Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Núcleo de Computação Eletrônica

Emilia Barra Ferreira

As Demonstrações e a Formação do Professor de Matemática: um Estudo sobre a Contribuição dos Ambientes de Geometria Dinâmica

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

2006

Emilia Barra Ferreira

As Demonstrações e a Formação do Professor de Matemática: um Estudo sobre a Contribuição dos Ambientes de Geometria Dinâmica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática, Núcleo de Computação Eletrônica - NCE, Instituto de Matemática - IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Informática.

Orientadores:

Prof[a] Dr[a] Adriana Benevides Soares Lima
Prof. Dr. Josefino Cabral Melo Lima

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
2006

F383 Ferreira, Emilia Barra.

As demonstrações e a formação do professor de Matemática: um estudo sobre a contribuição dos ambientes de geometria dinâmica / Emilia Barra Ferreira – Rio de Janeiro, 2006.

314f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, 2006.

Orientadores: Adriana Benevides Soares; Josefino Cabral Melo Lima.

1. Formação de Professores – Teses. 2. Geometria Dinâmica - Teses. 3. Demonstrações – Teses. I. Adriana Benevides Soares (Orient.). II. Josefino Cabral Melo Lima (Orient.). III. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Núcleo de Computação Eletrônica. IV. Título.

CDD

Emilia Barra Ferreira

As Demonstrações e a Formação do Professor de Matemática: um Estudo sobre a Contribuição dos Ambientes de Geometria Dinâmica

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Informática do Instituto de Matemática e do Núcleo de Computação Eletrônica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Informática.

Rio de Janeiro, 27 de março de 2006.

Aprovada por:

Profª Drª Adriana Benevides Soares – Orientadora (UGF/ UERJ/UFRJ)
Docteur, Université de Paris Sud, U. PARIS XI, França, 1995

Prof. Dr. Josefino Cabral MELO LIMA – Co-Orientador (UFRJ)
Docteur, Université Pierre et Marie Curie, U. PARIS VI, França, 1992

Profª Drª Angela Rocha dos Santos (IM/UFRJ)
Doutora, Instituto de Matemática, UFRJ, Brasil, 1996

Profª Drª Claudia Lage Rebello da Motta (NCE/UFRJ)
Doutora, Coppe, UFRJ, Brasil, 1999

Prof. Dr. Marcos da Fonseca Elia (NCE/UFRJ)
Ph.D., University of London, Londres,1981

A meus pais,

Adhemar e Nancy (em memória),

e a meu marido, Marcos.

Agradecimentos

Um Curso de Mestrado é, acima de tudo, uma lição de vida. É uma oportunidade especial de conhecer melhor o “outro” e a si mesmo.

Meus agradecimentos àqueles que colaboraram para que eu tivesse a persistência e a paciência necessárias e chegar a esse momento. Alguns contribuíram trocando idéias e oferecendo sugestões, outros, ainda, pelo estímulo e apoio. A todas essas pessoas, meus sinceros agradecimentos.

Quero, no entanto, prestar um agradecimento especial:

À minha orientadora, Profª Dra. Adriana Benevides Soares, primeiramente, por acreditar na minha capacidade, pelas orientações firmes, pelo apoio e pela amizade, fundamentais para o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Também, por apresentar-me desafios, mostrar-me caminhos e abrir-me horizontes, essenciais em minha formação de pesquisadora.

Ao Prof. Dr. Cabral Lima, meu co-orientador, cujas observações tão oportunas trouxeram efetivas contribuições para o enriquecimento e aprimoramento deste trabalho.

Ao corpo docente do Programa de Mestrado em Informática do IM/NCE, todos muito importantes para minha formação, especialmente, os professores Marcos Elia, Claudia Motta, Fábio Ferrentini e Adriano Cruz.

À professora Lígia Barros, pelos diálogos impulsionadores de busca de novos horizontes profissionais e pessoais.

Aos professores do Instituto de Matemática Ângela Rocha, Cláudia Segadas, Lílian Nasser, Maria Laura Lopes, Lúcia Tinoco e Elizabeth Belfort, pelos encaminhamentos sugeridos ao meu trabalho. Aos professores Maria Alice Gravina e Saddo Ag Almouloud, que, mesmo à distância, foram solidários dando sugestões e fornecendo material de pesquisa.

Aos colegas de trabalho Diego e Gilvan, pela grande e valiosa ajuda que me prestaram no decorrer do curso.

A todos os companheiros da inigualável turma de 2002 deste Curso de Mestrado e, também, a Leila, Laci Mary, Gandra e Jorge Zavaleta, com os quais compartilhei alegrias e momentos difíceis.

Aos amigos Macário, George, Solange, Patrick, Márcia e Maria Teresa que, bem de perto, se fizeram presentes em momentos de desafio enfrentados.

Às sempre amáveis tia Deyse, Lina, Adriana, Zezé e Regina na solução para os problemas burocráticos.

Aos professores de Matemática participantes dos Estudos de Campo desta investigação Maria, Rosânia, Conceição, Álvaro, Eliana, Eliezer, Agnaldo, Aureci e Denise, por abraçarem com carinho e dedicação a causa desta pesquisa permitindo que ela se concretizasse. Às direções das escolas onde funcionaram os dois Estudos de Campo, pela acolhida e apoio. Aos alunos participantes das atividades programadas, enriquecendo-as com seus comentários e observações.

À Nancy, querida maninha, que sempre me viu maior do que sou e em quem sempre encontrei apoio para realizar meus propósitos.

Aos meus filhos, Melissa, Ana Emilia, Marcos José e Priscila, e também a Eli e Alessandra pelo voto de confiança depositado em mim.

Ao meu querido Marcos, companheiro compreensivo e paciente com minha “presença ausente”, estimulando-me sempre a lutar pelo que eu gosto de fazer.

A Deus a quem tudo devo.

Resumo

FERREIRA, Emilia Barra. **As Demonstrações e a Formação do Professor de Matemática: uma Contribuição dos Ambientes de Geometria Dinâmica**. Rio de Janeiro, 2006. Dissertação (Mestrado em Informática) - Instituto de Matemática/Núcleo de Computação Eletrônica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

As demonstrações são uma característica essencial da Matemática e, como tal, se constituem em um dos elementos fundamentais na construção do conhecimento geométrico. Dificuldades, no entanto, são encontradas na necessária transição entre o conhecimento de natureza empírica e aquele a ser construído: a geometria euclidiana enquanto modelo teórico organizado em axiomas, teoremas e demonstrações. São estas dificuldades que motivam o abandono da prática das demonstraçoes, até mesmo, pelos professores. Este trabalho tem por objetivo investigar a contribuição dos ambientes de geometria dinâmica na formação de professores de Matemática, no sentido de adequar e intensificar o uso das demonstrações no ensino da Geometria. O referencial teórico é baseado nas teorias construtivistas do conhecimento de Jean Piaget, no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, bem como na teoria da situação didática em Matemática desenvolvida pela Escola Francesa. Nesse sentido, propõe-se uma engenharia didática, em ambiente de geometria dinâmica, o *Tabulae*, buscando a formação dos professores participantes tanto em aspectos conceituais quanto didáticos. Dois estudos de campo foram desenvolvidos: um deles com professores da rede pública de Angra dos Reis e o outro com docentes de uma escola pública do Rio de Janeiro. Os resultados revelaram que o trabalho no ambiente de geometria dinâmica se constitui numa alternativa eficiente no processo de formação de professores no sentido de otimizar o uso das demonstrações, especialmente, porque nesses ambientes é possível contemplar tanto os aspectos conceituais quanto os aspectos didáticos da Geometria.

Abstract

FERREIRA, Emilia Barra. **As Demonstrações e a Formação do Professor de Matemática: uma Contribuição dos Ambientes de Geometria Dinâmica**. Rio de Janeiro, 2006. Dissertação (Mestrado em Informática) - Instituto de Matemática/Núcleo de Computação Eletrônica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

The demonstrations are an essential characteristic of the Mathematics and, as such, they form one of the fundamental elements in the construction of the geometric knowledge. Difficulties, however, are found in the necessary transition between the knowledge of empiric nature and that to be built: the euclidian geometry while theoretical model organized in axioms, theorems and demonstrations. These are difficulties that motivate the abandonment of the practice of the demonstrations, even, by the teachers. The reason of this work is to investigate the contribution of the environments of dynamic geometry in the formation of Mathematics' teachers, in order to adapt and to intensify the use of the demonstrations in the teaching of Geometry. The theoretical referencial is based on the constructive theories of Jean Piaget's knowledge, according to the model of development of Van Hiele's geometric thought, as well as in the didactic situation theory in Mathematics developed by the French School. In that sense, this work suggest a didactic engineering, in environments of dynamic geometry, Tabulae, looking for the participant teachers' formation in both conceptual and didactic aspects. Two fields of studies were developed: one of them with teachers from public schools of Angra dos Reis and the other with teachers from a public school of Rio de Janeiro. The results showed that the work in the environments of dynamic geometry is constituted in an efficient alternative in the process of teachers' formation in the sense by improving the use of the demonstrations, especially, because in those environments it is possible to contemplate the conceptual aspects as well as the didactic aspects of the Geometry.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Siglas

ATM	Association of Teachers of Mathematics
CEDERJ	Consórcio de Educação a Distancia do Estado do Rio de Janeiro
CNPq	Conselho Nacional de Pesquisa
GD	Geometria Dinâmica
GSP	The Geometers Skechpad
HTML	HyperText Markup Language
IM	Instituto de Matemática
LEC	Laboratório de Estudos Cognitivos
NCE	Núcleo de Computação Eletrônica
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
NTE	Núcleo de Tecnologia Educacional
PACE	Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROINFO	Programa Nacional de Informática Educativa
PRONINFE	Programa Nacional de Informática na Educação
UFGRS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
Z-F	Zermelo-Fraenkel

Sumário

Capítulo 1. Introdução

A Matemática, de forma ímpar, é uma ciência derivada do pensamento puro, constituindo-se essencialmente em um processo de construção mental. Dessa maneira, suas atividades caracterizam-se pela formulação de conjecturas que se validam quando acompanhadas das devidas demonstrações. Parte-se de alguns conceitos, tomados sem definição, e de algumas proposições aceitas sem demonstração: os axiomas. A partir destes, propriedades são derivadas e teoremas são demonstrados, seguindo-se as regras da lógica matemática. Estabelece-se, assim, a arquitetura das teorias matemáticas: conceitos primitivos e conceitos derivados, axiomas e teoremas.

Falar em Matemática, especialmente em Geometria, é falar de demonstrações. Vários pesquisadores no assunto podem ser citados evidenciando tal fato. Dentre eles: Gravina (2001) que afirma que o processo de demonstração é axial na construção do conhecimento matemático; Hanna & Jahnke (1996) que defendem a idéia de ser a demonstração uma característica essencial de Matemática e, como tal, um componente-chave no ensino desta disciplina; Nasser & Tinoco (2003) que alertam que é necessário ajudar o aluno a desenvolver o seu raciocínio lógico-dedutivo e que a habilidade de argumentar deve ser construída ao longo dos anos de escolaridade para que o aluno mais tarde seja capaz de defender um ponto de vista próprio, seja numa conversa informal, seja numa questão de Matemática. É natural, portanto, que se considere de suma importância, no processo educativo, a convivência e a prática das demonstrações pelos professores e estudantes. De um lado, vista como elemento fundamental para entender a prática científica da Matemática e, de outro, como um meio de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo.

A realidade nas escolas, no entanto, não reflete essas concepções. Dentre as causas apontadas para a não utilização das demonstrações no ensino-aprendizagem da Geometria, cita-se o fato dos professores não possuírem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de tal prática. Em nossa experiência docente (desde a década de 80) temos observado a ausência da Geometria nas escolas, principalmente nas públicas. Essa ausência se reflete nos saberes dos professores em atuação, pois os conteúdos não aprendidos não são ensinados, dando origem a um círculo vicioso que acaba afetando gerações de alunos que não aprendem Geometria. Pesquisas apontam sérios problemas com a formação de professores de Matemática, sobretudo quanto à Geometria: Pavanello (1993); Lorenzato (1995); Gouvêa (1998); Belfort, Guimarães & Barbastefano (1999).

Segundo Vianna (l988), muitas justificativas para o abandono das demonstrações são dadas pelos professores. Um dos argumentos que apresentam é que a Matemática a ser ensinada deve ser prática; não adianta demonstrar teoremas já que os alunos não vão entender mesmo, pois as demonstrações são muito abstratas e, por outro lado, os alunos não têm base suficiente para entendê-las. A autora sugere que, na verdade, um dos motivos do professor para a rejeição do dedutivo em sala de aula é de que ele mesmo não compreende a Matemática Dedutiva. Gouvêa (1998), por sua vez, em seu trabalho de pesquisa sobre as demonstrações, observa que há um certo preconceito entre os professores para com o ensino das demonstrações.

Em contrapartida, os professores que lecionam Geometria o fazem, na sua maioria, segundo uma abordagem tradicional, onde os conceitos são desenvolvidos através de um trabalho superficial, mecanizado e não provocador de argumentações dedutivas. Suprimem, assim, do ensino da Geometria, as ações que caracterizam o processo de construção em Matemática: abstrair, generalizar, estabelecer relações, errar, fazer conjecturas, demonstrar.

Ponte (1994), além de reconhecer a relevância do domínio dos conteúdos que se ensina, pelo professor, destaca a importância do conhecimento didático desse conteúdo, que seria a capacidade de compreensão das matérias de ensino, permitindo encontrar maneiras mais adequadas de apresentá-las aos alunos. Nessa direção, muitos recursos são oferecidos pelas Tecnologias da Informação e da Comunicação que vêm, nos últimos anos, provocando uma verdadeira revolução em nossa maneira de trabalhar e de aprender. Cada vez mais presentes e necessárias, elas permitem o livre trânsito de informações, o que tem modificado radicalmente os setores produtivos e, parcialmente, o educacional. Segundo Costa (2004), o computador pode acrescentar nos processos de ensino e de aprendizagem, novas dimensões que não estariam normalmente numa sala de aula convencional, podendo aumentar a eficácia do ensino e, conforme a abordagem de utilização, permitir a individualização de atividades relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem.

Assim, os ambientes informatizados além de facilitar a conectividade podem se constituir em instrumentos que criem condições favoráveis, na sala de aula, ao desenvolvimento de atividades intelectuais e sociais dos alunos. Segundo Papert (1988), a possibilidade de que o computador possa concretizar o formal é efetiva. Sob este prisma, o computador, como um meio para dar suporte ao pensamento, pode mudar os limites entre o concreto e o formal ao permitir criar um novo tipo de objeto, os objetos "concreto-abstratos"; concretos, pois existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos porque se constituem em realizações feitas a partir de construções mentais. Gravina (2001) acrescenta que, na passagem da Geometria empírica (espontânea) para a de caráter formal (teórica), a ascensão a novo patamar de conhecimentos, exige raciocínios lógico-dedutivos nem sempre espontâneos. Ao ser exigida uma crucial reestruturação na forma de pensar, a tecnologia informática pode, neste caso, intermediar o desenvolvimento das habilidades cognitivas que aí entram em jogo.

1.1 Objetivo e Questões da Pesquisa

Diante da constatação da inadequada ou da não utilização de demonstrações no ensino-aprendizagem da Geometria, o professor pode ser considerado como elemento decisivo no processo de transformação qualitativa da educação. Nesta perspectiva e considerando-se, ainda, o potencial da tecnologia informática na educação matemática, o objetivo deste trabalho consiste em investigar a contribuição dos ambientes de geometria dinâmica na formação de professores de Matemática, no sentido de adequar e intensificar o uso das demonstrações no ensino da Geometria. Dentre os inúmeros representantes desses ambientes, o escolhido para esta investigação foi o *software Tabulae*[1], desenvolvido na Universidade Federal do Rio de Janeiro, por questões de qualidade, baixo custo e fácil disponibilidade.

Nesses ambientes, os objetos construídos, segundo suas propriedades, podem ser manipulados diretamente, na tela do computador, dinamizando-se as configurações. Com o movimento do desenho, revelam-se invariantes decorrentes implicitamente da construção feita. Assim, como afirma Gravina (2001), ao permitir a construção e manipulação de objetos concreto-abstratos, o ambiente de geometria dinâmica desencadeia algumas das primeiras ações mentais características do pensar matemático: o estabelecer relações e conjecturar; o que faz de forma contundente se comparado com as possibilidades apresentadas pelo desenho estático, em papel. Diversos pesquisadores, nacionais e internacionais, discutem e investigam o potencial desses ambientes como Gravina (2001); Laborde (2000); Alves (2004); Hanna (2000); Laborde & Capponi (1994); Hoyles & Jones (1998); Belfort, Guimarães & Barbastefano (1999). Contribuição, neste sentido, também é dada por este pesquisador

[1] Programa desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ, dentro do projeto PACE (Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino), constituindo-se numa alternativa brasileira aos *softwares* de geometria dinâmica encontrados no mercado.

através de algumas publicações: Barra Ferreira & Soares (2004), Barra Ferreira, Soares & Lima (2005a, 2005b, 2005c, 2005d) e da presente dissertação.

Alves (2004) verifica, em sua investigação com alunos do Ensino Médio da rede pública do Rio de Janeiro, que aqueles que passaram pela experiência de lidar com as representações dinâmicas dos *softwares* utilizados demonstraram uma evolução maior em relação à compreensão dos conceitos geométricos vistos e suas justificativas melhoraram demonstrando uma melhor apreensão dos conceitos.

Em estudos sobre o papel da informática educativa no desenvolvimento do raciocínio lógico, Borges Neto (2004) considera que particularmente os ambientes de geometria dinâmica permitem um trabalho em que uma determinada situação possa ser examinada detalhadamente para verificação de toda e qualquer possibilidade de solução para, então, sistematicamente ser procurada a solução real da situação problema. Eles favorecem, assim, o desenvolvimento do pensamento formal do aprendiz, ao poder levantar suas hipóteses, fazer suas inferências e tirar conclusões. O mesmo autor alerta, entretanto, que as novas tecnologias na Educação, em especial as digitais, não serão seguramente a salvação para os problemas da Educação. São apenas algumas ferramentas a mais no ambiente escolar, que precisam ser bem utilizadas para poder dar bons resultados.

Nesta direção, encaminhou-se esta investigação que pode ser traduzida nas questões:

a) De que maneira a utilização de ambientes de geometria dinâmica, no processo ensino-aprendizagem da Geometria, pode estimular a evolução dos níveis de pensamento geométrico com simultâneo desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos professores envolvidos, permitindo uma melhor compreensão do significado das demonstrações, bem como desenvolvendo competências para sua elaboração?

b) Como a utilização de ambientes de geometria dinâmica, num processo de formação de professores, através de competências desenvolvidas e da prática de novas metodologias, pode contribuir para uma reflexão sobre as demonstrações e seu ensino, favorecendo uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica?

1.2 Metodologia da Pesquisa

No intuito de buscar respostas a essas perguntas, a opção metodológica assumida, foi a proposta de uma seqüência didática em ambiente informatizado que proporcionasse aos professores dois momentos: a) suprir possíveis deficiências de representações do seu conhecimento, favorecendo a evolução de seu pensamento geométrico para o nível formal; b) disponibilizar-lhes um recurso metodológico para um trabalho construtivo em suas aulas. Paralelamente aos trabalhos no laboratório, foram desenvolvidas discussões acerca de temas relacionados ao assunto da investigação, buscando uma reflexão sobre a demonstração e o seu ensino de forma a estimular nos professores uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica. Na conclusão das atividades da seqüência, coube ao professor a elaboração de uma atividade a ser, eventualmente, aplicada com seus alunos em ambiente de geometria dinâmica de forma a desencadear, nestes alunos, processos similares aos por ele vivenciados durante a investigação.

A metodologia da presente pesquisa foi inspirada na Engenharia Didática desenvolvida pela Escola Francesa de Didática da Matemática. Esta se constitui numa forma de organizar a pesquisa em didática da Matemática a partir da criação de uma seqüência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações que permitam interpretar processos de ensino-aprendizagem da Matemática, esclarecendo assim o fenômeno investigado. A Engenharia Didática, enquanto procedimento metodológico, fundamenta-se em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada (PAIS, 2001).

Assim, foram realizados dois trabalhos de campo com a finalidade de estabelecer uma comparação entre os resultados obtidos em duas distintas situações. O primeiro congregou um grupo de oito professores de Matemática da rede de ensino pública e particular de Angra dos Reis. O segundo estudo foi realizado numa escola pública federal da cidade do Rio de Janeiro envolvendo cinco de seus professores. Exatamente dois professores, um de cada grupo de estudo, executaram com sucesso a aplicação prática com seus alunos, em ambiente de geometria dinâmica, nas respectivas escolas de origem.

1.3 Organização da Dissertação

Considerando a complexidade do processo das demonstrações, não só para o aluno, mas também para o professor, o embasamento teórico deste estudo contemplou as seguintes abordagens: a histórico-epistemológica, a cognitiva e a didática. Acompanhou o estudo, uma necessária análise de aspectos da Informática na Educação.

O aspecto histórico-epistemológico das demonstrações foi tratado no **capítulo dois**, considerando a sua significação para o aluno e para o ensino, através de um estudo sobre a origem e a evolução da noção de prova ao longo da história, o *status* dos objetos matemáticos, as propriedades e relações envolvidas neste ensino.

No **capítulo três**, a reflexão sobre as demonstrações abordou os aspectos cognitivo e didático de seu processo. No aspecto cognitivo, são enfocados: a) as teorias construtivistas (PIAGET, 1983, 1995); b) a representação do conhecimento geométrico (DUVAL, 1995; VAN HIELE, 1986; FISHBEIN, 1993); c) o processo de resolução de problemas numa visão da teoria do Processamento de Informação (FLAVELL, 1999; POZO, 1998); d) a relação entre o meio tecnológico e o processo de construção do conhecimento (LÉVY, 2001). Quanto ao aspecto didático, foi adotada a Didática da Matemática da Escola Francesa como referencial teórico no sentido de orientar às escolhas didáticas a serem feitas e aplicadas

(BROUSSEAU, 1986; BALACHEFF, 1988). Tal definição se justifica pelo fato de que esta Escola, ao se basear nos pressupostos das teorias construtivas de aprendizagem e ao direcionar sua preocupação à complexidade dos fenômenos que perpassam o ensino e o aprendizado da Matemática, vem ao encontro da linha de pensamento trabalhada nesta investigação.

Tendo em vista a priorização do uso de recursos informatizados na consecução dos objetivos desta investigação, foi feita, no **capítulo quatro,** uma análise de aspectos da Informática na Educação, abrangendo o processo de formação de professores nesse contexto e um estudo detalhado sobre os ambientes de geometria dinâmica (VALENTE, 1993, 1997; PAPERT, 1988; GARCIA, 1999; PONTE, OLIVEIRA & VARANDAS, 2003; BELFORT, 2001; HOYLES & JONES, 1998; LABORDE & CAPPONI, 1994; HANNA, 2000; ALVES, 2004).

O **capítulo cinco** tratou do problema investigado: as questões norteadoras, a metodologia, as hipóteses, a concepção das atividades da seqüência acompanhadas da devida análise *a priori.*

No **capítulo seis** foram descritos o desenrolar e a análise da intervenção nos seus dois estudos de campo. Foram também relatadas as aplicações realizadas pelos professores com seus alunos.

No **capítulo sete** foram apresentadas conclusões, subsídios para novos trabalhos de formação de professores, com ou sem o uso de ambientes de geometria dinâmica e, também, foram abordados possíveis desdobramentos para o trabalho até então realizado.

Fazem parte, ainda, do corpo dessa dissertação, as **referências bibliográficas** que serviram como base para o desenvolvimento deste trabalho, bem como **anexos** e **apêndices** utilizados.

Capítulo 2. Demonstrações Matemáticas

"... melhor do que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do 'espaço intelectual', já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido."

D. Weeler

A busca da verdade é uma característica fundamental de todo trabalho científico. Nas ciências naturais, a verdade é estabelecida através de experimentações, enquanto nas ciências matemáticas necessita passar por um processo de prova formal para ser reconhecida como tal.

A arquitetura das teorias matemáticas é estabelecida através de conceitos primitivos e conceitos derivados, axiomas e teoremas. As propriedades são derivadas e os teoremas são demonstrados, seguindo-se as regras da lógica matemática.

Segundo Schoenfield (1967), a lógica é o estudo do raciocínio e a lógica matemática é o estudo do tipo de raciocínio feito pelos matemáticos. É necessário, então, examinarmos os métodos do matemático para que possamos descobrir a abordagem própria à lógica matemática, visto que a determinação de suas verdades é feita através do uso da demonstração.

Falar em matemática, especialmente em Geometria, é falar de demonstrações. Muitos progressos da Matemática tiveram de ser precedidos por progressos paralelos nos métodos de demonstração. É natural, portanto, que se considere de suma importância, no processo educativo, a convivência e a prática de provas pelos professores e estudantes, de um lado, vista como elemento fundamental para entender a prática científica da Matemática e, de outro, como um meio de desenvolver o raciocínio lógico do aluno e prepará-lo para dominar o processo dedutivo. Se essas justificativas não bastassem para a inclusão de provas, pode-se, ainda, mencionar a habilidade em defender uma idéia ou ponto de vista através de argumentações consistentes e pertinentes que podem ser desenvolvidas através dessa prática e que é um requisito importante para a vida em comunidade (NASSER & TINOCO, 2003). Assim, na presente investigação, a construção do conhecimento geométrico e as atividades de resolução de problemas são propostas através da mediação das demonstrações.

Neste capítulo foi feita uma abordagem histórico-epistemológica das demonstrações, levando em conta a sua significação para o aluno e para o ensino. Tal abordagem trata de um estudo sobre a origem e a evolução da noção de prova ao longo da história, o *status* dos objetos matemáticos, propriedades e relações envolvidas neste ensino. São variáveis relacionadas à constituição do saber e à sua apreensão pelos alunos e que são fundamentadas no estudo histórico e crítico dos princípios, das hipóteses e dos resultados obtidos visando a determinar sua fundamentação lógica. Uma análise epistemológica pode ajudar muito o professor e o pesquisador diante de suas próprias representações sobre o "saber a ensinar" (ARTIGUE, 1990).

2.1 As Demonstrações: uma Abordagem Histórico-Epistemológica

As ciências empíricas e as ciências formais apresentam diferentes critérios para estabelecer a verdade ou a falsidade de uma proposição. Nas formais, os critérios estão dentro do método axiomático-dedutivo, apoiados na idéia das demonstrações. Por muitos milênios, a Matemática se desenvolveu sem conhecer ou usar esse método.

Segundo Boyer (1998), é arriscado falar sobre a origem da Matemática (aritmética ou geométrica), pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. As informações dessa época dependem de interpretações baseadas nos poucos artefatos que daí restaram. Mas é bem provável que sua origem se perca nas névoas da antiguidade pré-histórica. Nos desenhos e figuras encontradas no homem neolítico (potes, tecidos, cestas) encontram-se exemplos de congruências e simetrias da geometria elementar, sugerindo preocupação com relações espaciais que abrem caminho para a Geometria.

Babilônios e egípcios baseavam seus resultados num processo empírico de concordância com a realidade levando em conta os fins a que se destinavam (critério de confiabilidade das regras e procedimentos). O conhecimento era produto da evidência física, de tentativa e erro, da analogia ou do *insight* dos matemáticos. Ambas as civilizações já tinham uma álgebra e uma geometria bastante desenvolvidas para a época, mas cada problema era resolvido em termos de casos particulares e sua solução era uma espécie de receita prática, que não especificava nem a sua fórmula geral (se houvesse) nem o modo como a solução tinha sido obtida. Dessa forma, mantiveram-se longe de desenvolver uma ciência organizada. Não há frases explícitas nesse período que indiquem ser percebida a necessidade de provas ou de haver uma preocupação com princípios lógicos por parte desses povos. Isso leva a um juízo que apesar da sua grande contribuição e do alto nível evidente de habilidade técnica, essas civilizações não tinham uma verdadeira Matemática.

Os resultados obtidos por egípcios e babilônios foram assimilados pelos gregos que tiveram o mérito de contribuir para o estabelecimento da Matemática da forma como a entendemos hoje: como um sistema lógico-dedutivo, com valor intrínseco, independente de aplicações práticas ou de fenômenos naturais.

A elite grega voltava-se para a busca do destino do homem e seu lugar no universo, problemas práticos eram de menor importância e tarefa relegada aos escravos. Dentro desse quadro, a Matemática desvinculou-se de seu caráter prático que havia assumido entre egípcios e babilônios para assumir importância capital como a mais alta forma de raciocínio filosófico. Desse modo não é surpresa que o método axiomático-dedutivo tenha surgido nas diversas tentativas gregas de resolver problemas relacionados com processos infinitos, movimentos e continuidade.

A busca da perfeição levou os matemáticos gregos a exigir grande rigor nas demonstrações alicerçadas no raciocínio lógico-dedutivo e no método axiomático. Este rigor aliado às dificuldades com que se depararam ao estudar os problemas relativos a processos infinitos, sobretudo àqueles relacionados aos números irracionais, os levou a rejeitar todos os conceitos que não podiam ser rigorosamente provados e, desse modo, a se desviarem da álgebra e a se encaminharem em direção à Geometria.

Provavelmente a Geometria teve sua origem nos trabalhos de agrimensura no antigo Egito. Era, então, considerada uma ciência empírica, ou seja, era uma coleção de regras práticas para obter resultados aproximados de áreas, perímetros. Tal procedimento trazia, em certos momentos, alguns problemas. Se por um lado, os geômetras acertavam nos resultados corretos, como no caso do cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada, por outro lado, erravam de uma forma grosseira, como na área de um quadrilátero, calculada como se fosse um retângulo.

É, sem dúvida, com os geômetras gregos, começando com Tales de Mileto (escola jônica) e seguido por Pitágoras (escola pitagórica), que a Geometria é estabelecida como teoria dedutiva e na história desse desenvolvimento, destacam-se esses e outros nomes.

Tales de Mileto (624-548 a.C.) é considerado o primeiro matemático da história por ter formulado, explicitamente, pela primeira vez, propriedades das figuras como afirmações gerais. É atribuída a ele a autoria dos quatro primeiros teoremas: *Um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto; os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes; os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais; se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.* O que existe a respeito de atribuições a Tales e Pitágoras é baseado, principalmente, em tradições e pouco em documentos. Consistentes, porém, são as informações obtidas sobre eles numa obra de

Proclus[2] (410-485 d.C.) em que o referido autor tece comentários sobre o primeiro livro de "Os Elementos de Euclides".

Pitágoras de Samos (580-500 a.C.) e seus seguidores são considerados os criadores da Matemática Pura por terem se baseado apenas no encadeamento de raciocínios para estabelecer propriedades geométricas e conseqüências dedutivas destas. Dessa forma, a escola pitagórica deu um grande salto à frente no que se refere à dedução Matemática, mesmo que sem nenhuma base axiomática para tal. São atribuídas a essa escola: a construção dos sólidos regulares; a teoria dos proporcionais, a teoria dos números poligonais; a divisão de um segmento em média e extrema razão, hoje conhecida como secção áurea de um segmento; a construção de figuras cósmicas.

Por meio de configuração de pontos ou unidades sem extensão, eles associavam números com extensão geométrica o que os levou à aritmética celeste. Postularam o primeiro sistema astronômico não geocêntrico, onde a Terra se movimentava em torno de um fogo central. Esse postulado dominou o pensamento dos astrônomos por mais de 2000 anos. Copérnico se reportava a ele em seus estudos.

Hipaso de Metaponto (IV a.C.) é tido como um dos membros da escola pitagórica que teria sido expulso da mesma. A causa da ruptura é controvertida. Um dos motivos apontados para isso, seria o da descoberta por ele da existência das grandezas incomensuráveis e, assim, dos números irracionais. Hipaso teve, pois, o mérito de contradizer uma das afirmações básicas da escola pitagórica, de que todos os fenômenos do Universo poderiam ser explicados em termos de números inteiros e de suas razões. Era a descoberta de que na própria Geometria, os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas, como comparar a diagonal de um quadrado com o seu lado. Segundo

---

[2] Proclus foi um filósofo neo-platônico autor da obra "Comentário sobre o primeiro livro de Os Elementos de Euclides" baseada em história da Geometria grega escrita por Eudemos de Rodes (II a. C.)

Aristóteles (IV a.C.), Hipaso usou em sua argumentação para provar a existência dessas grandezas, uma espécie de demonstração por absurdo.

Aristóteles, discípulo de Platão e mestre de Alexandre, o Grande, era filósofo e biólogo, mas acompanhava completamente as atividades matemáticas de sua época. Fundou a lógica analisando o papel das definições e hipóteses na Matemática. Apresentou, também pelo método da demonstração por absurdo, a demonstração de que a diagonal e o lado do quadrado são segmentos incomensuráveis, baseando-se na distinção entre pares e ímpares. Essa demonstração é basicamente a que freqüentemente se apresenta atualmente para provar que um número é irracional. Esses fatos mostram que, na época, já ocorria a utilização de encadeamento de propriedades articuladas mediante raciocínios lógicos para demonstrações e desenvolvimento da Matemática. Faltava apenas uma estruturação preliminar composta de noções básicas, de postulados e de definições.

Euclides de Alexandria, (300 a.C.), em sua obra *Elementos*, dá o primeiro grande testemunho do poder do método dedutivo da Matemática, dando forma sistemática ao saber geométrico. Nela enuncia vinte e três definições, cinco postulados e algumas noções comuns ou axiomas. Esses são os objetos iniciais de seu discurso que não podem ser considerados entidades primitivas, pois foram todos definidos com o objetivo de garantir uma correspondência com a realidade do leitor. Euclides os escolhia de tal modo que ninguém pudesse levantar dúvidas sobre a sua veracidade: eram auto-evidentes, portanto, isentos de demonstração. Suas axiomáticas eram assim calcadas na evidência e na experiência, daí serem conhecidas por “axiomáticas materiais”. A partir desses conceitos iniciais, desenvolveu as deduções sucessivas (proposições ou teoremas) que constituem o saber geométrico. Em sua obra, demonstrou 465 proposições (REALLE & ANTISSERI**,** 1991)**.**

Os Elementos é a mais renomada obra na história da Matemática. Não é, como muitos pensam, um compêndio de todo conhecimento geométrico, mas um texto que cobre a matemática elementar, expondo em ordem lógica seus assuntos básicos: Aritmética, Geometria e Álgebra. Compreende treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes são sobre teoria dos números, o décimo sobre os incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço. Representa o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tratado da matemática elementar e dois mil anos deveriam se passar antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa para o assunto. Apesar das falhas e algumas contradições encontradas em seu texto por severos trabalhos de análise crítica, sua contribuição foi valiosíssima. Basta dizer que muito do que se faz até hoje, em Geometria, tem como base os princípios euclidianos. Os *Elementos*, por cerca de dois milênios, foi o modelo da matemática bem feita.

Arquimedes de Siracusa (287, 212 a C.) é considerado o maior matemático de toda Antigüidade. Durante o primeiro século da idade Helenística, três matemáticos se destacaram: Euclides, Arquimedes e Apolônio. É por causa das obras deles que o período de cerca de 300 a 200 a.C. recebeu o nome de "Idade Áurea". Em sua obra "Sobre o Equilíbrio dos Planos", embora não tratasse de assuntos originais, a sua forma de desenvolvimento o era, assemelhando-se à geometria de Euclides. De um conjunto de postulados simples, ele extraía algumas conclusões, estabelecendo relação estreita entre a Matemática e a física mecânica. Outra obra sua "Sobre Corpos Flutuantes", começa com um simples postulado sobre a natureza da pressão dos fluidos, deduz uma série de proposições, obtém resultados muito profundos tal como o bem conhecido princípio de Arquimedes. "Sobre as Medidas do Círculo", "Sobre a Esfera e o Cilindro", "O Método" são outros tratados de Arquimedes.

Seguiram-se alguns séculos em que a Matemática aplicada esteve em posição proeminente. Registram-se progressos em: Astronomia e Geografia, Óptica e Mecânica, mas nenhum desenvolvimento significativo na Matemática, embora nesse período tenha se desenvolvido a trigonometria. Esta, porém, pode ser vista mais como uma aplicação à mensuração da geometria elementar que satisfazia às necessidades da astronomia. Diofanto de Alexandria, (III d.C.), é considerado o pai da Álgebra. Sua principal obra conhecida é *Arithmética,* onde não são encontrados definições nem postulados ou proposições e, portanto, também demonstrações. Não é o tipo de material que forma a base da álgebra elementar moderna, nem se assemelha à álgebra geométrica de Euclides. É uma coleção de problemas de aplicação de álgebra, não um texto de Álgebra. Apesar disso, é considerada uma das grandes realizações da matemática grega e significou um caráter inovador em conteúdo e abordagem, contrapondo-se ao rigor estabelecido, corrente e imposto pelo engessamento do método euclidiano. Segundo Boyer (1998), era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidade matemática e de engenho o que fez deste livro num dos grandes clássicos da época. *Arithmetica* era composta originalmente por 13 livros dos quais somente 6 se preservaram.

Papus de Alexandria (320) compôs uma obra com o título “Coleção”. Foi uma obra muito importante por fornecer valioso registro histórico de capítulos da matemática grega, como os treze poliedros semi-regulares de Arquimedes, novas provas e lemas suplementares para proposições das obras de Euclides, Arquimedes e outros. O tratado contém descobertas e generalizações não encontradas em obra anterior nenhuma.

Proclus de Alexandria (410-485) era mais filósofo do que matemático. Suas contribuições, no entanto, são grandes para a história mais antiga da geometria grega, pois na redação de sua obra “Comentário sobre o Livro 1 de Euclides”, com certeza tinha a mão um exemplar da história da geometria de Eudemus, agora perdida. Devemos a Proclus, muitas das informações de que dispomos hoje sobre a história da geometria desde antes de Euclides até Proclus.

Na Idade Média[3] ocorre um declínio cultural no Ocidente. Nessa época, o mundo árabe e o hindu emergem com suas contribuições para a Matemática, em especial para álgebra

[3] O início da Idade Média é em 476, com a queda do império romano, e o final em 1453, com a tomada de Constantinopla pelos turcos.

com o estabelecimento de um sistema de numeração posicional e o uso dos algarismos hindu-arábicos onde o zero passa a ser usado para representar ordens vazias. Nesta época, a Geometria foi abandonada e as demonstrações não são priorizadas.

Do Renascimento até o século XIX são encontrados, de um lado, uma tentativa de resgate de Euclides no Ocidente e, de outro lado, um surto de desenvolvimento da Matemática em vários campos, mas de forma não lógica e sem demonstrações. As ciências, nesse período, passaram por grandes mudanças e seu desenvolvimento foi favorecido pelo surgimento de novos instrumentos técnicos, como o telescópio e o microscópio. Importantes avanços científicos, em vários campos, podem ser registrados: os trabalhos de Copérnico, Galileu e Kepler na Astronomia; os de Fermat e Descartes na Matemática; os de Newton na Física. Muito importante, nesse período, também foi o fato de serem estabelecidas as bases do método científico atual. A partir dos estudos de Descartes e de Locke, o empirismo e a sistematização passaram a ser considerados os pilares da ciência moderna. Apesar da deficiência lógica aí ocorrida, as contribuições das formulações matemáticas levaram a um grande desenvolvimento com Descartes (1596/1650) na Geometria Analítica e Newton (1643/1727) no Cálculo. Na verdade, o que faltava era uma estruturação mais sólida e abrangente na fundamentação matemática o que só seria alcançado na metade do século XIX.

Segundo Boyer (1998), no século XVIII, são encontrados matemáticos franceses que não só contribuíram com novos conhecimentos, mas foram, em grande medida, responsáveis pelas linhas principais do desenvolvimento da Matemática no século XIX. Nesses termos, citam-se os nomes de seis grandes matemáticos franceses: Lagrande (1736-1813), Condorcet (1743-1794), Monge (1746-1818), Laplace (1749-1827), Legendre (1752-1833) e Carnot (1753-1823). Através dos esforços de Monge e Carnot, por exemplo, houve alguns sintomas de reavivamento da Geometria pura durante o período da revolução francesa, mas a redescoberta quase explosiva da Geometria como um ramo vivo da Matemática veio principalmente no início do século XIX.

Segundo Domingues (2002), no início do século XIX, as novas teorias matemáticas emergentes, tateantes a procura de seus alicerces, se diferenciavam da geometria euclidiana com seu alto grau de organização lógica. A exclusividade dessa geometria na descrição do espaço era, no entanto, questionada. Cita-se, nessa linha, o filósofo David Hume (1711/1776) que defendia a idéia de que a natureza não se ajusta a “modelos fixos e leis necessárias”. O influente filósofo Immanuel Kant (1711/1776), no entanto, tinha ponto de vista predominante e, para ele, as propriedades do espaço físico eram necessariamente euclidianas. Ao defender o caráter *a priori* do conhecimento geométrico, argumentava que uma propriedade como “a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos”, por tratar-se de um conhecimento universal, não comporta exceção alguma e, portanto, não está sujeita a alterações nem a um reforço com novas coletas de dados.

O século XIX foi um século revolucionário na história da Matemática. Seu crescimento excede a soma total da produtividade em todas as épocas precedentes. O surgimento de conceitos como das geometrias não-euclidianas, espaços n-dimensionais, álgebras não comutativas, processos infinitos e estruturas não quantitativas, contribuiu para uma transformação radical que mudou não só a aparência como as definições da matemática.

Um dos maiores matemáticos dessa época foi o alemão Gauss (1777-1855). Entre outros feitos, ele chegou a conclusão de serem vãos os esforços para provar o postulado das paralelas e que geometrias diferentes da de Euclides eram possíveis. Em 1829, Lovachewsky ao publicar o artigo “Sobre os Princípios da Geometria” marcou o nascimento oficial da geometria não-euclidiana. Foi o primeiro a publicar uma Geometria especificamente baseada numa hipótese em conflito direto com o quinto postulado das paralelas de Euclides: “Por um ponto C, fora de uma reta AB, pode ser traçada mais de uma reta no plano que não encontram AB".

Riemann (1826-1866) apresentou em Habilitationschrift (1854) a tese sob o título: "Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da Geometria" onde propunha uma visão global da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões, em qualquer tipo de espaço. Sua geometria era não euclidiana num sentido muito mais geral do que a de Lobachevsky e foi a sua sugestão de espaços métricos com curvatura e não o caso específico da Geometria sobre a esfera que mais tarde tornou possível a teoria geral da relatividade.

A idade áurea da Geometria moderna que começara com a escola francesa, na figura dos seis pesquisadores anteriormente mencionados, atingiu seu zênite com a pesquisa e inspiração de Gausss, Riemann e Klein (século XIX).

Vimos que até o século XIX, as demonstrações, de acordo com Euclides, tiveram um caráter material, com recurso à evidência intuitiva. Era um convencimento racional, mas também psicológico, pois se buscava um convencimento para si e para os outros. Entretanto, o avanço no estudo de determinadas teorias, como o cálculo, levou a questões que, apesar de terem bases lógicas, transpunham o limiar do concreto. Como entender, por exemplo, que uma curva pudesse recobrir uma parte do plano ou que o todo pudesse não ser maior que uma parte? Como demonstrá-las, então, dentro da concepção de demonstração vigente? A intuição e/ou os raciocínios heurísticos geométricos já não eram suficientes para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais (DOMINGUES, 2002).

Surgiram, frente a essa realidade, correntes reformuladoras das idéias de demonstração. Uma contribuição importante, nesse sentido, foi a de G. Frege (1848/1925) que deu forma ao conceito de demonstração formal. Em sua proposta, temos uma seqüência de proposições nas quais:

(i) a primeira é um axioma;

(ii) as seguintes são axiomas ou dedutíveis diretamente das que as precedem;

(iii) a última é o que se pretendia demonstrar.

A proposta de Frege significou um grande avanço, mas ainda havia necessidade de um aperfeiçoamento maior.

No final do século XIX, já era uma realidade a axiomatização de diversos sistemas matemáticos (grupo, corpo, espaço vetorial), paralelamente a uma grande liberdade matemática surgida com a criação das geometrias não euclidianas (1829) e das álgebras não convencionais (1840). Na tentativa de uma nova axiomatização para a geometria euclidiana, D. Hilbert (1852/1943) em sua obra *Fundamentos da Geometria* (1899), apresenta uma idéia onde mantém os três conceitos primitivos: o ponto, a reta e o plano e define as relações mútuas entre esses objetos, única e exclusivamente, por meio de axiomas. Afasta-se, de certa forma, da tradição aristotélica grega na qual os axiomas relacionavam-se a conceitos já conhecidos intuitivamente. O sistema de Hilbert encontra-se dividido em cinco grupos de axiomas: incidência, vizinhança, congruência, continuidade e paralelismo. Em seguida à obra pioneira de Hilbert, novos axiomas foram propostos por outros pesquisadores e o caráter puramente dedutivo e formal da geometria, como o dos outros ramos da matemática, ficou estabelecido desde o começo do século vinte.

Seguindo nessa tentativa de axiomatizar os fundamentos da matemática, surge a teoria dos conjuntos. Seu começo data de 1874, com G. Cantor (1845/1918). Sua base teórica, no entanto, não era consistente, gerando paradoxos. Por isso, a teoria perdeu o crédito nos meios matemáticos. Considerando que uma axiomatização da teoria dos conjuntos fosse o caminho para resolver e aperfeiçoar o problema de fundamentação da matemática, investiram nesse propósito, Zermelo (1871/1953) em 1908, seguido por Fraenkel (1891/1965) que aprimorou o sistema daquele, em 1922. O sistema Z-F permitiu a construção dos números naturais e, portanto, de toda a análise clássica, embora ainda não se tenha uma demonstração para isso. Segundo Domingues (2002), a visão formalista da matemática tendo o sistema Z-F como uma de suas vigas mestras prevaleceu no século XX e, por conta dessa generalização e abstração, foi grande o desenvolvimento da matemática, embora, às vezes, sem o sentido prático desejado. A Matemática, como na época grega, passa a ter um valor intrínseco independente de suas aplicações práticas.

Na verdade, por mais apurados que sejam os métodos matemáticos, nenhum deles atenderá perfeitamente a qualquer questão proposta. Cada um apresentará vantagens e desvantagens, e novos surgirão na tentativa de contornar as falhas do anterior. O importante é decidir pelo mais conveniente e adequado na resolução do problema a ser tratado, sendo esta questão especialmente importante quando se trata da formação de professores.

2.2 Conceitos de Demonstração

É fato que um dos maiores passos da lógica, nos últimos 200 anos, foi a explicação precisa do conceito de demonstrações. Segundo Bicudo (2002), quando se trata de discorrer sobre a demonstração matemática, talvez seja mais sensato para o matemático adotar a posição de Santo Agostinho[4] em relação ao tempo: “Demonstração matemática, se não me perguntam o que é, eu sei, se me perguntam, e eu queira explicar, não sei”.

De acordo com a lógica, temos que um sistema formal é caracterizado por três aspectos: sua linguagem, com seus símbolos, expressões e fórmulas; seus axiomas, que são formas específicas de fórmulas de linguagem; suas regras de inferência, que nos capacite a concluir teoremas a partir dos axiomas.

Dado um sistema formal F, em que todas as regras sejam finitas, uma demonstração em F é uma seqüência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma ou uma

[4] Quid est ergo tempus? Si nemo ex me quaerat, scio; si quaerenti explicare velim, nescio (...) [O que é, portanto, o tempo? Caso ninguém me pergunte, sei; se quero explicar ao demandante, não sei].

conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na seqüência dada. Se A for a última fórmula em uma demonstração P, diremos que P é uma demonstração de A. Uma fórmula A de F será um teorema de F se existir uma demonstração de A. Para fins de tratamento matemático, as demonstrações, então, nada mais são que cadeias finitas logicamente articuladas de formas declarativas no contexto de um sistema formal determinado com vocabulário e regras sintáticas conhecidas (BICUDO, 2002).

De acordo com Balacheff (1988), é necessário se fazer uma distinção entre explicação, prova e demonstração. Assim, explicação é um discurso que visa tornar inteligível a verdade de uma proposição apresentada e defendida por seu proponente que pode ser discutida, recusada ou aceita. Prova é uma explicação aceita por uma dada comunidade numa certa ocasião. Demonstração é a denominação dada a uma prova aceita pela comunidade matemática e, como tal, se fundamenta em explicações apresentadas numa seqüência de enunciados organizados conforme regras determinadas. A veracidade de uma proposição é deduzida a partir daquelas que a precederam, por força de uma regra de dedução. A demonstração é, portanto, resultado de um processo particular de prova que vem validar uma afirmação.

Balacheff (1988) considera, ainda, que o desenvolvimento de uma prova ocorre através da passagem entre as cinco etapas de desenvolvimento abaixo:

a) Empirismo ingênuo, em que vários casos são verificados e se conclui pela sua validade para todos, generalizando-se a proposta. É um processo primário e insuficiente, pois não permite analisar todos os casos possíveis, mas tem seu valor como uma primeira forma do processo de generalização.

b) Experimento crucial, através do qual escolhe-se um exemplo com certas características com a pretensão de se verificar sua validade. Caso seja confirmada, conclui-se pela generalização da proposta.

c) Exemplo genérico, quando se escolhe um objeto representativo da classe, isto é, com propriedades características e estrutura representativa desta classe e, a partir deste exemplo, tornam-se explícitas as razões da verdade de uma proposição por meio das operações ou transformações que representem a classe.

d) Experimento de pensamento, diz respeito à etapa que suscita a ação pela superação de qualquer caso específico e pela sua interiorização. Não envolve situações particulares. As operações e relações fundamentais da provas são indicadas não propriamente por exemplos, mas pelo resultado de seu uso. É um experimento que envolve construções cognitivas e lingüísticas complexas.

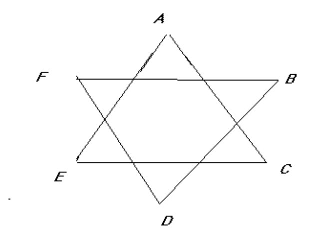
e) Cálculos nas afirmações, quando envolve construções intelectuais mais ou menos formalizadas aparecendo como resultados de cálculos inferenciais, de definições ou da explicação de propriedades características.

De acordo com esse caráter de desenvolvimento da prova, as provas matemáticas podem ser divididas em duas categorias: pragmáticas e conceituais. As pragmáticas apóiam-se em recursos de ação, como o uso de desenhos (recurso identificado como mostração) e envolvem habilidades de observação de figuras estando os conhecimentos necessários implícitos no pensamento de quem prova, ou seja, baseiam-se nos teoremas em ação (VERGNAUD, 1990). As provas conceituais, por sua vez, não envolvem ação e sim formulação de propriedades e relações entre as mesmas. Caracterizam-se pelo seu caráter genérico envolvendo a linguagem como uma ferramenta para deduções lógicas. Nessas condições, as três primeiras etapas de desenvolvimento citadas anteriormente pertencem à categoria de provas pragmáticas, enquanto as demais à categoria de provas conceituais. Balacheff acrescenta que a passagem das provas pragmáticas para as conceituais implica em saltos qualitativos no pensamento dos estudantes, concepção esta corroborada por outros pesquisadores no assunto.

De acordo com Nasser & Tinoco (2003), para os acadêmicos matemáticos, a prova formal ou demonstração é um desenvolvimento formal que parte de pressupostos (hipóteses) e, através do encadeamento de raciocínio e de resultados já conhecidos ou de teoremas, chega ao resultado que se quer mostrar como verdadeiro (tese). O que se observa, no entanto, é que a maioria dos alunos não domina essa maneira de demonstrar, nem num curso universitário, nem quando se formam e nem mesmo depois de alguns anos de exercício de magistério. A prova pode, segundo os mesmos autores, ser considerada de outras maneiras que não a formal, como por exemplo: a) a prova ingênua defendida por pesquisadores como Gill Hanna (1990), significa uma argumentação aceitável dentro de diferentes níveis de rigor, de acordo com a idade e o ano de escolaridade do aluno que a apresenta; b) a justificativa pragmática, na qual o aluno verifica a veracidade de uma afirmativa com base em alguns casos particulares; c) a justificativa gráfica, através da qual se mostra numa figura porque o resultado encontrado e proposto é verdadeiro.

Exemplo de uma justificativa pragmática usada por um aluno de 8ª série (REZENDE & NASSER, 1994).

Determine a soma dos ângulos da estrela (Figura 2.1):



Cada ângulo mede 60°, logo:

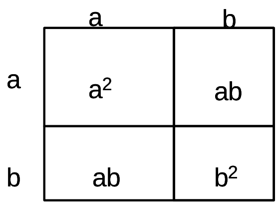
A + B + C + D + E + F = 360°.

Nota do pesquisador: “Observa-se que 60° deve ser conseqüência de uma média de valores, em função da soma dos três ângulos do triângulo ser 180°”.

Figura 2.1. Soma dos ângulos da estrela

Justificativa gráfica apresentada, por aluno de 7ª série, que ainda não domina os produtos notáveis (REZENDE & NASSER, 1994).

Explique porque $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Figura 2.2)



Nota do pesquisador: “Observa-se que o aluno se baseou na correspondência da área do quadrado de lado a + b com a área total obtida a partir das partes componentes do quadrado”.

Figura 2.2. Representação gráfica de produto notável

Neste trabalho, são consideradas as definições dadas por Balacheff (1988) às provas, bem como a sua classificação que divide a prova em duas categorias: pragmáticas e conceituais. Concorda-se com a idéia de diversos autores que a demonstração não deve ser tratada unicamente de maneira formal, entendendo-se que tal radicalismo traz a grande desvantagem de limitar o campo de sua utilização a alunos de séries mais avançadas[5] do Ensino Fundamental. O professor deve estimular e aceitar justificativas, por parte de seus alunos, desenvolvidas de maneira mais informal e espontânea, naturalmente observando certos critérios mínimos de aceitação. A utilização da forma pragmática não implica no abandono da forma teórica, mas pelo contrário pode se constituir num caminho que leve até ela de forma compreensiva e, portanto, mais significativa.

2.3. Dimensões da Demonstração

Segundo Silva (2002), as demonstrações podem ser vistas sob três dimensões: a lógica epistemológica, a retórica e a heurística. O lógico epistemológico é o aspecto das demonstrações que as revelam como objetos lógicos ideais, árvores ou seqüências ordenadas lógicas. O retórico é aquele através do qual, as demonstrações aparecem como portadoras de forças coercitivas de aquiescência às teses demonstradas. No momento em que uma demonstração incita o sujeito a novas buscas pelo levantar de incertezas ou de dúvidas acerca da proposição demonstrada, dizemos que ela está assumindo seu aspecto heurístico.

[5] É prevista a iniciação das demonstrações a partir da 7ª série do Ensino Fundamental (PCNs).

A princípio, podemos pensar que esses aspectos não podem coexistir, principalmente o heurístico já que ele seria decorrente de uma imperfeição lógica da prova. As demonstrações como objeto matemático foram tratadas primeiramente por Hilbert (1899). Até então, como sabemos, a matemática era vista como um corpo de teorias de entidades de algum modo “dadas”. Após Hilbert, ela se reduz a uma seqüência finita de proposições logicamente encadeadas no contexto de um sistema formal determinado. As dimensões retórica e heurística, elementos subjetivos, parecem se perder nessa concepção, cabendo mais a um tópico de filosofia, psicologia ou história da Matemática que à própria Matemática. O que a teoria matemática da demonstração estuda, na verdade, são apenas cadeias em determinados espaços lógicos.

Uma das condições das demonstrações formais, a finitude, mantém nesse caráter formal um pequeno elo com a presença do sujeito que se imagina deve ser convencido por elas. A finitude, considerada um caráter essencial das demonstrações, refere-se ao fato de que estas devem ter um número finito de passos. Nossa faculdade de compreensão é necessariamente finita, o que exige a reunião em único ato cognitivo de todos os passos de uma demonstração. E, a conseqüência disso é que as demonstrações devem ter um número finito de passos.

Se quisermos que demonstrações convençam, é necessário que, além da correção lógica, elas estejam elaboradas de forma a atenderem às limitações cognitivas humanas. E, como vimos, apesar de seu caráter eminentemente lógico-epistemológico na concepção da matemática pura, esses aspectos estão resguardados, o que nos permite sugerir que o caráter retórico convive com o lógico-epistemológico. Assim, podemos sugerir que o caráter lógico e o retórico podem coexistir, mas é difícil pensarmos em conciliar com eles o heurístico, pois este, basicamente, depende de uma imperfeição lógica da demonstração. É natural que nada encontremos que mostre o seu tratamento explícito na concepção das demonstrações.

Apesar de tudo, esses três aspectos podem ser conciliados, se conseguirmos recuperar a função heurística das demonstrações logicamente impecáveis.

Segundo Silva (2002), uma demonstração correta do ponto de vista lógico pode se tornar um desafio epistemológico se induzir o sujeito a uma reação de insubmissão, a uma revolta da imaginação subjetiva a buscar variantes interessantes das noções envolvidas na demonstração. Assim, além de estabelecer a veracidade de uma asserção, uma demonstração pode ser indutora de progresso se for simultaneamente vista como um desafio, um edifício lógico a ser demolido pela variação interessante do significado dos termos ou conceitos nela envolvidos. Isso pode ser feito pela generalização.

Conclui-se que uma demonstração matematicamente perfeita deveria ser, então, logicamente correta, compreensível a um agente racional com limitações cognitivas humanas e, ainda assim, heuristicamente estimulante.

2.4 Funções da Demonstração

O desinteresse do aluno pelas demonstrações pode também ser considerado como decorrente da falta de compreensão do seu significado e do seu papel na Matemática. Sob esse ponto de vista, Hanna (2000) discute o papel da prova relatando que na Matemática este papel encontra-se em si mesmo, pois se trata de uma forma de resolução de problemas e de justificativa dos resultados através de seqüências de sentenças em que cada uma das afirmações deriva da anterior. Assim, a necessidade de resolver um problema é que justifica a demonstração, de forma que numa situação de aprendizagem o aluno seja levado a aprendê-la através da prática constante de sua elaboração. No ensino, a prova deve promover o entendimento matemático ao aluno, cabendo ao educador encontrar formas que a direcionem para este objetivo.

Segundo De Villiers (2001), uma questão muito pertinente pode ser colocada: que função tem a demonstração na própria Matemática que possa ser utilizada na sala de aula de modo a torná-la mais significativa para os alunos? Para discutir sobre essa questão, é necessário refletir sobre as diferentes funções das demonstrações, sendo algumas delas descritas a seguir, de acordo com a concepção do referido autor.

(i) Verificação: é a função atingida quando a demonstração representa um argumento necessário para validar uma afirmação. Quando precisamos nos convencer e convencer a alguém da veracidade de um resultado, a demonstração é um argumento suficiente para tal. A verificação é vista como a função principal da demonstração. A demonstração não é, no entanto, a única autoridade para o estabelecimento de uma conjectura. Muitas vezes, a convicção precede e motiva a demonstração. Por outro lado, os matemáticos, normalmente, quando examinam a validade de uma nova conjectura, não examinam apenas as demonstrações, mas confiam na autoridade reconhecida do autor; na verificação da mesma em certos casos especiais; na razoabilidade dos resultados; na busca de contra-exemplos por meio de testes que detectem erros ou contradições.

De Villier (2001) refere-se, ainda, à existência da dimensão lógica e da psicológica na obtenção da certeza. A dimensão lógica surge quando exigimos alguma forma de demonstração dedutiva. A psicológica, quando precisamos de alguma experimentação exploratória ou compreensão intuitiva do que estamos tratando. Assim, devido às limitações reconhecidas da intuição e dos métodos empíricos, a demonstração é um meio indispensável de verificação, mas não o único e absoluto.

(ii) Explicação: é a função atingida quando a prova fornece esclarecimentos quanto ao fato de uma proposição ser verdadeira. É aquela demonstração que é buscada para se compreender as razões de uma conjectura, não se restringindo a uma verificação. Há demonstrações que cumprem a função de validar, mas não trazem em seu escopo uma resposta ao porquê do fato. Para muitos matemáticos, esse aspecto tem mais importância que o da verificação e seria um critério para definir uma boa demonstração.

(iii) Descoberta de algo novo ou inesperado: é aquilo que pode ser atingido no decorrer de uma demonstração. Muitos teoremas foram descobertos por meio da intuição e de métodos empíricos, mas também é verdade que muitas descobertas emergiram por meio de processos puramente dedutivos. As geometrias não euclidianas, por exemplo, não poderiam ter sido encontradas pela intuição ou pela utilização de métodos empíricos. Através das demonstrações, pode-se, também, descobrir e inventar novos resultados.

(iv) Comunicação: tem o propósito de transmissão do conhecimento matemático. O valor de uma demonstração não está em si mesma e sim no seu papel, o qual inclui uma dimensão social quando age como veículo de informação, de discussão, de interação entre as pessoas. Essa função tem um aspecto muito importante no contexto social enquanto comunica e divulga o conhecimento matemático na sociedade envolvendo também uma negociação subjetiva dos significados dos conceitos em jogo e dos critérios relativos ao que é um argumento aceitável. Esse caráter de comunicação vai possibilitar o refinamento ou rejeição da proposta pela análise provocada nos leitores, identificando erros ou contradições.

(v) Desafio Intelectual: quando promove a realização pessoal e gratificante, resultantes da construção de uma demonstração. Para um matemático, a satisfação em realizar uma demonstração é análoga a de um atleta que vence uma competição ou a de um programador que consegue ver seu programa funcionar com êxito. Para essas pessoas, a demonstração pode se constituir num desafio, num objetivo disparador de energia intelectual e de engenho matemático.

Essas cinco funções, apresentadas por De Villiers, não são as únicas que podem ser percebidas numa demonstração e, tão pouco se pretende afirmar, que elas devam ocorrer isoladamente. Pelo contrário, muitas vezes, elas ocorrem simultaneamente e se complementam. O desconhecimento (ou o esquecimento) da riqueza de funcionalidades das demonstrações contribui para a discutida omissão do uso das demonstrações no processo ensino-aprendizagem da Geometria. É preciso, então, criar oportunidades em que o professor possa, além de desenvolver a habilidade na elaboração de demonstrações, estar se apossando e refletindo sobre conceitos teóricos a respeito. Nesse sentido, nossa investigação foi elaborada de maneira a permitir esses dois momentos.

2.5 As Concepções do Ensino Dedutivo no Processo Escolar

A questão do não uso das demonstrações no ensino-aprendizagem da Geometria, envolve os agentes diretamente ligados ao problema: aluno e professor, mas também se relaciona com as concepções de ensino do dedutivo no processo escolar.

Segundo Vianna (1988), a história da abordagem dedutiva, dentro dos últimos anos do ensino da Matemática, pode ser dividida em três etapas: antes do movimento da Matemática Moderna, o apogeu desta e a pós-Matemática Moderna. No Brasil, este movimento se reflete na educação a partir da década de 60. Antes do advento de tal movimento, o enfoque dedutivo era bem estabelecido nos livros e para os professores. As demonstrações eram apresentadas com certa relevância e, no antigo ginásio (3ª e 4ª séries) começava-se a enfatizar essa abordagem, principalmente, através da Geometria Dedutiva. A maioria dos livros didáticos trazia todas as demonstrações necessárias, relativas aos conteúdos apresentados. Entretanto, em suas considerações acerca de entrevistas realizadas com professores que lecionavam naquela ocasião, observou-se que havia uma certa insatisfação por parte de alguns desses professores. Uma das alegações deles é a de que os alunos eram obrigados a decorar as demonstrações sem sequer entenderem o seu significado. Assim, no meio de uma certa insatisfação, iniciou-se um processo de mudança no ensino da Matemática, com o advento da Matemática Moderna.

Dentre as transformações trazidas pelo movimento da Matemática Moderna, cita-se a maior ênfase dada aos: fundamentos, conjuntos, estruturas e morfismos. Destacou-se, nessa ocasião, o grupo Bourbaki (1939), de matemáticos franceses, que objetivavam apresentar os assuntos de Matemática de forma unificada, de acordo com o modelo estruturalista. Divulgava-se, na ocasião, a idéia de que a Matemática tornar-se-ia diferente da tradicional, mais fácil, mais divertida, e de que o indivíduo se tornaria mais racional e acompanharia melhor o desenvolvimento tecnológico. O entusiasmo inicial pelo movimento foi grande. Surgiram as Olimpíadas e as Feiras de Matemática. Em relação à Geometria, nessa fase, ocorreu um abandono à geometria euclidiana que passou a ser considerada algo do passado, buscando-se um novo método que não fosse o axiomático euclidiano. Priorizavam-se as transformações geométricas e a estrutura de espaço vetorial. A maioria dos livros passou a não apresentar demonstrações. Observavam-se livros sem conteúdo, realçando a apresentação de símbolos novos, de ilustrações coloridas, de problemas fáceis.

A Teoria dos Conjuntos como unificadora da Matemática não foi compreendida, sendo ensinada como um apêndice dentro do currículo. Demasiada ênfase era dada à Matemática Pura em detrimento à da Aplicada. A simbolização foi demasiadamente valorizada. O dedutivo que deveria ter um lugar especial pelo enfoque formalista dado à Matemática Moderna não aconteceu. Psicólogos, pedagogos e matemáticos criticavam a condução do dedutivo no ensino por este ser apresentado pronto ao aluno, pela passividade destes no processo, pelo rigor, pela grande exigência de abstração. Estas foram principais críticas encontradas. Observou-se, como conseqüência, que o ensino da Geometria passou a ser o terror dos professores. Estes relegaram-no a um segundo plano, perdidos no meio das polêmicas a respeito do método axiomático euclidiano, da validade das demonstrações e sem entender o que a Álgebra Linear tinha a ver com esse ensino.

A Matemática Moderna no Brasil tornou-se, então, desacreditada e contestada já nos meados dos anos 70. Novos rumos foram dados ao ensino da Matemática e, dentro destes, o ensino do dedutivo, considerado rigoroso e abstrato, continuou sendo desvalorizado. Os livros, de um modo geral, continuam não trazendo demonstrações e aboliram exercícios de caráter lógico ou para demonstrar. Em sala de aula, os professores deixam de apresentar ou de incentivar seus alunos a fazer quaisquer demonstrações sob o pretexto de que não dá nem tempo de ensinar Geometria e de que os alunos não estão preparados pra tal. Vianna (1988) sugere que, na verdade, quem de fato parece não compreender a Matemática Dedutiva é o próprio professor, em parte, pela própria deficiência de sua formação inicial, argumento ao qual se pode acrescentar, também, a falta de uma formação continuada. Nesse novo encaminhamento, o que mais chama atenção é que parece que se perdeu uma diretriz no ensino da Matemática.

Começa-se, porém, a sentir uma necessidade de voltar a incentivar o ensino de Geometria nos Ensinos Fundamental e Médio. Esta chamada vem embutida com a proposta de que haja no processo educacional a passagem concreto-abstrata do raciocínio, mas apesar disto, algumas vezes se estaciona no primeiro estágio, ao preferir tornar os raciocínios apenas plausíveis e convencer os alunos de forma indutiva. Veio reforçar essa necessidade, os resultados dos vestibulares de Matemática alertando sobre o despreparo dos alunos e a necessidade de se voltar a um bom ensino da geometria euclidiana para recuperar capacidades, como a do raciocínio lógico.

Segue uma fase de valorização do raciocínio em detrimento da memorização de fórmulas. Os vestibulares começaram a dar mais atenção às questões de Geometria e a algumas de caráter dedutivo, superando a fase exclusiva de múltipla escolha em suas questões. Podemos prever que o dedutivo vai reencontrar de forma transformada seu lugar no ensino, aproveitando as experiências anteriores e brotando com uma nova força para o ensino da Matemática, são afirmações de Vianna[6] (1988) em sua dissertação de Mestrado.

Nesse sentido, acrescentamos que os subsídios fornecidos pelos resultados de trabalhos de pesquisa desenvolvidos nesse âmbito constituem-se em contribuição significativa no momento em que apontam caminhos e soluções para o problema. É o que pretende essa investigação junto ao processo de formação continuada de professores.

Paralelamente a essa problemática, é reconhecido como um dos principais problemas no ensino-aprendizagem de provas em Matemática, a falta de motivação do aluno para tal atividade. Podemos atribuir a aversão do aluno e a do professor ao trabalho com demonstrações a diferentes causas: a dificuldade em compreender tal procedimento; a maneira como ele lhe é apresentado; a não percepção da importância das mesmas no contexto de aprendizagem da matemática; a comprovação intuitiva ou empírica que conseguem obter em alguns casos; a falta de um preparo básico para tal; a falta de maturidade para um desenvolvimento lógico dessa natureza.

Segundo De Villiers (2001), alguns dos argumentos citados inicialmente não se justificam. A falta de maturidade, por exemplo, é algo discutível, pois resultados de pesquisas são encontrados, contradizendo a Piaget, revelando que crianças muito novas são inteiramente capazes de fazer raciocínios lógicos em situações reais e com significado para elas (WASON & JOHNSON-LAIRD, 1972; WALLINGTON, 1974; HEWSON, 1977; DONALDSON, 1979). Por outro lado, tentativas de ensinar lógica a alunos não revelaram diferença significativa na sua capacidade de demonstração ou na atitude perante a demonstração (DEER, 1974; WALTER, 1972; MUELLER, 1975).

[6] Vianna faz um estudo sobre a problemática da utilização das demonstrações no ensino da Matemática em sua dissertação de Mestrado “O Papel do Raciocínio Dedutivo no Ensino da Matemática”, em 1988. Embora não seja um texto atual, sua leitura contribui revelando algumas das possíveis causas do abandono das demonstrações no ensino da Geometria.

Diante dos resultados dessas pesquisas, pode-se questionar se a idade e a maturidade são realmente grandes empecilhos para sua aprendizagem e, ainda, a partir de que momento as provas devem ser trabalhadas. Nasser & Tinoco (2003) auxiliam nesta reflexão, afirmando que a habilidade de argumentação se desenvolve no decorrer do processo de aprendizagem ao longo dos anos de escolaridade. Deve e pode ser desenvolvida desde as primeiras séries para que o aluno possa, mais tarde, ser capaz de opinar e argumentar. Os autores, ainda, nos apresentam sugestões de estratégias que se mostraram eficientes no desenvolvimento da habilidade de argumentação em experimentos desenvolvidos com grupos de alunos do ensino fundamental. São elas:

(i) após tentar resolver uma tarefa individualmente e de ouvir a explicação do professor, os alunos trabalham em grupos, discutindo soluções para o mesmo problema;

(ii) os alunos avaliam justificativas apresentadas por outros;

(iii) problemas do tipo desafio, que requerem raciocínio lógico, independentemente do tópico em que se esteja trabalhando;

(iv) o mesmo problema é proposto tanto a estudantes que já aprenderam o respectivo conteúdo matemático quanto àqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento, a fim de evitar o uso de algoritmos ou fórmulas;

(v) o computador é usado para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa; depois de convencidos da verdade (ou não), os alunos são levados a justificá-la ou a procurar um contra-exemplo;

(vi) atividades que ajudem a diferenciar a hipótese da tese de uma afirmativa têm sido usadas em cursos de formação de professores e de especialização.

