UFRJ

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Núcleo de Computação Eletrônica

O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas: uma aplicação em alunos do ensino médio

Dissertação de mestrado

Aluno: George de Souza Alves

Orientadora: Profª Drª Adriana Benevides Soares

Co-orientador: Prof. Dr. Josefino Cabral Melo Lima

O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas: uma aplicação em alunos do ensino médio

George de Souza Alves

IM-NCE – Mestrado em Informática

Profª Drª Adriana Benevides Soares

Orientadora

Rio de Janeiro

2004

Alves, George de Souza.

O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas: uma aplicação em alunos do ensino médio / George de Souza Alves. Rio de Janeiro, 2004.

xix, 270 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Instituto de Matemática – IM, Núcleo de Computação Eletrônica - NCE, 2004.

Orientadora: Adriana Benevides Soares

1.Informática na Educação – Teses. 2. Visualização Geométrica – Teses. 3. Geometria Dinâmica – Teses. 4. Ensino Clássico – Teses. 5. Estudo Comparativo - Teses. I. Soares, Adriana Benevides (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Núcleo de Computação Eletrônica. III. Título.

CDD:

RESUMO

ALVES, George de Souza. **O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas:** uma aplicação em alunos do ensino médio. Orientadora: Adriana Benevides Soares. Rio de Janeiro: UFRJ/IM-NCE; 2004. Dissertação (Mestrado em Informática).

O processo de ensino-aprendizagem da geometria é dificultado por deficiências de visualizações por parte dos alunos. O objetivo do presente estudo foi verificar se o uso de um *software* de geometria dinâmica auxilia no desenvolvimento das representações mentais de objetos geométricos e se ele interfere numa melhor compreensão de conceitos relacionados a este domínio do conhecimento. A fundamentação teórica está baseada no construtivismo cognitivista de Jean Piaget, no sócio-construtivismo de Vygotsky, no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e nas teorias de resolução de problemas e de representação do conhecimento, sub-áreas da Psicologia Cognitiva. Foram desenvolvidos dois trabalhos de campo: o primeiro deles com alunos ingressantes no ensino técnico, abordando o conteúdo de triângulos, suas classificações e cevianas e o segundo com estudantes concluintes, abordando o conteúdo sobre cálculo de volume e a justificativa das fórmulas através do Princípio de Cavalieri. Os resultados mostraram que a introdução da tecnologia informática, neste caso, pode efetivamente apontar uma melhora no desempenho dos alunos e potencializar a sua habilidade para visualizar conceitos geométricos.

ABSTRACT

ALVES, George de Souza. **O uso de *softwares* de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas:** uma aplicação em alunos do ensino médio. Orientadora: Adriana Benevides Soares. Rio de Janeiro: UFRJ/IM-NCE; 2004. Dissertação (Mestrado em Informática).

The process of teach-learning of geometry is made it difficult by deficiencies of visualizations on the part of the pupils. The objective of the present study was to verify if the use of a dynamic geometry software assists in the development of mental representations of the geometric object and if it intervenes with one better understanding of related concepts on this domain of the knowledge. The theoretical recital is based on Jean Piaget and Vygotsky, on the van Hiele´s model of development of the geometric thought and in the theories of resolution of problems and representation of the knowledge, sub-areas of Cognitive Psychology. Two works had been developed: first of them with initial pupils in the technician education, approaching the content of triangles, its classifications and cevianas and as with students, approaching the content on calculation of volume and the justification of formulas through the Principle of Cavalieri. The results had shown that the introduction of the computer science technology can effectively point an improvement in the performance of the pupils and potencialize its ability to visualize geometric concepts.

“Quando um guerreiro erra, em vez de reclamar do alvo deve procurar o erro em si mesmo e melhorar sua pontaria para poder evoluir”.

Provérbio Árabe

À Solange, querida companheira e cúmplice, que sempre compreendeu a importância deste desafio para mim.

As minhas filhas, Thaíse e Sofia, inspirações em todos os momentos.

A meus pais,Francisco e Ilma, as maiores referências em minha vida.

AGRADECIMENTOS

A elaboração de uma dissertação de mestrado é um trabalho bastante solitário, que exige longos momentos de introspecção e reflexão, porém para se chegar a esta etapa, ninguém pode prescindir da companhia e da colaboração de outras pessoas. Neste trabalho contei com o auxílio precioso de diversos profissionais, colegas e amigos e tenho certeza que sem eles pouco ou nada teria caminhado.

Antes mesmo de relacionar as pessoas que estiveram comigo nesta caminhada devo lembrar e agradecer a Deus por não ter permitido que se fosse a perseverança e dedicação para que este trabalho se concluísse.

A minha orientadora Profª Drª Adriana Benevides Soares que com sua paciência sempre me trouxe alento nos momentos mais difíceis e inspiração para a continuidade dos trabalhos.

Ao Prof. Dr. Cabral Lima, co-orientador, que com seu senso de humor sempre tornou esta caminhada mais leve e, que com suas observações precisas, contribuiu para meu crescimento e para o amadurecimento de minhas idéias.

A minha irmã Geth e meu cunhado, Cláudio, pela torcida e orações.

Aos Profs. Drs. Lílian Nasser, Elisabeth Belfort, Ana Kaleff, Lúcia Tinoco, Luís Carlos Guimarães, Fábio Ferrentini, Marcos Elia e Lígia Barros por indicarem caminhos e darem dicas de bibliografia que muito contribuíram para este trabalho.

A Isabel Campos Barroso, colega da graduação, pela colaboração em indicar referências.

A Rúbia Amaral, doutoranda da UNESP – Rio Claro, que mesmo à distância e sem me conhecer pessoalmente, sempre me dispensou atenção, carinho e boa vontade no envio de referências.

Aos colegas do mestrado Luciano, Diógenes e Patrick, que com sua generosidade e paciência muito contribuíram para meu crescimento em algumas das disciplinas do mestrado.

A Emília Barra Ferreira, Macário Costa, Solange Altoé, Mary, Leila, Francine, Gandra, Jorge Zavaleta e toda a turma de 2002 que com seu companheirismo e espírito de cooperação me fizeram compreender, na prática, o que é aprender com colaboração.

A Teresa (TT) pela grande generosidade em me auxiliar na preparação da apresentação da defesa.

A Lina e Adriana, secretárias da AEP, Tia Dayse, Zezé e Regina da Secretaria do Instituto de Matemática, Maria e Luísa da biblioteca de NCE e a Amélia da Contabilidade, que com sua dedicação e eficiência tornaram sempre este caminho menos árduo, seja através de solução de problemas da burocracia, seja no planejamento das viagens a congressos, seja na presteza em conseguir empréstimo entre bibliotecas etc.

Ao Prof. Mauro Cléber Galvão da Silva, diretor da Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá (ETEVM), pelo espaço democrático que temos na escola, por sua boa vontade em colaborar na minimização de eventuais problemas operacionais que surgem no cotidiano escolar e por sempre incentivar os projetos que visam a melhoria da qualidade de ensino na instituição.

A Evaldo Rosa Maia Júnior, da Biblioteca Virtual da Escola 24 horas da ETEVM, que me deu apoio e suporte no laboratório da escola.

E a todos alunos, sujeitos desta pesquisa, pela generosidade e disposição em colaborar.

Muito obrigado a todos.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

CNRS	Centro Nacional de Pesquisa Científica da França
FAETEC	Fundação de Apoio à Escola Técnica
ETEVM	Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá
GINAPE	Grupo de Informática Aplicada à Educação
GSP	The Geometers Skechpad
IM	Instituto de Matemática
IMAG	Instituto de Informática e Matemática Aplicada de Grenoble
HTML	HyperText Markup Language
NCE	Núcleo de Computação Eletrônica
NTE	Núcleo de Tecnologia Educacional
PACE	Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROINFO	Programa Nacional de Informática na Educação
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFGRS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Há diversos trabalhos de pesquisa que abordam o esquecimento ou o omissão do processo de ensino-aprendizagem da geometria no Brasil, especialmente em escolas públicas (KALEFF, 1994; LORENZATO, 1995, entre outros).

Estes autores apontam algumas razões para este abandono ou omissão, entre as quais, podem ser citadas: (a) muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas; (b) a excessiva importância que exerce o livro didático entre os professores, em que a geometria aparece quase sempre no final num amontoado de definições, propriedades, nomes e fórmulas desligados de quaisquer aplicações ou explicação de natureza lógica ou histórica; (c) a posição frágil que a geometria ocupa nos currículos dos cursos de formação de professores ou das licenciaturas em matemática de algumas escolas e universidades.

Todas estas razões mencionadas parecem estar fortemente relacionadas à própria formação dos professores de matemática que lecionam nos ensinos fundamental e médio e dos professores da educação infantil.

Contrariamente a este abandono ou omissão do ensino da geometria na maioria das escolas brasileiras, verifica-se que a pesquisa sobre a aprendizagem desta disciplina é bastante numerosa. Nos encontros, simpósios, congressos e eventos em geral que são realizados com certa freqüência no Brasil, além das publicações em periódicos existentes, verifica-se uma quantidade bastante expressiva de trabalhos que abordam o assunto.

Esta dissertação procura caminhar nos dois campos, já que ela é uma pesquisa que foi gerada a partir da própria experiência do autor como regente de turmas do ensino médio.

A respeito da figura do professor-pesquisador, BALDINO (1993) diz que esta tem sido a proposta de solução a críticas sobre a pesquisa em educação matemática. Segundo este autor, uma delas se refere às dissertações e teses que terminam arquivadas em prateleiras das bibliotecas universitárias sem chegarem à sala de aula e a outra se refere às pesquisas que retiram o aluno da sala de aula, colocando-o em situações artificiais tais como em entrevistas clínicas ou sessões especiais, sob controle do pesquisador, com o risco de negligenciar importantes aspectos como, por exemplo, o cumprimento do programa e a avaliação (promoção) dos alunos.

BALDINO (1993) ressalta, porém, que a dimensão de pesquisador do professor não deve ser confundida como uma capacidade já inerente a todo professor. Como se fosse suficiente para realizar uma pesquisa seguir a seqüência: preparar aulas, relatar diariamente os fatos e preocupar-se em mudar ou "melhorar" o ocorrido. O temor é que a figura do professor-pesquisador venha a diluir as condições de rigor e cientificidade da pesquisa numa práxis generalizada.

