, ou seja, temos (2.25) o que acarreta

$$\frac{d}{dt} (u'(t), v) + ((u(t), v)) + (a(x) u'(t), v) = 0, \forall v \in H_0^1(0, L) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T). \quad (2.30)$$

2.6 Análise das Condições Iniciais

Vamos mostrar a seguir que u satisfaz as condições iniciais (2.7) do Teorema 2.2.1:

Da convergência da seqüência $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ para u em $C^0([0, T], H_0^1(0, L))$ temos

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } C^0([0, T], H_0^1(0, L)) \iff \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t) - u(t)\|_{H_0^1(0, L)} \longrightarrow 0,$$

donde deduzimos que $\|u_m(t) - u(t)\|_{H_0^1(0, L)} \longrightarrow 0$. Em particular, para $t = 0$, temos $\|u_m(0) - u(0)\|_{H_0^1(0, L)} \longrightarrow 0$; ou seja;

$$u_m(0) \longrightarrow u(0) \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (2.31)$$

Por outro lado, do problema aproximado (2.9), temos

$$u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ em } H_0^1(0, L). \quad (2.32)$$

Pela unicidade do limite, resulta que $u(0) = u_0$.

Analogamente, da convergência da seqüência $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ para u' em $C^0([0, T], L^2(0, L))$ temos

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ em } C^0([0, T], L^2(0, L)) \iff \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| u'_m(t) - u'(t) \right\|_{L^2(0, L)} \longrightarrow 0,$$

donde deduzimos que $\left\| u'_m(t) - u'(t) \right\|_{L^2(0, L)} \longrightarrow 0$. Em particular, para $t = 0$, temos $\left\| u'_m(0) - u'(0) \right\|_{L^2(0, L)} \longrightarrow 0$; ou seja;

$$u'_m(0) \longrightarrow u'(0) \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.33)$$

Por outro lado, do problema aproximado (2.9), temos

$$u'_m(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.34)$$

Pela unicidade do limite, resulta que $u'(0) = u_1$, o que prova (2.7), finalizando assim a demonstração do Teorema 2.2.1. ■

2.7 Unicidade

Analisamos no que segue, a unicidade da solução. Suponhamos que existam duas soluções u e v . Então, $w = u - v$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (w'(t), \varphi) + ((w(t), \varphi)) + (a(x)w'(t), \varphi) = 0, \forall \varphi \in H_0^1(0, L) \\ w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Fazendo $\varphi = w'$, o que é meramente formal, obtemos que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L |w'(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |w(t)|^2 dx \leq 0.$$

Integrando de 0 a t , obtemos que

$$\int_0^L |w'(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |w_x(t)|^2 dx \leq 0$$

o que implica que $w = 0$; ou seja; $u = v$.

A substituição de $\varphi = w'$ é formal porque $w'(t) \in L^2(0, L) \supset H_0^1(0, L)$. A justificativa para esse método pode ser vista em [18].

Capítulo 3

Decaimento da Energia

Neste capítulo, demonstramos que a energia associada ao sistema (2.1) decai exponencialmente para zero quando o tempo tende a infinito. Para tanto, utilizamos a técnica de multiplicadores para a construção do funcional \mathcal{L} . Para obtermos o decaimento exponencial utilizamos o Método de Lyapunov, que consiste em construir um funcional \mathcal{L} equivalente à energia.

Em teoria, deveríamos partir do problema aproximado introduzido na seção anterior, tomando o limite no final. No entanto, como os cálculos são parecidos, para não carregar a notação, omitiremos os índices “ m ” e a notação de produto interno.

3.1 Técnica de Multiplicadores

A técnica utilizada consiste basicamente em multiplicar a equação do problema (2.1) por uma função adequada, de forma que através de algumas manipulações possamos obter uma igualdade em que de um lado temos a derivada de um termo e, do outro, a expressão que corresponde a esta derivada. Os termos cujas derivadas encontramos por este método serão parte do funcional a ser construído posteriormente.

Multiplicando a primeira equação de (2.1) por u_t e integrando de 0 a L , temos que

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx - \int_0^L u_{xx} u_t dx + \int_0^L a(x) u_t^2 dx = 0. \quad (3.1)$$

Sabendo que

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 dx$$

e que

$$\int_0^L u_{xx} u_t dx = - \int_0^L u_x u_{xt} dx = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_x^2 dx,$$

(3.1) pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L a(x) u_t^2 dx = 0.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \{u_t^2 + u_x^2\} dx = - \int_0^L a(x) u_t^2 dx. \quad (3.2)$$

Multiplicando a primeira equação de (2.1) por u e integrando de 0 a L , temos

$$\int_0^L u_{tt} u dx - \int_0^L u_{xx} u dx + \int_0^L a(x) u_t u dx = 0. \quad (3.3)$$

Mas

$$\frac{d}{dt} \{u_t u\} = u_{tt} u + u_t^2 \implies u_{tt} u = \frac{d}{dt} \{u_t u\} - u_t^2$$

e

$$\int_0^L u_{xx} u dx = - \int_0^L u_x^2 dx.$$

Logo, de (3.3) vem que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u_t u dx - \int_0^L u_t^2 dx + \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L a(x) u_t u dx = 0. \quad (3.4)$$

Assim, multiplicando (3.4) por ε e somando com (3.2) obtemos, observando a definição de $E(t)$ em (\diamond)

$$\frac{d}{dt} E(t) + \frac{d}{dt} \varepsilon \int_0^L u_t u dx - \varepsilon \int_0^L u_t^2 dx + \varepsilon \int_0^L u_x^2 dx + \varepsilon \int_0^L a(x) u_t u dx = - \int_0^L a(x) u_t^2 dx,$$

ou então,

$$\frac{d}{dt} E(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \int_0^L u_t u dx = - \int_0^L a(x) u_t^2 dx + \varepsilon \int_0^L u_t^2 dx - \varepsilon \int_0^L u_x^2 dx - \varepsilon \int_0^L a(x) u_t u dx.$$

Seja $\mathcal{L}(t) = E(t) + \varepsilon F(t)$, onde $F(t) = \int_0^L u_t u dx$.

Observemos que, de acordo com os cálculos feitos anteriormente, deduzimos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &= \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon \frac{d}{dt}F(t) \\ &= -\int_0^L a(x) u_t^2 dx + \varepsilon \int_0^L u_t^2 dx - \varepsilon \int_0^L u_x^2 dx - \varepsilon \int_0^L a(x) u_t u dx.\end{aligned}$$

O próximo passo será demonstrar as seguintes desigualdades:

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t) \quad , \quad c_1, c_2 > 0 \quad (3.5)$$

e

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -c \mathcal{L}(t) \quad , \quad c > 0. \quad (3.6)$$

Assim, obteremos o decaimento exponencial dado por

$$E(t) \leq \beta E(0) e^{-ct} \quad , \quad \beta > 0, c > 0. \quad (3.7)$$

Passo 1: Mostrar (3.5).

Vejamos

$$\mathcal{L}(t) = E(t) + \varepsilon F(t) \implies \mathcal{L}(t) - E(t) = \varepsilon F(t).$$

Logo,

$$\left| \mathcal{L}(t) - E(t) \right| = \varepsilon \left| F(t) \right| = \varepsilon \left| \int_0^L u_t u dx \right| \leq \varepsilon \int_0^L |u_t| |u| dx$$

e pela Desigualdade de Young obtemos

$$\left| \mathcal{L}(t) - E(t) \right| \leq \varepsilon \int_0^L \left(\frac{|u_t|^2}{2} + \frac{|u|^2}{2} \right) dx = \varepsilon \int_0^L \frac{|u_t|^2}{2} dx + \varepsilon \int_0^L \frac{|u|^2}{2} dx.$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré (onde a constante de Poincaré neste caso é denotada c_p) apenas na última integral acima, e tomando $c = \max\{1, c_p\}$, $c > 0$, segue que

$$\begin{aligned}\left| \mathcal{L}(t) - E(t) \right| &\leq \varepsilon \int_0^L \left(\frac{|u_t|^2}{2} + \frac{|u|^2}{2} \right) dx = \varepsilon \int_0^L \frac{|u_t|^2}{2} dx + \varepsilon \int_0^L \frac{|u|^2}{2} dx \\ &\leq 1 \cdot \varepsilon \int_0^L \frac{u_t^2}{2} dx + c_p \varepsilon \int_0^L \frac{u_x^2}{2} dx \\ &\leq \varepsilon \max\{1, c_p\} \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ u_t^2 + u_x^2 \right\} dx \\ &\leq \varepsilon \cdot c \cdot E(t).\end{aligned}$$

Assim,

$$-\varepsilon \cdot c \cdot E(t) \leq \mathcal{L}(t) - E(t) \leq \varepsilon \cdot c \cdot E(t)$$

e portanto

$$(1 - \varepsilon c) \cdot E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (1 + \varepsilon c) \cdot E(t). \quad (3.8)$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{cases} 1 - \varepsilon c \geq \frac{1}{2} \\ 1 + \varepsilon c \leq 2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Então, de (3.8) e (3.9), temos que

$$\frac{1}{2} E(t) \leq (1 - \varepsilon c) \cdot E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (1 + \varepsilon c) \cdot E(t) \leq 2 E(t).$$

Logo, $\frac{1}{2} E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq 2 E(t)$, onde $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = 2$, concluindo assim, o Passo 1.

Passo 2: Mostrar (3.6).

Seja $a(x) > a_0 > 0$. Então,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = - \int_0^L a(x) u_t^2 dx + \varepsilon \int_0^L u_t^2 dx - \varepsilon \int_0^L u_x^2 dx - \varepsilon \int_0^L a(x) u_t u dx. \quad (3.10)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a(x) > a_0 > 0 &\implies a(x) u_t^2 > a_0 u_t^2 \\ &\implies -a(x) u_t^2 < -a_0 u_t^2 \\ &\implies - \int_0^L a(x) u_t^2 dx < - \int_0^L a_0 u_t^2 dx \\ &\implies - \int_0^L a(x) u_t^2 dx < -a_0 \int_0^L u_t^2 dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &= - \int_0^L a(x) u_t^2 dx + \varepsilon \int_0^L u_t^2 dx - \varepsilon \int_0^L u_x^2 dx - \varepsilon \int_0^L a(x) u_t u dx \\ &\leq -a_0 \int_0^L u_t^2 dx + \varepsilon \int_0^L u_t^2 dx - \varepsilon \int_0^L u_x^2 dx + \left| - \varepsilon \int_0^L a(x) u_t u dx \right|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Agora, sabendo que $|a(x)| \leq \sup |a(x)| = \|a\|_{L^\infty}$, e aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$\begin{aligned}
\left| -\varepsilon \int_0^L a(x) u_t u \, dx \right| &\leq \varepsilon \int_0^L |a(x) u_t u| \, dx \\
&\leq \varepsilon \|a\|_{L^\infty} \int_0^L |u_t u| \, dx \\
&\leq \varepsilon \|a\|_{L^\infty} \|u_t\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon \|a\|_{L^\infty} \cdot \frac{\|u_t\|_{L^2}}{\sqrt{\delta}} \cdot \|u\|_{L^2} \sqrt{\delta}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young e, posteriormente, a Desigualdade de Poincaré na desigualdade acima concluímos que

$$\begin{aligned}
\left| -\varepsilon \int_0^L a(x) u_t u \, dx \right| &\leq \varepsilon \|a\|_{L^\infty} \left\{ \frac{\|u_t\|_{L^2}^2}{2\delta} + \delta \frac{\|u\|_{L^2}^2}{2} \right\} \\
&\leq \varepsilon \|a\|_{L^\infty} \left\{ \frac{\|u_t\|_{L^2}^2}{2\delta} + c \delta \frac{\|u_x\|_{L^2}^2}{2} \right\}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.12) em (3.11), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -a_0 \int_0^L u_t^2 \, dx + \varepsilon \int_0^L u_t^2 \, dx - \varepsilon \int_0^L u_x^2 \, dx + \\
&\quad + \varepsilon \|a\|_{L^\infty} \frac{\|u_t\|_{L^2}^2}{2\delta} + \delta \varepsilon \|a\|_{L^\infty} c \frac{\|u_x\|_{L^2}^2}{2} \\
&= -\left(a_0 - \varepsilon - \frac{\varepsilon \|a\|_{L^\infty}}{2\delta} \right) \int_0^L u_t^2 \, dx - \left(\varepsilon - \delta \varepsilon \|a\|_{L^\infty} c \right) \int_0^L u_x^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Agora, tomamos δ suficientemente pequeno, tal que

$$\varepsilon - \frac{\delta \varepsilon \|a\|_{L^\infty}}{2} c \geq \frac{\varepsilon}{2} \iff 1 - \frac{\delta \|a\|_{L^\infty}}{2} c \geq \frac{1}{2}.$$

Fixado $\delta \leq \frac{1}{\|a\|_{L^\infty} \cdot c}$, tomamos ε satisfazendo (3.9) e

$$a_0 - \varepsilon - \frac{\varepsilon \|a\|_{L^\infty}}{2\delta} \geq \frac{a_0}{2}.$$

Logo, por (3.5)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -\frac{a_0}{2} \int_0^L u_t^2 \, dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L u_x^2 \, dx \\
&\leq -\min\{a_0, \varepsilon\} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 \, dx \right\} \\
&\leq -c \mathcal{L}(t)
\end{aligned}$$

onde $c > 0$.