Observa-se que a maioria das causas mencionadas para o desinteresse do aluno em relação às demonstrações, aparentemente, pode ser contornada ou eliminada pela natureza do trabalho em sala de aula. Em outras palavras, a solução do problema parece estar em grande parte nas mãos do professor. Agora cabe a pergunta: como motivar o professor para esse trabalho?

Segundo Garnica (2002), a Educação Matemática é uma área de conhecimento teórico-prático que se institui, quando o que chamamos de Matemática ocorre num contexto de ensino e aprendizagem. Entende, o autor, que a prova rigorosa como um elemento fundamental para a compreensão da prática científica matemática é também fundamental nos cursos de formação de professores, porém alerta que sua abordagem tenha um caráter não somente técnico, mas crítico possibilitando uma visão geral da produção e manutenção da ideologia da certeza, para que a partir disso, possam ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais.

Os campos da técnica e da crítica apresentam concepções divergentes sobre a verdade, em particular a verdade matemática, a técnica com ligações na produção científica da Matemática e a crítica com a Educação Matemática.

Relacionaremos abaixo, algumas observações obtidas por Garnica[7] (2002), em seu trabalho de pesquisa de doutorado: a) a prova rigorosa é um tema importante para a educação matemática, pelo seu caráter essencial na compreensão do discurso matemático e pelo modo como são trabalhadas as concepções que permeiam a sala de aula, sendo, por isso, tema importante à educação matemática; b) não são vistas como rigorosas as provas não formais (que ele denomina etnoargumentações); c) são várias as referências bibliográficas sobre metodologias para uso de provas em sala de aula, mas todas são estudos compartimentados, sem um elo forte ou claro o bastante para uni-las num projeto comum com uma teoria que lhes sirva de fundamentação; d) a utilização da informática para desenvolver provas ainda é questão altamente polêmica, cercada de paradoxos que enfocam validade, teoria e prática;

[7] Professor da Faculdade de Ciências da UNESP de Bauru e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, defendeu sua tese de doutorado em 1995, versando sobre Educação Matemática e Demonstrações, numa investigação sobre o significado da prova rigorosa na formação de professores de Matemática.

e) o surgimento da prova com os gregos e a sua formalização no mundo contemporâneo carecem de estudos históricos mais apurados; f) a prova rigorosa é engendrada, executada, verificada e, finalmente, validada por critérios nitidamente sociais, o que, de certa forma, rompe tanto com os aspectos lógicos quanto com os matemáticos.

Em suas conclusões, Garnica propõe uma visão mais geral da Educação Matemática em que se consideraria a Matemática acadêmica como uma dentre as várias Matemáticas existentes, uma dentre as várias formas de apreensão do mundo, uma dentre as Etnomatemáticas. Essa visão implicaria numa revisão das formas de argumentação em que o formal/ o semiformal/ o não formal não se constituiriam em opções tão definitivas. Afirma, ainda, que o estudo das argumentações sobre conteúdos matemáticos pode ser visto sob diferentes perspectivas apontando para diferentes formas de argumentação, mas coexistentes nas salas de aula para o estabelecimento de justificações.

A demonstração tem uma história com significados não absolutos que constitui preocupação para os estudiosos interessados no seu ensino e na sua aprendizagem. Especificamente em se tratando do professor, sua relação com o saber é mediada por elementos de natureza epistemológica no sentido de que a própria natureza desse saber, dos conceitos que o envolvem e do nível de aproximação que tem com ele determinam, de certa forma, a relação que com ele será estabelecida.

Todo saber tem sua epistemologia e esse é, portanto, um elemento fundamental a ser considerado quando objetivamos investigar a sua apropriação pelo aluno e o trabalho do professor em sala de aula, no sentido de organizar situações de ensino para a sua apropriação.

Bkouche (1989) evidencia a necessidade de um estudo epistemológico sobre a função da demonstração na Matemática para garantir a permanência de seu ensino através da compreensão de sua importância neste contexto. A reflexão histórico-epistemológica aqui desenvolvida levou em conta duas questões: a significação que ela tem para o aluno e a que tem para o ensino.

É preciso criar oportunidades para que o professor possa, além de desenvolver a habilidade na elaboração de demonstrações, estar se apossando e refletindo sobre esses conhecimentos.

Capítulo 3. Conhecimento como Construção

"A mente que se abre a uma nova idéia jamais volta ao seu tamanho original".

Albert Einstein

No presente capítulo, é proposta uma reflexão sobre os aspectos cognitivo e didático do processo das demonstrações.

Segundo Piaget (1973), existem três posições epistemológicas relacionadas às escolhas definidas sobre as relações do sujeito com o objeto (organismo e meio): a) O racionalismo (aprimorismo ou inatismo), acreditando-se que o indivíduo já traz suas estruturas pré-formadas em virtude de uma programação hereditária e bem antes que o individuo possa fazer uso delas; de acordo com Pozo (2002), é o entendimento de que o conhecimento é sempre a sombra, o reflexo de algumas idéias inatas, que constituem nossa racionalidade humana. Nessa concepção, a aprendizagem tem uma função muito limitada. b) O empirismo, em que há a predominância do objeto, sendo o conhecimento somente um reflexo da estrutura do ambiente e aprender é reproduzir a informação que recebemos, ou seja, o organismo retira seu comportamento do meio (POZO, 2002). c) O construtivismo defendendo o desenvolvimento como conseqüência da interação eqüilibratória entre o sujeito e o objeto, em que os comportamentos (sensório-motor, verbal e mental) resultam de uma interação entre o organismo e o meio. Cada uma dessas posições epistemológicas produz uma pedagogia própria e a escolha de uma delas determina concepções de educação equivalentes. Os encaminhamentos dados a este trabalho são fundamentados numa visão construtivista do desenvolvimento cognitivo.

3.1 A Abordagem Cognitiva

A abordagem cognitiva deste estudo traduz uma preocupação com os processos cognitivos direcionados à construção do conhecimento de um modo geral e, particularmente, da Geometria, estendendo-se a uma análise do relacionamento entre o meio tecnológico e o desenvolvimento cognitivo.

Quando se pretende, em situações de aprendizagem, um processo semelhante ao da produção do saber matemático, os subsídios teóricos da Psicologia Cognitiva são valiosos para a compreensão da dinâmica que se estabelece entre funcionamentos cognitivos e a construção do conhecimento. Assim, são enfocados, nesse item: as teorias construtivistas, a relação entre o meio tecnológico e o desenvolvimento cognitivo, a representação do conhecimento geométrico e o processo de resolução de problemas (numa visão da teoria do Processamento da Informação).

3.1.1 Teorias Construtivistas

A visão não construtivista do conhecimento é ontológica, isto é, parte-se de algo cuja existência já está constituída como objeto a ser conhecido. Daí sua pretensão descritiva ou explicativa do conhecimento que é considerado como uma teoria da representação da realidade. Na perspectiva construtivista, o conhecimento não é algo predeterminado, nem por estruturas internas do indivíduo, nem por características preexistentes no objeto, mas ele se constitui a partir das ações do sujeito sobre o meio, ações estas que se internalizam e se organizam, desencadeando um processo evolutivo de estruturas lógicas, de menos acabadas para mais completas, com conseqüente ascensão de patamar do conhecimento. Para o construtivismo, o conhecimento é uma interação entre a nova informação que nos é apresentada e o que já sabíamos, e aprender é construir modelos para interpretar a informação que recebemos. Não se trata de uma mudança mecânica, capaz de reproduzir respostas já preparadas, mas sim a capacidade de gerar também novas soluções resultantes de um envolvimento ativo, baseado na reflexão e na tomada de consciência por parte do aprendiz. Cabe, então, ao professor criar situações que favoreçam a interação dos alunos com os objetos de ensino pretendidos.

3.1.1.1 A Teoria Piagetiana

A teoria construtivista de Piaget proporciona subsídios para o entendimento dos funcionamentos cognitivos que levam à construção do conhecimento. Sua obra é fonte de importantes conhecimentos que propiciaram avanços em algumas áreas do conhecimento humano. Seus estudos e pesquisas não visavam à Educação, à Pedagogia ou a questões relacionadas ao processo ensino-aprendizagem, mas foi especialmente na Educação que suas descobertas sugeriram e provocaram mudanças, a partir de conceitos como os dos estágios de desenvolvimento da criança e os dos mecanismos de equilibração e de majorância que discutiremos no decorrer deste capítulo.

O estudo dos estágios de desenvolvimento da criança é pertinente, neste trabalho, para situar em que período ela estará preparada para entender o significado das demonstrações e elaborá-las. Segundo Piaget, o desenvolvimento pode ser visto dentro dos seguintes estágios: sensório motor, simbólico ou pré-operatório, operatório concreto e operatório formal. Segue uma breve descrição desses estágios, com ênfase para o estágio em que se situam os sujeitos em condição de construir demonstrações.

O estágio sensório-motor, de 0 a 2 anos de idade, é a primeira etapa do desenvolvimento mental consistindo na coordenação das montagens hereditárias (reflexos ligados ao funcionamento dos órgãos). As ações sobre objetos materiais e exercícios de repetição espontânea levam à coordenação e generalização das ações e, assim, constituem as primeiras ferramentas intelectuais, os esquemas. O sensório-motor é o alicerce para as construções posteriores (representação, linguagem, operações).

Estágio pré-operacional, de 2 a 6 anos: surge a função semiótica, a criança representa objetos e acontecimentos propiciando a aquisição da linguagem, o jogo simbólico, a imaginação. Ocorre o distanciamento das experiências sensoriais, na forma de pensamento simbólico e pré-conceitual.

Estágio operatório concreto, de 7 a 12 anos: surgem as noções de tempo, causalidade, conservação, reversibilidade, entre outras. Com a reversibilidade, o pensamento começa a tornar-se operatório e a construir as primeiras estruturas lógicas e invariâncias (de substância, de peso, de volume, de quantidade, de número). As intuições e ações se transformam em operações de classificação, ordenação e correspondência.

Estágio operatório-formal, a partir dos 12 anos: é alcançada a independência do real. Seu pensamento não se baseia apenas em objetos ou realidades observáveis, mas também em hipóteses, permitindo dessa forma a construção de reflexões e teorias. O pensamento torna-se, então, hipotético-dedutivo. Nesse estágio constituem-se as capacidades cognitivas que entram em jogo na aprendizagem da Geometria enquanto um modelo teórico.

Nesse quadro de desenvolvimento das estruturas lógicas, é no estágio operatório formal que se constituem as capacidades cognitivas necessárias para a aprendizagem da Geometria como um modelo hipotético-dedutivo, mas tal aprendizagem não acontece de maneira fácil. Muitas dificuldades se apresentam durante esse processo.

Piaget desenvolveu um modelo de como o sistema cognitivo interage com o seu ambiente e, através dessas interações, sofre mudanças evolutivas. Primeiramente, ele entende o sistema cognitivo como um mecanismo de adaptação biológica, extremamente ativo no selecionar e interpretar as informações ambientais na medida em que constrói o seu conhecimento. Não se trata de uma mera cópia da realidade, pois que a reconstrução e a reinterpretação da realidade estão subjugadas ao próprio referencial mental existente. Ele considera que há fatores internos do sujeito e fatores de interação do sujeito com a realidade, que são influenciadores do seu desenvolvimento. São eles: a maturação biológica, a experiência física, a transmissão social e a equilibração ou auto-regulação, que é considerado o fator determinante.

A maturação é uma condição necessária, por ser uma continuação do processo de formação do indivíduo, mas que não dá conta de todo o seu desenvolvimento. Seu papel limita-se a abrir possibilidades para novas condutas que precisam ser atualizadas, o que conduz à consideração de outras condições como a da experiência. A transmissão social diz respeito aos contatos educacionais e sociais que são fundamentais, mas não suficientes. A equilibração se caracteriza por dois aspectos: equilibrar entre si os outros três fatores do desenvolvimento e equilibrar a descoberta de uma noção nova com a de outras já existentes, de acordo com as possibilidades de entendimento da criança ou adulto. Dessa forma, o desenvolvimento se dá por uma constante busca de equilíbrio que significa a adaptação dos esquemas existentes ao mundo exterior. O processo interno de regulação e compensação se dá através de mecanismos internos de assimilação e acomodação.

Para Piaget, cada encontro cognitivo com o mundo se revela nesses dois aspectos, a assimilação e a acomodação. A assimilação é o mecanismo que o sujeito aplica para procurar compreender o mundo. Todas as coisas, todas as idéias (dele e dos outros) tendem a serem explicadas, inicialmente, pelo próprio sujeito em função de seus esquemas ou estruturas cognitivas até então construídas. O sujeito está num movimento constante de assimilação desta realidade aos seus esquemas ou estruturas cognitivas. Assim é que, diante de qualquer situação nova, primeiramente busca-se interpretá-la segundo concepções atuais, emitindo hipóteses possíveis à sua interpretação dentro do contexto presente de sua inteligência.

Pela acomodação, o sistema cognitivo modifica-se ligeiramente de modo a levar em consideração a estrutura dos dados externos. O sujeito age no sentido de se transformar, ajustando-se através de um esforço pessoal e espontâneo às resistências impostas pelo objeto de conhecimento, que não foi possível ser assimilado imediatamente. Ele modifica as suas hipóteses anteriores às exigências desta “novidade” e torna possível sua assimilação. Nesse vai-vem de assimilações e acomodações acontecidas em função de novos elementos ambientais, o sistema muda gradualmente sua estrutura interna ocorrendo, então, o desenvolvimento cognitivo.

Nos seus últimos trabalhos, Piaget avança no estudo da equilibração, explorando o conceito de abstração. Considera a abstração como: empírica, reflexionante e, ainda, refletida. Pela *abstração empírica*, o sujeito isola propriedades observáveis dos objetos, como sua cor, seu textura. São noções abstraídas através da percepção, portanto empírica. Quando propriedades não observáveis são abstraídas dos objetos, temos a *abstração pseudo-empírica*, já considerada um caso particular da *abstração reflexionante*. Este tipo de abstração já age sobre representações mentais, mas ainda depende de materialização nos objetos para que, através das ações do sujeito, se transforme e se enriqueça. Ela está especialmente presente no estágio operatório-concreto. Um exemplo de *abstração pseudo-empírica* é a que ocorre quando a criança, para interpretar as primeiras operações numéricas, apóia-se no ábaco. O ábaco é um objeto observável, mas as propriedades que estão sendo dele abstraídas dependem das ações da criança sobre o mesmo (PIAGET, 1995).

A *abstração reflexionante* é considerada por Piaget um dos aspectos mais gerais do processo de equilibração e um dos motores do desenvolvimento. Ela se apóia nas coordenações das ações do sujeito, podendo estar inconsciente ou não. Na *abstração reflexionante* ocorre um processo de reorganização da estrutura com as novas combinações que surgem a partir desse movimento reequilibrador. Essa reorganização utiliza os elementos do sistema anterior, integrando a ele, as ‘novidades’ provocadoras do desequilíbrio. A *abstração reflexionante* possui dois aspectos inseparáveis: o ‘refletir’, ou seja, a projeção sobre o plano superior daquilo que é retirado do plano inferior, e a ‘reflexão’, ato mental de reconstrução e reorganização, no plano superior, do que é transferido do inferior. Piaget considera, ainda, a *abstração refletida* como o resultado de uma *abstração reflexionante* que se torna consciente.

Devido à complexidade dos conceitos, transcrevem-se aqui algumas palavras de Piaget:

> [...] assistimos, pois, a um processo em espiral: todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão. Há, assim, pois, uma alternância ininterrupta de reflexionamentos → reflexões → reflexionamentos; e (ou) de conteúdos → formas → conteúdos reelaborados → novas formas, etc., de domínios cada vez mais amplos, sem fim e, sobretudo, sem começo absoluto. [...]
>
> Quanto à abstração refletida, ela permanece sistematicamente em retardo em relação ao processo reflexionante até o momento em que se torna o instrumento necessário das reflexões sobre a reflexão anterior e, em que permite, finalmente, a formação de uma meta-reflexão ou pensamento reflexivo que torna, então, possível a constituição de sistemas lógico-matemáticos de cunho científico. A este respeito, uma das formas finais, atualmente atingidas pela abstração reflexionante, é a da formalização, caso limite no qual a forma consegue, embora com as restrições conhecidas, libertar-se dos conteúdos.

(Piaget, 1995, p. 276, 287)

No **capítulo 2**, a própria história do desenvolvimento da Geometria sugere um processo de sucessivas *abstrações reflexionantes* e *refletidas*. Nascida na antiguidade como ciência prática para a solução de problemas de medidas, com Euclides ela se fez conhecimento de caráter abstrato e culminou na sistematização com os “Elementos de Euclides” que, partindo de axiomas intuitivamente indiscutíveis e inspirados no mundo físico, estabeleceu novas verdades mediante raciocínios dedutivos. Com as geometrias não-euclidianas (século XIX) surgiu uma geometria extremamente abstrata, cuja escolha de axiomas não mais se baseou na intuição informada pela realidade imediata.

Piaget destaca que não é só a *abstração reflexionante* que permeia o processo de construção de conhecimento. Ele depende também da abstração empírica quando se colhem as informações para com a *abstração reflexionante* se estruturar e organizá-las. Por um outro lado, é necessário lembrar que as duas existem em todos os níveis de desenvolvimento, dos sensório-motores às formas mais elevadas do pensamento científico. A partir dos conceitos de *abstração reflexionante* e *refletida*, é que Piaget explica a construção evolutiva de estruturas anteriores. É assim que se constituem novas capacidades intelectuais e que, conseqüentemente, ocorre a ascensão a um novo patamar de conhecimento.

3.1.1.2 Relações entre a Teoria de Piaget e a Educação

Muitas são as implicações educacionais das teorias piagetianas, pode-se destacar, no entanto, a de que o conhecimento escolar é fruto de uma construção, onde o aluno interagindo com os objetos de conhecimentos (os conteúdos de ensino definidos no currículo) constrói representações acerca desses conteúdos, constrói conhecimento. Cabe, então, ao professor criar situações que favoreçam a interação dos alunos com o objeto de ensino pretendido.

Na obra de Piaget, também podem ser encontradas orientações a respeito dos níveis de desenvolvimento das crianças, sobre o entendimento dos mecanismos de equilibração e de majorância que se sobrepõe a tudo que se acreditava a respeito de como se realiza psicologicamente a aprendizagem. A educação passa a ser a estimulação de processos já em curso no organismo (assimilação x acomodação = adaptação) e o papel do educador é garantir que os desequilíbrios estejam sempre presentes, levando o organismo a construir novas estruturas. Desta forma, implicitamente, Piaget sugere que é preciso mudar radicalmente a pedagogia: em vez de fazer dela uma facilitação, transformar a educação num desafio (deseqüilibração).

De uma maneira especial, a questão das demonstrações pode ser contextualizada em termos de possibilidades e conveniências no *quando*, no *como* e no *porquê* utilizá-las. O estudo sugere que as demonstrações podem ser trabalhadas desde os primeiros anos da escolaridade (estágio operatório), num processo inicialmente informal, do tipo empírico também denominado *mostração*, seguido de crescentes graus de formalização, de acordo com o estágio de desenvolvimento do aluno.

Por outro lado, a construção dos conhecimentos geométricos através de um processo de *abstrações reflexionantes* e *refletidas* se traduz, em muitos momentos, na compreensão e/ou na reconstrução de determinadas proposições. E esse processo nada mais é do que o processo de uma demonstração. Assim, o desequilíbrio frente ao novo, provocado pela incompreensão ou pela incoerência com os saberes já adquiridos, é contornado pelo processo da demonstração que favorece a compreensão e a assimilação, atingindo-se a reequilibração.

3.1.2 A Construção do Conhecimento Geométrico

O ensino-aprendizagem da Geometria, segundo Hershkowitz (1994), apresenta dois aspectos principais: a visão da Geometria como a ciência do espaço e a visão da geometria como uma estrutura lógica. Bem antes de ir para a escola, a criança já domina uma série de conhecimentos adquiridos por um processo natural ou por um aprendizado muitas vezes denominado “aprendizado sem ensino”. Dessa maneira, ela aprende a Geometria intuitiva necessária para se deslocar no espaço, para perceber sua vizinhança, para processar informações visuais, o que faz parte da Geometria enquanto ciência do espaço. Triângulos, quadrados, círculos, esferas são idealizações de formas físicas presentes no mundo ambiente. As primeiras idealizações de qualquer criança apóiam-se em qualidades comuns que determinados objetos apresentam e são simplesmente impressões visuais associadas a certos nomes.

No processo ensino-aprendizagem da Geometria, as idealizações evoluem e as representações mentais transformam-se em objetos geométricos pela conceituação de suas propriedades características. A modelagem matemática organiza as formas idealizadas possibilitando relações geométricas sempre novas, em novo patamar de conhecimento, através de teoremas e demonstrações que explicitam e explicam relações, muitas vezes surpreendentes entre os objetos idealizados[8]. Buscam-se, agora, argumentações que expliquem certas propriedades como decorrentes de outras, diferentemente das simples verificações e constatações até então satisfatórias.

Há um consenso de que estes dois aspectos do ensino-aprendizagem da Geometria estão ligados, pois alguns níveis da Geometria, enquanto ciência do espaço, são necessários para a aprendizagem da Geometria, enquanto estrutura lógica. A Geometria, nesse último aspecto, é a parte do saber matemático, voltada para objetos idealizados. O entendimento de seus modelos depende, porém, de processo evolutivo do pensamento geométrico. A esse respeito, encontramos na teoria de Van Hiele, uma relevante contribuição.

3.1.2.1 A Teoria de Van Hiele

Uma teoria sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico surgiu com os trabalhos dos professores holandeses Dina e Pierre Marie Van Hiele, baseados em estudos sobre as dificuldades de aprendizagem de seus alunos em situação escolar. A partir da observação de que os alunos, enquanto aprendem Geometria, parecem progredir no raciocínio geométrico através de uma seqüência de níveis de compreensão de conceitos, Van Hiele apresenta seu modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico através de níveis seqüenciais que informam quais são as características do processo de pensamento dos alunos em Geometria. Dessa forma, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto nessa teoria combina as duas visões da Geometria, como ciência do espaço e como instrumento com o qual demonstrar uma estrutura matemática.

O modelo de Van Hiele é um guia para a aprendizagem e um instrumento para a avaliação das habilidades dos alunos em Geometria. Segundo Purificação (1999), a publicação inicial dos trabalhos de Van Hiele data de 1959.

[8] Objetos idealizados no sentido de não terem existência real, ou seja, não existirem no mundo físico, mas apenas no mundo das idéias, nascidos de processos de abstração e generalização.

São cinco os níveis hierárquicos, sendo que cada um é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e por linguagens próprias, conforme descrição a seguir, baseada em Van Hiele (1986) e Nasser & Sant'Anna (1998).

- **Nível um (ou básico)**[9]**,** o do reconhecimento ou visualização, em que a criança reconhece, compara e nomeia figuras geométricas por sua aparência global, sem explicitar suas propriedades. Identifica a figura de um quadrado, mas ao ser perguntado porque, a resposta é do tipo: "porque se parece com um quadrado".
- **Nível dois**, o da análise, em que as figuras já são analisadas em termos de seus componentes, reconhecendo-se suas propriedades e as usando para resolver problemas. Reconhece que o quadrado tem lados e ângulos com mesma medida, mas ainda não estabelece relações entre as propriedades. Não é capaz de fazer as classificações adequadas dos diferentes quadriláteros nem de fazer conclusões do tipo: "... se quatro ângulos retos então necessariamente é um retângulo".
- **Nível três**, o da dedução informal ou ordenação, em que já existe percepção da necessidade de uma definição precisa dos objetos e de que uma propriedade pode decorrer de outra. É capaz de desenvolver uma argumentação lógica informal e uma ordenação de classes de figuras geométricas, embora ainda não possua habilidades para construir suas próprias demonstrações. Já reconhece que um quadrado é um retângulo e que todo retângulo é um paralelogramo.
- **Nível quatro**, o da dedução formal, que se caracteriza pelo domínio do processo dedutivo e das demonstrações. Já se compreende o significado da dedução e o papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva, o que possibilita a produção de demonstrações. O aluno faz demonstrações de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.

---

[9] Os níveis hierárquicos são identificados por alguns autores e também neste trabalho, como: um, dois, três, quatro e cinco, diferentemente da forma assumida por outros como: zero, um, dois, três e quatro.

- **Nível cinco**, o do rigor, em que o pensamento geométrico culmina no momento em que passa a transitar por teorias axiomatizadas, as geometrias não euclidianas. Neste nível, o aluno apresenta a capacidade de compreender a importância do rigor nas demonstrações formais e estabelecer teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos. O próprio pensamento lógico torna-se objeto de atenção.

Segundo Nasser & Sant'Anna (1998), os cinco níveis são hierárquicos, no sentido de que o aluno só atinge determinado nível de raciocínio após dominar os níveis anteriores. O progresso de um nível para o seguinte se dá através da vivência de atividades adequadas e cuidadosamente ordenadas pelo professor. A elevação de níveis está mais na dependência de uma aprendizagem adequada do que da idade ou maturação. Esta pode ser uma explicação para as dificuldades dos alunos que enfrentam um curso sistemático de Geometria sem a necessária vivência prévia de experiências nos níveis anteriores.

Numa análise sobre as implicações da teoria de Van Hiele para o ensino, estes mesmos autores sugerem que: a) os alunos passam pelos níveis em ordem consecutiva, mas não no mesmo ritmo; é possível, e acontece, encontrarmos numa mesma turma alunos em diversos níveis de desenvolvimento de pensamento geométrico, o que requer um tratamento diferenciado buscando favorecer a todos os integrantes da turma; b) em cada sala de aula é necessário buscar que o professor, os alunos e o livro-texto estejam funcionando no mesmo nível, para que haja uma integração a mais ampla possível; c) o curso de Geometria euclidiana é dado no nível três; o aluno típico inicia o curso no nível um, daí as dificuldades encontradas por eles em compreender e acompanhar as atividades requeridas; d) o nível três é o intermediário entre a geometria informal ou experimental e a geometria formal (dedutiva); e) é muito difícil atingir o nível cinco no curso secundário; o professor não deve esperar que seus alunos elaborem provas rigorosas nem que eles entendam outras geometrias.

A teoria de Van Hiele, especialmente no que se refere aos níveis de desenvolvimento, tem atraído a atenção de muitos educadores e pesquisadores matemáticos. Muitas pesquisas foram feitas no sentido de verificar os níveis e os aspectos preditivos. Os resultados das pesquisas mostram que, em geral, os níveis criam a hierarquia descrita e coincide com o comportamento das crianças, salvo poucas exceções. Tentativas têm sido feitas no sentido de usar o modelo como base para a elaboração de currículos e livros didáticos. Em "*O ensino da Geometria segundo a teoria de van Hiele*", Nasser e Sant'Anna (1998) trazem uma proposta de desenvolvimento do ensino aprendizagem da Geometria, considerando as orientações de Van Hiele e respeitando a hierarquia dos níveis na dosagem de apresentação dos conceitos e das atividades.

Alves (2002), em pesquisa envolvendo estudo quantitativo sobre o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos do ensino médio de uma escola pública, de acordo com teoria de Van Hiele, faz observações sobre a vantagem do professor conhecer este modelo. Tal vantagem, segundo o autor, estaria em lhe permitir a elaboração de atividades que favoreçam a aquisição de um dado nível a ser conquistado.

A generalidade e a globalidade do modelo de Van Hiele são, no entanto, sua força e sua fraqueza. Para que se possa utilizá-lo em pesquisas e no ensino, é necessário que se estabeleçam instrumentos operacionais através dos quais se possa determinar o nível de desenvolvimento particular de um individuo. Gutierrez (1991), *apud* Purificação (1999), apresenta um critério de avaliação do grau de aquisição de nível de raciocínio geométrico, de acordo com respostas dos analisados. A classificação depende da precisão matemática e da solução da atividade apresentada pelo sujeito de acordo com os pontos de vista que embasam a teoria de Van Hiele. Assim:

- Tipo zero: sem resposta, o que não permite classificar o grau de aquisição do nível.

- Tipo um: respostas que indicam que o aprendiz não atingiu um dado nível, mas que não há informação sobre algum nível mais baixo.
- Tipo dois: respostas insuficientes e erradas que mostram alguma indicação de um dado nível de raciocínio.
- Tipo três: respostas corretas, mas insuficientes; respostas que contem pouca explanação ou resultado incompleto.
- Tipo quatro: respostas corretas ou incorretas que claramente refletem características de dois níveis consecutivos e que contem claro processo de raciocínio e suficientes justificações.
- Tipo cinco: respostas incorretas, mas que claramente refletem um nível de raciocínio ou respostas que apresentam processo de raciocínio que são completos mas incorretos.
- Tipo seis: respostas corretas que claramente refletem um dado nível de raciocínio mas que são incompletas ou insuficientemente justificáveis.
- Tipo sete: respostas corretas e suficientemente justificadas que claramente refletem um dado nível de raciocínio.

Assim, respostas do tipo zero e um, não indicam grau de aquisição do nível de raciocínio geométrico. Respostas do tipo dois e três apontam o inicio da aquisição de um nível, verificam-se traços vagos do nível de raciocínio. Respostas do tipo quatro indicam que o estudante usa dois níveis de raciocínio, mas nenhum dos níveis é claramente predominante; é uma fase de transição intermediária entre dois níveis. Respostas do tipo cinco e seis mostram que os estudantes usam predominantemente um nível especifico de raciocínio, embora, às vezes, um nível mais baixo possa aparecer. Respostas do tipo sete revelam que o estudante adquiriu completamente um dado nível e se torna capaz de resolver atividades usando somente raciocínio característico do nível em questão. Na Tabela 3.1 abaixo, podemos visualizar tal critério.

Respostas Tipo	**0 - 1**	**2 – 3**	**4**	**5 – 6**	**7**
Aquisição	Não aquisição	Baixa aquisição	Aquisição Intermediaria	Alta aquisição	Aquisição completa

Tabela 3.1. Graus de aquisição de nível de pensamento geométrico

Nasser (1992) em sua tese de doutorado na Inglaterra "*Using the van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil*", utilizou a teoria de Van Hiele para diagnóstico e investigação com estudantes secundários brasileiros e, para isso, elaborou descritores dos níveis de pensamento geométrico, segundo esta teoria. Seu trabalho continua fornecendo subsídios para estudos e aplicações que vem sendo realizadas no Projeto Fundão/IM/UFRJ. Esse teste para diagnóstico do nível de desenvolvimento é o utilizado nesta presente pesquisa com os professores participantes.

Sobre o possível relacionamento entre os níveis de pensamento de Van Hiele com os estágios piagetianos de desenvolvimento cognitivo, Van Hiele (1986) coloca que a psicologia de Piaget era de desenvolvimento e não de aprendizagem. Considera que a diferença entre seu trabalho e o de Piaget, encontra-se no fator condição de mudança de níveis de desenvolvimento. Para Piaget, um dos fatores dos estágios de desenvolvimento é a maturação estando o desenvolvimento intelectual intimamente ligado ao desenvolvimento biológico. Van Hiele, por sua vez, direciona seu enfoque à situação ensino aprendizagem da Geometria e destaca que para esse desenvolvimento a instrução torna-se fator primordial. Na consideração de que os dois modelos podem ser relacionados, os três primeiros níveis, um, dois e três, do pensamento geométrico correspondem ao estágio operatório-concreto; o nível quatro, da dedução formal, corresponde ao estágio operatório formal.

Segundo Gravina (2001), a evolução do pensamento geométrico pode ser entendida à luz da teoria de Piaget. A identificação das formas geométricas começa com as *abstrações empíricas;* a palavra triângulo, por exemplo, passa a designar a classe das formas triangulares pela comparação com formas que não guardam esta característica. A observação de propriedades não explícitas nos objetos geométricos, mediante experimentos do pensamento, corresponderia às abstrações pseudo-empíricas. Quanto aos teoremas e demonstrações, suas relações são, principalmente, com as abstrações reflexionantes, quando relações inferenciais tornam-se objeto de investigação e a explicação exige raciocínios de natureza lógica-dedutiva. É, na coordenação das operações mentais, que se constituem as relações entre esses objetos e as razões que as explicam. Isso implica na construção de conhecimento na forma de teoria, viabilizando novos patamares de conhecimento.

3.1.2.2 A Representação do Conhecimento Geométrico

As dificuldades dos alunos na aprendizagem da geometria concentram-se, geralmente, nas definições, nos teoremas e nas demonstrações. Para melhor entendê-las precisamos recorrer a conceitos relacionados à representação do conhecimento e a estudos de pesquisadores no assunto, como Soares (2003) e Duval (1995).

Segundo Duval (1995), a Geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem as específicas funções epistemológicas: a visualização, a construção e o raciocínio. A visualização, processo que examina o espaço representação, da ilustração de uma afirmação para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva. A construção, processo por instrumentos que corresponde à execução de configurações que podem ser trabalhadas como um modelo; sendo que, nessa execução, as ações e os resultados observados associam-se aos objetos matemáticos representados. O raciocínio que é, no processo do discurso, a extensão do conhecimento para a prova e a explicação.

Esses diferentes processos podem ser formados separadamente. Assim, a visualização não depende da construção. E mesmo se a construção conduz a visualização, a construção do processo depende somente da conexão entre propriedades matemáticas e as técnicas de construção. Finalmente, se a visualização é um auxilio intuitivo às vezes necessário para encontrar a prova, o raciocínio depende exclusivamente do corpo de proposições (definições, axiomas e teoremas). Em alguns casos, a visualização pode levar a interpretações erradas. Contudo, essas três espécies de processos cognitivos são entrelaçadas em seus esforços simultâneos e cognitivamente necessários para a proficiência da geometria (DUVAL, 1995).

Abordaremos as dificuldades encontradas nesses processos em três aspectos: desenho, linguagem e conceitos; definição de demonstração e processo da elaboração de demonstração.

a) Desenho, linguagem e conceitos

Os objetos matemáticos, como sabemos, são objetos idealizados dotados de existência só na mente das pessoas que os concebem ou que os utilizam. O sistema de representação desses objetos é, portanto, de fundamental importância no processo de construção do conhecimento geométrico e no desenvolvimento da habilidade de elaborar demonstrações.

A noção de representação do conhecimento é central não só para a Psicologia Cognitiva como também para a lingüística, a lógica, a informática e particularmente a inteligência artificial. Nesse sentido, encontramos em Soares (2003), alguns conceitos relativos ao tema que podem nos auxiliar na compreensão do mesmo. A noção de representação é dotada de uma propriedade particular relacional no momento em que representa apontando para objetos ou ações outras que não ela própria, mas que são então representados por ela. A partir daí, tem-se uma noção comum aplicável igualmente às representações mentais e não mentais: "ser uma representação de" recobre quatro componentes: inicialmente duas entidades, A e B, na qual A é um objeto representando ou representativo, e o outro B, o objeto representado, depois uma relação entre os dois, R que é uma similaridade (ou analogia) objetiva e, enfim, um agente cognitivo externo, C, para que A represente B. Desse modo, representação do conhecimento trata-se de uma codificação, realizada sob a forma de uma linguagem julgada eficaz por um conceitualizador de representações mentais presentes na mente humana, ou seja, representações das representações. Soares define, ainda, as representações como mentais ou não mentais. Representações mentais são as representações internas do sujeito, consistindo em suas crenças, idéias, explicações, concepções sobre os fenômenos. E as representações externas, também denominadas simbólicas ou semióticas, não se referem a entidades mentais, mas designam objetos ou eventos físicos diversos: um quadro, um desenho, um filme.

Duval (1995) observa que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação, pois não há conhecimento que possa ser mobilizado pelo sujeito sem uma atividade de representação.

A construção ou a interpretação do desenho é uma das primeiras dificuldades do aluno na resolução de um problema geométrico, especificamente, num trabalho de demonstração. A eficiência nesta tarefa está ligada diretamente à concepção do resolvedor, em última análise, à representação mental que ele tem desse objeto matemático. Fishbein (1993) considera, a esse respeito, que o conceito de um ente geométrico tem dois componentes: um figural e outro conceitual. O primeiro, de natureza visual, se expressa através de um desenho. O segundo caracteriza uma certa classe de objetos matemáticos através de suas propriedades definidoras. A representação mental que se tem do objeto estará correta na medida em que houver uma adequada fusão entre esses dois componentes.

Dificuldades clássicas podem ser mencionadas como exemplos de uma representação incorreta ou incompleta de conceitos. A dificuldade da ordenação, por inclusão, na família dos quadriláteros gerando a interpretação de que os quadrados não são reconhecidos como subclasse dos retângulos e nem estes como subclasse dos paralelogramos. A propriedade, nos triângulos isósceles, da superposição de suas cevianas relativas à base ser estendida para as referentes aos outros lados desse mesmo triângulo. Uma outra causa, além da vinculada à incorreta representação do conhecimento, para essas interpretações erradas é a apresentação aos alunos, pelos professores, de modelos protótipos não adequados e que o induzem a essas concepções incorretas. É necessário ter sempre presente que um dado desenho nada mais é do que uma instância particular do objeto geométrico.

Uma estratégia que pode auxiliar no contorno dessa dificuldade é a promoção de atividades em grupo, na classe, através da qual cada aluno seja convidado a expressar seus conceitos e as propriedades acerca de uma certa figura matemática (conceitos espontâneos). Num momento posterior e através de uma discussão orientada pelo professor, esses conceitos sejam reconstruídos e institucionalizados (conceitos científicos) em um novo patamar de conhecimentos. A construção desses conceitos científicos, coerentes com as teorias da geometria, não é um processo natural e exige uma elaboração mental do aluno que transita pelas abstrações empíricas, pseudoempíricas e reflexionantes, desenvolvendo, assim, o seu pensamento hipotético dedutivo.

b) O significado de uma demonstração

O entendimento do significado da demonstração e da necessidade de seu emprego nos processos de resolução de problemas representa uma outra dificuldade a ser contornada nesse contexto.

O aluno confunde demonstração empírica com demonstração formal. Pelas manipulações empíricas ele se convence da veracidade da hipótese e se satisfaz. Mas a demonstração de uma propriedade geométrica, de acordo com a definição de Balacheff (1988), envolve um processo dedutivo em que a veracidade da proposição em questão se fundamenta em explicações apresentadas numa seqüência de enunciados organizados conforme regras determinadas. E essa é uma das dificuldades do aluno, isto é, perceber que de certa relações entre os objetos geométricos, as hipóteses, advém novas relações, a tese, que se torna explicável pela argumentação dedutiva.

A compreensão do significado da demonstração depende de um longo processo e está vinculada à ascensão ao nível de pensamento geométrico.

Balacheff, como já visto, classifica as provas em duas categorias: as pragmáticas e as intelectuais. Identifica, também, níveis de formas de validação, relacionadas ao processo de ascensão dessas categorias: o empirismo ingênuo, o experimento crucial, o exemplo genérico, o experimento de pensamento e o cálculo nas afirmações. A abstração empírica identifica-se em funcionamento especialmente nos três primeiros níveis e a reflexionante nos dois últimos níveis.

É importante que, no processo educativo, professor e alunos convivam com diferentes funções da demonstração, especialmente, a função explicação em atividades que exijam demonstrações a partir da necessidade de uma explicação (o porquê de propriedades ou de fatos geométricos ocorrerem). O confronto com situações em que a evidência figural leve a uma incoerência auxilia no destaque à necessidade das demonstrações para que uma proposição seja realmente considerada verdadeira.

Mapeadas as dificuldades no entendimento do significado das demonstrações, surge a necessidade de saber como produzir demonstrações.

c) O processo das demonstrações

A elaboração de uma demonstração é um processo complexo que se assemelha ao processo de criação em Matemática, envolvendo muitos experimentos de pensamento e combinação de idéias que permitam encontrar os seus necessários relacionamentos.

O processo de uma demonstração compreende duas fases: a de formulação de conjecturas e a da demonstração propriamente dita das conjecturas. A fase de maior dificuldade está na produção da demonstração que depende em grande parte da adequada manipulação da figura em consonância com o enunciado da conjectura. A figura se torna fonte de idéias que possibilitam o aflorar dos conhecimentos necessários e que, devidamente conectados, constituirão uma rede capaz de representar a argumentação dedutiva desejada. A manipulação do desenho nesse momento é, portanto, fator decisivo para que se possa estabelecer a seqüência de raciocínios que demonstre a propriedade em questão.

Duval (1995) observa diferentes formas de *apreensão cognitiva* da figura geométrica e destaca o papel heurístico do desenho nos *insights* que desencadeiam o processo de demonstração e, também, no entender porque os alunos, frente a problemas similares, apresentam desempenhos tão diferentes:

- *apreensão seqüencial*, é a solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura;
- *apreensão perceptiva*, é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica; é fonte de dificuldades quando fatos são tomados como certos pelos alunos, desconsiderando a necessária fusão entre os componentes figural e conceitual, referenciado por Fischbein. Exemplificando, temos a situação tão comum do aluno considerar um triângulo qualquer como retângulo porque a aparência daquela instância particular do desenho (componente figural) o sugere.
- *apreensão discursiva*, é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, pois os mergulha numa rede semântica de propriedades do objeto; muitas vezes a apreensão discursiva é perturbada pela apreensão perceptiva.
- *apreensão operatória*, é uma apreensão central sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e suas reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem; são as manipulações, mentais ou físicas, no desenho que visam a despreender subcomponentes e a recompor novos subcomponentes, incluindo transformações em tamanho, posição e orientação. É primordialmente essa

> operação que proporciona a função heurística do desenho tornando-o desta forma fonte de *insights* para o avanço do processo de demonstração.

Duval (1995) argumenta que o problema das figuras geométricas está na diferença entre a *apreensão perceptiva* e uma interpretação necessariamente direcionada pelas hipóteses. Muitas vezes, os alunos lêem o enunciado, constroem a figura e, a partir daí, se concentram na figura sem voltar ao enunciado. Esse abandono do texto pode prejudicar a interpretação discursiva do enunciado, trazendo dificuldades à resolução do problema. As propriedades da figura estão subordinadas às hipóteses determinadas pelo enunciado do problema, estando a *apreensão perceptiva*, em conseqüência, subordinada à *apreensão discursiva*. Nesse sentido, os elementos e as propriedades que aparecem para a figura, são comandados pelas definições, axiomas e teoremas já estabelecidos. A mesma figura pode representar diferentes objetos geométricos se modificarmos o enunciado das hipóteses. Duval conclui que a teorização das figuras geométricas, cuja *apreensão perceptiva* deve ser subordinada à *apreensão discursiva*, constitui um dos principais acessos à demonstração.

Por sua vez, a *apreensão operatória* está diretamente ligada ao processo de *abstração reflexionante*. Em Geometria, a ascensão em patamar de conhecimento depende de operações sobre os componentes figural e conceitual do objeto, acompanhadas de sucessivos reflexionamentos que culminam com a argumentação dedutiva validando a hipótese proposta. Nessas condições, entram em cena as estruturas cognitivas correspondentes ao estágio operatório-formal.

Alguns erros e dificuldades que podem ocorrer na elaboração das demonstrações: a) o tratamento do componente figural de um enunciado geométrico; b) tomar a própria tese como elemento de partida para a argumentação; c) o desconhecimento de propriedades necessárias à argumentação a ser desenvolvida; d) uso errado de conceitos geométricos;

e) uso de informações aparentemente evidentes na instância particular do desenho, mas de caráter puramente perceptivo.

A superação dessas dificuldades passa por um meio que provoque *abstrações reflexionantes*, *apreensões operatórias* da figura, sem que se perca de vista a necessária fusão entre os componentes conceitual e figural do objeto geométrico em estudo.

A contribuição de situações de meta-aprendizagem também merece consideração.Por exemplo, situações de reflexão sobre a natureza do conhecimento objeto de construção, de procedimentos pertinentes ao domínio de funcionamento do modelo, de dificuldades cognitivas que se apresentam e da própria história do desenvolvimento do conhecimento. Em certos momentos, a aprendizagem depende de abstrações refletidas, isto é, reflexões sobre o conhecimento que está sendo construído.

3.1.3 A Resolução de Problemas

Tradicionalmente, a cognição se refere aos processos e produtos psicológicos mais chamativos e inequivocamente inteligentes da mente humana (processos mentais superiores): conhecimento, consciência, inteligência, pensamento, imaginação, criatividade, geração de planos e estratégias, inferências, solução de problemas, conceitualização, classificação e formação de relações, simbolização.

De acordo com Flavell (1999), atualmente as quatro principais teorias sobre a natureza e o desenvolvimento da cognição são: a de Piaget, a do processamento de informação, a neopiagetiana e a contextual. O aspecto central dessas teorias está nos processos de mudança cognitiva. A abordagem do processamento de informações apresenta uma preocupação com a compreensão detalhada e especificada de como o sistema cognitivo funciona ao lidar com uma tarefa ou problema: de que modo isso acontece, que etapas ocorrem e de que modo acontecem.

Ao se considerar que ensinar o aluno a pensar é um objetivo fundamental da instrução matemática, o aprender a pensar matematicamente envolve, entre outras coisas, a resolução de problemas, a metacognição e o fazer sentido em matemática. A resolução de problemas é, assim, um assunto que tem merecido atenção especial dentro das pesquisas em educação matemática e vem ocupando lugar central no currículo escolar.

O ensino, baseado na solução de problemas, tem por objetivo promover nos alunos o domínio de habilidades e estratégias paralelamente à utilização de conhecimentos disponíveis para dar resposta a situações variáveis e diferentes dentro das principais áreas de conhecimento e em situações da vida cotidiana. Assim, ensinar os alunos a resolver problemas pressupõe dotá-los de capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, em vez de esperar uma resposta já elaborada por outros ou transmitida pelo livro texto ou pelo professor (POZO, 1998).

O ensino de Resolução de Problemas, como campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigado de forma sistemática por Polya, nos Estados Unidos, na década de 60, do século passado. A partir dessa década, segundo Andrade (1998), a utilização de uma metodologia de investigação começava a se instalar, com o trabalho dos alunos na resolução de problemas. Era a transição de uma metodologia de investigação de natureza quantitativa para uma qualitativa. Inicialmente, no período anterior a 1960, havia uma preocupação única com a resolução em si dos problemas, quando se buscava desenvolver a capacidade do aluno na resolução de problemas, exercitando na solução de uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo, num tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta. Não havia uma preocupação com o processo em si da resolução de problemas. Por volta da década de 60 é que a preocupação volta-se para o processo envolvido na Resolução de Problemas e, assim, centrando o ensino no uso de diferentes estratégias.

Em 1980, a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Nos Estados Unidos, o NCTM, National Council of Teachers of Mathematics fez declaração amplamente divulgada de que a solução de problemas deve ser o enfoque do ensino da Matemática. Na Inglaterra, a ATM, Association of Teachers of Mathematics, estabeleceu que a habilidade em resolução de problemas fosse o centro do ensino da Matemática.

No Brasil, de acordo com Andrade (1998), os estudos relativos a esse assunto começaram na segunda metade da década e restringiam-se quase sempre a trabalhos de dissertação de Mestrado e teses de Doutorado. Nesse período, visando o trabalho em sala de aula, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos: coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades, entre outros. Com a discussão das perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas, esta passa a ser pensada como uma metodologia de ensino. O problema é visto como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento.

Ensinar Matemática através desse caminho vem ao encontro das propostas dos PCNs e do NCTM, pois não só conceitos e habilidades podem ser desenvolvidos no contexto de resolução de problemas, mas também ela pode se constituir num veículo para levar os alunos a “aprender a aprender”. No caso particular da Geometria, a resolução de um problema está, muitas vezes, condicionada a um processo de demonstração.

3.1.3.1 Caracterização de um Problema

A Resolução de Problemas tem sido interpretada de diferentes maneiras, desde o exercício rotineiro de tarefas até o fazer matemática como um pesquisador. Nesse sentido é preciso estar alerta para a necessidade de definir claramente o que seria um problema, diferenciando-o de um mero exercício.

Muitas vezes o próprio professor de matemática costuma pedir a seus alunos que resolvam exercícios ou problemas para exercitar um determinado tópico da matéria, utilizando ambas as palavras, exercício e problema, como equivalentes. O exercício, segundo Pozo (1998), é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor. É uma mera aplicação de resultados teóricos enquanto o problema necessariamente envolve um processo criativo. Um problema é uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido, que requer a utilização estratégica de técnicas já conhecidas. É toda situação capaz de desencadear um impasse, uma perturbação, um conflito. Embora o exercício tenha importância pela sua função instrucional, ao permitir a consolidação de habilidades práticas, ele não deve ser confundido com um problema que é um processo que envolve o uso de estratégias e a tomada de decisão sobre os caminhos a serem seguidos. Na resolução de um problema, os requisitos cognitivos e motivacionais exigidos são maiores que os exigidos na execução de um exercício.

Schoenfeld (1984) considera problema como uma questão difícil ou que levanta dúvidas, uma questão de pesquisa, discussão ou pensamento, uma questão que exercita a mente. Entretanto, assim como em Pozo (1998), ele acrescenta a idéia de que o significado de problema deve ser visto em termos relativos, isto é, não assenta em qualquer característica ou propriedade da tarefa, mas sim numa relação entre o indivíduo e a tarefa. Isso significa que a idéia da questão ser um problema ou exercício está também subordinada à pessoa que o está resolvendo, pois o que para uns é um problema, para outros é uma mera questão de rotina ou um exercício automatizado.

Fica claro, porém, que o processo de reflexão e a tomada de decisões são características que diferenciam um verdadeiro problema de situações similares, como podem ser os exercícios e, ao lado desses aspectos, deve ser considerado, também, o lado subjetivo da questão que se reporta à noção de necessidade decorrendo esta da experiência individual e estando relacionada com a intencionalidade.

3.1.3.2 Processos e Estratégias de Resolução de Problemas

A preocupação com os processos de resolução de problemas direciona, a partir dos anos 60, os sentidos não para a solução propriamente do problema, mas para com os elementos relacionados ao seu processo, para melhor compreendê-los no sentido de funcionar como um elemento no processo de construção do conhecimento.

Dentro dessa preocupação com os processos utilizados pelo indivíduo na resolução de problemas, encontramos, segundo Pozo (1998), duas abordagens em relação às estratégias a serem utilizadas. Uma delas defende a idéia de que a solução de problemas se fundamenta na aquisição de estratégias gerais que, ao serem adquiridas, possam ser aplicadas com poucas restrições a qualquer tipo de problema. A solução de problemas seria, assim, um conteúdo generalizável independente das áreas específicas do currículo. A abordagem do processo de solução de problema como uma habilidade geral acredita que, apesar de haver divergências quanto aos procedimentos usados na solução de problemas heterogêneos, existe o acionamento de uma série de capacidades de raciocínio e de habilidades comuns que devem e podem se adaptar às características de cada tipo de problema.

A outra abordagem, contrária a essa idéia geral, entende a solução de problemas e sua instrução como só podendo ser abordada no contexto das áreas ou conteúdos específicos, aos quais os problemas se referem. Assim, não teria sentido falar em ensinar a resolver problemas de um modo geral, mas sim tratar de sua solução dentro da área de conhecimento em que ele esteja inserido.

Embora as diferenças entre os problemas exijam muitas vezes tratamentos diversos, existe uma série de procedimentos e habilidades que são comuns a todos os problemas e que as pessoas colocam em prática com a maior ou menor competência. Por exemplo, para resolver qualquer tipo de problema temos que prestar atenção, recordar, relacionar entre si certos elementos. Também é verdade que na maioria dos problemas estas habilidades têm que estar numa determinada ordem para que os levem a atingir sua meta. Pode-se, assim, definir uma seqüência de passos para a solução de um problema: compreensão da tarefa, concepção de um plano, execução desse plano e uma análise que possa levar a determinar se a meta foi alcançada ou não.

Na verdade essa seqüência é semelhante à que o matemático Polya (1945), *apud* Pozo (1998), estabelecia como necessária à resolução de um problema. Embora Polya tenha se baseado em observações sobre a forma como especialistas em Matemática solucionavam problemas, tanto a seqüência descrita por ele como seus conselhos sobre a utilização e introdução dos problemas em sala de aula têm servido de base para planejar problemas escolares em diversos âmbitos do conhecimento, ou seja, têm sido considerados como métodos gerais de solução de tarefas, independentemente de seu conteúdo.

Polya considera como passos na resolução de um problema:

- Compreensão do problema: consiste em compreender a linguagem em que estáexpressa a tarefa e ter adquirido previamente certos conhecimentos que ali serã o exigidos; implica também, em dar-se conta das dificuldades e obstáculos apresentados pela tarefa e ter vontade de tentar superá-las.
- Concepção de um plano: significa conceber um plano que ajude a resolver o problema; é o traçar de estratégias e a definição de procedimentos para tal.
- Execução do plano: consiste em desenvolver o plano que havia sido previamente elaborado e transformar o problema por meio de regras conhecidas.
- Análise da solução obtida: o processo de solução termina quando o objetivo estabelecido foi aparentemente alcançado e que será definido após sua análise. Essa análise pode ser definida dentro de dois objetivos: de um lado, a pessoa que soluciona avalia se alcançou ou não e se deve, por isso, revisar seu procedimento; de outro lado, do ponto de vista didático, pode servir para ajudar o aluno

a tornar-se consciente das estratégias e regras empregadas e, dessa forma, melhorar a sua capacidade heurística.

No livro *How To Solve It,* de autoria desse mesmo autor (POLYA, 1986), encontra-se um exemplo de aplicação da estratégia de resolução de problemas.

Um gato está sobre um muro de 4m de altura quando avista um rato a uma distância de 8m da base do muro. Quando o rato dirige-se a sua casa (em linha reta até o muro) é comido pelo gato, que pula diagonalmente, andando o mesmo comprimento que o rato tinha andado até então. Qual a distância que cada um percorreu?

1ª etapa: compreensão do problema

Para entendermos um problema devemos estar em condições de identificar as partes principais do problema, ou seja, a incógnita, os dados, a condicionante. Caso haja uma figura relacionada ao problema, é importante desenhá-la e adotar uma notação adequada.

Qual é a incógnita? A distância que cada um percorreu; denotaremos a mesma por *d.*

Quais são os dados? Altura do muro: 4m; distância do rato à base do muro: 8m; a trajetória percorrida pelo gato é uma linha reta diagonal; o muro é perpendicular ao chão.

Traçando uma figura (Figura 3.1) para esquematizar o problema:

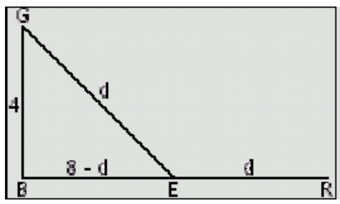


Figura 3.1. Esquematização do problema

2ª etapa: estabelecimento de um plano

Vamos encontrar a conexão entre os dados e a incógnita do problema, reduzindo-a a figuras geométricas com propriedades conhecidas. Neste caso, visualizamos três triângulos (BGE, BGR e EGR), sendo os dois primeiros retângulos e o último, triângulo isósceles. O plano é resolvê-lo através do triângulo retângulo menor (BGE, retângulo em B) aplicando o Teorema de Pitágoras, pois conhecemos a distância BG= 4m e as distâncias BE e GE em função de d, isto é, BE = 8 – d e a distância GE= *d.*

3ª etapa: execução do plano

Nesta etapa devemos observar se é possível executar o plano. Observemos a figura construída novamente (Figura 3.2):

$d^2 = (8 - d)^2 + 4^2 \rightarrow d^2 = 64 - 16d + d^2 + 16$

$16d = 80 \rightarrow d = 5$

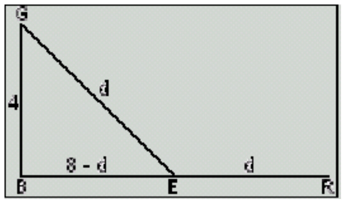


Figura 3.2.: Execução do plano

4ª etapa: revisão da solução

Nesta etapa, examinamos a solução obtida.

É possível verificar o resultado? De fato, basta substituir *d* = 5 na figura acima e teremos a seguinte situação (Figura 3.3).

Deste modo, chegamos a resposta de que a distância percorrida tanto pelo gato quanto pelo rato é 5m.

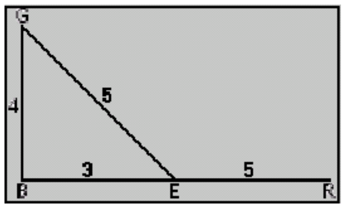


Figura 3.3. Revisão da solução

É possível verificar o argumento? O argumento utilizado foi o Teorema de Pitágoras, cujo uso era válido pelo fato do triângulo BGE ser retângulo em B.

É possível utilizar o resultado ou o método em algum outro problema? Notamos que todo triângulo retângulo de catetos 3 e 4 possui hipotenusa 5 (o famoso triângulo retângulo 3, 4 e 5, o único de lados sendo inteiros consecutivos). Em problemas que envolvam triângulo retângulo com catetos de medidas 3 e 4 (unidades de comprimento), pode-se aplicar, diretamente, o valor 5 para a hipotenusa.

É possível chegar ao resultado por caminhos diferentes? Uma possibilidade seria considerar o triângulo isósceles EGR e utilizar a lei dos co-senos.

Considerando o ângulo GER cujo cosseno pode ser representado por (- (8-d)/d) e considerando a medida de GR igual a $\sqrt{80}$ m, pois $GR^2 = 4^2 + 8^2$ (teorema de Pitágoras), temos: $d^2 + d^2 - 2\, d^2 ((d - 8)/d) = 80$ (lei dos cossenos), o que implica em d = 5 m.

Num outro contexto, o da Psicologia Cognitiva, Sternberg (2000) aborda o processo de resolução de problemas, considerando sete etapas no seu ciclo, quais sejam: a) identificação do problema: essa é a primeira etapa pelo fato do problema só existir se for reconhecido como tal; b) definição e representação do problema: reconhecida a existência do problema, ele deve, a seguir, ser definido e bem representado para que possamos, a partir daí, entender como resolvê-lo; c) formulação da estratégia: definido o problema, o próximo passo é planejar uma estratégia para resolvê-lo; não há uma única estratégia ideal, ela o vai ser de acordo com o problema, com as preferências pessoais do solucionador; d) organização da informação: é o momento em que a informação é tratada, com vista a organizá-la melhor, pois ela vem sendo organizada e reorganizada desde o início do processo; e) alocação de recursos: recursos mentais são exigidos para a resolução de problemas e alocados conforme o seu resolvedor; f) monitorização: decidida a estratégia, não é prudente iniciar o processo e só parar para avaliá-lo ao término do mesmo, é necessário estar sempre avaliando para detectar se realmente o objetivo está sendo alcançado; g) avaliação: trata-se aqui, diferentemente da monitorização, de uma avaliação final na qual se verifica a consecução ou não do objetivo assim como a qualidade do processo.

Além da análise desses dois autores sobre os processos de resolução de problemas, muitos outros podem ser encontrados apresentando idéias a respeito. Entretanto, analisando os modelos apresentados pode-se observar que, basicamente, todos giram em torno da mesma seqüência de procedimentos. Variam apenas a nomenclatura, a ênfase em uma ou em outra fase do processo.

São exemplos de procedimentos heurísticos de solução de problemas: realizar tentativas por meio de ensaio e erro, envolvendo simplesmente a aplicação das operações pertinentes às informações dadas; aplicar a análise meios-fins; dividir o problema em subproblemas, estabelecendo submetas; padrões, considerando casos particulares do problema e chegando-se à solução a partir desses casos; procurar problemas análogos; ir do conhecido ao desconhecido, partindo do objetivo, ou do que deve ser provado e não dos dados; simulação, compreendendo a preparação e realização de um experimento, a coleta de dados e a tomada de decisão baseada na análise dos dados.

Independente do tipo de abordagem dada à resolução de problemas, registra-se que:

- Os planos, metas e submetas que o aluno pode estabelecer em sua busca são denominados estratégias ou procedimentos heurísticos de solução de problemas, enquanto que os procedimentos de transformação da informação requeridos por esses planos são denominados regras, algoritmos ou operações;
- A estratégia por si só não garante o sucesso, este dependerá também de técnicas que contribuam para que o sujeito desenvolva de maneira efetiva os seus planos;
- A concentração maior de recursos e de tempo na fase do planejamento global das estratégias leva a uma necessidade menor de esforço na hora da execução e conduz com maior probabilidade ao sucesso. Isso tem se revelado como um procedimento comum aos peritos. Em contrapartida, quando poucos esforços e tempo são usados nessa fase de planejamento global, partindo-se logo e intensamente para a execução do problema, a probabilidade de fracasso é maior. Nessa investida precipitada e mal direcionada, muito esforço é dispensado ao planejamento local e pode levar o sujeito a situações cada vez mais distantes da solução ideal. Essa é uma prática comum aos iniciantes (POZO, 1998).

Segundo a abordagem do processamento de informação, a aquisição pelo sujeito de estratégias variadas para a resolução de problemas parece também ser fonte importante de mudança impulsionando o seu desenvolvimento cognitivo (FLAVELL, 1999).

3.1.3.3 Os Problemas em Matemática

Relacionar problema à Matemática é algo automático, quase intuitivo. Quando um aluno fala que está resolvendo problemas, fica como que subtendido que ele está estudando Matemática. Entende-se, através dessa visão, que a Matemática e a solução de problemas envolvem determinadas capacidades intelectuais, isto é, se uma pessoa tem facilidade em Matemática, ela será uma pessoa que sabe raciocinar e pensar de maneira adequada e, reciprocamente, se uma pessoa sabe raciocinar de maneira adequada aprenderá com facilidade Matemática. Com isso, considera-se que ensinar os procedimentos matemáticos pode contribuir para desenvolver e exercitar a capacidade geral de raciocínio dos alunos. Equiparam-se as regras do “bom pensar”, aos procedimentos (algorítmicos e heurísticos) usados na resolução das tarefas matemáticas. Essa teoria sobre a natureza do conhecimento matemático tem sua origem na concepção formalista e idealista de Platão que acreditava ter o estudo da Aritmética maior efeito sobre o indivíduo, na medida em que ele é obrigado a raciocinar sobre situações abstratas.

A grande importância conferida à solução de problemas teria uma segunda justificativa, mais prática, a de ser a Matemática o idioma das ciências e da tecnologia. Assim, seu estudo e seu uso poderiam contribuir para um aumento do conhecimento científico e tecnológico de maneira geral. Essa concepção mais utilitária da Matemática, por sua vez, origina-se do pensamento de outro filósofo grego, Aristóteles, e também pode ser percebida nas atividades de muitos professores. Sua consideração traz implicações no conceito da utilização de problemas matemáticos que passa a ser pensada como a possibilidade do aluno adquirir determinadas técnicas e estratégias aplicáveis em diferentes campos e não na compreensão estrutural dos aspectos formais.

São duas visões diferentes, mas que podem ser complementares. Ambas, no entanto, apresentam a Matemática como uma área formal, com procedimentos do tipo geral, aplicáveis a diferentes conteúdos. O próprio livro de Polya (1986), "*How To Solve It*", que tanta influência tem tido no estudo e na solução de problemas, baseia-se na observação dos processos e procedimentos usados por matemáticos em tarefas específicas de Matemática.

No entanto, Echeverría (1998), a partir de revisão realizada por Schoenfeld (1992), mostra que pesquisas sobre o que os alunos pensam dessa disciplina revelam conceituações bem diferentes, fato este retratado na seguinte relação de mitos típicos dos estudantes sobre a natureza da Matemática: a) os problemas matemáticos têm uma e somente uma resposta correta; b) existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático e, normalmente, o correto é seguir a última regra demonstrada em aula pelo professor; c) os estudantes "normais" não são capazes de entenderem a Matemática; somente podem esperar memorizá-la e aplicar mecanicamente aquilo que aprenderam sem entender; d) os estudantes que entenderam a Matemática devem ser capazes de resolver qualquer problema em cinco minutos ou menos; e) a Matemática ensinada na escola não tem nada a ver com o mundo real; f) as regras formais da Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção.

As idéias dos alunos são, naturalmente, formadas a partir das suas experiências de sala de aula que, por sua vez, refletem mais as idéias do professor de como ensinar a matemática do que, propriamente, de como a disciplina está constituída. Assim, as idéias e a prática dos professores são percebidas nos diferentes significados dados pelos alunos à solução de problemas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1996/1998), a solução de problemas deve ser um recurso que possibilite aos estudantes “*mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance*”. Dessa forma, solucionar um problema na aula de Matemática deve ter o papel de “ponto de partida”, despertando o interesse do aluno, dando significado ao conhecimento matemático e desenvolvendo a sua capacidade de pensar. A classificação, a seriação e ordenação de objetos, a utilização de diferentes tipos de medidas, a análise de regularidades entre determinados fatos, podem constituir problemas com objetivos tão diversos como traduzir as experiências cotidianas para uma linguagem matemática, estabelecer conjecturas e hipótese, explorar e modelar as estratégias de resolução de tarefas adquiridas em contextos informais ou adquirir uma serie de atitudes em relação à matemática.

Os problemas em Geometria apresentam uma grande originalidade em relação às muitas outras questões matemáticas que possam ser propostas aos alunos. Ela exige um processo de visualização, de apreensão seqüencial do objeto geométrico e de raciocínio, podendo implicar na elaboração de uma demonstração.

A análise cognitiva de um problema geométrico, segundo Duval (1988), implica na produtividade heurística da figura e na visibilidade das operações ligadas a essa produtividade. A produtividade heurística da figura depende da congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático possível. A visibilidade das operações é aleatória, depende do indivíduo e das suas operações com a figura.

Para Duval, o desenvolvimento das funções cognitivas pode ser favorecido com a organização de problemas de Geometria matematicamente próximos que solicitem os mesmos conhecimentos e tal desenvolvimento pode determinar uma categorização cognitiva indispensável ao aprendizado da demonstração. Dessa forma, ele orienta três níveis de problemas:

- Nível (1): aqueles em que há congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste caso uma apreensão discursiva não é necessária.
- Nível (2): aqueles em que a apreensão discursiva é necessária porque não há mais congruência ou porque é explicitamente pedido como justificativa.
- Nível (3): aqueles que exigem mais de uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos.

São condições que podem facilitar o seu aprendizado: prática sistemática dos problemas do nível (1); distinção entre apreensão perceptiva e discursiva; representação de uma rede de propriedades formando uma rede semântica de todos os conhecimentos solicitados na demonstração; compreensão da diferença entre uma argumentação no quadro da prática natural do discurso e a articulação dedutiva.

A Resolução de Problemas é um bom caminho para se ensinar Matemática. No contexto da Educação Matemática, um problema ainda que simples pode suscitar o gosto pelo trabalho mental de desafiar a curiosidade e proporcionar ao aluno o gosto pela descoberta de sua resolução. Através dessas experiências, o desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível pode ser promovido.

As etapas de Resolução de Problemas propostas por Polya e outros autores não se constituem em uma receita mágica para resolver todo e qualquer problema, mas podem ajudar bastante a quem quer se tornar um bom resolvedor.

O estudo da heurística de Resolução de Problemas é um dos assuntos que mais indaga a origem da criatividade do pensamento humano e que pode, por isso, representar um elemento importante do desenvolvimento da Matemática. Um professor conhecedor de heurística de resolução de problemas possui um diferencial a seu favor, pois provavelmente terá uma visão mais ampla da Matemática e com isso mais recursos e facilidades para lidar com os problemas que aparecerem em sua lida e para desenvolver seu trabalho pedagógico, facilitando e aprimorando o processo ensino-aprendizagem de seus alunos.

3.1.4 As Novas Tecnologias e o Desenvolvimento Cognitivo

A técnica é a reedificação eventual do saber do homem em coisas duráveis ou facilmente reproduzíveis, tais como: o papel, máquinas, móveis, aparelhos de som, meios de transporte. Mesmo que possam ser identificadas características cognitivas comuns a todos os homens, há variáveis, como a época, a cultura, as circunstâncias que condicionam a maneira de conhecer, de pensar, de sentir de um determinado grupo. As tecnologias são, dessa forma, artefatos que representam de alguma maneira o estágio de desenvolvimento de uma comunidade, podendo, ao mesmo tempo, ser instrumentos provocadores de mudança e de evolução nesta mesma comunidade.

Se, inicialmente, as tecnologias objetivavam a sobrevivência e a substituição do trabalho físico do ser humano, hoje elas buscam ampliar o alcance e o poder do seu pensamento. De acordo com Lévy (2001), vivemos hoje uma época limítrofe na qual toda a antiga ordem das representações e dos saberes oscila para dar lugar a modos de conhecimentos pouco estabilizados. É um raro momento em que a partir de uma nova configuração técnica, isto é, de uma nova relação com os cosmos, um novo estilo de humanidade é inventado. Novas maneiras de pensar e de conviver estão sendo elaboradas no mundo das telecomunicações e da informática. As relações entre os homens, o trabalho e a própria inteligência dependem, na verdade, da metamorfose incessante de dispositivos informacionais de todos os tipos. Escrita, leitura, visão, audição, criação, aprendizagem, são elementos capturados por uma informática cada vez mais avançada. O final do século XX registrou um conhecimento por simulação que os epistemologistas ainda não haviam cogitado.

Esse mesmo autor denomina de tecnologias da inteligência as tecnologias associadas à memória e ao conhecimento. São as tecnologias intelectuais de que se dispõem em cada ocasião, referindo-se à oralidade, à escrita e à informática. Ele defende, ainda, os relacionamentos dessas tecnologias com as estruturas cognitivas do homem, baseado na idéia de ser o pensamento fruto da conexão entre neurônios, módulos cognitivos, humanos, instituições de ensino, línguas, sistemas de escrita, livros e computadores, transformando e traduzindo as representações. Refere-se a essa rede como a ecologia cognitiva: um coletivo pensante, *homens-coisas*, dinâmico povoado por singularidades atuantes e subjetividades mutantes. Assim, o pretenso sujeito inteligente nada mais é do que um dos micro-atores de uma ecologia cognitiva que o engloba e o restringe.