O papel do **professor** se caracteriza por ser ele o responsável pela regência de um contrato de trabalho didático-pedagógico em sala de aula, ainda que os termos deste contrato estejam explícitos ou implícitos, enquanto o papel do **pesquisador** se caracteriza pela busca contínua de soluções ou respostas a problemas ou perguntas sobre um tema definido, elucidando causas e efeitos ou aproximando-se da compreensão de um fenômeno, movido por uma inquietação gerada em sua trajetória de vida.

As distintas funções do professor e do pesquisador podem ser exercidas simultaneamente pelo mesmo indivíduo, com as devidas precauções, tanto como sujeito-professor, quanto como sujeito-pesquisador, ainda que com instituições diferentes (BALDINO, 1993).

Os trabalhos de campo realizados para esta dissertação e documentados nos capítulos 5 e 6 procuraram unir estas duas funções. A idéia para sua realização surgiu da própria experiência do autor em regência de turmas do ensino médio e a conseqüente constatação das grandes dificuldades que os alunos deste nível de ensino apresentavam para ver os detalhes de uma figura geométrica ou perceber diferentes pontos de vista dos desenhos encontrados em problemas que normalmente surgem em sala de aula ou são propostos nos livros didáticos.

Segundo PCN (1996), os alunos do ensino médio devem desenvolver conhecimentos práticos e contextualizados que correspondam às necessidades da vida contemporânea e conhecimentos mais amplos e abstratos que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo.

Um ponto de partida para este tipo de aprendizagem é sempre procurar elementos da vivência dos alunos, da escola e de sua comunidade mais próxima. Deste modo, o uso do computador tem adquirido importância cada vez maior no dia-a-dia das escolas e no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem.

Entretanto, o impacto do uso do computador exige do ensino da matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o aprendiz possa se reconhecer e se orientar no mundo do conhecimento (PCN, 1996).

Para atingir este fim, é necessário empreender um trabalho mais lento e árduo que se inicia numa prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com a finalidade de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, generalizações de padrões e capacidade de argumentação, fundamentais para o processo de formação de conceitos e para a formalização do conhecimento matemático.

No processo de ensino-aprendizagem da geometria, a habilidade de visualização, o desenho, a argumentação lógica e a aplicação na busca de soluções para problemas são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da matemática e de outras áreas do conhecimento (PCN, 1996).

Alguns educadores matemáticos (LORENZATO, 1995; LABORDE, 1998; FAINGUELERNT, 1999; entre outros) enfatizam a importância dos aspectos intuitivo e lógico no processo de ensino-aprendizagem da geometria. O primeiro destes aspectos se refere ao estudo do espaço e das relações espaciais e o segundo está relacionado ao raciocínio dedutivo e à compreensão e domínio de sistemas axiomáticos.

LABORDE (1998) percebe que há um consenso entre educadores matemáticos de que o uso do computador no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir para a visualização geométrica (aspecto intuitivo).

Os conceitos de **visualizar** e **visualização** adquirem, então, uma grande importância para o ensino da geometria, especialmente quando se utiliza o computador. Em educação matemática, visualizar é formar ou conceber uma imagem visual de algo que não se tem ante os olhos no momento.

KALEFF (1998) observa que diversas pesquisas em educação matemática apontam para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento pelo educando da habilidade de visualizar tanto objetos do mundo real, quanto, em nível mais avançado, conceitos, processos e fenômenos matemáticos.

Segundo VAN HIELE (1986) a visualização, a análise e a organização formal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito.

Há controvérsias sobre como se forma esta habilidade na mente humana. O que não é razão para que este processo não ocupe seu lugar no ensino da geometria, pois a habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, desde que esteja disponível para o aluno materiais de apoio didático baseados em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo (KALEFF, 1998).

Em alguns casos o computador também pode ser visto como uma espécie de material concreto, já que seu uso apropriado pode tornar o ensino da matemática muito mais eficiente, integrado e significativo, além de elucidar a relação que esta ciência tem com outras disciplinas.

A tecnologia informática pode proporcionar novas situações nas quais as formas virtuais adquirem aspectos de uma realidade quase material, abrindo novas perspectivas para o entendimento das formas que se apresentam no plano da tela do computador (KALEFF, 1998).

Através dos recursos de animação de alguns *softwares* geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível com as tecnologias tradicionais (papel e lápis e quadro e giz, por exemplo) e que se tornam facilmente exeqüíveis com o uso do computador.

Com relação ao aspecto lógico, alguns estudiosos acreditam que o computador pode criar obstáculos no caminho da visualização para a prova formal em geometria. Eles consideram que a evidência visual e outros instrumentos de validação disponíveis podem tornar este procedimento desnecessário para o convencimento e até mesmo para o entendimento do aluno.

Por outro lado, outros defendem que a visualização pode ajudar nas demonstrações desde que o professor seja hábil para propor problemas e estratégias.

Neste caso, a prova pode ser tratada informalmente e de uma maneira menos rigorosa no ensino fundamental. O aluno deve ser encorajado a testar e refinar hipóteses para se convencer das proposições e dos resultados geométricos e o computador faz a ligação entre os experimentos e o raciocino dedutivo, proporcionando ao aluno a oportunidade de compreender uma prova rigorosa num nível de ensino mais elevado.

1.1 Motivações

Há trabalhos que estão preocupados com o desenvolvimento da capacidade da criança para representar objetos geométricos, assim como com o desenvolvimento da sua capacidade de visualizar, perceber e criar imagens.

Entretanto quando se verifica que este aluno não conseguiu este desenvolvimento ou o mesmo foi insuficiente, será que ainda existe alguma forma de alcançá-lo na adolescência ou na fase adulta? Em outras palavras, será possível desenvolver a capacidade de visualização em jovens e adultos com esta deficiência?

Nesta fase da vida do aluno muitas vezes há resistência para a utilização de material concreto, o que poderia facilitar tal empreitada. O computador então poderia prestar uma boa contribuição? Um *software* de geometria dinâmica poderia colaborar para este desenvolvimento? Seria possível elaborar seqüências didáticas com o auxílio deste tipo de *software* para desenvolver e/ou aperfeiçoar a capacidade de visualização destes alunos?

Os sujeitos dos estudos desenvolvidos nesta dissertação eram alunos de cursos técnicos de eletrônica, mecânica, eletromecânica e eletrotécnica, áreas que exigem de seus futuros profissionais uma boa capacitação em visualização, entre outras competências. Daí a preocupação de encontrar caminhos e soluções para o desenvolvimento da visualização geométrica.

Além disso, o estudo busca prestar mais uma contribuição para a pesquisa sobre o processo de ensino-aprendizagem da geometria, relatando uma experiência documentada em sala de aula e mostrando os ganhos na habilidade de visualização de conceitos geométricos que os alunos podem ter a partir do uso da geometria dinâmica.

1.2 Uma visão geral do trabalho realizado

Este estudo é resultado de dois anos de trabalho. Ao longo deste período, algumas reflexões teóricas e resultados obtidos foram publicados em ALVES & SAMPAIO (2002a, 2002b), ALVES, SOARES & LIMA (2002a, 2002b, 2002c), ALVES, SOARES & LIMA (2004a, 2004b, 2004c), ALVES & SOARES (2003a, 2003b), ALVES & SOARES (2004a, 2004b), ALVES et al (2003a, 2003b), ALVES et al (2004).

Foram realizados dois trabalhos de campo, o primeiro no segundo semestre de 2003 e o segundo no segundo semestre de 2004.

No primeiro, havia apenas 10 alunos voluntários e ingressantes no curso técnico, sendo que 5 do grupo que assistiu aulas clássicas de Geometria Euclidiana (grupo de controle) e 5 que utilizaram um *software* de geometria dinâmica (grupo experimental). O conteúdo trabalhado nesta etapa era do ensino fundamental e abordava triângulos, as suas classificações e cevianas.

O segundo trabalho de campo contou com um número maior de sujeitos, num total de 70 alunos concluintes do curso técnico do período noturno, sendo que 31 na turma de controle e 39 na turma experimental. O conteúdo trabalhado foi o de cálculo de volumes e o Princípio de Cavalieri.

Este caminho possibilitou reflexões sobre a influência no tamanho da amostra nos resultados e se eles se assemelhavam mesmo quando os conteúdos e as séries eram diferentes. O estudo buscou preservar uma unidade, mesmo que os trabalhos de campo tenham sido realizados com conteúdos distintos e com grupos de sujeitos com tamanhos e perfis diferentes.

Assim a figura 1.1 apresenta esquematicamente este estudo.

Área: Geometria Dinâmica

Tema: Visualização geométrica

Problema:
É possível desenvolver a visualização em geometria em jovens e adultos através de uma seqüência didática elaborada com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica?

Hipótese:
Se a manipulação de material concreto favorece o desenvolvimento de visualização espacial (KALEFF, 1998), então a utilização de computadores, através de ambientes computacionais dinâmicos também tem reflexos para este desenvolvimento.

Solução proposta:
Software de Geometria Dinâmica

Avaliação da solução:
Nos dois trabalhos de campo foram formados dois grupos de alunos, sendo que um destes grupos era constituído por sujeitos que utilizaram um *software* de Geometria Dinâmica, o chamado grupo experimental, e um outro constituído por aqueles que não utilizaram o *software*, o grupo de controle. A finalidade foi estabelecer uma comparação entre os diferentes resultados obtidos.

Figura 1.1: Esquema com a metodologia geral dos trabalhos de campo realizados

1.3 Organização do texto

Esta dissertação se inicia reunindo temas relacionados ao conhecimento geométrico que foram importantes para a realização do trabalho. Deste modo, o capítulo 2 contém uma breve história da geometria desde os primórdios em que o homem pré-histórico já fazia observações e especulações sobre configurações físicas e comparava formas e tamanhos até o surgimento das geometrias não-euclidianas, destacando apenas os acontecimentos mais significativos.

Neste mesmo capítulo também é descrita a evolução dos conceitos de infinitésimos ou indivisíveis, onde se situa o Princípio de Cavalieri, assunto central do trabalho de campo descrito no capítulo 6. Há ainda um breve relato sobre o desenvolvimento histórico do processo de ensino-aprendizagem da geometria no mundo e no Brasil e uma exposição do modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico dos van Hiele, que serviu de referência para a elaboração das atividades apresentadas aos alunos nos trabalhos de campo.