Para concluirmos o decaimento exponencial da energia, utilizaremos as equações (3.5) e (3.6). Partindo de (3.6), e multiplicando ambos os lados por e^{ct} , obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) e^{ct} \leq -c e^{ct} \mathcal{L}(t).$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) e^{ct} + c e^{ct} \mathcal{L}(t) \leq 0;$$

ou seja;

$$\frac{d}{dt} \{ \mathcal{L}(t) e^{ct} \} \leq 0.$$

Integrando de 0 a t , deduzimos que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-ct} \tag{3.13}$$

e por (3.5) obtemos

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-ct} \leq c_2 E(0) e^{-ct}.$$

Logo,

$$E(t) \leq \beta E(0) e^{-ct} \quad , \quad \beta = \frac{c_2}{c_1}$$

ou seja, $E(t)$ decai exponencialmente.

Capítulo 4

Análise Numérica

Vamos desenvolver um estudo numérico, considerando o Método de Elementos Finitos na variável espaço e o Método de Diferenças Finitas na variável tempo.

4.1 Método de Elementos Finitos

No Capítulo 2, encontramos a formulação variacional (2.2).

Aplicando o Método de Faedo-Galerkin, aproximamos o problema (2.1) pelo problema (2.9) no subespaço $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ onde w_i , $i = 1, 2, \dots, m$ é uma base hilbertiana de $L^2(0, L)$.

Os elementos da base w_i são dados por $w_i = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{i\pi x}{L}$. Assim, temos as matrizes $A = a_{ij} = \left(w_i, w_j \right)_{L^2(0,L)} = I_m$ e $B = b_{ij} = \lambda_j \left(w_i, w_j \right)_{L^2(0,L)} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \cdot I$.

Contudo, a matriz $C = c_{ij} = \left(a(x)w_i, w_j \right)_{L^2(0,L)}$ será uma matriz cheia $m \times m$ em razão do termo $a(x)$ que, computacionalmente, causará erros de arredondamento em virtude do número de operações necessárias para resolver o sistema linear (2.15), que é de ordem $\vartheta(m^3)$.

Dessa forma, utilizaremos uma base mais conveniente numericamente que definiremos adiante. Essa nova base também será formada pelos m primeiros vetores do subespaço $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$ de $H_0^1(0, L)$.

Conseqüentemente, as matrizes A , B e C serão matrizes tridiagonais e o número de

operações para a resolução do sistema é de ordem $\vartheta(m)$.

Substituindo $u(t)$ por $u_m(t)$ na formulação variacional (2.2), achamos

$$\int_0^L u_m''(t) v_m(x) dx + \int_0^L \frac{\partial u_m(t)}{\partial x} \frac{\partial v_m(x)}{\partial x} dx + \int_0^L a(x) u_m'(t) v_m(x) dx = 0, \quad \forall v_m \in V_m.$$

Procuramos a solução aproximada do problema (2.9) dada por (2.16). Como estamos no subespaço $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$, então a solução aproximada é da forma

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x) \quad (4.1)$$

onde $d_i(t)$ são os coeficientes a determinar.

De (4.1), deduzimos

$$u_m'(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i'(t) \varphi_i(x) \quad (4.2)$$

$$u_m''(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i''(t) \varphi_i(x). \quad (4.3)$$

Substituindo (4.1), (4.2) e (4.3) no problema aproximado (2.9) observando a troca da base w_i por φ_i obtemos, $\forall v_m \in V_m$

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_0^L d_i''(t) \varphi_i(x) v_m(x) dx + \int_0^L d_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial v_m}{\partial x}(x) dx + \int_0^L a(x) d_i'(t) \varphi_i(x) v_m(x) dx \right) = 0.$$

Tomando em particular $v_m = \varphi_j \in V_m$, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left(\int_0^L d_i''(t) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \int_0^L d_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^L a(x) d_i'(t) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right) = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left(d_i''(t) \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + d_i(t) \int_0^L \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x) dx + \right. \\ & \left. + d_i'(t) \int_0^L a(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right) = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde

$$A = a_{ij} = \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (4.5)$$

$$B = b_{ij} = \int_0^L \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x) dx \quad (4.6)$$

$$C = c_{ij} = \int_0^L a(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx. \quad (4.7)$$

Portanto, chegamos ao seguinte sistema linear de Equações Diferenciais Ordinárias

$$\begin{cases} A d''(t) + C d'(t) + B d(t) = 0 \\ d(0) = d_0 = u_0(x) \\ d'(0) = d'_0 = u_1(x) \end{cases} \quad (4.8)$$

As matrizes A, B e C são quadradas de ordem m e $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_m(t))$ é o vetor incógnita.

O sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (4.8) será resolvido pelo Método de Diferenças Finitas.

4.2 Função de Interpolação

As funções base $\varphi_i(x)$ do subespaço V_m em geral são polinômios de grau k em cada elemento Ω_e , ou seja

$$V_m = V_m^k(\Omega) = \{v_h \in V; v_h^e \in P_k(\Omega_e)\}$$

onde v_h^e denota a restrição de v_h ao elemento Ω_e e P_k é o conjunto dos polinômios definidos em Ω_e , com grau menor ou igual a k . Ver em [4].

Nesse trabalho, vamos fixar, por sua simplicidade, o grau $k = 1$, isto é, teremos um polinômio linear por partes. Assim temos

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (4.9)$$

Tomando m divisões em $[0, L]$, definimos o passo $h_i = x_{i+1} - x_i$ e $x_i = ih$, para $i = 1, \dots, m-1$, onde $x_0 = 0$ e $x_m = L$. Neste trabalho, assumimos que os pontos discretos do intervalo $[0, L]$ estão igualmente espaçados, isto é, temos uma malha uniforme de comprimento $h_i = h$, $i = 1, \dots, m$. Podemos verificar que a função assim definida satisfaz a propriedade de interpolação

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.10)$$

Vamos então, definir a derivada, para $i = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}} = \frac{1}{h} & , \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{-1}{h_i} = \frac{-1}{h} & , \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \forall x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (4.11)$$

4.3 Cálculo das Matrizes

Calcularemos as matrizes A , B e C , usando as funções base lineares já definidas. Desde que $\int \varphi_i \varphi_j = 0$ e $\int \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0$, para $|i - j| \geq 2$, as matrizes A e B do sistema são tridiagonais simétricas e portanto é suficiente calcular os elementos a_{ii} , $a_{i,i+1}$ e $a_{i+1,i}$ da matriz A e, de forma análoga, os mesmos elementos da matriz B .

4.3.1 Matriz A

Calcularemos agora os elementos da matriz A

$$A = a_{ij} = \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq m.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx = \int_0^L (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)^2 dx \\ &= \frac{h}{3} + \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

Logo, para $i = 1, \dots, m$.

$$a_{ii} = \frac{h}{3} + \frac{h}{3} = \frac{2h}{3}.$$

Para o elemento $a_{i,i+1}$, temos

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right) \left(\frac{x - x_i}{h} \right) dx \\ &= \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

Portanto, para $i = 1, \dots, m-1$

$$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = \frac{h}{6},$$

já que A é simétrica.

Assim, por exemplo, $A_{m \times m}$ na forma matricial será

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{h}{6} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} \end{bmatrix}$$

4.3.2 Matriz B

Calculando os elementos da matriz B

$$B = b_{ij} = \int_0^L \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x) dx.$$

Assim, para $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \int_0^L \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) dx = \int_0^L \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \right)^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}. \end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i,i+1}$, temos

$$b_{i,i+1} = \int_0^L \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x}(x) dx = -\frac{1}{h}.$$

Como a matriz B é simétrica, para $i = 1, \dots, m-1$, temos que

$$b_{i,i+1} = b_{i+1,i} = -\frac{1}{h}.$$

Assim, por exemplo, $B_{m \times m}$ na forma matricial será

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{h} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix}$$

4.3.3 Matriz C

Calculando os elementos da matriz C

$$C = c_{ij} = \int_0^L a(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

onde

$$c_{ii} = \int_0^L a(x) (\varphi_i(x))^2 dx.$$

Desde que $x_i = ih$, podemos escrever, para $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x) \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right)^2 dx \\ &= \int_{(i-1)h}^{ih} a(x) \left(\frac{x - ih + h}{h} \right)^2 dx + \int_{ih}^{(i+1)h} a(x) \left(\frac{x - ih - h}{-h} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{(i-1)h}^{ih} a(x) (-x + ih - h)^2 dx + \int_{ih}^{(i+1)h} a(x) (-x + ih + h)^2 dx. \end{aligned}$$

Para o elemento $c_{i,i+1}$, temos

$$\begin{aligned}
c_{i,i+1} &= \int_0^L a(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) dx \\
&= \int_{ih}^{(i+1)h} a(x) \left(\frac{x - (i+1)h}{-h} \right) \left(\frac{x - ih}{h} \right) dx \\
&= -\frac{1}{h^2} \int_{ih}^{(i+1)h} a(x) (x - (i+1)h) (x - ih) dx \\
&= -\frac{1}{h^2} \int_{ih}^{(i+1)h} a(x) (x - ih - h) (x - ih) dx \\
&= -\frac{1}{h^2} \int_{ih}^{(i+1)h} a(x) (x^2 - 2ihx + i^2h^2 - hx + ih^2) dx.
\end{aligned}$$

Portanto, para $i = 1, \dots, m - 1$

$$c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = -\frac{1}{h^2} \int_{ih}^{(i+1)h} a(x) (x^2 - 2ihx + i^2h^2 - hx + ih^2) dx.$$

4.4 Interpolação de $a(x)$

Uma outra forma de calcular $c_{ii} = \int_0^L a(x) (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x) (\varphi_i(x))^2 dx$ é através da interpolação de $a(x)$ usando a função base φ_j dada por (4.9), como interpolador. Este procedimento é adequado, quando para o cálculo da integral c_{ii} é necessário o uso de métodos numéricos. Com efeito, a função $a(x)$ pode ser interpolada pela função φ_j da seguinte forma

$$a(x) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x) , \quad \forall x \in [0, L] \quad (4.12)$$

onde $a_j = a(x_j)$.

Portanto para $i = 1, \dots, m$, obtemos

$$\begin{aligned}
c_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x) \right) (\varphi_i(x))^2 dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=i-1}^{i+1} a_j \varphi_j(x) \right) (\varphi_i(x))^2 dx.
\end{aligned}$$

Usando a definição de $\varphi_i(x)$ dada por (4.9), resulta que

$$\begin{aligned}
c_{ii} = & a_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_{i-1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx + a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\varphi_i(x) \right)^3 dx + \\
& + a_{i+1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx
\end{aligned} \tag{4.13}$$

para $i = 1, \dots, m$.

Fazendo os cálculos das integrais, obtemos

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_{i-1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i-1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx.$$

Como $\varphi_{i-1}(x) = 0$, $\forall x \notin [x_{i-2}, x_i]$ por (4.9), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_{i-1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^2 dx \\
&= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{x - ih}{(i-1)h - ih} \right) \left(\frac{x - (i-1)h}{ih - (i-1)h} \right)^2 dx \\
&= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{x - ih}{-h} \right) \left(\frac{x - (i-1)h}{h} \right)^2 dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{(i-1)h}^{ih} (x - ih)(x - (i-1)h)^2 dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{(i-1)h}^{ih} (x - ih)(x^2 - 2x(i-1)h + (i-1)^2h^2) dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{(i-1)h}^{ih} h(x - ih)(x^2 - 2x(ih - h) + (i^2 - 2i + 1)h^2) dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{(i-1)h}^{ih} (x - ih)(x^2 - 2ihx + 2hx + i^2h^2 - 2ih^2 + h^2) dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{(i-1)h}^{ih} (x^3 - 2ihx^2 + 2hx^2 + i^2h^2x - 2ih^2x + h^2x - ihx^2 \\
&\quad + 2i^2h^2x - 2ih^2x - i^3h^3 + 2i^2h^3 + ih^3) dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{(i-1)h}^{ih} (x^3 - 3ihx^2 + 2hx^2 + 3i^2h^2x - 4ih^2x + h^2x \\
&\quad - i^3h^3 + 2i^2h^3 + ih^3) dx = \frac{h}{12}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_{i-1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i-1}(x) \left(\varphi_i(x) \right)^2 dx = \frac{h}{12}. \tag{4.14}$$

Calculando a outra integral, temos

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^3 dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i(x))^3 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^3 dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)^3 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right)^3 dx \\
&= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{x - (i-1)h}{ih - (i-1)h} \right)^3 dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{x - (i+1)h}{ih - (i+1)h} \right)^3 dx \\
&= \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{x - (i-1)h}{h} \right)^3 dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{x - (i+1)h}{-h} \right)^3 dx \\
&= \left. -\frac{1}{h^3} \frac{(x - (i-1)h)^4}{4} \right]_{(i-1)h}^{ih} - \left. \frac{1}{h^3} \frac{(x - (i+1)h)^4}{4} \right]_{ih}^{(i+1)h} \\
&= \frac{h}{4} + \frac{h}{4} = \frac{2h}{4} = \frac{h}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^3 dx = \frac{h}{2}. \quad (4.15)$$