Em relação ao entendimento da Informática nesse contexto, Borba & Penteado (2001) colocam que ela é uma nova extensão de memória com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência, permitindo que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar baseados na simulação, na experimentação, e em uma nova linguagem que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. Os computadores reorganizam o pensamento, estando inclusos neste a formulação e resolução de problemas e o julgamento de valor de como se usa um dado conhecimento.

Reportando-se à concepção construtivista de aprendizagem, sabe-se que ela é vista como um processo que depende fundamentalmente das ações do sujeito e de suas reflexões sobre essas ações. No contexto da matemática, o mundo físico é rico em objetos concretos para o início da sua aprendizagem no geral e da aprendizagem de caráter espontâneo. No momento, porém, em que precisamos lidar com a construção de objetos mais complexos e abstratos, não encontramos recursos materiais para tal.

Em Geometria, a superação dessas dificuldades, passa pela possibilidade de acesso a um meio que provoque *abstrações reflexionantes*, *apreensões operat*órias da figura, sem que se perca de vista a necessária fusão entre os componentes conceituais e figurais do objeto geométrico em estudo, como já comentado anteriormente.

Para Piaget (1973), o pensamento concreto já se encontra em formação quando a criança entra no primeiro ano escolar, aos seis anos, e é consolidado nos anos seguintes. O pensamento formal não se desenvolve antes dos doze anos, ou por volta dos doze anos, e como sugerem alguns pesquisadores, algumas pessoas nunca desenvolvem o pensamento formal de maneira completa. No caso da Matemática formal, tanto há uma falta de materiais formais quanto um bloqueio cultural para o seu aprendizado.

Segundo Papert (1988), a possibilidade de que o computador possa concretizar o formal é efetiva. Sob este prisma, o computador pode nos permitir mudar os limites entre o concreto e o formal. Conhecimentos que só eram acessíveis através de processos formais podem, agora, ser abordados concretamente. A verdadeira mágica vem do fato de que estes conhecimentos incluem elementos necessários para tornar alguém pensador formal. Tal idéia pode ser concretizada levando-se em consideração dois tipos de pensamentos que, segundo Piaget, estão associados ao estágio formal do desenvolvimento intelectual: pensamento combinatório, onde se raciocina em termos do conjunto de todos os estados possíveis de um sistema, e pensamento auto-referencial, da reflexão sobre o próprio pensamento. Papert afirma que sempre foi motivado pela idéia de que as crianças poderiam também se beneficiar da maneira pela qual os modelos do computador pareciam capazes de dar forma concreta a áreas do conhecimento que pareciam ser anteriormente intangíveis e abstratas.

Experimento típico em pensamento combinatório: é pedido a crianças para formarem todas as possíveis combinações de cubos de cores diferentes. Observa-se que essa tarefa é impraticável para crianças antes de chegar a 5ª ou 6ª série. O que faz essa tarefa, diferentemente de outras atividades intelectuais, ser tão difícil para crianças de sete ou oito anos? Essa estrutura lógica é essencialmente mais complexa? Pelas explicações de Piaget, é possível que ela requeira um mecanismo neurológico que não amadurece antes da entrada na puberdade. Segundo Papert, uma explicação mais plausível é propiciada pela observação da natureza da cultura. A tarefa de combinar famílias de cubos pode ser vista como a construção e execução de um programa bastante comum, através do qual duas repetições são encadeadas (*nested loops*): fixe uma primeira cor e a combine com todas as segundas cores possíveis; repita isso até que todas as primeiras cores tenham sido esgotadas. Para quem está habituado com computadores e computação, não existe nada de formal nem abstrato nesta tarefa. Enquanto nossa cultura é rica em modelos e ferramentas para a criança pensar em coisas tais como: quantidade, pares, duplas e correspondências um-a-um de todos os tipos, ela é relativamente pobre em modelos de procedimentos sistemáticos. Sem o incentivo ou os materiais para construir formas poderosas e concretas para se pensarem problemas que envolvem sistematização, as crianças são obrigadas a abordá-los de maneiras tateantes e abstratas. Assim fatores culturais podem explicar a diferença na idade em que as crianças constroem seu conhecimento intuitivo de quantidade e o de sistematização.

Se até então se considerava que o progresso intelectual evolui por raciocínios que avançam de um plano concreto a um plano abstrato formal, hoje a possibilidade de manipular objetos na tela do computador revela outras formas de pensamento presentes na criança e nos adultos quando engajados em sofisticadas atividades intelectuais. É o pensamento denominado de bricolage ou pensamento concreto (trabalho realizado usando intuição e pouco planejamento). Neste tipo de pensamento, o sujeito cria modelos, faz simulações (PAPERT, 1988).

Segundo Gravina (2001), a pesquisa matemática é favorecida pelos ambientes informatizados na exploração, na elaboração de conjecturas e no refinamento destas. A tecnologia informática, com as linguagens de programação acessíveis aos não especialistas, com as ferramentas de autoria, modelagem e simulação, vêm oferecendo ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação dos funcionamentos cognitivos. As ferramentas de modelagem, com o progresso das linguagens de programação orientadas a objetos, têm sua possibilidade de dimensionamento e manipulação dos modelos ampliada. A elaboração desses modelos pelo aluno é relevante porque eles representam instâncias de representação de suas imagens mentais, oportunizando, assim, a sua exteriorização. Sabemos que a partir do conhecimento intuitivo do aluno é que se constrói o conhecimento cientifico. Por outro lado, as simulações e as explorações exteriorizam a atividade intelectual que antecede o pensamento formal.

O potencial da tecnologia informática na educação matemática é representado por vários ambientes, principalmente: a) a tartaruga Logo de Papert, um dos primeiros suportes informáticos para pensamentos de natureza visual; b) o *software Modellus* (TEODORO, VIEIRA E CLÉRIGO), com possibilidades de modelagem e simulação de fenômenos em diferentes áreas do conhecimento, proporciona um ambiente onde o aluno pode trabalhar com diferentes representações do objeto matemático: analógicas, analíticas e gráficas; c) os ambientes de Geometria Dinâmica que servindo de suporte às instâncias de representação de objetos geométricos, se constituem em ferramentas de grande potencial para a exteriorização e versatilização de pensamentos de natureza visual.

Através do estabelecimento de relacionamentos entre aprendizagem e processos cognitivos, evidencia-se aqui uma consideração fundamental para o presente estudo, a de que os ambientes informatizados podem ser ferramentas de grande potencial no processo de construção do conhecimento, particularmente em educação matemática. Porém, não se pode deixar de levar em consideração a forma de "fazer pedagógico", em consonância com estratégias didáticas adequadas e planejadas para que este diferencial possa efetivamente contribuir qualitativamente com o processo ensino-aprendizagem. É o que vai ser discutido na abordagem didática da construção do conhecimento, a seguir.

3.2 Abordagem Didática

A Didática da Matemática, segundo Pais (2001), dentro da grande área de Educação Matemática, objetiva a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. Compreende tudo aquilo que envolve as relações entre professor, aluno e saber.

Na Escola Francesa da Didática da Matemática, encontram-se investigações consistentes sobre as dificuldades dos alunos em situações de ensino e aprendizagem. Uma das características principais dessa Escola é a formalização conceitual de suas constatações práticas e teóricas para a qual muito contribuíram pesquisadores como: Brousseau, Chevallard, Arsac, Douady, Barbin, Balacheff, Duval. Nessa linha, desenvolveram-se conceitos como: transposição didática, obstáculos epistemológicos, contrato didático, situações didáticas. A Escola apresenta, também, uma metodologia de pesquisa própria e diferenciada: a Engenharia Didática.

Na Psicologia do Desenvolvimento o tratamento dado ao conhecimento é intransitivo, isto é, são conceitos gerais aplicáveis e mais voltados para uma análise dos processos de pensamento onde a espontaneidade é privilegiada. Em situações de aprendizagem, há de se considerar, fundamentalmente, o conteúdo nas suas especificidades e inerentes dificuldades. Todo ensino e aprendizagem são, necessariamente, ensino de um determinado conhecimento. Nessas condições, o conhecimento tem um caráter transitivo por se direcionar a determinado conteúdo (VERGNAUD, 1990).

Nem sempre, porém, as estruturas cognitivas dos alunos estão prontas para a construção dos saberes matemáticos, o que se verifica, por exemplo, no aprendizado das demonstrações que solicitam estruturas de pensamento ao nível operatório-formal. É o próprio processo de aprendizagem desencadeado com a intenção de se ensinar um certo saber matemático que permite potencializar e, até mesmo, desenvolver os aspectos cognitivos. Cada aluno tem uma bagagem intelectual de conhecimentos prévios e de ferramentas mentais que podem favorecer ou dificultar a nova aprendizagem. Tal aprendizagem exige, muitas vezes, como no caso das demonstrações, construções não espontâneas ou naturais. O conflito entre as concepções dos alunos e o saber, objeto da aprendizagem, provoca desequilíbrios e, na superação destes, é que o aluno constrói o novo conhecimento e pode desenvolver seu pensamento, conforme ilustrado na Figura 3.4.

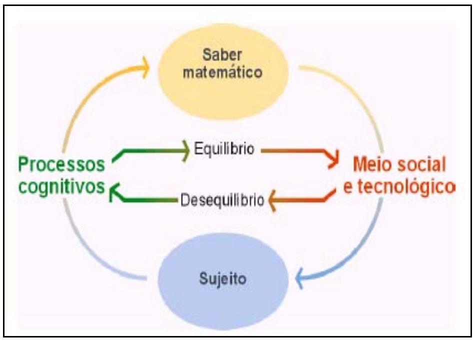


Figura 3.4: Os equilíbrios / desequilíbrios do sujeito (Fonte: Gravina, 2001)

As investigações da escola francesa caracterizam-se pela integração de três grandes eixos: os funcionamentos cognitivos que permeiam o processo de aprendizagem, a natureza do meio que propicia a aprendizagem e a natureza do saber matemático. Elas compartilham, segundo Gravina (2001), princípios gerais como:

a) o aluno aprende ao adaptar-se a um meio que é fonte de dificuldades, contradições, equilíbrios e desequilíbrios: tomam-se aqui aportes da teoria piagetiana e seu desdobramento sócio-genético;

b) um meio sem intenções didáticas é insuficiente para a aquisição de saberes matemáticos e, portanto, cabe ao professor organizar o meio mediante a criação de situações provocadoras do aprendizado. Tais situações devem engajar, decisivamente, os saberes matemáticos cuja aquisição é desejada.

Encontramos na teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau (1986), um marco teórico importante dessa escola. Trata de um estudo sobre fatos que devem se levados em consideração ao se preparar e apresentar atividades sobre determinados conteúdos matemáticos, visando realizar uma educação matemática mais significativa para o aprendiz.

Nesse modelo de Brousseau, a situação didática é desenvolvida em fases. Na primeira fase, o professor apresenta um problema ou atividade aos alunos que desperte neles o desejo de resolvê-lo. Deve ser uma atividade organizada de maneira que propicie a devolução do problema, o que significa uma atividade por meio da qual o professor comunica um problema ao aluno para que o mesmo se converta em seu problema, sentindo-se este aluno como responsável por sua resolução e aceitando o desafio de resolvê-lo. Esta é a fase da contextualização e devolução que reflete as expectativas do professor na concepção da atividade, considerada a intencionalidade de construção de determinado saber. O trabalho pedagógico de escolher as atividades a serem desenvolvidas com os alunos, deve ser realizado pelo professor, pois ele é quem conhece a realidade de sua turma e que será capaz de elaborar atividades, dentro do nível da turma e que favoreçam o aparecimento das situações adidáticas.

A segunda fase (da situação adidática) compreende os momentos de *ação, formulação* e *validação.* Segundo Maiole (2002), na busca da solução do problema, o aluno realiza ações mais imediatas que produzem conhecimento de natureza experimental do conhecimento. Ele vai escolhendo ou desenvolvendo estratégias para a solução sem preocupação com explicitação de argumentos de natureza teórica que justifiquem a validade de sua resposta. Nas situações de formulação, os alunos são levados a modificar a linguagem usual para que possa ser compreendido por todos e para que considere os objetos e as relações pertinentes à situação. Segue o momento em que os alunos são levados a convencer os outros das validades de suas afirmações mediante a utilização de mecanismos de prova. É o momento em que a comprovação empírica deve ser corroborada por uma validação semântica e sintática.

Numa análise das propostas das situações adidáticas relatadas acima, pode ser percebido um relacionamento estreito destas com as propostas de Piaget, no momento em que a ação do aluno é privilegiada numa posição de construção do seu conhecimento.

Na terceira fase, da institucionalização, os alunos são levados a assumir o significado socialmente estabelecido de um saber que foi por eles elaborado. Nessa situação, o professor retorna à direção das atividades visando estabelecer o caráter objetivo e a universalidade do conhecimento, bem como a correção de possíveis distorções sofridas nas fases anteriores.

Entretanto, o saber que se trabalha em sala de aula não aparece nesse ambiente exatamente como foi produzido na comunidade científica. Ele passa por uma série de transformações para que possa se transformar em uma saber a ser ensinado. Chevallard (1985) denomina esse processo de Transposição Didática. Num primeiro momento, o conhecimento cientifico sofre uma transformação que envolve os elementos responsáveis por estabelecer o que deve ser ensinado na escola (professores, pedagogos, técnicos de instituições do Governo). Os objetos de ensino geralmente são organizados em propostas curriculares oficiais que servem de orientação aos livros didáticos e de parâmetros para os professores.

O momento final da transformação sofrida pelo saber científico é aquele que acontece na sala de aula tendo no professor o elemento humano responsável por tal transposição e sendo gerido por outro fenômeno didático: o contrato didático.

3.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Numa análise dos aspectos que se relacionam à transposição didática das demonstrações através do ensino da geometria, aqui será abordado o tratamento dado ao seu ensino e à sua utilização pelos Parâmetros Curriculares Nacionais/Introdução e Parâmetros Curriculares Nacionais/ Matemática/ 5ª à 8ª séries (1998).

Dentre as orientações gerais para a área da Matemática, no Ensino Fundamental, (PCNs/ Introdução, 1998), é destacada a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo. Na discussão sobre os conteúdos das diversas áreas, numa abordagem procedimental, encontramos a seguinte colocação:

> Em Matemática, uma das questões centrais do trabalho, refere-se ao procedimento de validação. Trata-se de o aluno saber por seus próprios meios que o resultado que obteve é razoável ou absurdo, se o que utilizou é correto ou não, se o argumento de seu colega é consistente ou contraditório. Ao longo da escolaridade, os alunos aprendem a praticar ações cada vez mais complexas, com maior autonomia e maior grau de sociabilidade (p.77).

Nas orientações gerais para o ensino da Matemática no Ensino Fundamental, já se prevê, então, um trabalho com as demonstrações em seus diferentes níveis de aprofundamento, desde as argumentações às demonstrações formais, numa preocupação com o desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo dos alunos e de suas competências.

Os conteúdos selecionados, no Ensino Fundamental, aparecem organizados em blocos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas, tratamento da informação. Eles passam, ainda, por uma organização em ciclos (quatro). Nas considerações sobre o terceiro ciclo (quintas e sextas séries), podemos registrar sobre o ensino e aprendizagem que:

> Estímulo à capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler idéias matemáticas, interpretar significados, pensar de forma criativa, desenvolver o pensamento indutivo/ dedutivo, é o caminho que vai possibilitar a ampliação da capacidade para abstrair elementos comuns a várias situações de aprendizagem, para fazer conjecturas, generalizações e deduções simples já que eles não têm muita flexibilidade para isso, como também para o aprimoramento das representações, ao mesmo tempo que permitirá aos alunos irem se conscientizando da importância de comunicar suas idéias com concisão. (p.63).

Nos comentários sobre os conteúdos deste mesmo terceiro ciclo, encontramos:

> Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração. Assim é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (p.70).

Na seleção dos conceitos e procedimentos para esse ciclo, encontra-se a sugestão de que seja feita a verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

Podemos observar, então, que já se prevê neste ciclo o início de um trabalho com as demonstrações, embora num nível de argumentações que se apóie fundamentalmente em concretizações. Isso significa estar utilizando as demonstrações na sua categoria pragmática (BALACHEFF, 1988).

No quarto ciclo, destaca-se no ensino e aprendizagem que a observação ganha em detalhes, ampliam-se as capacidades para pensar de forma mais abstrata e de argumentar com maior clareza (p.81).

Na descrição dos conteúdos, no bloco do Espaço e Forma, encontramos:

> [...] os problemas vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria.
>
> [...] a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações. Mesmo que a argumentação e a demonstração empreguem freqüentemente os mesmos conectivos lógicos, há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação. O refinamento das argumentações produzidas ocorre gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações.
>
> Embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos (p.86).

Na listagem dos conteúdos deste quarto ciclo, estão previstas: a) a verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não convexos; b) a verificação de propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos; c) a verificação experimental e aplicações do teorema de Tales; d) verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.

Na parte das orientações didáticas, há uma sugestão de demonstração do teorema de Pitágoras utilizando conceito de área e de congruência de figuras. Há também uma demonstração do teorema da soma dos ângulos internos do triângulo pela decomposição de composição de um modelo material de um triângulo.

> Apesar da força de convencimento, para os alunos, que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências possam ser aceitas

> como “provas” no terceiro ciclo, é necessário no quarto ciclo que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais (p. 127).

É ponto relevante, portanto, do ensino no quarto ciclo o enfoque a problemas de Geometria que vise o desenvolvimento da capacidade de argumentar dos alunos através do raciocínio dedutivo, assim como o estímulo ao trabalho com algumas demonstrações simples.

Assim, encontram-se, nos PCNs, orientações a respeito das demonstrações no sentido de favorecer seu desenvolvimento a partir das concretizações dos teoremas com posterior demonstração formal. São privilegiadas as conjecturas e as relações que as vinculam com o discurso teórico, bem como, no que diz respeito às principais funções do desenho. A pretensão não é de uma abordagem tradicional, em que a memorização e a reprodução sejam as tônicas, mas que os alunos se envolvam em suas próprias tentativas de construção de uma justificativa matemática, utilizando eventualmente, métodos empíricos de verificação.

Evidencia-se, aqui, a indicação, encontrada nesses documentos oficiais, do recurso às tecnologias informáticas como uma alternativa cada vez mais indispensável para o processo pedagógico seja pela sua presença destacada na sociedade moderna seja pelas possibilidades de sua aplicação no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Ensino-aprendizagem é, no entanto, um complexo processo que envolve um relacionamento entre o professor, o aluno e o saber. Buscou-se neste estudo uma melhor compreensão dos processos cognitivos que perspassam à construção do conhecimento, bem como dos fenômenos didáticos que envolvem a relação triangular (professor, aluno, saber) para um melhor direcionamento dos encaminhamentos a serem feitos. Por outro lado, tais reflexões embasaram a definição do uso de recursos informatizados na mediação dos trabalhos desta investigação que se voltou à formação do professor de Matemática.

Capítulo 4. Informática na Educação

"Existe a necessidade de sermos homens e mulheres de nosso tempo que empregam todos os recursos disponíveis para dar o grande salto que nossa Educação exige".

Paulo Freire

O termo "Informática na Educação" relaciona-se aos processos ligados à problemática da inserção do computador no processo de aprendizagem dos conteúdos curriculares de todos os níveis e modalidades de educação. Uma das propostas da Informática na Educação é a de repensar o papel da escola à luz das novas tecnologias (VALENTE, 1993), em outras palavras rever o processo de ensino-aprendizagem, baseado no uso do computador.

Sabemos que o uso da tecnologia informática é uma realidade no cotidiano de muitas pessoas. A sociedade informacional não é mais uma abstração e sim uma realidade econômica e cultural. Não depende de estarmos contra ou a favor dela, ela chegou e está aí consolidada. No entanto, em relação ao seu emprego na educação, a realidade é outra. Temos uma sociedade da informação bem avançada, mas nossos professores continuam com uma prática pedagógica nos mesmos moldes da tradicional. Dificilmente se encontram práticas realmente transformadoras e suficientemente enraizadas para que se possa dizer que houve uma transformação efetiva do processo educacional como, por exemplo, uma transformação que enfatize a criação de ambientes de aprendizagem, nos quais o aluno constrói o seu conhecimento, ao invés de o professor transmitir informação ao aluno.

São muitos os questionamentos que podem ser levantados acerca dessa problemática: como surgiu e se desenvolveu a idéia das tecnologias em educação, no Brasil; que abordagens são utilizadas; que características um *software* deve apresentar para ser considerado educativo; qual a contribuição da informática, especificamente para a matemática; de que maneira o professor se relaciona com essas tecnologias.

No intuito de refletir sobre esses questionamentos, são abordados neste capítulo tais aspectos da Informática na Educação para, num momento final, tratarmos especialmente de questões relativas aos *softwares* de Geometria Dinâmica que se constituem na ferramenta de trabalho desta investigação.

4.1 Histórico

A Informática na Educação surgiu no Brasil, por volta dos anos 70, da década passada, a partir do interesse de educadores de algumas universidades brasileiras (UFRJ, UFRGS e UNICAMP), motivados pelo que já vinha acontecendo em outros países como nos Estados Unidos da América e na França.

Em 1980, novas experiências surgiram na UFRGS apoiadas na teoria de Piaget e em estudos de Papert, destacando-se o trabalho realizado pelo Laboratório de Estudos Cognitivos do Instituto de Psicologia (LEC/UFRGS) que explorava a linguagem de computador, através da linguagem Logo. Em 1983, foi criado o projeto EDUCOM implantado em cinco universidades: UFPe, UFMG, UFRJ, UFRGS e UNICAMP. Esse projeto contemplou uma diversidade de abordagens pedagógicas, como o desenvolvimento de *softwares* educativos e o uso do computador como recurso para resolução de problemas. Em 1989, foi instituído o Programa Nacional de Informática na Educação (PRONINFE), substituindo o EDUCOM. Seu principal objetivo era a formação de recursos humanos por meio da criação de uma infra-estrutura de pesquisa, de desenvolvimento e de treinamento em cada estado da federação. Em 1997, substituindo o PRONINFE, surge o Programa Nacional de Informática Educativa, o PROINFO. Sua diferença, em relação ao PRONINFE, se apresenta em uma infra-estrutura voltada para os Ensinos Fundamental e Médio, com projetos estaduais autônomos de IAE (Informática Aplicada à Educação), sem a exigência de parcerias com instituições universitárias; uma infra-estrutura voltada para os Ensinos Fundamental e Médio e efetiva informatização das escolas que tivessem um maior número de alunos matriculados (ELIA, 2004).

A partir de 2001, iniciaram-se os trabalhos do Consórcio CEDERJ (Consórcio das Universidades do Estado do Rio de Janeiro) com a proposta de promover o ensino das licenciaturas na modalidade semipresencial. É um projeto de grande importância pelas oportunidades que oferece para a formação acadêmica dos professores que já estão em sala de aula, assim como de novos licenciados, por ser um sistema que prevê o estudo das aulas em casa, com avaliações presenciais realizadas em fins-de-semana e obrigatoriedade de comparecimento aos pólos somente às aulas de laboratório. Um dos suportes oferecidos aos alunos compreende a assessoria tanto a distância como presencial de tutores para as disciplinas dos períodos iniciais (ARAÚJO, 2004).

Apesar dos esforços e iniciativas de alguns programas e entidades, e das qualidades inerentes ao computador, a sua disseminação nas escolas ainda está hoje muito aquém do que se anunciava e desejava. As propostas de informatização das escolas não são cumpridas satisfatoriamente, nem tão pouco a preparação dos professores o está sendo.

Sem a devida preparação do professor e a elaboração de novos objetivos para o ensino, a simples iniciativa de colocar um computador à disposição de cada criança na escola, certamente, não solucionará o problema da educação, pois quase sempre o uso do computador tem consolidado o ensino tradicional.

4.2 Paradigmas do Uso do Computador

O uso do computador na educação deve ser justificado por estar atrelado a uma nova perspectiva educativa. Segundo Valente (1999), o uso do computador pode ser entendido de duas maneiras: numa abordagem instrucional ou numa abordagem construcionista. Pelo paradigma instrucional, uma série de informações é implementada num programa e essas informações são passadas ao aluno na forma de um tutorial, exercício-e-prática ou jogo. Esses sistemas podem, ainda, fazer perguntas e receber respostas no sentido de verificar se a informação foi retida. São características de um sistema de ensino instrucionista, em que se usa o computador como meio para transmitir a informação ao aluno, mantendo-se a prática pedagógica vigente. A utilização segundo esse modelo facilita a implantação do computador na escola, pois não quebra a dinâmica por ela adotada e, além disso, não exige muito investimento na formação do professor. Para ser capaz de usar o computador nessa abordagem basta ser treinado nas técnicas de uso de cada *software*.

A abordagem construcionista tem por objetivo proporcionar condições para o aluno construir seu conhecimento em ambientes de aprendizagem que incorporem o uso do computador. A informação é processada pelos esquemas mentais o que acaba enriquecendo-os e possibilitando a sua utilização diante de situações problema ou desafios. Programas que podem ser enquadrados nessa visão são os que possibilitam processamento de texto, pesquisa a banco de dados, resolução de problemas, atividades de geometria dinâmica e linguagens de computador, como o Logo. Sua fundamentação envolve a Epistemologia Genética e as Teorias Cognitivas.

O uso do computador na criação de ambientes de aprendizagem que enfatizam a construção do conhecimento apresenta, no entanto, enormes desafios. Primeiramente, implica em entender o computador como uma nova maneira de representar o conhecimento provocando um redimensionamento dos conceitos já conhecidos e possibilitando a busca e compreensão de novas idéias e valores. Usar o computador com essa finalidade requer a análise cuidadosa do que significa ensinar e aprender, bem como demanda rever o papel do professor nesse contexto. Em segundo lugar, a formação desse professor envolve muito mais do que a idéia de simplesmente provê-lo com conhecimento sobre computadores. O preparo do professor não pode ser uma simples oportunidade para passar informações, mas deve propiciar a vivência de uma experiência, oferecendo condições para que ele construa conhecimento sobre as técnicas computacionais e entenda por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica. Papert (1988) define a aplicação da informática no contexto educacional numa perspectiva construcionista, como aquela em que colaboram, de forma integrada, o computador e outros materiais didáticos para a ocorrência de situações significativas de aprendizagem. A construção do conhecimento acontece quando o aluno constrói um objeto de seu interesse, como uma obra de arte, um relato de experiência, um programa de computador.

Encontramos na literatura, outras maneiras de classificar o uso do computador em educação. Citaremos aqui, uma classificação descrita por Kemmis, Atkin & Wright e voltada para quatro paradigmas educacionais (UNDERWOOD & UNDERWOOD, 1990): a) paradigma instrucional: incluindo instrução programada e exercício e prática; b) paradigma revelatório: em que o aluno faz descobertas através do uso de simulações; c) paradigma conjectural: no qual o computador é usado para construção e avaliação de modelos; d) paradigma emancipatório: em que o computador é usado como ferramenta para a manipulação de textos, tratamento e recuperação da informação.

O primeiro paradigma equivale a abordagem instrucionista, enquanto os três últimos podem ser vistos dentro da visão construcionista, sugeridas por Valente (1993).

4.3 Escolha do *Software* Educacional

O desenvolvimento de um *software* educacional é um trabalho complexo que envolve profissionais de diferentes áreas e requer um sério trabalho investigativo. Cabe à Informática na Educação estabelecer este diálogo, possibilitando um maior entendimento dos avanços, necessidades e expectativas das áreas envolvidas.

As opções de *softwares* educacionais, atualmente, são variadas e ricas. O problema está em qual escolher para trabalhar determinado conteúdo de acordo com os objetivos propostos. Alguns apresentam características que favorecem a compreensão, como no caso dos de programação. Outros, onde certas características não estão presentes, requisitam um trabalho complementar do professor para que se possa favorecer a compreensão, é o caso dos tutoriais. A integração de uma ferramenta computacional a conteúdos disciplinares implica conhecer, com propriedade tanto o conteúdo quanto a ferramenta computacional em si.

Temos diversos tipos de *softwares* educacionais, como: tutorial, simulação, modelagem, linguagem de programação, jogos, geometria dinâmica, etc. Os tutoriais e os *softwares* do tipo exercício e prática, oferecem atividades que podem facilmente ser reduzidas ao fazer, ao memorizar informação, sem exigir que o aprendiz compreenda o que está fazendo. A programação transforma o computador numa ferramenta para resolver problemas. A programação é uma atividade que requer a utilização de conceitos, estratégias e um estilo de resolução de problemas. Descrição da resolução do problema em termos da linguagem de programação pode ser vista como a explicitação do raciocínio do aluno. Nos programas de simulação e modelagem, podemos distinguir modelagem como o processo de criação de um modelo pelo aluno; na simulação, parte-se do modelo de um fenômeno já implementado na máquina, cabendo ao usuário a alteração de certos parâmetros e a observação do comportamento deste fenômeno, de acordo com os valores atribuídos. Os jogos educacionais, como a simulação, podem ser analisados em termos do ciclo descrição-execução-reflexão-depuração-descrição. Suas características de tutorial ou de programa de simulação aberta estão relacionadas com quanto o aprendiz pode descrever suas idéias para o computador. Os *softwares* de geometria dinâmica serão descritos e analisados com detalhes num momento adiante, por serem os utilizados nessa pesquisa. É fundamental que o *software* escolhido seja apreciado inicialmente pelo professor em uma situação prática de uso. A escolha do mesmo deve ser orientada pela pratica pedagógica do educador com seus alunos, pelo conteúdo a ser trabalhado e pelos objetivos a que se propõe.

O fato de ser escolhido um *software* com características construtivistas, não garante que seu uso pedagógico seja construtivista. A qualidade de ser construtivista na prática pedagógica é de responsabilidade do educador e tal fato demanda um discernimento maior por parte deste e, conseqüentemente, uma formação mais sólida e mais ampla tanto no domínio do currículo escolar como dos aspectos computacionais. Sem esses conhecimentos é muito difícil o professor saber integrar e saber tirar proveito do computador no desenvolvimento dos conteúdos. Assim, a formação de professores para implantar as transformações pedagógicas almejadas exige uma nova abordagem que supere as dificuldades em relação ao domínio do computador e ao conteúdo que o professor ministra.

4.4 Formação de Professores no Contexto de Informática na Educação

Inicialmente, será esclarecido em que sentido é usada a expressão formação de professores, neste texto. O entendimento aqui assumido concorda com as idéias de Garcia (1999):

> A Formação de Professores é a área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e praticas que, no âmbito da Didática e da Organização Escolar, estuda os processos através dos quais os professores, em formação ou em exercício, se implicam individualmente ou em equipe, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem (p. 26).

O termo formação inicial tem o significado daquela que antecede ao ingresso profissional, ou seja, aquela em que o professor ainda não está habilitado ao exercício da profissão. Quanto à formação continuada é a indicação da formação do professor em exercício. Com o recurso às chamadas novas tecnologias, surge a Informática na Educação como uma experiência que requer professores adequadamente preparados para desenvolver suas atividades de ensino, buscando não apenas a transmissão de conteúdos, mas essencialmente a construção do saber. De acordo com Valente (1997), a formação de professores na área de Informática na Educação vem acontecendo desde 1983, com as primeiras experiências do uso do computador nessa área. Essa formação tem apresentado características distintas de acordo com a necessidade de formação de profissionais qualificados, pelas limitações técnicas e financeiras, pelo nível de conhecimento que os pesquisadores dispõem e pelo interesse desses pesquisadores em elaborar e estudar novas metodologias de formação.

A Informática pode trazer grandes contribuições para a Educação, mas para tanto é imprescindível que haja forte investimento na formação dos professores. No caso da formação inicial, isso se constitui num desafio, pois significa introduzir mudanças no ensino-aprendizagem e nos modos de estruturação e funcionamento das escolas e universidades e de suas relações com o meio educativo. Apesar do longo tempo de debates e discussões acerca da Informática na Educação, ainda é muito pequeno o número de licenciaturas e cursos de magistério que oferecem disciplinas nessa área ou ate mesmo os que disponham de equipamentos os utilizem na formação de seus alunos. Desse modo a formação inicial do professor fica prejudicada, pois quando ele vai para a escola e enfrenta a necessidade de atuar pedagogicamente com os recursos da informática, se depara com muitos obstáculos que vão desde o manuseio da máquina à metodologia a ser aplicada, à escolha de softwares adequados.

O curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Rio de Janeiro, através de sua disciplina Informática Aplicada ao Ensino, é uma referência positiva dentro do processo de investimento na formação tecnológica de professores. Gandra *et al.* (2005), em relato de experiência com alunos desta disciplina, coloca que o objetivo central da mesma é fornecer conhecimentos teóricos e práticos ao futuro professor, visando à utilização do computador como ferramenta de apoio à sua prática profissional, por meio de uma abordagem cognitiva. Desse modo é incentivada a diversificação das metodologias na prática dos futuros professores em suas respectivas salas de aula.

Segundo Vieira (2004), é a partir dos anos noventa do século passado, todavia, que a formação de professores passa a ser objeto de maior interesse no campo educacional, tendência que se faz presente não apenas no Brasil, como no resto do mundo. Tais iniciativas coincidem com um aumento sem precedentes de publicações na área de formação de professores, com significativa contribuição de autores internacionais. Destacam-se estudos sobre vidas de professores (NÓVOA, 1995), competências de professores (PERRENOUD, 1999). Enfim, o mundo do professor é desvelado sob diferentes enfoques e visões teórico-metodológicas. Alguns desses autores foram tomados como referência para o desenvolvimento dessa dissertação. Perrenoud (1999), considera que dentro de sua nova função no contexto escolar, o professor tem que desenvolver competências para favorecer seu sucesso. A prática reflexiva e a participação crítica devem ser as orientações prioritárias na formação de professores e essa prática reflexiva deve repousar sobre uma base de competências profissionais. Novas competências ligadas às transformações do ofício do professor são apontadas por esse autor: organizar e coordenar situações de aprendizagens, por exemplo, trabalhando a partir das representações de seus alunos, engajando os alunos em atividades de pesquisa, em projetos de conhecimento; gerir a progressão das aprendizagens, através da concepção de situações-problema adequadas aos níveis e possibilidades dos alunos; participar da gestão da escola; servir-se de novas tecnologias, explorando as potencialidades didáticas de programas com relação aos objetivos dos vários domínios do ensino; gerir sua formação contínua, fazendo seu próprio balanço de competências e de programa pessoal de formação contínua. Defende, ainda, esse autor a necessidade da formação continuada do professor argumentando sobre o fato da formação inicial tornar-se rapidamente obsoleta diante da evolução das condições e dos contextos de ensino.

Garcia (1999), por sua vez, cita princípios que devem orientar a formação de professores, dentre eles destacaremos: conceber a formação de professores como um contínuo, percebendo-a como uma aprendizagem contínua, interativa, acumulativa, que combina uma variedade de formatos de aprendizagem; a necessidade de integração teórica-prática na formação de professores, de modo que o aprender a ensinar aconteça através de um processo em que o conhecimento prático e o teórico possam integrar-se num currículo orientado para a ação. Mas a prática, para que seja fonte de conhecimento, para que se constitua em epistemologia, tem de acrescentar análise e reflexão na e sobre a própria ação.

No que tange ao uso das novas tecnologias, Borba & Penteado (2001) se refere à resistência encontrada em grande parte dos professores e afirma que o seu uso exige movimento constante por parte dos professores para áreas desconhecidas. É necessário atuar numa zona de risco onde a perda de controle é algo que ocorre constantemente. O professor tem que enfrentar, além dos possíveis problemas técnicos, as perguntas imprevisíveis de seus alunos. Muitas dessas situações requerem uma exploração cuidadosa e nem sempre o professor tem uma resposta imediata. Para contorná-las ele precisa buscar ajuda em livros, colegas e até mesmo nos próprios alunos. Se o professor assumir essa zona de risco, ela na verdade se constitui como um momento de crescimento para ele, pois que se depara constantemente com a necessidade de buscar novos conhecimentos. É lamentável que nem todos estejam dispostos a enfrentar essas situações de mudança. Ponte (2003), acrescenta que para que haja mudanças, é preciso que o professor queira mudar e, com base nessa vontade, são fatores desencadeantes de mudança: ver sua prática como problemática de estudo, participar de grupo que reflita sobre suas próprias práticas e ter a oportunidade de trabalhar as novas tecnologias no ensino. Segundo Polettini (1996), a abordagem que mais contribui nos processos de mudança é a que integra conhecimento do conteúdo, de como lecionar o conteúdo e do currículo, pois fornece exemplos de atividade que os professores podem utilizar. O apoio próximo é decisivo no início do processo de mudança.

Quando pesquisas são feitas sobre professores que utilizam tecnologia informática, verificamos que uma característica comum a eles é a de estar em contato com grupos de pesquisa de alguma universidade ou da própria escola onde lecionam. Segundo Zulatto (2002), suportes como estes são muito importantes para o professor, pois é essencial para ele ao utilizar informática em suas aulas, poder compartilhar angústias, dificuldades, experiências e realizações. Em sua pesquisa sobre professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica, ela conclui que a inovação educacional é praticamente impossível de acontecer quando o professor se isola em seu ambiente de trabalho.

Valente (1999) recomenda que um curso de formação de professores em Informática na Educação deve se embasar na proposta construcionista, isto é, ser um curso fortemente baseado no uso do computador, realizado na escola onde ele trabalha, criando condições para que o professor possa aplicar os conhecimentos com seus alunos, como parte do processo de formação. Isso significa propiciar condições para que ele possa agir, refletir e depurar o seu conhecimento em todas as fases pelas quais ele deverá passar na implantação do computador em sua prática de sala de aula. O autor reconhece, porém, que para que a idéia se efetive de maneira satisfatória, é necessário um serviço de apoio técnico constante a esses professores ou a existência de uma rede virtual de formadores auxiliando os professores e outros profissionais na realização de ações que contribuam para a implementação do uso dos computadores na escola. E mais ainda, que as ações para a implantação da mudança deve envolver todos os segmentos da escola como a comunidade de pais, aluno, professores e administradores. Nesse sentido, suas idéias têm relações com as de Levy (2001) ao falar sobre a ecologia cognitiva.

Périsse (2001), por sua vez, pondera que a tecnologia deve ser vista como um meio e não como um fim e, por isso, deve estar integrada a tudo que acontece na escola. Esse autor defende a necessidade de se criar uma cultura de informática nas escolas, onde não somente professores e alunos são usuários, mas todos da escola, sem exceção. Assim, essa cultura informacional deve abranger toda a escola e não ser uma exigência curricular unicamente para as crianças, havendo uma utilização constante e real da informática, como acontece no dia a dia fora da escola, possibilitando seu uso para comunicação entre pessoas, grupos, organizações, através da interconectividade de redes e da cultura hipertextual. Estando a escola equipada com computadores em rede, *softwares* adequados e uma cultura informático-midiática atuando, ela poderá, como afirma Lévy (2001), tornar-se um lugar de "inteligência coletiva".

Uma experiência desse tipo é apontada por Périsse (2001) como acontecendo numa escola de educação da Bahia. A informática nessa escola transcendeu a antiga noção de ferramenta para se estabelecer como um fundamento de transformação de cultura escolar. O seu uso diário e contínuo está hoje inserido na vida da comunidade escolar, mediante o surgimento de uma sociedade de conhecimento, impossível de se concretizar antes do advento do cenário informático-midiático.

Borba & Penteado (2001) participam desse pensamento, ao discutirem sobre as implicações para o professor e sua formação com o advento dos computadores na escola. Eles apresentam a idéia de se perceber o professor como um nó de uma rede mais ampla que conecta atores tais como: o projeto pedagógico da escola, o computador, outras mídias, os centros de pesquisas, os técnicos, os alunos, as famílias, as regras sociais, as imagens, etc. Afirma que o uso do computador na escola não se consolidará com o apoio, apenas, de cursos esporádicos para professores provenientes de diferentes localidades e sujeitos a diferentes condições de trabalho. O trabalho individual contribui para que professores não saiam da zona de conforto, estimulando a estagnação. É o pensar e o agir coletivo que poderá impulsionar e manter o professor numa zona de risco de forma que ele possa usufruir o seu potencial de desenvolvimento. Vincular a formação ao ambiente de trabalho trata-se de uma perspectiva que fortalece a relação entre a teoria e a prática e que concebe o professor autor de seu processo de formação profissional.

4.5 Ambientes de Geometria Dinâmica

Ambientes de geometria dinâmica (GD) é a denominação dada às ferramentas informáticas para construções em Geometria. Dispõem de régua e compasso virtuais, com os quais objetos geométricos podem ser construídos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que constituem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizaram a situação e que foram definidas no processo de construção. Assim, a partir de um conceito ou teorema, é a ele associada uma coleção de desenhos em movimento em que as características invariantes que, então, aparecem correspondem às propriedades em questão.

Tal termo foi inicialmente utilizado por Nick Jackiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press Inc.*, com o objetivo de diferenciar os *softwares* de Geometria Dinâmica dos outros *softwares* de Geometria.

Esses programas permitem desenvolver trabalhos com diferentes conteúdos da Matemática e, até mesmo, de outras áreas como Física. São muito usados no ensino das geometrias euclidiana plana, não euclidiana e analítica.

Os ambientes de GD são “micro-mundos” que concretizam um domínio teórico, especialmente a geometria euclidiana, pela construção de seus objetos e de representações que podem ser manipuladas diretamente na tela do computador. O processo de construção dos objetos é feito mediante escolhas de primitivas disponibilizadas pelo programa em seus diferentes menus: pontos, retas, círculos, retas paralelas, retas perpendiculares, transformações geométricas. A interface de um desses programas pode ser vista na Figura 4.1.

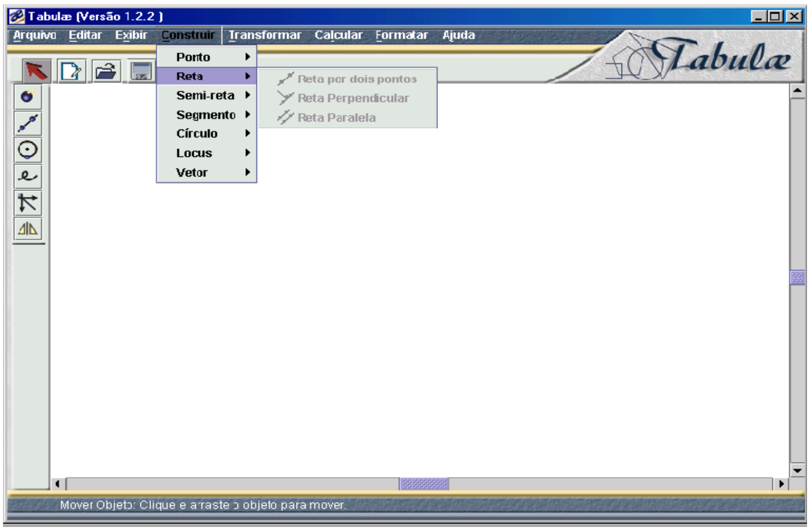


Figura 4.1. Interface do Tabulae

Segundo Laborde e Strässer (1990), *apud* Barroso (2000), "micro-mundos" são ambientes, em geral baseados no computador, que: fornecem um conjunto de primitivas (objetos e atividades) que podem ser combinados de forma a produzir efeitos pretendidos; oferecem uma variedade de modos diferentes para se obter um efeito pretendido; incorporam um domínio abstrato descrito no modelo; são abertos para receber novos elementos que podem ser adicionados na medida em que o "micro-mundo" possa ser usado para apresentar uma variedade de efeitos diferentes talvez apenas parcialmente relacionados; um "micro-mundo" implementado deve oferecer a possibilidade de manipulação direta dos objetos.

Os ambientes de GD oferecem aos usuários recursos particulares que o tornam um instrumento de indiscutível potencial educativo.

4.5.1 Recursos dos Ambientes de Geometria Dinâmica

Os ambientes de GD oferecerem inúmeros recursos comuns a outros *softwares* de geometria, como: no formatar, na medição de elementos da figura. Há, no entanto, alguns recursos próprios desses ambientes. O mais característico desses recursos é o arrastar[10].

Selecionando com o mouse um ponto do objeto construído, este é arrastado gerando uma coleção de desenhos em movimento onde as suas propriedades formadoras (os invariantes) são mantidas. Uma ilustração desse fato pode ser vista nas Figuras 4.2 e 4.3, onde o original triângulo retângulo ABC construído é transformado pelo arrastar originando um novo triângulo, mas ainda retângulo. O triângulo muda de tamanho e/ou de posição, mas mantém suas características geométricas definidas.

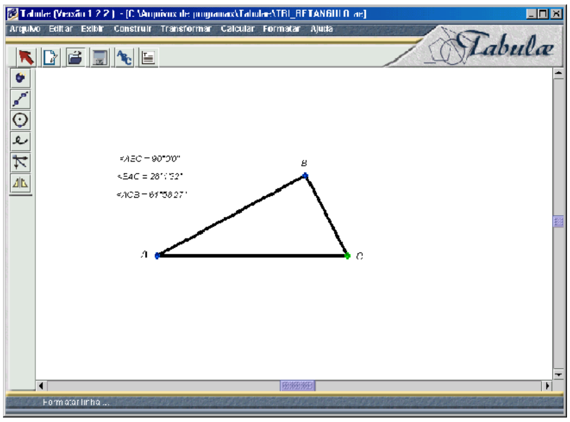


Figura 4.2. Triângulo retângulo original

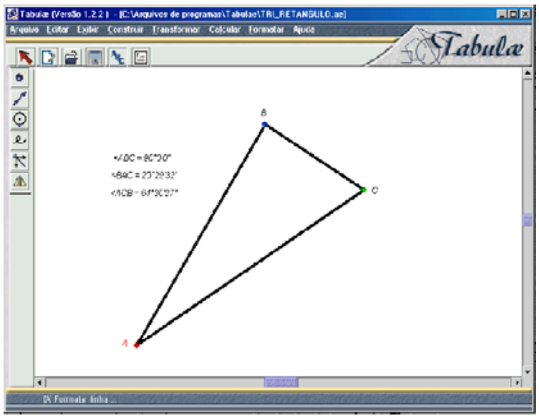


Figura 4.3. Triângulo retângulo arrastado

O arrastar implica num requisito fundamental dentro desse contexto e se constitui num dos princípios da geometria dinâmica: os desenhos de objetos têm que ser feitos a partir das propriedades que os definem. A estabilidade da construção, sob a ação do movimento, só é garantida a partir dessa condição satisfeita. Assim, um triângulo retângulo construído a partir de uma situação particular (desenho tipo à mão-livre) tem aparentemente, numa primeira instância, o mesmo potencial que um triângulo retângulo construído através de suas

[10] Encontramos na literatura, outras denominações para essa ação: drag-mode, clicar e arrastar, agarrar-arrastar, arrastar.

propriedades características. No momento, porém, em que é arrastado, ele se deforma gerando triângulos quaisquer não necessariamente retângulos.

O ambiente oferece também o recurso de, num processo de construção, esconder determinados elementos da tela com o objetivo de simplificar o desenho, de ressaltar apenas alguns aspectos do mesmo. É o recurso da “supressão aparente” de elementos da tela. É uma estratégia reversível, pois no momento em que a presença de algum “elemento escondido” se faça necessária, ele pode voltar a ser reativado na tela.

Outro recurso apresentado por esses ambientes é o lugar geométrico. O conceito de lugar geométrico ou *locus*, segundo Belfort (2001), pode ser dado como o conjunto de todos os pontos, e somente eles, que satisfazem uma certa condição dada. Por exemplo, o círculo de raio unitário centrado na origem de um certo sistema de coordenadas é o lugar geométrico de todos os pontos que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$ no mesmo sistema de coordenadas. Ou, o círculo é o lugar geométrico de todos os pontos eqüidistantes, de uma distância igual ao raio, do ponto central do círculo. Em termos de construção geométrica há uma outra maneira de definir lugar geométrico mais adequada ao contexto da implementação computacional: circunferência corresponde à trajetória de um objeto em função de um caminho conhecido que outro objeto percorre.

Belfort (2001) considera esse recurso como um dos mais notáveis da GD porque dentro das condições tradicionais de desenho, haveria a necessidade de repetir o mesmo procedimento tantas vezes quantas necessárias para obter uma amostra de pontos do lugar geométrico que produzisse um resultado satisfatório. Utilizando-se, no entanto, um ambiente de GD, a produção de um lugar geométrico é automaticamente gerada através de uma amostra com um numero n de pontos que representam diversas posições possíveis para o ponto o qual se deseja conhecer a trajetória, formando, assim, pela interpolação dessas posições, o lugar geométrico.

Transformações geométricas constituem-se no recurso desses ambientes, através do qual transformações podem ser aplicadas sobre os objetos construídos, como: homotetia, simetria, reflexão, rotação, translação, inversão e projetividade. Na Figura 4.4, temos o caso de uma homotetia aplicada num triângulo, segundo uma razão a / b = 0,428.

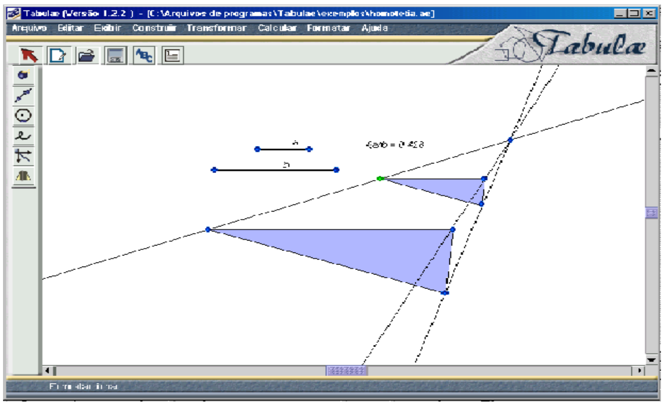


Figura 4.4. Triângulos semelhantes obtidos por homotetia

4.5.2 As Potencialidades do Ambiente e a Educação Matemática

Revendo as discussões levantadas nessa dissertação sobre as possíveis causas do fracasso do ensino-aprendizagem da Geometria, foram identificadas como tais, a desmotivação do aluno e o despreparo do professor. A respeito das dificuldades particulares do aluno na aprendizagem da Geometria, foram citadas: a visualização, a construção e o raciocínio utilizado na resolução de problemas e nas demonstrações. Por outro lado, tem-se que os ambientes de GD são ambientes direcionados para a aprendizagem da Geometria, oferecendo recursos que viabilizam as ações mentais dos alunos, recursos esses que podem ajudar na superação de obstáculos inerentes ao processo de sua aprendizagem. Em consonância com os propósitos da presente pesquisa, analisou-se de que maneira esses ambientes podem estar contribuindo para a solução ou a minimização desses problemas, particularmente em relação à utilização e à elaboração de demonstrações.

No que diz respeito à motivação, é fato incontestável que o trabalho em ambiente informatizado desperta naturalmente o interesse do aluno, pelo seu caráter dinâmico, interativo e diferente dos recursos tradicionais utilizados freqüentemente em sala de aula. Necessário, no entanto, é manter essa motivação viva e direcionada para os objetivos propostos. Um risco certo é a utilização da máquina pelo aluno para outras atividades estranhas ao requerido, como o uso da Internet, de joguinhos etc. Se não houver, por parte do professor, estratégias de ensino objetivas, bem elaboradas e encaminhadas, essa natural motivação do aluno pode esmorecer. Despertado o interesse, o trabalho fica comprometido pelas dificuldades do aluno.

A construção ou a interpretação do desenho é uma das primeiras de suas dificuldades na resolução dos problemas geométricos e são, geralmente, ocasionadas por uma conceituação incorreta do aluno. Num ambiente de GD, a figura necessita ser produzida respeitando restrições geométricas de modo a não ser desmontada no arrastar. Esta característica provoca possíveis conflitos entre as produções dos alunos e os resultados por eles esperados. Geralmente, eles acreditam que a posição relativa do desenho ou o seu traçado particular fazem parte das características do objeto, num desequilíbrio na formação de seu conceito.

Assim, diante da tela branca do ambiente, o aluno provavelmente construirá seus desenhos fazendo, basicamente, uso de sua percepção. Com a movimentação do desenho e seu possível “desmantelamento”, ele se vê obrigado a buscar uma forma de construir controlada por propriedades geométricas adequadas. Dessa maneira, os objetos vão se concretizando através de seu controle geométrico, num processo de *ação, formulação, validação.* A movimentação do desenho gera diferentes instâncias do objeto construído promovendo a concretização de seu conceito através da integração dos componentes conceitual e figural do mesmo, (FISHBEIN**,** 1993) enquanto as necessárias *apreensões cognitivas: perceptiva e seqüencial* da figura vão sendo corretamente desenvolvidas (DUVAL, 1995).

Reportando-nos a Piaget, com o desequilíbrio instalado, surge uma oportunidade, propiciada de maneira especial pelos ambientes de GD, de promover, a partir desses conflitos, a evolução dos conceitos intuitivos dos alunos em conceitos formais. Nessas condições, por processos de abstrações reflexionantes, o sujeito reconstrói o seu saber, evoluindo em níveis de seu pensamento geométrico.

Hoffmann (2000), em artigo onde descreve um experimento realizado com alunos de licenciatura em Matemática utilizando o ambiente Cabri Géomètre, registra a observação de que, gradativamente, os alunos vão percebendo que o *software* não faz simplesmente desenhos, mas figuras geométricas e que essas figuras, apesar de em movimento, guardam regularidades se foram construídas dentro de princípios geométricos. Isso exige dos alunos um pensar sobre objetos geométricos no contexto de definições e teoremas. Não são mais simples impressões visuais registradas na tela, mas objetos concreto-abstratos que devem estar sob constante controle conceitual.

Belfort (2001) afirma ser necessário que o aluno aprenda a “ver” o diagrama construído na tela como uma figura. E, ensiná-lo a usar estes objetos como um apoio ao criar conjecturas e justificativas é uma parte considerável do trabalho de ensinar Geometria, para o qual a geometria dinâmica pode muito auxiliar.

No que diz respeito às demonstrações, uma das atitudes necessárias para provar fatos geométricos é a de compreender que fatos geométricos são conseqüências de algumas afirmações preliminares. Atividades de construção geométrica podem favorecer essa compreensão, pois as construções estando sobre o controle dos alunos, permitem que eles percebam, organizem e controlem os *fatos indicados* (hipóteses). A estabilidade do desenho mantida com o “arrastar” permite a compreensão da relação entre os fatos declarados (hipótese do problema) e os *fatos estáveis implícitos* (tese do problema) que podem, então, ser explicados. Essa compreensão é fundamental no processo das demonstrações.

A elaboração da argumentação dedutiva pode exigir *apreensões operatórias* da figura que conduzam a *reinterpretações, reconstruções e extensões* do desenho. O dinamismo da figura potencializa a função heurística do desenho produzindo *insights* que favorecerão as apreensões operatórias necessárias. É possível sugerir, então, que os ambientes de GD, com suas potencialidades, especialmente a da dinâmica do desenho, favorecem os experimentos de pensamento próprios do fazer matemática: investigar, elaborar conjecturas, testar hipóteses, produzir demonstrações.

Muitos trabalhos de pesquisa direcionados para o estudo das aplicações de novas tecnologias, ressaltam que os *softwares* de geometria dinâmica podem ser um forte aliado para enfrentarmos os vários problemas presentes no ensino da geometria: Belfort (2001), Silva (1997), Valente (1996), Minga (1996), Laborde (2000), Hoyles & Jones (1998), Laborde & Capponi (1994), Hanna (2000), Alves (2004).

A literatura ressalta, porém, que eles podem ser um forte aliado pelas suas potencialidades desde que sejam usados de maneira conveniente e observadas as suas limitações.

4.5.3 Limitações dos Ambientes de Geometria Dinâmica

Assim como quaisquer outras ferramentas, os *softwares* de GD apresentam limitações. Apesar de realizarem qualquer construção com precisão, é preciso ter consciência de que as medidas realizadas por eles estão sujeitas a erros e aproximações. Logo, a precisão depende das limitações da tela, de cálculos internos do computador. Existem limitações nas medições numéricas que podem apresentar algum problema na interpretação dos resultados por causa das inexatidões, a menos de uma unidade nos graus e a menos de 0,1 cm nos comprimentos.

Em trabalhos de formação de professores, Belfort (2001) relata ter constatado que muitos professores tendem a acreditar sem questionamento nos resultados visualizados na tela e, nessa atitude, está incluída até mesmo uma crença de que as medidas realizadas pelos *softwares* não estão sujeitas a erros e aproximações. Continua a autora, em comentários sobre as limitações e ou implicações de uma má interpretação do seu uso, colocando que a tentação de se usar GD apenas para o desenvolvimento de conjecturas por raciocínio indutivo, esquecendo a importância do raciocínio dedutivo em Matemática, é muito grande. Há sempre o risco de se levar o aluno e/ou o professor a generalizar um resultado a partir de um número finito de caso e a considerar como demonstrados resultados que foram apenas visualizados através do *software*.

De Villier (2001), da mesma maneira, afirma que na investigação de uma conjectura nesses ambientes, há pouca necessidade de adquirir maior convicção ou de proceder a sua verificação, pois o aluno é convencido rapidamente da validez de sua hipótese. Portanto, a verificação não serve de motivação para fazer uma demonstração. Contudo, é relativamente fácil suscitar nova curiosidade ao se questionar a razão daquele determinado resultado ser verdadeiro. Os alunos admitem que a verificação indutiva apenas confirma o resultado, mas não o explica nem deixa transparecer de que forma a conjectura é conseqüência de outros resultados conhecidos. Assim, sugere o autor que a motivação para o processo dedutivo deve emergir de sua função explicativa e não de verificação. Mas, faz sentido iniciar os alunos nas várias funções da demonstração não de maneira linear, mas numa espécie de espiral em que funções já introduzidas são retomadas e ampliadas.

Apesar dessas limitações mencionadas e de outras que possam ser encontradas, sabemos que elas são irrelevantes diante das possibilidades educacionais desses ambientes. O importante é reconhecer que o s*oftware* não é perfeito e que o conhecimento dessas limitações permita contorná-las.

4.5.4 Tipos de Atividades

Na utilização dos ambientes de GD, a correspondência entre as primitivas do ambiente e os axiomas da geometria euclidiana, pode ser uma ferramenta apoiando o processo ensino-aprendizagem, desde que as tarefas sejam projetadas para destacar o procedimento mais que o resultado da construção.

Nesses ambientes, dois tipos de atividades podem ser identificados: as de exploração e as de expressão.

a) Atividades de expressão são as atividades em que o aluno constrói as figuras. Em geral, objetivam o domínio dos conceitos relacionados à figura, necessários a sua construção. Com a figura construída, ele tem a possibilidade de, ao movimentar pontos da mesma, verificar a sua consistência. Pode também verificar propriedades pela observação de invariantes geométricos para aquela classe de figura.

b) Atividades de exploração são as realizadas em torno de construções já prontas, as quais têm que ser exploradas segundo um objetivo.

Na exploração em torno da construção devem ser formuladas conjecturas sugeridas pela manipulação direta dos objetos na tela. Essas conjecturas constituem o primeiro germe de um teorema e sua validação se faz com o uso de invariantes das propriedades geométricas características da figura quando a configuração é modificada pelo arrastar de pontos e objetos ao redor da tela. Dependendo do nível da turma, pode-se demonstrar os resultados obtidos experimentalmente.

Essa é uma atividade muito utilizada por pesquisadores na forma então denominada “caixa-preta”. Nas atividades do tipo “caixa preta”, a tela do computador mostra uma figura geométrica e os alunos não têm acesso ao procedimento de construção utilizado. Explorando o “desenho em movimento” que aí se descortina, o desafio é construir réplicas das “caixas pretas”, o que exige uma análise das propriedades geométricas contidas no dinamismo e na estabilidade da figura.

Nessas atividades, a solução não pode ser reduzida à implementação de um procedimento ou de uma rotina que esteja memorizada. Pelo contrário, os alunos têm que tomar as próprias decisões escolhendo um caminho de solução, colocando perguntas em lugar só de respostas predeterminadas. O processo de solução fica tão importante quanto à própria solução. A atenção não só está em produzir o resultado certo, mas em como se produziu o resultado. É uma situação diferente das tradicionais que se traduzem em: “Prove que...”, “O que é isso?”.

4.5.5 O Tabulae

Vários *softwares* de GD existem, sendo os mais conhecidos: *Cabri-géomètre* (IMAG/CNRS, França), o *Geometric Supposer* (*Apple II*), o *Geometer’s Sketchpad* (*Key Curriculum Press,* EUA), *o Cinderella* (Alemanha), Régua e Compasso (França), o *Geometricks* (Dinamarca), *o Tabulae e* o *Mangaba* (Brasil).

O escolhido para ser utilizado neste trabalho foi o *Tabulae*[11], por questões de qualidade, de baixo custo e de fácil disponibilidade; motivos estes acrescidos do fato de ser o *Tabulae* um produto nacional e, particularmente, desenvolvido na UFRJ.

O *Tabulae*[11] é um *software* de GD que está sendo desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ, congregando professores de vários departamentos que realizam pesquisas sobre o uso do computador como ferramenta para o ensino da matemática nos níveis fundamental, médio e universitário. Estão, também, envolvidos no projeto alunos de graduação dos cursos de engenharia, bacharelado em Matemática e desenho industrial, além de alunos de mestrado e doutorado. Esse trabalho faz parte de realizações desenvolvidas

[11] A denominação *Tabulae* era empregada para designar um conjunto de tábuas de cera que os antigos gregos e romanos usavam para registrar mensagens e diagramas (Belfort, 2001; Guimarães, 2001).

dentro do projeto *PACE*, Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino, responsável pelo desenvolvimento destes materiais e outros voltados para a criação de ambientes colaborativos de aprendizagem via *Internet*, em Matemática. A versão atual do *Tabulae* contém funcionalidades geométricas e vetoriais, alem de calculadora. O objetivo principal do programa é proporcionar uma alternativa brasileira, de classe mundial, aos *softwares* encontrados no mercado hoje em dia.

É um programa inteiramente escrito na linguagem Java de onde advém sua compatibilidade com diferentes sistemas operacionais, a possibilidade de novas ferramentas poderem se aderir ao programa, sem precisar reiniciar seu processo de montagem. Segundo Guimarães (2001), é possível gerar *applets* através do *Tabulae*, funcionando estes como ferramentas de autoria para redes locais e Internet.

Dentre as inovações do programa, em relação a similares no mercado, citam-se: a) a interface gráfica permite a escolha entre os modos verbo-nome e nome-verbo; b) escrito em Java, o *Tabulæ* é compatível com diversas plataformas; c) a programação é inteiramente orientada a objeto com o núcleo matemático e interface gráfica completamente separadas no programa; d) o *Tabulæ* pode gerar código em Java, o que torna útil na produção de hipertextos; e) o *design* de interface foi elaborado baseado em princípios ergonômicos; f) podem-se gerar relatórios detalhados de uso dos alunos; g) pode-se compartilhar construções através da Internet, facilitando a aprendizagem colaborativa.

Os relatórios mencionados se constituem num recurso adicional de grande utilidade para os professores, compreendem uma listagem relacionada às atividades desenvolvidas pelo aluno durante todo o processo de investigação do problema. É uma listagem gerada em HTML apresentando os passos utilizados pelo aluno, na construção, em função do tempo gasto na realização das mesmas. Sua utilidade é a de permitir ao professor um acompanhamento passo a passo e individualizado de cada aluno.

Os ambiente de GD favorecem um trabalho consoante com uma abordagem construtivista de concepção de aprendizagem. Baseando-se no principio de que o conhecimento é construído a partir das ações do sujeito, temos que a aprendizagem da matemática depende de ações que caracterizam o “fazer matemática”: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar, demonstrar. Isso significa o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação discursiva por parte do professor (GRAVINA, 2004).

Na geometria dinâmica as atividades que estimulam a exploração e a descoberta dos invariantes são realizadas através de experiências visuais (aspecto intuitivo), devido a facilidades como a precisão e a variedade na construção dos objetos geométricos. Essas atividades possibilitam a formação de noções e conceitos geométricos e levam à representação mental correta desses conceitos por parte do aluno (aspecto lógico), isto é, acabam auxiliando no processo de visualização. A visualização ou representação mental do objeto geométrico é, por sua vez, importante auxilio para que os alunos possam fazer suas conjecturas, levantando hipótese e refinando as suas crenças e convicções. Neste cenário de conjecturas, o professor se encontra em condições de estimular os alunos no sentido de verificar a veracidade e o sentido das mesmas, levando-os a demonstrações de algumas propriedades geométricas (ALVES *et al.*, 2003).

Pode-se observar, ainda, que a abordagem da Geometria através da utilização de *softwares* de geometria dinâmica é consistente com o modelo proposto por Van Hiele. Alves (2003) ressalta que os estudantes passam por uma série de níveis de pensamento geométrico: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Uma grande vantagem desses ambientes consiste em possibilitar aos estudantes e, se necessário, ao professor, a passagem pelos três primeiros níveis, encorajando o processo de descobertas que reflete, mais de perto, a forma como a Matemática é inventada: um matemático, inicialmente, visualiza e analisa um problema, fazendo conjecturas antes de realizar provas e demonstrações.

Trabalhando em ambientes de geometria dinâmica, os alunos podem ser convencidos rapidamente da validez de uma afirmativa pelo uso da propriedade do arrastar desses *softwares* pela produção de muitas instâncias desse mesmo objeto. A tarefa é proporcionar-lhes problemas em que a prova é um dos meios de dar um *insight* em o porquê do resultado que pode ser visto na tela é verdadeiro.

Os ambientes de geometria dinâmica se constituem em uma ferramenta motivadora para o estudo da Geometria, tanto no aspecto do ensino como no da aprendizagem. Pode motivar aos alunos e motivar igualmente ao professor.

A partir do estabelecimento de relações entre aprendizagem e processos cognitivos, à luz da teoria de Piaget, procurou-se realçar o quanto certos ambientes informatizados, particularmente os de geometria dinâmica, são ferramentas de grande potencial no processo educativo matemático. No entanto, os ambientes por si só não garantem a construção do conhecimento, é preciso conhecê-los e saber utilizá-los de forma conveniente. O caminho da construção de uma concepção equilibrada sobre tecnologia educacional deve ser guiado por uma visão fenomenológica examinando-se concepções otimistas e pessimistas, concluindo sobre a necessidade de um enfoque equilibrado para se entender o alcance e limitações das tecnologias na educação (CYSNEIROS, 2003).

Uma das vantagens do uso do computador na educação foi, sem dúvida, a de provocar questionamentos acerca dos métodos e da prática educacional, o que se relaciona estreitamente com as propostas deste estudo quando busca discutir a utilização das demonstrações no ensino-aprendizagem da Geometria no contexto da formação de professores de Matemática.

Capitulo 5. A Investigação

Não é propósito meu ensinar aqui o método que cada um
deveria seguir para bem orientar a sua razão, porém somente
demonstrar de que modo procurei conduzir a minha.

René Descartes

Neste capítulo, é apresentado o relato da investigação realizada desde sua concepção até o momento da análise dos dados obtidos, a partir da enunciação do problema e das hipóteses levantadas.

5.1 Problema e Hipóteses da Pesquisa

É esperado, no ensino da Matemática, a iniciação do processo dedutivo fundamentado em demonstrações a partir da 7ª série do Ensino Fundamental quando o nível de abstração do aluno é coerente com o seu estágio de desenvolvimento mental.

Ao se adotar, neste trabalho, uma concepção construtivista do desenvolvimento cognitivo, é compreensível que se priorize a utilização das demonstrações no ensino-aprendizagem da Geometria. A construção do conhecimento geométrico, como uma disciplina formal, exige na resolução de seus problemas a utilização de demonstrações e, o entendimento de seus modelos depende de processo evolutivo do pensamento.

Foi visto, no **capítulo 2**, que, no período que antecedeu à Matemática Moderna, a experiência com as demonstrações, na Geometria, ocorria de forma insatisfatória. Elas eram apresentadas aos alunos como um processo pronto e acabado, cabendo-lhes, apenas, a sua memorização sem sequer compreender o seu significado. Com o advento da Matemática Moderna, a ênfase na Geometria estava no processo das transformações geométricas, afastando o professor do seu ensino e conseqüentemente de um trabalho com o raciocínio dedutivo. Apesar do descaso às orientações da Matemática Moderna, sabe-se que, atualmente, muitos dos alunos do Ensino Fundamental público não têm acesso ao estudo das demonstrações na Geometria, pois elas foram, praticamente, excluídas de seu ensino, salvo exceções como em escolas particulares e militares (VIANNA, 1988). Assim, é subtraída a esses alunos de escolas públicas não só uma oportunidade de compreender e utilizar as demonstrações, mas também de desenvolver o seu raciocínio lógico-dedutivo.

Causas podem ser apontadas para esse fato: as dificuldades dos alunos, o professor despreparado, o sistema. Apesar dessas declarações e considerando-se a importância do meio na construção do conhecimento, os ambientes de geometria dinâmica surgem como uma alternativa na busca de solução para o problema da não utilização, pelo professor, das demonstrações no ensino da Geometria. Esses ambientes criam condições para que se aprenda investigando, conjecturando, testando, analisando e concluindo acerca de um fenômeno estudado. Transforma-se o aluno, desse modo, de mero expectador em agente do processo educativo, em alguém que pensa, reflete, dirige, decide e atua.

Para a viabilização dessas propostas transformadoras, a formação dos professores é reconhecida como um dos fatores de fundamental importância. O professor, além dos conhecimentos necessários para tal investimento, precisa estar motivado e estar preparado para trabalhar com as novas tecnologias, o que implica em mudanças nas suas concepções sobre as demonstrações. De acordo com Ponte (2003), para que haja mudanças, é preciso que o professor queira mudar.

Foram questionamentos que motivaram o presente trabalho e cujas respostas se constituem na meta desta investigação:

a) De que maneira a utilização de ambientes de GD, num processo ensino-aprendizagem da Geometria, estimula a evolução dos níveis de pensamento geométrico com simultâneo desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos professores envolvidos, permitindo uma melhor compreensão do significado das demonstrações, bem como desenvolvendo competências para sua elaboração?

b) De que maneira a utilização de ambientes de geometria dinâmica, quando num processo de formação de professores, através de competências desenvolvidas e da prática de novas metodologias, contribui para uma reflexão sobre as demonstrações e seu ensino, favorecendo uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica?

É objetivo deste trabalho investigar de que maneira os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para a formação do professor de Matemática no sentido de adequar e intensificar a utilização das demonstrações no processo ensino-aprendizagem da Geometria.