O capítulo 3 contextualiza o trabalho realizado, mencionando algumas políticas públicas para o uso de tecnologia informática no cotidiano escolar, comentando sobre algumas implicações para o uso do computador na escola e sobre os principais paradigmas existentes na elaboração de *softwares* educacionais. Há ainda uma breve discussão sobre a aprendizagem da geometria através do uso de *softwares* geométricos e um estudo sobre os recursos, potencialidades e limitações da geometria dinâmica.

A fundamentação teórica do trabalho se completa no capítulo 4 onde são discutidos em linhas gerais os principais aspectos do construtivismo cognitivista de Jean Piaget, incluindo algumas revisões de sua teoria, e o sócio-construtivismo de Vygotsky, com sua visão sobre a zona de desenvolvimento proximal e sobre o caminho para a formação de conceitos.

Além disso, também se recorre ao Tratamento da Informação, área da Psicologia Cognitiva, para delinear os principais pontos sobre a resolução de problemas, com destaque para resolução de problemas matemáticos, e sobre a representação do conhecimento e sua relação com a formação de conceitos em geometria.

No capítulo 5 é apresentado o estudo de campo realizado com 10 alunos, do período diurno, ingressantes no ensino técnico, incluindo a metodologia utilizada e a apresentação e a análise dos resultados. O conteúdo escolhido para o trabalho em sala de aula foi o de triângulos, suas classificações, relações entre ângulos internos e externos e as suas cevianas.

O capítulo 6 contém igualmente a descrição da metodologia e a apresentação e a análise dos resultados do outro trabalho de campo realizado. Nesta etapa, os sujeitos foram 70 alunos, do período noturno, concluintes do ensino técnico e o conteúdo escolhido foi do cálculo de volumes, com a justificativa das fórmulas para os volumes dos principais sólidos estudados no ensino médio através do Princípio de Cavalieri.

Finalmente no capítulo 7 são feitas as considerações finais, a síntese desta pesquisa,- ressaltando os aspectos metodológicos, operacionais e comportamentais observados nos trabalhos de campo, assim como a indicação de possíveis trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

Neste capítulo estão descritas brevemente as evoluções históricas da geometria e de processos de ensino-aprendizagem que a tem como matéria-alvo. Será abordado o desenvolvimento de idéias em torno do conceito de indivisíveis, importante para a compreensão do Princípio de Cavalieri. Este princípio é o tema central no trabalho de campo descrito no capítulo 6 desta monografia.

Estão apresentadas também as principais idéias do modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, um reconhecido guia para a aprendizagem e um instrumento para a avaliação das habilidades de alunos em geometria.

2.1 – Um breve histórico da geometria

A grande maioria dos relatos históricos localiza na agrimensura do Egito Antigo o início da geometria. Na verdade, segundo EVES (1992), este momento marca o início da geometria como ciência. Bem antes deste período, o homem deixava a vida nômade e passava a se fixar à terra e a cultivá-la e, portanto, já fazia observações e especulações sobre configurações físicas e comparava formas e tamanhos.

Observando, então, seu cotidiano e a natureza, o homem concebia diversas formas e conceitos geométricos: sol e lua lembram círculos, um objeto arremessado ao ar descreve uma parábola, uma corda enrolada forma uma espiral, corpos de homens e animais ilustram a idéia de simetria, uma pedra arremessada num rio forma círculos concêntricos, recipientes com líquidos ou outras mercadorias sugerem a noção de volume.

A noção de distância surgiu como um dos primeiros conceitos geométricos e a necessidade de delimitar a terra levou o homem a desenvolver noções de figuras geométricas bastante simples como retângulos, quadrados e triângulos, enquanto as noções de vertical, paralela e perpendicular teriam se desenvolvido a partir da construção de muros e moradias.

Além disso, o homem primitivo também empregava a geometria para fazer ornamentos decorativos, desenhos e uma tecelagem incipiente, impulsionada pela abundância de lã dos animais criados por ele. Segundo EVES (1992, p.2), "provavelmente é correto dizer-se que a arte primitiva preparou em grande escala o caminho para o desenvolvimento geométrico posterior."

Os primeiros contatos do homem com o que veio mais tarde a se chamar geometria se deram, então, a partir de considerações de problemas concretos que se apresentavam isoladamente. Porém, há de ressaltar que:

> mais tarde (mas ainda antes de qualquer registro histórico), a inteligência humana tornou-se capaz de, a partir de um certo número de observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, extrair certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações anteriores como casos particulares. Isto acarretou a vantagem de se ordenarem problemas geométricos práticos em conjuntos tais que os problemas de um conjunto podiam ser resolvidos pelo mesmo procedimento geral. Chegou-se assim à noção de lei ou regra geométrica. Por exemplo, a comparação dos comprimentos de caminhos circulares e de seus diâmetros levaria, num certo período de tempo, à lei geométrica de que a razão entre a circunferência e o diâmetro é constante (EVES, 1992, pp.2-3).

Há indícios históricos que a geometria surgiu como ciência não só ao longo do rio Nilo, no Egito, como também nas bacias dos rios Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia, o Indo e o Ganges na região centro-sul da Ásia e Hwang Ho e Yangtzé na Ásia Oriental, relacionada intimamente com mensuração e com a solução de problemas práticos das atividades ligadas à agricultura e à engenharia.

Exemplos provindos de tábuas cuneiformes, pequenos tijolos de argila e cilindros de pedra, mostram que o povo da Babilônia já conhecia as regras gerais para o cálculo de área de retângulos, áreas de triângulos retângulos e isósceles, a área do trapézio retângulo, o volume do paralelepípedo retângulo e o volume do prisma reto de base trapezoidal. Tomando o valor de π igual 3, os babilônios concluíram que a circunferência de um círculo era o triplo do diâmetro e que a área do círculo era um doze avos da área do quadrado de lado com comprimento igual à circunferência do círculo. O teorema atribuído a Pitágoras também já era conhecido pelos babilônios 2000 a.C.

Por volta do ano 500 a.C., Heródoto, o grande historiador da Antigüidade, baseado em informações existentes nos papiros de Moscou e Rhind, afirmava que o desenvolvimento da geometria no Egito era conseqüência das demarcações feitas nas terras por ocasião das inundações do rio Nilo.

Estes papiros continham 110 problemas práticos do cotidiano das comunidades que viviam às margens do Nilo, sendo que 26 deles eram dedicados à geometria. Através destas fontes, fica-se sabendo que os egípcios consideravam a área do círculo como sendo igual à de um quadrado de lado igual a 8/9 de seu diâmetro e que o volume de um cilindro reto é igual ao produto da área da base pelo comprimento da altura, entre outros resultados.

Os últimos séculos do segundo milênio anterior a Cristo representaram um declínio econômico e político no Egito e na Babilônia e outros povos como os hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos passaram a ocupar lugar de destaque na história. Com a ascensão destes povos, o homem também modificava seu modo de ver e perceber o mundo.

> A visão estática do Oriente antigo sobre as coisas tornou-se insustentável e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar como e por quê. (...) Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de como, não mais bastavam para indagações mais científicas na forma de por quê. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano (EVES, 1997, p. 94).

Na Grécia, Tales de Mileto e Pitágoras de Samos se dedicaram a provar alguns resultados conhecidos pelos egípcios e babilônios e Euclides, em *Os Elementos*, compila o conhecimento matemático até então e o apresenta de forma estruturada, partindo de conceitos primitivos, de axiomas e postulados, e de algumas definições. A partir daí são estabelecidas verdades, os chamados teoremas, que podem ser demonstrados através de um encadeamento lógico de raciocínio. Esta forma de estruturar o conhecimento matemático é o que se denominou de método axiomático dedutivo, o qual forma a base da geometria euclidiana.

SINGH (1999) reafirma a importância da demonstração e do método axiomático-dedutivo para a matemática no trecho a seguir:

> A idéia da demonstração clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos serem verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. A conclusão é o teorema. Os teoremas matemáticos dependem deste processo lógico, e uma vez demonstrados eles serão considerados verdade até o final dos tempos. A prova matemática é absoluta (SINGH, 1999, p.41).

A partir da sistematização do conhecimento geométrico na Grécia, a geometria euclidiana se tornou o modelo de descrição do mundo físico da Antigüidade e a referência lógica-filosófica de toda a cultura do Ocidente.

No entanto, tudo indica que a forma como ficou estruturada a geometria em *Os Elementos* de Euclides apresentava problemas com o quinto postulado que não possuía a precisão dos outros e parecia não ter a mesma qualidade exigida pela axiomática grega, a da obviedade ou da imediata aceitabilidade. Além disso, o próprio Euclides não fez uso deste postulado, o das paralelas, até chegar à proposição 29 do livro I de *Os Elementos.* Por este motivo, diversos matemáticos especularam se ele era realmente necessário na teoria ou se poderia ser deduzido como um teorema decorrente dos demais postulados ou ainda ser substituído por um outro equivalente mais aceitável.

Proclus, no século V, e John Playfair, em 1795, forneceram enunciados equivalentes que até hoje são muito utilizados em livros didáticos de geometria: *por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada.*

As tentativas de deduzir o postulado das paralelas a partir dos demais postulados dos *Elementos* de Euclides, ocuparam os geômetras por mais de dois milênios. Na busca da solução, eles acabaram obtendo alguns desenvolvimentos importantes para a história da matemática.

As principais abordagens deste problema, o do postulado das paralelas, se deram através do enunciado de Playfair e enfocaram, sobretudo, a possibilidade de traçar ***mais que uma, exatamente uma*** *ou* ***nenhuma paralela*** à reta dada a partir de um ponto fora dela.

Em 1832, o húngaro Janos Bolyai publicou suas descobertas como um apêndice de um trabalho matemático de seu pai e só mais tarde tomou conhecimento de que o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky havia publicado descobertas similares em 1829-30, mas que foram ignoradas na Europa Ocidental pela barreira da língua e pela lenta circulação de informações sobre novas descobertas científicas daquela época. A respeito das três abordagens para a avaliar o quinto postulado de Euclides, a partir do enunciado formulado por Playfair, EVES (1992, p.21) faz a seguinte explanação:

> Assumindo tacitamente, como de fato Euclides fazia, a infinitude de uma reta, o terceiro caso era prontamente eliminado; mas, apesar de longas investigações nenhum deles conseguiu chegar a uma contradição sobre a primeira possibilidade. Cedo ou tarde, cada um deles começou a suspeitar de que nenhuma contradição poderia ocorrer e de que a geometria resultante, ainda que muito diferente da geometria euclidiana, era tão consistente quanto ela. Gauss foi o primeiro dos três a chegar a essas conclusões avançadas, mas, como ele jamais publicou nada sobre a questão, a honra da descoberta dessa geometria não-euclidiana particular deve ser compartilhada com Bolyai e Lobachevsky (EVES, 1992, p.21).