Calculando agora a última integral de c_{ii} , temos

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{i+1}(x) (\varphi_i(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) (\varphi_i(x))^2 dx.$$

Como $\varphi_{i+1}(x) = 0$, $\forall x \notin [x_i, x_{i+2}]$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) (\varphi_i(x))^2 dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) (\varphi_i(x))^2 dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right)^2 dx \\
&= \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{x - ih}{(i+1)h - ih} \right) \left(\frac{x - (i+1)h}{ih - (i+1)h} \right)^2 dx \\
&= \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{x - ih}{h} \right) \left(\frac{x - (i+1)h}{-h} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x - ih)(x - (i+1)h)^2 dx \\
&= \frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x - ih)(x^2 - 2x(i+1)h + (i+1)^2h^2) dx \\
&= \frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x - ih)(x^2 - 2ihx - 2hx + i^2h^2 + 2ih^2 + h^2) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x^3 - 2ihx^2 - 2hx^2 + i^2h^2x + 2ih^2x + h^2x - ihx^2 \\
&+ 2i^2h^2x + 2ih^2x - i^3h^3 - 2i^2h^3 - ih^3) dx \\
&= \frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x^3 - 3ihx^2 + 2hx^2 + 3i^2h^2x + 4ih^2x + h^2x \\
&- i^3h^3 - 2i^2h^3 - ih^3) dx = \frac{h}{12}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) (\varphi_i(x))^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) (\varphi_i(x))^2 dx = \frac{h}{12}. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.14), (4.15) e (4.16) em (4.13) obtemos

$$\begin{aligned}
c_{ii} &= a_{i-1} \frac{h}{12} + a_i \frac{h}{2} + a_{i+1} \frac{h}{12} \\
&= \frac{h}{12} (a_{i-1} + 6a_i + a_{i+1})
\end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $a_j = a(x_j)$.

De maneira análoga, interpolando a função $a(x)$ por (4.12) podemos calcular $c_{i,i+1} = c_{i+1,i} = \int_0^L a(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
c_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\sum_{j=i-1}^{i+1} a_j \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx, \quad \text{para } i = 1, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

Usando a definição de $\varphi_i(x)$ dada por (4.9), resulta que

$$\begin{aligned}
c_{i,i+1} &= a_{i-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx + a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 \varphi_{i+1}(x) dx + \\
&+ a_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) (\varphi_{i+1}(x))^2 dx, \quad \text{para } i = 1, \dots, m-1.
\end{aligned} \quad (4.18)$$

Fazendo os cálculos das integrais, obtemos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = 0 \quad \text{pois } \varphi_{i-1}(x) = 0, \quad \forall x \notin [x_{i-2}, x_i]. \quad (4.19)$$

De maneira análoga à (4.16) temos que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i(x))^2 \varphi_{i+1}(x) dx = \frac{h}{12}. \quad (4.20)$$

Calculando agora a última integral de $c_{i,i+1}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\varphi_{i+1}(x) \right)^2 dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 dx \\
&= \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{x - (i+1)h}{ih - (i+1)h} \right) \left(\frac{x - ih}{(i+1)h - ih} \right)^2 dx \\
&= \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{x - (i+1)h}{-h} \right) \left(\frac{x - ih}{h} \right)^2 dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x - (i+1)h)(x - ih)^2 dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x - ih - h)(x^2 - 2ihx + i^2h^2) dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x^3 - 2ihx^2 + i^2h^2x - ihx^2 + 2i^2h^2x - i^3h^3 \\
&\quad - hx^2 + 2ih^2x - i^2h^3) dx \\
&= -\frac{1}{h^3} \int_{ih}^{(i+1)h} (x^3 - 3ihx^2 + 3i^2h^2x - i^3h^3 - hx^2 + 2ih^2x - i^2h^3) dx \\
&= \frac{h}{12}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\varphi_{i+1}(x) \right)^2 dx = \frac{h}{12}. \quad (4.21)$$

Substituindo (4.19), (4.20) e (4.21) em (4.18) obtemos, para $i = 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned}
c_{i,i+1} = c_{i+1,i} &= a_{i-1} (0) + a_i \frac{h}{12} + a_{i+1} \frac{h}{12} \\
c_{i,i+1} = c_{i+1,i} &= a_i \frac{h}{12} + a_{i+1} \frac{h}{12} \\
&= \frac{h}{12}(a_i + a_{i+1})
\end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $a_j = a(x_j)$.

Notemos que a matriz C também é tridiagonal. Assim, no caso particular, $C_{3 \times 3}$ na forma matricial será

$$C = \begin{bmatrix} \frac{h}{12}(a_{i-1} + 6a_i + a_{i+1}) & \frac{h}{12}(a_i + a_{i+1}) & 0 \\ \frac{h}{12}(a_i + a_{i+1}) & \frac{h}{12}(a_{i-1} + 6a_i + a_{i+1}) & \frac{h}{12}(a_i + a_{i+1}) \\ 0 & \frac{h}{12}(a_i + a_{i+1}) & \frac{h}{12}(a_{i-1} + 6a_i + a_{i+1}) \end{bmatrix}$$

Calculadas as matrizes, resta agora determinar $d = d(t)$ onde $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)(t)$ solução do sistema linear de Equações Diferenciais Ordinárias (4.8). Este sistema será resolvido pelo Método de Diferenças Finitas. Assim, encontraremos então o valor da solução aproximada $u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x)$, visto que as funções base $\varphi_i(x)$ já são conhecidas.

4.5 Condições de Fronteira

Como a solução aproximada $u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x)$ deve satisfazer a mesma condição de fronteira da solução exata, então $u_m(0, t) = u_m(L, t) = 0$. Isso significa que devemos necessariamente tomar $d_1(t) = d_m(t) = 0 \quad \forall t$.

Para garantir que $d_1(t) = d_m(t) = 0 \quad \forall t$, podemos tomar, por exemplo, as matrizes globais A, B e C de ordem $m \times m$ com os termos de suas primeiras e últimas linhas e colunas, como se segue

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{h}{6} & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazemos isso, de forma análoga, para as matrizes B e C .

4.6 Método de Diferenças Finitas

Seja $d(t) \in C^{n+1}(0, L)$. Do Teorema de Taylor podemos expandir a função $d(t)$ na forma

$$d(t + \Delta t) = d(t) + \Delta t d'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} d''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} d'''(t) + \dots \quad (4.23)$$

e de forma análoga

$$d(t - \Delta t) = d(t) - \Delta t d'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} d''(t) - \frac{\Delta t^3}{3!} d'''(t) + \dots \quad (4.24)$$

Somando os termos (4.23) e (4.24), obtemos

$$d(t - \Delta t) - 2d(t) + d(t + \Delta t) = \Delta t^2 d''(t) + \vartheta(\Delta t^4) \quad (4.25)$$

onde $\vartheta(\Delta t^4)$ denota todos os termos de potência quatro ou superior de Δt . Assumindo que estes termos são pequenos quando comparados com potências inferiores de Δt ($\Delta t \ll 1$), então negligenciando os termos do lado direito, temos a seguinte aproximação para a segunda derivada da função,

$$d''(t) \simeq \frac{1}{\Delta t^2} \left(d(t + \Delta t) - 2d(t) + d(t - \Delta t) \right) \quad (4.26)$$

com o erro da aproximação de ordem $\vartheta(\Delta t^2)$. A aproximação de (4.26) é denominada **diferença central**.

Por outro lado, podemos obter uma aproximação central para a primeira derivada da função $d(t)$, fazendo a diferença entre os termos (4.23) e (4.24), ou seja

$$d(t + \Delta t) - d(t - \Delta t) = 2\Delta t d'(t) + \vartheta(\Delta t^3)$$

e dessa forma temos a seguinte aproximação central para a primeira derivada

$$d'(t) \simeq \frac{1}{2\Delta t} \left(d(t + \Delta t) - d(t - \Delta t) \right), \quad (4.27)$$

também com erro de aproximação de ordem $\vartheta(\Delta t^2)$.

4.6.1 Notação

Suponhamos que $d(x, t)$ seja uma função das variáveis independentes $x \in [0, L]$ e $t \in [0, T]$ e seja a seguinte discretização uniforme: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = L$ e

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, onde $h = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ são denominados passos. Assim $h = \frac{L}{m}$ e $\Delta t = \frac{T}{N}$ e cada elemento discreto pode ser obtido por

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$t_n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Vamos denotar a função $d = d(x, t)$ nos pontos discretos (x_i, t_n) da seguinte forma

$$d(x_i, t_n) = d(x_0 + ih, n\Delta t) = d_i^n = d^n.$$

Com essa notação a diferença central (4.26) é dada por

$$\left(\frac{\partial^2 d(x, t)}{\partial t^2} \right)_{i,n} \simeq \frac{1}{\Delta t^2} (d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}) \quad (4.28)$$

(Diferença central para a segunda derivada no tempo)

com erro de ordem $\vartheta(\Delta t^2)$.

E a diferença central (4.27) é dada por

$$\left(\frac{\partial d(x, t)}{\partial t} \right)_{i,n} \simeq \frac{1}{2\Delta t} (d^{n+1} - d^{n-1}) \quad (4.29)$$

(Diferença central para a primeira derivada no tempo)

Por abuso de notação, usaremos de agora em diante o símbolo $=$ em lugar de \simeq .

Vamos agora retornar ao sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (4.8). Ao aplicar o Método de Elementos Finitos no espaço obtemos um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias cuja variável é o tempo t . Esse sistema então será resolvido pelo Método de Diferenças Finitas no tempo.

4.6.2 Método da Diferença Central

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias (4.8) nos tempos discretos t_n , onde $t_n = t_0 + n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Usando as diferenças centrais (4.28) e (4.29) no sistema de equações para a segunda e a primeira derivadas, obtemos que

$$A \left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + C \left(\frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t} \right) + B d^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (4.30)$$

que é equivalente a (multiplicando por Δt^2)

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2}C\right) d^{n+1} = \left(2A - (\Delta t)^2 B\right) d^n + \left(-A + \frac{\Delta t}{2}C\right) d^{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (4.31)$$

Para inicialização do método iterativo, fazemos $n = 0$ em (4.31), e obtemos

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2}C\right) d^1 = \left(2A - (\Delta t)^2 B\right) d^0 + \left(-A + \frac{\Delta t}{2}C\right) d^{-1}. \quad (4.32)$$

As matrizes A, B e C são conhecidas e independentes de t , o passo Δt é dado e d^0 é dado pela posição inicial da onda. O termo d^{-1} é obtido pela velocidade inicial u_1 . De fato, considere a diferença central (4.29), ou seja,

$$d'(t) = \frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Fazendo $n = 0$, temos

$$d'(0) = \frac{d^1 - d^{-1}}{2\Delta t} = u_1(x)$$

onde $u_1(x)$ é a velocidade inicial dada. Assim podemos obter o termo $d^{-1} = d^1 - 2\Delta t u_1(x)$.

Substituindo em (4.32), obtemos a primeira iteração do sistema

$$\begin{aligned} \left(A + \frac{\Delta t}{2}C\right) d^1 &= \left(2A - (\Delta t)^2 B\right) d^0 + \left(-A + \frac{\Delta t}{2}C\right) (d^1 - 2\Delta t u_1(x)) \\ \left(A + \frac{\Delta t}{2}C\right) d^1 &= \left(2A - (\Delta t)^2 B\right) d^0 - A d^1 + 2A \Delta t u_1(x) + \frac{\Delta t}{2}C d^1 - \Delta t^2 C u_1(x) \\ 2A d^1 &= \left(2A - (\Delta t)^2 B\right) d^0 + (2A \Delta t - \Delta t^2 C) u_1(x). \end{aligned}$$

Como as matrizes são não-singulares então o sistema linear de m equações tem uma única solução $d^1 = (d_1^1, d_2^1, \dots, d_m^1)$. Para calcular as soluções nos tempos $n = 1, 2, \dots, N$, basta resolver o sistema (4.31) para cada n . As aproximações para a primeira e a segunda derivadas em relação ao tempo são ambas de ordem $\vartheta(\Delta t^2)$.

Algoritmo

Para $n = 0$:

$$2A d^1 = \left(2A - (\Delta t)^2 B\right) d^0 + (2A \Delta t - \Delta t^2 C) u_1(x).$$

Para $n = 1, 2, \dots, N-1$:

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2}C\right) d^{n+1} = \left(2A - (\Delta t)^2 B\right) d^n + \left(-A + \frac{\Delta t}{2}C\right) d^{n-1}.$$

Capítulo 5

Penalização da Equação Dissipativa

Provamos no Capítulo 3, que a energia associada ao modelo decai exponencialmente quando a função $a(x)$ satisfaz $a(x) > a_0 > 0$ e $a \in L^\infty(0, L)$, $\forall x \in [0, L]$. Para essa classe de função existe uma infinidade de exemplos, tais como $a(x) = \text{constante}$ ou $a(x) = x + 1$.