Nossas hipóteses são de que:

1º A utilização de ambientes de geometria dinâmica, no processo ensino-aprendizagem da Geometria, estimula a evolução dos níveis de pensamento geométrico com simultâneo desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos professores envolvidos, permitindo uma melhor compreensão do significado das demonstrações, bem como desenvolvendo competências para sua elaboração.

2º A utilização de ambientes de geometria dinâmica, quando num processo de formação de professores, através de competências desenvolvidas e da prática de novas metodologias, contribui para uma reflexão sobre as demonstrações e seu ensino, favorecendo uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica.

5.2 Metodologia

A metodologia da presente pesquisa foi inspirada na Engenharia Didática desenvolvida pela escola francesa de Didática da Matemática.

Segundo Artigue (1988), *apud* Barroso (2000), a Engenharia Didática se caracteriza como um esquema experimental baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de atividades de ensino.

A Engenharia Didática, enquanto procedimento metodológico, fundamenta-se em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada. Assim, a validação da pesquisa é realizada, sobretudo internamente, de forma diferente da que se orienta por métodos estatísticos e cuja validação se baseia em comparação estatística entre os desempenhos dos grupos de controle e grupos experimentais. Na Engenharia Didática, a validação é baseada na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (PAIS, 2001).

Justifica-se essa escolha, por se constituir a Engenharia Didática numa forma de organizar a pesquisa em didática da Matemática a partir da criação de uma seqüência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações que permitam interpretar processos de ensino-aprendizagem da Matemática, esclarecendo o fenômeno investigado. Além de focar a seqüência de atividades elaboradas dentro de um processo envolvendo teoria e prática, é destacado o papel do ambiente que deve favorecer de forma especial à participação dos sujeitos.

A investigação, nessa concepção, pode ser interpretada como se desenvolvendo em três fases[12]: a) fase 1: Análises Preliminares; b) fase 2: Concepção da situação didática e análise *a priori;* c) fase 3: Experimentação, análise *a posteriori* e validação.

O detalhamento dessas fases está descrito no item 5.3.

---

[12] Alguns autores interpretam a investigação como sendo desenvolvida em quatro fases: análise preliminar; concepção da situação didática e análise *a priori*; experimentação; análise *a posteriori* e validação.

5.2.1 Participantes

A investigação envolveu dois estudos de campo efetivados paralelamente num mesmo período de tempo, o segundo semestre de 2004. Os dois grupos de professores participantes eram oriundos de diferentes realidades atendendo a uma proposta de comparação entre o desenvolvimento do processo em duas situações distintas.

Um dos grupos foi formado por professores de Matemática do Ensino Fundamental e/ou Médio atuantes em diferentes escolas públicas do município de Angra dos Reis. De quinze professores convidados, oito aceitaram a proposta e cumpriram todas as etapas previstas para a investigação. Um deles conseguiu ir além, cumprindo a parte opcional do planejamento da investigação, a aplicação prática com seus alunos da seqüência didática por ele elaborada. Os trabalhos com os professores aconteceram num laboratório de informática de uma escola particular deste município, gentilmente cedido por sua diretora que é também professora de Matemática. Os encontros foram semanais e com duração de 90 minutos. Aconteceram por 15 semanas totalizando cerca de 22 horas de trabalho, nos meses de agosto a novembro de 2004.

O segundo grupo foi formado por professores atuantes em uma Escola Federal do Rio de Janeiro, que atende turmas dos Ensinos Fundamental e Médio. A iniciativa da participação do referido grupo se deveu ao interesse da coordenação de Matemática da escola em questão em oferecer, a seus professores, uma experiência de trabalho com novas metodologias envolvendo tecnologias informáticas. Em reunião com este pesquisador e o referido coordenador de Matemática, foi feito o convite para participação do trabalho a todos os treze presentes professores da escola em questão. Somente cinco professores aceitaram o convite, devido a sua disponibilidade de tempo no horário programado para os encontros. Estes eram semanais e ocorreram durante o horário reservado para a coordenação dos professores de Matemática, às terças-feiras das 13:30 às 14:30h. A pesquisa de campo foi realizada nos meses de setembro a novembro de 2004. Era de entendimento comum à coordenação e ao grupo de pesquisa que tal horário, por já fazer parte da jornada dos professores, representava um fator favorável a respeito da disponibilidade e do interesse dos mesmos. Não foi um entendimento correto, pois o horário em questão foi utilizado, nesse período, para muitos outros afazeres dos professores e da própria coordenação de área, tais como: correção e elaboração de provas, preenchimento de diário, discussão de pautas da coordenação. A participação dos professores era, então, incerta e/ou fragmentada, o que gerou um arrefecer do interesse da maioria, apesar do reconhecimento do potencial do ambiente. Assim, a idéia de que o horário escolhido iria favorecer a participação foi falsa e apenas um dos professores participantes cumpriu o programado.

A descrição detalhada dos participantes é efetuada no relato das respectivas pesquisas de campo, onde são apresentados com nomes fictícios para resguardar sua identidade.

5.2.2 Instrumentos

Os dois grupos de professores foram testados pelos mesmos instrumentos de investigação que compreenderam: a) pré e pós-testes (anexo A); b) questionários de sondagem, inicial e final (apêndice A); c) produção dos participantes na forma de material escrito (construções, demonstrações) registrada em "Roteiro de Atividades de Laboratório" (apêndice B); d) observação do comportamento e das manifestações dos professores durante as atividades realizadas e durante as discussões de textos (apêndice C), estas gravadas em fita; e) seqüência didática elaborada pelos professores participantes (apêndice D).

a) Testes segundo a teoria de Van Hiele (pré e pós)

Segundo Purificação (1999), com a divulgação da teoria de Van Hiele nos Estados Unidos, surgiram projetos como o *Oregon*, com o objetivo de promover a avaliação de crianças em Geometria, como o *Brooklin*, envolvendo avaliação do pensamento geométrico entre adolescentes das escolas urbanas e Chicago, sobre desenvolvimento cognitivo e desempenho em Geometria na escola secundária. Willian Burger, Alan Hoffer, Bruce Mitchell e Michael Shaughnessy, do projeto Oregon (1974), também realizaram pesquisas utilizando a teoria de van Hiele com o objetivo de investigar os processos de raciocínio geométrico, tendo como parâmetro de análise a validade dos níveis desta teoria. Utilizando indicadores que caracterizavam os diversos níveis do modelo, eles concluíram que tais indicadores ajudavam a perceber os processos de pensamento dos alunos em tarefas geométricas. Os alunos de mesmo nível demonstraram comportamento como os apresentados nos indicadores, podendo-se assim, caracterizar operacionalmente os níveis de pensamento de Van Hiele.

Através de projeto de pesquisa, financiado pelo CNPq, sugerido e orientado pela professora Lílian Nasser, do Instituto de Matemática da UFRJ, foi também desenvolvido um instrumento de avaliação e diagnóstico dos níveis de raciocínio em Geometria segundo a teoria de Van Hiele. Estes testes, elaborados pela equipe do Projeto Fundão, refletem parte das pesquisas de tese de doutorado desta professora, concluída no King’s College da Universidade de Londres, em 1992, intitulada Using the Van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil. São testes (anexo A) que serviram de base para a análise dos níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico dos professores participantes deste trabalho. Constituiu-se tal análise num estudo quantitativo do desenvolvimento dos mesmos, com o objetivo de proporcionar maiores subsídios às considerações acerca da validade dos procedimentos propostos. Os níveis de desenvolvimento também foram examinados em termos de seu grau de aquisição: completa, alta, intermediária, baixa e não aquisição, observando-se classificação de Gutierrez (1991), *apud* Purificação (1999).

Os testes compreendem cinco grupos de avaliação, onde cada uma das cinco fases é avaliada. Nesta investigação foram utilizados os testes que medem os níveis 2, 3 e 4.

A dispensa do teste básico de nível 1, de Reconhecimento ou Visualização, ocorreu em virtude dos participantes serem professores de Matemática. O teste para o nível 5, que se relaciona à fase do Rigor e verifica se o sujeito é capaz de compreender as geometrias não euclidianas, foi também dispensado nesta investigação por não haver interesse em se concluir sobre esse aspecto na presente situação.

O pré-teste, realizado antes dos trabalhos da seqüência, objetivou verificar as condições anteriores dos professores participantes, para numa comparação com os resultados do pós-teste verificar uma possível evolução dos níveis de pensamento geométrico dos mesmos, após a realização das atividades previstas.

Na avaliação dos resultados do pré e do pós-teste, uma questão para ser considerada correta deveria ser respondida de forma completamente satisfatória. A consideração do grau de aquisição de um determinado nível baseou-se no índice de acertos de suas questões apresentadas no respectivo teste. Assim, de 80 a 100% de acerto no teste, corresponderia à aquisição completa do referido nível; de 70 a 80% (exclusive) à aquisição alta do mesmo; de 50 a 70% (exclusive) à aquisição intermediária; de 30 a 50% (exclusive) à aquisição baixa e abaixo de 30% à não aquisição do nível em questão.

Somente a aquisição completa ou alta de determinado nível foi considerada suficiente para definir o sujeito dentro de tal estágio de desenvolvimento e sua classificação, no geral, correspondeu ao mais alto nível por ele adquirido.

b) Questionários de Sondagem

Foram elaborados pelo pesquisador e aplicados aos professores dois questionários (Apêndice A), um antes dos trabalhos e o outro após os mesmos. O questionário inicial compreendeu duas partes, a primeira relacionada a informações pessoais dos participantes e a segunda a informações acerca da Geometria. O seu objetivo foi o de traçar um perfil individualizado dos professores e, ao mesmo tempo, de colher dados sobre suas concepções acerca da Geometria e, particularmente, das demonstrações e de seu ensino. As respostas das questões relativas às suas concepções foram analisadas e registradas para um confronto posterior com as respostas obtidas na aplicação do questionário final, com o intuito de verificar se ocorreu alguma mudança nas concepções dos professores.

O questionário final compreendeu oito questões visando à coleta de depoimentos dos professores sobre sua participação no experimento e sobre possíveis influências dessa participação em suas concepções acerca das demonstrações.

c) Produção dos Participantes

Durante as atividades da seqüência, o professor participante registrou, na forma de material escrito, o encaminhamento e o desenvolvimento de seu processo de resolução dos problemas apresentados, fornecendo dados sobre sua forma de raciocinar, sobre suas dificuldades e seus avanços. A cada atividade apresentada, o professor era suscitado a explorar, conjecturar, investigar e justificar ou demonstrar proposições então colocadas. Esses dados se constituiram em fonte para o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* dos fenômenos de aprendizagem observados e seu registro foi feito em material impresso a ele fornecido, o “Roteiro de Atividades no Laboratório” (Apêndice B), contendo as atividades a serem desenvolvidas no laboratório. Acompanhando as atividades específicas de construção, então apresentadas, encontra-se um roteiro de procedimentos relativos ao uso do ambiente de geometria dinâmica, tendo em vista a esperada inexperiência dos professores no uso do *software*. O material em questão foi elaborado por estes pesquisadores, com base em materiais correlatos (BELFORT & GUIMARÃES, 1999; JUNQUEIRA & VALENTE, 1997; MELLO, 1999) e apresentado aos professores no inicio para ser devolvido ao final.

d) Observação do comportamento e das manifestações dos professores

Durante as sessões, anotações foram registradas pelo pesquisador e seu assistente sobre o comportamento ou manifestações relevantes dos participantes. As discussões sobre os textos para estudo (Apêndice C), foram gravadas em fita. Esses registros foram usados tanto na análise do desempenho do professor como na de suas concepções, de acordo com a natureza dos mesmos.

A discussão das atividades realizadas e de textos sobre assuntos ligados ao referencial teórico da presente pesquisa objetivou estimular a reflexão do professor sobre o conteúdo trabalhado, sobre as demonstrações, sobre metodologia e posturas em relação à Geometria. Os textos para discussão versavam sobre: o pensamento lógico-dedutivo e o pensamento geométrico; a geometria e o seu ensino; as concepções e a técnica das demonstrações; a geometria dinâmica; teorias de aprendizagem; resultados de pesquisas realizadas com alunos sobre demonstrações.

e) Seqüência didática elaborada pelo professor

Ao final da aplicação das atividades, fez parte dos trabalhos a elaboração pelos professores de uma aula para seus alunos em ambiente de geometria dinâmica. A atividade deveria se caracterizar por provocar nos alunos um processo de investigação, culminando com a necessidade da elaboração de justificativas, argumentações ou demonstrações, levando-se em consideração o seu nível de desenvolvimento cognitivo. O conteúdo dessa aula foi de livre escolha do professor, de forma a atender seu interesse.

A elaboração da seqüência didática pelo professor foi utilizada como um outro instrumento de avaliação de seus avanços dentro dos objetivos pretendidos por esta pesquisa, observando a influência dos trabalhos nas concepções dos professores através da maneira como ele conseguia relacionar a experiência vivida com a sua prática.

Com essa realização, o professor teve a oportunidade de relacionar a prática com a teoria, viabilizando em sua realidade um processo semelhante ao participado. Naturalmente, foi previsto que tal elaboração fosse efetuada com a colaboração do pesquisador na parte do desenvolvimento da técnica com o *software,* visto que sua convivência com o mesmo foi por um tempo relativamente pequeno.

5.2.3 Procedimentos

As atividades da seqüência didática foram realizadas sob a orientação do pesquisador com o apoio de um profissional da área da Informática, para auxiliá-lo no acompanhamento das possíveis dificuldades técnicas (relacionadas ao uso do computador e do *software*) encontradas pelos professores participantes.

Os trabalhos compreenderam além da seqüência didática:

- a aplicação de pré e pós testes;
- a aplicação de questionários de sondagem sobre as concepções dos professores;
- a discussão das atividades realizadas;
- a discussão de textos;
- a elaboração de uma seqüência didática, em ambiente de geometria dinâmica, para uma possível aplicação com alunos.

São descritos, a seguir, os roteiros das doze sessões de estudo inicialmente programados que serão detalhados na descrição dos estudos de campo.

Sessão 1: a) apresentações iniciais; b) estabelecimento do contrato didático; c) aplicação do questionário de sondagem; d) aplicação do pré-teste

Sessão 2: a) apresentação do ambiente de geometria dinâmica; b) apresentação de telas com trabalhos prontos de geometria dinâmica; c) uso livre e dirigido do ambiente *Tabulae;* d) discussão de texto.

Sessão 3: a) resolução da atividade 1: a circunferência; b) discussão de texto.

Sessão 4: a) resolução da atividade 2: o quadrado ; b) discussão dos trabalhos já realizados .

Sessão 5 : a) resolução das atividades 3 e 4: os triângulos isósceles e eqüilátero .

Sessão 6: a) resolução da atividade 5: o triângulo retângulo; b) discussão dos resultados; c) discussão de texto.

Sessão 7: a) resolução da atividade 6: o problema da ilha; b) discussão dos resultados.

Sessão 8: a) resolução das atividades 7 e 8: o problema do quadrilátero inscrito no triângulo e o problema do triângulo retângulo; b) discussão dos resultados.

Sessões 9 e 10: a) complementação de trabalhos; b) discussão de texto; c) elaboração da seqüência didática para os alunos.

Sessão 11: a) avaliação final; b) aplicação de questionário (final).

Sessão 12: a) aplicação do pós-teste; b) encerramento.

5.3 Detalhamento e Implementação da Engenharia Didática

Nesse item, são descritas as suas três fases de uma forma geral e de uma forma específica relacionada a essa investigação.

5.3.1 Análises Preliminares

As análises preliminares contemplaram uma referência a um quadro teórico sobre o qual se fundamentaram as escolhas e as ações do pesquisador. Para esta pesquisa, o quadro teórico foi desenvolvido nos **capítulos 2, 3 e 4**, tratando dos fatores que envolvem a análise das dificuldades e resistências encontradas em situações de aprendizagem de Geometria, especificamente, de demonstrações.

Complementando os subsídios obtidos através das análises preliminares, integraram-se a elas os saberes adquiridos por este pesquisador na figura de docente de Matemática, durante a experiência de longos anos com alunos de escolas públicas dos Ensinos Fundamental e Médio, quando as dificuldades e resistências dos alunos ao ensino da Geometria puderam ser observadas e trabalhadas.

5.3.2 Concepção da Situação Didática e Análise *a Priori*

A partir das considerações teóricas assumidas, iniciou-se a segunda fase da Engenharia Didática que diz respeito à elaboração das situações didáticas a serem propostas aos participantes. Foram feitas escolhas em função dos problemas apontados na análise preliminar e justificadas *a priori*. Através da análise *a priori* é indicado de que maneira as atividades propostas podem contribuir para a aprendizagem pretendida e, por outro lado, são fornecidos os critérios para observar os participantes durante o processo de trabalho.

Para esta investigação, em particular, a concepção da situação didática levou em consideração o uso de ambientes de geometria dinâmica, então representados pelo *software Tabulae*. Assim, com o apoio desse ambiente, o trabalho foi projetado considerando:

a) a importância do meio na superação das dificuldades apontadas para o ensino das demonstrações através da oportunidade de momentos em que o processo de *desequilíbrio x reflexão x ação x reequilíbrio* aconteça provocando novas aprendizagens e a evolução do pensamento geométrico, evidenciando-se a contribuição dos ambientes de geometria dinâmica nesse sentido;

b) a relevância dos diferentes momentos da situação didática, apresentados por Brousseau (1986): a contextualização, a situação adidática (*ação, formulação* e *validação*) e a institucionalização;

c) o aprendizado do *software* como um ponto que não pode ser negligenciado, visto ser uma técnica indispensável ao professor no momento em que ele optar por usá-lo em suas aulas, implicando num trabalho individualizado (cada participante em sua máquina) e, posteriormente, em grupo em momentos de discussão coletiva;

d) as atividades a serem trabalhadas no laboratório de acordo com os tipos aqui considerados: as de construção e as de exploração. Nas de construção, os professores, seguindo as etapas de um roteiro de trabalho, constroem as figuras e, ao mesmo tempo, têm a oportunidade de se familiarizar com o programa. Após a execução das atividades de construção, atividades de exploração buscando-se uma solução para problemas propostos. Trabalhar com roteiros de construção e posterior atividades de exploração, envolvendo ambas atividades um trabalho de justificativa, foi a opção que melhor se adaptou à realidade da pesquisa, em vista dos objetivos da mesma;

e) a necessidade da seleção dos conteúdos em consonância com as orientações dos PCNs e com a realidade curricular das escolas. Eles contemplam conceitos e propriedades relacionados às figuras: circunferência, triângulos, retângulos e quadrados.

Aqui são descritas as atividades e as análises *a priori* estabelecidas para esta investigação.

5.3.2.1 As Atividades e a Análise *a priori*

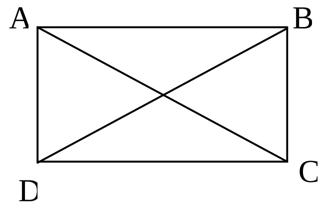
As questões do teste de Van Hiele e as atividades propostas para a seqüência são apresentadas a seguir com suas respectivas análises *a priori*.

1ª Parte: Questões do teste de Van Hiele

a) Teste número 1: avaliando o **Nível 2 (Análise)**

Através das questões do teste 1, pretende-se verificar se o sujeito é capaz de analisar figuras geométricas com identificação de suas propriedades, sem contudo realizar classificações lógicas baseadas nestas propriedades.

2.1) No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais.



Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

(A) Têm 4 ângulos retos.
(B) Têm lados opostos paralelos.
(C) Têm diagonais de mesmo comprimento.
(D) Têm os 4 lados iguais.

Análise a priori:

O sujeito deve assinalar os itens A, B e C, revelando ter conhecimento das propriedades gerais do retângulo, na qualidade de um paralelogramo (B) e das suas propriedades específicas (A e C). Deve rejeitar apenas o D, por este não expressar uma condição necessária à existência do retângulo. Caso assinale esta também, o conceito de retângulo não está bem definido para ele.

2.2) Dê 3 propriedades dos quadrados: 1 .... 2 .... 3 ....

Análise a priori:

O sujeito deve citar, obrigatoriamente, as propriedades definidoras do quadrado, quais sejam: quatro lados congruentes e quatro ângulos congruentes (ou retos). A terceira propriedade a ser citada é facultativa, desde que esteja correta. Se não citar as propriedades definidoras, ele pode estar revelando uma representação não correta do conceito de quadrado, onde a dimensão figural e a conceitual desse objeto não estão em consonância.

2.3) Todo triângulo isósceles tem dois lados iguais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) sobre os ângulos do triângulo isósceles: (A) Pelo menos um dos ângulos mede 60º. (B) Um dos ângulos mede 90º. (C) Dois ângulos têm a mesma medida. (D) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

Análise a priori:

O sujeito deve assinalar apenas a letra C, pois é a única afirmativa que traduz uma propriedade comum aos triângulos isósceles. Ao assinalar outras letras, pode estar revelando um conflito de entendimento entre conceitos de triângulos isósceles, retângulos e eqüiláteros.

2.4) Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1 ....
2 ....
3 ....

Análise a priori:

O sujeito deve citar, obrigatoriamente, a propriedade definidora do objeto geométrico. No caso em questão, do paralelogramo, essa propriedade corresponde a ter os lados paralelos dois a dois. Quanto às outras duas propriedades, são facultativas, desde que corretas. Não citando as propriedades definidoras, ele pode estar revelando uma falha na conceituação da figura.

2.5) Um losango é um quadrilátero com todos os lados do mesmo comprimento.

Assinale a(s) afirmativa(s) que não é (são) válida (s) para todo losango:

(A) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.
(B) As diagonais dividem os ângulos do losango ao meio.
(C) As diagonais são perpendiculares.
(D) Os ângulos opostos são iguais.
(E) As diagonais se cortam ao meio.

Análise a priori:

O sujeito deve assinalar a alternativa A, reconhecendo que a propriedade ali citada não é válida para todo losango, mas é específica do quadrado. Se assinalar qualquer uma das outras, indica uma falha na conceituação do losango.

b) <u>Teste número 2</u>: avaliando o **Nível 3 (Dedução Informal)**

O nível 3, correspondente à dedução informal e à ordenação; objetiva verificar a existência de um raciocínio que permita ao sujeito compreender as relações de inclusão de classes e de implicação entre as figuras e, a partir daí, deduzir propriedades.

3.1) Considere as propriedades: PROPRIEDADE U: A figura F é um retângulo. PROPRIEDADE V: A figura F é um triângulo. Assinale a afirmativa verdadeira (A) Se U é verdadeira, então V é verdadeira. (B) Se U é falsa, então V é verdadeira. (C) U e V não podem ser ambas verdadeiras. (D) U e V não podem ser ambas falsas.

Análise a priori:

O sujeito deve assinalar a opção C, revelando um entendimento de que as duas propriedades, U e V são exclusivas e, conseqüentemente, elas não podem ser simultaneamente verdadeiras. Com isso, ele mostra ter, também, a habilidade para formar argumentos dedutivos informais corretos usando explicitamente formas lógicas como: “se p implica q”. Ao assinalar a opção A, contraria completamente esse entendimento. Ao assinalar a B ou a D, podemos perceber que para ele, a figura F deve ser necessariamente um retângulo ou um triângulo, o que reflete uma interpretação errada, pois essa restrição não ficou definida no enunciado.

3.2) Considere as propriedades: PROPRIEDADE S: Triângulo ABC é equilátero PROPRIEDADE T: $A\hat{B}C$ mede 60º. Assinale a afirmativa verdadeira: (A) S e T não podem ser ambas verdadeiras. (B) Se S é verdadeira, então T é verdadeira. (C) Se T é verdadeira, então S é verdadeira. (D) Se S é falsa, então T é falsa.

Análise a priori:

O sujeito deve assinalar a opção B, onde se afirma que a propriedade S implica na propriedade T: se um triângulo é eqüilátero, então a medida de seus ângulos é de 60°. Ele nega esse entendimento assinalando o item A e verifica-se que ele não está apresentando a habilidade em classificar formas de acordo com diferentes atributos. Ao assinalar os itens C ou D, mostra estar considerando verdadeira a recíproca do teorema, S → T. No caso em questão, a bi-implicação não é verdadeira, pois ter ângulo de 60° não implica em ser triângulo eqüilátero.

3.3) Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados: (A) Uma propriedade dos quadrados é sempre uma propriedade dos retângulos. (B) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos. (C) Uma propriedade dos retângulos é sempre uma propriedade dos quadrados. (D) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.

Análise a priori:

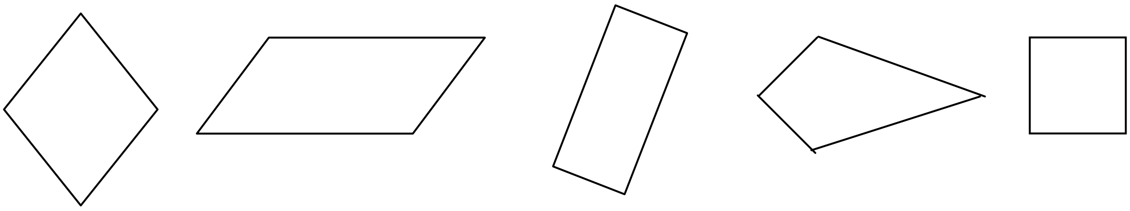
O sujeito deve assinalar a opção C, revelando dominar a idéia de inclusão de classes para os quadrados e retângulos. Tal inclusão acarreta que as propriedades dos retângulos sejam válidas para os quadrados, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Ao assinalar o item A, ele está invertendo o sentido da inclusão, enquanto nega o relacionamento entre quadrados e retângulos com a escolha das opções B e C.

3.4) O que todos os retângulos têm que alguns paralelogramos não têm? (A) Lados opostos iguais. (B) Diagonais iguais. (C) Lados opostos paralelos. (D) Ângulos opostos iguais.

Análise a priori:

O sujeito deve assinalar a opção B, revelando dominar o conceito de inclusão de classes que justifica o fato do retângulo, além de apresentar as propriedades comuns aos paralelogramos, apresentar propriedades especificamente suas, como a de ter as diagonais congruentes. Assinalando os itens A, C ou D, nega uma representação conceitual correta da classe dos paralelogramos.

3.5) Nos quadriláteros abaixo, coloque R em todos os que podem ser classificados como retângulos, P em todos os que podem ser classificados como paralelogramos, L em todos os que podem ser classificados como losangos e Q em todos os que podem ser classificados como quadrados:



P e L | P | R e P | X | P, R, L e Q

Análise a priori:

O sujeito deve classificar as figuras, conforme colocação feita acima, reconhecendo na 1ª, o losango como paralelogramo; na 2ª, simplesmente o paralelogramo; na 3ª, o retângulo como paralelogramo; na 4ª, um quadrilátero qualquer sem atender a nenhuma das especificações requeridas e, na 5ª, o quadrado como losango, retângulo e, ainda, como paralelogramo. Resolvendo corretamente, revela domínio sobre a inclusão de classes. Se as respostas não forem corretas, não existe tal domínio por parte do resolvedor.

c) Teste número 3: avaliando o **Nível 4 (Dedução Formal)**

O nível 4 se refere à capacidade de dedução formal do indivíduo. O teste envolve a observação de sua capacidade em usar conjecturas e tentar verificá-las dedutivelmente, elaborando provas formais; em raciocinar num contexto de um sistema matemático completo; em confiar na prova como autoridade final decidindo a verdade de uma proposição Matemática.

4.1) O livro 1 define trapézio como “um quadrilátero com exatamente um par de lados paralelos”.

O livro 2 define trapézio como “um quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos”.

Esses livros apresentam propriedades diferentes para trapézios?

(A) Sim, porque o livro 1 admite mais figuras como trapézios.
(B) Sim, porque o livro 2 admite mais figuras como trapézios.
(C) Não, porque não há diferença real entre essas duas definições.
(D) Não, porque definições não afetam as propriedades das figuras.

Análise a priori:

O sujeito deve marcar a opção B, revelando compreender as implicações provenientes da mudança na definição do trapézio. A preferência pelo A sugere que haver entendimento sobre a influência da mudança na definição, mas sem uma precisão correta de como se processou a mudança. Ao assinalar os itens C ou D, ele nega essa compreensão.

4.2) Considere as afirmativas:

I- As diagonais de um retângulo cortam-se ao meio.

II- Se as diagonais de uma figura cortam-se ao meio, a figura é um retângulo.

(A) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
(B) Para provar que II é verdadeira, basta exibir um retângulo cujas diagonais cortam-se ao meio.
(C) Para provar que II é verdadeira, basta mostrar que I é verdadeira.
(D) Para mostrar que II é falsa, basta exibir um quadrilátero não-retângulo cujas diagonais se cortam ao meio.

Análise a priori:

O sujeito deve assinalar a opção D, mostrando conhecer a estratégia de apresentação de um contra-exemplo para definir uma proposição como falsa. Assinalando A ou C, está aplicando incorretamente a noção de bi-implicação. A escolha da opção B, por sua vez, traduz uma falsa conceituação do próprio retângulo.

4.3) O livro 1 define retângulo como “um quadrilátero com quatro ângulos retos”.

O livro 2 define retângulo como “um paralelogramo com um ângulo reto”.

Assinale a afirmativa verdadeira:

(A) O livro 1 admite mais figuras como retângulos que o livro 2.
(B) O livro 2 admite mais figuras como retângulos que o livro 1.
(C) As mesmas figuras serão retângulos nos livros 1 e 2, com as mesmas propriedades.
(D) As mesmas figuras serão retângulos nos livros 1 e 2, mas com propriedades diferentes.

Análise a priori:

O sujeito deve marcar a opção C identificando as duas definições como equivalentes. O que não ocorre se assinalar alguma outra opção: A, B ou D.

4.4) Em 1847, P.L. Wantzel provou que é impossível dividir um ângulo em três partes iguais usando somente um compasso e uma régua não graduada. Isso significa que:

(A) É impossível dividir um ângulo em partes iguais usando apenas um compasso e uma régua não graduada.
(B) É impossível dividir um segmento em três partes iguais usando apenas um compasso e uma régua não graduada.
(C) É impossível dividir um ângulo em três partes iguais usando quaisquer instrumentos de desenho.
(D) É possível que no futuro alguém ache um modo geral de dividir um ângulo em três partes iguais usando apenas um compasso e uma régua não graduada.
(E) Ninguém será jamais capaz de achar um modo geral de dividir um ângulo em três partes iguais usando apenas um compasso e uma régua não graduada.

Análise a priori:

O sujeito deve marcar a opção E, revelando compreender a Geometria como uma estrutura lógica baseada em axiomas e teoremas, estes demonstrados a partir daqueles, e sempre válidos dentro do mesmo contexto.A marcação da D revela a inexistência de tal compreensão. A escolha da A ou B mostra uma interpretação errada da proposição apresentada generalizando a divisão do ângulo em partes ou estendendo o conceito à divisão de segmento, respectivamente. No caso da escolha C, há uma equivocada generalização da proposição apresentada.

4.5) A afirmativa I foi provada:

I- Se um quadrilátero é uma “pipa”, então suas diagonais são perpendiculares.

Quais das afirmativas a seguir decorrem de I?

II- Se um quadrilátero tem diagonais perpendiculares, então ele é uma “pipa.

III- Se as diagonais de um quadrilátero não são perpendiculares, então ele não é uma “pipa”.

IV- Se um quadrilátero não é uma “pipa”, então suas diagonais não são perpendiculares.

(A) II somente.
(B) III somente.
(C) IV somente.
(D) II, III e IV.

Análise a priori:

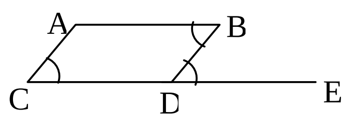
O sujeito deve assinalar a opção B, revelando compreender a distinção entre implicação e equivalência. A escolha por outra, A, C ou D, mostram a inexistência dessa compreensão.

d) <u>Teste número 4</u>: avaliando o **Nível 4d (Construção de Demonstrações)**

Para avaliação do nível 4, da Dedução Formal, acrescentamos às 5 questões anteriores propostas no teste de Van Hiele, mais 3 questões que comporão o presente teste, dito de nº 4d. O objetivo deste é o de avaliar de forma mais minuciosa a compreensão e a elaboração de provas formais pelos participantes, bem como sua metodologia de ensino das demonstrações.

4.6) Um aluno apresentou a solução abaixo para a seguinte questão de geometria:

Dados: AB // CE e AB = CD
Prove que: $A\hat{C}D = A\hat{B}D$



<u>Solução</u>:

Demonstração	Justificativa
1. $A\hat{C}D = B\hat{D}E$	ângulos correspondentes
2. $B\hat{D}E = A\hat{B}D$	ângulos alternos internos
3. $A\hat{C}D = A\hat{B}D$	pela propriedade transitiva

Você acha que esta demonstração está correta? Sim ☐

Não ☐

Explique o porquê.

Análise a priori:

O sujeito deve optar pela negativa, porque a afirmativa um, usada na solução, de que $A\hat{C}D = B\hat{D}E$, com base na justificativa de se tratar de ângulos correspondentes, não procede. Para tal afirmativa ser válida, é necessário considerar as retas AC e BD paralelas, o que não faz parte da hipótese. Assim, a afirmativa três, $A\hat{C}D = A\hat{B}D$, que se pretende demonstrar, somente o poderá, com a validação da segunda que depende da demonstração mencionada de que as retas AC e BD são paralelas.

A probabilidade de considerar a demonstração correta é grande pela não observação de que proposições estão sendo tomadas como verdadeiras sem que façam parte da hipótese.

4.7) Como você justificaria para seus alunos que quando se somam os ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°?

Análise a priori:

O sujeito pode demonstrar a propriedade de diferentes maneiras: usando o teorema de Tales sobre as paralelas cortadas por transversal; usando um trabalho de recortes.

4.8) E como justificaria que as diagonais de um paralelogramo se interceptam em seu ponto médio?

Análise a priori:

O sujeito pode construir a demonstração a partir de extensões do desenho com *subconfigurações* obtidas. Nesse caso, terá que se basear na congruência dos triângulos *subconfigurações*, caso ALA, por exemplo, obtidos a partir da divisão do paralelogramo pelas suas diagonais.

2ª Parte: Concepção dos Professores

Questões foram formuladas nos questionários inicial (na sua segunda parte) e no questionário final com a finalidade de obter dados sobre as concepções dos professores participantes acerca das demonstrações e de seu ensino. O objetivo foi o de estabelecer uma comparação entre as informações coletadas nos dois momentos, antes e após o experimento, verificando a possibilidade de se sugerir alguma influência do trabalho desenvolvido sobre esses fatores.

Após a conclusão dos trabalhos, com a leitura e análise das respostas obtidas, foram selecionadas algumas perguntas cujas respostas foram mais significativas em relação ao que se pretendeu examinar.

Questões do Questionário de Sondagem Inicial, consideradas:

1) Qual o significado das demonstrações em Geometria?
2) Dê, pelo menos, duas razões para a estar utilizando em sala de aula e duas para não estar.

Questões do Questionário de Sondagem Final, consideradas:

1) Na sua opinião, o trabalho de construção das figuras geométricas contribui para a construção do conhecimento? De que maneira?
2) Houve alguma mudança na sua concepção sobre a possibilidade e a maneira de estar trabalhando as demonstrações com seus alunos? Comente.
3) O nosso trabalho contribuiu de alguma maneira para sua vida profissional (em relação aos seus conhecimentos, à sua didática)?

3ª Parte: Atividades da seqüência didática

As atividades da seqüência foram divididas em dois grupos, as de construção (de 1 a 5) e as de exploração (de 6 a 8).

As atividades de construção tiveram como objetivos: a utilização da interface do *Tabulae* e dos seus recursos solicitados durante os trabalhos; a noção de construção e exploração através da Geometria Dinâmica; a passagem para a fase dedutiva com a busca de justificativas para as propriedades identificadas.

a) Atividades de Construção:

Atividade 1: A Circunferência

1) Crie um *segmento* para ser o raio da circunferência a ser construída.
   - Meça o *comprimento* do mesmo e o *identifique* como raio.
   - Clicando no botão *compasso*, trace a circunferência c de centro num ponto A qualquer e de raio com medida igual ao segmento criado.
   - Crie e *identifique* um ponto B sobre a circunferência c e construa o *segmento* AB, raio da circunferência.
   - Meça o *comprimento* do raio AB.
   - Mova o ponto A e, depois, o ponto B. Que observa em cada um desses dois momentos?
   - Explore o que acontece com o comprimento do raio AB, ao alterar o comprimento do segmento raio.
2) Clicando no botão *ponto/ponto sobre objeto*, marque um ponto C sobre a circunferência c e trace o *segmento* BC.
   - Meça o *comprimento* do segmento BC (corda).
   - Explore a medida da corda BC ao movimentar o ponto C sobre a circunferência e qual a posição de C que torna BC com medida máxima.
   - Meça o *ângulo* <ABC e explore, agora, essa medida movimentando o ponto C. Que acontece com esse ângulo quando C se aproxima de B?
   - E quando C coincide com B?
3) Após *esconder* o segmento BC e o ponto C, construa a reta t, *tangente à circunferência* c, no ponto B.
   - Marque um *ponto sobre essa reta* tangente (ponto D).
   - Meça o ângulo <ABD.
   - Explore a alteração sofrida pelo ângulo <ABD, ao movimentar o ponto B sobre a circunferência.
   - Qual a relação que podemos sugerir haver entre a tangente ao círculo no ponto B e o raio AB?
   - Como poderíamos demonstrar essa relação, garantindo a sua generalização?
   - Usando essa relação, como poderia ser definido o procedimento para construir uma tangente a uma circunferência?
   - Quantas tangentes ao círculo podem ser construídas?

Objetivos:

Pretende-se, nesta atividade, permitir ao professor, através da construção e exploração: rever a circunferência como lugar geométrico; identificar os seus elementos; identificar o diâmetro como sua maior corda; construir uma reta tangente à circunferência; estabelecer relação entre a tangente à circunferência no ponto A e o raio de extremidade nesse ponto; justificar a relação conjecturada. Esse trabalho inicial com a circunferência objetiva, também, facilitar a construção de outras figuras, bem como a justificativa de algumas de suas propriedades.

Análise a priori:

Efetuada a construção da circunferência e de alguns elementos seus (Figura 5.1), espera-se que o professor verifique empiricamente, com o movimento da figura e conseqüente mudança de medidas registradas na tela, provocados pelo arrastar, os seguintes fatos: ser o diâmetro sua corda máxima; variar de 0° a 90°, a medida do ângulo formado por uma corda e um raio estando seu vértice na circunferência; conjecturar o perpendicularismo entre a tangente e o raio no ponto de contato da circunferência, buscando uma justificativa para tal.

Na busca de uma justificativa, o professor deve se engajar em: *ações*, *formulações*, *validações*, explorando, mais uma vez, o desenho em movimento. A demonstração dessa propriedade exigirá um processo de demonstração por absurdo, que não é tão natural. Provavelmente os professores terão dificuldade em encontrar uma maneira de justificar a propriedade por estarem numa fase inicial de trabalho e por justificação exigir um salto do pensamento empírico para o conceitual.

Esta situação pode ser prevista, mas é possível contorná-la promovendo uma discussão em grupo sobre a forma de solucionar a questão e construir a demonstração de forma compartilhada.

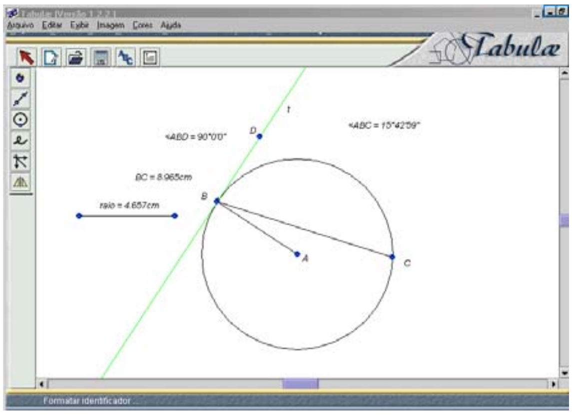


Figura 5.1. A circunferência e seus elementos

Atividade 2: O Quadrado

1) Crie um *segmento* AB para ser um dos lados do quadrado.
   - Trace por A, uma *reta perpendicular* r ao segmento AB e, do mesmo modo, por B uma *reta perpendicular* s a AB.
   - Clicando no botão *compasso*, trace uma circunferência de centro em A e raio AB e marque o *ponto interseção* D da circunferência com a reta r.
   - Trace por D, a *reta perpendicular* p à reta r e marque C, *ponto de interseção* das retas p e s.
   - Em exibir, *esconda os objetos*: retas r, s e p.
2) Crie os *segmentos* AB, BC, CD e DA.
   - Em *formatar linha*, torne mais espessos os segmentos criados e coloridos no *formatar cor*.
   - O polígono traçado é um quadrado? Por quê?
   - Meça o *comprimento* de seus lados e ângulos. Experimente movimentar os seus vértices, um de cada vez e observe o resultado.
   - Selecione os 4 vértices do quadrado e, em *construir-locus*, identifique-o como um polígono. A seguir, em *calcular*, solicite a sua *área*.
   - Arraste, depois, vértices da figura e acompanhe o que acontece com a medida de sua área expressa na tela.

Objetivos:

Através da construção do quadrado com o auxílio da circunferência e de retas perpendiculares, pretende-se permitir ao aluno a constatação ou o desenvolvimento de uma conceituação correta da figura geométrica em questão, através da fusão adequada de seus componentes conceitual e figural.

Análise a priori:

Com o auxílio da circunferência e da construção de retas perpendiculares a um segmento dado, constrói-se o quadrado (Figura 5.2). Com a construção da figura, espera-se que seja desenvolvido um controle do componente conceitual do objeto geométrico; com o desenho em movimento ocorre o controle do componente figural. Assim, através dos processos de ação e formulação realizados, é favorecida a compreensão do significado do desenho como uma instância do objeto, o que implica na superação da dificuldade que pode ser encontrada na fusão adequada dos componentes conceitual e figural que constituem o objeto geométrico (Fishben, 1993).

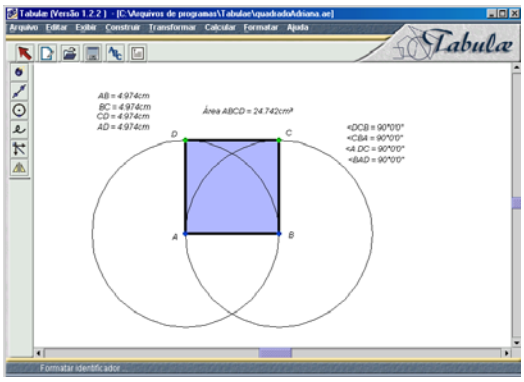


Figura 5.2. A construção do quadrado

<u>Atividade 3</u>: Triângulo Isósceles

1) Crie um *segmento* para ser o raio da circunferência a ser construída. Meça o *comprimento* do mesmo e o *identifique* como raio.

- Clicando no botão *compasso*, trace a circunferência de centro no ponto C e de raio igual ao segmento raio.
- Crie dois *pontos sobre objeto* (circunferência) e os *identifique* como A e B.
- Construa os *segmentos* CA e CB e meça o *comprimento* deles.
- Que representam esses segmentos?
- Verifique o que acontece com as medidas de CA e CB ao movimentarmos o segmento raio inicialmente construído.

2) Crie o triângulo ABC, a partir da construção do *segmento* BA.

- Meça o *comprimento* de BA.
- Que tipo de triângulo é ABC? Por quê?
- Meça os ângulos <CAB, <ACB e <CBA e veja o que acontece com o triângulo ABC, com o movimento dos pontos A ou B?
- Que elementos permanecem invariantes com as transformações assim provocadas em ABC?
- Que propriedade pode ser observada em relação aos ângulos dessa classe de triângulos?
- Como podemos garantir que essa propriedade é sempre válida para tal classe de triângulo? Faça uma demonstração.

Objetivos:

O objetivo desta atividade é de favorecer uma conceituação correta do triângulo isósceles através da sua construção com o auxílio da circunferência. É também proposta da questão levar o professor ao desenvolvimento da demonstração da propriedade da congruência dos ângulos da base desse triângulo, com a *extensão* do desenho para obtenção de *subconfigurações* que sustentem as argumentações. É possível que alguns apresentem dificuldade na distinção entre hipótese e tese.

Análise a priori:

Com o auxílio da circunferência constrói-se o triângulo isósceles (Figura 5.3). Com a construção e o seu posterior movimento provocado pelo arrastar, a fusão dos componentes conceitual e figural do objeto geométrico torna-se conseqüente. Os ambientes de geometria dinâmica facilitam a promoção desta fusão porque no dinamismo das figuras fica refletida a persistência de certas relações assim como a irrelevância de outras.

A representação mental correta do objeto, exige elaboração mental que transita pelas abstrações empíricas e reflexionantes, desenvolvendo o pensamento hipotético dedutivo. A partir dessa representação correta, o sujeito tem condição de buscar relações que permitam demonstrar a propriedade solicitada acerca dos ângulos da base desse triângulo. Para essa atividade, é exigida a apreensão operatória do objeto de forma que se evidenciem as subconfigurações que darão suporte à demonstração.

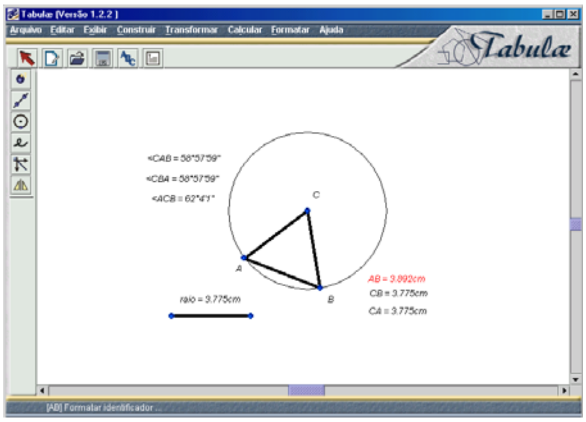


Figura 5.3. A construção do triângulo isósceles

<u>Atividade 4</u>: Triângulo Eqüilátero

1) Crie um *segmento* AB para ser lado do triângulo.
   - Clicando no botão *compasso*, crie uma circunferência com centro em A e raio AB e outra com centro em B e raio BA.
   - Marque um *ponto interseção* C dessas duas circunferências.
2) Trace os *segmentos* AC e BC formando, assim, o triângulo ABC.
   - Em *formatar linha* torne mais espessos os lados de ABC.
   - Meça o *comprimento* dos lados e dos *ângulos* do triângulo em questão.
   - Que tipo de triângulo é ABC?
   - Experimente movimentar os vértices do triângulo e comente o resultado.
   - Como você justificaria a permanência de elementos invariantes nesse triângulo?
   - Que funções desempenham as circunferências nesta construção?

Objetivos:

Nessa atividade pretende-se também que o professor, através da construção do triângulo eqüilátero com o auxílio de duas circunferências de mesmo raio, consolide sua representação mental do objeto em questão e desenvolva uma justificativa da propriedade de congruência dos ângulos.

Análise a priori:

De acordo com o roteiro, o triângulo equilátero poderá ser construído com o apoio de duas circunferências de mesmo raio. Com a construção efetuada (Figura 5.4), o dinamismo do triângulo equilátero provocado pelo arrastar, propiciará ou enriquecerá a fusão dos componentes conceitual e figural do objeto geométrico. A demonstração da propriedade da congruência dos ângulos será uma tarefa fácil se ocorrer a devida *apreensão perceptiva* da figura cujos lados são raios de circunferências congruentes.

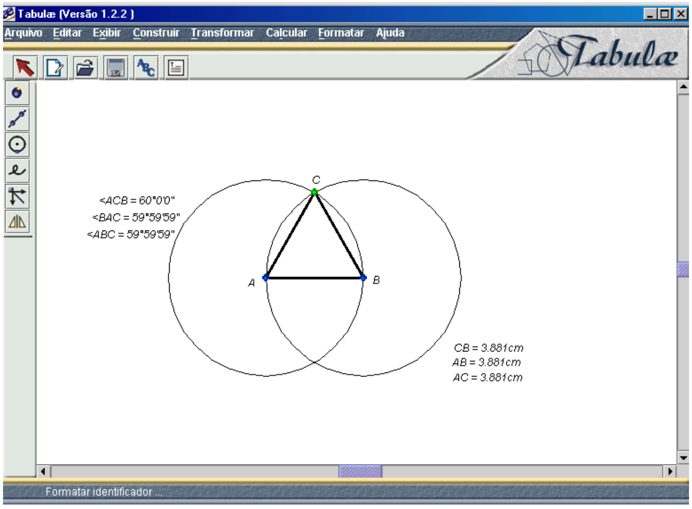


Figura 5.4. A construção do triângulo equilátero

<u>Atividade 5</u>: Triângulo Retângulo

1) Construa uma *circunferência* de centro P. *Identifique A, ponto sobre objeto* nesta circunferência.
   - Trace a *reta* r pelos pontos A e P.
   - *Identifique* B, o outro *ponto interseção* de r com a circunferência.
   - Qual o significado do segmento AB para a circunferência?
2) Em *exibir*, *esconda* a reta r e, depois, trace os *segmentos* AP e PB.
   - Usando a *calculadora*, efetue a *adição* AP + PB e a *indique* como equivalente à medida do diâmetro AB.
   - Verifique o que ocorre com esses valores ao se movimentar os pontos A ou P.
3) Marque C, *ponto sobre objeto* circunferência, construindo o triângulo ABC.
   - Meça os *ângulos* <ACB, <ABC e <BAC e os lados do triângulo.
   - Que tipo de triângulo é ABC?
   - Explore o que acontece com esse triângulo, movimentando-se os pontos A ou P? Algo permanece invariante?
   - Investigue, agora, o que acontece com os dois objetos (circunferência e triângulo) quando se movimenta o ponto C? Algo ainda permanece invariante?
   - De que modo isso pode ser garantido?
4) Trace o *segmento* CP e meça o seu *comprimento.*
   - Que representa CP para o triângulo ABC?
   - Mova os pontos A ou P e observe o que acontece com as medidas indicadas.
   - Faça o mesmo movimentando, agora, apenas o ponto C. Comente.
   - Qual a relação que podemos sugerir existir entre as medidas desse específico elemento do triângulo ABC e as de seus lados?
   - Essa conjectura implicaria na classificação dos triângulos APC e PCB?
   - Nessas condições, de que forma podemos estar validando essa conjectura?

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é de levar o professor a efetuar verificações empíricas e construir demonstrações a partir da construção de um triângulo em que um dos seus lados coincida com um diâmetro de uma circunferência. Verificar que o triângulo obtido é retângulo, justificando. Comprovar que a medida da mediana relativa à hipotenusa equivale à metade de seu comprimento. Construir uma demonstração para esta propriedade.

Análise a priori:

Um triângulo deve ser construído de modo que um dos seus lados coincida com o diâmetro de uma circunferência (Figura 5.5). A partir de medidas registradas na tela do *Tabulae,* e de uma análise do comportamento das mesmas com a movimentação da figura, verificar o estabelecimento de um triângulo retângulo como conseqüência das condições de construção. Justificar esse fato. Para tal, o professor deve fazer uma *reinterpretação* do desenho, percebendo *fatos estáveis implícitos* decorrentes dos *fatos declarados* na construção. Isso significa perceber que o ângulo oposto ao lado coincidente com o diâmetro é um ângulo inscrito num semicírculo e, portanto de medida igual a 90°. A verificação da medida da mediana relativa à hipotenusa ser equivalente à medida da metade desta é feita também com a observação do comportamento das medidas provocados pelo dinamismo da figura. A justificativa para essa propriedade é simples e se baseia na própria construção, onde a mediana e as seções médias da hipotenusa são raios do mesmo circulo apresentando, assim a mesma medida.

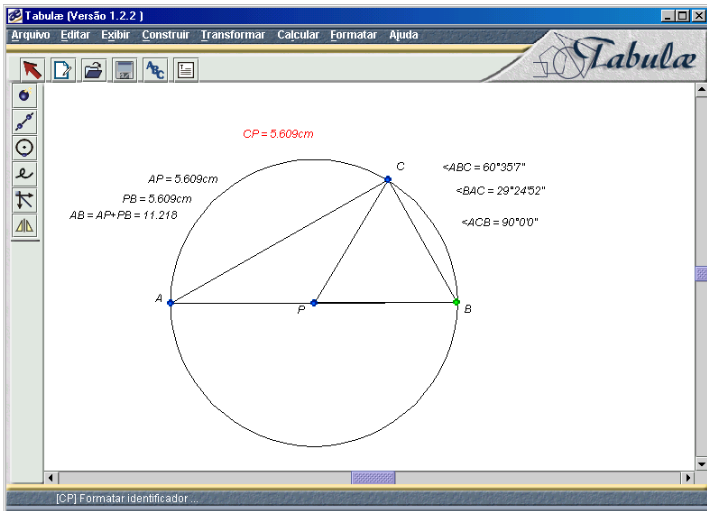


Figura 5.5. A construção do triângulo retângulo

b) Atividades de Exploração:

Objetivos:

Pretende-se através desses três problemas de exploração (atividades 6, 7 e 8), um maior entendimento da necessidade de demonstração e o desenvolvimento ou revigoramento da habilidade do professor em construí-la. Pretende-se, por outro lado, a apresentação de situações que contenham maiores exigências de *extensão* de desenho, implicando em *apreensões operatórias* mais complexas. Na atividade seis, especificamente, espera-se que o professor, no ambiente de geometria dinâmica, verifique que, dado um ponto P no interior de um triângulo eqüilátero ABC, a soma das medidas de sua distância aos lados de ABC é constante e, depois da verificação empírica, elabore a demonstração dessa propriedade.

<u>Atividade 6</u>: A ilha do triângulo eqüilátero

João tenciona mandar construir uma casa numa ilha com a forma de um triângulo eqüilátero. Cada lado da ilha é uma praia espetacular: numa delas a ondulação é a ideal para a prática do surf, outra é uma praia de águas calmas, formidável para nadar, e a terceira costuma ser freqüentada por umas garotas muito animadas e bonitas. Ora, o João, que é um surfista de primeira, um exímio nadador e um amante de coisas belas, pretende que a sua casa fique num lugar tal que a soma das distâncias às praias seja a menor possível (Figura 5.6). Onde deve o João mandar construir a sua casa?

Sugestões:

a) obtenha as distâncias da casa a cada um dos lados da ilha, registrando as respectivas medidas;

b) desloque a casa no interior da ilha e tente descobrir o que acontece à soma das três distâncias.

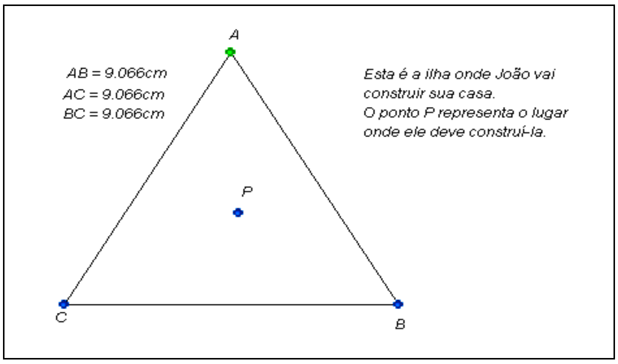


Figura 5.6. O problema da ilha do triângulo eqüilátero

Análise a priori:

Com a interpretação do enunciado e a análise da figura apresentada, a expectativa é de que a primeira hipótese do sujeito aponte para a localização desse ponto no incentro, baricentro ou circuncentro do triângulo. Isso se explica pela freqüência com que a resolução de problemas semelhantes a este seja voltada para um relacionamento com esses pontos. Uma iniciativa que logo deve surgir, é a verificação da conjectura pelo controle das medidas de PM, PN e PQ (distâncias do ponto P, casa, aos lados de ABC, triângulo ilha) e da soma dessas medidas. A familiaridade dos participantes com o ambiente favorece o encontro de recursos apropriados ao tratamento do problema.

Constatada a não validade de sua conjectura, os professores devem partir para novas investigações. A constatação de que a soma é constante e igual à altura de ABC é uma etapa seguinte e deve ser acessível à maioria.

A solução, no entanto, só será encontrada a partir de *extensões* da figura, com a formação das *subconfigurações* (triângulos APB, APC e BPC), onde em cada um deles, o respectivo segmento distância é, ao mesmo tempo, a sua altura.

A justificativa surge, então, fundamentada na igualdade entre a área do triângulo ABC e a soma das áreas dos três triângulos APB, APC e BPC de mesma base (lados de ABC).

Considera-se que nem todos consigam chegar a tal estágio pela demanda de apreensões operatórias mais complexas exigidas em sua resolução.

<u>Atividade 7</u>: Quadrilátero inscrito no triângulo

Como deve ser o triângulo ABC para que o quadrilátero MNED inscrito tenha a seguinte regularidade: ser um quadrado? M, N e P são pontos médios dos lados de ABC. D e E são pontos médios de BP e PC, respectivamente (Figura 5.7).

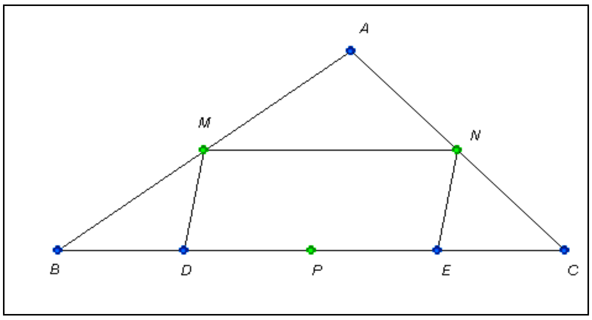


Figura 5.7. O problema do quadrado inscrito num triângulo

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é de levar o professor a efetuar verificações empíricas e verificar quais as condições de ABC para que o quadrilátero inscrito seja um quadrado (Figura 5.7). A seguir, espera-se que ele construa uma demonstração para esta propriedade.

Análise a priori:

O problema pode ser dividido em duas partes. A primeira envolve a demonstração de ser MNED um paralelogramo, com base no *fato declarado* dos pontos médios dos lados, gerando os *fatos estáveis implícitos* da base média de ABC e conduzindo a dois triângulos semelhantes AMN e ABC.

A segunda parte envolve a demonstração propriamente dita de verificar as condições de ABC para que MNED seja um quadrado. As investigações bem sucedidas levam às exigências de ABC ser triângulo isósceles e de base e altura congruentes.

Para se chegar a essa conclusão, *apreensões operatórias* da figura precisam ser atingidas, ao lado de *extensões* do desenho, com a constituição de *subconfigurações* convenientes, os triângulos APB e APC.

Atividade 8: Triângulo Retângulo

Dado o triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em A e P ponto móvel sobre a hipotenusa, construa os pontos I no cateto BA e J no cateto CA, de tal forma que os segmentos PI e PJ sejam perpendiculares aos catetos. Em que momento o comprimento do segmento IJ atinge seu menor valor (Figura 5.8)? Justifique.

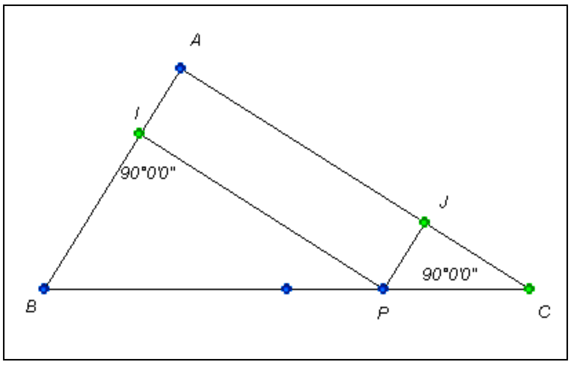


Figura 5.8. O problema do triângulo retângulo

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é de levar o professor a verificar primeiramente que IJ é uma diagonal do quadrilátero AJPI, antecedido da demonstração de ser AJPI retângulo pelo paralelismo entre os lados e pelos ângulos retos (Figura 5.8). Essa verificação e justificativa são simples e devem ser obtidas por todos.

A verificação do comprimento mínimo para IJ pode ser obtida a partir do controle da diagonal AP, *extensão* imposta ao desenho, por serem essas diagonais congruentes.

Análise a priori:

O problema precisa ser dividido em etapas. A primeira envolve a demonstração de ser AJPI um retângulo. Com base no *fato declarado* dos segmentos PI e PJ serem perpendiculares aos lados AB e AC, respectivamente, e de ABC ser retângulo em A, a demonstração é simples e pode ser efetuada pela maioria. A partir da hipótese demonstrada de AJPI ser retângulo, espera-se que a verificação da posição de P em BC possa ser definida e, posteriormente, demonstrada. Com o controle da diagonal AP, *extensão* imposta ao desenho, verifica-se o seu comprimento mínimo como aquele em que AP é perpendicular à base BC. Visto serem as diagonais congruentes, IJ terá comprimento mínimo quando P estiver localizado de forma que AP seja perpendicular a BC. Para se chegar a essa conclusão, *apreensões operatórias* da figura precisam ser atingidas, ao lado de *extensões* do desenho, com a constituição de *subconfigurações* convenientes. É possível que nem todos os professores consigam atingir tal nível de evolução de pensamento.

5.3.3 Experimentação, Análise *a Posteriori* e Validação

Nesta fase, a seqüência didática programada é implementada. É a fase crítica, pois a prática nos traz, quase sempre, variáveis não previstas. É necessário estar atento para que se possa detectá-las e saber tratá-las. É possível que se torne necessária, até mesmo, uma reformulação e adaptação da Engenharia Didática programada. Segundo Gravina (2001), *“A Engenharia Didática é uma metodologia de caráter dialético: o próprio desenvolver da experiência retroage sobre a engenharia concebida”.*

Os participantes devem tomar conhecimento dos objetivos e das condições de realização da pesquisa, do contrato didático, das aplicações dos instrumentos de pesquisa, do registro de observações a serem feitas durante a experiência.

Os trabalhos de campo realizados, cujas descrições fazem parte desta 3ª fase, pelo volume e importância do relato, são apresentados num capítulo próprio, o Capítulo 6.

Capítulo 6. Os Estudos de Campo

“A didática muda como conseqüência do aumento de conhecimentos”.

Aurea
(professora participante do estudo de campo1).

Neste capítulo são descritos os dois estudos de campo realizados, englobando: os experimentos, propriamente ditos, com relato dos principais fatos ocorridos; a análise *a posteriori* das atividades e a validação das propostas segundo critérios estabelecidos. Nesta sessão também são descritos os trabalhos dos professores desenvolvidos com seus alunos.

6.1 O Estudo de Campo 1

Este é o estudo que envolveu professores de Matemática do município de Angra dos Reis. O projeto foi desenvolvido em 15 seções de 90 minutos cada uma, perfazendo um total de cerca de 22 horas e ocorreu durante os meses de agosto a novembro de 2004.

6.1.1 Os Participantes

A experiência se iniciou contando com a participação de sete professores. A partir da terceira sessão, um oitavo, a convite de um dos participantes e com a aquiescência do coordenador, se inseriu no grupo. Todos cumpriram as etapas previstas até o último encontro. Nos dois primeiros encontros foi avaliado o nível de conhecimento geométrico dos professores participantes, bem como suas concepções a respeito da matemática e das demonstrações através da aplicação do pré-teste e do questionário de sondagem inicial, respectivamente. Informações que o caracterizassem foram obtidas a partir deste questionário e são relatadas a seguir. Na descrição dos participantes, os professores serão apresentados com nomes fictícios para garantir seu anonimato.

a) **Professora Ana**

A participação de Ana, nessa pesquisa, foi motivada por "*colaborar e aprender com o trabalho da amiga que será desenvolvido com o objetivo de produzir algo que venha ajudar a apresentação dos conteúdos*".

Ana tem de 41 a 50 anos de idade e mais de 20 anos de experiência no magistério. É licenciada em Matemática, com curso de aperfeiçoamento em Matemática Pura e pós-graduação em Educação Matemática. Trabalha como professora na rede particular e é aposentada na rede estadual, dando 12 aulas semanais de Matemática no Ensino Médio.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal para a elaboração de provas e apostilas para suas aulas, e também para pesquisa. Nunca o utilizou como um recurso em suas aulas.

Ana trabalha com a Geometria tanto no Ensino Fundamental como no Médio. A forma de trabalhar é diversificada: expositiva, em resolução de problemas, grupos de trabalho, pesquisa e outros. Considera a Geometria importante: "*porque sem conhecer geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, confundindo as idéias, trazendo uma comunicação distorcida, uma vez em que não está desenvolvendo seu pensamento geométrico ou raciocínio visual, e não possuindo habilidade para resolver situações geométricas, dificultam a comunicação*". Relaciona como as principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria as seguintes: "*fazer uma ligação dos conceitos que lhes são ministrados com a realidade. O mundo é geométrico; a geometria está em todos os lugares e objetos*". E tais dificuldades são trabalhadas por ela da seguinte maneira: "*sem muitos recursos lúdicos, ou quase nenhum, procuro usar a observação do nosso redor, como* *a própria sala de aula; desenhos ou fotos, objetos e construções feitas pelos seres humanos. Os instrumentos de desenhos também ajudam em alguns casos*".

Para Ana, o significado das demonstrações em Geometria é "*comprovar de forma clara os teoremas desenvolvendo a capacidade de investigação e coerências entre as partes teóricas*". Ela diz sentir necessidade de utilizá-las "*quando os assuntos estão soltos sem parecer atrelado a outros assuntos preliminares*". Quando o faz, encontra mais ou menos dificuldades em utilizá-la. Duas razões para estar utilizando as demonstrações em sala de aula: "*a demonstração aguça a curiosidade e relaciona dados; não fica parecendo que surgiu do nada e sim de observações e tentativas*". Duas razões para não estar utilizando-as: "*falta de conhecimento em séries anteriores (sem seqüência); os alunos não conseguem se concentrar numa demonstração por falta de hábito ou por serem longas e às vezes maçantes*".

Ana acrescenta que "*a geometria deveria ser incluída de forma lúdica e com responsabilidade investigativa desde as primeiras séries primárias, isto é, inicial, aproveitando a pré-matemática que já está imbutida na sua vida, e bem próximo, e só fazer a leitura, e ir crescendo com o avançar nas séries*".

b) **Professor Aldo**

A participação de Aldo nessa pesquisa foi motivada por "*aprender ou conhecer a geometria na computação".*

Aldo tem de 41 a 50 anos de idade e de 10 a 20 anos de experiência no magistério. É licenciado em Matemática e revela não ter participado de nenhum processo de formação continuada nos últimos três anos. Trabalha como professor das redes estadual e particular, dando 42 aulas semanais de Matemática nos Ensinos Fundamental e Médio.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal, como para a elaboração de provas para suas aulas, para tirar médias de notas de alunos. Nunca o utilizou como um recurso em suas aulas.

Aldo trabalha com a Geometria em suas salas de aula, tanto no Ensino Fundamental como no Médio. A forma de trabalhar é expositiva ou em resolução de problemas. Considera a Geometria importante porque *"ajuda a desenvolver o raciocínio e passa a ter uma visão de espaço"*. Relaciona como as principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria as seguintes: *"visão geométrica"*. E tais dificuldades são trabalhadas por ele da seguinte maneira: *"mostrando, com construções, os conceitos"*.

Para Aldo, o significado das demonstrações em Geometria *é "o aluno deixa de apenas decorar fórmulas e passa a construí-las"*. Diz sentir necessidade de utilizá-las "*quando em alguns casos"*. Quando o faz, encontra dificuldades em utilizá-la. Não cita duas razões para estar utilizando as demonstrações em sala de aula. Duas razões para não as estar utilizando: "*requerem um conhecimento mais complexo; alguns alunos sem conhecimento acabam se desmotivando"*.

c) **Professora Áurea**

A participação de Áurea nessa pesquisa foi motivada pela "*vontade de estar sempre crescendo"*.

Áurea tem mais de 50 anos de idade e entre 5 e 10 anos de experiência no magistério. É licenciada em Administração e Economia e pós-graduada em Matemática. Revela não ter participado de nenhum processo de formação continuada nos últimos três anos. Trabalha como professora da rede particular, dando 30 aulas semanais de Matemática nos Ensinos Fundamental e Médio.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal para trabalhos e estudo. Nunca o utilizou como um recurso em suas aulas.

Áurea trabalha com a Geometria em suas salas de aula, tanto no ensino fundamental como no médio. A forma de trabalhar é expositiva e em resolução de problemas. Considera a Geometria importante porque "*possibilita a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Como dizia Platão: "Geometria está em toda parte. A Geometria dá praticidade à inteligência do aluno*". Relaciona como as principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria as seguintes: "*absorver a teoria, somente com o uso do quadro e do giz. Acrescenta que as escolas não estão preparadas e muitas vezes o professor, para trabalhar com mais segurança, precisa se conscientizar de que os ensinamentos científicos e didáticos, enquanto insuficientes e inadequados terão que ser modernizados e aprofundados*". E tais dificuldades são trabalhadas por ela da seguinte maneira: "*em primeiro lugar, estudando cada vez mais; depois buscando uma adequação do meu conhecimento com os das instituições que faço parte*".

Para Áurea, o significado das demonstrações em Geometria é "*valorizar a aprendizagem fazendo com que o aluno construa os seus próprios conceitos*". Diz sentir necessidade de utilizá-las quando "*sempre que necessito trazer o aluno para pensar junto comigo, montando os seus conceitos*". Quando o faz encontra dificuldades em utilizá-la. Não cita as razões pedidas para estar utilizando as demonstrações em sala de aula e as para não as estar utilizando.

d) **Professora Cora**

A participação de Cora nessa pesquisa foi motivada por: "*sempre procurar saber mais".*

Cora tem mais de 50 anos de idade e, mais de 20 anos de experiência no magistério. Sua formação é de professora do primeiro segmento do Ensino Fundamental e revela não ter participado de nenhum processo de formação continuada nos últimos três anos.

Trabalha como professora de Matemática da rede estadual e particular em turmas de 5ª à 7ª séries do Fundamental, dando 12 aulas semanais no Ensino Fundamental.

O computador não é utilizado por ela, portanto, ele nunca foi usado como um recurso em suas aulas.

Cora trabalha com a Geometria no ensino fundamental. A forma de trabalhar é expositiva e em resolução de problemas. Considera a Geometria importante porque "*ela tem muita importância, principalmente na área de Engenharia*". Relaciona como as principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria "*tendo como origem a falta de material didático. E tais dificuldades são trabalhadas por ela da seguinte maneira: "procurando emprestar o material que existe na sala de aula para os alunos*".