Riemann, em 1854, abordou a terceira possibilidade descartando a infinitude da reta, assumindo simplesmente que ela era ilimitada e realizando outros pequenos ajustes. Deste modo, ele criou uma outra geometria não-euclidiana.

Eugênio Beltrami, Félix Klein, Henri Poincaré e outros demonstraram a independência do postulado das paralelas com relação aos outros postulados de Euclides quando obtiveram provas da consistência da geometria não-euclidiana. De acordo com EVES (1992,p.21) "o método consistia em construir um modelo em que a geometria não-euclidiana tivesse uma interpretação como parte do espaço euclidiano; então, qualquer inconsistência na geometria não-euclidiana implicaria uma inconsistência correspondente na geometria euclidiana".

Em 1871, Félix Klein deu os seguintes nomes às geometrias: a de Bolyai e Lobachevsky, foi chamada de geometria hiperbólica, a de Euclides, ganhou o nome de geometria parabólica e a de Riemann foi denominada geometria elíptica.

O surgimento das geometrias não-euclidianas rompeu com o modelo para o mundo físico que perdurou até a metade do século XIX, quando estas passaram a ser a base geométrica para o mundo físico descrito pela Teoria da Relatividade.

2.2 – A evolução de um conceito: os indivisíveis ou infinitésimos

O Princípio de Cavalieri faz parte da evolução de um importante conceito para a história da Matemática, o de indivisíveis ou infinitésimos, que se iniciou nos paradoxos de Zenão, na Grécia Antiga, e terminou com o desenvolvimento do cálculo diferencial por Newton e Leibniz no século XVII.

A idéia da integração tem origem em processos somatórios ligados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos, enquanto a diferenciação, criação mais tardia, está relacionada a problemas sobre tangentes a curvas e a questões de máximos e mínimos.

Nesta seção será abordada apenas a evolução do cálculo integral devido a sua relação com o cálculo de volumes, assunto central do trabalho de campo descrito no capítulo 6. A evolução do cálculo diferencial não será aqui tratada, já que o assunto não foi abordado durante as experiências realizadas na sala de aula.

Duas premissas estão relacionadas à idéia de infinitésimos: (a) uma grandeza pode ser subdivida indefinidamente e (b) uma grandeza pode ser formada de partes atômicas indivisíveis. De acordo com EVES (1992) há evidências de que essas suposições remontam à Grécia Antiga.

O filósofo grego Zenão de Eléia, que viveu por volta de 450 a.C., chamou a atenção para as dificuldades lógicas dessas suposições com quatro paradoxos que tiveram grande influência na matemática: a dicotomia, o Aquiles, a flecha e o estádio.

O da dicotomia, que afirma que antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, este deve percorrer a primeira metade desta distância; antes disso, porém, o objeto deve percorrer o primeiro quarto; antes ainda o primeiro oitavo e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então, que o objeto jamais inicia seu movimento já que é "impossível fazer infinitos contatos em tempo finito" (BOYER, 1985, p.55).

No de Aquiles, parecido com o anterior, a subdivisão infinita é progressiva em vez de regressiva. Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem. Afirma-se, então, que por mais que Aquiles corra, não alcançará a tartaruga por mais devagar que ela caminhe, pois quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já vai ter avançado um pouco mais e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais.

O da flecha considera que se o tempo é formado por instantes atômicos indivisíveis, então um corpo em movimento está sempre parado, pois em cada instante ele está sempre em uma posição fixa. Logo o movimento desse corpo é uma ilusão.

E o do estádio que, segundo BOYER (1985), é o mais discutido e complicado de descrever.

Neste paradoxo são considerados A_1, A_2, A_3 e A_4 corpos de igual tamanho, estacionários e B_1, B_2, B_3 e B_4 corpos de mesmo tamanho que os A, que se movem para a direita de modo que cada B passa por A num instante, o maior intervalo de tempo possível. Sejam ainda C_1, C_2, C_3 e C_4 corpos de mesmo tamanho que os A e os B, sendo que estes se movem uniformemente para a esquerda com relação aos A de modo que cada C passa por um A num instante de mesmo tempo.

Supõe-se que num dado momento os corpos ocupem as seguintes posições relativas mostradas na figura 2.1. Depois de passado um único instante, isto é, após a subdivisão indivisível do tempo as posições serão as mostradas na figura 2.2, mostrando que C_1 passaria por dois dos B. Deste modo o instante não pode ser o intervalo de tempo mínimo, pois poderia ser tomada como uma nova e menor unidade de tempo o instante em que C_1 leva para passar por um B.

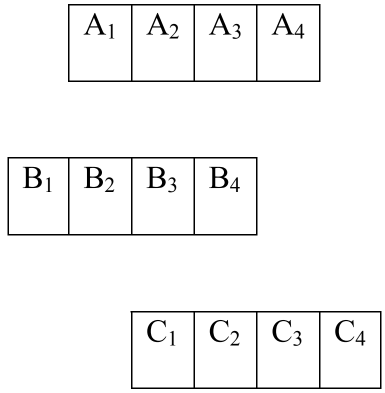


Figura 2.1: Posições relativas ocupadas pelos corpos do paradoxo do estádio num dado instante.

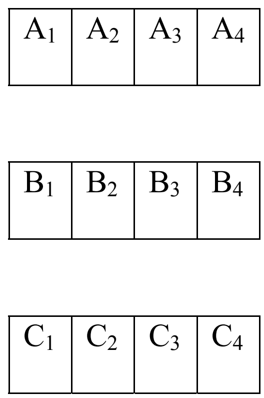


Figura 2.2: Posições relativas ocupadas pelos corpos do paradoxo do estádio num instante imediatamente posterior ao mostrado na figura 2.1

Zenão, através de seus paradoxos, chamou a atenção para as dificuldades lógicas ocultas nas suposições sobre os indivisíveis, contribuindo para a exclusão dos mesmos da geometria demonstrativa grega (BOYER, 1985).

Nos primeiros problemas de cálculo de comprimentos, áreas e volumes há indícios das duas premissas sobre a divisão de grandezas.

Uma resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão foi o método da exaustão, normalmente creditado a Eudoxo (370 a.C.), tem como base a seguinte proposição: *se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se* *também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará a uma grandeza menor que qualquer outra anterior.*

Os egípcios e mais tarde Demócrito (segundo Arquimedes), que viveu por volta de 410 a.C., já tinham conhecimento de que o volume de uma pirâmide qualquer corresponde a um terço do volume de um prisma de mesma base e mesma altura.

BOYER (1985) acredita que se Demócrito acrescentou alguma coisa ao conhecimento egípcio só pode ter sido algum tipo de prova ainda que inadequada.

Este autor acha que talvez Demócrito tenha mostrado que um prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides triangulares que são, duas a duas, de mesma altura e de áreas da base iguais e depois deduziu, assumindo que pirâmides de mesma altura e bases iguais são iguais, o resultado já conhecido pelos egípcios.

O argumento supostamente utilizado por Demócrito tem como base a aplicação de técnicas infinitesimais, já que o resultado parece se justificar quando se pensa em duas pirâmides de mesma base e altura como compostas de uma infinidade de seções infinitamente finas e iguais em correspondência biunívoca (exemplo primitivo do método dos indivisíveis de Cavalieri).

Este atomismo geométrico utilizado por Demócrito enfrentou problemas depois dos paradoxos de Zenão.

> Se a pirâmide ou o cone, por exemplo, é feita de infinitas seções infinitamente finas, triangulares ou circulares, paralelas à base, a consideração de duas quaisquer lâminas adjacentes cria um paradoxo. Se são iguais em área, então como todas são iguais, a totalidade será o prisma ou o cilindro, não uma pirâmide ou um cone. Se, por outro lado, seções adjacentes são desiguais, a totalidade será uma pirâmide ou cone em degraus, não a figura de superfície lisa que se tem em mente. Este problema se aparenta com as dificuldades com incomensuráveis e com os paradoxos do movimento de Zenão (BOYER, 1985, p. 59).

Esta prova foi obtida posteriormente por Eudoxo através do método da exaustão.

Apesar do rigor do método da exaustão para a demonstração de resultados, ele se mostrava estéril para a descoberta dos mesmos (EVES, 1992).

Um dos maiores matemáticos de todos os tempos e, segundo (EVES, 1992), seguramente o maior da Antigüidade, Arquimedes também tinha um método para determinar as fórmulas das áreas e volumes de algumas figuras geométricas.

Arquimedes nasceu por volta de 287 a.C. na cidade grega de Siracusa, situada na ilha da Sicília e morreu durante o saque de Siracusa[1] em 212 a.C.. Ele era filho de astrônomo e desfrutava de grande prestígio junto ao rei Hierão.

Não se sabia ao certo como Arquimedes determinava a área e o volume de alguns sólidos mais conhecidos até que Heiberg descobriu em 1906, em Constantinopla, uma cópia de *O Método*, um tratado de Arquimedes enviado a Eratóstenes que se encontrava perdido desde os primeiros séculos depois de Cristo. Neste tratado constavam as idéias gerais sobre o método do equilíbrio utilizado por Arquimedes para determinar as fórmulas de áreas e volumes de alguns sólidos conhecidos.

A idéia fundamental do método do equilíbrio de Arquimedes era cortar a região do sólido correspondente num número muito grande de fatias paralelas finas e a seguir pendurar mentalmente os pedaços cortados numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal modo a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centróide conhecidos.

A figura 2.3 ilustra o método para a determinação da fórmula do volume de uma esfera.

[1] Siracusa estava na zona de influência cartaginesa e foi cercada, no decurso da segunda guerra púnica, pelas tropas do general romano Marcelo. Este ataque e saque à Siracusa fez parte do projeto expansionista do Império Romano.