O mesmo resultado de decaimento é válido quando a função $a(x)$ se anula em quase todo o intervalo $(0, L)$ (não provamos esse resultado porque exige ferramentas mais sofisticadas). Com relação a exemplos de tais funções, também temos muitos

1. $a(x) = 1$ em $\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2} + \delta\right)$, onde δ é pequeno.
2. $a(x) = x^2 + 1$, em qualquer subconjunto w de $(0, L)$ e $a(x) = 0$ em $(0, L) \setminus w$.

Nos trabalhos [15] e [17], os autores penalizaram a equação do problema inicial (2.1) inserindo o termo dissipativo $-h^2 u_{xxt}$ com o objetivo de obter o decaimento da solução numérica aproximada. Neste trabalho, fazemos algumas simulações do decaimento, considerando funções $a(x)$ localizadas assim como nos trabalhos acima mencionados.

Inserindo o termo $-h^2 u_{xxt}$ na equação do problema (2.1), vamos torná-la uma equação penalizada. Assim, obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t - h^2 u_{xxt} = 0 & , & 0 < x < L & , & t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , & u_t(x, 0) = u_1(x) & , & 0 < x < L \end{cases} \quad (5.1)$$

Observação 5.0.1. *Formalmente, a equação penalizada do problema acima converge para a equação do problema (2.1) quando $h \rightarrow 0$.*

Observação 5.0.2. *No que se refere à existência de soluções, é possível obter um resultado análogo ao teorema provado no Capítulo 2 utilizando o Método de Faedo-Galerkin.*

Para este problema, temos a seguinte formulação variacional, $\forall v \in H_0^1(0, L)$

$$\int_0^L u''(t) v(x) dx + \int_0^L \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} dx + \int_0^L a(x) u'(t) v_m(x) dx + h^2 \int_0^L \frac{\partial u'(t)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} dx = 0, \quad (5.2)$$

já fazendo a integração por partes na última integral.

Aplicando o Método de Faedo-Galerkin, aproximamos o problema (5.1) por um problema aproximado no subespaço $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$.

Substituindo $u(t)$ por $u_m(t)$ em (5.2), achamos

$$\begin{aligned} \int_0^L u_m''(t) v_m(x) dx &+ \int_0^L \frac{\partial u_m(t)}{\partial x} \frac{\partial v_m(x)}{\partial x} dx &+ \\ \int_0^L a(x) u_m'(t) v_m(x) dx &+ h^2 \int_0^L \frac{\partial u_m'(t)}{\partial x} \frac{\partial v_m(x)}{\partial x} dx &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

para toda $v_m \in V_m$.

Procuramos a solução aproximada no subespaço $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$, dada por

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x) \quad (5.4)$$

onde $d_i(t)$ são os coeficientes a determinar.

De (5.4), deduzimos

$$u_m'(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i'(t) \varphi_i(x) \quad (5.5)$$

$$u_m''(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i''(t) \varphi_i(x). \quad (5.6)$$

Substituindo (5.4), (5.5) e (5.6) na equação (5.3) obtemos, $\forall v_m \in V_m$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left(\int_0^L d_i''(t) \varphi_i(x) v_m(x) dx &+ \int_0^L d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial v_m(x)}{\partial x} dx &+ \right. \\ \left. \int_0^L a(x) d_i'(t) \varphi_i(x) v_m(x) dx &+ h^2 \int_0^L d_i'(t) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial v_m(x)}{\partial x} dx \right) &= 0. \end{aligned}$$

Tomando em particular $v_m = \varphi_j \in V_m$, temos

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_0^L d_i''(t) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \int_0^L d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \int_0^L a(x) d_i'(t) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + h^2 \int_0^L d_i'(t) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx \right) = 0.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^m \left(d_i''(t) \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + d_i(t) \int_0^L \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + d_i'(t) \int_0^L a(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + h^2 d_i'(t) \int_0^L \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (5.7)$$

onde

$$A = a_{ij} = \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (5.8)$$

$$B = b_{ij} = \int_0^L \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx \quad (5.9)$$

$$C = c_{ij} = \int_0^L a(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx. \quad (5.10)$$

Portanto, chegamos ao seguinte sistema linear de Equações Diferenciais Ordinárias

$$\begin{cases} A d''(t) + B d(t) + C d'(t) + h^2 B d'(t) = 0 \\ d(0) = d_0 = u_0(x) \\ d'(0) = d'_0 = u_1(x) \end{cases} \quad (5.11)$$

As matrizes A, B e C são quadradas de ordem m e $d(t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_m(t))$ é o vetor incógnita.

O sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (5.11) será resolvido pelo Método de Diferenças Finitas, visto no Capítulo 4.

Aplicando o **Método da Diferença Central** para aproximar a primeira e segunda derivadas, obtemos a seguinte equação

$$A \left(\frac{d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + B d^n + (C + h^2 B) \left(\frac{d^{n+1} - d^{n-1}}{2\Delta t} \right) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (5.12)$$

que é equivalente a (multiplicando por Δt^2)

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2} C + h^2 \frac{\Delta t}{2} B \right) d^{n+1} = \left(2A - (\Delta t)^2 B \right) d^n + \left(-A + \frac{\Delta t}{2} C + h^2 \frac{\Delta t}{2} B \right) d^{n-1} \quad (5.13)$$

para $n = 0, 1, \dots, (N - 1)$.

Para inicialização do método iterativo, fazemos $n = 0$ em (5.13), e obtemos

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2} C + h^2 \frac{\Delta t}{2} B \right) d^1 = \left(2A - (\Delta t)^2 B \right) d^0 + \left(-A + \frac{\Delta t}{2} C + h^2 \frac{\Delta t}{2} B \right) d^{-1}. \quad (5.14)$$

Como visto no Capítulo 4, temos que $d^{-1} = d^1 - 2 \Delta t u_1(x)$. Assim, substituindo em (5.14), obtemos a primeira iteração do sistema

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2} C + h^2 \frac{\Delta t}{2} B \right) d^1 = \left(2A - (\Delta t)^2 B \right) d^0 + \left(-A + \frac{\Delta t}{2} C + h^2 \frac{\Delta t}{2} B \right) (d^1 - 2 \Delta t u_1(x)).$$

Assim, manipulando os termos, obtemos

$$2A d^1 = \left(2A - (\Delta t)^2 B \right) d^0 + (2 \Delta t A - \Delta t^2 C - h^2 \Delta t^2 B) u_1(x).$$

Como as matrizes são não-singulares então o sistema linear de m equações tem uma única solução $d^1 = (d_1^1, d_2^1, \dots, d_m^1)$. Para calcular as soluções nos tempos $n = 1, 2, \dots, N$, basta resolver o sistema (5.13) para cada n . As aproximações para a primeira e a segunda derivadas em relação ao tempo são ambas de ordem $\vartheta(\Delta t^2)$.

Algoritmo

Para $n = 0$:

$$2A d^1 = \left(2A - (\Delta t)^2 B \right) d^0 + (2 \Delta t A - \Delta t^2 C - h^2 \Delta t^2 B) u_1(x).$$

Para $n = 1, 2, \dots, N - 1$:

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2} C + h^2 \frac{\Delta t}{2} B \right) d^{n+1} = \left(2A - (\Delta t)^2 B \right) d^n + \left(-A + \frac{\Delta t}{2} C + h^2 \frac{\Delta t}{2} B \right) d^{n-1}.$$

No próximo capítulo, veremos como este termo $-h^2 u_{xxt}$ irá influenciar no decaimento exponencial da energia, no caso em que a função $a(x)$ se anula em alguma parte do intervalo $(0, L)$.

Capítulo 6

Simulações Numéricas

Computacionalmente, fixando $L = 1$ e $T = 1$, faremos a seguinte discretização uniforme: $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$ e $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1$, onde $h = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ são denominados passos. Assim $h = \frac{1}{m-1}$ e $\Delta t = \frac{1}{N-1}$ e cada elemento discreto pode ser obtido por

$$x_i = x_1 + (i-1)h \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$t_n = t_1 + (n-1)\Delta t \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Alguns exemplos numéricos serão mostrados neste capítulo para ilustrar algumas características do modelo para pequenas vibrações transversais de cordas elásticas com extremidades fixas, que está associado à Equação de Onda Dissipativa. Aproximamos o problema (2.1) pelo problema (2.9); logo, encontrar solução aproximada para o problema (2.9) implica em encontrar uma solução aproximada para o problema (2.1).

A força externa aplicada é, em nosso caso, nula. Mas, para constatarmos que a solução aproximada está sendo obtida corretamente, faremos exemplos numéricos onde a força não é nula.

Para calcularmos essa força externa $f(x, t)$, basta construirmos um problema particular similar com $f(x, t) \neq 0$ associada à solução exata escolhida, que definimos

a priori, no problema (2.1). Assim, teremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t = f(x, t) & , & 0 < x < L & , & t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , & & & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , & u_t(x, 0) = u_1(x) & , & 0 < x < L \end{cases} \quad (6.1)$$

onde

$$a \in L^\infty(0, L) \text{ e } a = a(x) > a_0 > 0, \forall x \in (0, L).$$

Para o problema acima, utilizaremos as funções $a(x)$ globais, isto é, que não se anulam no intervalo $[0, L]$, onde $L = 1$.

No caso das funções $a(x)$ locais, isto é, que se anulam em quase todo intervalo $[0, L]$, onde $L = 1$, utilizaremos o problema com a equação penalizada com o objetivo de forçar o decaimento exponencial.

Para calcularmos a força externa $f(x, t)$, basta substituímos a solução exata, que definimos a priori, no problema (5.1). Assim, teremos o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t - h^2u_{xxt} = f(x, t) & , & 0 < x < L & , & t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , & & & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , & u_t(x, 0) = u_1(x) & , & 0 < x < L \end{cases} \quad (6.2)$$

onde h é o passo no espaço (parâmetro da malha).

6.1 Exemplo 1

Consideraremos a solução exata para o problema (6.1) dada por

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x) \cos(\pi t) + tx(x - 1) \quad (6.3)$$

com posição inicial da corda dada por

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \quad (6.4)$$

velocidade inicial da corda dada por

$$u_t(x, 0) = x(x - 1) \quad (6.5)$$

e os valores de fronteira

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (6.6)$$

Inicialmente, vamos definir, para este exemplo, a função global $a(x) = 1, \forall x \in [0, L]$, isto é, uma função que não se anula no intervalo $[0, L]$.

As figuras 6.1 e 6.2 mostram o movimento de uma corda que possui seus extremos fixos, ou seja a posição $u(x, t)$ da corda, em suas diferentes vistas.

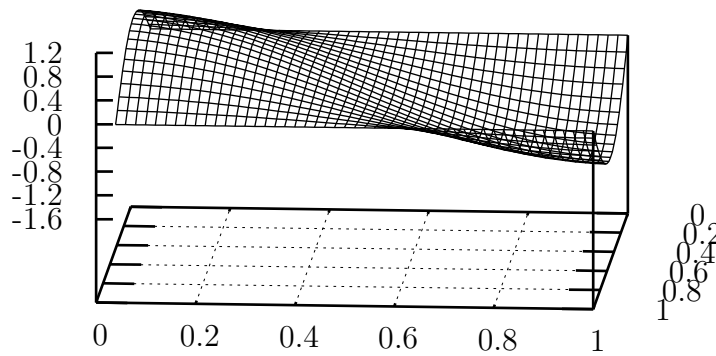


Figura 6.1: Vibração de uma Corda Elástica com Extremos Fixos (Vista 1)

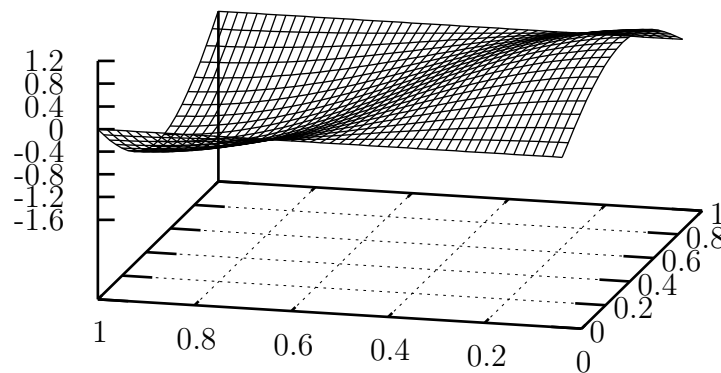


Figura 6.2: Vibração de uma Corda Elástica com Extremos Fixos (Vista 2)

Como mencionamos anteriormente, normalmente a força externa aplicada na corda elástica é considerada nula, mas construiremos um exemplo numérico onde a força externa não é nula, para nos assegurarmos que a solução numérica está sendo obtida corretamente.