Para Cora, o significado das demonstrações em Geometria é "*provar o porquê da geometria que está sendo estudada*". Diz sentir "*necessidade de utilizá-las quando está dando aula"*. Quando o faz, não encontra dificuldades em utilizá-la. Duas razões para estar utilizando as demonstrações em sala de aula: "*eu gosto de dar esta aula, ou melhor, este conteúdo, pois faz parte da matemática*". Não citou as duas razões solicitadas para não as estar utilizando.

e) **Professor Eli**

A participação de Eli, nessa pesquisa, foi motivada por: "*forte desejo de ensinar geometria de uma forma prática e mais transparente para o aluno"*.

Eli tem mais de 50 anos de idade e mais de 20 anos de experiência no magistério. É licenciado em Matemática e está participando de um curso de pós-graduação em Educação Matemática. Trabalha como professor efetivo da rede estadual, dando 24 aulas semanais de Matemática no Ensino Médio. Já trabalhou durante muitos anos como professor da rede particular de ensino.

O computador não é utilizado nem de maneira informal e nem pessoal, como para a elaboração de provas, por exemplo. Nunca o utilizou como um recurso em suas aulas.

Eli trabalha com a Geometria em suas salas de aula, atualmente no Ensino Médio, mas já a trabalhou também no Ensino Fundamental. A forma de trabalhar é expositiva e com resolução de problemas. Considera a Geometria importante porque "*além de ajudar no raciocínio do aluno também pode ter grande valia em várias situações do cotidiano*". Relaciona como as principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria as seguintes: "*interpretar e equacionar os problemas propostos, demonstrar os teoremas e as propriedades*". Tais dificuldades são trabalhadas por ele da seguinte maneira: "*apresentação detalhada das propriedades das figuras e atividades para fixação*".

Para Eli, o significado das demonstrações em Geometria é "*com as demonstrações há maior fixação da teoria necessária na solução dos problemas*". E diz sentir necessidade de utilizá-las em sua prática pedagógica "*no momento em que os estudantes questionam os porquês da geometria*". Quando o faz, não encontra dificuldades em utilizá-la. Não cita as razões pedidas para estar utilizando as demonstrações em sala de aula e as para não as estar utilizando.

f) **Professor Guilherme**

A participação de Guilherme nessa pesquisa foi motivada "*por poder atualizar os conhecimentos*".

Guilherme tem entre 31 e 40 anos de idade e de 2 a 5 anos de experiência no magistério. É licenciado em Matemática. Já fez especialização em Educação Matemática. Trabalha como professor da rede estadual e particular, dando 45 aulas semanais de Matemática ou de Física nos Ensinos Fundamental e Médio.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal para a elaboração de provas e outros motivos. Utilizou-o poucas vezes como um recurso em suas aulas.

Guilherme não trabalha com a Geometria em suas aulas, tanto no ensino fundamental como no médio e afirma que: "*Não trabalho a Geometria por ter dificuldade em transmitir esse conteúdo e por falta de material, além de que o tempo disponível para geometria é insuficiente*".

g) **Professora Lila**

A participação de Lila nessa pesquisa foi motivada "*por considerar uma excelente oportunidade de me atualizar, conhecendo uma nova metodologia no ensino de Geometria e isto com certeza trará benefícios para a aprendizagem de meus alunos*".

Lila tem idade entre 41 e 50 anos de idade e mais de 20 anos de experiência no Magistério. É licenciada em Matemática e revela não ter participado de nenhum processo de formação continuada nos últimos três anos. Trabalha como professora da rede estadual, efetivo, dando 24 aulas semanais de Matemática nos Ensinos Fundamental e Médio. Já trabalhou durante muitos anos na rede particular e, hoje, por motivos particulares, reduziu sua carga horária.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal para a elaboração de provas. Nunca o utilizou como um recurso em suas aulas.

Lila trabalha com a Geometria em suas salas de aula, tanto no Ensino Fundamental como no Médio. A forma de trabalhar é diversificada: expositiva, em resolução de problemas, grupos de trabalho, jogos. Considera a Geometria importante porque: "*desenvolve o raciocínio contribuindo para a criatividade e a imaginação do aluno, levando-o a representar, argumentar e estimulando-o a solucionar problemas propostos*". Não relaciona as principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria, mas "*as condiciona à falta de tempo, em se tratando da rede pública estadual, pois a carga horária é a mínima exigida e por esse motivo o trabalho em sala de aula fica muito prejudicado e, com isso, a aprendizagem da geometria também*". E tais dificuldades são trabalhadas por ele da seguinte maneira: "*como o tempo é curto, eu procuro não me aprofundar nos assuntos propostos no planejamento e para que os alunos tenham a motivação*".

Para Lila, o significado das demonstrações em Geometria é o "*de servir para a compreensão e aceitação e diz sentir necessidade de utilizá-las quando para solucionar determinados problemas e quando há muita necessidade em algumas aulas*". Quando o faz, encontra dificuldades, algumas vezes, em utilizá-la. Duas razões para estar utilizando as demonstrações em sala de aula: "*mostrar a veracidade das afirmações; auxiliar na compreensão, aceitação e muitas vezes na fixação do teorema*".Duas para não estar utilizando-as: "*falta de interesse por parte dos alunos; tempo insuficiente em sala de aula*".

Lila acrescentou: "*acho muito importante participar desses encontros, onde temos oportunidade de repensar a nossa prática pedagógica e principalmente estudar métodos novos*".

h) **Professora Rosa**

A participação de Rosa nessa pesquisa foi motivada por: "*a importância em estar discutindo e assimilando informações sobre a educação hoje e a necessidade de estar na medida do possível me atualizando*".

Rosa tem entre 41 a 50 anos de idade e mais de 20 anos de magistério. É licenciado em Matemática, com curso de aperfeiçoamento para professores em Matemática Pura e pós-graduação em Educação Matemática. Trabalha como professora da rede estadual, municipal e particular, dando 47 aulas semanais de Matemática nos Ensinos Fundamental e Médio.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal para a elaboração de provas e outras tarefas. Já o utilizou como um recurso em suas aulas e faz questão de frisar que já apresentou uma aula em ambiente de geometria dinâmica (*Sketchpad*) durante o seu curso de pós-graduação.

Rosa trabalha com a Geometria em suas salas de aula, tanto no Ensino Fundamental como no Médio. A forma de trabalhar é diversificada: expositiva, em resolução de problemas, grupos de trabalho, pesquisa. Considera a Geometria importante *"porque proporciona momentos de desafio do raciocínio e de resolução de problemas"*. Relaciona como as principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria as seguintes: *"acredito que uma das maiores dificuldades do aluno na aprendizagem da geometria seja a maturidade necessária para entender as demonstrações"*. E tais dificuldades são trabalhadas por ela da seguinte maneira: *"procuro tirar do próprio aluno os conhecimentos necessários para tal entendimento"*.

Para Rosa, o significado das demonstrações em Geometria: "*é proporcionar o levantar de hipóteses e com isso trazer o debate para a construção do conhecimento*". Não cita quando sente necessidade de utilizá-las. Quando o faz, encontra dificuldades em utilizá-la em alguns momentos. Duas razões para estar utilizando as demonstrações em sala de aula: "*no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático: as discussões, construção de conceitos por meio de trabalhos de grupo"*. Duas para não estar utilizando-as: "*a dificuldade do aluno nos momentos de abstração*".

O perfil dos professores integrantes do Estudo de Campo1 está sintetizado na Tabela 6.1, apresentada a seguir:

Professor	**Idade**	**Sexo**	**Tempo de Magistério**	**Ensina Geometria**	**Usa computador em aula**	**Usa demonstração em aula**
Ana	De 41 a 50	F	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Aldo	De 41 a 50	M	De 10 a 20	Sim	Não	Sim
Áurea	Mais de 50	F	De 5 a 10	Sim	Não	Sim
Cora	Mais de 50	F	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Eli	Mais de 50	M	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Guilherme	De 31 a 40	M	De 2 a 5	Não	Não	Não
Lila	De 41 a 50	F	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Rosa	De 41 a 50	F	Mais de 20	Sim	Às vezes	Sim

Tabela 6.1. Perfil dos professores integrantes do Estudo de Campo 1

6.1.2 As Sessões

Primeira Sessão

O 1º encontro com os professores aconteceu em 10 de agosto de 2004.

Proposta da Sessão:

1) Apresentação da proposta do trabalho, envolvendo:
   - Informações a respeito do pesquisador e do Curso de Mestrado em questão;
   - Relato do tema da pesquisa, de seus objetivos e de sua justificativa;
   - Apresentação dos objetivos da pesquisa de campo, bem como o de sua estrutura e de seu roteiro de trabalho;
   - Importância, papel e responsabilidade dos professores participantes.
2) Discussão sobre a proposta.
3) Convite formal aos professores presentes para participação no projeto.
4) Estabelecimento do contrato didático entre pesquisador e os pretensos participantes.
5) Preenchimento do Questionário de Sondagem pelos professores interessados.
6) Aplicação do pré-teste.

Relato:

Foi feita a apresentação da proposta de trabalho, conforme o previsto. O assunto despertou bastante interesse nos professores. Muitas perguntas foram feitas a respeito e uma discussão sobre Educação Matemática foi levantada. Foi estabelecido, também neste primeiro encontro, que o trabalho seria aplicado pela própria pesquisadora com a colaboração de um professor da área de Informática, com o objetivo de assessorar a parte técnica informática e, ao mesmo tempo, de auxiliar nas observações do processo. As atividades aconteceriam no laboratório de Informática da escola A, cedido pela sua diretora, sendo os recursos disponíveis no laboratório: dez computadores, um reto-projetor e um quadro branco.

As atividades foram planejadas para serem executadas individualmente, com cada participante trabalhando em sua máquina para a conquista da desenvoltura necessária no uso do programa (domínio da técnica) e para que seu particular desempenho possa ser avaliado. No entanto, discussões em grupo foram programadas para acontecer em vários momentos das sessões, buscando atingir as situações de institucionalização do saber e estabelecer e/ou reforçar um vínculo de companheirismo entre os professores e entre professores e pesquisador.

O interesse demonstrado pelos sete professores participantes foi grande. Todos aceitaram o convite, conscientes de sua responsabilidade e se comprometendo a participar das atividades planejadas e a zelar por sua assiduidade e pontualidade, conforme solicitado. Foi decidido de comum acordo que os encontros semanais aconteceriam às terças-feiras, das 17:30 às 19:00 h, em horário "livre" dos professores e do pesquisador. Dessa maneira estabeleceu-se o contrato didático entre professores participantes e o pesquisador.

Entretanto, pela fala de alguns professores, foram percebidas algumas preocupações suas, tais como: ser a falta de conhecimento e prática na Informática um empecilho à participação do professor ("*Como fica a nossa falta de prática na informática? Isso pode se constituir num empecilho para a participação*?"); a dificuldade de utilização de recursos informatizados no ensino publico ("*A aplicação para alunos de escolas públicas é inviável, pois não é feito esse tipo de trabalho nas mesmas, por uma série de razões*").

Em contra-partida, por outros comentários, verificou-se que, apesar do reconhecimento das dificuldades e da hipótese de não vir a aplicar a nova metodologia, todos estavam interessados e cientes da possibilidade de conquistar novos conhecimentos que lhes favorecerão a prática pedagógica, além de valorizar a situação de ser um dos participantes deste experimento ("*... com certeza, vai valer a pena participar desta pesquisa, porque os conhecimentos assim obtidos oportunizarão uma maior e melhor visão dos conteúdos de Geometria e, com isso, mais recursos, novas estratégias teremos para trabalhar com nossos alunos"; "O espaço aberto para o debate contribuirá para o crescimento profissional de cada um*").

Esse pensamento favorável ao trabalho foi, provavelmente, um fator positivo para todos. A discussão se alongou e foi decidido que a aplicação do pré-teste seria adiada para o próximo encontro, sendo somente o questionário inicial de sondagem aplicado. A programação original das sessões ficou, assim, alterada.

A descrição e análise das questões deste questionário aplicado, relacionadas às concepções dos professores, são apresentadas a seguir.

Antes dos professores participarem das atividades da seqüência didática, suas concepções sobre as demonstrações e o seu ensino foram analisadas com base em perguntas selecionadas do Questionário de Sondagem Inicial (Qual o significado das demonstrações em Geometria?; Diga, pelo menos, duas razões para a estar utilizando em sala de aula e, pelo menos, duas para não estar).

Na análise dos depoimentos dos professores, foram estabelecidas categorias para representar sua concepção inicial a respeito das demonstrações. São elas: *comprovação, capacidade de investigação, coerência, compreensão, aceitação, valorização da aprendizagem, construção dos próprios conceitos, fixação da teoria, dedução.*

A incidência de indicações para cada categoria aconteceu da seguinte maneira: duas indicações para comprovação; uma indicação apenas para as seguintes categorias: capacidade de investigação, coerência, compreensão, aceitação, valorização da aprendizagem, fixação da teoria, dedução e três indicações para a categoria *construção dos próprios conceitos,* conforme representado na Tabela 6.2 abaixo.

Número de Ocorrências	Categorias
1	Capacidade de investigação, coerência, compreensão, aceitação, valorização da aprendizagem, fixação da teoria e dedução.
2	Comprovação
3	Construção dos próprios conceitos

Tabela 6.2. Concepções a respeito das demonstrações

Quanto às razões para usá-las ou não, categorias também foram estabelecidas de acordo com as colocações dos professores. Assim, são categorias que expressam razões para usar as demonstrações em sala de aula: *aguçar a curiosidade; relacionar dados; desenvolver do raciocínio lógico; construir conceitos; compreender x aceitar x fixar; mostrar veracidade e não ser inventada.* A incidência de indicações para cada uma dessas categorias aconteceu da seguinte maneira: duas indicações para *mostrar veracidade e não ser inventada* e uma indicação apenas para as seguintes categorias: *aguçar a curiosidade; relacionar dados; desenvolver do raciocínio lógico; construir conceitos; compreender x aceitar x fixar,* conforme representado na Tabela 6.3 abaixo.

Número de Ocorrências	Categorias
1	Aguçar a curiosidade, relacionar dados, desenvolver o raciocínio lógico, construir conceitos e compreender x aceitar x fixar.
2	Mostrar veracidade e não ser inventada.

Tabela 6.3. Razões para usar demonstrações em sala de aula

Expressando as razões para não usar as demonstrações, encontram-se as categorias: falta de conhecimentos das séries anteriores (pré-requisitos); falta de concentração por serem longas e por falta de hábito; falta de interesse; falta de tempo; dificuldade de abstração. A incidência de indicações para cada categoria aconteceu da seguinte maneira: duas indicações para falta de conhecimento e falta de interesse do aluno; uma indicação apenas para as seguintes categorias falta de concentração por serem longas e por falta de hábito; falta de tempo e dificuldade de abstração, conforme tabela 6.4 abaixo.

Número de Ocorrências	Categorias
1	Falta de concentração por serem longas e por falta de hábito; falta de tempo e dificuldade de abstração.
2	Falta de conhecimento e falta de interesse do aluno.

Tabela 6.4: Razões para não usar demonstrações em sala de aula

Percebeu-se, pelo grande número de categorias estabelecidas, que não há uma concepção comum a esses professores acerca das demonstrações. Há muitas idéias que, embora se relacionem com as demonstrações, revelam-se individualmente insuficientes ou incompletas para explicá-las. Justifica-se, assim, um dos objetivos desse trabalho que é o de favorecer a compreensão do significado das demonstrações pelos professores. As categorias *comprovação, compreensão e aceitação* refletem diferentes funções das demonstrações e sua consideração pelo professor deve expressar a relevância que o mesmo dá ao significado dessa atividade.

A *capacidade de investigação, a coerência, a dedução* são elementos intrínsicos ao processo cognitivo das demonstrações. São fatores que não passaram despercebidos a alguns dos professores participantes e importantes como ponto de partida num trabalho em que se busca uma conscientização positiva acerca do uso e do ensino das demonstrações.

A *construção dos próprios conceitos, a valorização da aprendizagem e a fixação da teoria* são fatores relacionados com a demonstração. A ocorrência dessas categorias refletiu uma preocupação dos professores com o aluno e uma percepção intuitiva da importância das demonstrações na construção do conhecimento do aluno. As razões colocadas por alguns para usá-las em sala de aula, como *aguçar a curiosidade, relacionar dados, desenvolver o raciocínio lógico, construir conceitos* ratificam essa análise.

Quanto às razões para não usá-las, percebeu-se que os professores delegam toda culpa desse não uso às limitações do aluno ou às do próprio sistema de ensino.

Segunda Sessão

A segunda sessão aconteceu em 17 de agosto de 2004.

Proposta da Sessão:

Aplicação do pré-teste para avaliação dos níveis de pensamento geométrico dos professores participantes.

Relato:

O pré-teste (Van Hiele) foi aplicado nesta sessão, sendo todo o seu tempo utilizado para tal.

Os resultados obtidos com a aplicação do pré-teste, acompanhados de sua devida análise *a posteriori*, são aqui relatados.

a) Teste número 1: avaliando o **Nível 2 (Análise)**

Item 2.1: Todos os professores o acertaram.

Item 2.2: Cinco professores o acertaram.

Três erraram por não citar as propriedades definidoras do quadrado, citando outras que são conseqüências destas. Isso pode indicar que, para eles, não estão bem definidas quais são as características básicas desta figura geométrica, conforme previamos na análise *a priori*. Para alguns se torna, então, necessária uma consolidação entre as dimensões figural e conceitual dessa figura geométrica básica nos trabalhos de Geometria.

Item 2.3: Seis professores o acertaram.

Dois erraram a questão. Assinalaram, além da opção que contem a única propriedade correta aos triângulos isósceles, outras opções que dizem respeito a características do triângulo eqüilátero ou do triângulo retângulo. Observa-se, então, que não há uma conceituação bem definida a respeito desses três tipos de triângulos.

Item 2.4: Cinco professores o acertaram.

Três participantes não apresentaram as propriedades definidoras do paralelogramo, apresentaram outras corretas, mas omitindo aquelas. Como previsto na análise *a priori*, eles apresentam uma conceituação falha do objeto.

Item 2.5: Sete professores o acertaram.

O que errou não assinalou nenhum item, expressando que todas as propriedades apresentadas nas opções eram propriedades do losango. No seu entendimento, as duas diagonais terem o mesmo comprimento é fato comum aos losangos e não somente aos quadrados que se constituem em caso particular do losango. Isso indica que não há um entendimento correto de inclusão de classes.

Resumo da Análise:

Observa-se uma freqüência relativamente grande de erro em algumas questões desse primeiro teste, considerando-se a natureza do participante, professor de Matemática, e também o nível do teste relacionado às conceituações das figuras. Essa observação vem ao encontro da constatação já aqui mencionada de que há, realmente, uma deficiência de conteúdo de Geometria na formação de alguns professores de Matemática. O resultado sugere, considerando-se os indicadores de níveis de desenvolvimento do pensamento, segundo Van Hiele, que alguns professores ainda não atingiram o grau de aquisição completa do nível 2. Com a aplicação das atividades da seqüência didática, ao se desenvolver um trabalho de construção e exploração de objetos geométricos básicos, uma oportunidade será oferecida a esses professores para que tais conflitos podem ser contornados ou solucionados. Essa observação, numa outra perspectiva, valida a proposta desta pesquisa que vincula o domínio dos conteúdos ao bom desempenho profissional dos professores.

b) Teste número 2: avaliando o **Nível 3 (Dedução Informal)**

Item 3.1: Quatro professores o acertaram.

Dois erraram por assinalar a opção B e dois por assinalar a D. Em ambos os casos, a interpretação do professor é de que a figura F deva ser, necessariamente, um retângulo ou um triângulo. É uma interpretação errada, conforme previsto na análise *a priori*, pois essa restrição não foi definida no enunciado.

Item 3.2: Seis professores o acertaram.

Um errou por assinalar a opção C, considerando como verdadeira a implicação do triângulo ter um ângulo de 60° com o fato de ser triângulo eqüilátero. O outro assinalou as opções B e C admitindo a bi-implicação da proposição acima, o que é falso.

Item 3.3: Cinco professores o acertaram.

Três marcaram, incorretamente, a opção A, invertendo o sentido da inclusão dos quadrados nos retângulos, ou seja, todo retângulo é um quadrado.

Item 3.4: Sete professores o acertaram.

Apenas um errou esta questão, assinalando a opção que coloca como propriedade particular dos retângulos, ter os ângulos opostos congruentes.

Item 3.5: Cinco professores o acertaram.

A classificação incorreta dos quadriláteros para os três que erraram revela, como previsto, falha no domínio da inclusão de classes dos paralelogramos.

Resumo da Análise:

Com a aplicação do teste 2, observa-se uma freqüência um pouco maior de erros nas questões, em relação ao teste anterior. São falhas que revelam deficiências dos participantes no domínio das habilidades previstas para este nível, como a de inclusão de classes, a de formar argumentos dedutivos informais corretos (se... então). O nível três mostra-se numa fase de aquisição intermediária para alguns professores.

c) Teste número 3: avaliando o **Nível 4 (Dedução Formal)**

Item 4.1: Seis professores o acertaram.

Dois erraram por escolher a opção C onde se afirma não haver diferença entre as duas definições apresentadas para o trapézio. Revelam, como previsto, não perceber a influência da mudança de definição da figura em sua caracterização.

Item 4.2: Seis professores o acertaram.

A escolha errada da opção C feita por dois participantes, reflete a consideração de uma bi-implicação não existente entre as propriedades das diagonais de uma figura cortarem-se ao meio e o fato da figura ser um retângulo.

Item 4.3: Cinco professores o acertaram.

Dois erraram ao marcar a opção B, revelando não perceber a equivalência entre as duas definições dadas ao quadrilátero. O mesmo motivo levou o outro a marcar a opção D.

Item 4.4: Apenas um professor o acertou.

Sete erraram a questão. Os que marcaram a opção A (três) e o que marcou a B, erraram por fugir ao enunciado da proposta generalizando o número de partes em que deveria ser dividido o ângulo ou por se referir a segmentos e não a ângulos. Três marcaram a D, contrariando a confiança na prova como autoridade final na decisão da verdade de uma proposição matemática.

Item 4.5: Dois professores o acertaram.

Seis erraram ao assinalar a opção C ou D, revelando não compreender a distinção entre implicação e equivalência.

Resumo da Análise:

Verificamos, mais uma vez, crescimento na freqüência de erros. Como é de se esperar a tendência ao erro é maior, à medida que é feita a exigência de um pensamento mais refinado e voltado para o dedutivo. Percebe-se que não há para alguns uma compreensão clara das regras dos elementos que compõem o discurso matemático, tais como, teoremas, definições e provas.

d) Teste número 4: avaliando o **Nível 4d (Construindo Demonstração)**

Item 4d.1: Apenas um professor o acertou.

Sete erraram a questão, considerando correta a demonstração apresentada. A falha de todos eles foi não perceber que a argumentação se baseava em fatos não tomados como hipótese, ou seja, aceitar que o segmento AC era paralelo a BD (AC // BD) sem se constituir em hipótese ou sem uma demonstração prévia. É um fato que vem ao encontro de nossas expectativas.

Item 4d.2: Cinco professores o acertaram.

Um dos participantes deixou a questão em branco. Dos dois que tentaram e não conseguiram: um partiu do princípio de que a soma dos ângulos internos do retângulo é 360° e que este dividido ao meio gera dois triângulos e, assim, cada triângulo teria como soma dos ângulos internos 180°; o outro falou em usar construções, mas não acrescentou de que maneira o faria.

Item 4d.3: Três professores o acertaram.

Dos cinco que erraram, três deixaram a questão em branco. Dois mencionaram somente que fariam construções para demonstrar.

Resumo da Análise:

Verificou-se, com esse teste, que a habilidade do professor em desenvolver demonstrações é insatisfatória. Em muitos casos a demonstração solicitada não foi sequer desenvolvida.

A realização do teste foi demorada e observou-se uma certa dificuldade dos professores em resolvê-lo, principalmente na parte relativa aos dois últimos níveis. Durante a resolução, alguns professores não se continham e tentavam tirar dúvidas sobre algumas questões com o pesquisador.

Terceira Sessão

A terceira sessão aconteceu em 24 de agosto de 2004.

Proposta da sessão:

- Apresentação do ambiente de geometria dinâmica, o *Tabulae;*
- Apresentação de telas com trabalhos prontos (em anexo);
- Exploração livre e orientada do uso do programa, para conhecimento de alguns de seus ícones e funções;
- Discussão de texto sobre Geometria Dinâmica (em anexo).

Relato:

O início do trabalho com o *Tabulae* foi difícil, pois, além de ninguém conhecer o programa *Tabulae*, três professores não sabiam usar o computador. A presença do professor colaborador foi providencial para contornar os problemas. Os que tinham familiaridade com o computador avançaram na exploração do programa. Foram explorados os menus de construção e o recurso do arrastar que permite observar a característica de estabilidade dos desenhos em movimento. Os iniciantes na informática tiveram que receber tratamento diferenciado com um número maior de instruções e um atendimento mais intenso. Foram grandes as suas dificuldades em: o controle do *mouse*, o entendimento de como usar os comandos da interface; o fixar do desenho na tela, com a escolha de determinada função; o clicar em específico elemento da figura para arrastá-la.

Um fator que não favoreceu os trabalhos, principalmente o dos iniciantes, foi o lento processamento dos computadores do laboratório. Eram muito vagarosos, exigindo grande paciência dos usuários. Alguns "minutos" eram necessários para finalizar a execução dos comandos solicitados.

As telas prontas apresentadas aos professores versavam sobre assuntos relacionados com conteúdos de trabalho do professor ou sobre aspectos do cotidiano: casa em perspectiva, a equiárea de Steiner, transformações e semelhanças, o incentro e o círculo inscrito ao triângulo. Abaixo, aparecem copiadas algumas das telas apresentadas (Figuras 6.1 e 6.2).

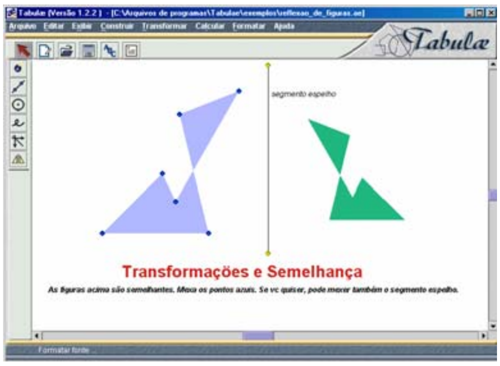


Figura 6.1. Transformações e semelhança

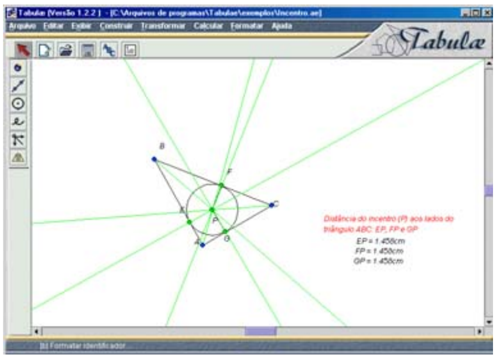


Figura 6.2. O círculo inscrito no triângulo

Dando continuidade a programação da sessão, um texto sobre Geometria Dinâmica foi apresentado ao grupo, lido e comentado. No texto, encontravam-se informações sobre: significado do termo; seus autores; suas características; seus recursos e potencialidades; citação de exemplares desse ambiente, com enfoque especial ao *Tabulae*.

A atenção dos professores se focalizou na parte que tratava dos recursos e potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica. Algumas questões ou colocações foram feitas por eles acerca de: a partir de que série o programa pode ser usado; como adquirir o programa; da possibilidade de ter acesso a um manual para construção de modelos.

A pesquisadora interferiu, dando alguns esclarecimentos e algumas sugestões. Ao final da sessão estavam todos curiosos e motivados a começar o trabalho.

Quarta Sessão

A quarta sessão aconteceu em 31 de agosto de 2004.

Proposta da sessão:

- Construção e exploração da circunferência.

Relato:

Nesta sessão iniciou-se, propriamente, a realização das atividades da seqüência didática. Um roteiro de trabalho foi distribuído a cada um dos professores, onde constavam os procedimentos a serem efetuados para a construção do primeiro grupo de atividades bem como questões a serem respondidas no decorrer da execução dos procedimentos. Este foi o material escrito a ser analisado sobre o desempenho dos professores nas atividades.

Todos revelaram, o que é natural, dificuldades na realização desta primeira construção da circunferência, mas as dificuldades para os professores estreantes na Informática, porém, foram maiores. O controle do *mouse* era um desafio, agora somado ao do uso do Tabulae e à resolução das tarefas. A utilização da função para o que se pretendia fazer, o destaque a determinado elemento do objeto para se efetuar algum procedimento foram dificuldades encontradas por eles no uso do programa.

Dificuldade de conteúdo não houve praticamente nenhuma. A possibilidade do movimento da figura construída com a conseqüente mudança de suas medidas registradas na tela, provocada pelo arrastar, permitiu constatar os seguintes fatos: ser o diâmetro da circunferência a sua corda máxima; variar de 0° a 90°, a medida do ângulo formado por uma corda e um raio estando seu vértice na circunferência. Foram verificações facilmente feitas, conforme previsto na análise a priori.

Com a construção de uma tangente à circunferência, a propriedade do perpendicularismo entre ela e o raio no ponto de contato com a circunferência (propriedade já conhecida de todos) pode ser observada e verificada, agora, no ambiente de geometria dinâmica. A busca de uma demonstração para tal propriedade, no entanto, foi algo mais difícil, ainda mais em se tratando de um processo de demonstração por redução ao absurdo. Tentativas foram feitas inicialmente no papel (devido à inexperiência no uso do programa) e depois no computador para serem testadas, mas não houve sucesso.

Como a dificuldade no demonstrar foi comum, desencadeou-se, naturalmente, uma discussão sobre o assunto na busca de, no compartilhamento de idéias, se vislumbrar uma solução.Além das ações, formulações, validações, ações, feitas individualmente, eles se voltaram, nesse momento de dúvida, para um trabalho compartilhado. Destacam-se, nesse momento, as teorias de Vigotsky (1985) sobre o conhecimento não entendido como uma construção solitária, mas historicamente construído e organizado de forma a ser objeto de negociação entre professor e alunos.

Uma das tentativas feitas para a demonstração é relatada a seguir, acompanhada da figura correspondente (Figura 6.3).

Procedimento: *A partir da circunferência construída com raio AB e da tangente t à circunferência passando por B, identificados no desenho x abaixo, marcar pontos C e D na reta t, de forma a obter BD=BC, usando uma circunferência para fazer essa marcação. Ficam dois triângulos ABC e ABD congruentes pelo caso LAL porque AB é lado comum aos dois triângulos; os ângulos <ABC e <ABD medem 90° e BC = BD, por construção.*

Assim, fica provado que a reta tangente à circunferência forma ângulo de 90° com o raio no ponto de tangência.

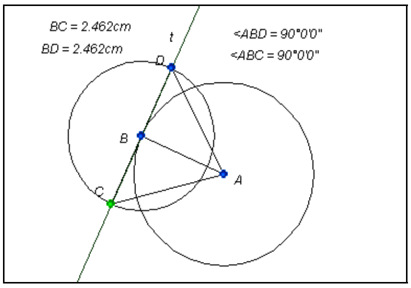


Figura 6.3. Problema da circunferência (solução incorreta)

A argumentação foi desenvolvida incorretamente, pois parte da inclusão na hipótese de um pressuposto o qual se quer justamente demonstrar. Devido ao insucesso na resolução do problema e ao esgotamento do tempo da sessão, ficou decidido que cada um pensaria numa solução, voltando o assunto a ser discutido na próxima sessão.

Resumo da Análise:

O trabalho foi lento, o que era de se esperar pela falta de domínio técnico dos professores. Para essa atividade não houve, inicialmente, dificuldades de conteúdo. Como previsto na análise *a priori*, os professores verificaram empiricamente as propriedades solicitadas. Entretanto, no momento de elaborar a demonstração, eles se mostraram sem prática no assunto. Apesar da elaboração de uma demonstração através de um esforço comum, esta se revelou incorreta, contrariando uma expectativa inicial de se conseguir sucesso por meio de um trabalho em grupo. A tarefa foi adiada para ser estudada e retomada na sessão seguinte.

Quinta Sessão

A quinta sessão aconteceu em 09 de setembro de 2004.

Proposta da sessão:

- Discussão sobre a questão da circunferência
- Construção e exploração do quadrado
- Discussão das atividades realizadas
- Discussão de texto sobre Pensamento lógico-dedutivo

Relato:

Neste encontro já se começou a perceber melhor desempenho no uso do *Tabulae;* algumas funções são acessadas com certa desenvoltura, assim como o selecionar de elemento do objeto. Os iniciantes em Informática começam a se familiarizar com o *mouse.*

A proposta do encontro anterior de busca de solução para o problema acerca da demonstração do perpendicularismo da tangente não foi atendida. Os professores ainda não tinham encontrado uma solução ou, em alguns casos, nem a tinham procurado Fez-se necessária a intervenção da pesquisadora na apresentação de uma demonstração para a propriedade em questão, o que foi feito e pode ser visto na Figura 6.4.

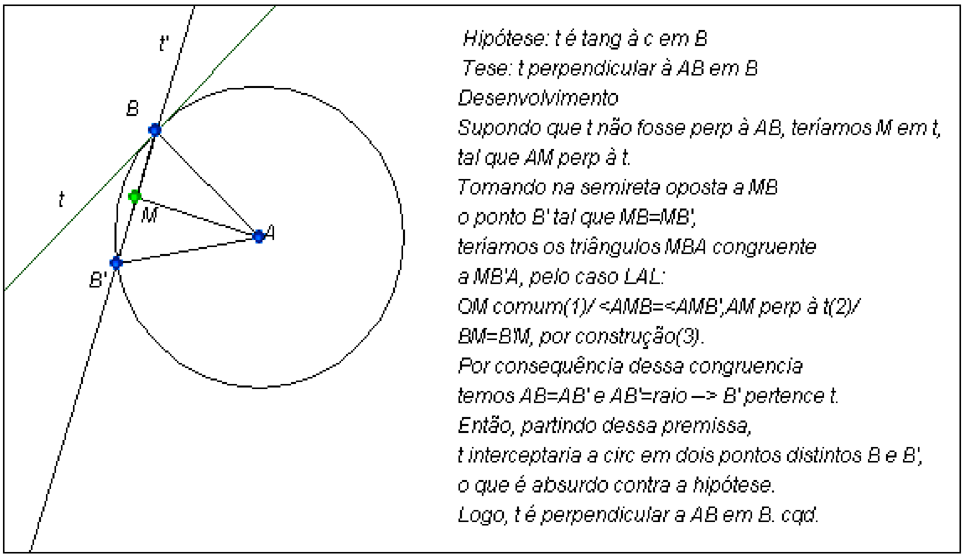


Figura 6.4. Problema da circunferência (solução correta)

Em continuidade aos trabalhos da sessão, passou-se a construção do quadrado que não trouxe grandes problemas. Todos conseguiram efetuá-la com maior ou menor tempo para tal. Um dos professores tentou, inicialmente, construí-lo sem considerar as suas propriedades características e, ao movimentá-lo, se surpreendeu com o colapso do mesmo transformando-se num retângulo, conforme podem ser vistos nas Figuras 6.5 e 6.6.

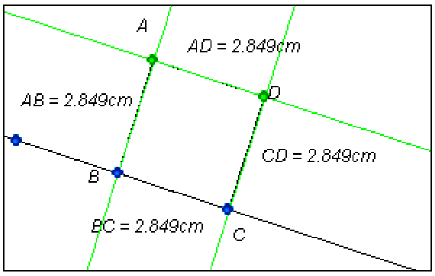


Figura 6.5. Quadrado original

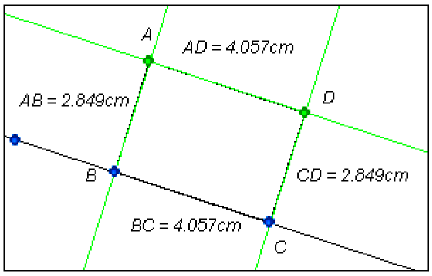


Figura 6.6. Quadrado transformado em retângulo qualquer

Com o auxílio do pesquisador, esse professor construiu depois, corretamente, um novo quadrado, ao obedecer ao uso de condições básicas de construção do quadrado, mostrado a seguir, na figura 6.7.

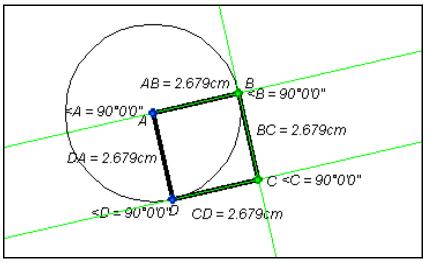


Figura 6.7.Quadrado construído segundo suas propriedades

Gradativamente, os desenhos em movimento provocam um controle mais apurado do processo de construção. A apreensão seqüencial do objeto, em conseqüência, se refina. A compreensão de que cada um dos inúmeros quadrados obtidos na tela, com a movimentação da figura, representa uma instância do objeto construído torna-se evidente para o professor. Nessas idas e vindas, a fusão dos componentes figural e conceitual do objeto geométrico tende a acontecer naturalmente na representação mental do professor. Era essa a expectativa já mencionada na *análise a priori.*

Nesse processo de *ação, formulação, validação, ação,* pode ser percebido que diferentes formas podem ser usadas para a construção da figura, sem que haja modificação na sua impressão perceptiva inicial. Porém, com a sua movimentação, revelam-se diferentes conseqüências decorrentes da construção bem ou mal desenvolvida. São os *fatos estáveis implícitos* decorrentes dos *fatos declarados* considerados que os validam ou não.

Por exemplo, os lados construídos com o auxílio da circunferência garantem que suas medidas serão sempre congruentes, mesmo com o dinamismo da figura. Dessa forma, foram criadas condições para a ocorrência do processo cognitivo da demonstração, em que propriedades podem ser deduzidas a partir de outras, estas tomadas como hipóteses e aquelas como a tese. As palavras do professor, autor da construção inadequada, traduzem seu avanço: "*É...! Então para permanecer quadrado ele precisa ser construído pelas suas propriedades!*".

Resumo da Análise:

Como previsto na análise *a priori*, através do processo de construção acompanhado das manipulações do desenho, a apreensão seqüencial do objeto geométrico é reforçada e a fusão de seus componentes conceitual e figural é favorecida. Condições também foram criadas para que o refinamento das apreensões seqüenciais implicasse no entendimento de que imposições de construção acarretam relações geométricas que não dependem mais de escolhas, os *fatos estáveis implícitos*. Por exemplo, o fato do quadrado possuir os quatro lados congruente garante a diagonal como bissetriz dos ângulos referentes aos vértices de suas extremidades. Com isso, os desenhos passam a serem vistos dentro de uma perspectiva da geometria hipotético-dedutiva, criando condições para a ocorrência do processo cognitivo das demonstrações e da ascensão de patamar de conhecimento geométrico.

A parte final do encontro foi reservada para a leitura e discussão do texto apresentado sobre Pensamento Lógico-dedutivo e Demonstrações, sendo que a outra discussão prevista sobre as atividades realizadas foi adiada para o encontro seguinte, por falta de tempo. A leitura do texto mostrou-se positiva, pois o assunto tem relação estreita com o tema do trabalho e também com a prática do professor.

Registram-se, com base nos comentários dos professores, algumas de suas ponderações: compreensão da dificuldade e conseqüente desmotivação dos alunos frente às exigências da matemática dedutiva; a diferente natureza dos raciocínios dedutivo e indutivo ("*O raciocínio indutivo não é conclusivo, mas probabilístico enquanto o dedutivo é conclusivo por sair de uma verdade pré-estabelecida*"); a necessidade da distinção entre hipótese e tese no contexto das demonstrações (*“Se você não conseguir colocar a hipótese e a tese como deve na hora de demonstrar, não vai chegar a lugar nenhum”);* a situação de desvantagem do aluno de escola pública (“*Quem é aluno de escola estadual, como eu fui, só aprende geometria por conta própria ou se a encontra em algum curso técnico que esteja fazendo”);* a necessidade do professor assumir responsabilidades dentro de um processo de mudança educacional (*Nós temos que acreditar que a situação pode melhorar e para melhorar depende também de nós”).*

Em relação à última consideração, foi evidenciada por todos a idéia de se manter vivo o ideal profissional fortalecendo a busca de caminhos para melhorar o problema do ensino da Matemática, particularmente, o da Geometria. E algo que pode aperfeiçoar o desempenho do professor é a utilização de novas metodologias de ensino que favoreçam a aprendizagem dos alunos. Os professores reconheceram que a participação neste trabalho é uma oportunidade para refletir sobre sua prática enquanto exploram o uso de uma nova metodologia.

Sexta Sessão

A sexta sessão aconteceu em 09 de setembro de 2004.

<u>Proposta da sessão</u>:

- Construção e exploração do triângulo isósceles.
- Discussão das atividades já realizadas.

Relato:

Devido à impontualidade dos professores, a execução da programação do dia ficou um pouco prejudicada. As colocações iniciais do encontro foram refeitas várias vezes. Se há necessidade de uma discussão ou decisão comum não é possível no início da sessão.

Por outro lado, o andamento dos trabalhos individuais fica um pouco desencontrado, dificultando a coordenação dos mesmos.

Os professores iniciantes na informática já começam a se sentir um pouco seguros no domínio do computador. A utilização do programa já não oferece tanto embaraço. Eles iniciam construindo uma circunferência e, a partir desta, o triângulo isósceles. Fazem-no com certa facilidade, pois o domínio do programa vai evoluindo. A *apreensão seqüencial* do objeto se reforça, enquanto sua conceituação correta, se não existia, acontece. A representação mental correta é conseqüência de *abstrações empíricas* e *reflexionantes* levando ao desenvolvimento do pensamento hipotético dedutivo.

A dificuldade surge, para alguns, com o pedido de demonstração. Instala-se o processo espiral de *ação, formulação, validação, ação* na busca de elementos para construir a demonstração. Percebe-se a dificuldade de alguns em controlar os *fatos declarados* e os *fatos estáveis implícitos*, querendo considerar como ponto de partida (hipótese) o fato dos ângulos da base serem congruentes, justamente o que se quer demonstrar (a tese). Mais uma vez, essa falha pode ser observada. O pesquisador intervem colocando em discussão as hipóteses do problema. Os professores reagem, reformulam suas hipóteses e buscam caminhos para demonstrar a tese agora corretamente colocada.

Os que conseguiram identificar e controlar os *fatos declarados* e os *fatos estáveis implícitos* avançaram na busca de extensões do desenho que levassem a configurações que fundamentassem as argumentações. Três professores encaminharam o problema, fazendo a extensão do desenho (mediana do triângulo em relação à base) seguida da reconstrução de subconfigurações triângulos e, com segurança, redigiram a demonstração. Na Figura 6.8 abaixo, temos uma cópia de uma demonstração construída por eles.

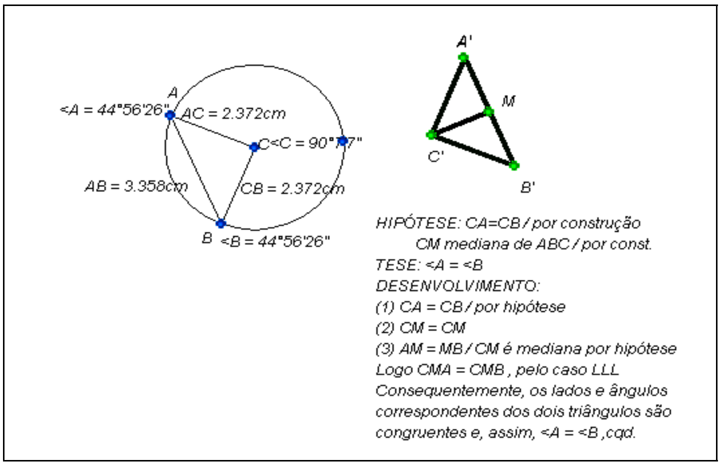


Figura 6.8. A congruência dos ângulos da base do triângulo isósceles

Um outro procedimento para tal demonstração foi o seguinte: *Como dois lados do triângulo são congruentes, pois representam raios de uma mesma circunferência, os seus ângulos opostos também o serão, de acordo com a propriedade da desigualdade triangular*. A colocação está correta. Parte da devida hipótese, a argumentação é baseada na propriedade da desigualdade triangular, só não é observado um desenvolvimento formal da demonstração.

Resumo da Análise:

O domínio no uso do programa vem crescendo, mesmo para os iniciantes, fato que favorece os trabalhos da seqüência.

Com a construção do triângulo isósceles, reforça-se o seu conceito e novas oportunidades surgem de se discutir o modelo teórico da geometria. Os ambientes de geometria dinâmica facilitam a promoção da representação correta do objeto geométrico porque no dinamismo da figura fica refletida a persistência de certas relações assim como a irrelevância de outras.

Os professores são convidados a justificar a congruência dos ângulos da base deste triângulo. Alguns conseguem logo controlar os *fatos declarados* (hipóteses) e os *fatos estáveis implícitos* (a tese), e avançam na busca de *extensões* do desenho que levem a *subconfigurações* que fundamentem as argumentações.

Outros, como era a expectativa, não conseguem ainda esse controle e precisam da intervenção da pesquisadora para melhor direcionar seus encaminhamentos.

A parte final da sessão foi reservada para a discussão das atividades realizadas, quando se institucionaliza o saber. O processo de resolução dos problemas da circunferência e do triângulo isósceles foi discutido. Os professores comentaram que, inicialmente, por ficarem concentrados na tentativa de dominar o programa, foram fazendo a tarefa sem grande concentração no conteúdo em si. Pouco a pouco é que foram canalizando a atenção para a geometria. Esse fato foi mais marcante para os iniciantes na Informática.

Voltada a atenção para a parte do conteúdo da tarefa nesse novo ambiente, os professores revelam que observaram e constataram a possibilidade de um trabalho de qualidade com seus alunos, no sentido de inovador, dinâmico, construtivo, interativo. Desconsiderando o domínio da técnica, em ambas as questões não encontraram dificuldade maior na construção das figuras e constataram a importância do processo de construção no entendimento da figura. Nesse comentário dos professores, pode se perceber, dito em outras palavras, que o desenvolvimento da *apreensão seqüencial* favorece *a apreensão perceptiva do objeto geométrico.* Comentário ao qual pode-se acrescentar: criando, com isso, condições para o desenvolvimento *da apreensão discursiva e operatória.*

O problema surgiu para os professores no momento da demonstração. A da circunferência não foi possível para ninguém e reconhecem que a falta de prática no assunto vai afastando-os dos conceitos e das técnicas necessárias à demonstração. Já no caso do triângulo isósceles, foi mais fácil encontrar um caminho para argumentar, baseando-se na congruência de triângulos obtidos a partir divisão do triângulo dado, o que significa a *extensão* do desenho e conseqüente utilização de *subconfigurações.*

Outras observações feitas pelos professores relacionaram-se a: reconhecimento do potencial do programa na visualização dos objetos geométricos e na compreensão e elaboração das demonstrações (*"Sem esse recurso, só com lápis e papel eu não conseguiria fazer toda a experimentação que fiz, seria difícil, lento e trabalhoso, quase impossível"!*); percepção da importância da experimentação, do levantar de hipóteses e de sua verificação (*"Fui experimentando, fiz uma suposição em cima da mediana, experimentei, mexi com a figura e consegui achar o caminho e demonstrar"*).

Com um relativo domínio no uso do ambiente de geometria dinâmica e a atenção voltada ao trabalho, foi sensível o reconhecimento nos professores na potencialidade destes ambientes. A verificação de sua utilidade no ensino da geometria como conseqüência de suas próprias conquistas no decorrer do trabalho torna significativa a concepção que possa ser formada sobre esses ambientes. Foram muito oportunos os comentários dos professores sobre o tipo de trabalho que aí pode ser desenvolvido (inovador, dinâmico, construtivo, interativo) e sobre a importância do experimentar, levantar suposições.

Sétima Sessão

A sétima sessão aconteceu em 16 de setembro de 2004.

Proposta da sessão:

- Construção e exploração do triângulo eqüilátero.
- Discussão de texto: O Pensamento Geométrico.

A construção do triângulo eqüilátero foi feita, pelos professores, com o auxílio de duas circunferências. Até os iniciantes não apresentaram dificuldades para executar essa tarefa.

A justificativa da existência dos três ângulos congruentes nesse triângulo se apoiou nos dados da construção, pois os três lados do triângulo são raios de circunferências de mesma dimensão. A importância da circunferência nas construções, garantindo os *fatos declarados*, foi algo unanimemente reconhecido e desempenhou papel importante no desenvolvimento da compreensão dos próprios professores.

Resumo da Análise:

Com as construções, os professores estão tendo a oportunidade de rever seus conhecimentos e evoluir na compreensão das propriedades das figuras. Elementos para a elaboração das demonstrações estão surgindo mais facilmente com as possibilidades oferecidas pelo ambiente de geometria dinâmica. Para a aquisição do nível 4 do pensamento geométrico (Dedução Formal), que é uma das metas desse experimento, é necessária a aquisição dos níveis anteriores, o que está sendo favorecido para aqueles que ainda não a atingiram. A demonstração solicitada sobre a congruência dos ângulos do triângulo eqüilátero foi produzida por quase todos (seis professores).

Foi reservada a parte final da sessão para a discussão de texto sobre o pensamento geométrico. Inicialmente, foram apresentados dois problemas de modo a motivar e a abrir espaço para a discussão. Os problemas foram resolvidos e seguiu-se a leitura e discussão do texto que envolvia dados sobre estudos de Fishbein e de Van Hiele, entre outros.

Durante a discussão, comentou-se sobre o papel da escola na formação do aluno. A respeito da contribuição do ensino da geometria nessa formação, considerou-se que quase não existe, pois quando a geometria é trabalhada é de uma maneira tradicional, mecânica, não desenvolvendo o raciocínio lógico do aluno. Acharam oportuna a colocação de teorias a respeito do assunto e reconhecem que também falta embasamento teórico ao professor para um melhor trabalho com seus alunos. Foi muito proveitosa a oportunidade para a discussão do texto, abordando pontos sobre o ensino da geometria, suas dificuldades, os níveis de pensamento geométrico do sujeito. Trouxe informações pertinentes sobre o assunto e alertou para a necessidade de expansão dos conhecimentos do professor como um dos requisitos para o seu bom desempenho.

Oitava Sessão

A oitava sessão aconteceu em 23 de setembro de 2004.

Proposta da sessão:

- Construção e exploração do triângulo retângulo.
- Discussão das atividades realizadas.

A construção do triângulo apresentando um dos lados coincidindo com o diâmetro da circunferência inicialmente construída não apresentou grande dificuldade, mesmo para os novatos em Informática. Ocorreu, no entanto, apenas para esses, a necessidade de um tempo maior para completar a tarefa e do acompanhamento constante do pesquisador para auxiliar no momento das dúvidas e dificuldades. A caracterização do triângulo retângulo pelo fato da hipotenusa coincidir com o diâmetro da circunferência foi um passo que se mostrou favorável ao enriquecimento das representações dos professores, o que pode ser percebido pelos seus comentários a respeito. A justificativa dada por eles para esse fato baseou-se, assim como esperado, em conceito de ângulo inscrito num semicírculo cuja medida é, por isso, de 90°. Na etapa seguinte do trabalho, com a construção da mediana em relação à hipotenusa, novas investigações foram processadas, a partir da movimentação da figura. Com a observação do movimento e da conseqüente alteração no comportamento das medidas registradas na tela, novos fatos implícitos puderam ser observados ou constatados. Os professores puderam concluir, então, sobre a relação entre as medidas da mediana relativa ao ângulo reto e da hipotenusa e, também, sobre a natureza das subconfigurações triângulos (APC e BPC), obtidas a partir da mediana. A demonstração da relação entre as medidas da mediana e da hipotenusa foi feita com base na sua condição de raios da circunferência. Foi uma validação mais simples em relação às anteriores. Na Figura 6.9 abaixo, é apresentada uma das demonstrações efetuadas por eles.

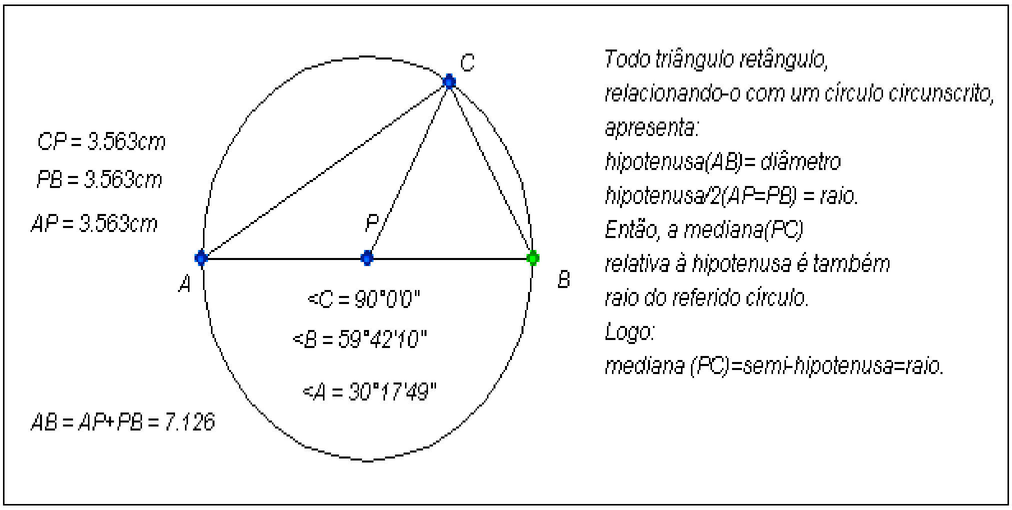


Figura 6.9. Demonstração no triângulo retângulo

Resumo da Análise:

A atividade do triângulo retângulo foi simples, os professores não encontraram grandes dificuldades em executá-la. A expectativa, registrada na análise *a priori*, sobre a observação de: a natureza do triângulo; a relação entre as medidas da mediana relativa ao ângulo reto e da hipotenusa: a natureza das *subconfigurações* triângulos (APC e BPC) obtidas com a construção da mediana, se confirmou.

As justificativas para as propriedades analisadas foram baseadas na condição dos elementos tratados serem raios da circunferência de apoio e no conceito da medida de ângulo inscrito num semi-círculo. Mais uma vez, a percepção de *fatos estáveis implícitos* decorrentes de *fatos declarados* na construção vem consolidando condições para a gênese cognitiva das demonstrações.

Os momentos finais do encontro foram reservados para discussão do processo de resolução das duas ultimas tarefas (triângulos equilátero e retângulo), promovendo a institucionalização do saber.

Nona Sessão

A nona sessão aconteceu em 30 de setembro de 2004.

Proposta da sessão:

- Problema da Ilha

Relato:

A partir deste encontro, no momento em que já existia uma certa habilidade em trabalhar com o *Tabulae*, problemas mais complexos já puderam ser encaminhados, pois a dificuldade em lidar com o *software* não atrapalharia a concentração. Toda energia pode ser canalizada para a resolução do problema. É terminada a fase das atividades de construção e se inicia a de explorações.

Foi apresentado o problema da ilha que despertou bastante interesse no grupo. Após a leitura e o exame da figura, a primeira conjectura (de forma unânime) é de que o local ideal para a colocação da casa seria no ponto de encontro de uma das cevianas do triângulo: baricentro, incentro ou circuncentro. Feita a conjectura, os professores partiram para a verificação no ambiente de geometria dinâmica e, para isso, foi necessário construir, inicialmente, os segmentos que representassem as distâncias do ponto a cada lado do triângulo. Tal construção exigia o conhecimento de que esses segmentos deveriam ser perpendiculares aos lados do triângulo, respectivamente. Feita a construção, eles decidiram trabalhar com medições usando a função calcular medida, conforme previsto na análise a priori, para definir a medida de cada distância bem como a soma das mesmas. Antes da construção de alguma ceviana, observaram as alterações nas medidas das distâncias e na soma das mesmas com o dinamismo provocado no ponto dentro da figura e, depois, nos lados da própria figura. Grande foi a surpresa de todos, ao verificarem que a soma das distâncias do ponto aos lados do triângulo se mantinha constante independente da mudança de posição do ponto dentro do triângulo. Fato este que persistia mesmo repetindo a experimentação em outra instância de triângulo eqüilátero, mantendo-se também constante a nova soma encontrada, Figuras 6.10 e 6.11.

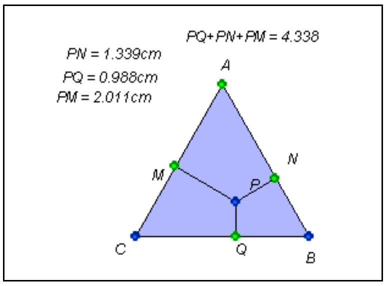


Figura 6.10. Problema da ilha (distâncias A)

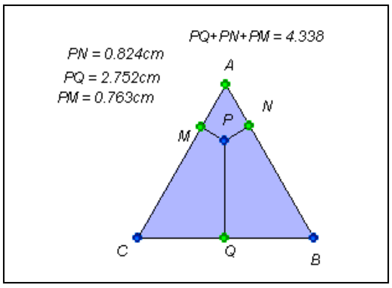


Figura 6.11. Problema da ilha (distâncias B)

Muitas foram as perguntas e as exclamações: *"Por quê? Como? Não é possível! Eu estava certo que era no incentro ou no circuncentro"!*

O desejo de investigar e descobrir a explicação para fato tão estranho (a soma ser constante) foi ainda mais instigado. Verifica-se que é natural a curiosidade do sujeito em querer saber o porquê de um fato contrariar as suas expectativas. É pertinente acrescentar que, dependendo da atividade selecionada e do encaminhamento que se é dado a ela, a motivação e a curiosidade do aluno podem ser despertadas levando-o ao levantamento de conjecturas, a explorações e verificações, na busca de explicações para fatos não compreendidos, de acordo com ponderações de Villiers (2001). Os ambientes de geometria dinâmica podem se configurar num instrumento de apoio no despertar da curiosidade e no estímulo de atividades de pensamento investigativo e criativo, gerando toda uma carga de atividades cognitivas que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo do aluno.

Nesse conflito de saberes, muitas vezes o conhecimento prévio do aluno entra em choque com o conhecimento científico. No caso em questão, o conhecimento dos professores sobre as cevianas que em problemas semelhantes são tomadas para fundamentar argumentações, levou-os a uma conjectura falsa. A necessidade de explicação para a nova versão do fato constatada empiricamente levou à compreensão da necessidade da demonstração e ao sentimento de sua importância não só para validar, mas também para explicar as propriedades.

A investigação continuou, buscando os professores algum indício que sugerisse a explicação do fato empiricamente constatado. Cada professor em sua máquina ia buscando elementos. Localizavam o ponto em lugares críticos, tipo os vértices do triângulo. Durante a investigação, alguns observaram que mesmo quando o ponto se situava num dos vértices do triângulo, a soma era mantida. E, nessas tentativas, chegaram à conclusão de que, além da soma ser constante, ela era equivalente à medida da altura do triângulo eqüilátero em questão (Figura 6.12).

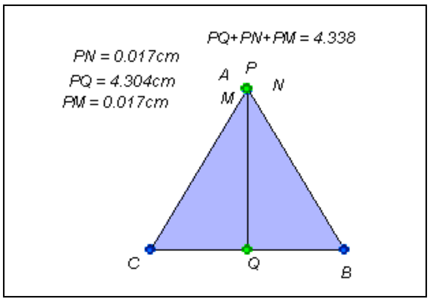


Figura 6.12. Equivalência entre a soma das distâncias e a altura de ABC

Foi um avanço, mas ainda ficava a pergunta, agora reformulada: *“Porque a soma das distâncias é constante e equivalente à altura do triângulo”?* Verificou-se a necessidade de efetuar a *extensão* do desenho criando *subconfigurações: os* triângulos (APB, APC e BPC) de forma a dar suporte à argumentação. Construídas as *subconfigurações*, prosseguiu-se a investigação. Foi um trabalho intenso e difícil. Chegou um momento, marcado por grande expectativa e ansiedade, em que quase todos saíram de suas máquinas e juntaram-se ao redor de um dos companheiros para pensar juntos e discutir a solução do problema. E, assim, começaram novas conjecturas, agora formuladas em grupo, que gerou o reconhecimento por um deles do relacionamento do fato com o valor da área do triângulo. A discussão ficou mais calorosa, mas a solução completa ainda não tinha sido atingida.

Novo avanço se atingiu, quando consideraram, a partir das *subconfigurações* (triângulos APB, APC e BPC), que, em cada um deles, o respectivo segmento distância era também a sua altura. A justificativa surgiu, então, fundamentada na igualdade entre a área do triângulo ABC e a soma das áreas dos três triângulos APB, APC e BPC de mesma base, os lados do triângulo eqüilátero ABC (Figuras 6.13 e 6.14).

Da estabilidade das subconfigurações emergiram os fatos estáveis implícitos (a tese do teorema): a soma das medidas das distâncias é constante e equivalente à medida da altura de ABC. São as apreensões operatórias (reinterpretações, reconstruções, extensões) que geram as subconfigurações, suporte à argumentação dedutiva. Assim, foi desenvolvida a demonstração fornecendo a explicação tão esperada pela turma para fato aparentemente estranho e avesso aos seus conhecimentos prévios. O grupo se empolgou com o sucesso na investigação, destacando a importância do trabalho em grupo em situações de aprendizagem, como enfatizado por Vigotsky (1985).

Resumo da Análise:

Nessa atividade fica marcante a influência positiva do trabalho escolar num meio que encerre intenções da conquista de determinado saber científico. Um problema que motive, um meio que apresente condições de sustentar uma investigação mais apurada (ambiente de geometria dinâmica, por exemplo) são elementos que podem contribuir para a construção do conhecimento do aluno.

Tendo sua primeira conjectura invalidada, os professores iniciam investigações, num processo de *ações, formulações, validações, ações* em busca de explicações para o novo fato que contrariou suas expectativas: a localização interna do ponto é qualquer, pois a soma das distâncias é constante.

Os avanços no processo aconteceram por etapas. Primeiramente verificaram que a soma das distâncias era constante. A seguir, concluíram que a soma era constante e equivalente à altura do triângulo eqüilátero dado.

A partir da admissão de um possível relacionamento entre a solução do problema e a área do triângulo, surgiu a idéia de obter extensões do desenho, contrariamente às previsões da *análise a priori* quando colocava as extensões do desenho sugerindo tal relacionamento.

A justificativa final surgiu fundamentada na igualdade entre a área do triângulo dado e a soma das áreas dos três triângulos *subconfigurações.* Pode-se dizer que esta foi uma elaboração de todos, visto que foi decorrente de uma discussão intensa entre os professores.

Neste problema, cabe à demonstração, de uma forma especial, a função de não só validar, mas também de explicar.

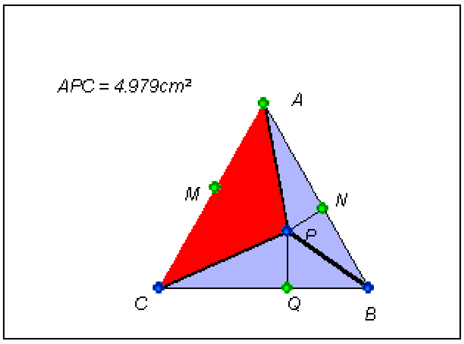
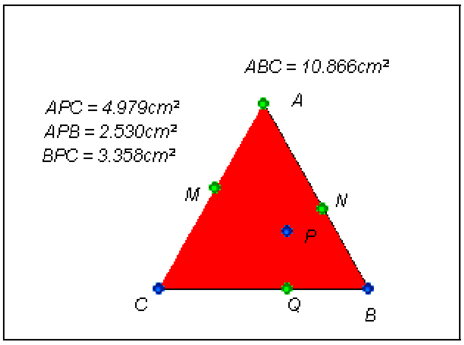


Figura 6.13. Área dos triângulos subconfigurações



Figuras 6.14. Relação entre as áreas dos triângulos

Décima Sessão

A décima sessão aconteceu em 07 de outubro 2004.

Proposta da sessão:

- Problema do quadrilátero inscrito no triângulo
- Discussão das atividades

Relato:

Os professores, motivados pelo trabalho do problema da ilha, mostraram-se bastante animados e dispostos a enfrentar o desafio da nova situação. Após a interpretação do texto e a análise do desenho, a primeira preocupação foi, de um modo geral, verificar se a figura era sempre um paralelogramo. Medições de ângulos e de segmentos foram providenciadas e registradas na tela. Perceberam, no entanto, que para demonstrar o fato de MNDE ser um paralelogramo, não era necessária a utilização de medidas particulares. O encaminhamento era outro (Figuras 6.15 e 6.16).

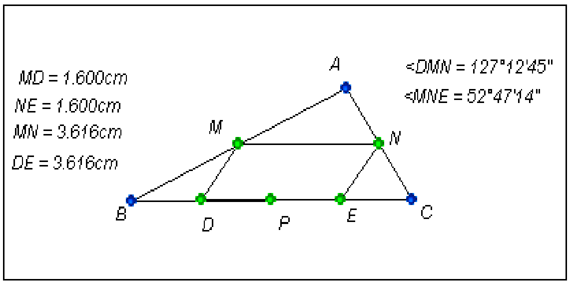


Figura 6.15. Quadrilátero inscrito em ABC (1)

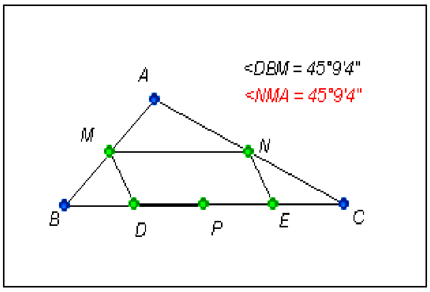


Figura 6.16. Quadrilátero inscrito em ABC (2)

Baseados no *fato declarado* dos pontos médios dos lados, gerando os *fatos estáveis implícitos*, provaram o paralelismo entre MN e BC, a partir da base média de ABC, de dois triângulos semelhantes AMN e ABC, provaram o paralelismo entre MN e BC. A congruência de MN e DE está garantida por construção. Feita essa demonstração, a segunda parte da resolução envolveu a demonstração propriamente dita de verificar as condições de ABC para que MNED seja um quadrado. Depois de muito investimento em *ações*, *formulações*, *validações*, *ações*, e com apoio da análise do comportamento das medidas registradas na tela afetadas com o dinamismo imposto à figura, alguns conseguiram concluir primeiramente que a garantia do paralelogramo ser um quadrado está relacionada à exigência de ABC ser triângulo isósceles. A segunda condição, congruência da base e da altura desse triângulo, não foi percebida inicialmente. Para se chegar a essa conclusão, *apreensões operatórias* da figura precisaram ser atingidas, ao lado de *extensões* do desenho, com a constituição de *subconfigurações* convenientes, triângulos APB e APC (Figuras 6.17 e 6.18).

Com o avanço nas investigações, a segunda condição foi percebida por alguns. No final, por conta própria ou com ajuda de outro, todos perceberam as duas condições. Quatro professores conseguiram redigir a demonstração.

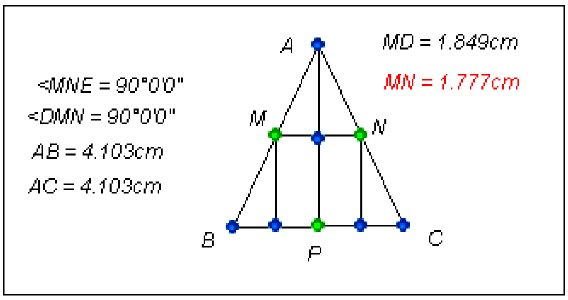


Figura 6.17. Subconfigurações de ABC (1)

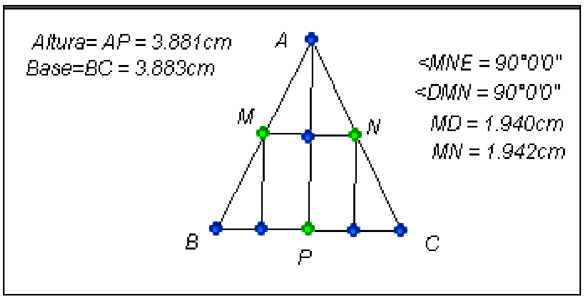


Figura 6.18. Subconfigurações de ABC (2)

Resumo da Análise:

Com a experiência na resolução dos problemas propostos e no uso do programa, o trabalho já é resolvido com menor dificuldade que a encontrada inicialmente. Após a análise da questão proposta, os professores partem para as medições de elementos envolvidos na resolução. Verificações empíricas são feitas para dar suporte às conjecturas. Alguns professores chamam a atenção para que primeiramente se deva demonstrar que o quadrilátero obtido é sempre um paralelogramo. A concentração de todos se dirigiu para esse objetivo. A partir da hipótese dos pontos médios, emergiu a *subconfiguração* base média do triângulo que permitiu a validação da primeira tese proposta. A segunda parte do problema consistiu em determinar as condições para que o paralelogramo fosse um quadrado. Para se conjecturar, *apreensões operatórias* da figura precisaram ser atingidas, com a constituição de *subconfigurações* convenientes, triângulos APB e APC. As duas condições: ser triângulo isósceles e ter base e altura congruentes foram estabelecidas gradativamente.O passo final, validar as conjecturas através da demonstração, foi executado corretamente por quatro professores. Para alguns professores (pelo menos dois) é difícil passar da verificação empírica para a teórica.

Ao final da sessão, colocou-se em discussão a presente atividade e a da sessão anterior.

O problema da ilha entusiasmou de forma especial o grupo de professores, principalmente pela curiosidade em encontrar uma explicação para o novo fato que contestava a hipótese inicialmente levantada por eles. Eles reconhecem que a conclusão demandou um grande esforço de todos, a princípio de forma independente e, depois, em grupo. Ao sentirem dificuldade em encontrar a solução isoladamente, buscaram o auxílio dos colegas para, pensando juntos, descobrir de que maneira a justificativa procurada poderia ser encontrada.

Dentre os comentários dos professores, registra-se a observação, feita por todos, sobre o reconhecimento da potencialidade do recurso do arrastar desses ambientes ("... o *arrastar nos fornece, instantaneamente, inúmeras representações de uma mesma situação"; "Com as diferentes formas variando, você pensa melhor, você consegue enxergar longe, o que não conseguiria no papel*").