O raio da esfera é r e o seu diâmetro polar está localizado sobre o eixo horizontal, eixo das abscissas, com pólo norte N na origem. O cilindro e o cone de revolução são obtidos pela rotação do retângulo NABS e do triângulo NCS em torno do eixo horizontal.

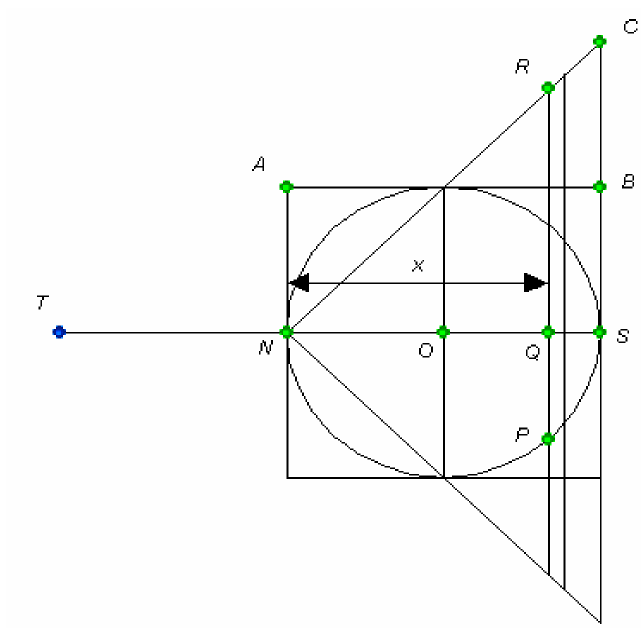


Figura 2.3: Seção transversal de um cilindro, uma esfera e um cone para a determinação da fórmula do volume da esfera através do método de equilíbrio de Arquimedes.

A partir dos três sólidos de revolução são consideradas as fatias delgadas (que devem ser vistas como cilindros achatados) correspondentes às seções de abscissas x e x+Δx. Os volumes dessas fatias são aproximadamente:

- No caso do cone é $\pi x^2 \Delta x$, já que a altura do cilindro achatado é igual a Δx e seu raio corresponde ao segmento QR, cujo comprimento é igual a x;
- No caso do cilindro é $\pi r^2 \Delta x$, já que a altura do cilindro achatado é igual a Δx e seu raio corresponde ao raio r da esfera;

- No caso da esfera é $\pi x(2r - x)\Delta x$, já que a altura do cilindro achatado é igual a Δx e seu raio corresponde ao comprimento do segmento PQ, obtido a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo OPQ e considerando a medida do segmento OP igual a r e a medida do segmento OQ igual a x-r.

As fatias da esfera e do cone são penduradas no ponto T, onde a medida do segmento TN é dada por 2r. O momento combinado[2] da esfera e do cone em relação a N é

$$[\pi x(2r - x)\Delta x + \pi x^2\Delta x]\, 2r = (2\pi x r\Delta x - \pi x^2\Delta x + \pi x^2\Delta x)2r = 4\pi r^2 x\Delta x$$

Da última equação obtida é fácil concluir que o momento combinado da esfera e do cone é igual ao quádruplo do momento da fatia cilíndrica quando ela é mantida em sua posição original. Assim quando se efetua um número grande dessas fatias, resulta

$$2r[\text{volume da esfera} + \text{volume do cone}] = 4r[\text{volume do cilindro}]$$

$$2r\left[\text{volume da esfera} + \frac{\pi(2r)^2.2r}{3}\right] = 4r.\,(\pi r^2.2r)$$

$$2r\left[\text{volume da esfera} + \frac{8\pi r^3}{3}\right] = 8\pi r^4$$

$$2r.\text{volume da esfera} + \frac{16\pi r^4}{3} = 8\pi r^4$$

$$2r.\text{volume da esfera} = 8\pi r^4 - \frac{16\pi r^4}{3}$$

$$2r.\text{volume da esfera} = \frac{8\pi r^4}{3}$$

$$\text{volume da esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

[2] "*O momento de um volume em relação a um ponto é o produto do volume pela distância do ponto ao centróide do volume.*" (EVES, 1992, p.422)

Mesmo Arquimedes obtendo o volume desta forma, ele não se satisfazia com esse procedimento para justificar a sua existência, recorrendo ao método de exaustão de Eudoxo para esta tarefa (EVES, 1992).

O método do equilíbrio também se valia de um número muito grande de porções atômicas, apresentando o mesmo problema das idéias de Demócrito. Entretanto com o advento do método dos limites, mais tarde, o método de Arquimedes se tornou plenamente rigoroso.

O período compreendido entre os trabalhos de Arquimedes e o surgimento de Cavalieri apresentou poucos avanços em relação à história da teoria da integração.

Segundo EVES (1992), neste período podem ser destacados os trabalhos do engenheiro flamenco Simon Stevin (1548-1620) e o matemático italiano Luca Valério (1552-1618) e, sobretudo, o de Johann Kepler (1571-1630).

> Kepler foi um dos precursores do cálculo. Para calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei dos movimentos planetários, teve de recorrer a uma forma tosca de cálculo integral. E também em seu Stereometria doliorum vinorum (Geometria Sólida dos Barris de Vinho, 1615) aplicou processos de integração toscos para achar os volumes de noventa e três sólidos obtidos pela rotação de segmentos de seções cônicas em torno de um eixo de seu plano. (...) Kepler interessou-se por essa questão ao observar alguns dos precários métodos de calcular volumes de barris de vinho usados em seu tempo. É bem possível que esse trabalho de Kepler tenha influenciado Cavalieri, que deu um passo à frente no cálculo infinitesimal com seu método dos indivisíveis (EVES, 1992, p.358).

Em 1598 nasceu em Milão, Itália, Bonaventura Cavalieri, ainda com o nome de Francesco Cavalieri. Ele pertencia a uma família proprietária de terras em Suna e Milão e aos quinze anos foi aluno de Galileu.

Só mesmo a partir de 1615 foi que ele recebeu o nome de Bonaventura Cavalieri, quando se juntou à ordem religiosa dos jesuados[3] (e não de jesuítas[4] como às vezes se afirma equivocadamente). Em 1616 ele foi transferido para Pisa onde estudou filosofia e teologia e tomou contato com Benedito Castelli que o introduziu no estudo de geometria. Durante os quatro anos que esteve em Pisa, Cavalieri tornou-se matemático famoso.

Em 1620, retornou para Milão onde se tornou diácono do Cardeal Frederico Borrofmeo e, posteriormente prior (superior em algumas ordens monásticas) na Igreja de San Pietro em Lodi e, em 1626, no monastério de San Benedetto em Parma.

Na paz e tranqüilidade dos monastérios, Cavalieri completou os manuscritos dos seis primeiros livros sobre os indivisíveis e os enviou aos lordes de Bolonha obtendo, deste modo, a indicação à cadeira de professor da Universidade de Bolonha em 1629, onde permaneceu até a sua morte em 1647.

Os trabalhos de Cavalieri abrangiam tanto a matemática, quanto a óptica e a astronomia e receberam influência de Kepler e Galileu. Sua obra mais importante foi também sua grande contribuição à matemática, o tratado intitulado *Geometria indivisibilibus*, publicado em versão inicial no ano de 1635.

O significado de “indivisível” não está muito claro no trabalho de Cavalieri, ele permaneceu um conceito obscuro, pois em parte alguma de sua obra foi definido.

Segundo EVES (1998, p. 425) “*tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma seção desse sólido*”. Deste

---

[3] Ordem religiosa fundada em 1360 por Giovanni Colombini de Siena, constituída originalmente por ideais franciscanos e beneditinos e mais tarde modificada para uma linha mais agostiniana; mantendo, porém, algumas idéias originais tais como o uso de sandálias e a auto-flagelação diária.

[4] Ordem religiosa fundada em 1539 por Inácio de Loyola, também conhecida por Companhia de Jesus. Tinha como principais elementos o voto de pobreza e castidade, a divulgação da fé cristã e mais tarde também se dedicou especialmente ao ensino.

modo, uma porção plana é formada de uma infinidade de cordas paralelas e um sólido é formado de uma infinidade de seções planas paralelas.

Quando cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada é deslizado ao longo de seu próprio eixo, de maneira que as extremidades das cordas descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção é igual à da original. De modo análogo pode-se raciocinar com os elementos do conjunto das seções planas paralelas de um sólido dado que fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original.

As três pilhas de folhas de papel da figura 2.4 são um exemplo deste último raciocínio. Elas têm o mesmo número de folhas, porém estão arrumadas de formas diferentes, evidenciando que possuem o mesmo volume.

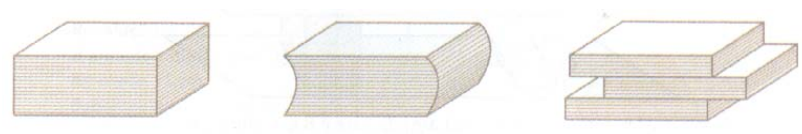


Figura 2.4: Pilhas de folhas com a mesma quantidade de papel, arrumadas de diferentes maneiras.
Fonte: DANTE (1999)

Deste modo o Princípio de Cavalieri pode ser enunciado da seguinte maneira:

PRINCIPIO DE CAVALIERI

Sejam A_1 e A_2 duas porções planas quaisquer. Se toda reta r secante a elas e paralela a uma reta dada seciona A_1 e A_2 segundo segmentos de reta de mesmo comprimento, então:

$$\text{Área de } A_1 = \text{Área de } A_2$$

Sejam S_1 e S_2 dois sólidos quaisquer. Se todo plano β secante a eles e paralelo a um plano dado seciona S_1 e S_2 segundo figuras planas de mesma área, então:

$$\text{Volume de } S_1 = \text{Volume de } S_2$$

Segundo EVES (1998) a admissão e o uso consistente do Princípio de Cavalieri pode simplificar bastante a dedução de fórmulas de volumes incluídas nos tratamentos iniciais da geometria espacial.

Deste modo muitos problemas de mensuração podem ser resolvidos aceitando o Princípio de Cavalieri como evidente. Entre eles está a determinação da fórmula do volume da esfera.