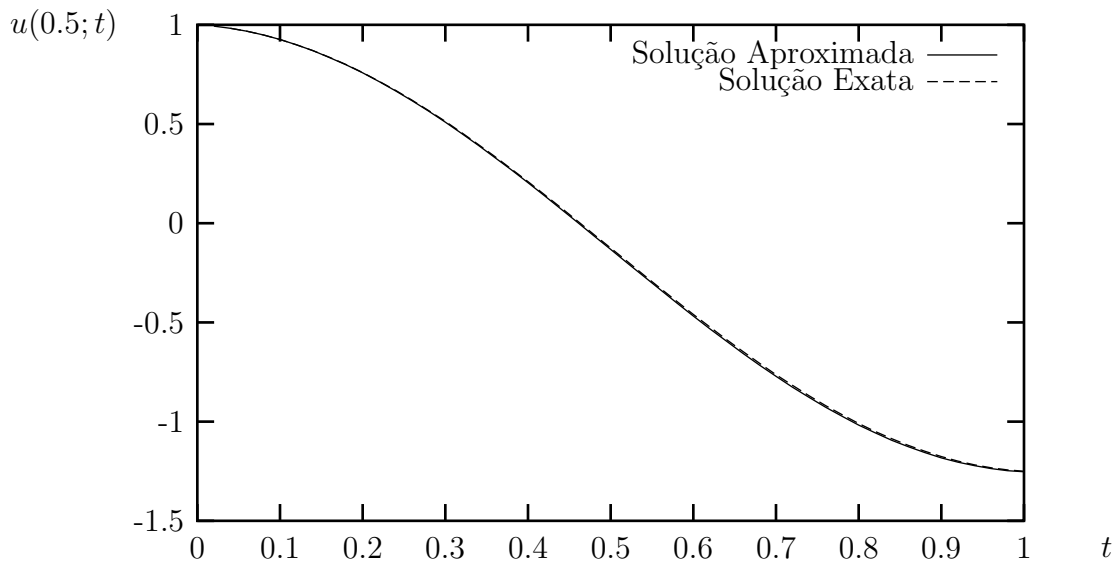


Figura 6.3: Gráfico das Soluções Aproximada e Exata

A figura 6.3 representa as soluções exata e aproximada no ponto $x = 0.5$ com $\Delta t = 0.02$, onde $t \in [0, 1]$, ou seja, o movimento encontrado do nó do meio da corda e a solução exata para o mesmo ponto. Assim, temos que a solução aproximada encontrada para o problema (6.1) está bem próxima da solução exata conhecida, já que o erro é

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = 0.000062,$$

onde o erro na norma L^∞ para $\Omega = (0, 1)$ é definido por

$$\begin{aligned} E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &= \max_{t_n \in [0,1]} (\| u(x_i, t_n) - u_h(x_i, t_n) \|_{L^2(\Omega)}) \\ &= \max_{t_n \in [0,1]} \left(\int_0^1 |u(x_i, t_n) - u_h(x_i, t_n)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $n = 1, \dots, N$, onde $u_h(x, t)$ representa a solução aproximada.

Com esse resultado garantimos que a solução para o problema (2.1) está sendo calculada corretamente, o que comprova a eficácia do método numérico empregado.

6.1.1 Solução Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (6.1). A tabela abaixo mostra o erro, fixando o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.0125; 0.01$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 81$ e 101 elementos finitos, respectivamente, onde $h = \frac{1}{m-1}$, como definido anteriormente.

Δt	h	$a(x)$	$f(x, t)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.01	0.1	1	$-2t - \pi \sin(\pi x) \sin(\pi t) + x(x-1)$	0.005946
0.01	0.05			0.001542
0.01	0.02			0.000308
0.01	0.0125			diverge
0.01	0.01			diverge

Podemos observar que o erro é inversamente proporcional ao tamanho da malha, ou seja, quanto maior a discretização (mais refinamos a malha), menor o erro. Contudo, as simulações numéricas comprovam que a solução converge para $\Delta t \leq h/2$. Do contrário, a solução diverge.

Analisaremos agora o comportamento do erro da solução aproximada para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.002$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 101$ e 501 elementos finitos, respectivamente, onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$a(x)$	$f(x, t)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	1	$-2t - \pi \sin(\pi x) \sin(\pi t) + x(x-1)$	0.005874
0.001	0.05			0.001470
0.001	0.02			0.000236
0.001	0.01			0.000059
0.001	0.002			0.000003

Observamos que mesmo diminuindo Δt com a mesma função $a(x)$ e com a mesma malha h o erro não diminui, o que significa que o erro nesses casos é predominado por h . Vale ressaltar ainda que apesar do erro ter sido praticamente o mesmo que no caso anterior, a solução converge para $h = 0.01$ e $h = 0.002$.

Para a mesma solução exata $u(x, t) = \text{sen}(\pi x) \cos(\pi t) + tx(x - 1)$ podemos definir outras funções globais $a(x)$. Faremos duas tabelas, para $a(x) = 2$ e $a(x) = x + 1$.

Δt	h	$a(x)$	$f(x, t)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	2	$-2t - 2\pi \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t) + 2x(x - 1)$	0.006410
0.001	0.05			0.001604
0.001	0.02			0.000257
0.001	0.01			0.000065
0.001	0.002			0.000003

Δt	h	$a(x)$	$f(x, t)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	$x + 1$	$-2t + (x + 1)(-\text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t)\pi + x(x - 1))$	0.003303
0.001	0.05			0.001590
0.001	0.02			0.000819
0.001	0.01			0.000439
0.001	0.002			0.000092

Podemos notar que o erro nas tabelas anteriores são quase iguais, apesar das funções $a(x)$ serem diferentes.

Vamos definir agora funções $a(x)$ locais, isto é, que se anulam em quase todo intervalo $[0, 1]$. Seja

$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

Para esta função local, teremos

$$f(x, t) = \begin{cases} -2t - h^2(\text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t)\pi^3 + 2) & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2t - \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t)\pi + x(x - 1) - h^2(\text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t)\pi^3 + 2) & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (6.2), para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.002$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 101$ e 501 elementos finitos, respectivamente, onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	0.042008
0.001	0.05	0.015910
0.001	0.02	0.005646
0.001	0.01	0.002735
0.001	0.002	0.000534

Observamos que o erro para as funções $a(x)$ locais é inversamente proporcional ao tamanho da malha, assim como nas funções globais $a(x)$.

Até agora fizemos $f(x, t)$ não nula no problema (6.1) para as funções globais $a(x)$ e constatamos que a solução aproximada está sendo obtida corretamente. Também fizemos $f(x, t)$ não nula no problema (6.2) para as funções locais $a(x)$ e verificamos que a solução aproximada também está sendo obtida corretamente. Vamos, a partir deste momento, retornar aos nossos problemas originais, onde estudaremos o movimento da corda elástica quando a força externa é nula, usando as mesmas condições iniciais $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$, as mesmas condições de fronteira e $a(x) = 1$; com $f(x, t) = 0$ a solução exata é desconhecida. Assim, encontraremos uma solução aproximada para o problema (2.1) e para o problema (5.1).

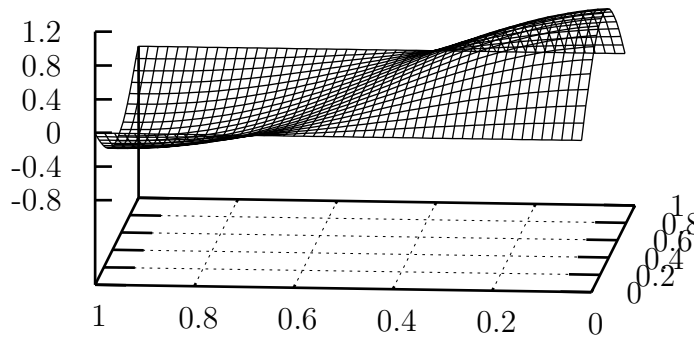


Figura 6.4: Gráfico da Solução Aproximada $u(x, t)$

A figura 6.4 mostra a solução aproximada $u(x, t)$ para o problema (2.1), ou seja, o movimento da corda elástica ao longo do tempo, para a força $f(x, t)$ nula.

Como definido anteriormente, temos que a energia do problema (2.1) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \{u_t^2 + u_x^2\} dx.$$

Para verificarmos o decaimento da energia do problema original, teremos somente a solução aproximada que será calculada pontualmente e portanto teremos o valor da energia para cada tempo.

Computacionalmente, definiremos

$$g(x, t) = \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)^2$$

onde $u_h(x, t)$ é a solução aproximada.

Utilizando o Método do Trapézio para calcular a integral da energia encontramos

$$\begin{aligned} E(t_n) &= \frac{1}{2} \int_0^1 g(x_i, t_n) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} \left(g(x_1, t_n) + 2 \sum_{i=2}^{m-1} g(x_i, t_n) + g(x_m, t_n) \right) \right], \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

onde $x_1 = 0$, $x_m = 1$ e $h = \frac{1}{m-1}$ é o passo no espaço.

Para calcularmos $g(x_i, t_n)$ utilizaremos a seguinte aproximação adiantada

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h}{\partial t} &= \frac{u_h(x_i, t_{n+1}) - u_h(x_i, t_n)}{\Delta t} \\ \frac{\partial u_h}{\partial x} &= \frac{u_h(x_{i+1}, t_n) - u_h(x_i, t_n)}{h} \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m-1$.

No caso extremo à direita, ou seja, quando $i = m$, então não teremos o valor $u_h(x_{m+1}, t_n)$ para o cálculo de $g(x_m, t_n)$. Então nesse ponto fazemos a seguinte aproximação atrasada

$$g(x_m, t_n) = \left(\frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} \right)^2 + \left(\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\Delta t} \right)^2.$$

Dessa forma, encontraremos a energia para todo tempo t_n . O gráfico abaixo representa o decaimento da energia para cada uma das funções $a(x)$.