Quanto ao problema do quadrilátero inscrito num triângulo qualquer, os professores consideraram também uma boa questão pela possibilidade de despertar, naturalmente, a necessidade de demonstrar. Sua demonstração foi apresentada no quadro por um dos professores, a pedido do pesquisador, para os que ainda não tinham conseguido realizá-la.

Décima Primeira Sessão

A décima primeira sessão aconteceu em 14 de outubro de 2004.

Proposta da sessão:

- Problema do triângulo retângulo
- Discussão de texto sobre Demonstrações e Pesquisas

Relato:

Nesta sessão, ficou combinado que os encontros continuariam acontecendo para que pudéssemos concluir as atividades e as discussões pretendidas. Mais uma vez foi renovado o contrato didático, de comum acordo por ambas as partes.

Os professores perceberam, logo após a leitura, que o problema precisa ser dividido em etapas. A primeira envolvendo a demonstração de ser AJPI um retângulo. Basearam-se, para isso, no *fato declarado* dos segmentos PI e PJ serem perpendiculares aos lados AB e AC, respectivamente, e de ABC ser retângulo em A. A demonstração, como previsto na análise *a priori* foi simples e efetuada por todos, alguns com a ajuda do pesquisador. A partir da proposição demonstrada de AJPI ser retângulo, a investigação foi direcionada para a posição de P em BC para garantir IP com comprimento mínimo. Para isso, providenciaram que medidas necessárias fossem afixadas na tela para observação de seu comportamento. Tentaram concluir apoiados apenas na observação do comportamento de IP com a movimentação. Tal suporte mostrou-se insuficiente. Percebia-se a região onde deveria ser localizado o ponto, mas precisá-lo não era possível. Apenas três dos professores, chegam a perceber que uma nova *extensão* do desenho era necessária para, a partir de uma adequada *subconfiguração*, conseguir elementos para a argumentação. A nova extensão produzida foi a da outra diagonal AP de APIJ. A diagonal AP é a *subconfiguração* adequada porque seu comprimento é o mesmo de IJ. Com o controle da diagonal AP, verifica-se que o seu comprimento mínimo acontece quando AP é perpendicular à base BC. Os três professores, em questão, concluiram que IJ terá comprimento mínimo quando P estiver localizado de forma que AP seja perpendicular a BC. A seguir, é redigida por eles a demonstração do pretendido. Nem todos conseguiram atingir tal nível de evolução de pensamento que corresponderia ao nível 4, segundo a teoria de Van Hiele (1986).

Resumo da Análise:

Todos os professores perceberam que a primeira etapa do problema consistia em demonstrar que AJPI, inscrito no triângulo ABC, era um retângulo. Como previsto na análise *a priori*, tal demonstração pode ser obtida pela maioria, com base na hipótese do perpendicularismo dos segmentos PI e PJ aos lados do triângulo retângulo ABC.

A segunda etapa da questão, no entanto, exige um grau maior de *abstrações reflexionantes* que conduzam às devidas *apreensões operatórias* da figura. É necessária uma percepção de que a outra diagonal AP do retângulo seria a *subconfiguração* adequada para se obter a localização de P que fornece o comprimento mínimo solicitado às diagonais AP e IJ.

Embora avanços tenham sido percebidos, inclusive naqueles professores com maiores dificuldades em relação ao significado das demonstrações, à natureza da geometria como um modelo teórico, a elaboração da demonstração foi uma etapa não atingida por todos. Muitas situações de resolução de problema exigem *insights* para se chegar a sua solução.

Após a atividade, um novo texto foi colocado em discussão. Versava sobre demonstrações: sugestões para o seu ensino; a demonstração como uma técnica; atividades de demonstração utilizadas em pesquisa com alunos. Com a leitura e a discussão, foram relevantes os seguintes pontos destacados: a) a importância de se identificar a hipótese e a tese, ou seja, os dados declarados que são pontos de partida e as conclusões que se pretende atingir; b) é erro comum usar a conclusão como ponto de partida ou como parte das argumentações apresentadas; c) levar em conta dos dados relevantes do enunciado, sem inventar nada e tendo o cuidado para não se enganar com a aparência do desenho, o que acontece muito; d) a demonstração não precisa ser necessariamente rigorosa, deve-se levar em consideração o grau de escolaridade do aluno. A demonstração pragmática é válida desde que tenha um encaminhamento e embasamentos corretos e culmine com a justificativa pretendida.

A discussão foi muito proveitosa, os professores fizeram comentários sobre o ensino da Geometria, as demonstrações, a geometria dinâmica, o ganho de cada um com o trabalho, a expectativa de uso do *software.* Apesar da impossibilidade, no momento, de usar tal recurso em escolas públicas, eles gostariam de fazê-lo mesmo sem se achar tão preparados para usar o ambiente.

Décima Segunda Sessão

A décima segunda sessão aconteceu 28 de outubro de 2004.

<u>Proposta da sessão</u>:

- Discussão de texto sobre Teorias da Aprendizagem
- Inicio de elaboração da atividade a ser aplicada com o aluno

Relato:

Nesta sessão, alguns professores que não haviam concluído os trabalhos, aproveitaram o espaço para fazê-lo e discutir sobre algum ponto que ainda tenha deixado dúvida.

A discussão do texto foi sobre teorias da aprendizagem: o empirismo, o construtivismo e o construcionismo (as referências foram registradas no texto, em anexo). Os professores participaram fazendo colocações e perguntas. Acharam relevante o assunto, principalmente na parte de caracterização das teorias. Concordaram que precisam ler mais, procurar colocar-se a par de assuntos que dizem respeito a seu trabalho e que podem favorecê-lo. Sobre a teoria construtivista, por exemplo, percebem que muitas especulações são feitas a respeito, mas não se pode discutir nem contestar por falta de embasamento para tal.

Alguns professores iniciaram a elaboração da aula prática para seus alunos, mas não conseguiram concluí-la.

Décima Terceira Sessão

A décima terceira sessão aconteceu em 04 de novembro de 2004.

Proposta da sessão:

- Aplicação do pós-teste

Neste item são relatados os resultados obtidos com a aplicação do pós-teste, acompanhados de sua devida análise *a posteriori*.

a) Teste número 1: avaliando o **Nível 2 (Análise)**

Item 2.1: Todos os professores o acertaram.

Item 2.2: Todos os professores o acertaram.

Item 2.3: Seis professores o acertaram.

Dois erraram, marcando B, C e D. Persiste para esses dois professores, apesar do trabalho desenvolvido, uma idéia confusa sobre triângulos isósceles e eqüiláteros.

Item 2.4: Todos os professores o acertaram.

Item 2.5: Todos os professores o acertaram.

Resumo da Análise:

O resultado do pós-teste do nível 2 foi muito bom, em relação ao obtido no pré-teste correspondente. Pela freqüência de acertos, pode-se concluir que a maioria dos professores atingiu a aquisição completa do **nível 2**, o da análise, em que as figuras já são analisadas em termos de seus componentes, reconhecendo-se suas propriedades e usando-as para resolver problemas.

E, de acordo com a análise feita no pré-teste deste nível, confirmou-se a expectativa de que, com a execução das atividades de construção das figuras geométricas, uma oportunidade seria oferecida aos professores para que conflitos pudessem ser contornados ou solucionados.

b) <u>Teste número 2</u>: avaliando o **Nível 3 (Dedução Informal)**

Item 3.1: Todos os professores o acertaram.

Item 3.2: Sete professores o acertaram.

Um errou ao assinalar o item A. É um erro diferente do encontrado no pré-teste e um pouco incoerente com o trabalho realizado, pois se expressa contra a definição de triângulo eqüilátero.

Item 3.3: Quatro professores o acertaram.

Três erraram marcando o item A e continuando a revelar uma inversão do sentido da inclusão de classes. Um marcou o item B, negando o relacionamento entre o quadrado e o retângulo.

Item 3.4: Todos os professores o acertaram.

Item 3.5: Todos os professores o acertaram.

<u>Resumo da Análise</u>:

O resultado da aplicação do pós-teste relativo ao nível 3, foi bom. Observa-se um crescimento na freqüência de acerto das questões em comparação à observada no respectivo pré-teste. Pode-se afirmar, aqui também, que a maioria dos professores atingiu a aquisição completa do **nível 3**, o da dedução informal, em que já existe percepção da necessidade de uma definição precisa dos objetos e de que uma propriedade pode decorrer de outra, sendo capaz de desenvolver uma argumentação lógica informal e uma ordenação de classes de figuras geométricas.

c) <u>Teste número 3</u>: avaliando o **Nível 4 (Dedução formal)**

Item 4.1: Todos os professores o acertaram.

Item 4.2: Sete professores o acertaram.

Um errou assinalando o item C, condiderando erradamente a implicação entre ser retângulo e ter as diagonais interceptando-se no ponto médio.

Item 4.3: Seis professores o acertaram.

Dois erraram. Um marcou A, outro B; ambos revelam, ainda, não perceber a equivalência das proposições apresentadas.

Item 4.4: Cinco professores o acertaram.

Três erraram, assinalando a opção D, contrariando os princípios da estrutura da geometria euclidiana.

Item 4.5: Apenas um professor o acertou.

Sete erraram, número que excedeu o encontrado no pré. Esta é uma questão que ainda traz muitas dúvidas aos participantes. Três marcaram o item A e quatro marcaram o D. Percebe-se que o conceito de implicação e o de equivalência ainda são confundidos.

Resumo da Análise:

O pós-teste do nível quatro revela um pequeno crescimento positivo em relação ao respectivo pré-teste. O **nível quatro**, o da dedução formal, caracteriza-se pelo domínio do processo dedutivo e das demonstrações quando já se compreende o significado da dedução e o papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva possibilitando a produção de demonstrações.

Registra-se, particularmente, um avanço na resolução da questão quatro que apresentou no pré-teste uma alta freqüência de erro, sete, reduzindo-se a três no pós-teste.

A aquisição completa do nível parece não ter ocorrido para a maioria, o que vai se confirmar após a análise individual de cada participante. Podemos sugerir que, após os trabalhos, existe entre baixa, intermediária e alta aquisição deste nível, o que pode ser considerado um avanço e vai ao encontro das observações registradas durante a análise *a posteriori* das atividades da seqüência de ensino aplicadas.

d) Teste número 4: avaliando o **Nível 4d (Construindo Demonstração)**

Item 4d.1: Dois professores o acertaram.

Seis erraram. A falha continua em afirmar que a demonstração está correta por não perceber que a hipótese não considera o fato de AC // BD, ou ainda, o fato de ABCD ser paralelogramo.

Item 4d.2: Sete professores o acertaram.

Um ainda não conseguiu elaborar a demonstração. Sugere procedimento que não conduz à demonstração pedida, o de construir um triângulo, medir seus ângulos e aceitar como lei o resultado observado nesse exemplo específico.

Item 4d.3: Seis professores o acertaram.

Dois não conseguiram resolver satisfatoriamente a questão por não apresentar sugestão alguma ou por apontar o uso de construções para elaborar a demonstração, sem maiores explicações.

Resumo da Análise:

Após os trabalhos, com a aplicação deste pós-teste que avalia a construção de demonstrações de forma específica dentro do **nível 4d**, observamos que houve, para alguns professores, avanços na sua habilidade em desenvolver demonstrações. Concepções falhas ainda persistem para alguns, como a de não interpretar corretamente os dados usando a tese como hipótese. A questão um, relacionada a este saber, revelou uma alta freqüência de erro no pré (sete), a qual sofreu um pequeno decréscimo, no pós-teste, passando a seis. Em alguns casos, a demonstração solicitada não foi desenvolvida satisfatoriamente.

Décima Quarta Sessão

A décima quarta sessão aconteceu em 11 de novembro de 2004.

Proposta da sessão:

- Aplicação do questionário final
- Avaliação final do experimento

Terminada a fase de aplicação da seqüência didática, o professor respondeu ao Questionário Final. Com a pretensão de verificar, através de uma análise comparativa dos depoimentos iniciais e finais, possíveis alterações nas concepções dos professores acerca das demonstrações e de seu ensino, foram analisadas as seguintes perguntas: “Na sua opinião, o trabalho de construção das figuras geométricas contribui para a construção do conhecimento?”; “Houve alguma mudança na sua concepção sobre a possibilidade e a maneira de estar trabalhando as demonstrações com seus alunos?”; “O nosso trabalho contribuiu de alguma maneira para sua vida profissional (em relação aos seus conhecimentos, à sua didática)?”.

Foram consideradas, em relação às três perguntas, as seguintes categorias: a) *construção das figuras implicando na formação dos conceitos e na melhor compreensão das demonstrações; b) consciência de ensino tradicional da matemática, fora da realidade do aluno e com ênfase na memorização; c) percepção da necessidade de novas práticas onde o aluno experimente, verifique suas conjecturas, formando cadeias de raciocínio mediadas pela lógica e pela dedução; d) estar aberto ao novo; e)a didática muda como conseqüência do aumento de conhecimentos; f) reconhecimento da importância do computador no ensino das demonstrações.*

As observações constantes nas letras *a* e *c* foram registradas em depoimentos de dois professores. A consideração da letra b foi mencionada por três deles enquanto a da letra *f* registrou-se em todos os depoimentos.

Décima Quinta Sessão

A décima quinta sessão aconteceu em 18 de novembro de 2004.

Proposta da sessão:

- Finalização dos trabalhos pendentes.
- Encerramento das atividades.

Na presente sessão foi formalizado o encerramento do projeto e o tempo foi dedicado ao término das atividades pendentes. Nem todos conseguiram terminar a elaboração da atividade de aplicação e foi dado um novo prazo para a entrega da mesma. Apesar do novo prazo, dois professores não efetivaram a entrega.

6.1.3 A Validação

Retomam-se, nesse momento, as hipóteses da pesquisa, de que a utilização de ambientes de GD, no processo ensino-aprendizagem da Geometria, estimula a evolução dos níveis de pensamento geométrico com simultâneo desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos professores envolvidos, permitindo uma melhor compreensão do significado das demonstrações, bem como desenvolvendo competências para sua elaboração. E, por outro lado, num processo de formação de professores, através de competências desenvolvidas e da prática de novas metodologias, contribui para uma reflexão sobre as demonstrações e seu ensino, favorecendo uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica.

A validação das hipóteses, pelo seu conteúdo apresentado, foi obtida através de diferentes processos. Na aplicação da seqüência didática, a análise das atitudes e conseqüentes progressos dos professores na compreensão e elaboração de demonstrações foi feita através da confrontação entre a análise *a priori* e o que se produz efetivamente no desenrolar do experimento e que se sistematizada pela análise *a posteriori*. Enriquecendo essa análise, o confronto entre o pré e o pós-teste (Van Hiele) nos permitiu analisar possíveis avanços do pensamento geométrico dos professores participantes. Em relação às concepções dos professores acerca das demonstrações e de seu ensino, foram analisados e confrontados os depoimentos dos professores antes e depois da aplicação da seqüência didática, bem como a natureza da seqüência didática por eles elaborada foi levada em consideração.

6.1.3.1 A Validação das Atividades da Seqüência Didática

De acordo com a confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, pode-se considerar que os professores, de um modo geral, avançaram em seus conhecimentos em geometria, particularmente nas demonstrações, pois demonstraram compreender:

- o tratamento do desenho como uma instância de representação do objeto geométrico, contribuindo muito para isso, as atividades de construção realizadas em que o desenho fica subordinado às apreensões seqüenciais, favorecendo a devida fusão dos componentes figurais e conceituais do objeto geométrico.
- a importância e necessidade das demonstrações para explicar logicamente propriedades das figuras e para resolver problemas;
- a ordenação das informações que compõem a prova, entendendo que imposições de construção (as hipóteses) acarretam *fatos estáveis implícitos* (a tese) que exigem explicações e que se revelam no dinamismo do desenho;
- o processo das demonstrações, desenvolvendo competências na habilidade em construí-la, nas *reinterpretações, reconstruções e extensões* do desenho trabalhadas na identificação das *sub-configurações* suporte às argumentações dedutivas.

6.1.3.2 A Comparação entre o Pré e o Pós-Teste

Avaliando e comparando os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores participantes, antes e depois da aplicação da seqüência didática, considerações a respeito foram feitas e são aqui apresentadas.

Com a correção dos testes, foi elaborada a seguinte Tabela 6.5, identificando as questões erradas nos mesmos, pelos professores, de acordo com os níveis. O registro X, aí encontrado, indica a inexistência de questões erradas, ou seja, no teste apontado o professor acertou todas as suas questões.

Níveis	Ana	Aldo	Áurea	Cora	Eli	Gui	Lila	Rosa
Pré-N2	2-5	2	3	3-4	2-4	X	4	X
Pós-N2	X	X	3	3	X	X	X	X
Pré-N3	1	3-5	1-2-4-5	1-2-3-5	3	X	X	1
Pós-N3	X	3	3	2-3	3	X	X	X
Pré-N4	2-4-5	1-4-5	4-5	1-2-3-4-5	4	3-4-5	3-4-5	X
Pós-N4	4-5	5	4-5	2-3-5	5	3-4-5	5	X
Pré-N4d	1	1-2-3	1-2-3	1-2-3	1	1 – 3	3	1
Pós-N4d	1	1	1	1-2-3	1	1 – 3	x	X

Tabela 6.5. Identificação das questões erradas pelos professores, em cada teste

A partir desses dados, pode ser obtida uma nova tabela (Tabela 6.6), com os percentuais de acerto dos professores nos diferentes níveis, apresentada a seguir. As colunas indicadas por N4f apresentam valores resultantes de uma síntese dos testes N4 e N4d que serão representativos para o nível 4.

Professor	N2 Pré	N2 Pós	N3 Pré	N3 Pós	N4 Pré	N4 Pós	N4d Pré	N4d Pós	N4f Pré	N4f Pós
Ana	60%	100%	80%	100%	40%	60%	70%	70%	55%	65%
Aldo	80%	100%	60%	80%	40%	80%	0%	70%	20%	75%
Áurea	80%	80%	20%	80%	60%	60%	0%	70%	30%	65%
Cora	60%	80%	20%	60%	0%	40%	0%	0%	0%	20%
Eli	60%	100%	80%	80%	80%	80%	70%	70%	75%	75%
Guilherme	100%	100%	100%	100%	40%	40%	30%	30%	35%	35%
Lilá	80%	100%	100%	100%	40%	80%	70%	100%	55%	90%
Rosa	100%	100%	80%	100%	100%	100%	70%	100%	85%	100%

Tabela 6.6. Resultados dos pré e pós-testes dos níveis, em percentuais de acerto, pelos professores

Com base nessa nova interpretação dos dados obtidos com a correção dos testes, puderam ser identificados os níveis de desenvolvimento do pensamento dos professores, antes e depois da aplicação, conforme apresentado na Tabela 6.7 e de acordo com critério previamente aqui estabelecido (Cap.5, item 5.2.2). No estabelecimento dos níveis, uma exceção foi feita para a professora Cora, no pré-teste do nível 2, quando foi considerada estando neste nível ao se iniciarem os trabalhos, apesar de apresentar aquisição intermediária do mesmo.

Professor	Pré-Teste	Pós-Teste
Ana	Nível 3	Nível 3
Aldo	Nível 2	Nível 4
Áurea	Nível 2	Nível 3
Cora	Nível 2	Nível 2
Eli	Nível 4	Nível 4
Guilherme	Nível 3	Nível 3
Lila	Nível 3	Nível 4
Rosa	Nível 4	Nível 4

Tabela 6.7. Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores

A distribuição dos professores, em freqüência absoluta, pelos níveis, pode ser sintetizada e, observada na Tabela 6.8 e na Figura 6.19, apresentadas a seguir.

Níveis	Pré-teste	Pós-teste
Nível 2	3	1
Nível 3	3	3
Nível 4	2	4

Tabela 6.8. Número de professores, pelos níveis, antes e depois da aplicação

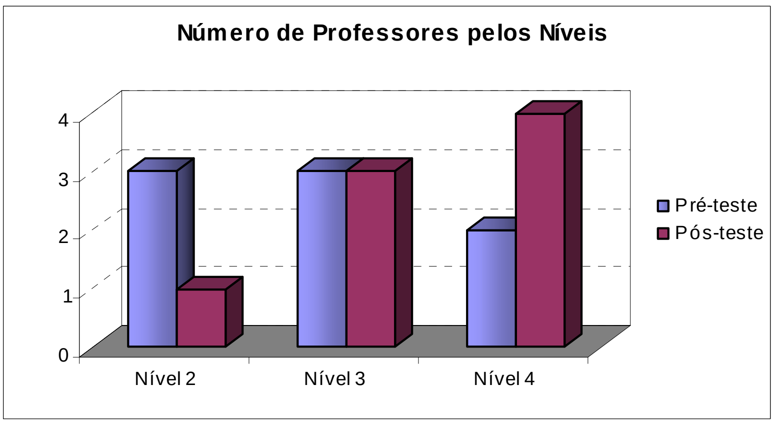


Figura 6.19: Gráfico de Número de professores pelos níveis, nos pré e pós-testes

O momento inicial revela uma não homogeneidade nos níveis de pensamento geométrico dos professores. Três deles iniciam no **nível 2** que corresponde à fase da análise, quando se espera que o sujeito seja capaz de analisar as figuras geométricas e identificar suas propriedades. É uma alta freqüência relativa para o referido nível, em se tratando de professores. A mesma freqüência, três, ocorre para o **nível 3** que corresponde à fase da dedução informal ou ordenação, quando se espera que o sujeito seja capaz de compreender e realizar inclusão de classe e em que já existe percepção da necessidade de uma definição precisa dos objetos e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Somente dois dos participantes iniciam no **nível 4** correspondente à fase da dedução formal que se caracteriza pelo domínio do processo dedutivo e das demonstrações envolvendo a compreensão do significado da dedução e do papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva, nível este esperado para o professor. Essa constatação confirma as observações iniciais sobre o despreparo do professor para o trabalho com as demonstrações.

Após as atividades da seqüência, o quadro representativo da questão melhora, embora não represente ainda uma situação ideal. Observa-se um decréscimo na freqüência de professores no **nível 2,** de três reduz-se a um. No **nível 3,** é mantido o número de três, o que não significa necessariamente que sejam os mesmos professores em ambas as situações. O número de professores, no **nível 4,** cresce de dois para quatro.

A permanência, após os trabalhos, de um professor no mesmo nível em que se encontrava no início desta investigação não significa necessariamente seu não desenvolvimento, pois há de se considerar, também, os diferentes graus de aquisição de nível (completa, alta, intermediária, baixa, nenhuma) que ocorrem e podem evidenciar avanços já detectados na análise qualitativa realizada. Assim, foram analisados os graus de aquisição dos níveis, pelos professores, que são apresentados a seguir, nas Figuras 6.20, 6.21 e 6.22.

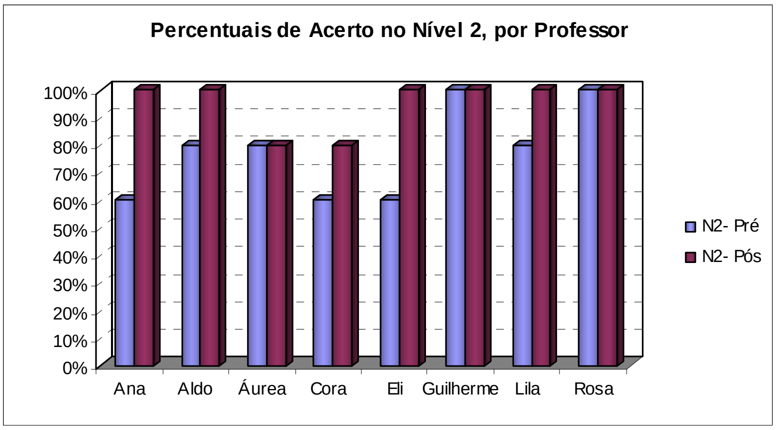


Figura 6.20: Gráfico de Percentuais de acerto nos testes do nível 2, por professor

É de se esperar no **nível 2**, correspondente à fase da análise, que todos os professores apresentem a sua aquisição completa, o que não ocorreu inicialmente. Após os trabalhos, no entanto, todos professores conseguiram atingir ou manter a aquisição completa deste nível. Pode-se observar que três professores evoluíram da inicial aquisição intermediária para sua aquisição completa. Os outros, cinco professores, já iniciaram com a aquisição completa do nível 2. O progresso observado pode ser considerado conseqüência da natureza das construções realizadas pelos professores, dentro dos requisitos estabelecidos pelo ambiente de geometria dinâmica. Fato este aliado ao acesso a inúmeras configurações da figura geométrica construída, conseqüência do seu dinamismo obtido através do recurso do arrastar.

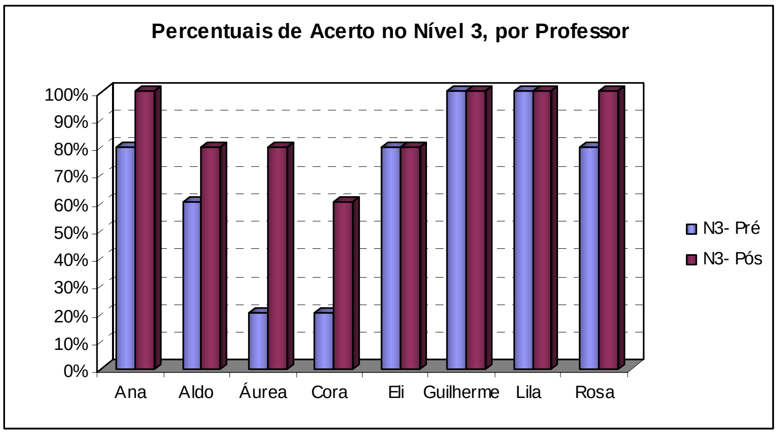


Figura 6.21. Gráfico de Percentuais de acerto nos testes do nível 3, por professor

Observou-se que, apesar de iniciarem com diferentes graus de apropriação do **nível 3,** correspondente à fase da dedução informal ou ordenação, todos professores conseguiram adquirir sua aquisição completa, com exceção de um deles que apenas atingiu uma aquisição intermediária. Observa-se que dois professores iniciaram sem a aquisição do referido nível, mas evoluíram e finalizaram um com a aquisição intermediária e outro com a completa. Por outro lado, um professor que iniciou com aquisição intermediária evoluiu para a completa. Cinco dos professores já iniciaram com aquisição completa e a mantiveram. O processo de resolução de problemas, ensejando ao professor uma estratégia de investigação no ambiente de geometria dinâmica favoreceu a compreensão e o estabelecimento de relações lógicas entre os fenômenos observados.

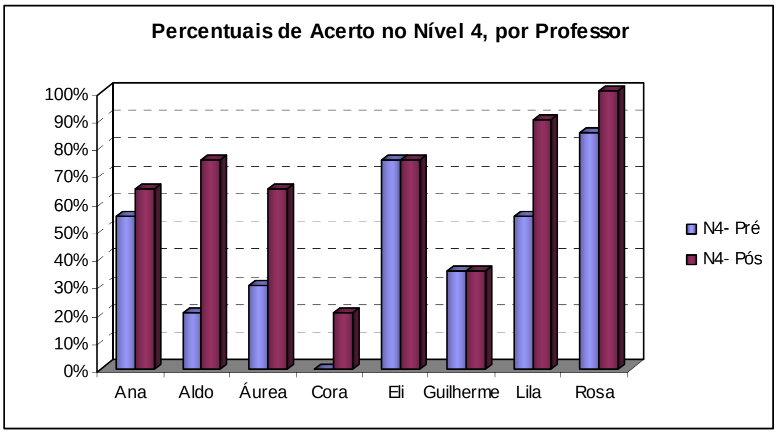


Figura 6.22. Gráfico de Percentuais de acerto nos testes do nível 4, por professor

Em relação ao **nível 4,** correspondente à fase da dedução formal, após os trabalhos o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos professores é sensível, apesar de não ser atingida a aquisição do nível 4 por todos. Observa-se uma grande dispersão no seu grau de aquisição inicial: dois dos professores sem aquisição do referido nível, dois com baixa aquisição, dois com intermediária, um com alta aquisição e um com aquisição completa. Dos dois professores que iniciaram sem nenhuma aquisição, um continuou nesse patamar, mas o outro avançou para uma alta aquisição, o que representa um significativo avanço. Dos que apresentaram baixa aquisição, um persistiu enquanto o outro conseguiu atingir a intermediária. Para os dois, em aquisição inicial intermediária, somente um avançou para a aquisição completa. O professor em aquisição inicial alta chegou à completa. O único que já apresentava aquisição completa, a manteve, mas atingindo os 100% de acerto nas questões respectivas.

Assim, terminados os trabalhos, verificam-se avanços com quatro dos professores participantes apresentando aquisição alta ou completa do nível, o que era uma das metas a ser atingida. Na Tabela 6.9 estão apresentados os graus de aquisição de cada nível pelos professores nos pré e pós-testes.

Professor	N2-Pré	N2-Pós	N3-Pré	N3-Pós	N4-Pré	N4-Pós
Ana	Inter	Completa	Completa	Completa	Inter	Inter
Aldo	Completa	Completa	Inter	Completa	Nenhuma	Alta
Áurea	Completa	Completa	Nenhuma	Completa	Baixa	Inter
Cora	Inter	Completa	Nenhuma	Inter	Nenhuma	Nenhuma
Eli	Inter	Completa	Completa	Completa	Alta	Alta
Guilherme	Completa	Completa	Completa	Completa	Baixa	Baixa
Lilá	Completa	Completa	Completa	Completa	Inter	Completa
Rosa	Completa	Completa	Completa	Completa	Completa	Completa

Tabela 6.9. Grau de aquisição de cada nível, nos pré e pós-testes, pelos professores

Especificamente em relação ao nível 4, as suas representações tabular e gráfica, (Tabela 6.10 e Figura 6.23) disponibilizadas a seguir, reforçam a análise e a compreensão de seu grau de aquisição pelos professores participantes, nos pré e pós-testes.

Grau de aquisição	Professores (pré)	Professores (pós)
Nenhuma	2	1
Baixa	2	1
Inter	2	2
Alta	1	2
Completa	1	2

Tabela 6.10. Número de professores por grau de aquisição do nível 4, nos pré e pós-testes

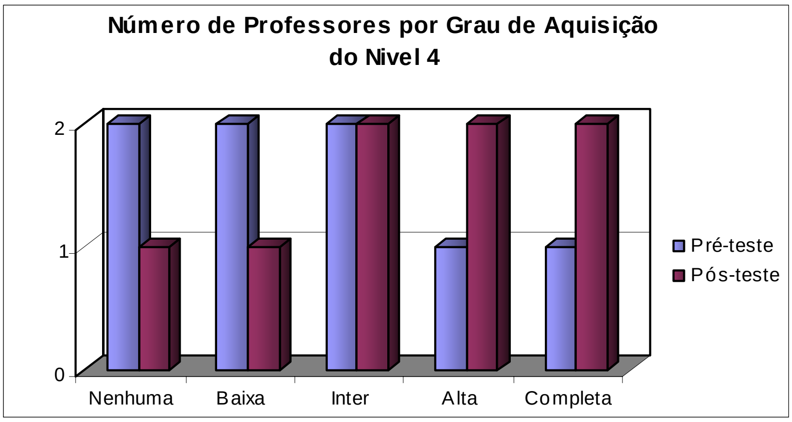


Figura 6.23. Gráfico de Número de professores por grau de aquisição do nível 4

Na comparação do desempenho dos professores nos pré e pós-testes, especialmente em relação ao grau de aquisição do nível 4, revelou-se positiva a participação dos professores nos trabalhos do Estudo de Campo, o que vem embasar as considerações feitas a respeito por ocasião do processo de validação das atividades da seqüência didática.

Uma descrição específica da evolução de pensamento geométrico de cada professor participante é feita a seguir.

Professora Ana, após os trabalhos, revela uma aquisição completa dos níveis 2 e 3, superando os erros cometidos em questões desses níveis no pré-teste, conforme pode ser visto na tabela 6.5. Mantém uma aquisição intermediária do nível 4 pela manutenção de umas respostas incorretas refletindo características de dois níveis consecutivos. Ana ainda não revelou confiança na demonstração como autoridade final decidindo a verdade de uma proposição matemática (questão 4); não dominou completamente a distinção entre implicação e equivalência entre duas proposições (questão 5).

Professor Aldo, após os trabalhos, mantém aquisição completa dos níveis 2 e 3, com respostas às questões suficientemente justificadas que refletem claramente um dado nível de raciocínio. Ao avançar da não aquisição do nível 4 para sua alta aquisição, revela um significativo desenvolvimento de seu pensamento. Sua aquisição é alta por refletir o nível de raciocínio, mas ainda apresentar respostas incorretas. Aldo ainda não domina completamente a distinção entre implicação e equivalência entre duas proposições (questão 5).

Professora Áurea, com os trabalhos realizados, apresenta aquisição completa dos níveis 2 e 3, superando a não aquisição inicial do nível 3. Revela, também, avanço indo de uma baixa aquisição do nível 4 para uma aquisição intermediária, por apresentar características de dois níveis consecutivos e pela manutenção de respostas incorretas, ao revelar não confiança na demonstração como autoridade final decidindo a verdade de uma proposição matemática (questão 4) e ao não dominar completamente a distinção entre implicação e equivalência entre duas proposições (questão 5).

Professora Cora, após a participação nas sessões, adquire a aquisição completa do nível 2. Avança para a aquisição intermediária no nível 3 pois, ainda, não domina determinados conceitos, como o uso de formas lógicas (se ... então), na questão 2 do teste deste nível. Pelos resultados, percebe-se que para Cora ainda não houve a aquisição do nível 4. As dificuldades de Cora são compreensíveis por se tratar de uma professora sem formação universitária e, por outro lado, pertencer ao grupo de participantes dessa investigação que não sabem usar o computador. Seus pequenos avanços, em virtude das circunstâncias, são grandes avanços.

Professor Eli, após os trabalhos desenvolvidos nas sessões, reforça aquisição completa dos níveis 2 e 3. Para o nível 4, sua aquisição ainda é alta por demonstrar este nível de raciocínio na resolução dos problemas mas ainda apresentar respostas incorretas. Eli não tem domínio completo da distinção entre implicação e equivalência entre duas proposições (questão 5).

Professor Guilherme, após a participação nos trabalhos, ratifica sua aquisição completa dos níveis 2 e 3. Em relação ao nível 4, não há avanços. Continua apresentando baixa aquisição deste nível e persistindo nos erros do pré-teste. Assim, percebeu-se que para

Guilherme não houve avanço registrável em mudança de nível ou em grau de aquisição de determinado nível, pode-se sugerir que para ele seja necessário um tempo maior de trabalho para que mudanças significativas possam ser observadas.

Professora Lila com os trabalhos realizados, consolida sua aquisição completa dos níveis 2 e 3. Em relação ao nível 4, avançando em seus níveis de pensamento, da aquisição intermediária deste atinge sua aquisição completa.

Professora Rosa, assim como a professora Lila, após a participação nas atividades, ratifica sua aquisição completa dos níveis 2 e 3 e refina sua aquisição do nível 4. É o único professor que consegue acertar 100% do pós-teste.

No confronto entre o pré e o pós-testes, a análise comparativa dos resultados retrata, de um modo geral, um crescimento dos professores. Tal constatação vem corroborar as sugestões de avanço indicadas por ocasião da análise qualitativa do desempenho dos professores realizada através do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* das atividades da seqüência didática aplicada.

6.1.3.3 O Confronto entre os Depoimentos dos Professores

Numa análise comparativa dos dois depoimentos (antes e depois da seqüência) pode-se sugerir mudança na visão dos professores sobre o ensino das demonstrações.

O primeiro passo para uma mudança pode ser a consciência de uma concepção errada a respeito de algo. É a instalação do *desequilíbrio*, segundo Piaget (1995). Nesse sentido, a *conscientização da prática de um ensino tradicional da matemática, fora da realidade do aluno e com ênfase na memorização*, aliada a *percepção da necessidade de novas práticas onde o aluno experimente, verifique suas conjecturas, formando cadeias de raciocínio mediadas pela lógica e pela dedução,* pode representar esse primeiro passo para o professor.

O segundo passo pode ser visto como o se colocar pronto às mudanças, buscando a devida *assimilação* e *acomodação.* Podemos perceber essa idéia na colocação e*star aberto ao novo* dos professores.

A *adaptação*, garantindo o *reequilíbrio*, pode aqui ser vista como a percepção de novos caminhos para trabalhar as demonstrações. Os caminhos apontados envolvem aspectos didáticos e cognitivos do ensino das demonstrações. São eles: *uma melhor compreensão das demonstrações pode ser obtida através da construção das figuras e conseqüente conceituação correta do objeto geométrico; o reconhecimento da importância do computador no ensino das demonstrações; a didática muda como conseqüência do aumento de conhecimentos.*

6.1.3.4 A Seqüência Didática Elaborada pelo Professor

A natureza das atividades elaboradas pelos professores sugeriu, também, uma postura em relação à Matemática que busca propiciar aos alunos um ambiente de aprendizagem onde eles tenham oportunidade de investigar, de conjecturar, de experimentar, de redescobrir, de argumentar, de elaborar demonstrações. Seis professores do Estudo de Campo1 conseguiram elaborar a atividade em questão, sendo que um deles realizou a aplicação com uma de suas turmas de sétima série do Ensino Fundamental. A aplicação transcorreu conforme previsto e o assunto abordado foi acerca de propriedades das cevianas de um triângulo isósceles. Na ocasião da aplicação, o professor contou com o apoio e a participação deste pesquisador, antes e durante os trabalhos. Esta aplicação é relatada neste capítulo, na sessão 6.3.

A validação das hipóteses neste estudo de campo, obtida através de diferentes processos conforme aqui relatado, aponta para resultados que dela podem ser inferidos e que serão objeto de apresentação no próximo capítulo.

6.2 O Estudo de Campo 2

O presente estudo de campo foi desenvolvido junto a um grupo de professores de uma escola pública da cidade do Rio de Janeiro nos meses de setembro a novembro de 2004. Envolveu inicialmente cinco professores dos quais somente um participou até a fase de conclusão das atividades que foram realizadas na própria escola, especificamente, em seu laboratório de Informática. O desenvolvimento das atividades, originalmente previsto para um total de dezoito horas em 12 encontros de 90 minutos cada um, sofreu uma alteração, frente à realidade do grupo, reduzindo-se a cerca de nove horas. O horário para os encontros foi negociado e definido entre o pesquisador, a coordenação e os professores de Matemática da referida escola, a partir da proposta de utilização do horário de coordenação de área (Matemática) para tal. Assim, o horário reservado para as sessões ficou definido para as terças-feiras, de 13:45 às 14:45h, compreendendo sessenta minutos semanais, acontecendo na própria escola. A carga horária do estudo totalizou nove horas ficando, portanto, prejudicada em relação à proposta inicial pela sua redução. Não havendo outra possibilidade de acerto, o planejamento original sofreu as devidas adaptações.

6.2.1 Os Participantes

O experimento se iniciou com um grupo de cinco professores estando o registro dos dados de um deles incompleto devido ao fato do mesmo não ter apresentado o Questionário Inicial devidamente preenchido, apesar de participar das atividades até determinada etapa do processo. Dos cinco iniciantes, a partir da sexta sessão, somente um deles continuou até o último encontro. Este cumpriu, paralelamente às atividades das sessões, a fase de aplicação prática com seus alunos. O planejamento e a execução dessas atividades se deu em horário a parte, nos meses de outubro e novembro, num trabalho conjunto, intensivo e semanal entre este professor e o pesquisador. Os encontros com os alunos (8ª série do Fundamental) foram em número de cinco e aconteceram às quartas-feiras nesta mesma escola. O adiantamento da aplicação, para antes do término das sessões de trabalho com os professores, se justifica por dois motivos: o pouco espaço de tempo para fazê-lo diante da proximidade do término do ano letivo e o grande interesse do professor em realizar tal aplicação. O processo de execução deste projeto, acompanhado das devidas observações e análises, é relatado neste capítulo, num item específico.

Durante as sessões, não se contou com a assiduidade e pontualidade dos participantes. Ora, os professores atrasavam-se por estar às voltas com compromissos da escola (preparar ou corrigir provas, preencher diário) ora, precisavam ausentar-se para, em reunião de coordenação, resolver problemas, conforme já mencionado. Tal ocorrência sugere que a freqüência e a pontualidade não foram pontos considerados relevantes para esses professores, apesar do contrato estabelecido na primeira reunião. A participação neste tipo de trabalho, por ser voluntária, implica num comprometimento estreitamente relacionado com as concepções do professor a respeito da priorização de tal atividade em seu dia-a-dia. São variáveis não computadas que fogem ao controle do experimento, mas que com certeza têm influência sobre o resultado do mesmo. No estudo de campo em questão, essas variáveis se mostraram com forte intensidade negativa, como será visto no decorrer da redação.

Nos dois primeiros encontros foram analisados os conhecimentos prévios dos participantes, bem como suas concepções a respeito da Geometria e das demonstrações através da aplicação do pré-teste e do questionário de sondagem, respectivamente. Informações que o caracterizassem foram obtidas a partir deste questionário e serão relatadas a seguir. Os professores serão apresentados com nomes fictícios para garantir seu anonimato.

a) **Professora Déa**

A participação de Déa nessa pesquisa foi motivada por "*conhecer uma nova metodologia para o ensino de Geometria*".

Déa é de idade entre 41 e 50 anos de idade. Licenciada em Matemática, conta em sua formação com uma pós-graduação em Educação Matemática. Com experiência no magistério de mais de 20 anos, trabalha como professor da rede municipal e federal, acumulando a função de coordenador de Matemática. Sua carga semanal, em sala de aula, é de 8 horas-aula, com turmas de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal, mas nunca o utilizou como um recurso em suas aulas.

Déa trabalha com a geometria no ensino fundamental. Sua forma de trabalhar é diversificada: com resolução de problemas, grupos de trabalho, jogos. Considera a Geometria importante "*na formação do aluno, de forma ampla, geral e irrestrita para a compreensão do mundo e da matemática*". Relaciona como principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria: "*a falta de visualização, os conteúdos não vistos nas séries anteriores*". Tais dificuldades são trabalhadas por ela da seguinte maneira: "*retomando os conteúdos*".

Para Déa, o significado das demonstrações em Geometria não foi mencionado, ou seja, o item não foi respondido. Diz sentir necessidade de utilizá-la em suas aulas e quando o faz "*encontra alguma dificuldade em utilizá-la*". Não respondeu às perguntas sobre as razões de as estar utilizando em sala de aula e as razões de não as estar utilizando.

b) **Professor Ronaldo**

A participação de Ronaldo nessa pesquisa foi motivada "*pelo desejo em adquirir conhecimentos*".

Ronaldo tem entre 31 e 40 anos de idade. É licenciado em Matemática e revela ter participado, embora sem concluir, de um curso de especialização em Matemática. Com experiência no magistério de 2 a 5 anos, trabalha como professor da rede federal efetivo, dando 18 aulas semanais de Matemática nos Ensinos Fundamental (7ª série) e Médio (1ª e 2ª séries).

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal, mas nunca o utilizou como um recurso em suas aulas.

Ronaldo trabalha com a Geometria em suas salas de aula. A forma de trabalhar é expositiva e/ou com resolução de problemas. Considera a Geometria importante *"na formação do aluno porque eleva os conhecimentos dos alunos em formas, volumes e na capacidade de visão espacial".* Relaciona como principal dificuldade encontrada em seus alunos na aprendizagem da Geometria, *"a falta de base nas séries anteriores".* Tal dificuldade é trabalhada por ele da seguinte maneira: *"especificamente tenho marcado aulas extras para resgatar conteúdos perdidos".*

Para Ronaldo o significado das demonstrações em Geometria é *"o deixar os alunos cientes de que a geometria tem uma real importância na vida de cada um".* Revela não sentir necessidade de utilizá-las em sala de aula, mas quando o faz não encontra dificuldade para tal. Não menciona duas razões para estar utilizando as demonstrações em sala de aula, nem duas para não as estar utilizando, conforme pedido.

c) **Professora Tatiana**

A participação de Tatiana nessa pesquisa foi motivada por *"curiosidade sobre um software de Geometria".*

Tatiana tem mais de 50 anos de idade. É licenciada em Matemática, tendo uma pós-graduação em Engenharia de Sistemas. Participou, também, de um curso de aperfeiçoamento de professores, em Geometria. Com experiência no magistério de 10 a 20 anos, trabalha como professor da rede federal, efetivo, dando 18 aulas semanais de Matemática para turmas de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Tem, também, experiência com turmas do Ensino Médio.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal, usando bem o Word e o Excel. Nunca o utilizou, porém, como um recurso em suas aulas.

Tatiana trabalha com a geometria em suas salas de aula. A forma de trabalhá-la é diversificada: expositiva, em resolução de problemas, pesquisa, grupos de trabalho. Considera a Geometria importante para a "*formação do aluno porque a geometria desenvolve a percepção espacial, facilitando a resolução de problemas*". Relaciona a principal dificuldade encontrada em seus alunos na aprendizagem da Geometria com "*a sua linguagem específica*", mas reconhece que os alunos em geral gostam da Geometria. Essa dificuldade é trabalhada por ela da seguinte maneira: "*procurando aproximar o conteúdo de exemplos e situações já de conhecimento dos alunos*".

Tatiana não faz comentário nenhum sobre o significado das demonstrações em Geometria, sobre a sua utilização e motivos para o mesmo.

d) **Professor Victor**

A participação de Victor nessa pesquisa foi motivada por querer "*adquirir ferramenta que possa ajudar a visualização da geometria por parte do aluno*".

Victor tem idade entre 21 a 30 anos. É licenciado em Matemática e revela não ter participado de nenhum processo de formação continuada. Com experiência no magistério de 2 a 5 anos, trabalha como professor da rede federal, efetivo, dando 30 aulas semanais de Matemática para turmas de 5ª e 7ª séries do Ensino Fundamental.

O computador é utilizado de maneira informal e pessoal, mas nunca o utilizou como um recurso em suas aulas.

Victor trabalha com a geometria em suas salas de aula. A forma de trabalhar é diversificada: expositiva, em resolução de problemas, pesquisa, grupos de trabalho, jogos. Considera a Geometria importante na "*formação do aluno porque ter noções de medidas e unidades, para inclusive entender informações e saber aplicá-las*". Relaciona como principais dificuldades encontradas em seus alunos na aprendizagem da Geometria: "*a não visualização, principalmente, em "3D*". Tais dificuldades são trabalhadas por ele da seguinte maneira: "*levando objetos que representam o que é desejado*".

Para Victor, o significado das demonstrações em Geometria é o de "*mostrar a veracidade e a generalidade do que está sendo demonstrado*". Sente necessidade de utilizá-la em sala de aula quando é de fácil entendimento. Quando o faz, não encontra dificuldades para tal. Duas razões para estar utilizando as demonstrações em sala de aula: "*para não tornar certos conhecimentos numa simples "decoreba*"; para saber achar soluções mais avançadas, utilizando esses conhecimentos. Não mencionou duas razões para não as estar utilizando.

e) **Professora Flávia**

Seus dados não puderam ser completamente relacionados porque a professora não devolveu o Questionário Inicial, apesar da solicitação constante deste pesquisador.

É uma professora efetiva dessa escola e trabalha com Geometria, conforme dados obtidos durante os encontros. Os dados desconhecidos estão, na tabela síntese, preenchidos com "x".

O perfil dos professores integrantes do Estudo de Campo 2 está sintetizado na Tabela 6.11.

Professor	Idade	Sexo	Tempo de Magistério	Ensina Geometria	Usa computador em aula	Usa demonstração em aula
Déa	De 41 a 50	F	Mais de 20	Sim	Não	Sim
Flávia	x	F	x	Sim	x	x
Ronaldo	De 31 a 40	M	De 2 a 5	Sim	Não	Sim
Tatiana	Mais de 50	F	De 10 a 20	Sim	Não	Não
Victor	De 21 a 30	M	De 2 a 5	Sim	Não	Sim

Tabela 6.11: Perfil dos professores integrantes do Estudo de Campo 2

6.2.2 As Sessões

Primeira Sessão

O primeiro encontro aconteceu em 14 de setembro de 2004.

Proposta da sessão:

- Apresentação da proposta de trabalho, envolvendo:
- Informações a respeito do pesquisador e do Curso de Mestrado em questão;
- Relato do tema da pesquisa, de seus objetivos e de sua justificativa;
- Apresentação dos objetivos da pesquisa de campo bem como o de sua estrutura e roteiro de trabalho;
- Importância, papel e responsabilidade dos professores participantes.
- Discussão da proposta
- Convite formal aos professores presentes para participação no projeto
- Estabelecimento do contrato didático entre pesquisador e os pretensos participantes
- Preenchimento do questionário de sondagem inicial.

Relato:

Compareceram ao encontro 13 professores. Dentre eles: um orientador pedagógico, um coordenador do primeiro segmento do Ensino Fundamental, a coordenadora de Matemática e professores regentes dos Ensinos Fundamental e Médio.

A proposta do trabalho foi apresentada ao grupo, com todas as suas implicações (um novo conhecimento, compromisso, responsabilidade). Registra-se aqui, que a participação dos professores de Matemática, segundo sua coordenadora, é oportuna para esta escola porque vem contemplar o objetivo da coordenação de oportunizar aos professores o contato com novas tecnologias voltadas para o ensino da Matemática. Os professores foram informados que as atividades aconteceriam no laboratório de Informática da escola que é coordenado por um serviço técnico especializado. Cada participante, durante os trabalhos, atuará em sua máquina para a conquista da desenvoltura necessária no uso do programa (domínio da técnica) e para que seu particular desempenho possa ser avaliado. Apesar das tarefas serem desenvolvidas individualmente, discussões em grupo são programadas para acontecer em vários momentos das sessões, buscando atingir as situações de institucionalização do saber e estabelecer e/ou reforçar um vínculo de companheirismo entre os professores e entre professores e pesquisador. Durante as sessões, o pesquisador contará com a colaboração da técnica responsável pelo laboratório, que prontamente se dispôs a prestar uma assessoria técnica aos trabalhos. Os recursos disponíveis no laboratório são: cerca de 20 computadores, um reto-projetor e um quadro branco.

O horário de coordenação de Matemática fica cedido para a realização das sessões (às terças-feiras no turno da tarde). Alguns professores e outros profissionais do 1º segmento, embora interessados, mostraram-se impossibilitados de participar dos encontros enquanto na parte da tarde. A disponibilidade deles seria no turno da manhã e, nesse sentido, foi feito um apelo ao pesquisador de abrir um segundo horário opcional para a realização das sessões. Foi-lhes mostrado que um trabalho duplo, nesse momento, seria impraticável para o pesquisador devido a não disponibilidade de tempo, as implicações de novas tarefas não previstas, entre outros fatores. Ficou decidido, então, que os encontros semanais aconteceriam às terças-feiras, das 14:15 às 15:15 h, no horário da coordenação de matemática. Sete professores aceitaram, inicialmente, o convite. Dessa maneira, estabeleceu-se o contrato didático entre os sete professores candidatos e o pesquisador.

Finalizando o encontro, foi aberto um espaço para o preenchimento do questionário inicial de sondagem pelos participantes.

Para o presente estudo, só coube a análise acerca das concepções do professor que efetivamente participou até a finalização do processo da investigação em sua nova forma condensada e mutilada. Entretanto, os depoimentos do referido professor acerca das demonstrações e de seu ensino, neste questionário inicial, foram omitidos ou não expressam significativamente as suas concepções, impedindo de se fazer qualquer análise.

Segunda Seção

A segunda sessão aconteceu em 28 de setembro de 2004.

Proposta da Sessão:

Aplicação do pré-teste para avaliação dos níveis de pensamento geométrico dos participantes.

Relato:

O pré-teste (Van Hiele) foi aplicado nesta sessão.

A sessão começou contando com a presença de três professores. Os outros chegaram com atraso, mas direcionaram-se rapidamente para a resolução do pré-teste. Sua realização foi demorada e observou-se uma certa dificuldade dos professores em resolver os testes dos dois últimos níveis. Alguns professores, em momentos de dúvida, tentavam saná-las com o auxílio do pesquisador, quando foi explicado que era importante ser resolvido apenas o que estivesse ao alcance dos mesmos e sem ajuda externa. No caso de não conseguir, a orientação é para deixar em branco.

Neste item são relatados os resultados obtidos com a aplicação do pré-teste, acompanhados de sua devida análise *a posteriori*. O pré-teste refere-se aos cinco professores que participaram até o sexto encontro.

a) Teste número 1: avaliando o **Nível 2 (Análise)**

Item 2.1: Todos os professores o acertaram.

Item 2.2: Todos os professores o acertaram.

Item 2.3: Todos os professores o acertaram.

Item 2.4: Dois professores o acertaram.

Item 2.5: Todos os professores o acertaram.

Resumo da Análise:

Observa-se um bom resultado no teste do nível 2. Ocorreu falha numa mesma questão, a de número quatro, para todos que erraram. A questão trata das propriedades definidoras do paralelogramo. Tal fato pode revelar uma falta de fusão entre as dimensões conceitual e figural do objeto geométrico, mas também pode ser conseqüência de uma falta de atenção maior às questões.

b) Teste número 2: avaliando o **Nível 3 (Dedução Informal)**

Item 3.1: Todos os professores o acertaram.

Item 3.2: Todos os professores o acertaram.

Item 3.3: Três professores o acertaram.

Os dois professores que erraram, marcaram a opção A, invertendo o sentido da inclusão dos quadrados nos retângulos, ou seja, considerando, erradamente, todo retângulo como um quadrado.

Item 3.4: Todos os professores o acertaram.

Item 3.5: Três professores o acertaram.

Dois participantes erraram na classificação dos quadriláteros revelando, como prevíamos, falha no domínio da inclusão de classes dos paralelogramos.

Resumo da Análise

O resultado do teste dois, sobre o nível 3, acusa erros que revelam falhas ou deficiências dos participantes no domínio da habilidade de inclusão de classes prevista para este nível.

c) Teste número 3: avaliando o **Nível 4 (Dedução Formal)**

Item 4.1: Quatro professores o acertaram.

O erro de um dos participantes foi em escolher a opção C, onde se afirma não haver diferença entre as duas definições apresentadas para o trapézio. Isso pode expressar, como previsto, a não percepção da influência da mudança de definição da figura em sua caracterização.

Item 4.2: Todos os professores o acertaram.

Item 4.3: Três professores o acertaram.

Um errou ao marcar a opção A, revelando não perceber a equivalência entre as duas definições dadas. O mesmo motivo levou o segundo que errou marcando a opção D.

Item 4.4: Apenas um professor o acertou.

Quatro erraram a questão. Os que marcaram a opção A (dois) e os que marcaram a B (dois), fugiram ao enunciado da proposta generalizando o número de partes em que deveria ser dividido o ângulo ou ao se referindo a segmentos e não a ângulos.

Item 4.5: Nenhum professor o acertou.

Dois assinalaram a opção A e três assinalaram a C revelando, em ambos os casos, não compreender a distinção entre implicação e equivalência.

<u>Resumo da Análise</u>:

Observa-se na análise desse nível, um sensível crescimento na freqüência de erros. Percebe-se que não há para alguns uma compreensão clara das regras dos elementos que compõem o discurso matemático, tais como, teoremas, definições, provas. Não está havendo para muitos, a distinção entre implicação e equivalência entre duas preposições dadas, dificuldade prevista na análise *a priori*.

d) <u>Teste número 4</u>: avaliando o **Nível 4d (Construindo Demonstração)**

Item 4d.1: Nenhum professor o acertou.

Todos erraram a questão, considerando correta a demonstração apresentada. Para esse grupo de professores, a falha foi, também, não perceber que a argumentação se baseava em fatos não considerados como hipótese, ou seja, aceitar que o segmento AC era paralelo a BD (AC // BD) sem constar como hipótese ou sem uma demonstração prévia. É um fato que vem ao encontro das expectativas descritas na análise *a priori*.

Item 4d.2: Quatro professores o acertaram.

O participante para quem se contabilizou um erro, deixou a questão em branco. As quatro questões consideradas corretas apresentavam desenho e argumentos dispostos informalmente sem uma expressão precisa da hipótese e da tese do problema. Nesses casos, a questão foi considerada correta embora não tenha sido apresentada uma demonstração formal do pedido.

Item 4d.3: Apenas um professor o acertou.

Três professores simplesmente concordaram com a afirmação colocada sobre as diagonais do paralelogramo, mas não a demonstraram. Um tentou demonstrar, mas não conseguiu encaminhar seus argumentos.

Resumo da Análise:

Verificamos com a aplicação desse teste, que a habilidade do professor em desenvolver demonstrações é insatisfatória. As demonstrações aqui solicitadas não foram efetuadas, pela maioria dos professores, o que pode ser constatado pela freqüência de acerto das questões.

Terceira Sessão

A terceira sessão aconteceu em 05 de outubro de 2004.

Proposta da sessão:

- Apresentação do ambiente de geometria dinâmica, o *Tabulae;*
- Apresentação de telas prontas com trabalhos;
- Exploração livre e orientada do uso do ambiente, para conhecimento de alguns de seus ícones e funções;
- Discussão de texto sobre Geometria Dinâmica (em anexo);
- Início das atividades da seqüência didática.

Relato:

A reunião começou com dois professores. Houve um atraso na chegada de outros três devido a envolvimento com problemas escolares de final de bimestre.

As telas prontas foram apresentadas e versavam sobre: a equiárea de Steiner, transformações e semelhanças, o incentro e o círculo inscrito ao triângulo, casa em perspectiva. As telas não serão copiadas nesse espaço porque são as mesmas já apresentadas no Estudo de Campo1.

A apresentação das telas foi uma estratégia positiva. Os professores acharam os trabalhos interessantes, se entusiasmaram e iniciaram uma discussão sobre os possíveis caminhos utilizados na construção dos mesmos. A discussão foi proveitosa porque envolveu conhecimentos de geometria e colocou em destaque o potencial do ambiente. A discussão sobre a Geometria Dinâmica transcorreu naturalmente, pois foi uma conseqüência da natureza do trabalho da presente sessão.

A exploração inicial do *Tabulae* não foi difícil, pois todos estavam curiosos em conhecê-lo e, por outro lado, esse grupo é de professores que já eram usuários habituais do computador. As máquinas do laboratório utilizadas funcionavam regularmente e, nesse ponto, tudo transcorreu sem problemas. O auxílio da responsável técnica pelo laboratório, Lídia, em muito ajudou nos trabalhos e é algo que merece destaque.

Conforme previsto, deu-se, a seguir, o início da realização das atividades da seqüência didática. Para tal, um roteiro de trabalho (em anexo) foi distribuído para todos os presentes, onde constavam os procedimentos a serem efetuados para as construções e questões a serem resolvidas com registro de sua resolução no decorrer da execução dos procedimentos. A construção da circunferência fez parte da primeira tarefa. Inicialmente, houve uma natural dificuldade na sua realização pelo desconhecimento de *softwares* desse tipo (geometria dinâmica). A dificuldade se concentrou principalmente em: identificar a função correta a ser usada para obter determinada figura ou elemento dela, marcar o elemento do objeto a ser referência para se efetuar algum procedimento.

Os professores não apresentaram nenhuma dificuldade de conteúdo. As propriedades dos elementos da circunferência puderam, através do ambiente, ser verificadas dinamicamente com a possibilidade do movimento da figura e a conseqüente mudança de medidas registradas na tela, provocados pelo arrastar. Dessa maneira, foram constatados os seguintes fatos: ser o diâmetro da circunferência a sua corda máxima; variar de 0° a 90°, a medida do ângulo formado por uma corda e um raio estando seu vértice na circunferência. Foram verificações facilmente feitas, conforme previsto na análise *a priori*. Nem todos conseguiram fazer completamente as verificações mencionadas, pois o tempo da sessão já se havia esgotado. Assim, a continuação da exploração da circunferência ficou adiada para o encontro seguinte.

Os professores mostraram-se interessados pela apostila por se constituir num material básico para o trabalho com os alunos. Gostaram de verificar a possibilidade de estar copiando uma tela do *Tabulae* para o *Word*, porque significa um novo recurso para se inserir desenhos nos textos do *Word.*

Resumo da Análise:

Nesta primeira atividade da seqüência didática, não houve dificuldades de conteúdo. Sendo habituais usuários do computador, as dificuldades com o programa concentraram-se apenas no seu uso, por exemplo: em identificar a função correta a ser usada para obter determinada figura ou elemento dela; em marcar o elemento do objeto a ser referência para a execução de algum procedimento.

Houve um intenso trabalho para a realização das construções a serem feitas na questão da circunferência. A verificação das propriedades solicitadas apoiou-se na observação da variância ou não de determinados fatores inerentes à figura, produzida pela sua movimentação com o uso do recurso do arrastar. A observação do comportamento das medidas registradas na tela, sob a ação desse dinamismo, também foi uma referência para o estudo.

Ser o diâmetro da circunferência a sua corda máxima; variar de 0° a 90°, a medida do ângulo formado por uma corda e um raio estando seu vértice na circunferência, foram verificações facilmente feitas, conforme previsto na análise *a priori*. Nem todos conseguiram realizar completamente as tarefas programadas.

Quarta Sessão

A quarta sessão aconteceu em 19 de outubro de 2004.

Proposta da sessão:

- Exploração da circunferência (continuação).
- Construção e exploração do quadrado e do triângulo isósceles.
- Discussão das atividades realizadas e de texto: Pensamento lógico-dedutivo.

Relato:

Inicialmente, define-se aqui que as telas produzidas pelos professores nesse estudo de campo não serão reproduzidas, a não ser que tragam algo de inédito em relação às elaboradas no estudo anterior, para evitar acúmulo de informações desnecessárias.

Apenas três professores compareceram ao encontro, chegando com atraso de meia hora. Pelo encaminhamento dos encontros, o número de professores participantes fica sendo considerado como cinco, pois dos sete propostos apenas estes têm comparecido, mesmo que de forma não regular. A tarefa da circunferência foi reiniciada com a observação da relação de perpendicularismo entre a tangente à circunferência e o raio no ponto de contato. Tentativas de demonstrar tal propriedade foram feitas pelos professores presentes, aproveitando o ambiente e seus recursos para fazer conjecturas. Motivados pelo desafio, eles se engajam em processos de *ações, formulações, validações, ações.* É o momento da situação adidática, em que o "aluno" assume o problema recebido como seu e vai à busca de uma solução (BROUSSEAU, 1986). Apenas um dos professores apresentou uma sugestão para a demonstração. Sua proposta, de forma incorreta, se baseou em congruência de triângulos tomando como hipótese a proposição que se quer demonstrar. Esse encaminhamento foi o mesmo apresentado, nesta questão, por professores do primeiro estudo de campo. Não havendo sucesso nas tentativas, o pesquisador interviu direcionando os procedimentos e auxiliando na construção da demonstração. Concluída a questão da circunferência pelos três professores presentes, a nova tarefa relativa ao quadrado foi iniciada. Esta se mostrou mais simples, embora a exigência inicial, pelo ambiente, da construção segundo propriedades da figura tenha sido negligenciada o que levou um dos professores a fazer um quadrado que ao ser movimentado se desmantelou. Foi necessário o auxílio do pesquisador para que a construção fosse feita de acordo.

Essa ligação entre a conservação das características do objeto e a sua construção através de propriedades definidoras, foi ressaltada por um dos professores como muito relevante no ensino-aprendizagem da geometria, visto permitir ao aluno uma visualização vinculada à conceituação do objeto. Essa observação, colocada pelo professor, vem exatamente ao encontro dos referenciais teóricos que embasam o presente trabalho, nesse particular. Trata-se da fusão entre as dimensões figural e teórica do objeto geométrico consolidando sua correta conceituação (FISHBEIN,1993). Por outro lado, a ocorrência de *fatos estáveis implícitos* numa figura, conseqüentes de *fatos estabelecidos* começa a ocupar, para esses professores, um lugar relevante no estudo das figuras e abre caminho para o fortalecimento da compreensão da dimensão hipotético-dedutiva da geometria.

Com o esgotamento do tempo previsto, algumas atividades foram adiadas.

<u>Resumo da Análise</u>:

Apesar da ausência de alguns professores, a sessão foi proveitosa. As atividades de construção continuaram a ser feitas, contribuindo para a apreensão seqüencial do objeto geométrico e a fusão de seus componentes conceitual e figural que garantem a conceituação correta do objeto geométrico, conforme Fishbein (1993). A observação dos fatos estáveis implícitos decorrentes dos fatos declarados explicando e garantindo a estabilidade da figura, no caso o quadrado, ganha espaço nessa nova perspectiva de trabalho do professor. Com isso, os desenhos passam a ser vistos numa dimensão da geometria hipotético-dedutiva, começando a serem criadas condições para a ocorrência do processo cognitivo das demonstrações e da ascensão de patamar de conhecimento geométrico, como previsto na análise *a priori*. É um trabalho que necessita ser desenvolvido, pois se observa que, no momento de elaborar uma demonstração, os professores revelam-se inseguros no assunto. Apesar do intenso processo de *ações, formulações, validações, ações* processadas por eles, não houve sucesso na demonstração da propriedade do perpendicularismo da tangente à circunferência.

Quinta Sessão

A quinta sessão aconteceu em 26 de outubro de 2004.

<u>Proposta da sessão</u>:

- Construção e exploração dos triângulos: isósceles, eqüilátero e retângulo.
- Discussão das atividades realizadas.
- Discussão de texto: Pensamento lógico-dedutivo.

Relato:

Não houve este encontro. Os professores estavam envolvidos com problemas da escola e em reunião de coordenação. Os trabalhos foram transferidos para o dia 09 de novembro, pois em 02 de novembro não haverá aula, é feriado.

Sexta Sessão

A sexta sessão aconteceu em 09 de novembro de 2004.

A proposta da sessão é a prevista para o encontro anterior que não ocorreu.

- Construção e exploração dos triângulos: isósceles, eqüilátero e retângulo.
- Discussão das atividades realizadas.
- Discussão de texto: Pensamento lógico-dedutivo.

Relato:

A reunião contou com a presença dos cinco professores participantes. O pesquisador aproveitou a oportunidade para reforçar os objetivos do trabalho, frisar a necessidade de uma participação mais regular dos professores e ponderar sobre alguns procedimentos. Assim, colocou em discussão a mudança de horário dos encontros, no sentido de haver uma maior participação. A decisão dos professores foi pela manutenção do horário. Quanto ao andamento das atividades, foi solicitado aos professores que houvesse uma intensificação de esforços no sentido de vencer as tarefas atrasadas e cumprir as programadas para a presente sessão. Assim foi feito, cada um deu início a partir do ponto em que haviam interrompido na sessão anterior. Foi um acompanhamento um pouco difícil, para o pesquisador, porque havia uma defasagem na seqüência trabalhada. Registra-se, no entanto, que, independente do ponto da seqüência onde se encontrassem, todos passavam, mais uma vez, pela experiência de vivenciar o ambiente. Isso significa construir, movimentar, verificar, validar, reconstruir, instalando-se o processo de *ações, formulações, validações, ações.* Todos conseguiram construir o quadrado e o triângulo isósceles. A demonstração da congruência dos ângulos da base do triângulo isósceles foi obtida somente por dois dos professores presentes e por processos diferentes. Para essa atividade, foram necessárias *apreensões operatórias* da figura, no sentido de gerar as devidas *subconfigurações* que darão suporte à demonstração.

Um deles a partir de extensão do desenho, a altura do triângulo, usou congruência dos triângulos *subconfigurações* para fazer a demonstração. Foi de uma forma semelhante à utilizada no Estudo1 por outro professor. O segundo professor apresentou uma versão diferente da habitualmente obtida para essa demonstração. Ele se baseou em propriedades de ângulos inscritos e ângulos opostos pelo vértice, conforme pode ser visto na Figura 6.24 abaixo.

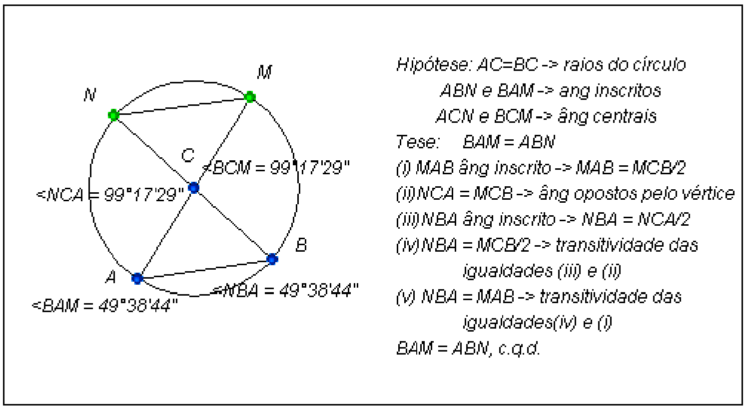


Figura 6.24. Demonstração no triângulo isósceles

Os outros três só conseguiram com a ajuda do colega ou do pesquisador.

Nos momentos finais da sessão, discutiu-se sobre as atividades já realizadas, adiando-se algumas atividades previstas. As observações dos professores foram de reconhecimento pelo potencial do ambiente, no sentido de facilitar a visualização das propriedades e possibilitar um trabalho com as demonstrações. Um deles frisou que o uso do ambiente deve ser um recurso aliado a outros e não ser considerado como único. As construções, particularmente, devem primeiramente ser executadas com régua e compasso para depois serem realizadas no ambiente. Acrescentou, ainda, que o aluno para trabalhar no ambiente de geometria dinâmica tem que apresentar conhecimentos mínimos de geometria, pois que qualquer construção a ser realizada exige do usuário a utilização de suas propriedades definidoras.

Resumo da Análise:

O domínio no uso do programa vem crescendo, mesmo para os que não conseguem estar sempre presente às sessões, fato este que favorece os trabalhos da seqüência.

Com a construção do quadrado e do triângulo isósceles reforça-se o conceito dessas figuras geométricas, pelo favorecimento da associação devida entre os seus dois aspectos, figural e conceitual, permitido pelo uso do ambiente. A demonstração da congruência dos ângulos da base do triângulo isósceles permitiu destacar que fatos *estáveis implícitos* (a tese) são decorrentes de *fatos declarados* (hipótese) acerca da figura que está sendo tratada, abrindo espaço para uma discussão do modelo teórico da geometria com os professores.

Nem todos conseguiram chegar a um nível de pensamento tal que gerasse a demonstração pretendida e precisaram da intervenção da pesquisadora para direcionar melhor os seus encaminhamentos e chegar à solução correta.

Sétima Sessão

A sétima sessão aconteceu em 16 de novembro de 2004.

Proposta da Sessão:

- Conclusão das atividades de construção e exploração dos triângulos eqüilátero e retângulo.
- Discussão do texto previsto para a sessão anterior.