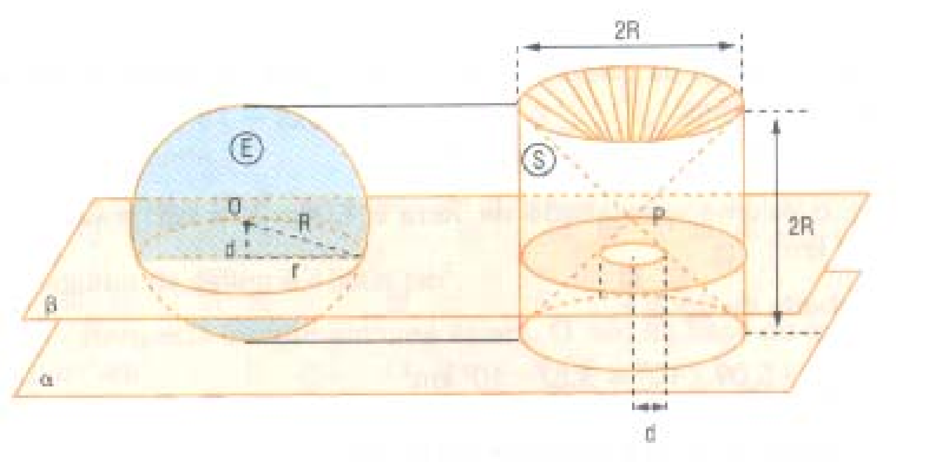


Figura 2.5: Ilustração da aplicação do Princípio de Cavalieri para a determinação da fórmula do volume da esfera.
Fonte: DANTE (1999)

A figura 2.5 mostra que a interseção do plano β com a esfera E é um círculo de raio r. Considerando d como sendo a distância do centro da esfera ao plano β, tem-se:

$$R^2 = d^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = R^2 - d^2$$

Portanto, a área da seção é dada por $\pi(R^2 - d^2)$.

Como a interseção do plano β com o sólido S, chamado de anticlepsidra, é uma coroa circular de raio menor d e raio maior R, a área desta coroa também é $\pi(R^2 - d^2)$. Pelo Princípio de Cavalieri segue que o volume do sólido E = volume do sólido S:

volume de S = volume do cilindro – volume dos 2 cones

$$\text{volume de S} = \pi R^2.2R - 2.\frac{1}{3}.\pi R^2.R = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Logo volume da esfera} = \text{Volume do sólido E} = \text{Volume do sólido S} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Segundo LIMA (1991), o Princípio de Cavalieri é um resultado sobre integrais, correspondendo a calcular uma integral múltipla por meio de repetidas integrais simples. Além disso, as dificuldades encontradas por Cavalieri para assentar suas descobertas com os indivisíveis sobre uma base formal são facilmente superadas com o uso do cálculo integral.

2.3 – A Evolução do Processo de Ensino-Aprendizagem da Geometria

Segundo BOYER (1985) talvez nenhum outro livro, além da Bíblia, tenha tido tantas edições e certamente nenhuma outra obra matemática teve influência comparável à de *Os Elementos* de Euclides.

Euclides se tornou notável na Universidade de Alexandria mais pela sua capacidade de ensinar e por sua habilidade ao expor do que pela originalidade de suas idéias, já que nenhuma descoberta nova é atribuída a ele (BOYER, 1985).

Durante o período de mais de dois mil anos, compreendido entre a publicação de *Os Elementos* de Euclides e sua reformulação numa apresentação mais cuidadosa e rigorosa, a educação e, por extensão, o ensino da matemática, esteve restrita a uma pequena elite e “a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável” (BOYER, 1985, p.79).

Com a Revolução Industrial na Europa, no século XIX, surge a necessidade de mão-de-obra mais escolarizada. Os industriais passam, então, a implementar e a disponibilizar cursos para seus funcionários.

A partir deste momento, entretanto, começa a existir uma clara divisão em relação ao público alvo que a escola pretendia atingir, levando à criação de um ensino voltado para o povo e um outro voltado para as elites.

No ensino destinado aos homens da elite a educação preservava o cunho clássico anterior, enquanto para os operários da indústria, a educação possuía um caráter essencialmente pragmático, objetivando prioritariamente ensinar a ler, a escrever e a contar.

No primeiro caso, o ensino da geometria preservava a característica axiomática-dedutiva, visando a formação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico e evidenciando uma influência de *Os Elementos* de Euclides.

No segundo, havia um predomínio na ênfase em transmitir conhecimentos básicos e aplicados à prática no trabalho. Os alunos deviam ser permanentemente conduzidos aos exemplos concretos.

Mesmo num sistema como este era possível, superando inúmeras dificuldades, que alguns poucos estudantes da classe operária também tivessem acesso aos níveis superiores de escolarização.

Impulsionada pela crença, dominante na época, de que a educação era um meio de ascensão social, a classe trabalhadora exerceu uma pressão no sentido de expandir a escola secundária. Até o final do século XIX, a escola elementar era praticamente a única acessível a estas classes. Entretanto, o modelo anterior continuou prevalecendo, isto é, a escola secundária das elites preparava para o ensino superior, enquanto a escola destinada aos trabalhadores continuava dando ênfase apenas à educação utilitária e profissional.

Com a expansão da escola secundária, o debate em torno da qualidade do ensino ganhou um grande impulso e questionou-se o ensino excessivamente teórico destinado às elites.

Efeito contrário trouxe a revisão e a organização axiomática da geometria realizada por David Hilbert, com a publicação de *Os Fundamentos da Geometria,* em 1899. Este livro influenciou muitos autores de livros didáticos de geometria, destinados ao ensino médio.

A partir de Hilbert ganhou força a axiomática formal, em que um resultado só é considerado verdadeiro quando este é uma conseqüência lógica de um conjunto de axiomas existentes, enquanto a axiomática de Euclides estava baseada na intuição geométrica.

Durante a primeira metade do século XX, algumas reformulações de currículo de matemática no ensino secundário foram implementadas, com a introdução de novos tópicos como a trigonometria, a geometria analítica e o cálculo. Mas em relação ao ensino da geometria permanecia o dilema entre o aspecto prático e a abordagem mais formal.

Após a Segunda Guerra, ocorreu uma nova expansão de ensino médio e, este nível de ensino passou a ser gratuito numa grande quantidade de países. Esta massificação, porém, trouxe como conseqüência professores e alunos menos preparados academicamente e alguns dos tópicos mais difíceis da geometria foram excluídos dos programas. Era comum um professor não dominar determinado assunto e alguns alunos não terem maturidade necessária para a compreensão dos argumentos utilizados, por exemplo, em uma demonstração geométrica.

A partir deste momento as críticas em relação ao ensino da matemática em geral aumentavam: as demonstrações estavam baseadas na memorização, o ensino estava compartimentalizado entre a álgebra e a geometria, não tinha motivação e era pouco atraente.

O movimento da matemática moderna, surgido no final dos anos 50 e início dos 60, teve com grande eco no Brasil, trazendo a preocupação em resolver o problema da memorização, através de um ensino baseado na lógica e nas estruturas matemáticas (algébricas, topológicas e ordenadas), ensinadas numa nova linguagem: a teoria dos conjuntos.

Os problemas relativos à metodologia de ensino foram completamente ignorados, já que os professores dos níveis mais elementares se sentiam tolhidos em questionar os idealizadores deste movimento, os professores e pesquisadores que estavam nas universidades.

Basicamente, o movimento da matemática moderna tinha como principais diretrizes, a insistência nas idéias abstratas, a preocupação com o rigor, o uso de vocabulário contemporâneo, a preocupação com a precisão da linguagem e a introdução de "novas" idéias matemáticas.

Os programas de Geometria foram reduzidos, portanto, no momento em que ocorria a universalização da escola, e a importância da Geometria como meio para a formação do pensamento foi amplamente questionada.

A partir do movimento da matemática moderna, foi reduzida a abrangência conceitual e filosófica da geometria euclidiana a um mero exemplo de aplicação da teoria dos conjuntos e da álgebra vetorial.

Um fato importante ocorreu a partir destas mudanças: o abrandamento na exigência em se demonstrar teoremas. Este abrandamento, entretanto, trouxe uma conseqüência positiva (o rompimento com o modelo anterior onde se pretendia demonstrar tudo) e uma outra negativa (passou-se ao extremo oposto, nenhuma demonstração). No segundo caso, a geometria não era intuitiva ou experimental, nem dedutiva. Os alunos eram, por exemplo, apenas informados sobre as propriedades de algumas figuras geométricas.

O mais espantoso é que este quadro parece predominar até hoje.

Numa síntese, KALEFF (1994, p.20) afirma que:

> A Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com conseqüências que se fazem sentir até hoje. Em muitas escolas de primeiro grau, o ensino da Geometria não só é confundido com o do Desenho Geométrico, como também as suas aulas são ministradas separadamente das de Matemática. Como conseqüência desta separação, não são professores com formação em Matemática que, na maioria das vezes, ministram as aulas de Geometria, porém outros profissionais cuja formação pode não ser adequada à tarefa em questão.

Desta forma KALEFF(1994) acredita que sejam necessários esforços no sentido de evitar que tal situação persista nas escolas. Assim, a Geometria Euclidiana deve ocupar o espaço que lhe é devido nas aulas de Matemática, porém o seu ensino deve se adequar à realidade educacional, científica e tecnológica de nossos dias.

2.4 – O Modelo de van Hiele

Os trabalhos sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores holandeses Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof foram inicialmente publicados em 1959.

Desde esta época até 1973, o modelo de van Hiele só não ficou totalmente no obscurantismo porque a União Soviética o adotou nos anos 60, após reformulação do currículo de geometria em suas escolas.

Em 1973, Hans Freudenthal publicou um livro intitulado "*Mathematical as an Educational Task*" onde citava o trabalho dos van Hiele e, em 1976, o professor americano Izaak Wirsup começou a divulgar o modelo em seu país. O interesse pelas contribuições dos van Hiele tem se tornado cada vez maior após as traduções para o inglês feitas em 1984 por Geddes, Fuys e Tisher.

2.4.1 – Níveis de Compreensão

O modelo de van Hiele é um guia para a aprendizagem e para a avaliação das habilidades dos alunos em geometria e apresenta cinco níveis de compreensão. Estes níveis informam sobre as características do processo de pensamento dos estudantes em geometria.

Os van Hiele perceberam que os problemas e tarefas apresentados às crianças requerem, muitas vezes, vocabulário, conceitos ou conhecimento de propriedades acima do nível de pensamento do aluno.