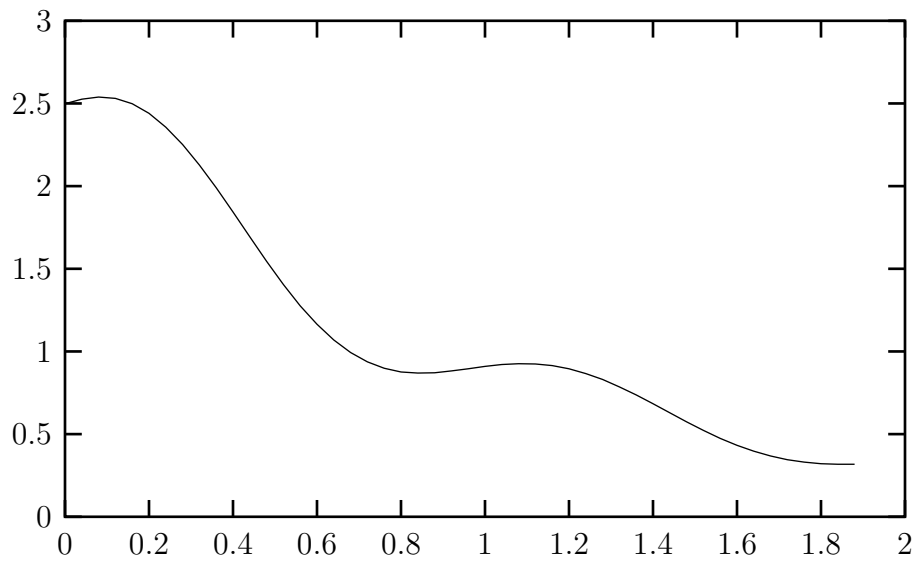


Figura 6.5: Gráfico do Decaimento da Energia

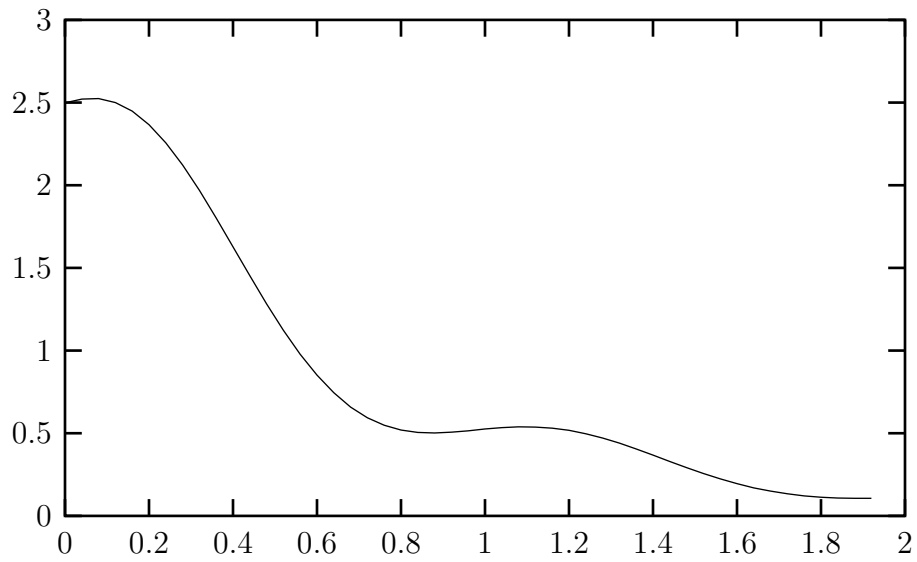


Figura 6.6: Gráfico do Decaimento da Energia

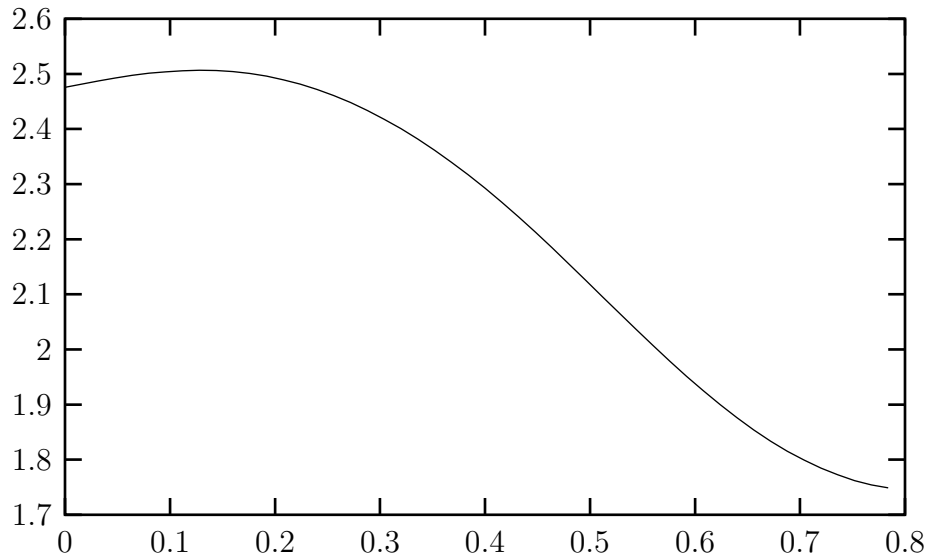


Figura 6.7: Gráfico do Decaimento da Energia

As figuras 6.5 e 6.6 mostram o decaimento da energia ao longo do tempo para as funções globais $a(x) = 1$ e $a(x) = x + 1$ no problema (2.1), respectivamente. Já a figura 6.7 mostra o decaimento da energia para a função local dada por (6.7) no problema (5.1).

6.2 Exemplo 2

Consideraremos a solução exata para o problema (6.1) dada por

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x) \cos(\pi t) \quad (6.8)$$

com posição inicial dada por

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \quad (6.9)$$

velocidade inicial dada por

$$u_t(x, 0) = 0 \quad (6.10)$$

e os valores de fronteira

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (6.11)$$

Inicialmente, vamos definir, para este exemplo, a função global $a(x) = 1, \forall x \in [0, L]$, isto é, uma função que não se anula no intervalo $[0, L]$.

As figuras 6.8 e 6.9 mostram o movimento de uma corda que possui seus extremos fixos, ou seja a posição $u(x, t)$ da corda, em suas diferentes vistas.

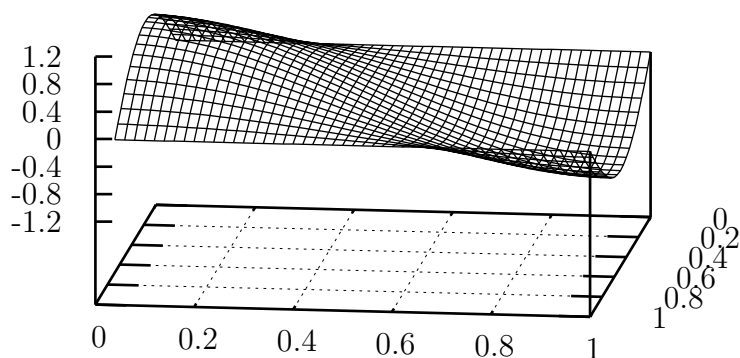


Figura 6.8: Vibração de uma Corda Elástica com Extremos Fixos (Vista 1)

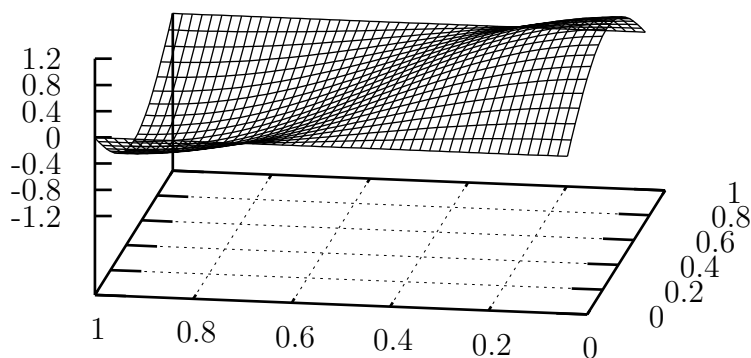


Figura 6.9: Vibração de uma Corda Elástica com Extremos Fixos (Vista 2)

Como mencionamos anteriormente, normalmente a força externa aplicada na corda elástica é considerada nula, mas construiremos um exemplo numérico onde a força externa não é nula, para nos assegurarmos que a solução numérica está sendo obtida corretamente.

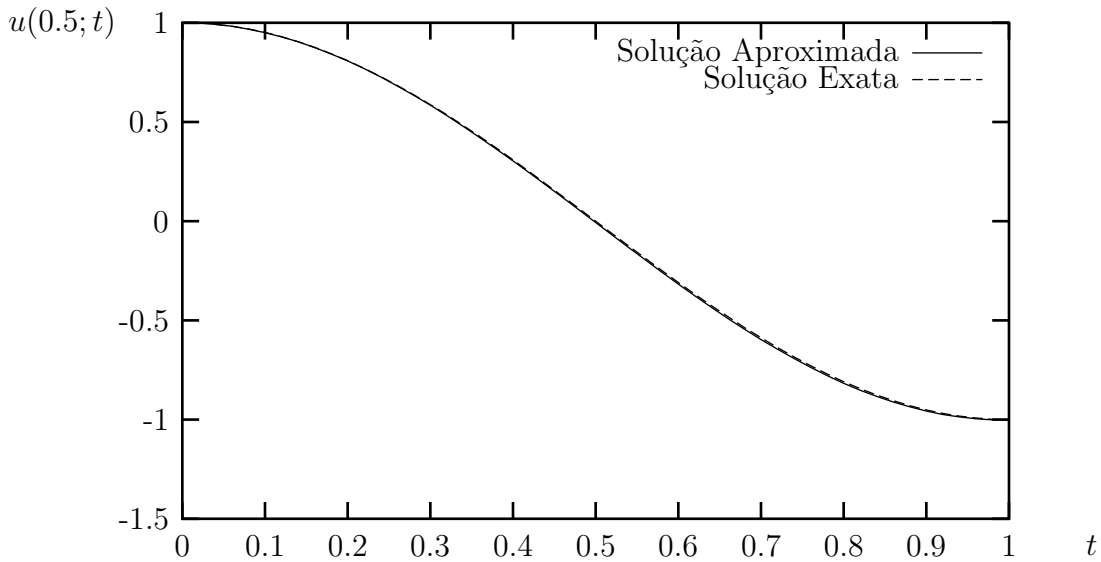


Figura 6.10: Gráfico das Soluções Aproximada e Exata

A figura 6.10 representa as soluções exata e aproximada no ponto $x = 0.5$ com $\Delta t = 0.02$, onde $t \in [0, 1]$, ou seja, o movimento encontrado do nó do meio da corda e a solução exata para o mesmo ponto. Assim, temos que a solução aproximada encontrada para o problema (6.1) está bem próxima da solução exata conhecida, já que o erro na norma L^2 , já definido anteriormente, é dado por

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = 0.000060.$$

Com esse resultado garantimos que a solução para o problema (2.1) está sendo calculada corretamente, o que comprova a eficácia do método numérico empregado.

6.2.1 Solução Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada. A tabela abaixo mostra o erro, fixando o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.0125; 0.01$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 81$ e 101 elementos finitos, respectivamente, onde $h = \frac{1}{m-1}$, como definido anteriormente.

Δt	h	$a(x)$	$f(x, t)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.01	0.1	1	$-\pi \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t)$	0.005752
0.01	0.05			0.001493
0.01	0.02			0.000300
0.01	0.0125			diverge
0.01	0.01			diverge

Podemos observar que o erro é inversamente proporcional ao tamanho da malha, ou seja, quanto maior a discretização (mais refinamos a malha), menor o erro. Contudo, as simulações numéricas comprovam que a solução converge para $\Delta t \leq h/2$. Do contrário, a solução diverge.

Analisaremos agora o comportamento do erro da solução aproximada para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.002$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 101$ e 501 elementos finitos, respectivamente, onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$a(x)$	$f(x, t)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	1	$-\pi \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t)$	0.005680
0.001	0.05			0.001421
0.001	0.02			0.000228
0.001	0.01			0.000058
0.001	0.002			0.000003

Observamos que mesmo diminuindo Δt com a mesma função $a(x)$ e com a mesma malha h , o erro não diminui o que significa que o erro nesses casos é predominado por h . Vale ressaltar ainda que apesar do erro ter sido praticamente o mesmo que no caso anterior, a solução converge para $h = 0.01$ e $h = 0.002$.

Para a mesma solução exata $u(x, t) = \text{sen}(\pi x) \cos(\pi t)$ podemos definir outras funções $a(x)$. Faremos duas tabelas, para $a(x) = x + 1$ e $a(x) = x^2 + 1$.

Δt	h	$a(x)$	$f(x, t)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	$x + 1$	$-\pi(x + 1) \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t)$	0.003365
0.001	0.05			0.001451
0.001	0.02			0.000743
0.001	0.01			0.000398
0.001	0.002			0.000083

Δt	h	$a(x)$	$f(x, t)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	$x^2 + 1$	$-\pi(x^2 + 1) \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi t)$	0.002969
0.001	0.05			0.001833
0.001	0.02			0.000825
0.001	0.01			0.000427
0.001	0.002			0.000087

Podemos notar que o erro nas tabelas anteriores são quase iguais, apesar das funções $a(x)$ serem diferentes.

Vamos considerar a função $a(x)$ local dada por (6.7).

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (6.2), para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.002$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 101$ e 501 elementos finitos, respectivamente, onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	0.057893
0.001	0.05	0.026971
0.001	0.02	0.010598
0.001	0.01	0.005274
0.001	0.002	0.001052

Observamos que o erro para as funções $a(x)$ locais é inversamente proporcional ao tamanho da malha, assim como nas funções globais $a(x)$.

Para a função local

$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(x - 1/2) & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (6.12)$$

teremos,

$$f(x, t) = \begin{cases} -h^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi t) \pi^3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -(2x - 1) \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi t) \pi - h^2 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi t) \pi^3 & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (6.2), para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.002$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 101$ e 501 elementos finitos, respectivamente, onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	0.008686
0.001	0.05	0.003579
0.001	0.02	0.001251
0.001	0.01	0.000595
0.001	0.002	0.000114

Observamos que o erro para esta função $a(x)$ local também é inversamente proporcional ao tamanho da malha.

Até agora fizemos $f(x, t)$ não nula no problema (6.1) para as funções globais $a(x)$ e constatamos que a solução aproximada está sendo obtida corretamente. Também fizemos $f(x, t)$ não nula no problema (6.2) para as funções locais $a(x)$ e verificamos que a solução aproximada também está sendo obtida corretamente. Vamos, a partir deste momento, retornar aos nossos problemas originais, onde estudaremos o movimento da corda elástica quando a força externa é nula, usando as mesmas condições iniciais $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$, as mesmas condições de fronteira e $a(x) = 1$; com $f(x, t) = 0$ a solução exata é desconhecida. Assim, encontraremos uma solução aproximada para o problema (2.1) e para o problema (5.1).

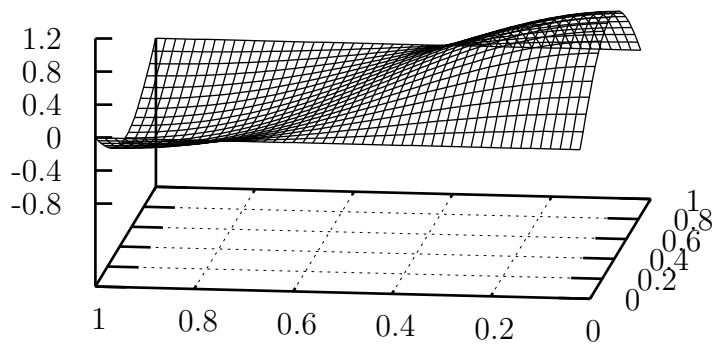


Figura 6.11: Gráfico da Solução Aproximada $u(x, t)$

A figura 6.11 mostra a solução aproximada $u(x, t)$ para o problema (2.1), ou seja, o movimento da corda elástica ao longo do tempo, para a força $f(x, t)$ nula.

Vejamos os gráficos abaixo que representam o decaimento da energia para diferentes funções $a(x)$.