Relato:

Nesta sessão compareceram apenas dois professores. Os outros se achavam presentes, mas não participaram das atividades estando envolvidos com afazeres da escola.

Os dois professores presentes continuaram as atividades para concluir a parte da seqüência relativa às construções. O triângulo eqüilátero foi construído com o auxílio de duas circunferências de mesmo raio. O controle do comportamento das medidas é um recurso que agrada e é logo acessado pelo professor. É uma visão empírica dos fatores envolventes, mas que dá suporte às abstrações reflexionantes necessárias para pensamentos de nível mais elevado que conduzirão às demonstrações. Ambos os professores conseguiram desenvolver a demonstração da congruência dos ângulos do triângulo eqüilátero, pela *apreensão perceptiva* da figura, baseados nos lados do triângulo como raios de circunferências de mesma dimensão. Esta era a expectativa anunciada na análise *a priori*.

Seguindo a seqüência, construiram o triângulo retângulo. Através de *ações, formulações, validações e ações* verificam e justificam a caracterização do triângulo como retângulo pela sua construção em que a hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência circunscrita. Com o esgotamento do tempo, as atividades sobre esse triângulo não foram concluídas e a discussão adiada.

Ao final da sessão, foi acordado que somente um dos professores continuaria a participar do experimento, em virtude da ausência certa dos outros quatro nos próximos encontros devido a seus comprometimentos em outros afazeres escolares. Ficou, assim, oficialmente interrompido o contrato didático assumido inicialmente por esses quatro professores. Uma nova estruturação das atividades foi organizada para uma condensação das mesmas, em virtude do avançado do tempo e pelos muitos adiamentos ocorridos durante a aplicação. O professor que persiste é o que está realizando a aplicação com seus alunos, juntamente com este pesquisador.

Foi decidido que haveria mais dois encontros. Um para que as atividades de construção pudessem ser concluídas, ficando assim eliminadas as atividades de exploração previstas para o processo. O último encontro seria reservado à aplicação do pós-teste e do questionário de sondagem final.

Resumo da Análise:

A atividade sobre o triângulo eqüilátero foi resolvida pelos dois professores presentes. O controle das medidas é um recurso utilizado como uma visão empírica dos fatores envolventes, mas que se constitui em suporte às *abstrações reflexionantes* necessárias à construção das demonstrações. Com o apoio da *apreensão perceptiva* da figura, favorecida pela forma de construir o triângulo eqüilátero no ambiente, é desenvolvida a demonstração da congruência dos ângulos desse triângulo pelos dois professores. Foi uma tarefa relativamente fácil devido à *apreensão perceptiva* da figura favorecida pelos procedimentos de sua construção, de acordo com o previsto na análise *a priori* desta questão. As atividades a respeito do triângulo retângulo foram somente iniciadas, ficando sua conclusão adiada para o encontro seguinte.

Oitava Sessão

A oitava sessão aconteceu em 23 de novembro de 2004.

A proposta da sessão compreende:

- Término das atividades previstas para o encontro anterior (triângulos eqüilátero e retângulo). - Discussão de texto.

Relato:

O professor não compareceu ao encontro.

Nona Sessão

A nona e última sessão ocorreu em 30 de novembro de 2004.

Proposta da sessão:

Aplicação do pós-teste e do questionário de sondagem final.

Relato:

Foi aplicado o pós-teste e o questionário final. As atividades foram encerradas sem conclusão do mínimo previsto por total falta de viabilidade de cumprimento do contrato didático. A atividade iniciada no encontro anterior ficou suspensa e suprimida. Esta última sessão limitou-se a aplicação dos instrumentos mencionados.

São aqui relatados os resultados obtidos com a aplicação do pós-teste, bem como a sua respectiva análise *a posteriori.* O pós-teste refere-se somente ao professor que participou até o final do processo.

a) Teste número 1: avaliando o **Nível 2 (Análise)**

A professora errou apenas o item quatro por não apresentar as propriedades definidoras do paralelogramo. Seu percentual de acerto é, portanto, de 80%.

b) Teste número 2: avaliando o **Nível 3 (Dedução Informal)**

A professora errou os itens um, três e cinco. No item um, assinalando B e D, interpretou erradamente a questão considerando que a figura deveria ser necessariamente um retângulo ou um triângulo. No item três assinalou a opção A, invertendo o sentido da inclusão dos quadrados nos retângulos, ou seja, considerando, erradamente, todo retângulo como um quadrado. Na questão cinco, revela falha no domínio da inclusão de classes dos paralelogramos. Seu percentual de acerto é, portanto, de 40%.

c) Teste número 3: avaliando o **Nível 4 (Dedução Formal)**

A professora errou os itens dois, três e quatro. No item dois, assinalou C, considerando uma bi-implicação não existente. No item três, assinalou A revelando não perceber a equivalência entre as duas definições dadas. No item quatro, não marcou nenhuma opção. Seu percentual de acerto é, portanto, de 40%.

d) Teste número 4: avaliando o **Nível 4d (Construindo Demonstração)**

A professora errou os itens um e três. No item um, falhou por não perceber que a argumentação se baseava em fatos não considerados como hipótese, ou seja, aceitar que o segmento AC era paralelo a BD (AC // BD) sem constar como hipótese ou sem uma demonstração prévia. No item três, não fez nenhuma consideração. Seu percentual de acerto é, portanto, de 30%.

A análise acerca das concepções dos professores somente foi considerada, neste estudo, em relação ao professor que efetivamente participou até a finalização do processo da investigação. Entretanto, os depoimentos do referido professor, tanto no questionário inicial como neste final, foram omitidos ou não expressam significativamente suas concepções acerca das demonstrações e de seu ensino impedindo de se fazer qualquer inferência.

A elaboração e a aplicação, por parte deste professor, da seqüência didática com seus alunos, não permite negar-lhe uma atitude favorável à prática das demonstrações no ensino da Geometria, numa abordagem construtiva através dos ambientes de geometria dinâmica.

6.2.3 A Validação

Retomam-se, nesse momento, as hipóteses da pesquisa cuja validação é obtida através de diferentes processos conforme determinação metodológica.

6.2.3.1 A Validação das Atividades da Seqüência Didática

A validação das atividades da seqüência, para esta investigação, ficou comprometida pelos inúmeros obstáculos encontrados em sua aplicação, dentre eles: o comprometimento do professor com a realização do trabalho; a não execução completa das atividades planejadas; a não obtenção de todos os dados necessários para as diferentes análises.

De acordo com a confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, pode-se considerar que o professor em questão, apresentou avanços em seus conhecimentos em

Geometria, mas, particularmente em relação às demonstrações, nada se pode afirmar com segurança pela insuficiência de informações.

6.2.3.2 A Comparação entre o Pré e o Pós-Teste

A avaliação dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores participantes, antes e depois da aplicação da seqüência didática, só pode ser feita para o professor que se manteve no Trabalho de Campo até o encerramento das atividades, para os outros professores consta, portanto, apenas o resultado do pré-teste.

Com a correção dos testes, foi elaborada a Tabela 6.12, abaixo, identificando as questões resolvidas incorretamente pelos professores, de acordo com os níveis. O registro "nulo", aí encontrado, indica a não execução do teste em questão, pelo respectivo professor.

Níveis	Déa	Flávia	Ronaldo	Tatiana	Vitor
Pré-N2	4	X	4	X	4
Pós-N2	4	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo
Pré-N3	5	3	3 –5	X	X
Pós-N3	1- 3 - 5	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo
Pré-N4	3– 4 - 5	4 –5	1-3-4 – 5	4-5	5
Pós-N4	2- 3 – 4	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo
Pré-N4d	1- 3	1 – 3	1-2– 3	1-3	1
Pós-N4d	1- 3	Nulo	Nulo	Nulo	Nulo

Tabela 6.12. Identificação das questões erradas pelos professores do Estudo 2, em cada teste

A partir desses dados, é apresentada a Tabela 6.13 com os percentuais de acerto dos professores, nos diferentes níveis.

Prof.	N2 Pré	N2 Pós	N3 Pré	N3 Pós	N4 Pré	N4 Pós	N4d Pré	N4d Pós	N4f Pós	N4f Pós
Déa	80%	80%	80%	40%	40%	40%	30%	30%	35%	35%
Flávia	100%	Nulo	80%	Nulo	60%	Nulo	30%	Nulo	45%	Nulo
Ronaldo	80%	Nulo	60%	Nulo	20%	Nulo	0%	Nulo	10%	Nulo
Tatiana	100%	Nulo	100%	Nulo	60%	Nulo	30%	Nulo	45%	Nulo
Victor	80%	Nulo	100%	Nulo	80%	Nulo	70%	Nulo	75%	Nulo

Tabela 6.13. Resultados dos pré e pós-testes, em percentuais de acerto, pelos professores do Estudo 2

Com base nessa nova interpretação dos dados, puderam ser identificados os níveis de desenvolvimento do pensamento em que se encontravam inicialmente os professores, e para um deles, também após a aplicação. As Tabelas 6.14 e 6.15 e a Figura 6.25 retratam essa interpretação.

Professor	Pré-Teste	Pós-Teste
Déa	Nível 3	Nível 2
Flávia	Nível 3	Nulo
Ronaldo	Nível 2	Nulo
Tatiana	Nível 3	Nulo
Victor	Nível 4	Nulo

Tabela 6.14. Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores do Estudo 2

Níveis	Pré-Teste
Nível 2	1
Nível 3	3
Nível 4	1

Tabela 6.15. Número de professores, pelos níveis, no pré-teste

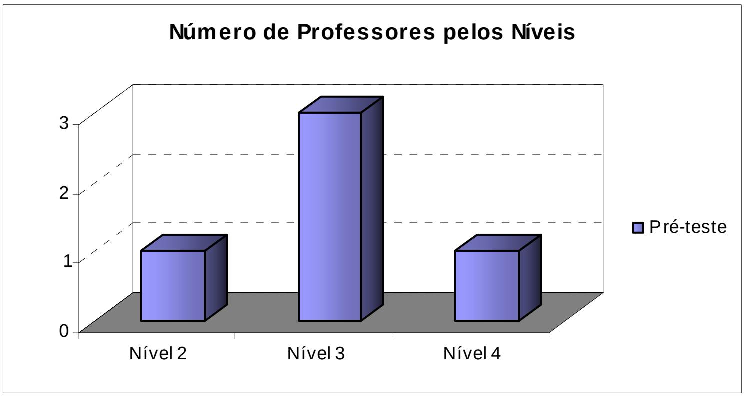


Figura 6.25. Gráfico de Número de professores do Estudo 2, pelos níveis, no pré-teste

Na análise dos dados do pré-teste, em relação ao nível de desenvolvimento dos professores, observa-se uma concentração maior deles no **nível 3**, com três dos participantes nesse patamar. Quanto aos outros dois professores, um se encontrava no **nível 2** e um no **nível 4**. Esse resultado confirma o mencionado despreparo do professor para o ensino do dedutivo na Matemática, particularmente na Geometria.

Comparando esses resultados com os obtidos a respeito no Estudo de Campo 1, a situação dos professores é semelhante embora a distribuição percentual pelos níveis tenha ocorrido de forma diferente para as duas. O despreparo, de um modo geral, do professor para o trabalho com as demonstrações em Geometria é um fator comum a ambos os grupos.

Quanto ao desenvolvimento dos professores através dos trabalhos propostos, é um aspecto que não pode ser considerado para o grupo em questão tendo em vista a não conclusão das tarefas por parte da maioria de seus elementos.

A seguir, na Tabela 6.16, podem ser observados os graus de aquisição de cada nível, pelos professores, nos diferentes testes realizados.

Professor	N2-Pré	N2-Pós	N3-Pré	N3-Pós	N4-Pré	N4-Pós
Déa	Completa	Completa	Completa	Baixa	Baixa	Baixa
Flávia	Completa	Nulo	Completa	Nulo	Baixa	Nulo
Ronaldo	Completa	Nulo	Inter	Nulo	Nenhuma	Nulo
Tatiana	Completa	Nulo	Completa	Nulo	Baixa	Nulo
Victor	Completa	Nulo	Completa	Nulo	Alta	Nulo

Tabela 6.16. Grau de aquisição de cada nível, nos pré e pós-testes, pelos professores do Estudo 2

Observa-se que, todos os professores, ao iniciarem os trabalhos, apresentavam aquisição completa no **nível 2 ,** e o que continuou nos trabalhos a manteve no pós-teste. Para o **nível 3,** pelo pré-teste, um professor revelou sua aquisição intermediária, enquanto os outros aquisição completa; pelo pós-teste, revela-se a mudança de aquisição completa para a não aquisição do nível 3, pelo professor que o realizou. A confirmação inicial, de um modo geral, da aquisição completa dos níveis 2 e 3 pelo professores deste estudo, é um bom resultado mas, em se tratando de professores, é um fato esperado. Numa análise comparativa destes resultados com os obtidos no Estudo de Campo 1, percebe-se uma maior regularidade e um melhor grau de aquisição dos níveis 2 e 3 por parte dos professores do Estudo de Campo 2. Para o **nível 4** (síntese do 4 e do 4d), observa-se no pré-teste que sua aquisição não ocorre para quatro dos participantes enquanto o outro deles revela sua alta aquisição, fato este que mostra ser semelhante, neste nível, o desempenho dos professores dos dois Estudos. Pelo pós-teste, é mantida a não aquisição desse nível para aquele que o realizou. Essa freqüência pode ser vista na Tabela 6.17 e na Figura 6.26, a seguir.

Grau de aquisição	Professores
Nenhuma	1
Baixa	3
Inter	0
Alta	1
Completa	0

Tabela 6.17. Número de professores por grau de aquisição do nível 4, no pré-teste

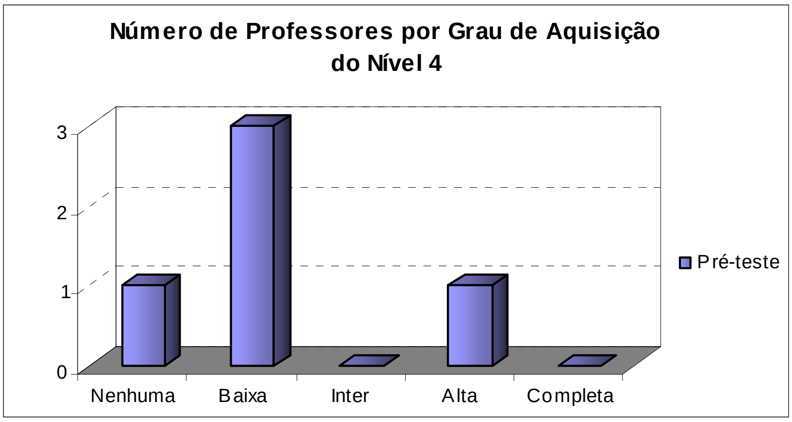


Figura 6.26. Gráfico de Número de professores do Estudo 2, por grau de aquisição do nível 4, no pré-teste

Numa análise comparativa do desempenho da professora Déa, nos pré e pós-testes, observa-se que nos níveis 2, 4 e 4d, os erros encontrados no pré-teste, praticamente são mantidos no pós-teste. Em contra partida, no nível 3, do pré para o pós-teste, há um crescimento no número de erros de um para três, o que modifica a classificação da referida professora do nível 3 para nível 2. É um resultado incoerente com o desempenho do professor nas tarefas realizadas e também com a sua postura por ocasião da aplicação prática com seus alunos. Sugere-se como causa para tal discrepância uma despreocupação do professor com a resolução dos testes. Na Tabela 6.18 e na Figura 6.27, a seguir, a situação da professora Déa é apresentada.

Níveis	Pré-Teste	Pós-Teste
Nível2	80%	80%
Nível3	80%	40%
Nível4	35%	35%

Tabela 6.18. Percentual de acerto nos pré e pós-testes, por nível

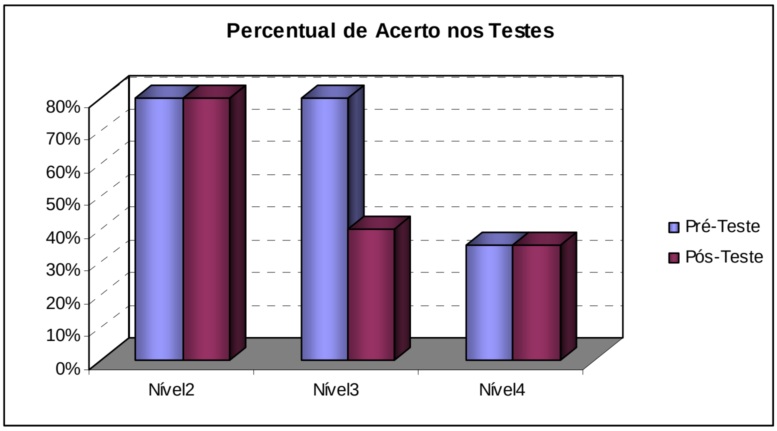


Figura 6.27. Gráfico de Percentual de acerto nos pré e pós-testes, por nível

Enquanto no Estudo de Campo 1, avanços em relação ao nível 4 foram detectados, no presente estudo, seu único representante mantém uma baixa aquisição do nível apresentada no início dos trabalhos. Esse é um fato que se contrapõe ao interesse deste professor em trabalhar as demonstrações com seus alunos em ambiente de geometria dinâmica.

6.2.3.3 O Confronto entre os Depoimentos dos Professores

Através de uma análise comparativa dos dois depoimentos (antes e depois da seqüência) do professor participante, pretende-se sugerir alguma possível mudança de concepção do mesmo sobre as demonstrações e o seu ensino.

Tendo em vista, o fato dos depoimentos do referido professor, tanto no questionário inicial como no final, serem omitidos ou não expressarem significativamente suas concepções acerca das demonstrações e de seu ensino, esse instrumento não pode ser levado em consideração.

Entretanto, com a elaboração e a aplicação da atividade prática com seus alunos, não se pode negar uma atitude favorável desse professor à prática das demonstrações no ensino da Geometria, numa abordagem construtiva através dos ambientes de geometria dinâmica.

6.2.3.4 A Seqüência Didática Elaborada pelo Professor

O professor desse Estudo de Campo 2 elaborou e aplicou uma atividade de ensino, dentro do que se pretendia. A aplicação ocorreu numa de suas turmas de oitava série do Ensino Fundamental e versava sobre variações na área de paralelogramos a partir de modificações em seus parâmetros. A aplicação transcorreu de acordo com o previsto e o professor contou com o apoio e a participação deste pesquisador, antes e durante os trabalhos.

Os resultados que podem ser inferidos da intervenção e do processo de validação das hipóteses neste estudo de campo serão, assim como para o outro estudo de campo, objeto de apresentação no próximo capítulo.

6.3 O Trabalho dos Professores com seus Alunos

Considerando que o objetivo desta pesquisa envolve a formação de professores, a articulação entre a teoria e a prática assume um papel fundamental neste processo. Dessa forma, após o término das atividades, foi proposta aos professores participantes a elaboração de uma atividade de aplicação para seus alunos, semelhante às vivenciadas por eles. São atividades a serem desenvolvidas em ambiente de geometria dinâmica, explorando a investigação, a elaboração e verificação de conjecturas acompanhadas de justificativas ou demonstrações, conforme o nível da turma. Essas atividades, dentro das possibilidades de cada professor, devem ser aplicadas em ambiente informatizado com seus alunos, com apoio e acompanhamento do pesquisador. Assim, duas aplicações foram realizadas, uma em Angra dos Reis e outra no Rio de Janeiro, sendo aqui relatadas. Uma delas, a do Rio de Janeiro, mostra-se mais elaborada em função do tempo maior disponível para a aplicação da mesma.

6.3.1 Objetivos da Aplicação

a) Em relação aos professores:

- Oportunizar-lhes um momento de experiência de trabalho com o uso do *Tabulae.*
- Garantir-lhes uma iniciação na nova metodologia com o apoio de um profissional experiente no assunto (o pesquisador).

b) Em relação aos alunos:

- Proporcionar-lhes a possibilidade de conhecer e aprender a usar o ambiente de geometria dinâmica Tabulae.
- Proporcionar-lhes a oportunidade de rever, explorar e aprofundar conceitos de Geometria, já estudados, sob outro enfoque dinâmico e interativo, contribuindo para o estabelecimento de uma aprendizagem construtiva.
- Despertar-lhes a curiosidade de saber o porquê da ocorrência de certas propriedades geométricas de modo a levá-los à busca de justificativas para tal.
- Observar e colher dados que servirão de subsídios para a escrita desta dissertação de tese.

6.3.2 Projeto Angra

A aplicação em Angra foi realizada pela professora Lila, em uma escola particular onde trabalha. O projeto envolveu seus dezenove alunos de uma turma de sétima série do Ensino Fundamental. Foi explorado o conteúdo das propriedades das cevianas num triângulo isósceles.

A aplicação ocorreu no mês de junho de 2005, no horário de aula da turma, às 4ª feiras de 7:20 às 9:00h. Foram dois encontros, num total de quatro aulas. O número limitado de encontros deveu-se a não disponibilidade maior de tempo no laboratório de informática da escola em questão.

No primeiro encontro, foram colocadas, pela professora, as considerações iniciais necessárias acerca de: o objetivo do trabalho, o conteúdo previsto e o ambiente de geometria dinâmica *Tabulae.* Os alunos iniciaram realizando uma exploração livre do programa, seguida de uma exploração orientada no sentido de conhecer e usar os comandos requisitados para a execução da tarefa. Foi distribuído aos alunos um roteiro das atividades (em anexo) a serem desenvolvidas no ambiente. Os alunos apenas iniciaram o trabalho neste primeiro encontro.

No segundo encontro, a atividade planejada foi retomada e concluída pelos alunos sem maiores problemas, pois se tratava de uma tarefa simples e os alunos mostraram uma boa desenvoltura no uso do ambiente por já estarem habituados a trabalhar no laboratório, em aulas de Informática. As dificuldades habituais com o uso do ambiente foram contornadas com o apoio dos dois professores presentes (Lila e a pesquisadora), registrando-se a necessidade de maior ajuda por parte de alguns alunos. A motivação pelo trabalho foi boa e os alunos conseguiram concluir a proposta conforme planejado.

6.3.3 Projeto Rio

A outra aplicação foi realizada pela professora Déa, na escola pública onde leciona e onde, também, aconteceu o Estudo de Campo II. Os vinte e oito alunos participantes eram de uma de suas turmas de oitava série do Ensino Fundamental. O conteúdo trabalhado versava sobre o cálculo da área de paralelogramos e já estava sendo estudado em sala de aula.

A aplicação ocorreu nos meses de outubro e novembro de 2004, em cinco encontros, no próprio horário da aula de Matemática da turma, ou seja, às terças feiras de 7:00 as 8:30h, totalizando 10 aulas e obedecendo ao roteiro apresentado a seguir.

a) Primeiro Encontro

- Apresentação da pesquisadora pela professora da turma bem como dos objetivos do trabalho e da dinâmica dos encontros.
- Discussão informal sobre alguns conteúdos do conhecimento dos alunos, investigando sua vivência com as demonstrações.
- Apresentação do *Tabulae,* no laboratório, com sua exploração, pelos alunos, de forma livre e depois orientada.
- Aplicação de um questionário (em anexo) com objetivo de avaliar a opinião e a vivência dos alunos com o processo de demonstrações.

Relato:

A professora da turma, Déa, fez as apresentações iniciais aos alunos. A turma foi muito receptiva e mostrou-se ansiosa por trabalhar a geometria nesse novo ambiente.

A pesquisadora, antes do trabalho no computador, fez algumas considerações básicas sobre o programa, como, a sua exigência na utilização de propriedades para a construção dos objetos. Foi apresentada, no quadro, a *interface* do *Tabulae* com alguns comandos e com explicações básicas sobre o seu uso. Essas iniciativas, fora do ambiente, facilitaram o manuseio do programa no laboratório.

Na exposição sobre as propriedades requisitadas no momento de construção de uma figura, foram pedidas aos alunos algumas justificativas simples sobre proposições que estavam sendo colocadas, como, por exemplo, a congruência de ângulos opostos pelo vértice. Os alunos não conseguiram responder, o que sugeriu a sua não convivência com esse processo, fato esse comprovado após a análise do questionário (em anexo), então, aplicado aos alunos nesse 1º encontro.

A parte final da sessão aconteceu no laboratório para um primeiro contato com o ambiente de geometria dinâmica *Tabulae*. O trabalho foi feito em dupla porque eram vinte e oito alunos e quinze, o número de computadores funcionando. Eles exploraram, livremente, o programa com ansiedade e entusiasmo. Logo depois, seguiram uma instrução orientada para seu uso visando os comandos do programa a serem utilizados durante a tarefa.

Os alunos receberam o roteiro de trabalho para as atividades iniciais, mas a sessão terminou sem que houvesse tempo para tal.

Na análise do questionário aplicado, pelas respostas sobre o que eles sabiam a respeito das demonstrações, observou-se que 78,57% dos alunos (vinte e dois alunos) não tinham uma idéia correta e apenas 21,43% (seis alunos) colocaram que a demonstração serve para provar se um teorema é verdadeiro ou falso. Quanto ao pedido para justificar a propriedade da soma dos ângulos internos de um quadrilátero como 360°, a maioria deixou em branco e os que apresentaram solução, nenhuma delas era correta.

b) Segundo Encontro

- Início da execução das atividades programadas sobre área de paralelogramos.

Relato:

Os alunos foram inicialmente orientados sobre a tarefa, no sentido de seguir o roteiro para facilitar os procedimentos. Continuavam motivados para o trabalho, mas encontraram muitas dificuldades no uso do *software*. A exigência das propriedades na hora da construção se constituiu em obstáculo ao processo, provocando inúmeras e simultâneas solicitações de ajuda dos alunos. O professor e o pesquisador se desdobravam nos atendimentos. Observou-se que é preferível investir mais tempo no conhecimento do *software* para depois começar as atividades, propriamente. O trabalho dos alunos foi lento, necessitando muitas vezes de apagar a construção efetuada e recomeçá-la corretamente.

A concentração deles, nesses encontros iniciais foi direcionada para o domínio do programa, não havendo muita atenção, ainda, ao conteúdo. As dificuldades mais comuns foram: usar as propriedades para a construção; selecionar corretamente as intersecções entre elementos da figura de modo que persistissem com o movimento; selecionar algum elemento da figura.

Ao final da sessão, apenas parte da atividade havia sido realizada pelos alunos. Os trabalhos foram gravados para serem reiniciados na sessão seguinte.

c) Terceiro Encontro

- Continuação das atividades de investigação sobre a área de paralelogramos.

Relato:

Os trabalhos foram retomados, observando-se ainda nos alunos a motivação e o empenho em resolver a atividade. Neste encontro, estando com um pouco mais de domínio do programa, eles se envolveram na parte do conteúdo da tarefa. Investigavam, experimentavam, discutiam, empolgavam-se com as descobertas, interessavam-se em buscar explicações para os fatos observados. Havia os que queriam inventar, fazer coisas novas e diferentes do planejado. Apenas três alunos mostraram desinteresse.

Falas dos alunos captadas sobre o uso do ambiente para a aprendizagem da geometria:

- *É um jeito diferente de aprender. A gente vê que brincando pode aprender.*
- *É uma forma menos chata de estudar. Você vai se distraindo, fazendo com o colega, vai montando. Na aula só a professora fala e faz.*
- *É diferente das aulas chatas, pelo menos é a gente que constrói. Aprende fazendo, construindo, não fica só olhando para o quadro***.**
- *É legal porque pode montar a figura de imediato e pode ver todos os dados da figura, calcular*.
- *É bom e ruim. Bom porque facilita e ruim porque não é a mesma coisa do papel que você faz na mão.*

- *É manero! É uma experiência nova para mim. Pela primeira vez mexo no computador com coisas de aula.*

Pelas falas pode-se constatar que, de um modo geral, eles gostaram de trabalhar com o programa e perceberam o seu potencial, mesmo sem conhecê-lo completamente. Quando eles dizem: *"A gente aprende fazendo, construindo, não fica só olhando para o quadro"* são traduzidas, de forma simples e intuitiva, as teorias construtivistas de Piaget.

Apesar do entusiasmo natural, eles se mostraram disciplinados e responsáveis. Ao final da sessão, todos conseguiram concluir a atividade, registrando-se, apenas um aluno com grande dificuldade no manejo do programa e na execução das atividades. Mesmo assim, ele conseguiu concluir tendo uma ajuda mais intensa do professor.

d) Quarto Encontro

- Atividade de resolução de problemas

Relato:

Neste encontro foram apresentadas duas questões para os alunos: o problema da ilha (resolvido pelos professores) e o pedido da demonstração da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.

O problema da ilha não foi resolvido por nenhum dos alunos, como era de se esperar. Apenas o fato da soma das distâncias do ponto aos lados do triângulo ser constante pode ser verificado no ambiente, através da movimentação da figura. Registram-se, no entanto, duas colocações relevantes das duplas: *a sugestão de que o triângulo fosse dividido em três partes* e a de que *a soma não muda porque a área do triângulo ACB é a soma das áreas dos triângulos APC, APB e CPB.* São indícios de um certo entendimento do encaminhamento correto da resolução do problema, o que surpreende em alunos que revelaram nenhuma prática com as demonstrações.

Quanto à demonstração da soma dos ângulos internos de um quadrilátero como 360°, duas duplas de alunos se aproximaram da solução afirmando que *a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180° e como os quadriláteros formam dois triângulos, concluímos que a soma de seus ângulos é 360°.*

e) Quinto Encontro

- Término das atividades pelos alunos.
- Avaliação geral do trabalho.

Relato:

Os alunos dedicaram o encontro para completar parte das tarefas que estivessem incompletas para, então, entregar o relatório à professora da turma. A seguir, uma ficha de avaliação do encontro foi preenchida por eles e o projeto foi encerrado com as habituais palavras de agradecimentos por parte dos professores. Uma das questões da prova bimestral de Matemática (em anexo) versava sobre o assunto explorado, com vista a uma análise absoluta do desempenho dos alunos após o trabalho em ambiente de geometria dinâmica.

A professora da turma, numa avaliação posterior do projeto, considerou que a aplicação do trabalho superou as expectativas. Cita a ocorrência dos seguintes fatores indicando o saldo positivo do trabalho e a consecução dos objetivos:

- A participação ativa de praticamente todos os alunos no processo, o que pode ser observado pelo empenho na resolução das questões, pelos questionamentos levantados e pelas solicitações constantes destes nos momentos de embaraço com o programa ou de dúvida de conteúdo.
- A resolução das atividades propostas, por todos.
- O não uso do computador para outros fins durante os trabalhos, o que é algo comumente observado em trabalhos de laboratório.

- O comportamento da turma no laboratório, o que de certa forma surpreende por ser um ambiente desconhecido para eles e propício à conversa, pela natural descontração.
- Os registros dos alunos na ficha de avaliação geral do Projeto, revelando uma constatação de melhor compreensão do conteúdo tratado, quando não a primeira compreensão.
- A opinião favorável dos alunos ao uso do programa, sugerindo, inclusive, a solicitação de novos encontros e a inclusão dessa forma de trabalhar a Geometria à prática do Colégio em todas as séries.
- O bom resultado dos alunos na questão da prova bimestral (em anexo) que versava intencionalmente sobre o assunto trabalhado. Vinte alunos, dentre os vinte e oito que resolveram a questão, a acertaram, o que significa cerca de 70% da turma.

A professora Déa, complementando a análise, coloca como aspectos a serem considerados num trabalho dessa natureza: um maior uso do programa antes da aplicação das atividades para agilizar os trabalhos e permitir uma maior concentração na parte do conteúdo matemático em si; a observação da exigência de um trabalho anterior fora do ambiente, visto que alguns conhecimentos geométricos são requisitados para seu uso dentro dessas atividades realizadas; o uso do ambiente favorece e enriquece a aprendizagem, mas ele é um dos recursos a ser usado e, de forma alguma, o único.

6.3.4 Avaliação Geral dos Projetos

Os Projetos atingiram seus objetivos. Em relação aos alunos isto pode ser verificado pela sua participação e motivação nas aulas, pelo bom resultado observado na resolução dos exercícios, pelos seus depoimentos. No caso do Projeto-Rio tal constatação também pode ser feita através do resultado da questão sobre o assunto constante na prova bimestral dos alunos.

Em relação aos professores, percebeu-se que os mesmos aplicaram as atividades com desenvoltura e segurança suficientes para a condução dos trabalhos. Quando não conseguiam esclarecer as dúvidas dos alunos que surgiam, em relação ao uso do ambiente, solicitavam a ajuda do pesquisador de forma natural sem nenhum constrangimento. A observação de ambos professores aplicadores foi de que, apesar do ainda pequeno controle sobre o uso do ambiente, já era possível planejar o seu uso, mesmo sem a presença do pesquisador, mas reconhecem que precisam ter uma referência constante para apoio e consulta nos momentos de dúvida. Pretendem fazer uso do programa em suas aulas futuras de geometria e este pesquisador se colocou a disposição para auxiliá-los, mesmo que à distância.

O trabalho com os alunos, embora optativo, mostrou-se como uma face importante da intervenção por favorecer a consolidação entre a teoria e a prática de uma nova estratégia pedagógica para o professor, na sua tentativa de adequar e/ou incorporar o uso das demonstrações no ensino-aprendizagem da Geometria.

Capítulo 7. Conclusões e Perspectivas

Tem horas em que, de repente, o mundo vira pequenininho,
Mas noutro de repente ele já torna a ser demais de grande,
outra vez. A gente deve de esperar o terceiro pensamento.

João Guimarães Rosa

Este trabalho teve como objetivo investigar a contribuição dos ambientes de geometria dinâmica na formação de professores de Matemática, no sentido de adequar e intensificar o uso das demonstrações no ensino da Geometria.

As reflexões teóricas confirmaram que o ensino da Geometria, numa abordagem dedutiva, tem sido negligenciado quando não omitido. Uma das causas apontadas para isso é o despreparo do professor. Muitos professores não detêm conhecimentos suficientes, em Geometria, para desenvolverem um bom trabalho com seus alunos bem como não buscam ou desconhecem recursos que possam melhorar suas práticas.

A metodologia adotada no presente trabalho procurou alcançar a formação do professor em aspectos que se relacionam com essas necessidades. Concebeu-se uma situação em que o professor participante vivenciasse dois momentos: no primeiro, quando na posição de aluno, assumindo e resolvendo problemas concebidos por outra pessoa, sentindo e superando eventuais dificuldades através de um processo de construção do conhecimento voltado para as demonstrações em Geometria; num segundo momento vivenciando a prática de uma nova metodologia de ensino, percebendo-a como uma nova e eficiente proposta metodológica para o ensino das demonstrações.

Assim, com base na reflexão teórica, foi concebida uma situação didática em ambiente informatizado que realçou: a importância do meio na superação das dificuldades apontadas para o ensino das demonstrações, permitindo que o processo de *desequilíbrio x reflexão x* *ação x reequilíbrio* acontecesse provocando novas aprendizagens e a evolução do pensamento geométrico; o potencial da tecnologia informática no desenvolvimento cognitivo do professor; o desenvolvimento da habilidade do professor em utilizar esses novos recursos tecnológicos; a importância da seleção de conteúdos de acordo com a realidade do professor e em consonância com as orientações curriculares.

Considerando, ainda, as propostas de alguns autores (PONTE, 2003; VALENTE, 1993; BORBA & PENTEADO, 2001), acerca da formação de professores, de que para que haja mudanças é preciso que o professor queira mudar, discussões acerca de temas relacionados às demonstrações e ao seu ensino foram promovidas. Proporcionou-se, assim, ao professor uma reflexão sobre tais conhecimentos e sobre a sua própria prática pedagógica, estimulando-se mudanças em suas concepções sobre as demonstrações com possíveis implicações em sua prática pedagógica.

A presente investigação compreendeu dois estudos de campo no intuito de enriquecer a análise pela comparação entre os dados obtidos em duas diferentes realidades. Um dos grupos constituiu-se de oito professores da rede pública de Angra dos Reis e o outro de cinco professores atuantes numa escola pública do Rio de Janeiro.

Observaram-se avanços naqueles que participaram das sessões programadas. A exigência do ambiente de geometria dinâmica na utilização das propriedades da figura para sua construção e o dinamismo desta figura possibilitado pela sua manipulação na tela, através do recurso do arrastar, favoreceram a consolidação da representação correta do objeto geométrico com a fusão de suas dimensões figural e conceitual.

Através do potencial do ambiente, instalado o processo espiral de *ações, formulações, validações, ações* desencadeado pelas investigações realizadas, tornava-se concreto, para os professores, o controle dos *fatos declarados* e dos *fatos estáveis implícitos* relativos ao problema tratado, favorecendo-lhes a compreensão do significado das demonstrações.

Com esse controle, era assim conquistada uma das condições para o desenvolvimento do processo das demonstrações.

A utilização do modelo de situação didática proposta pela Escola Francesa de Didática da Matemática, ao permitir que fossem contemplados os papéis reservados a aluno e professor no processo ensino-aprendizagem, possibilitou uma realização didática em que se aplicaram os pressupostos da teoria piagetiana. Pois, dessa maneira, os alunos (professores participantes) foram os construtores de seu conhecimento, tendo no professor (pesquisador) um provocador e mediador e, assim, atingindo saberes dentro da Geometria, enquanto um modelo teórico, e ascendendo relativos patamares de pensamento geométrico.

Tais constatações puderam ser observadas na validação das hipóteses resultante do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* e foram corroboradas pelo estudo comparativo dos resultados do pré e pós-teste dos níveis de compreensão do pensamento geométrico, segundo Van Hiele (1986).

Este estudo revelou que todos os participantes do Estudo de Campo 1 ascenderam ou se mantiveram nos seus patamares de nível de compreensão do pensamento geométrico. Houve uma melhora sensível, para alguns, na mudança de seu nível. Dentre eles, um professor conseguiu passar do nível 2 (análise de figuras e identificação de suas propriedades) para o nível 3 (dedução informal e inclusão de classes), outro passou do nível 2 para o 4 (dedução formal), e um terceiro passou do nível 3 para o nível 4. Para outros, apesar dos avanços qualitativos observados, não houve alteração expressa numa mudança de nível, mas numa mudança de seu grau de aquisição de determinado nível. A manutenção no nível quatro, para dois professores, já era a proposta deste trabalho quando objetivava o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo aliado à habilidade de construir demonstrações. Outros dois professores se mantiveram no nível 3 e um professor se manteve no nível 2 mas avançando para uma aquisição intermediária do nível 3. Registra-se que este é um professor sem formação universitária o que justifica, de certo modo, suas dificuldades podendo se considerar até mesmo um avanço a sua aquisição intermediária do nível 3.

No cômputo geral, em relação ao nível 4 pretendido, o trabalho foi finalizado da seguinte maneira: um professor não o atingiu; um professor com baixa aquisição; dois com aquisição intermediária; dois com sua alta aquisição e dois atingiram sua aquisição completa, ou seja, quatro dos oito participantes apresentaram-se no nível 4, após os trabalhos.

Quanto ao Estudo de Campo 2, apenas um dos cinco professores propostos participou de todo o processo realizado da investigação, concluindo parcialmente os trabalhos. O contrato didático estabelecido inicialmente não foi cumprido pelos quatro professores desistentes e, dentre as possíveis causas para tal, pode-se sugerir: a não priorização pelos professores em participar de tais trabalhos; a época de final de ano, aparentemente não propícia para o trabalho, por significar um momento de maiores compromissos para os professores; falhas no estabelecimento do contrato didático. No estudo comparativo dos resultados dos pré e pós-testes, observou-se que o professor participante, apesar de iniciar no nível 3, apresentou-se após os trabalhos no nível 2. Tal resultado não foi condizente com o desempenho do professor nas tarefas executadas e tão pouco com a aplicação por ele realizada com seus alunos. Pode-se sugerir como causa para tal incoerência, uma possível despreocupação do professor com a resolução dos testes.

De um modo geral, pode-se afirmar que nem sempre a produção final das demonstrações se apresentou satisfatória para todos, mas tentativas e insucessos são aspectos que fazem parte de qualquer processo de construção, assim como da construção matemática. Mas, apesar disso, pode-se sugerir que para os professores participantes, confirmou-se a hipótese de que a utilização de ambientes de geometria dinâmica, no processo ensino-aprendizagem da Geometria, estimula a evolução dos níveis de pensamento geométrico com simultâneo desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo permitindo uma melhor compreensão do significado das demonstrações, bem como desenvolvendo competências para sua elaboração.

Por outro lado, a dinâmica utilizada nos encontros envolvendo discussões e reflexões sobre aspectos relacionados com o ensino-aprendizagem das demonstrações contemplou princípios que devem orientar a formação de professores segundo pesquisadores do assunto (PONTE, 2003; GARCIA, 1998; VALENTE, 1996; NÓVOA, 1995). Destaca-se que a prática reflexiva e a participação crítica devem ser as orientações prioritárias na formação de professores e essa prática reflexiva deve repousar sobre uma base de competências profissionais que inclua a utilização de novas tecnologias informáticas na educação.

Na análise das concepções iniciais dos professores acerca das demonstrações, percebeu-se, pelo grande número de categorias estabelecidas, que não havia uma concepção comum a esses professores acerca das demonstrações. Muitas idéias foram colocadas que, embora se relacionassem com as demonstrações, revelaram-se individualmente insuficientes ou incompletas para explicá-las. Justifica-se, assim, um dos objetivos deste trabalho que é o de favorecer a compreensão do significado das demonstrações pelos professores. Após os trabalhos, verificou-se, de um modo geral, um novo olhar para as demonstrações, entendidas agora como um processo e não simplesmente como um resultado. Processo este que pode e deve ser desenvolvido paralela e gradativamente ao ensino da Geometria, com um formalismo adaptado aos níveis de desenvolvimento do aluno.

Os professores identificaram os ambientes de geometria dinâmica como um rico e eficiente recurso que vem contribuir para a efetivação de uma proposta de ensino que privilegia uma aprendizagem interativa, onde o sujeito é o agente maior de sua aprendizagem. Reconheceram e lamentaram, no entanto, que a disponibilidade de tal recurso não é uma realidade na maioria das situações de escolas públicas, como é o caso de Angra dos Reis.

Assim, numa análise comparativa dos dois depoimentos (antes e depois da seqüência) pode-se sugerir uma mudança na visão dos professores sobre o ensino das demonstrações.

O primeiro passo para uma mudança pode ser a consciência de uma concepção errada a respeito de algo. É a instalação do *desequilíbrio*, segundo Piaget. Analisando depoimentos dos professores, tem-se nesse sentido, que: "[...] *a conscientização da prática de um ensino tradicional da matemática, fora da realidade do aluno e com ênfase na memorização"*; "[...] *percepção da necessidade de novas práticas onde o aluno experimente, verifique suas conjecturas, formando cadeias de raciocínio mediadas pela lógica e pela dedução"*, podem representar esse primeiro passo para o professor.

O segundo passo pode ser visto como o de se colocar pronto às mudanças, buscando a devida *assimilação* e *acomodação.* Essa idéia pode ser percebida em colocações como: "[...] e*star aberto ao novo"* por um dos professores.

A *adaptação*, garantindo o *reequilíbrio,* pode aqui ser vista como a percepção de novos caminhos para trabalhar as demonstrações. Os caminhos apontados pelos professores, em seus depoimentos, envolveram aspectos didáticos e cognitivos do ensino das demonstrações. Foram eles: "[...] *uma melhor compreensão das demonstrações pode ser obtida através da construção das figuras e conseqüente conceituação correta do objeto geométrico";* "[...] *reconhecimento da importância do computador no ensino das demonstrações"; "A didática muda como conseqüência do aumento de conhecimentos".*

Quanto ao Estudo de Campo 2, não foi possível fazer uma apreciação sobre possíveis mudanças nas concepções do professor participante com base em seus depoimentos, pois os mesmos, tanto no questionário inicial como no final, foram omitidos ou não expressaram significativamente suas concepções acerca das demonstrações e de seu ensino.

A natureza das atividades elaboradas pelos professores sugeriu, também, uma postura em relação à Matemática que buscou propiciar aos alunos um ambiente de aprendizagem onde eles tenham oportunidade de investigar, de conjecturar, de experimentar, de redescobrir, de argumentar, de elaborar demonstrações. Sete professores, seis do Estudo de Campo1 e um do Estudo de Campo 2, conseguiram elaborar a atividade em questão e dois desses efetivaram a aplicação com seus próprios alunos. As aplicações transcorreram de acordo com o programado e os respectivos assuntos, abordados em turmas do Ensino Fundamental, foram: variações na área de paralelogramos (8ª série) e propriedades das cevianas de um triângulo isósceles (7ª série). Na ocasião de ambas as aplicações, os professores contaram com o apoio e a participação deste pesquisador, antes e durante os trabalhos.

Considerando esse enfoque na análise de mudança nas concepções dos professores, não se pode negar ao professor participante do Estudo de Campo1 uma atitude favorável à prática das demonstrações no ensino da Geometria, numa abordagem construtivista, através dos ambientes de geometria dinâmica.

Pode-se, assim, sugerir que foi verificada a segunda hipótese dessa pesquisa de que a utilização de ambientes de geometria dinâmica, quando num processo de formação de professores, através de competências desenvolvidas e da prática de novas metodologias, contribui para uma reflexão sobre as demonstrações e seu ensino, favorecendo uma retomada de posição favorável a sua prática pedagógica.

Algumas considerações necessitam, agora, ser feitas a partir da comparação pretendida entre os dois estudos de campo aplicados. Inicialmente, é necessário ter presente que num processo de formação continuada de professores, quando se planejam ações a serem desenvolvidas com os mesmos, a expectativa em torno de seu envolvimento deve levar em consideração que eles reagem às ações de acordo com fatores pessoais tais como concepções e sentimentos. Dessa forma, enquanto a participação dos professores do Estudo de Campo 1 foi efetiva, a dos professores do Estudo de Campo 2 não aconteceu conforme se previa. Dos cinco professores iniciantes, apenas um cumpriu parcialmente o planejamento, então condensado e reformulado para a aplicação em questão. Em virtude dessa não participação efetiva dos professores, não se pode, inclusive, concluir a respeito das possíveis implicações do trabalho em ambiente de geometria dinâmica, para eles. Pode-se sugerir, entretanto, como um dos motivos para o interesse e o compromisso dos professores do Estudo de Campo 1, o fato de não terem tantas oportunidades de formação continuada, na forma presencial, como os professores de um grande centro, como o Rio de Janeiro.

Para a presente pesquisa tal estudo se constitui, de forma especial, numa oportunidade para se refletir sobre cuidados a serem tomados em relação a pesquisas desenvolvidas junto a professores. Ao lado do esmero na concepção das atividades a serem desenvolvidas, muito tem que ser refletido e programado acerca dos fatores que envolvam a motivação, a aceitação e o envolvimento desses participantes nas atividades para que o experimento possa ser realizado a contento. A época em que vai ser realizado também pode interferir na participação dos professores; o segundo semestre parece não ser o mais indicado para tal. O número de professores participantes deve ser também levado em consideração, ele deve ser tal que proporcione uma probabilidade maior de se efetivarem as propostas de trabalho, mesmo com a ocorrência da desistência de alguns.

Na direção de outros cuidados a serem tomados, é preciso, dentro da proposta de enfatizar as demonstrações no ensino da Geometria, estar atento aos riscos do trabalho em ambientes de geometria dinâmica. Nesses ambientes, pela facilidade da verificação empírica dos fenômenos observados, ocorre a possibilidade da predominância da comprovação indutiva neste processo. É difícil, às vezes, para aquele que ainda se encontra em fase de transição de patamar de conhecimento, diferenciar entre uma constatação empírica proporcionada pelo dinamismo da figura e uma argumentação dedutiva que é a pretendida nesse trabalho. As propostas das questões devem ser tais que encaminhem o raciocínio do usuário para buscas além destas satisfeitas pela verificação empírica. Neste sentido, a demonstração tomada na sua função de explicação atende perfeitamente esse papel.

Foram detectadas dificuldades comuns nos dois grupos de professores, evidenciadas no pré-teste e no processo de resolução das atividades da seqüência didática, tais como a compreensão das regras dos elementos que compõem o discurso matemático (definições, teoremas, demonstrações), a identificação e distinção entre hipótese e tese, a habilidade em elaborar demonstrações. Dessa forma, foi verificado para a maioria dos professores de ambos os grupos o despreparo para o trabalho com as demonstrações, seja em termos de conteúdo seja na posse de metodologias apropriadas para tal. O abandono ou à inadequação do uso das demonstrações no ensino-aprendizagem da Geometria tem uma relação direta com o despreparo do professor.

Entretanto, tendo em vista os avanços observados em seus níveis de pensamento geométrico e em suas concepções, após a realização das atividades, pode-se sugerir que o trabalho no ambiente de geometria dinâmica se constitui numa alternativa eficiente no processo de formação de professores no sentido de otimizar o uso das demonstrações, especialmente porque nesses ambientes é possível contemplar tanto os aspectos conceituais quanto os aspectos didáticos da geometria.

A Educação, a Informática e a Psicologia Cognitiva, apesar de áreas distintas, podem e devem ser trabalhadas juntas, favorecendo os resultados educacionais, pois a intencionalidade na aquisição de novos conhecimentos é um fator comum às três. A Informática, nesse caso, estaria não só atuando sobre o conhecimento, mas oferecendo novas ferramentas que auxiliem na aprendizagem, estimulando a construção do conhecimento e, particularmente, na Matemática, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e provocando mudanças nas concepções de seu ensino. Ratificamos, ainda, que para a implementação do uso dos computadores na escola realmente aconteça como produto de um processo de construção do conhecimento, é preciso que se desenvolva um projeto integrando o computador em todos os segmentos da escola (a comunidade de pais, alunos, professores, administradores) como colocam Valente (1996), Levy (2001) e outros autores.

Finalizando, destaca-se que o presente trabalho pretende constituir-se como uma parcela de contribuição dentro do que é necessário para que as demonstrações possam fazer parte integrante do processo de construção do conhecimento geométrico, melhorando a qualidade do processo de ensino-aprendizagem da Geometria.

São sugestões para futuras perspectivas de estudo nesta direção:

a) Incluir o trabalho efetivo dos professores com seus alunos na metodologia a ser desenvolvida numa pesquisa sobre demonstrações com uso de recursos computacionais.

b) Num trabalho com demonstrações, em ambientes de geometria dinâmica, propor além de atividades estruturadas, atividades mais livres em que os professores tenham mais oportunidades de desenvolver sua criatividade e seu sentido de exploração e descoberta.

c) Abordar, especificamente, na pesquisa sobre demonstrações em ambientes de geometria dinâmica, a interpretação discursiva de problemas envolvendo a distinção entre as hipóteses e a tese de um teorema.

d) Refazer a investigação com um número maior de participantes e sendo eles de um grande centro, como o Rio de Janeiro.

Referências Bibliográficas

ALVES, G.S.; SAMPAIO, F.F. **O Modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica**. In: I Simpósio Sul-Brasileiro de Matemática e Informática. Anais Eletrônicos**...** Curitiba: Uniandrade. 2002.

__________ ; BARRA FERREIRA, E.; COSTA, R. J. M; SOARES, A B. & LIMA, C. **A perspectiva construtivista e os *softwares* de geometria dinâmica**: compreendendo suas correlações. In: III CAREM – Conferencia Argentina de Educación Matemática. Anais... Salta – Argentina: UNSA – Universidad Nacional de Salta, 2003.

___________. **O uso de softwares de geometria dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas**: uma aplicação em alunos do ensino médio. UFRJ- IM- NCE: Dissertação (Mestrado em Informática), 2004.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas**. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1998.

ARAÚJO, J.F.S. **Uma proposta de formação continuada de professores via Internet e por meio da discussão de questões de provas e testes**. UFRJ- IM- NCE: Dissertação de Mestrado em Informática, 2004.

ARTIGUE, M. **Épistemologie et Didactique**. RDM, vol. 10, n.23, 1990.

BALACHEFF, N. **Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics.** In: Mathematics, Teachers and Children, 216-235, Hodder&Stughton, Londres: 1988.

BARRA FERREIRA, E.; SOARES, A B. **Os s*oftwares* de geometria dinâmica e a representação do conhecimento geométrico na formação de professores**. VIII Seminário de Psico-Pedagogia. Universidade Estadual do Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 2004.

____________________ ; SOARES, A B. & LIMA, C. **A contribuição dos s*oftwares* de geometria dinâmica na representação do conhecimento geométrico num curso de formação de professores**. I Congresso Latino-Americano de Psicologia. São Paulo, São Paulo, 2005a.

____________________ ; SOARES, A B. & LIMA, C. **A representação do conhecimento geométrico e o raciocínio lógico-dedutivo de professores de Matemática num ambiente de geometria dinâmica.** IV Congresso Norte Nordeste de Psicologia. Universidade Federal da Bahia: Salvador, 2005b.

____________________ ; SOARES, A B. & LIMA, C. **A representação do conhecimento e as concepções de professores de Matemática num ambiente de geometria dinâmica**. WIE-Workshop sobre Informática na Escola/SBC, São Leopoldo, Rio Grande do Sul, 2005c.

BARRA FERREIRA, E.; SOARES, A B. & LIMA, C. **A representação do conhecimento e as concepções de professores de Matemática num ambiente de geometria dinâmica**. Revista Científica da UBM, Universidade de Barra Mansa, Barra Mansa, 2005d.

BARROSO, I.C. **Geometria dinâmica:** novas perspectivas para o aprendizado da Geometria. PUC-RIO: Dissertação (Mestrado em Matemática), 2000.

BELFORT, E.; GUIMARÃES, L. C. **Roteiros de laboratório.** Pró-Ciências/Convênio CAPES/FAPERJ. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática – UFRJ/LabMa/ Projeto Fundão. 1999.

__________________________________; BARBASTEFANO, R. **Geometria dinâmica e demonstrações na formação continuada de professores.** Em Anais do Cabri World 99, volume eletrônico. São Paulo: PUC-SP, 1999.

_____________. **Tabulae e mangaba:** geometria dinâmica. In: VII ENEM Nacional de Educação Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro: 2001.

BICUDO, I. **Demonstração em matemática**. Bolema, Ano 15, nº18, p.79-90, 2002.

BKOUCHE, R. **De la Démonstration**. IREM de Lille.1989.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Editora Autêntica. In: Coleção Tendências em Educação Matemática, 2001.

BORGES NETO, H. **O Papel da Informática Educativa no desenvolvimento do raciocínio lógico**. Disponível em: http://www.multimeios.ufc.br/producao_cientifica/pre_print.php . Acesso em: 20 de abril de 2004.

BOYER, C. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1998.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.** Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM*)*. Grenoble, France : Editions la Pensée Sauvage, vol 7. n.2, p. 33-115. 1986.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique.** Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

COSTA, R. J. M. **O jogar e aprender*:*** a Informática no Ensino de Álgebra Elementar. UFRJ- IM- NCE: Dissertação (Mestrado em Informática), 2004.

CYSNEIROS, P.G. **Fenomenologia das novas tecnologias na educação**. Revista da FACED. Salvador. Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, n.7, p.89-107, 2003.

DE VILLIERS, M. D. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o sketchpad.** In: Educação e Matemática, nº 62, p. 31-36. Lisboa, Portugal, 2001.

DOMINGUES, H. **A demonstração ao longo dos séculos**. Bolema, Ano 15, nº18, p.55-67, 2002.

DUVAL, R. **Approche cognitive des problèmes de géométrie.** Annales de Didactiques et de sciences cognitives, IREM de Strarsbourg v.1, p.57-74, 1988.

_________. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang, 1995.

ECHEVERRÍA, M.P.P. **A solução de problemas em matemática**. In: POZO (org.). A Solução de Problemas. Porto Alegre: Artmed, cap.2, p. 43-65, 1998.

ELIA, M.F. **Retrospectiva e expectativas sobre políticas públicas para a infusão das Tecnologias da Informação e da Comunicação no contexto educacional.** IX ENEF – Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Física, 2004.

FISCHBEIN, E. **The theory of figural concepts**. In: Educacional Studies in Mathmatics, Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, nº 24/2, p.139-162, 1993.

FLAVELL, J. H.; MILLER, P. H.; MILLER, S. A. **Desenvolvimento cognitivo.** Tradução: Cláudia Dornelles. Porto Alegre: Artmed, 1999.

GANDRA, H.; COSTA, J. M.; ZAVALETA, J.; LIMA, C. **Uma experiência de Informática aplicada à Educação com alunos de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.** In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004.

GARCIA, C. M. **Formação de professores para uma mudança educativa**. Coleção ciências da educação século XXI. Portugal: Porto Editora, 1999.

GARNICA, A. V. **As demonstrações em Educação Matemática***:* um ensaio. Bolema, Ano 15, nº18, p. 91- 99, 2002.

GOUVÊA, F.A. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração:** uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do ensino fundamental. PUC/SP: Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, 1998.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** UFRGS: Dissertaçao de Tese (Doutorado em Informática na Educação), 2001.

_______________ ; SANTAROSA, L.M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso Ibero-americano de Informática na Educação, Brasília, 1988. Disponível em: http://www.niee.ufrgs.br/ribie98/TRABALHOS/117.PDF. Acesso em 10 de setembro de 2004.

GUIMARÂES, L.C**. Ferramentais computacionais para o ensino de matemática à distância**. In: VII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.

HANNA, G. **Some pedagogical aspects of proof**. Interchange, 21, n.1, 6-13, 1990.

_________ ; JAHNKE, H. N. **Proof and proving**. International Handbook of Mathematics Education: Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, p.877-908, 1996.

HANNA, G. **Proof, explanation and exploration:** an Overview. Educational Studies in Mathematics: Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, p.5-23, 2000.

HERSHKOWITZ, R. **Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria**. Bolema-GEPEM: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. n.32, p.3-31, 1994.

HOFFMANN, D. S. **Relato de experiência**: a geometria e o cabri-géomètre na licenciatura em matemática da UFRGS. In: Congresso Sul-Brasileiro de Informática na Educação: Áreas Exatas, Florianópolis. **Anais**. Florianópolis: UNISUL, 2000. CD-ROM.

HOYLES, C.; JONES, K. **Proof in dynamic geometry contexts**. In: Mammana, C. e Villani, V. (editores), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century- An ICMI Study Series, vol.5. London, England: Kluwer Academic Publishers, p.121-128, 1998.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S. **Conjecturas e provas em geometria**: uma nova visita à ilha do triângulo eqüilátero. Educação e Matemática: n.45, p.44-50, nov/dez, 1997.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. **Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure.** In: Balacheff, N. e Vivet, M. (editores), Didactique et Intelligence Artificielle, Grenoble, France : La Pensée Sauvage, 1994.

______________. **Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving**. In: Educational Studies in Mathematics, n.44: p.151–161, 2000.

LÉVY, P. **Tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da Informática. São Paulo SP: Editora Ática, São Paulo, 2001.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista, SBEM, São Paulo. n. 4, p.3-13, 1995.

MAIOLE, M. **Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC/São Paulo, 2002.

MELLO, E. **Demonstração**: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de geometria. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 1999.

MINGA, V. **A Minha experiência com o cabri**. Educação e Matemática, n.37, p.9-12, jan-mar, 1996.

NASSER, L. **Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil.** Tese de Doutorado, King's College, Universidade de Londres, 1992.

__________; SANT'ANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, IM/UFRJ, 1998.

__________; TINOCO, L. A. (coordenação). **Argumentação e provas no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: UFRJ-Projeto Fundão, 2003.

NÓVOA, A. **A formação de professores e profissão docente**. In: Nóvoa, Antônio (Coord.). Os Professores e sua Formação. Tradução de Graça Cunha, Cândida Hespanha, Conceição Afonso e José A. S. Tavares. Portugal: Porto Editora, p. 13-33, 1995.

PAIS, L.C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Coleção Tendências em Educação Matemática. Autêntica, Belo Horizonte, 2001.

PAPERT, S. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da Informática. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artmed, 1988.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN). Ministério da Educação. Brasília. 1996.

____. Ministério da Educação, Matemática - Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, 1998.

PAVANELLO, R.N. **O abandono do ensino da geometria no Brasil**: causas e conseqüências. In: Revista Zetetiké. UNICAMP: Campinas, SP, ano 1, n.1, p. 7-17, 1993.

PÉRISSE, P. **A Informática como mediadora de uma sociedade de conhecimento*:*** transformações na cultura escolar**.** Fórum Mundial de Educação: Porto Alegre, 2001.

PERRENOUD, P. **Formar professores em contextos sociais em mudança*:*** prática reflexiva e participação crítica. Revista Brasileira de Educação. n.12, p.5-21, set/out/dez, 1999.

PIAGET, J. **Epistemologia genética.** Editora Vozes: Petrópolis, 1973.

_________. **Desenvolvimento da inteligência**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1983.

_________. **Abstração reflexionante** - relações lógico-aritmética e ordem das relações espaciais. Tradução: Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artmed, 1995.

POLETTINI, A. F. F. **História de vida relacionada ao ensino da matemática no estudo dos processos de mudança e desenvolvimento de professores.** CEMPEM-FE/UNICAMP, Zetetiké, Campinas, v.4, n.5, p.29-48, 1996.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Primeira reimpressão. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1986.

PONTE, J. P. **O desenvolvimento profissional do professor de matemática**. In: Educação e Matemática, 31, pp. 9-12 e 20, 1994.

___________; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. **O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional**. In D. Fiorentini (Ed.), Formação de professores de matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares, p. 159-192. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

POZO, J. I. *(*Organizador). **A solução de problemas.** Tradução de Beatriz Affonso Neves. ArtMed, Porto Alegre, 1998.

POZO, J. I. **Aprendizes e mestres:** a nova cultura da aprendizagem. Tradução: Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2002.

PURIFICAÇÃO, I.C. **Cabri-géométre e a teoria de Van Hiele:** possibilidades e avanços na construção do conceito de quadrilátero.Curitiba: UFPR, Dissertação (Mestrado em Educação), 1999.

REALLE, G.; ANTISSERI, D. **História da filosofia.** São Paulo: Edições Paulinas, 1991.

REZENDE, J.; NASSER, L. **Kinds of argumentation used in geometry**. Atas do PME-18, vol.1, p.66, Lisboa, 1994.

SHOENFIELD, A. H. **Mathematical logic**. Addison-Wesley, 1967.

_________________. **Learning to think mathematically:** problem solving, metacognition and sense making in mathematics**.** In Handbook of Research on Mathematics teaching and learning. Grouws, A. D., 1984.

SILVA, C. M. T. **O construtivismo nos ambientes de aprendizagem baseados na hipermídia**. In: VIII SBIE - Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1997.

SILVA, J. J. **Demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática**. Bolema, Ano 15, nº18, p.68-72, 2002.

SOARES, A.B. **Representação e representação mental**. Relatório Técnico. Rio de Janeiro: NCE-UFRJ, n.05/03, p.1-18, 2003.

STERNBERG, R.J. **Psicologia cognitiva**. Tradução: Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: Artmed, 2000.

UNDERWOOD, J.D.M.; UNDERWOOD, G. **Computers and learning***:* Helping Children Acquire Thinking Skills. Oxford: Basil Blackwell, 1990.

VALENTE, J.A . **Computadores e conhecimento**: repensando a educação. SP: Campinas / NIED, Gráfica da UNICAMP, 1993.

______________. **O professor no ambiente logo:** formação e atuação. Campinas: Gráfica da UNICAMP/NIED, 1996.

______________; ALMEIDA, F. J. **Visão analítica da Informática na Educação no Brasil**: a questão da Formação do Professor. REVISTA BRASILEIRA DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, n.1, p.45-60, 1997.

______________. **O computador na sociedade do conhecimento**. SP: Campinas, Gráfica da UNICAMP / NIED, 1999.

VAN HIELE, P., **Structure and insight**. Orlando: Academic Press, 1986.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1990.

VIANNA, C. S. **O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1988.

VIEIRA, S.L. **Formação de professores em tempos de transição –** Um Ensaio Sobre Política Educacional no Brasil. Universidade de Brasília, 2004.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo/SP: Livraria Martins Fontes Editora, 1995.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam *softwares* de geometria dinâmica: s**uas características e perspectivas**.** Dissertação de Mestrado. UNESP-Rio Claro, 2002.

Apêndices

Apêndice A - Questionários Inicial e Final

1. Questionário Inicial

Dados dos Professores Participantes

1ª Parte: Informações Pessoais

Nome ____
Telefone ____
E-mail ____

Sexo
(   ) Masculino (   ) Feminino

Idade
(   ) de 21 a 30 anos (   ) de 41 a 50 anos
(   ) de 31 a 40 anos (   ) mais de 50 anos

Formação Acadêmica
(   ) Não graduado
(   ) Graduado em: (   ) Matemática
(   ) Física
(   ) Biologia
(   ) Outros. Qual? ______________________________
(   ) Pós graduado. Qual curso e instituição? ___________________________________

Cursos feitos ou outras observações que achar relevantes______________________
____

Tempo de experiência como professor de Matemática:
(   ) até 2 anos (   ) de 10 a 20 anos
(   ) de 2 a 5 anos (   ) mais de 20 anos
(   ) de 5 a 10 anos (   ) nenhum

Em caso positivo, em que graus de ensino já trabalhou:
(   ) Ensino Fundamental (   ) Ensino Superior
(   ) Ensino Médio

Quais as séries em que trabalha atualmente?____________________________________

Qual sua carga horária semanal de trabalho?____________________________________

Escolas em que trabalha:
(   ) estadual (   ) particular
(   ) municipal

Possui experiência com o uso do computador? Comente.__________________________
____

Você já o utilizou como um recurso em suas aulas?
(   ) muitas vezes   (   ) nunca
(   ) poucas vezes

O que o motivou a participar desses encontros?____
____

Você já trabalhou a Geometria em sala de aula?
(   ) sim   (   ) não

Em caso positivo, preencha a 2ª parte da ficha.

2ª Parte: Informações acerca do Ensino da Geometria

Na sua opinião, qual a importância da Geometria na formação do aluno?__________________
____

Você a tem trabalhado nas séries em que leciona?
(   ) sim   (   ) não

De que maneira você trabalha os conteúdos geométricos quando tem oportunidade para tal:
(   ) expositiva   (   ) grupos de trabalho
(   ) resolução de problemas   (   ) jogos
(   ) pesquisa   (   ) exclusivamente expositiva
(   ) outras

Quais as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem da Geometria?______________
____

Como você tem trabalhado essas dificuldades?
____

Qual o significado das demonstrações em Geometria? ________________________________
____

Você sente necessidade de utilizá-las em algum momento de seus estudos ou de sua prática pedagógica?
(   ) sim   (   ) não
Quando?____

Você encontra alguma dificuldade em utilizá-las?
(   ) sim   (   ) não
Diga, pelo menos, duas razões para utilizá-las em sala de aula e, pelo menos, duas para não utiliza-las.____
____

Outros comentários e observações:____

2. Questionário Final

Participante:____

1) Você sentiu dificuldade em trabalhar com o software *Tabulae*? Como?

____

____

2) Quanto aos conceitos de Geometria trabalhados no 1º módulo (circunferência, quadrado, triângulos), você os considera relevantes? Eles foram bem encaminhados?

____

____

3) Na sua opinião, o trabalho de construção das figuras geométricas contribui para a construção do conhecimento? De que maneira?

____

____

4) A utilização de um *software* de geometria dinâmica faz diferença no resultado de um trabalho como este, em relação ao uso das ferramentas tradicionais (compasso, esquadro)? Justifique.

____

____

5) Comente sobre a contribuição do uso do *Tabulae*, nas:

- Questões de resolução de problemas,
- Elaborações de demonstrações.

____

____

6) Houve alguma mudança na sua concepção sobre a possibilidade e a maneira de estar trabalhando as demonstrações com seus alunos? Comente.

____

____

7) O nosso trabalho contribuiu de alguma maneira para sua vida profissional (em relação aos seus conhecimentos, à sua didática)?

____

____

8) Este espaço é reservado para você acrescentar alguma sugestão ou algum comentário que julgar necessário.

____

____

Apêndice B - Roteiro de Atividades no Laboratório

Atividades de Construção

Atividade 1 - Circunferência

1) Crie um *segmento* qualquer para ser o raio da circunferência a ser construída.
Meça o *comprimento* do mesmo e o *identifique* como raio.
Clicando no botão *compasso*, trace a circunferência c de centro num ponto A qualquer e de raio com medida igual à do segmento criado.
Crie e *identifique* um ponto B sobre a circunferência c e construa o *segmento* AB, raio da circunferência.
Meça o *comprimento* do raio AB.

- Mova o ponto A e, depois, o ponto B. Que observa em cada um desses dois momentos?
- Explore o que acontece com o comprimento do raio AB, ao alterar o comprimento do segmento raio.

2) Clicando no botão *ponto/ponto sobre objeto* marque um ponto C sobre a circunferência c e trace o *segmento* BC.
Meça o *comprimento* do segmento BC (corda).

- Explore a medida da corda BC ao movimentar o ponto C sobre a circunferência e verifique qual a posição de C que torna BC com medida máxima.
- Meça o *ângulo* <ABC e explore a variação de sua medida movimentando o ponto C. Que acontece com esse ângulo quando C se aproxima de B?
  E quando C coincide com B?

3) Após *esconder* o segmento BC e o ponto C, construa a reta t, *tangente à circunferência* c, no ponto B.
Marque um *ponto sobre essa reta* tangente (ponto D).
Meça o ângulo <ABD.

- Explore a alteração sofrida pelo ângulo <ABD, ao movimentar o ponto B sobre a circunferência.
- Qual a relação que podemos sugerir haver entre a tangente ao círculo no ponto B e o raio no ponto de tangência?
- Como poderíamos demonstrar essa relação, garantindo a sua generalização?
- Usando essa relação, como poderia ser definido o procedimento para construir uma tangente a uma circunferência?
- Quantas tangentes ao círculo podem ser construídas a partir de um ponto?

Atividade 2 – Quadrado

Crie um *segmento* AB para ser um dos lados do quadrado.
Trace por A, uma *reta perpendicular* r ao segmento AB e, do mesmo modo, por B uma *reta perpendicular* s a AB.
Clicando no botão *compasso*, trace uma circunferência de centro em A e raio AB e marque o *ponto interseção* D da circunferência com a reta r.
Trace por D, a *reta perpendicular* p à reta r e marque C, *ponto de interseção* das retas p e s.

Em exibir, *esconda os objetos*: retas r, s e p.
Crie os *segmentos* AB, BC, CD e DA.
Em *formatar linha*, torne mais espessos os segmentos criados e coloridos no *formatar cor*.