Estes autores assinalam que numa sala de aula, os alunos pensam em diferentes níveis, diferem uns dos outros e, evidentemente, também apresentam modos de pensar diferentes dos professores e costumam utilizar com freqüência palavras e objetos diferentes das empregadas por estes e pelos livros. Deste modo, quando o ensinamento ocorre num nível acima ao do estudante, o assunto não é bem assimilado e não ficará retido por muito tempo na memória.

Conforme este modelo, o crescimento cronológico das idades não necessariamente implica num crescimento nos níveis de pensamento e poucos alunos atingem o último nível, o do rigor.

Um importante conceito que exerce grande importância na teoria de van Hiele é o de *insight,* que representa, neste caso, a capacidade do aluno em enfrentar uma situação não usual e desempenhar correta e adequadamente as ações requeridas por ela, para finalmente desenvolver deliberadamente uma maneira de resolvê-la. Portanto, os estudantes têm um *insight* quando entendem **o que** estão fazendo, **por que** estão fazendo algo e **quando** o fazem. O quadro 2.1 relaciona os níveis do modelo de van Hiele e suas características.

Pierre van Hiele admitiu, em comunicação pessoal com Alan Hoffer, em 1985, que estaria particularmente interessado nos três primeiros níveis que vão das séries escolares mais elementares ao início do terceiro grau. O último nível é o menos desenvolvido nos trabalhos originais dos van Hiele, assim como nos trabalhos dos demais pesquisadores que abordaram o modelo (KALEFF ET ALL, 1994).

Quadro 2.1: Níveis de Compreensão do Modelo de van Hiele

NÍVEIS DE COMPREENSÃO	CARACTERÍSITICAS
Visualização ou Reconhecimento (nível 1)	- Reconhece visualmente uma figura geométrica; - Tem condições de aprender o vocabulário geométrico; - Não reconhece ainda as propriedades de identificação de uma determinada figura.
Análise (nível 2)	- Identifica as propriedades de uma determinada figura; - Não faz inclusão de classes.[5]
Dedução Informal ou Ordenação (nível 3)	- Já é capaz de fazer a inclusão de classes; - Acompanha uma prova formal, mas não é capaz de construir uma outra.
Dedução Formal (nível 4)	- É capaz de fazer provas formais; - Raciocina num contexto de um sistema matemático completo.
Rigor (nível 5)	- É capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas; - É neste nível que as geometrias não-euclidianas são compreendidas.

2.4.2 – Propriedades do Modelo

O modelo proposto por van Hiele faz parte de uma teoria do desenvolvimento e, portanto, o aluno só poderá atuar num determinado nível se já tiver adquirido, através de experiências de aprendizagem adequadas, as estratégias dos níveis anteriores, não sendo permitido que sejam dados saltos.

[5] Na Teoria Piagetiana é quando a criança compreende noções como as de que uma subclasse nunca pode conter mais elementos do que a classe maior a que ela pertence. No ensino da Geometria, este fato é percebido quando o aluno compreende que todo quadrado é um retângulo, por exemplo.

A progressão ou não do aluno, na passagem de um nível para outro, depende mais dos conteúdos recebidos por este do que de sua idade. Além disso, na transição entre diferentes níveis, os objetos próprios de um estágio se transformam em objetos de estudo no estágio posterior e uma relação que é aceita como correta em um nível pode ser modificada no seguinte.

Diferentes autores ressaltam alguns aspectos que são essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Eles utilizam diferentes denominações para estes aspectos (PURIFICAÇÃO, 1999).

2.4.3 – Fases da Aprendizagem

No modelo de van Hiele, quando o ensino é desenvolvido de acordo com as fases de aprendizagem, há o favorecimento para a aquisição de um nível de pensamento num dado assunto da geometria. O quadro 2.2 relaciona as fases de aprendizagem do modelo de van Hiele, destacando as características de cada uma delas.

Após a fase de integração, o aluno deverá ter atingido um novo nível de compreensão e novamente as fases de aprendizagem se repetirão para que o aluno seja levado a atingir o nível subseqüente.

NASSER(1991) ressalta que as fases delineadas no modelo de van Hiele podem ocorrer de forma simultânea e em diversas ordens. Porém, a última fase só deve ser utilizada após o desenvolvimento das anteriores, imprescindíveis para fornecer as estruturas de aprendizagem.

Um importante fato, considerado por vários autores, é a relação existente entre a a teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget e o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele.

Quadro 2.2: Fases de Aprendizagem do Modelo de van Hiele

FASES DE APRENDIZAGEM	CARACTERÍSTICAS
Questionamento ou Informação (fase 1)	- Professor e aluno dialogam sobre o material de estudo; - Apresentação de vocabulário do nível a ser atingido; - O professor deve perceber quais os conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ser estudado.
Orientação Direta (fase 2)	- Os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor; - As atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.
Explicitação (fase 3)	- O papel do professor é o de observador; - O alunos trocam experiência, os pontos de vista diferentes contribuirão para cada um analisar suas idéias.
Orientação Livre (fase 4)	- Tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia.
Integração (fase 5)	- O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas ou discordantes idéias.

Piaget identificou quatro fatores atuantes no processo de desenvolvimento cognitivo: maturação, experiência com o mundo físico, experiências sociais e equilibração. A equilibração e a maturação eram os fatores mais importantes para a passagem de um estágio de desenvolvimento a outro.

Na teoria de van Hiele, entretanto, a principal preocupação é com relação ao processo de ensino-aprendizagem em geometria; este sim, um meio através do qual o estudante atinge certo nível de desenvolvimento.

O próprio van Hiele diferencia as duas teorias, ressaltando que a psicologia de Piaget era de desenvolvimento e não de aprendizagem, mas admite ter recebido algumas influências após leituras de alguns textos piagetianos. Foi a partir destas leituras que ele começou a estruturar a sua teoria.

CAPÍTULO 3

A INFOMÁTICA APLICADA À EDUCAÇÃO

A tecnologia informática tem se tornado tão presente em nosso cotidiano que o uso do computador tem adquirido importância cada vez maior no dia-a-dia das escolas e no desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem. Até o momento, entretanto, ainda persiste a dúvida se esta crescente presença do computador em diversas atividades de nossas vidas poderia gerar uma revolução na educação.

No presente capítulo há uma descrição de algumas políticas públicas recentes que visam a expansão do uso dos computadores em escolas públicas brasileiras e de como estas políticas têm se preocupado com a formação e o aperfeiçoamento do professor.

Algumas questões teóricas sobre a utilização dos computadores como recurso pedagógico e sobre a importância que os *softwares* educacionais adquirem neste processo também são descritas e analisadas neste capítulo.

Como o assunto central de todo este trabalho é o conhecimento geométrico, também foi elaborado um estudo que visava compreender os benefícios e contribuições da introdução de tecnologia informática para a aprendizagem da geometria, enfocando principalmente os recursos, as potencialidades e as limitações dos *softwares* de geometria dinâmica que ajudam a enriquecer o processo de ensino-aprendizagem desta disciplina. Eles estão apresentados em linhas bem gerais e são representativos das possibilidades e avanços para a aprendizagem da geometria, porém ainda há outros que certamente ampliariam a discussão aqui apresentada.

3.1– Políticas de Expansão da Tecnologia Informática

Uma das primeiras iniciativas para a implantação do uso do computador em escolas públicas brasileiras ocorreu nos anos 80 através do Projeto EDUCOM[1] que congregava as seguintes universidades: UFMG, UFPE, UFRJ, UFRGS e UNICAMP.

Este projeto tinha como principal objetivo desenvolver pesquisas e metodologias sobre o uso do computador como recurso pedagógico. Cada um desses centros de pesquisa tinha uma característica própria, isto é, enquanto uns se preocupavam mais com o desenvolvimento de *softwares* educativos, outros estavam mais atentos ao uso do computador como instrumento para o desenvolvimento de projetos (ALMEIDA, 2003).

Ainda que os objetivos iniciais não tenham sido atingidos completamente, a partir desta iniciativa houve a formação de grupos de pesquisa que deram prosseguimento as suas investigações, contribuindo para a continuação deste processo de qualificação e sensibilização de recursos humanos.

Um outro projeto interessante foi o FORMAR, Programa de Ação Imediata em Informática na Educação de 1º e 2º graus, criado em 1986 pelo Ministério da Educação e Cultura como parte do Projeto EDUCOM. Ele tinha como objetivo principal capacitar professores e implantar infraestruturas de suporte nas secretarias estaduais de educação, através dos CIED's (Centros de Informática Aplicada à Educação de 1º e 2º graus). Além destes centros ainda existiam os Centros de Informática na Educação Tecnológica – CIET (relativo às escolas técnicas) e o Centro de Informática na Educação Superior – CIES (relativo às universidades).

[1] COMputadores na EDUcação, de acordo com informação de BORBA & PENTEADO (2001), p. 19.

Cabia à cada secretaria de educação e à cada instituição de ensino técnico ou universitário definir sua proposta pedagógica.

A partir da base consolidada foi possível a criação, em 1989, do PROINFE (Programa Nacional de Informática na Educação), dando continuidade aos projetos anteriores e possibilitando a criação de laboratórios e centros para a capacitação de professores.

O programa atualmente em vigor é o PROINFO (Programa Nacional de Informática na Educação), lançado em 1997, através da Secretaria de Educação à Distância (Seed/MEC), com o objetivo de estimular e dar suporte para a introdução de tecnologia informática nas escolas dos níveis de ensino fundamental e médio do Brasil.

A principal característica do PROINFO, e também o que ele traz de mais original em sua proposta, é a preocupação em colocar o computador dentro da escola pública, permitindo que os alunos deste sistema de ensino também tenham acesso ao uso de tecnologia informática para a sua aprendizagem.

Desde os primeiros projetos, entretanto, sempre houve uma preocupação com a qualificação e sensibilização do professor para utilizar adequadamente o computador como recurso pedagógico. No caso do PROINFO, esta preocupação se traduziu na criação dos Núcleos de Tecnologia Educacional, NTE's.

Ao se analisar os resultados da implementação de algum projeto faz-se necessário, antes de tudo, conhecer as intenções e objetivos do mesmo para posteriormente se constatar quais deles foram atingidos.