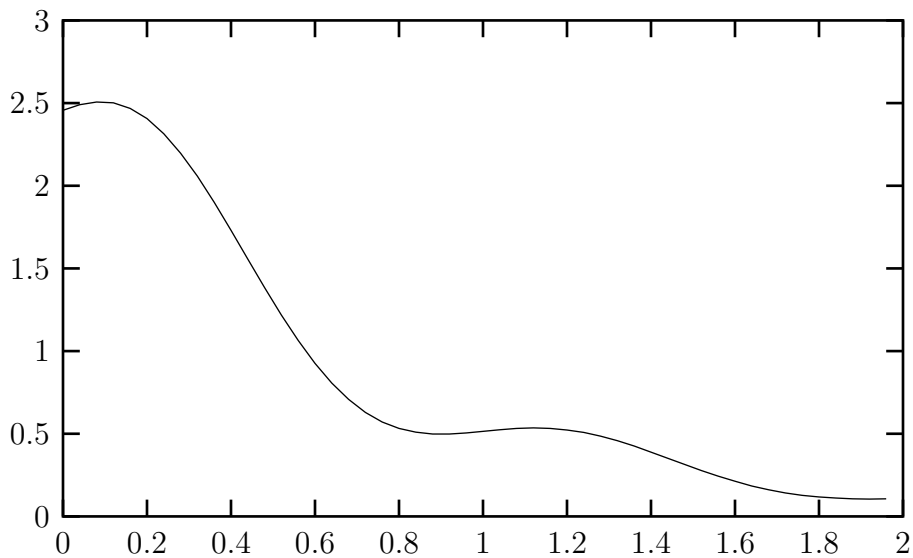


Figura 6.12: Gráfico do Decaimento da Energia

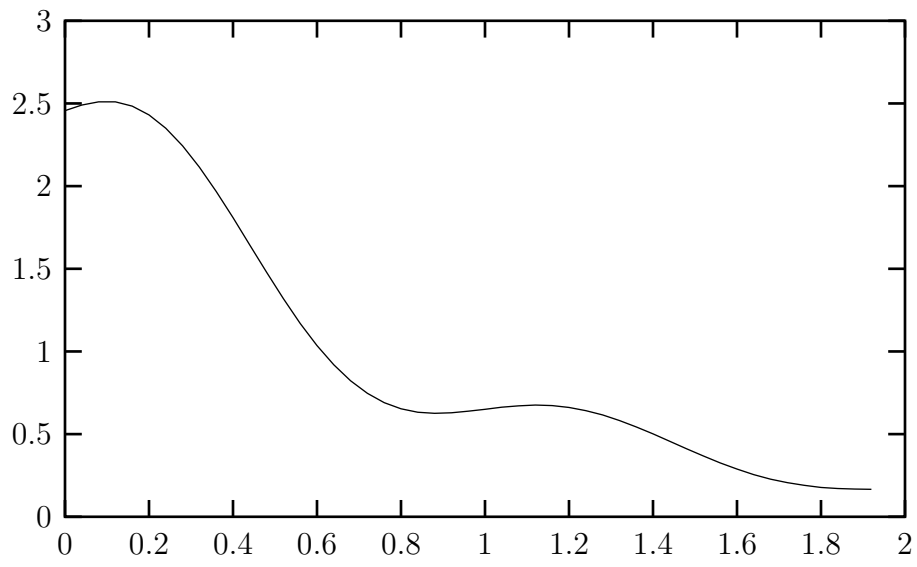


Figura 6.13: Gráfico do Decaimento da Energia

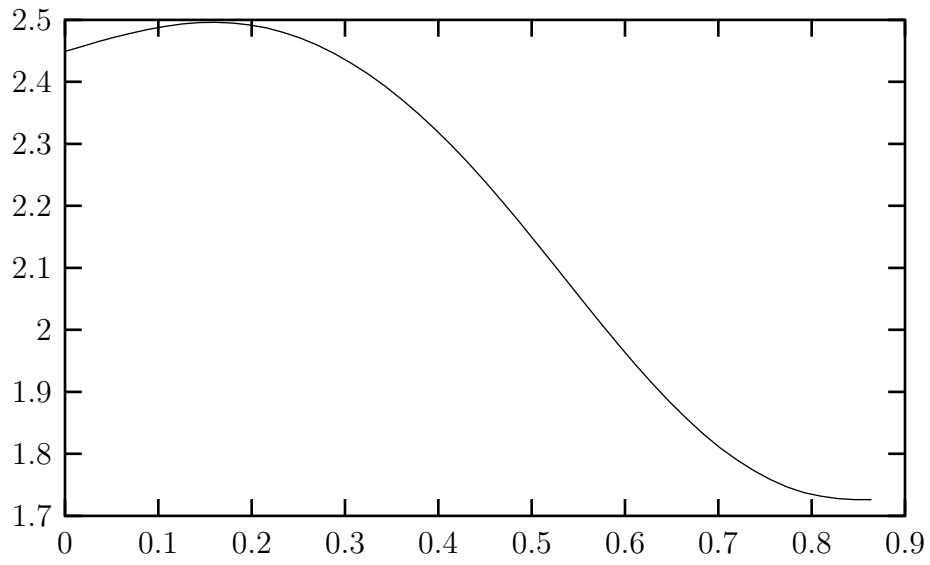


Figura 6.14: Gráfico do Decaimento da Energia

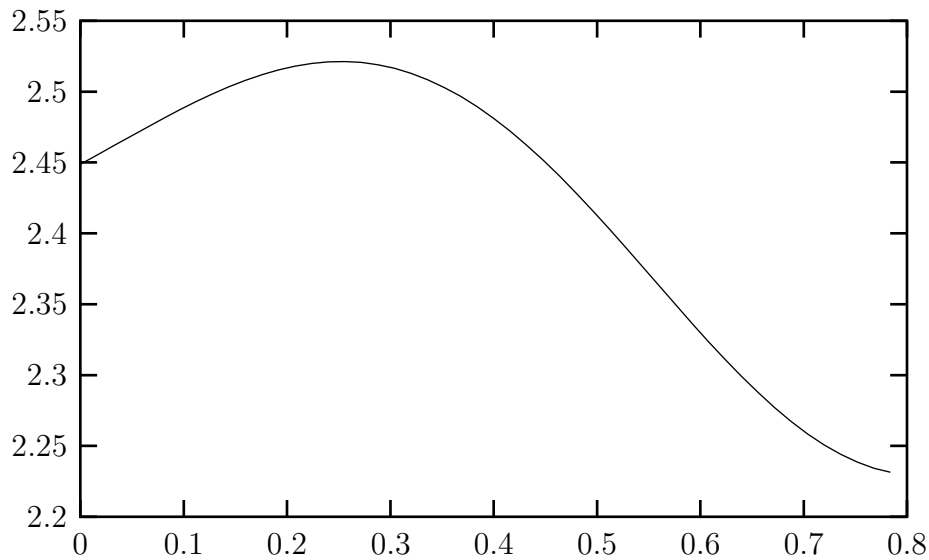


Figura 6.15: Gráfico do Decaimento da Energia

As figuras 6.12 e 6.13 mostram o decaimento da energia ao longo do tempo para as funções globais $a(x) = x + 1$ e $a(x) = x^2 + 1$ no problema (2.1), respectivamente. Já as figuras 6.14 e 6.15 mostram o decaimento da energia para as funções locais dadas por (6.7) e (6.12) no problema (5.1).

6.3 Exemplo 3

Consideraremos a solução exata para o problema (6.1) dada por

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x)(\cos(\pi t) + \text{sen}(\pi t)) \quad (6.13)$$

com posição inicial dada por

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \quad (6.14)$$

velocidade inicial dada por

$$u_t(x, 0) = \pi \text{sen}(\pi x) \quad (6.15)$$

e os valores de fronteira

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (6.16)$$

Inicialmente, vamos definir, para este exemplo, a função global $a(x) = 1, \forall x \in [0, L]$, isto é, uma função que não se anula no intervalo $[0, L]$.

As figuras 6.16 e 6.17 mostram o movimento de uma corda que possui seus extremos fixos, ou seja a posição $u(x, t)$ da corda, em suas diferentes vistas.

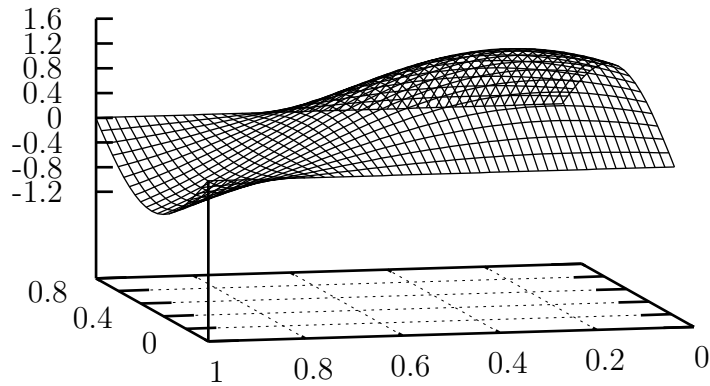


Figura 6.16: Vibração de uma Corda Elástica com Extremos Fixos (Vista 1)

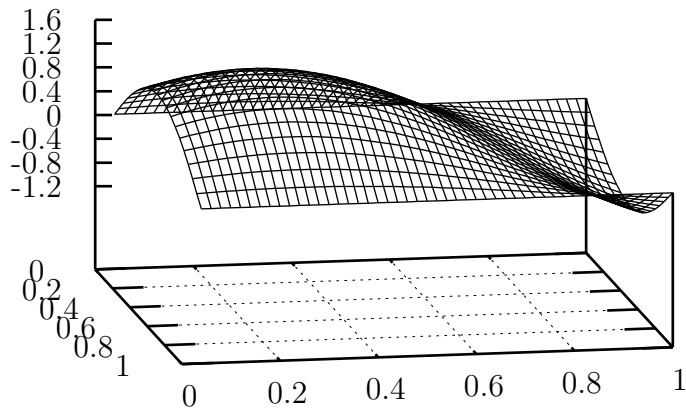


Figura 6.17: Vibração de uma Corda Elástica com Extremos Fixos (Vista 2)

Como mencionamos anteriormente, normalmente a força externa aplicada na corda elástica é considerada nula, mas construiremos um exemplo numérico onde a força externa não é nula, para nos assegurarmos que a solução numérica está sendo obtida corretamente.

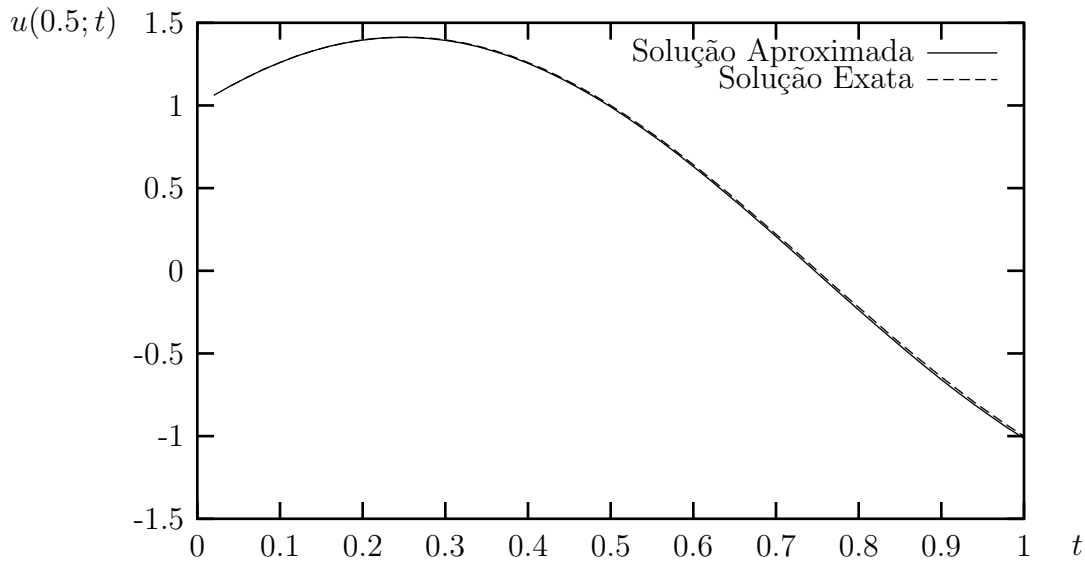


Figura 6.18: Gráfico das Soluções Aproximada e Exata

A figura 6.18 representa as soluções exata e aproximada no ponto $x = 0.5$ com $\Delta t = 0.02$, onde $t \in [0, 1]$, ou seja, o movimento encontrado do nó do meio da corda e a solução exata para o mesmo ponto. Assim, temos que a solução aproximada encontrada para o problema (6.1) está bem próxima da solução exata conhecida, já que o erro na norma L^2 , já definido anteriormente, é dado por

$$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = 0.000109.$$

Com esse resultado garantimos que a solução para o problema (2.1) está sendo calculada corretamente, o que comprova a eficácia do método numérico empregado.

6.3.1 Solução Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada. A tabela abaixo mostra o erro, fixando o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.0125; 0.01$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 81$ e 101 elementos finitos, respectivamente, onde $h = \frac{1}{m-1}$, como definido anteriormente.