- O polígono traçado é um quadrado? Por quê?
- Meça o *comprimento* de seus lados e ângulos. Experimente movimentar os seus vértices, um de cada vez e observe o resultado.
- Selecione os 4 vértices do quadrado e, em *construir-locus*, identifique-o como um *polígono*. A seguir, em *calcular*, solicite a sua *área*.

Arraste, depois, os vértices da figura e acompanhe o que acontece com a medida de sua área expressa na tela.

Atividade 3 - Triângulo Isósceles

1) Crie um *segmento* para ser o raio da circunferência a ser construída. Meça o *comprimento* do mesmo e o *identifique* como raio.
Clicando no botão *compasso*, trace a circunferência de centro no ponto C e de raio igual ao segmento raio.
Crie dois *pontos sobre objeto* (circunferência) e os *identifique* como A e B.
Construa os *segmentos* CA e CB e meça o *comprimento* deles.

- Que representam esses segmentos?
- Verifique o que acontece com as medidas de CA e CB ao movimentarmos o segmento raio inicialmente criado.

2) Crie o triângulo ABC, a partir da construção do *segmento* BA. Meça o *comprimento* de BA.

- Que tipo de triângulo é ABC? Por que?
- Meça os *ângulos* <CAB, <ACB e <CBA e veja o que acontece com o triângulo ABC, com o movimento dos pontos A ou B?
- Que elementos permanecem invariantes com as transformações assim provocadas em ABC?
- Que propriedade pode ser observada em relação aos ângulos dessa classe de triângulos?
- Como podemos garantir que essa propriedade é sempre válida para tal classe de triângulo?

Atividade 4 – Triângulo Eqüilátero

1) Crie um *segmento* AB para ser lado do triângulo.
Clicando no botão *compasso*, crie uma circunferência com centro em A e raio AB e outra com centro em B e raio BA.
Marque um *ponto interseção* C dessas duas circunferências.
Trace os *segmentos* AC e BC formando, assim, o triângulo ABC.
Em *formatar linha* torne mais espessos os lados de ABC.
Meça o *comprimento* dos lados e dos *ângulos* do triângulo em questão.

- Que tipo de triângulo é ABC?
- Experimente movimentar os vértices do triângulo e comente o resultado.
- Como você justificaria a permanência de elementos invariantes nesse triângulo?
- Que funções desempenham as circunferências nesta construção?

Atividade 5 – Triângulo Retângulo

1) Construa uma *circunferência* a de centro P. Identifique A, *ponto sobre objeto* nesta circunferência.
Trace a *reta r por dois pontos* A e P.
Identifique B, o outro *ponto interseção* de r com a circunferência.

- Qual o significado do segmento AB para a circunferência?

2) Em exibir, *esconda* a reta r e, depois, trace os *segmentos* AP e PB.
Usando a *calculadora*, efetue a adição AP + PB e a *indique* como equivalente à medida do diâmetro AB.

- Verifique o que ocorre com esses valores ao movimentar os pontos A ou P.

3) Marque C, *ponto sobre objeto* circunferência, construindo o triângulo ABC.
Meça os *ângulos* <ACB, <ABC e <BAC e os *lados* do triângulo.

- Que tipo de triângulo é ABC?
- Explore o que acontece com esse triângulo, movimentando-se os pontos A ou P? Algo permanece invariante?
- Investigue, agora, o que acontece com os dois objetos (circunferência e triângulo) quando se movimenta o ponto C? Algo ainda permanece invariante?
- De que modo isso pode ser garantido?

4) Trace o *segmento* CP e meça o seu *comprimento*.

- Que representa CP para o triângulo ABC?
- Mova os pontos A ou P e observe o que acontece com as medidas indicadas.
- Faça o mesmo movimentando, nesse momento, apenas o ponto C. Comente.
- Qual a relação que podemos sugerir existir entre as medidas desse específico elemento do triângulo ABC e as de seus lados?
- Essa conjectura implicaria na classificação dos triângulos APC e PCB?
- Nessas condições, de que forma podemos estar validando essa conjectura?

Atividades de Exploração

Atividade 6 – O Problema da Ilha

João tenciona mandar construir uma casa numa ilha com a forma de um triângulo eqüilátero. Cada lado da ilha é uma praia espetacular: numa delas a ondulação é a ideal para a prática do surf, outra é uma praia de águas calmas, formidável para nadar, e a terceira costuma ser freqüentada por umas garotas muito animadas e bonitas.

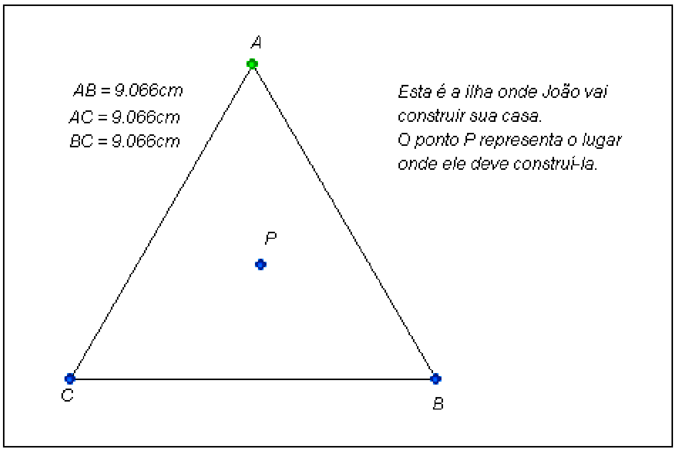
Ora, o João, que é um surfista de primeira, um exímio nadador e um amante de coisas belas, pretende que a sua casa fique num lugar tal que a soma das distâncias às praias seja a menor possível.

Onde deve o João mandar construir a sua casa?

Sugestões:

a) obtenha as distâncias da casa a cada um dos lados da ilha, incluindo as respectivas medidas;

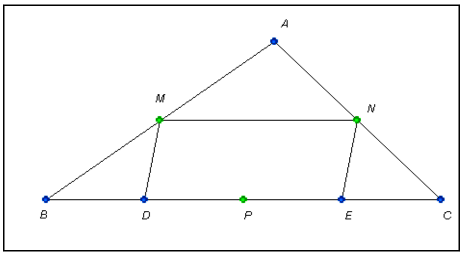
b) desloque a casa no interior da ilha e tente descobrir o que acontece à soma dessas três distâncias.



Atividade 7 – Quadrilátero inscrito no triângulo

Como deve ser o triângulo ABC para que o quadrilátero MNED inscrito tenha a seguinte regularidade: ser um quadrado?

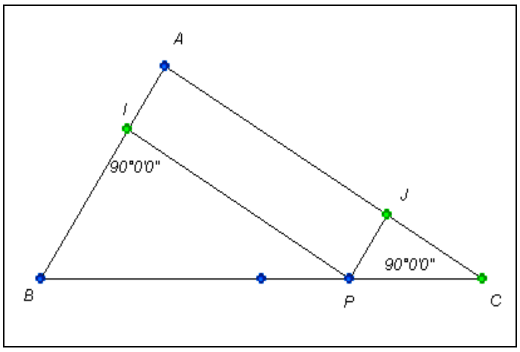
M, N e P são pontos médios dos lados de ABC. D e E são pontos médios de BP e PC, respectivamente.



Atividade 8 – Triângulo Retângulo

Dado o triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em A e P ponto móvel sobre a hipotenusa.

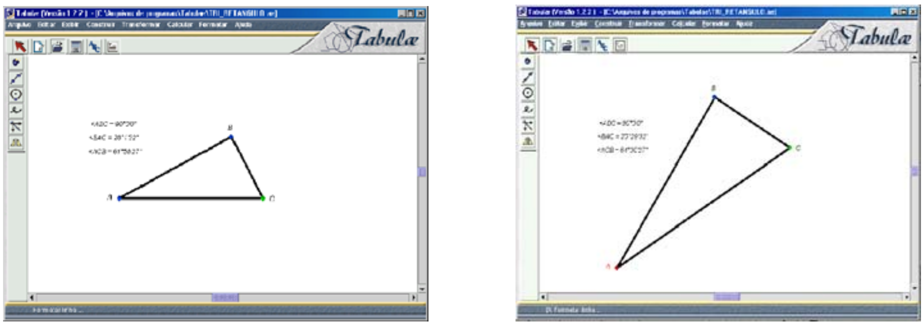
Construa os pontos I no cateto BA e J no cateto CA, de tal forma que os segmentos PI e PJ sejam perpendiculares aos catetos. Em que momento o comprimento do segmento IJ atinge seu menor valor? Justifique.



Apêndice C - Textos para Discussão com os Professores

1. Ambientes de Geometria Dinâmica

Ambiente de geometria dinâmica é a denominação dada aos ambientes computacionais interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades. Nesses ambientes, figuras são produzidas através da explicitação de suas relações geométricas, o que exige do usuário um pensar sobre objetos geométricos no contexto de definições e teoremas. Não são simples impressões visuais registradas na tela, mas objetos concreto-abstratos que devem estar em constante controle conceitual. Concretos, pois existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos porque se constituem em realizações feitas a partir de construções mentais.
Os ambientes de geometria dinâmica oferecerem inúmeros recursos comuns a outros *softwares* de geometria, como: no formatar, na medição de elementos da figura. Há, no entanto, alguns recursos próprios desses ambientes. O mais característico desses recursos é o arrastar. Clicando com o mouse em um ponto do objeto construído, este é arrastado gerando uma coleção de desenhos em movimento onde as suas propriedades formadoras (os invariantes) são mantidas. Observe, na primeira tela, o original triângulo retângulo ABC e, na segunda tela, o mesmo ABC transformado pelo arrastar originando um novo triângulo, mas ainda retângulo. O triângulo muda de tamanho e/ou de posição, mas mantém suas características geométricas definidas. O triângulo ABC, em questão, foi construído a partir do segmento AB, da reta r perpendicular a AB, passando por B, do segmento AC contido na reta r e do segmento AC.



Se o desenho é feito livremente, sem preocupação com as relações geométricas, com o arrastar ele se desmantela, isto é, não guarda as características iniciais pretendidas.
O controle das configurações geométricas leva à descoberta de propriedades. O aluno desenvolve a habilidade em perceber diversas representações de um mesmo objeto geométrico. E, com a dinâmica da figura, estimula-se a investigação e a experimentação. Conjecturas podem ser feitas, corrigidas e refinadas a partir do feedback oferecido pelo ambiente. Propriedades se estabelecem sob a ação do movimento (Gravina, 1996).
Na geometria dinâmica as atividades que estimulam a exploração e a descoberta dos invariantes são realizadas através de experiências visuais (aspecto intuitivo), devido a facilidades como a precisão e a variedade na construção dos objetos geométricos. Essas atividades possibilitam a formação de noções e conceitos geométricos e levam à representação mental correta desses conceitos por parte do aluno (aspecto lógico), isto é, acabam auxiliando no processo de visualização. A visualização ou representação mental do objeto geométrico é, por sua vez, importante auxilio para que os alunos possam fazer suas conjecturas, levantando hipótese e refinando as suas crenças e convicções. Neste cenário de

conjecturas, o professor se encontra em condições de estimular os alunos no sentido de verificar a veracidade e o sentido das mesmas, levando-os a demonstrações de algumas propriedades geométricas (aspecto lógico). Assim, esses ambientes dão suporte às ações mentais dos alunos que através da investigação, exploração e descoberta têm a construção de seu conhecimento favorecida e são convidados a justificar suas conclusões (Ferreira, 2003).
O ambiente escolhido para ser utilizado neste trabalho foi o *Tabulae*, programa que está sendo desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRJ, congregando professores de vários departamentos que realizam pesquisas sobre o uso do computador como ferramenta para o ensino da matemática nos níveis fundamental, médio e universitário. É um trabalho qeu faz parte de realizações desenvolvidas dentro do projeto *PACE*, Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino, responsável pelo desenvolvimento destes materiais e outros voltados para a criação de ambientes colaborativos de aprendizagem via *Internet*, em Matemática (Belfort, 2001).

Referências Bibliográficas:

ALVES, G. S. et al. **A perspectiva construtivista e os *softwares* de geometria dinâmica:** compreendendo suas correlações. In: III CAREM - Conferência Argentina de Educación Matemática. Salta – Argentina: UNSA – Universidad Nacional de Salta. 2003.
BELFORT, E. **Tabulae e Mangaba**: geometria dinâmica. In: V - Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro. 2001.
GRAVINA, M.A. **Geometria dinâmica**: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: VII SBIE - Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte (MG), pp. 1-13. 1996.

2. O Pensamento Lógico-Dedutivo

O pensamento é uma operação mental que nos permite aproveitar os conhecimentos obtidos através na vida social e cultural, combiná-los logicamente e alcançar uma outra nova forma de conhecimento. Todo esse processo inicia com a sensação e termina com o raciocínio, onde uma idéia se associa a outra e, desta união de idéias nasce uma terceira.
Você vê uma rosa branca, você já conhece a cor azul. Você imagina uma rosa azul. Não há, dessa forma, a necessidade de já termos visto uma rosa azul. Somos capazes de conceber uma rosa completamente azul, sem que, sequer, a tenhamos visto.
O raciocínio humano é uma cadeia infinita de representações, conceitos e juízos, sendo a fonte inicial de todo esse processo a experiência sensorial. Assim, o raciocínio é um tipo de pensamento, um processo de tirar conclusões a partir de princípios e de evidências já conhecidos. Nosso conhecimento se dá através das representações senso-perceptivas do mundo e delas, elaboramos nossos conceitos.
O pensamento lógico consiste em selecionar e orientar esses conceitos, tendo como objetivo alcançar uma integração significativa, que possibilite uma atitude racional ante as necessidades do momento. O pensamento lógico tem sido evidenciado a partir de Aristóteles (384-322 A.C.) como o único meio eficaz de se utilizar a mente. Ele foi o primeiro estudioso a fazer uma representação do processo do pensamento, através da sistematização do raciocínio lógico. Desenvolveu a ciência da Lógica cuja essência era a teoria do silogismo.
Filósofos, cientistas e historiadores se esforçaram, por muitos séculos, em criar regras para que as proposições ditas por uma pessoa pudessem ser representadas matematicamente e, portanto, ser provadas ou não.
Lógica é a disciplina que lida com métodos de raciocínio. Ela provê regras e técnicas para determinar se um dado argumento é válido.

Argumento: é um conjunto de enunciados dos quais um é a conclusão e os demais são as premissas. Os argumentos estão tradicionalmente divididos em dedutivos ou indutivos.

Argumento Dedutivo: É aquele que parte de uma verdade geral para afirmações particulares. Se as premissas forem verdadeiras, a conclusão é verdadeira.

Premissa¹:"*Todo homem é mortal*." Premissa²:"*Joãoéhomem*."

Conclusão : "*João é mortal*."

Argumento Indutivo: Parte de casos particulares para concluir uma verdade geral.

Premissa¹: "É comum após a chuva ficar nublado".
Premissa²: "Está chovendo".
Conclusão: "Ficará nublado".

A lógica, tradicionalmente, era vista, então, como a ciência das formas válidas de raciocínio, ou como o estudo das formas válidas de inferência. Tais definições não representam a lógica de hoje, embora tal estudo permaneça fazendo parte dela.
A partir do século XIX, a lógica se desenvolveu extraordinariamente, tendo acentuado a sua característica de disciplina matemática, sem querer com isso dizer que ela seja exclusivamente uma parte da matemática. Na verdade, é uma disciplina à parte, que se insere em praticamente todos os campos do saber, como a física, a biologia, a ciência da computação, a filosofia do direito, a psicanálise, a ética, a antropologia, a medicina, a tecnologia e, obviamente, a matemática. A lógica formal moderna tem recursos para apresentar muitos tipos de inferências dedutivas.

Demonstrações Matemáticas

Todo trabalho científico caracteriza-se pela busca da Verdade. Nas ciências naturais, a verdade é estabelecida através de experimentações enquanto nas ciências matemáticas ela necessita passar por um processo de prova formal para ser reconhecida como tal.
A Matemática, de forma ímpar, é uma ciência emergente do pensamento puro, constituindo-se essencialmente num processo de construção mental. Como tal, suas atividades caracterizam-se pela formulação de conjecturas que se validam quando acompanhadas das respectivas provas. Partimos de alguns conceitos tomados sem definição e de algumas proposições aceitas sem demonstração: os axiomas. A partir destes, propriedades são derivadas e teoremas são demonstrados. Estabelece-se, assim, a arquitetura das teorias matemáticas: conceitos primitivos e conceitos derivados, axiomas e teoremas.
São axiomas da Geometria Euclidiana:
Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.
Por um ponto P, não pertencente à reta r, passa uma única paralela a essa reta.
O todo é sempre maior que qualquer uma de suas partes.

São axiomas da Geometria Euclidiana:

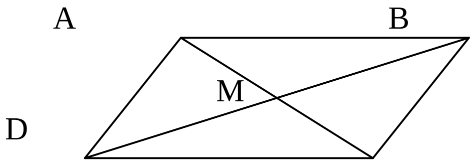
- Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.
- Por um ponto P, não pertencente à reta r, passa uma única paralela a essa reta.
- O todo é sempre maior que qualquer uma de suas partes.

<u>Teoremas</u> são proposições somente aceitas mediante demonstração e que se compõem de duas partes:

- Hipótese (dados conhecidos);
- Tese ou Conclusão (o que se deseja provar).

Eles podem ser escritos na forma condicional:
"Se [hipóteses], então [conclusão]."
Exemplo:
Teorema: Em todo paralelogramo as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

.



Na forma condicional, teremos:
Se ABCD é um paralelogramo, então suas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

Hipótese	**Tese**
ABCD é paralelogramo e $AC \cap BD = \{M\}$	AM = CM e BM = DM

ABCD é paralelogramo → AB=CD (1)
→ AB//CD → <BAC=<DCA (2)
→ <ABD=<CDB (3)

(2), (1) e (3) → caso ALA → ∆ ABM = ∆ CDM → AM = CM e BM = DM, c.q.d.

Outra forma de demonstrar, considerando a hipótese e a tese já apresentadas acima:

AB // CD , por hipótese ABCD paralelogramo

(1) <BAC = <DCA , ângulos alternos internos
(2) <ABD = <CDB , ângulos alternos internos
(3) AB = CD , por hipótese ABCD paralelogramo

Pelo caso ALA, (1), (3) e (2), ∆ ABM = ∆ CDM , o que implica em: AM = CM e BM = DM, c.q.d.

Referências bibliográficas:

(1) CHAUI, M. **Convite à filosofia**. Editora Ática, São Paulo, 2000.
(2) BALLONE, G. J. **Alterações do pensamento**. In PsiqWeb, Internet, disponível em <http://www.psiqweb.med.br/cursos/pensam.html>. Acesso em 23 de maio de 2004.
(3) ABAR, C.A. **Noções de lógica Matemática**. Disponível em: <http://www.pucsp.br/~logica>. Acesso em 23 de maio de 2004.
(4) THAGARD, P. **Mente- Introdução à Ciência Cognitiva**. Editora ArtMed, Porto Alegre, 1998.

3. O Pensamento Geométrico

Observe as seguintes figuras e responda as questões:

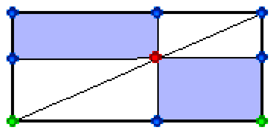


figura 1

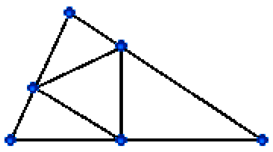


figura 2

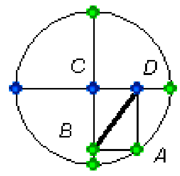


figura 3

1) Compare as áreas dos retângulos assinalados na figura (1). Que observa?
2) Quantos triângulos você vê na figura (2) acima?
3) Dado um círculo de raio conhecido e um retângulo, conforme figura (3), que se pode afirmar sobre a medida da diagonal BD?

A reação de muitos alunos, frente a essas questões, é perguntar ou comentar: *"Onde estão os números? As medidas?". " Não dá para calcular porque não há nada escrito!".*

Uma forte tendência da Educação Matemática tem imprimido aos alunos esse olhar, essa característica no pensar. É a priorização da aritmetização do raciocínio e do algebrismo puro.
Na verdade, para a solução desses problemas apresentados, não há conta a fazer. Ela exige uma leitura diferente da Aritmética ou da Álgebra. Para resolvê-los, como a outras inúmeras questões do nosso dia a dia, é necessário apenas o uso do pensamento geométrico envolvendo: percepção geométrica, raciocínio geométrico, linguagem geométrica. E esses são fatores pouco desenvolvidos na escola e tão essenciais na relação real x formal, pois a Geometria está por toda parte do nosso cotidiano: nas paralelas, nas perpendiculares, na semelhança, na congruência, na simetria, nas medições, na perspectiva (Lorenzato, 1995).

<u>Sem a Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta.</u>

São aspectos importantes no ensino-aprendizagem da Geometria:
- Aspecto intuitivo → estudo do espaço
- Aspecto lógico → estudo das relações espaciais

A construção do pensamento geométrico se dá através da experimentação e da exploração fazendo com que num processo gradativo, os alunos possam transitar do aspecto intuitivo para o aspecto lógico.

Os Objetos Geométricos

Os objetos do mundo físico são associados, em nossa mente, a entes abstratos (os objetos geométricos) definidos e controlados por um corpo de pressupostos (o sistema de axiomas da teoria). O processo de formação do conceito de objeto geométrico exige uma transição do experimental para o abstrato. Segundo Fischbein (1993), o objeto geométrico tem duas componentes: uma conceitual e uma figural. A conceitual expressa propriedades que caracterizam uma classe de objetos enquanto a figural corresponde à imagem mental que

associamos ao objeto. A harmonia entre esses dois componentes é que determina a noção correta do objeto.
Na formação da imagem mental, o desenho associado ao objeto geométrico desempenha papel fundamental. Assim, se por um lado, o desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento do objeto geométrico, por outro lado, pode ser um obstáculo a este entendimento. É comum ver alunos confundindo características físicas do desenho com propriedades geométricas. Isso é decorrente, em parte, do tratamento estereotipado dado aos objetos geométricos, como: quadrado com lados paralelos às bordas do papel, altura de triângulo sempre acutângulo, retângulo sempre de lados diferentes. Os conceitos geométricos devem ser construídos com equilíbrio entre as suas componentes figural e conceitual.
As construções geométricas são um meio poderoso de estudar as figuras. Muitas propriedades podem ser redescobertas através desse procedimento. As atividades de construção e exploração auxiliam, assim, no processo de visualização e favorecem a formação dos conceitos geométricos levando à representação correta desses conceitos (aspecto lógico). Visualização é a representação mental de objetos geométricos, compreende a habilidade de: representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre a informação visual.
Para que a Geometria permita ao aluno desenvolver um tipo especial de pensamento que lhe possibilite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive, devem ser criadas condições nas quais ele passe da Geometria pragmática (experimentação, manipulação, descoberta de propriedades a partir da intuição) para uma Geometria conceitual, envolvendo construções geométricas, conjecturas, **demonstrações**.
A tarefa do professor consiste em construir problemas que valorizem o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo em substituição ao uso único de memorização de fórmulas.
A respeito do processo evolutivo do pensamento, encontramos na teoria de Van Hiele, uma relevante contribuição.

Teoria de Van Hiele

Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele (1959) elaboraram uma teoria sobre desenvolvimento do pensamento geométrico com base nas dificuldades apresentadas por seus alunos de curso secundário na Holanda.
O modelo sugere que alunos progridem segundo uma seqüência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto aprendem geometria. São cinco, de acordo com Van Hiele, os níveis de compreensão que descrevem as características do processo de pensamento dos estudantes, em Geometria. O progresso de um nível para outro se dá através da vivência de atividades adequadas e cuidadosamente ordenadas pelo professor.
Na tabela abaixo, encontram-se descritos os cinco níveis segundo suas características:

NIVEIS DE COMPREENSÃO	CARACTERÍSTICAS
Visualização ou Reconhecimento (nível 1)	-Reconhece visualmente uma figura geométrica; -Tem condições de aprender vocabulário geométrico; -Não conhece ainda as propriedades de identificação de uma determinada figura.
Análise (nível 2)	-Identifica as propriedades de identificação de uma determinada figura; -Não faz inclusão de classes.
Dedução Informal Ou Ordenação (nível 3)	-Já é capaz de fazer a inclusão de classes; -Acompanha uma prova formal, mas não é capaz de construir uma outra.
Dedução Formal (nível 4)	-É capaz de fazer provas formais; -Raciocina num contexto de um sistema matemático completo.
Rigor (nível 5)	-É capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas; -É neste nível que as geometrias não-euclidianas são compreendidas.

A teoria de Van Hiele, especialmente no que se refere aos níveis de desenvolvimento, tem atraído muitos educadores e pesquisadores matemáticos. Tentativas são feitas no sentido de usar o modelo como base para a elaboração de currículos e livros didáticos. Em "*O ensino da geometria segundo a teoria de van Hiele*", Nasser (1998) encontramos uma proposta de desenvolvimento do ensino aprendizagem da Geometria, considerando as orientações de Van Hiele e respeitando a hierarquia dos níveis na dosagem de apresentação dos conceitos e das atividades.

Referências Bibliográficas:

FISHBEIN, E. **The theory of figural concepts.** Educacional Studies in Mathmatics, Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, nº 24/2, pp. 139-162, 1993.
LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?.** A Educação Matemática em Revista. Ano III, 1º Semestre, pp. 3-13, 1995.
NASSER,L. e SANT'ANA, N.P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, IM/UFRJ, 1998.

4. Demonstrações e seu Ensino: Resultados de Pesquisas

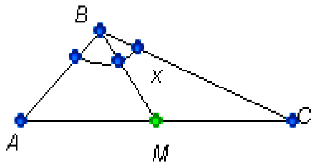
Falar em Matemática, especialmente em Geometria, é falar de demonstrações.
De acordo com Balacheff (1988), as provas matemáticas podem ser divididas em duas categorias: pragmáticas e conceituais. As pragmáticas apóiam-se em recursos de ação, como o uso de desenhos (recurso identificado como mostração) e envolvem habilidades de observação de figuras estando os conhecimentos necessários implícitos no pensamento de quem prova. As provas conceituais, por sua vez, não envolvem ação e sim formulação de propriedades e relações entre as mesmas. Caracterizam-se pelo seu caráter genérico envolvendo a linguagem como uma ferramenta para deduções lógicas. O mesmo autor acrescenta que a passagem das provas pragmáticas para as conceituais implica em saltos qualitativos no pensamento dos estudantes.
A demonstração não deve ser tratada unicamente de maneira formal. O professor deve estimular e aceitar justificativas, por parte de seus alunos, desenvolvidas de maneira mais informal e espontânea, naturalmente observando certos critérios mínimos de aceitação. A utilização da forma pragmática não implica no abandono da forma teórica, mas pelo contrário pode se constituir num caminho que leve até ela de forma compreensiva e, portanto, mais significativa (Nasser & Tinoco, 2003).
São transcritas, a seguir, duas atividades aplicadas com alunos do Ensino Fundamental, em trabalho desenvolvido pelo grupo do Projeto Fundão do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro com a participação dos professores das turmas de aplicação (Nasser & Tinoco, 2003). Tais atividades exemplificam como explorar a demonstração de uma maneira não formal. Uma terceira atividade é apresentada como uma adaptação de trabalhos utilizados por Mello em sua investigação relatada na dissertação de Mestrado, 1999.

a) Atividade 1

Conteúdo envolvido: Soma dos ângulos internos de um triângulo e propriedades dos triângulos isósceles.
Série em que foi aplicada: 8ª série.

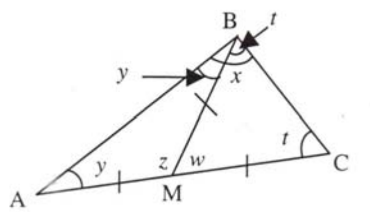
Enunciado: *Na figura, temos: MA = MB = MC. Prove que, nessas condições, o ângulo <ABC é reto.*

Para isto, observe que: os triângulos ABM e BMC são isósceles.
Conclua que a medida de <x é 90°.



Quando se inicia o trabalho com demonstrações, o erro que mais ocorre é o uso do resultado que se quer provar durante a demonstração.

Exemplo de respostas dos alunos:
(i) Com o erro acima citado:
X = 90°
Y + t + x = 180°
Y + t = 180° - 90°
Y + t = 90°
X = 90°

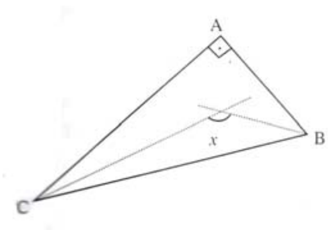


(ii)Correta:
Usando a mesma figura, o aluno somou todos os ângulos internos do triângulo ABC, obtendo:
Y + t + t + y = 180°
2Y + 2t = 180°
2 (Y + t) = 180°
Y + t = 90°
X = 90°

b) Atividade 2

Conteúdo envolvido: Noção de bissetriz de um ângulo, soma dos ângulos internos de um triângulo.
Série em que foi aplicada: 8ª série.
Enunciado: *Prove a afirmação:*

'As bissetrizes dos ângulos agudos de qualquer triângulo retângulo formam um ângulo de 135".



Exemplo de resposta correta:
Â é um ângulo de 90°.
A + B + C = 180°
B + C = 180° - 90°
B + C = 90°

$\frac{B + C}{2} = \frac{90°}{2}$

$\frac{B + C}{2} = 45°$

$x = 180° - \frac{B + C}{2}$

x = 180º - 45°
x = 135°

c) Atividade 3

Atividade que objetiva o reconhecimento do estatuto do teorema, enfatizando a distinção entre hipóteses e tese, e a compreensão de que a figura é um suporte para as hipóteses.

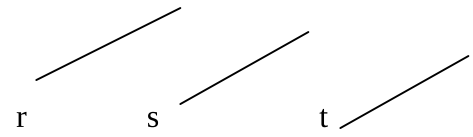
Dados os teoremas ou postulados, circule as hipóteses e sublinhe as conclusões.
Associe, a seguir, a cada propriedade a figura correspondente:

Teorema ou Postulado:

(i) Por dois pontos distintos A e B passa uma única reta.
(ii) Dada uma reta r e um ponto A, existe uma única reta paralela a r que passa por A.
(iii) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.
(iv) Se duas retas são paralelas, então, toda secante a uma é secante a outra.
(v) Dada uma reta r e um ponto A, existe uma única reta s perpendicular a r passando por A.
(vi) Se duas retas são paralelas, então, toda reta perpendicular a uma é perpendicular a Outra.
(vii) Se duas retas são perpendiculares a uma terceira, então, são paralelas entre si.

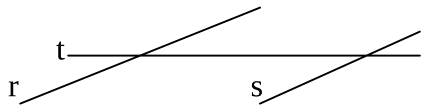
Figura geométrica:

( )



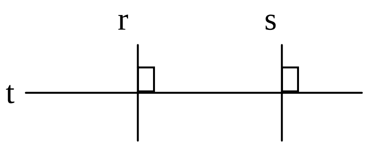
Hipóteses: r // t e s // t

( )



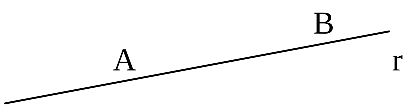
Hipótese: r // s

( )



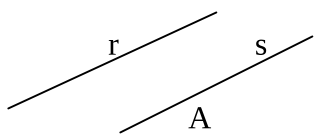
Hipótese: r // s

( )



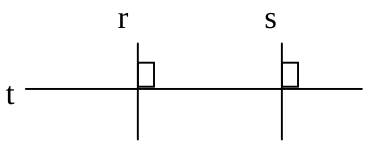
Hipótese: Dados dois pontos A e B

( )



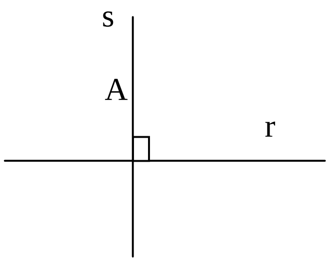
Hipóteses: Dados a reta r e o ponto A

( )



Hipóteses: r $\perp$ t , s $\perp$ t

( )



Hipóteses: Dados a reta r e o ponto A

Considerações a respeito das demonstrações e de seu ensino:

(i) No trabalho com demonstrações, um erro freqüente é o do uso do resultado que se quer provar como parte da hipótese. É preciso atenção para a necessidade de se distinguir a hipótese da tese.

(ii) Na resolução de um problema, identificar os dados relevantes do enunciado; não inventar nada; desconfiar das aparências.

(iii) Se para validar uma proposição precisamos demonstrá-la, para provar que é falsa basta, no entanto, apresentar apenas um contra-exemplo.

(iv) As primeiras atividades envolvendo demonstrações devem ser simples e sem grandes formalidades. Orientar os alunos com perguntas até que consigam formular alguma justificativa.

(v) A demonstração formal exige ferramentas intelectuais mais refinadas: saber conceitos, ter uma metodologia de trabalho, fazer uso do raciocínio dedutivo.

Referências Bibliográficas:

NASSER, L. & TINOCO, L.A. (coordenação). **Argumentação e provas no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão. 2003.

MELLO, E.G.S. **Demonstração**: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da Geometria. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Orientador: Saddo Ag Almouloud: PUC/SP, 1999. 189 p.

5. Teorias da Aprendizagem

Há séculos, filósofos, educadores e psicólogos investigam e apresentam teorias sobre como as crianças pensam e aprendem. Num estudo sobre as mudanças culturais na aprendizagem, decorrentes da evolução das tecnologias da informação e da própria organização social do conhecimento, encontram-se modelos ou teorias que tentam dar conta desses fenômenos: o racionalismo, o empirismo e o construtivismo.

A corrente racionalista (aprimorismo ou inatismo), acredita que o indivíduo já traz suas estruturas pré-formadas em virtude de uma programação hereditária e bem antes que o indivíduo possa fazer uso delas. De acordo com Pozo (2002), é o entendimento de que o conhecimento é sempre a sombra, o reflexo de algumas idéias inatas, que constituem nossa racionalidade humana. Nessa concepção, a aprendizagem tem uma função muito limitada.

O empirismo, em oposição ao racionalismo, vê o indivíduo como uma *tabula rasa* em que o conhecimento aprendido é somente um reflexo da estrutura do ambiente e aprender é reproduzir a informação que recebemos, mediante leis de associação. São teorias de aprendizagem por associação (Pozo, 2002).

O construtivismo, por sua vez, defende o desenvolvimento como conseqüência da interação equilibratória entre o individuo e o objeto, em que os comportamentos (sensório-motor, verbal e mental) resultam de uma interação entre o organismo e o meio. Para o construtivismo, o conhecimento é uma interação entre a nova informação que nos é apresentada e o que já sabíamos, e aprender é construir modelos para interpretar a informação que recebemos. Não se trata de uma mudança mecânica, capaz de reproduzir respostas já preparadas, mas sim a capacidade de gerar também novas soluções resultantes de um envolvimento ativo, baseado na reflexão e na tomada de consciência por parte do aprendiz.

Cada uma dessas posições epistemológicas produz uma pedagogia própria e a escolha de uma delas determina concepções de educação equivalentes. Os encaminhamentos dados a este trabalho são fundamentados numa visão construtivista do desenvolvimento cognitivo.

A teoria construtivista de Piaget proporciona subsídios importantes para o entendimento dos funcionamentos cognitivos que levam à construção do conhecimento. Sua obra é fonte de importantes conhecimentos que propiciaram avanços em algumas áreas do conhecimento humano. Seus estudos e pesquisas não se direcionavam à educação, à pedagogia ou a questões relacionadas ao processo ensino-aprendizagem, mas foi especialmente na Educação que suas descobertas sugeriram e provocaram mudanças.

Na perspectiva construtivista, o conhecimento não é algo predeterminado, nem por estruturas internas do indivíduo, nem por características preexistentes no objeto, mas ele se constitui a partir das ações do sujeito sobre o meio, ações estas que se internalizam e se organizam, desencadeando um processo evolutivo de estruturas lógicas, de menos acabadas para mais completas, com conseqüente ascensão de patamar do conhecimento. Cabe, então, ao professor criar situações que favoreçam a interação dos alunos com os objetos de ensino pretendidos.

Segundo Piaget, o desenvolvimento pode ser visto dentro dos seguintes estágios: sensório motor, simbólico ou pré-operatório, operatório concreto, operatório formal. Segue uma breve descrição desses estágios, com ênfase para o estágio em que se situam os sujeitos em condição de construir demonstrações.

- Estágio sensório-motor, de 0 a 2 anos de idade: é a primeira etapa do desenvolvimento mental consistindo na coordenação das montagens hereditárias (reflexos ligados ao funcionamento dos órgãos). As ações sobre objetos materiais e exercícios de repetição espontânea levam à coordenação e generalização das ações e, assim, constituem as primeiras ferramentas intelectuais, os esquemas. O sensório-motor é o alicerce para as construções posteriores (representação, linguagem, operações).
- Estágio pré-operacional, de 2 a 6 anos: surge a função semiótica, a criança representa objetos e acontecimentos propiciando a aquisição da linguagem, o jogo simbólico, a imaginação. Ocorre o distanciamento das experiências sensoriais, na forma de pensamento simbólico e pré-conceitual.
- Estágio operatório concreto, de 7 a 12 anos: surgem as noções de tempo, causalidade, conservação, reversibilidade, entre outras. Com a reversibilidade, o pensamento começa a tornar-se operatório e a construir as primeiras estruturas lógicas e invariâncias (de substância, de peso, de volume, de quantidade, de número). As intuições e ações se transformam em operações de classificação, ordenação e correspondência.
- Estágio operatório-formal, a partir dos 12 anos: é alcançada a independência do real. Seu pensamento não se baseia apenas em objetos ou realidades observáveis, mas

> também em hipóteses, permitindo dessa forma a construção de reflexões e teorias. O pensamento torna-se, então, hipotético-dedutivo. É nesse estágio que se constituem as capacidades cognitivas que entram em jogo na aprendizagem da geometria enquanto um modelo teórico.

Nesse quadro de desenvolvimento das estruturas lógicas, é no estágio operatório formal que se constituem as capacidades cognitivas necessárias para a aprendizagem da geometria como um modelo hipotético-dedutivo, mas tal aprendizagem não acontece de maneira fácil. Muitas dificuldades se apresentam durante esse processo. Entretanto, em estudos desenvolvidos nesta pesquisa, sugestões são encontradas no sentido de que as demonstrações possam ser trabalhadas desde os primeiros anos da escolaridade, o que corresponde ao estágio operatório concreto, num processo inicialmente informal do tipo empírico, também denominado *mostração*, seguido de crescentes graus de formalização de acordo com o estágio de desenvolvimento do aluno.

Muitas são as implicações educacionais das teorias construtivistas. Destaca-se, no entanto, a de que o conhecimento escolar é fruto de uma construção, onde o aluno interagindo com os objetos de conhecimentos (os conteúdos de ensino definidos no currículo) constrói representações acerca desses conteúdos, constrói conhecimento. Cabe, então, ao professor criar situações que favoreçam a interação dos alunos com o objeto de ensino pretendido.

Referências Bibliográficas:

POZO, J. I. **Teorias cognitivas da aprendizagem**. Tradução de Juan Acuña Liorens. ArtMed: Porto Alegre, 2002.

FLAVELL, J. H.; MILLER, P. H. & MILLER, S. A . **Desenvolvimento cognitivo**. ArtMed, Porto Alegre, 1999.

Apêndice D - Aulas Práticas Elaboradas pelos Professores para seus Alunos

1. Aula 1 (aplicada em Projeto Rio)

Colégio x - Rio de Janeiro
Matemática - 8ª série
Professora: Déa

Atividades no Laboratório
Assunto: Área de quadriláteros

Objetivos:
Dar oportunidade aos alunos de:
a) Revisar e explorar com o auxílio de recursos computacionais:
- Distância entre duas retas paralelas
- Área dos quadriláteros
- Figuras equivalentes (de mesma área)

b) Desenvolver a habilidade de justificar suas conjecturas.

Software utilizado : *Tabulae*

Desenvolvimento: Equivalência de Figuras

<u>1ª Parte:</u> Distância entre duas retas

- Trace duas retas paralelas r e s, clicando no botão *criar reta* para a primeira e, depois, no *criar reta* → *criar reta paralela* para obter a segunda reta.

Meça a distância entre elas da seguinte maneira:
- Por um ponto P marcado na reta r através do botão *criar ponto* → *criar ponto sobre um objeto*, trace uma perpendicular a esta reta usando o botão *criar reta* → *criar reta perpendicular*.
- Essa perpendicular intercepta a reta s num ponto que você vai destacar clicando no botão *criar ponto* → *criar ponto de interseção.*
- Nomeie esse ponto interseção como P’, através do botão *selecionar identificador,* representado por *ABC,* e digitando P’ na caixa de texto da janela que se abre.
- Esconda a reta perpendicular, acessando o menu *exibir* → *esconder objetos*, após selecionar o objeto a ser “escondido”.
- Construa o segmento PP’, usando o botão *criar reta* → *criar segmento.*
- Meça o segmento PP’, selecionando-o e acessando o menu *calcular* → *comprimento.*
- Selecione a medida obtida e a nomeie como “distância r/s”, através do botão *selecionar identificador* (*ABC).*

a) Clique sobre a reta r movendo-a de modo a afastá-la de s. Que acontece com o valor indicado da medida da distância entre elas?
b) Se você marcasse outro par de pontos, Q e Q’, um na reta r e outro na reta s, do tipo P e P’, e medisse a distância entre Q e Q’, que resultado obteria? Justifique sua opinião.

c) Faça um desenho ilustrativo da situação.

2ª Parte: Construindo um paralelogramo ABCD.

Obs: Paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados paralelos dois a dois.
Desenhando ABCD, a partir das retas r e s já desenhadas na tela:

- Construa, na tela, um segmento MN para representar uma das bases de ABCD, através do botão *criar reta* → *criar segmento*.
- Meça-o, selecionando-o e acessando o menu *calcular* → *comprimento*.
- Marque os pontos A na reta r e D na reta s, através do botão *criar ponto* → *criar ponto sobre um objeto*.
- Trace duas circunferências: uma com centro em A e raio MN e a outra com centro em D e raio também MN, clicando no botão *criar círculo* → *criar círculo por centro e segmento.*
- Marque o ponto interseção dessas circunferências com a reta r e com a reta s, respectivamente, usando *criar ponto* → *criar ponto de interseção*.
- Indique-os, um de cada vez, como B (em r) e C (em s), através do *selecionar identificador (ABC).*
- Esconda, temporariamente, as retas e as circunferências, selecionando-as e acessando o menu *exibir* → *esconder objetos.*
- Trace os segmentos AB, BC, CD e DA.
- Através da função *formatar* → *linha*, alargue esses segmentos e meça seus comprimentos, utilizando agora a função *calcular* → *comprimento*.
- Meça, também, seus ângulos, em *calcular* → *ângulo.*

a) Utilizamos, nessa atividade, a circunferência como recurso para definir os lados AB e DC. Qual a função da circunferência nessa construção? O que ela nos garante?
b) Mova os pontos A e D. Observe o que acontece com ABCD e registre aqui sua impressão.
c) Dependendo da posição e/ou das medidas dos lados do paralelogramo, podemos registrar alguns tipos especiais de paralelogramos.
Cite aqueles que você conseguiu perceber e o que eles têm de particular.

3ª Parte: Área do Paralelogramo

a) Quais os elementos do paralelogramo a serem considerados no cálculo de sua área? E como obtê-la?
b) Calcule a área de nosso paralelogramo ABCD.

Investigando variações da área de ABCD.
c) Mova a reta s, afastando-a de s. Que ocorre com o valor da área? Por quê?
d) Mude, agora, o tamanho do segmento MN, referência da base de ABCD.
Que podemos observar?

Vamos começar uma nova experiência.
e) Registre a área de ABCD verificada, nesse momento, na tela.
Observe, inicialmente, o que ocorre com essa área ao movimentarmos o ponto A sobre a reta r e o ponto D sobre a reta s. Comente sobre o que você observou.
f) Como você justificaria esse fato observado?

g) Discuta com sua professora sobre o assunto e pesquise a respeito do significado de figuras equivalentes.

2. Aula 2

Matemática - 7ª série
Professor: Aldo

Assunto: Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo Qualquer

a) A partir de três pontos A, B e C, construir o triângulo ABC.

- Com o ícone *ponto* marque três pontos na tela e através do botão *ABC,* indique-os como A, B e C, selecionando cada ponto de uma vez.
- Com o ícone *reta*→ *segmento,* ligue esses pontos formando o triângulo ABC.

Observação importante: Toda vez que terminar de usar uma função, desative-a.

b) Vamos registrar as medidas dos ângulos internos de ABC e, depois, calcular a soma delas. Para isso:

- Selecione os três vértices do triângulo mantendo no centro o vértice do ângulo a ser medido (por exemplo, registro BCA para medir o ângulo C). Depois utilize a função *calcular*/*ângulo*. Repita a operação três vezes, para obter a medida dos três ângulos.
- Usando a função *calcular* → *calculadora,* clique num dos valores de ângulo já registrados e ele aparecerá na tela da calculadora. Clica-se então no *comando somar* (+) e, depois, se acrescentam os outros dois valores a serem somados. Terminada a inclusão de todos, bate-se no OK e aparecerá na tela a soma dos ângulos pedida.

c) Arraste um dos vértices do ABC, observe e anote o que acontece com as medidas registradas.
d) Repita o procedimento para os outros dois vértices e observe.
e) Nessas diferentes configurações do triângulo ABC, obtidas com o recurso do arrastar, você pode observar algo de interessante nas medidas registradas na tela?
f) O fato que observou como constante às configurações obtidas do triângulo ABC, pode ser considerado como regra para todos os triângulos? Por quê ?
g) Conclusão Final.

3. Aula 3

Matemática - 7ª série
Professora: Ana

Assunto: Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Qualquer

Desenvolvimento:
Construir polígonos com diferentes números de lados, medir seus ângulos internos e obter a soma desses ângulos, para cada polígono construído. A seguir, serão descritos os procedimentos a serem executados para tal, no ambiente de geometria dinâmica.

- Construa polígonos a partir de grupos de 3, 4, 5 ou mais pontos. Para obter os pontos, clique no ícone *ponto*. Para denominá-los, selecione-os, um por vez, clique no ícone *ABC* e registre a denominação pretendida numa pequena tela que se abre para tal.

- Unindo esses pontos, através de *reta* → *segmento*, construa polígonos com diferentes números de lados.
- Em *calcular* → *ângulo*, meça os ângulos internos de cada um desses polígonos e depois, calcule a soma dos mesmos, em cada caso. Para obter a medida de um ângulo, selecione os três vértices mantendo no centro o vértice do ângulo a ser medido (por exemplo, registro BCA para medir o ângulo C). Depois, utilize a função *calcular*→ *ângulo*, clicando no devido ícone. Repita a operação para cada ângulo a ser medido.
- Para obter a soma dos ângulos internos de cada polígono, utilize-se da calculadora, através de *calcular* → *calculadora.* Acessada a calculadora do programa, clique num dos valores de ângulo já registrados e ele aparecerá na tela da calculadora. Clica-se então no comando somar (+) e, depois, se acrescentam os outros valores a serem somados. Terminada a inclusão de todos os ângulos do polígono em questão, Aperta o OK e aparecerá na tela a soma dos ângulos solicitada.

Faça, paralelamente, um registro numa tabela (veja sugestão abaixo):
Ângulos Internos de um Polígono e sua Respectiva Soma

Quadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono	Eneágono
Ângulos	ângulos	Ângulos	ângulos	ângulos	ângulos
A=	A=	A=	A=	A=	A=
B=	B=	B=	B=	B=	B=
C=	C=	C=	C=	C=	C=
D=	D=	D=	D=	D=	D=
	E=	E=	E=	E=	E=
		F=	F=	F=	F=
			G=	G=	G=
				H=	H=
					I=
$S_{i\,=}$	$S_{i\,=}$	$S_{i\,=}$	$S_{i\,=}$	$S_{i\,=}$	$S_{i\,=}$

a)Para cada um dos polígonos construídos, faça a seguinte análise: arraste um de seus vértices e verifique as alterações ocorridas nas medidas dos seus ângulos e na de sua respectiva soma. Registre o observado.
b) O que se modifica? Alguma coisa permanece invariante?
c) O que você pode conjecturar com base nas invariâncias observadas durante as inúmeras mudanças provocadas em cada polígono desenhado.
d) Como já observamos, uma conjectura não pode ser generalizada sem que haja uma demonstração matemática. Assim, vamos buscar uma explicação para esse novo fato observado acerca da medida dos ângulos internos de um polígono.

Sugestão: Uma das estratégias utilizadas para a determinação da soma dos ângulos de um polígono qualquer é através de sua decomposição em triângulos. Isso pode ser feito utilizando-se o traçado das diagonais que partem de um dos vértices do polígono em questão.

4. Aula 4

Matemática – 7ª série
Professora: Aureci

Assunto: Mediatrizes

Desenvolvimento: Construção da mediatriz de um segmento

a) Construa o segmento AB, clicando no botão *reta* → *segmento*. A seguir, selecione-o e meça seu comprimento, através da função *calcular* → *comprimento*.
b) Marque o ponto médio do segmento AB, usando *ponto* → *ponto médio* e o identifique como C através da função *ABC*.
c) Meça os segmentos AC e CB, então formados.
d) Construa a reta CD perpendicular a AB, no ponto C, usando *reta* → *reta perpendicular*.

Investigue:
1) A reta CD é a mediatriz de AB. Mova os pontos A e B. Que acontece com o ponto C?
2) Construa um ponto E na reta CD, usando *ponto* → *ponto sobre reta*. Trace e meça os segmentos EA e EB. O que você observa sobre essas medidas?
3) Clicando no ponto E, arraste-o sobre a reta CD. O que acontece com as novas distâncias que vão surgindo?
4) O que você pode dizer a respeito de qualquer ponto na mediatriz de um segmento?
Discuta seus resultados com seus colegas.
5)Como você poderia justificar essa propriedade observada de um ponto pertencente à mediatriz de um segmento?

5. Aula 5

Matemática – 7ª série
Professora: Eli

Assunto: Condição de existência do triângulo
Desenvolvimento:
<u>1ª Parte</u>: Construção de triângulo qualquer no ambiente de geometria dinâmica.

- Marque, na tela, três pontos não colineares, através do botão *ponto.*
- Com a função *ABC*, nomeie esses três pontos como A, B e C.
- A partir da ativação de *reta* → *segmento*, construa segmentos ligando esses pontos 2 a 2.

a) Que figura geométrica ficou formada com a construção?
b) Como podemos definir essa figura?
c) Que denominação é dada aos elementos A, B e C? E a AB, BC e AC?

<u>2ª Parte</u>: Medindo e manipulando a figura geométrica:

- Selecione cada segmento de sua figura, um de cada vez, e usando a função calcular → comprimento, determine a medida de seus lados.
- Clique com o mouse num dos vértices de sua figura e a arraste. Observe o que acontece.

a) Anote e discuta com seus colegas as observações que achar relevantes.

<u>3ª Parte</u>: Construindo outros triângulos:

- Construa triângulos, seguindo o procedimento utilizado anteriormente e com as seguintes medidas: 3, 4 e 5 cm; 6, 4 e 6 cm; 4, 4 e 4 cm; 3, 7 e 5 cm.
- Meça os ângulos desses triângulos, um de cada vez, selecionando os três vértices que o formam e usando a função *calcular* → *ângulo.*

a) Você observou algo de “familiar” em alguns desses triângulos?

b) Em caso positivo, esses triângulos recebem alguma denominação específica por essa característica particular?
Continuando as construções:

- Construa, agora, triângulos de medidas: 2, 4 e 7cm; 3, 5 e 1 cm; 4, 7 e 3 cm; 2, 4 e 6 cm.

a) Aconteceu algo de diferente?
b) Podemos encontrar algum problema no momento de construir um triângulo?

4ª Parte: Construção de Triângulo a partir de dois de seus lados
Você, nesse momento, irá construir triângulos a partir da medida de dois de seus lados. A medida do terceiro lado ficará a seu critério.

- 1º triângulo: lados de 4 cm e 2 cm;
- 2º triângulo: lados de 3 cm e 7 cm.

a) Você encontrou facilidade na escolha do terceiro lado?
b) Discuta sua escolha com a de seus colegas.
c) O que você pode dizer sobre a medida do 3º lado de um triângulo? Ela é única ou podemos achar diferentes valores para ela?
d) Existe um limite para essa variação?
e) Para cada um dos dois casos resolvidos, qual o limite que você observou?
f) Se as duas medidas dadas fossem 8 cm e 15 cm, você saberia, mesmo sem desenhar, dizer quais os limites da medida do terceiro lado?
g) Através das construções, experimentos e estudos realizados, enuncie a sua conclusão sobre a condição de existência de um triângulo, a partir da medida de dois de seus lados?

6. Aula 6 (aplicada em Projeto Angra dos Reis)

CENTRO EDUCACIONAL X – ANGRA DOS REIS
Matemática - 7ª série
Professora Lila

Assunto 1: Construção das cevianas de um triângulo qualquer
Software utilizado: *Tabulae*
Desenvolvimento

1ª Parte: Construção de um triângulo qualquer no ambiente de geometria dinâmica.

- Construa, na tela, três segmentos não colineares, mas consecutivos dois a dois, clicando no botão *criar reta/ criar segmento*.
- Nomeie os três pontos como A, B e C, após selecioná-los um a um e fazendo uso do *selecionar identificador (ABC).*

a) Que figura geométrica ficou formada, com a sua construção?
b) Que denominação recebem os elementos A, B e C? E AB, BC e AC?

2ª Parte: Medindo e manipulando sua figura geométrica
a) Selecione cada segmento de ABC, um de cada vez, e acessando o menu *calcular* → *comprimento*, determine a medida de seus lados.
Clique, com o mouse, num dos vértices da figura e a arraste. Observe o que acontece. Anote as observações que considerar relevante.
b) Meça, agora, seus ângulos, um de cada vez, selecionando, ordenadamente, os três vértices que o formam e usando o menu *calcular* → *ângulo*.

3ª Parte: Construindo as cevianas de um triângulo:

- Para construir uma altura, selecione, por exemplo, o lado BC e o vértice A . Trace a perpendicular a BC passando por A, usando o botão *criar reta → criar reta perpendicular*.
- Substituindo a reta traçada pelo segmento altura que nos interessa, marque com o ícone *ponto/ponto interseção* o encontro dessa reta com o lado BC. Com a função *ABC*, denomine de H esse ponto interseção. A seguir, mantendo selecionada a reta perpendicular, com a função *exibir/esconder objeto*, a esconda.
- Trace, então, o segmento AH, altura do triângulo ABC em relação a BC, usando *reta/ segmento.*
- A bissetriz pode ser traçada através da ativação de *reta/reta bissetriz*, seguida da seleção dos três pontos definidores do ângulo em questão, no caso <BAC. Para esconder a semi-reta e traçar somente o segmento AP, bissetriz de A, podemos seguir procedimento equivalente ao usado no caso da altura.
- Marque o ponto médio do segmento BC, usando *ponto/ ponto médio* seguido da seleção do segmento requerido. Com a função *ABC*, denomine esse ponto de M.
- Com *reta/segmento*, trace o segmento AM, mediana de ABC, em relação a BC.

Estão traçadas, assim, as cevianas (altura, mediana e bissetriz) do nosso triângulo ABC, em relação ao lado BC.
a)Clique, com o mouse, num dos vértices A, B ou C e o arraste. Observe o que acontece com as cevianas.
b) Em algum momento elas coincidem em sua posição?
c) Pode ser observada alguma propriedade característica para o triângulo, no momento em que a posição das três cevianas coincide?

Assunto 2: Propriedades do Triângulo Isósceles

Desenvolvimento:
1ª Parte: Construção de triângulo isósceles a partir dos raios de uma circunferência.

- Usando o ícone *circunferência*, trace uma circunferência qualquer (sempre que terminar uma construção disponibilize o programa clicando na seta vermelha acima, à esquerda da tela).
- A partir do ícone *reta/segmento*, construa dois segmentos, ambos partindo do centro de sua circunferência e com a outra extremidade na própria circunferência.
- Com a função *ABC*, nomeie esses três pontos como A (o centro), B e C, após a devida seleção dos pontos, um a um.
- A partir do ícone *reta/segmento*, construa o segmento BC, obtendo o triângulo ABC.
- Após selecionar sua circunferência, use em *exibir* o comando *esconder objeto*.

Aconteceu algo de diferente?

2ª Parte: Medindo e manipulando sua figura geométrica
Selecione cada segmento de ABC, um de cada vez, e em *calcular/comprimento*, determine a medida de seus lados. Clique, com o mouse, num dos vértices de sua figura e a arraste. Experimente um vértice de cada vez.

a) Observe o que acontece e anote o que achar importante.

Agora, vamos medir os ângulos de ABC, um de cada vez, selecione, ordenadamente, os três vértices que o formam e usando a função *calcular/ângulo.*
b) Você pode observar alguma propriedade relacionada à medida dos ângulos desse triângulo?
c) Clique, com o mouse, num dos vértices do triângulo e o arraste. Experimente um vértice de cada vez. Observe o que acontece com suas medidas.
d) Podemos assegurar algo a respeito do tipo de triângulo que foi construído?
Em caso positivo, o que foi feito que nos garante essa condição?
e) Nesse triângulo que lado recebe a denominação de base?

3ª Parte: As cevianas do triângulo isósceles relativas a sua base
Nesta fase vamos desenvolver um estudo sobre as cevianas do triângulo isósceles, ou seja, sobre suas altura, bissetriz e mediana, especificamente, em relação a sua base. Para traçar as cevianas siga procedimento idêntico ao utilizado na atividade anterior.
a) Clique, com o mouse, num dos vértices A, B ou C e o arraste. Que acontece com as cevianas?
b) Como poderíamos demonstrar essa possível propriedade que, nesse processo de manipulação e visualização da figura, se mostra verdadeira para nós?
Tente fazê-lo. Discuta com seus colegas. Apresente sua idéia à professora.

7. Aula 7

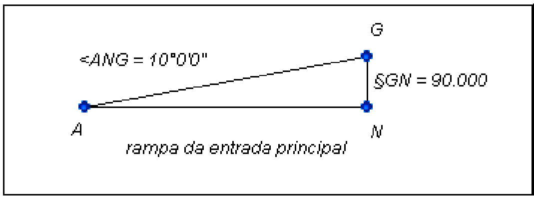
Matemática – 8ª série
Professora: Rosa

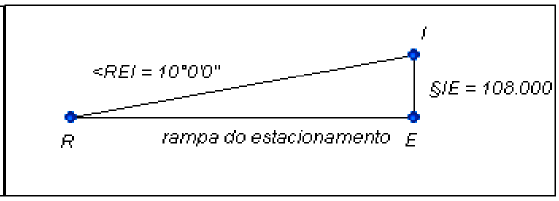
Assunto: Razões trigonométricas no triângulo retângulo
Pré-requisito: Semelhança de triângulos

Objetivos:
a) Solucionar o problema proposto através da construção de triângulos retângulos numa determinada escala, utilizando recursos computacionais e assim, iniciar o estudo da trigonometria.
b) Observar que dois ou mais triângulos retângulos que apresentam um ângulo agudo de mesma medida, são semelhantes.
c) Concluir com a construção de vários triângulos retângulos semelhantes, sobre a congruência, para eles, das relações seguintes, tomando um dos seus ângulos agudos como referência:

- Cateto Oposto/ Cateto Adjacente: "Tangente do ângulo agudo";
- Cateto Oposto/ Hipotenusa: "Seno do ângulo agudo";
- Cateto Adjacente/ Hipotenusa: "Cosseno do ângulo agudo".

Problema proposto:
A Prefeitura da cidade de Angra dos Reis resolveu construir rampas de acesso nas suas duas entradas para beneficiar pessoas com dificuldade de locomoção. Uma rampa, na entrada principal, deve dar acesso à porta que está a 90 cm acima da calçada e a outra será construída no local que dá acesso à Prefeitura pelo estacionamento, onde o desnível é de 10 cm.
O Engenheiro determinou que a inclinação fosse de 10º em ambas as rampas.
Na hora de construir as rampas, os pedreiros tiveram dúvidas sobre quais seriam os valores das distâncias longitudinais NA e RE, conforme as figuras abaixo. Vamos ajudá-los.





Para que você possa solucionar o problema proposto utilizando recursos computacionais, leia com muita atenção o “Revisando conhecimentos” e, em seguida, responda os questionamentos em “Atividades Iniciais”.

Revisando conhecimentos:

a) Razão é a comparação por meio de uma divisão entre dois n^{os}.
b) Uma igualdade entre duas razões é uma proporção.
c) Numa proporção quando permutamos seus meios (ou seus extremos), obtemos uma nova proporção.
d) Dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais.
e) Se dois ângulos de um triângulo forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo, os terceiros ângulos desses triângulos também serão congruentes.

Atividades Iniciais:

a) Considerando os triângulos ANG e REI (figuras 1 e 2), podemos afirmar que ANG ~ REI. Como você justifica essas informações?
b) Triângulos Retângulos que têm a medida de um ângulo agudo em comum são semelhantes. A afirmativa acima é válida para quaisquer triângulos? Por quê?
c) Se ANG ~ REI (figuras 1 e 2) os lados opostos aos ângulos congruentes são proporcionais. Então escreva a proporção obtida relacionando os lados opostos aos ângulos agudos congruentes desses triângulos.

Agora todas as atividades propostas abaixo devem ser julgadas no computador:
d) Construa os triângulos retângulos ANG e REI conforme as figuras 1 e 2, utilizando os recursos computacionais, na escala 1:100.
e) Utilizando o comando “medir segmentos” determine as medidas dos segmentos GN, IE, NA e RE e forme as razões seguintes..
GN/IE= AN/RE=
f) Observe que as razões acima são iguais, pois são obtidas as partes de lados homólogos de dois triângulos semelhantes. Então, podemos escrever a proporção GN/IE=AN/RE.

Agora, nas proporções acima permute os meios e escreva a proporção obtida, verificando o item 3 do “Revisando Conhecimentos”.
g) Como os triângulos foram desenhados em escala, os valores encontrados para as razões GN/NA e IE/RE são os mesmos encontrados na realidade, pois os triângulos ANG e REI são semelhantes às vistas laterais das rampas. Desse modo, pode-se saber quanto as rampas ocuparão na horizontal.

Veja:
Se GN/NA = 0,18 e IE/RE = 0,18, como acabamos de calcular e com as medidas dos lados GN = 90 cm e IE = 108 cm dados no enunciado do problema, ajude os pedreiros a encontrar os valores das distâncias horizontais em metros, NA e RE na realidade. Assim:
90/NA = 0,18 e 108/RE = 0,18

h) Considere a afirmação:
Em muitas situações, a divisão do cateto oposto ao ângulo de 10º pelo cateto adjacente ao ângulo de 10º tem sempre o mesmo resultado. Isto acontece porque os triângulos são semelhantes.
Construa outros triângulos retângulos com o ângulo agudo de 10º e verifique a veracidade da afirmação.

Como a divisão (razão) do cateto oposto a um ângulo pelo cateto adjacente ao mesmo ângulo é sempre constante, os matemáticos deram nome a essa razão:

$$\frac{\text{Cateto oposto } \hat{A}}{\text{Cateto adjacente } \hat{A}} = \text{tangente de } \hat{A}$$

Além da tangente de um ângulo, que é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a esse ângulo, podem-se estabelecer razões entre os catetos e a hipotenusa, obtendo assim o seno e o cosseno de um ângulo.
Para obter o seno de um ângulo observe as razões obtidas entre $\frac{\text{cateto oposto } \hat{A}}{\text{hipotenusa}}$ e para

O cosseno de um ângulo a razão $\frac{\text{cateto adjacente } \hat{A}}{\text{hipotenusa}}$

As razões seno, cosseno e tangente são chamadas razoes trigonométricas e com estas iniciamos os estudos da trigonometria.

Apêndice E - As Atividades com os Alunos do Projeto Rio

1. Pesquisa sobre Demonstrações

Aluno____
Escola____
Idade ____________ Série ____________

1) Você vai participar de uma pesquisa que é sobre demonstrações.
Para começar, escreva abaixo tudo que você sabe sobre demonstrações em Matemática e para que serve.

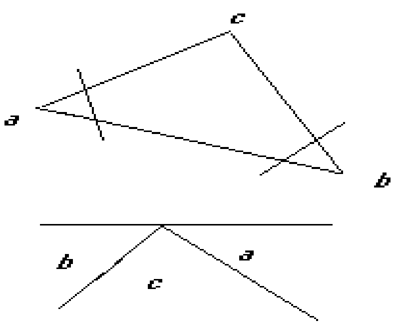
2) Leia com atenção as situações colocadas a seguir e opine a respeito.
Amanda, Bia, Cíntia, Dario e Edu estavam tentando provar se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa:

Quando se somam os ângulos internos de um triângulo o resultado é sempre 180°.

Observe as respostas de:

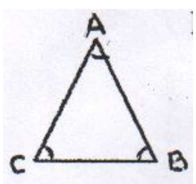
Amanda

Eu recorto os ângulos e os coloco juntos. Obtenho, assim, uma linha reta que é 180°. Eu experimentei com um triângulo isósceles e, depois, com um eqüilátero e a mesma coisa acontece.



Então, Amanda diz que a afirmativa é verdadeira.

Bia



Eu desenhei um triângulo isósceles com <C igual a 65°.

Afirmativas	Justificativas
<A = 180º - 2 C	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais
<A = 50°	180° - 130°
<B = 65°	180° - (<A + <C)
<C = <B	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais

Então, Bia diz que a afirmativa é verdadeira.

Dário

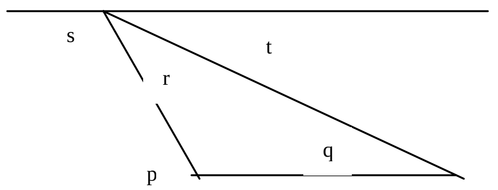
Eu medi cuidadosamente os ângulos A, B e C de vários tipos de triângulos e fiz uma tabela.

A	110°	95°	35°	10º
B	34°	43°	72°	27°
C	36°	42°	73°	143°
Total	180°	180°	180°	180°

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então, Dário diz que a afirmativa é verdadeira.

Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo.

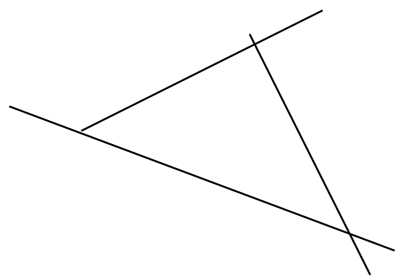


Afirmativas	Justificativas
p = s	ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais
q = t	ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais
p + q + r = 180°	ângulos numa linha reta

Então s + t + r = 180°
Então Cíntia diz que a afirmativa é verdadeira.

Edu

Se você caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, você termina olhando o caminho por onde começou. Você deve ter girado, portanto, um total de 360° .



Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Para os três, isto faz um total de 540°.
540° - 360° = 180°.
Então, Edu diz que a afirmativa é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que seria a mais parecida com o que você faria se tivesse que resolver esta questão. ________________________
Das respostas acima, escolha aquela para a qual seu professor daria a melhor nota. ________

3) Suponha que já foi provado que:
Quando se somam os ângulos internos de um triângulo, o resultado é sempre 180°.
Zé pergunta o que é preciso fazer para provar se:

Quando se somam os ângulos internos de um triângulo retângulo o resultado é sempre 180°.

Escolha A ou B:
(A) Zé não precisa fazer nada, a primeira afirmativa já provou isto.
(B) Zé precisa buscar argumentos para provar se a afirmativa também é válida para um triângulo retângulo, pois ser verdadeira para um triângulo qualquer não garante para esse específico triângulo.

4) Prove se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa. Escreva sua resposta da maneira que você achar melhor e mais correta.

Quando se somam os ângulos internos de um quadrilátero, o resultado é sempre 360°.

2. Roteiro de Laboratório

Esse material já foi apresentado no apêndice D que trata das aulas práticas elaboradas pelos professores.

3. Avaliação Final

Caros alunos da turma 805, agradecemos sua participação nesse projeto e registramos que vocês estão de parabéns pela animada participação e exemplar comportamento. A turma foi, no geral, nota 10. Gostaríamos de continuar trabalhando e, juntos, descobrir muitas outras coisas sobre Geometria através do *software Tabulae,* mas o tempo não o permite.
Pedimos que respondam as perguntas abaixo com sinceridade e seriedade. Suas observações e opiniões são importantes para avaliarmos nosso trabalho e serem fonte de idéias para trabalhos futuros.

1)Você sentiu dificuldade em trabalhar com o *Tabulae*? Como?
____

2)A atividade que fizemos sobre área de paralelogramos contribuiu de alguma maneira com o seu conhecimento sobre o assunto? Descreva o porquê.

___

3)Se pudéssemos trabalhar, em nossas aulas de Geometria, com um *software* como o *Tabulae*, o que conseguiríamos de diferente em relação às aulas tradicionais?

___

4) Qual foi o ponto mais alto desses encontros para você?

___

5) Uma palavra identificando o que faltou?

___

6)Faça quaisquer outros comentários ou sugestões que achar necessário.

___

4. Questão da Prova Bimestral

Questão de prova do 4º bimestre da turma de aplicação de 8ª série sobre área de triângulos, envolvendo justificativas:

Numa firma de propaganda, um grande painel está sendo projetado para o lançamento de um novo produto.
O referido painel já tem definida a sua forma retangular e está representado na figura abaixo pelo polígono ABCD, onde estão registradas as suas respectivas medidas.
Em ABCD, será marcada uma área de forma triangular a ser colorida e tendo uma base fixa MN de medida 2 metros, como também pode ser visto na figura.
No momento, está se discutindo a posição deste triângulo no painel de forma que ele apresente a maior área possível.
Três desenhistas opinam da seguinte maneira:

-"A maior área acontecerá para o triângulo isósceles MPN porque as medidas dos lados MP e NP serão iguais", diz João.

-"Se fizermos um triângulo retângulo MRN, conseguiremos a maior área pois existirá nele um ângulo de 90º", defende Carlos.

-"Para mim, a maior área acontecerá para o triângulo MCN porque ele se projeta até o final do painel e é o mais comprido possível", argumenta Jorge.

Você, como um entendido no assunto, pois é um bom aluno em Geometria, vai dar a decisão final, dizendo com quem concorda ou discorda e justificando sua resposta.

med (AB) = 1,5 m
med (AD) = 4m
med (MN) = 2m