Δt	h	$a(x)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.01	0.1		0.010637
0.01	0.05		0.002725
0.01	0.02	1	0.000513
0.01	0.0125		diverge
0.01	0.01		diverge

Podemos observar que o erro é inversamente proporcional ao tamanho da malha, ou seja, quanto maior a discretização (mais refinamos a malha), menor o erro. Contudo, as simulações numéricas comprovam que a solução converge para $\Delta t \leq h/2$. Do contrário, a solução diverge.

Analisaremos agora o comportamento do erro da solução aproximada para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.002$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 101$ e 501 elementos finitos, respectivamente onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$a(x)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1		0.010556
0.001	0.05		0.002643
0.001	0.02	1	0.000424
0.001	0.01		0.000107
0.001	0.002		0.000005

Observamos que mesmo diminuindo Δt com a mesma função $a(x)$ e com a mesma malha h , o erro não diminui o que significa que o erro nesses casos é predominado por h . Vale ressaltar ainda que apesar do erro ter sido praticamente o mesmo que no caso anterior, a solução converge para $h = 0.01$ e $h = 0.002$.

Para a mesma solução exata $u(x, t) = \sin(\pi x)(\cos(\pi t) + \sin(\pi t))$ podemos definir outras funções $a(x)$. Faremos duas tabelas, para $a(x) = 1/2$ e $a(x) = x + 1$.

Δt	h	$a(x)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	1/2	0.011091
0.001	0.05		0.002777
0.001	0.02		0.000445
0.001	0.01		0.000112
0.001	0.002		0.000005

Δt	h	$a(x)$	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	$x + 1$	0.008257
0.001	0.05		0.001925
0.001	0.02		0.000538
0.001	0.01		0.000363
0.001	0.002		0.000087

Podemos notar que o erro nas tabelas anteriores são quase iguais, apesar das funções $a(x)$ serem diferentes.

Consideremos a função $a(x)$ local, dada por (6.7).

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (6.2), para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.002$ que correspondem a malhas com $m = 11, 21, 51, 101$ e 501 elementos finitos, respectivamente, onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	0.148525
0.001	0.05	0.038865
0.001	0.02	0.011511
0.001	0.01	0.005558
0.001	0.002	0.001094

Observamos que o erro para as funções $a(x)$ locais é inversamente proporcional ao tamanho da malha, assim como nas funções globais $a(x)$.

Consideremos agora, a função local (6.12).

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (6.2), para $\Delta t = 0.001$ fixo. A tabela mostra o erro, variando o passo $h = 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.002$ que correspondem aos respectivos elementos finitos $m = 11, 21, 51, 101$ e 501 , onde o erro é definido como anteriormente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$
0.001	0.1	0.010670
0.001	0.05	0.002685
0.001	0.02	0.000976
0.001	0.01	0.000540
0.001	0.002	0.000116

Observamos que o erro para esta função $a(x)$ local também é inversamente proporcional ao tamanho da malha.

Até agora fizemos $f(x, t)$ não nula no problema (6.1) para as funções globais $a(x)$ e constatamos que a solução aproximada está sendo obtida corretamente. Também fizemos $f(x, t)$ não nula no problema (6.2) para as funções locais $a(x)$ e verificamos que a solução aproximada também está sendo obtida corretamente. Vamos, a partir deste momento, retornar aos nossos problemas originais, onde estudaremos o movimento da corda elástica quando a força externa é nula, usando as mesmas condições iniciais $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$, as mesmas condições de fronteira e $a(x) = 1$; com $f(x, t) = 0$ a solução exata é desconhecida. Assim, encontraremos uma solução aproximada para o problema (2.1) e para o problema (5.1).

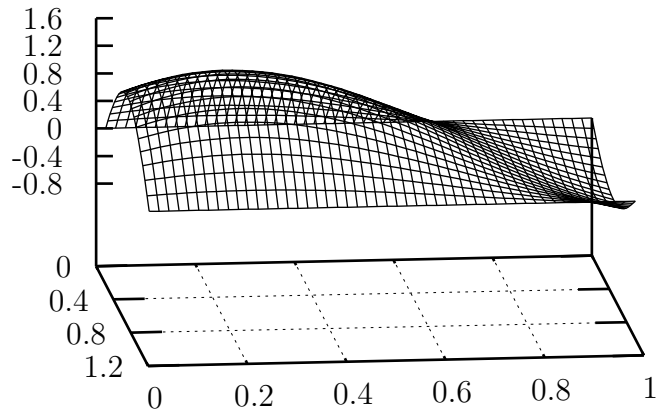


Figura 6.19: Gráfico da Solução Aproximada $u(x, t)$

A figura 6.19 mostra a solução aproximada $u(x, t)$ para o problema (2.1), ou seja, o movimento da corda elástica ao longo do tempo, para a força $f(x, t)$ nula.

Vejam os gráficos abaixo que representam o decaimento da energia para diferentes funções $a(x)$.

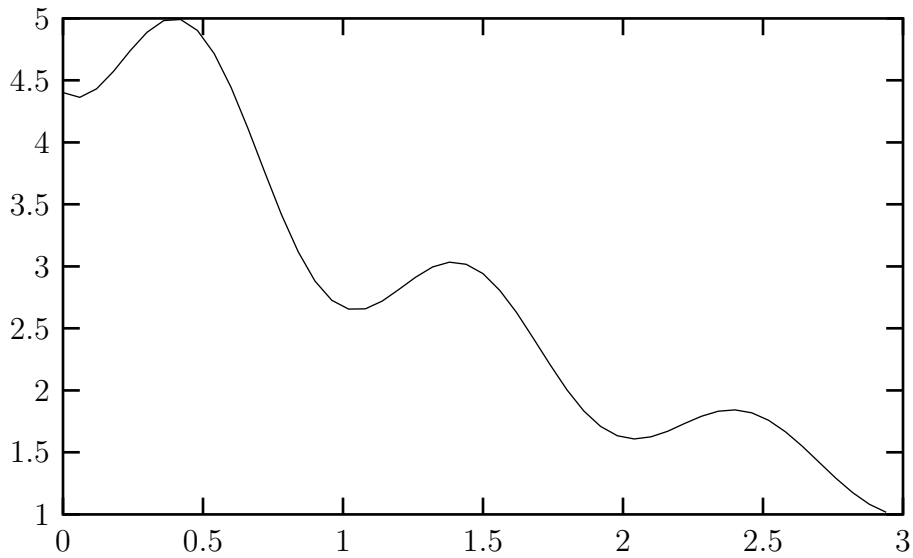


Figura 6.20: Gráfico do Decaimento da Energia

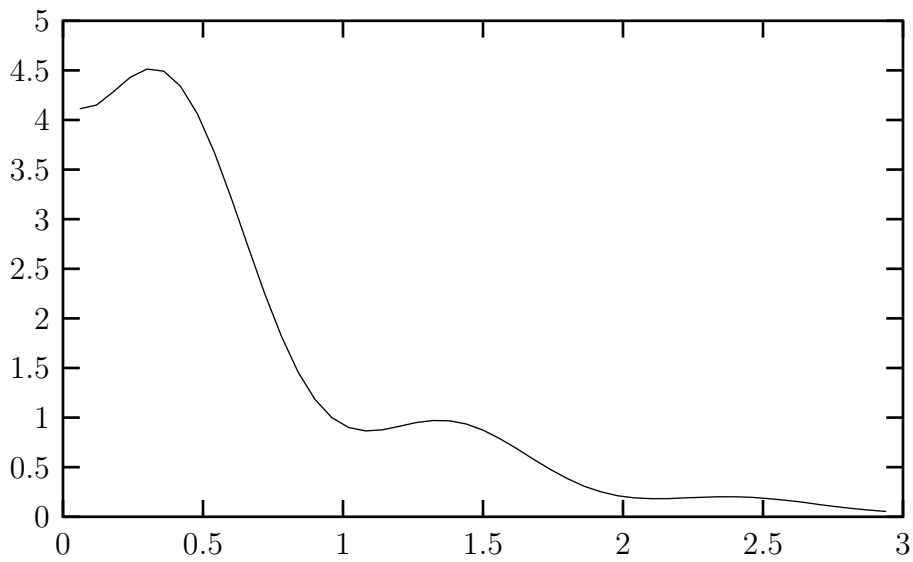


Figura 6.21: Gráfico do Decaimento da Energia

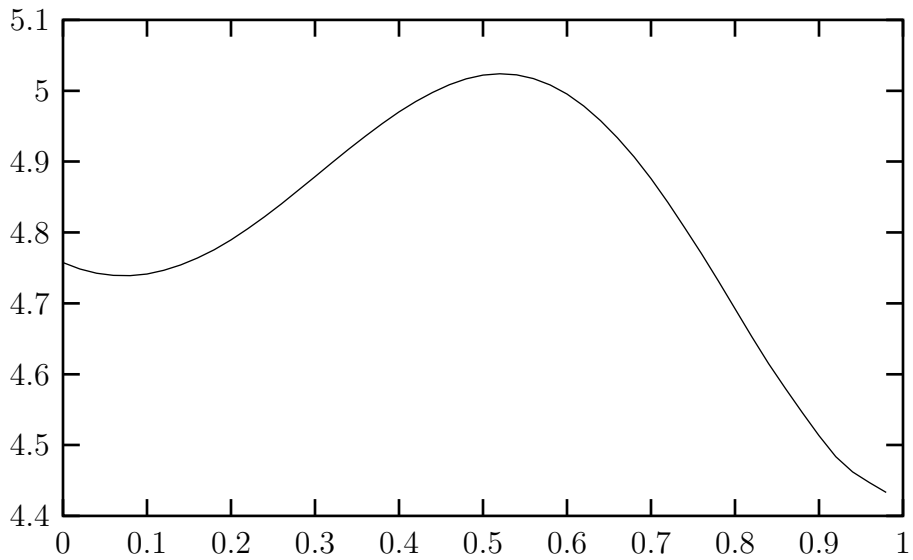


Figura 6.22: Gráfico do Decaimento da Energia

As figuras 6.20 e 6.21 mostram o decaimento da energia ao longo do tempo para as funções globais $a(x) = 1/2$ e $a(x) = x + 1$ no problema (2.1), respectivamente. Já a figura 6.22 mostra o decaimento da energia para a função local dada por (6.12) no problema (5.1).

6.4 Conclusão

Neste trabalho, aplicamos um método numérico para um modelo matemático relacionado a estruturas flexíveis sujeitas a vibração com dissipação localizada.

As simulações numéricas baseadas no Método de Elementos Finitos associada ao Método de Diferenças Finitas mostram a eficácia do método quando construímos um modelo cuja solução exata é conhecida.

O erro associado a essa aproximação, calculado na norma $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, diminui quando h é decrescente, restrito a condição de convergência $\Delta t \leq h/2$.

O decaimento da solução numérica, com $a(x)$ global e local, também é mostrado, em acordo com os resultados teóricos.

Bibliografia

- [1] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics. S. I., Academic Press, 1975: (A Series of Monographs and Textbooks, v.65).
- [2] BRÉZIS, H. *Analise Funcionnelle*, Théorie et applications, Paris: DUNOD, 1999.
- [3] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise numérica* . São Paulo: Thompson Pioneira, 2003.
- [4] CIARLET, P. *The finite element method for elliptic problems* . Amsterdam: North-Holland, 1978. (Studies in Mathematics and its Applications).
- [5] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations*. Bombay: Tata McGraw-Hill, 1955.
- [6] DIEUDONNÉ, J. *Sur le théorème de Lebesgue-Mikodym*, Journal Indian Mathematical Society, Mysore, v. 15, p. 77 – 86, 1951.
- [7] FERNANDEZ, P. J. *Medida e integração*. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.
- [8] FIGUEIREDO, D. G. *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*, Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003. Projeto Euclides.
- [9] HILLE, E.; PHILLIPS, R. S. *Functional analysis and semi-groups*. Providence: American Mathematical Society, 1957. (Colloquium Publications, 31).
- [10] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003. Projeto Euclides.

- [11] LIONS, J. L. *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*. Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969.
- [12] LIU, I-Shih,; RINCON, M. A. *Introdução ao método dos elementos finitos*, Análise e Aplicações. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2003. Curso.
- [13] MEDEIROS, L. A. *Equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1981. (Textos de Métodos Matemáticos).
- [14] MILLA, M. M. A. *Introdução aos espaços de sobolev e às equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1993. (Textos de Métodos Matemáticos, 25).
- [15] MÜNCH, A.; PAZOTO, A. F. *Uniform stabilization of a viscous numerical approximation for a locally damped wave equation*. ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations, v. 12, n. 2, p. 265 - 293, 2007.
- [16] PHILLIPS, R. S. *On weakly compact subsets of a banach space*. American Journal of Mathematics. Baltimore: v. 65, n. 1, p. 108 - 136, 1943.
- [17] TÉBOU, L. R. T.; ZUAZUA, E. *Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity*. Numerische Mathematik, Heidelberg, v. 95, n. 3, p. 563-598, 2003.
- [18] TEMAM, R. *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. New York: Springer-Verlag, 1988. (Applied Mathematical Sciences, 68).
- [19] WLOKA, J. T. *Partial differential equations*. Cambridge: Cambridge University, 1987.
- [20] ZAUDERER, E. *Partial differential equations of applied mathematics*. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1988. (Pure and Applied Mathematics).