De acordo com as Recomendações Gerais para a Preparação dos Núcleos de Tecnologia Educacional do PROINFO, estes núcleos devem ser estruturas descentralizadas de apoio permanente ao processo de introdução de tecnologia nas escolas públicas do ensino fundamental e médio e deverão estar instalados em dependências escolares já existentes a fim de atender até

50 escolas, através de uma equipe composta por educadores (professores multiplicadores) e especialistas em Informática.

Ainda conforme o citado documento, os NTE's se responsabilizam pelas seguintes ações:

(a) Sensibilização e motivação das escolas para implementação da tecnologia de informação e comunicação;

(b) Apoio às escolas na elaboração de seus projetos de informatização, estabelecendo um vínculo de parceria que deve facilitar a troca de informações com as mesmas;

(c) Capacitação e reciclagem dos professores e das equipes administrativas das escolas;

(d) Realização de cursos especializados para as equipes administrativas das escolas;

(e) Apoio para a resolução de problemas técnicos decorrentes do uso do computador nas escolas;

(f) Assessoria pedagógica para o uso da tecnologia no processo de ensino-aprendizagem;

(g) Acompanhamento e avaliação local do processo de informatização das escolas.

Após a verificação dos objetivos acima e das ações reais implementadas pelos diversos NTE's distribuídos por algumas regiões e cidades brasileiras, é possível constatar que algumas destas ações ainda estão nas intenções, porém não se pode dizer que a realidade da utilização de tecnologia nas escolas públicas é a mesma de antes da criação dos núcleos.

Num estudo realizado por alunos da disciplina Informática e Educação do mestrado do IM-NCE/UFRJ, ministrado em 2002, constatou-se que ainda há pouca autonomia, por parte da maioria destes organismos, para o recebimento e aplicação dos recursos financeiros. Mesmo assim, parece que não houve grande perda em relação à função descentralizadora que os NTE's exercem, uma vez que eles continuam sendo os definidores de como são oferecidos os cursos de capacitação dos professores e, além disso, estão em contato direto com a realidade que estes profissionais vivenciam no cotidiano escolar, podendo propor ações e projetos para a superação das eventuais dificuldades encontradas (GINAPE, 2002).

Não está clara ainda, porém, a partir das informações obtidas através da página do PROINFO na internet e de entrevistas realizadas para o estudo feito pelo GINAPE (2002), a eficácia das ações dos núcleos em relação aos itens (a), (d), (e) e (g).

Um importante aspecto que também deve ser ressaltado é que houve uma considerável evasão de professores nos cursos de capacitação, devido principalmente às inúmeras dificuldades encontradas pelos mesmos, tais como o deslocamento até os locais dos cursos, a falta de tempo para conciliar seu trabalho com o necessário aperfeiçoamento etc. Além disso, muitas vezes não há qualquer retorno dos professores já capacitados pelos núcleos sobre se houve ou não a multiplicação das idéias de utilização do computador em sala de aula.

Uma revolução não necessariamente se faz apenas em larga escala. No melhor espírito de Heráclito, se alguns professores foram sensibilizados, a realidade já foi modificada mesmo que a mudança não possa ser percebida de imediato.

A melhor contribuição dos NTE's para o projeto de expansão do uso do computador na educação é, portanto, a assessoria pedagógica que eles prestam para que esta ferramenta seja adequadamente utilizada no processo de ensino-aprendizagem.

Em muitos destes núcleos, os cursos de capacitação foram divididos em dois módulos de 60 horas. No módulo I, há uma preocupação em familiarizar e instrumentalizar o professor a utilizar o computador e seus periféricos e normalmente são oferecidas oficinas de *Windows, Word, Excel, Power Point* e Internet.

Em alguns NTE's, o módulo II possui oficinas de elaboração de projetos interdisciplinares para implantação de informática educativa nas escolas, de avaliação de *softwares* educativos, de linguagem LOGO, de utilização de *softwares* de autoria e produção de multimídia etc., evidenciando que há também uma preocupação em capacitar o professor a ter autonomia na utilização do computador em sua aula.

As conseqüências destes cursos, de certo modo, podem ser percebidas através dos pequenos e numerosos projetos em diferentes disciplinas realizados por alunos e professores das diversas regiões atendidas por algum NTE.

As mencionadas oficinas do segundo módulo, onde elas existem, fazem com que estes cursos adquiram um caráter educacional e ao mesmo tempo reflexivo. E assim, o termo **capacitação** deixa de ser o mais adequado, pois o que se obtém, na verdade, é a **sensibilização** dos professores quanto à importância da inserção dessa ferramenta tecnológica na prática escolar.

3.2 – O Uso de Tecnologia Informática como Recurso Pedagógico

O computador pode ser utilizado de diferentes formas na escola, tanto em atividades administrativas, quanto em atividades de ensino-aprendizagem. No processo ensino-aprendizagem, ele normalmente serve para ensinar computação (ensino de informática: linguagens de programação ou aplicativos como *Windows* ou *Office*, por exemplo) ou para a aprendizagem de disciplinas da formação geral do currículo escolar (ensino pela informática), tais como matemática, física, história, geografia etc.

Já faz algum tempo que o uso do computador como recurso pedagógico tem sido visto de uma forma dicotômica: ou ele é um instrumento em que o aluno apenas aperta suas teclas e obedece as instruções dadas, ou ele é a solução para todos os problemas educacionais. O mais importante, entretanto, é refletir sobre a relação entre informática e educação como uma transformação da própria prática educativa.

O primeiro ponto de vista costuma ser ainda mais poderoso dentro de parte da comunidade de educação matemática. Especialmente para aqueles que consideram a matemática base do raciocínio lógico, pois se o raciocínio matemático passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar mais e deixará de desenvolver sua inteligência (BORBA & PENTEADO, 2001).

Estes autores chegam a citar frases comumente ouvidas das pessoas que argumentam desta maneira: "Se meu aluno utilizar a calculadora, como ele aprenderá a fazer a conta?", "Se o estudante do ensino médio aperta uma tecla do computador e o gráfico da função já aparece, como ele conseguirá, 'de fato', aprender a traçá-lo?" (BORBA & PENTEADO, 2001, p.12).

O segundo argumento foi mais intenso nos primeiros anos em que o computador era uma novidade na escola. Esta tendência tende a pensar sobre computadores como objetos que agem diretamente no pensamento e na aprendizagem, reduzindo os mais importantes componentes no processo educacional, as pessoas e as culturas, a um papel secundário. (CYSNEIROS, 1996).

PAPERT (1985) utiliza o termo tecnocentristas para se referir àqueles que acreditam que o uso dos computadores na educação pode acarretar mudanças nas culturas, transformando também, em conseqüência, a forma de pensar e de aprender das pessoas.

Algumas perguntas podem ser feitas a partir da utilização do computador no processo de ensino-aprendizagem: (a) Que mudanças esta tecnologia traz para o dia-a-dia das escolas? (b) Os programas de ensino devem ser modificados para a incorporação desta tecnologia? (c) Qual é o papel do professor nesta nova realidade? (d) E o dos alunos? (e) Há alguma mudança na postura dos alunos (motivação, cooperação etc.)? (f) Esta motivação os leva a aprender mais rápido e com maior profundidade? (g) É maior ou menor o número de alunos que podem desfrutar deste novo recurso?

Algumas destas perguntas continuam sem respostas definitivas e têm sido objetos de estudos e pesquisas. Entretanto é possível apontar ganhos e/ou impactos que a introdução desta nova tecnologia trouxe para o cotidiano da sala de aula ou para os sujeitos envolvidos no processo ensino-aprendizagem:

- O maior impacto que o computador tem provocado no processo educacional advém do fato do seu uso ter causado o questionamento dos métodos e processos de ensino utilizados (VALENTE,1993);
- Em concordância com o impacto anterior, pode-se também dizer que as tecnologias educacionais, de um modo geral, e as tecnologias informáticas, em particular, têm ampliado as formas convencionais de utilização de recursos materiais no trabalho dos professores em sala de aula (CYSNEIROS, 1996);
- Para que os professores possam ampliar esta atuação, eles necessitam de um aperfeiçoamento profissional, e a inserção desta tecnologia na escola estimula este aperfeiçoamento. O computador pode, então, ser até um problema a mais na vida do professor, mas também pode criar novas possibilidades para o seu desenvolvimento como profissional;
- Num primeiro momento pode-se dizer que a inserção do computador traz uma motivação a mais para o cotidiano escolar, uma vez que ele possui cores, movimentos, imagens etc. Há indícios superficiais, entretanto, de que tal motivação pode ser passageira, pois se um determinado *software* for mal utilizado em aula, depois de algum tempo pode se tornar tão enfadonho quanto uma aula com uso intensivo de giz, ou uma outra baseada em discussão de textos, que também podem não motivar (BORBA & PENTEADO, 2001);

- O computador, muitas vezes, oferece melhores condições para que o professor acompanhe as atividades desenvolvidas por um determinado aluno, em comparação com as tecnologias tradicionais. Ele permite, por exemplo, a análise dos passos intermediários utilizados pelo estudante durante a tentativa de resolver uma situação-problema e não apenas dos resultados obtidos;
- Com o uso do computador, o professor-pesquisador pode gerar a estatísticas sobre os resultados dos alunos, possibilitando que se trabalhe sobre algumas hipóteses e se obtenha explicações para o processo de aquisição de conhecimento.

Para analisar e compreender melhor os ganhos ou as desvantagens que o uso desta tecnologia traz para a escola, é necessário que se conheça as relações existentes entre os componentes da prática educacional com a utilização de tecnologia informática.

De acordo com VALENTE (1993), a implantação da informática no cotidiano da escola consiste basicamente de quatro ingredientes: o computador, o *software* educativo, o professor preparado para utilizar o computador como ferramenta educacional e o aluno.

O professor e o aluno são componentes de qualquer situação que se considere no processo de ensino e aprendizagem, assim como a uso de alguma tecnologia, seja ela de papel e lápis, de quadro e giz ou de um vídeo cassete e televisão. No caso de utilização de tecnologia informática, dois novos ingredientes são introduzidos: o computador e o *software*, que adquire grande importância, já que sem ele, o computador não funciona e fica impossível propor qualquer atividade educacional.

VALENTE (1993) indica ainda dois pólos que caracterizam a relação entre os quatro citados ingredientes no processo ensino-aprendizagem. Nos dois pólos há os mesmos ingredientes, mas a polaridade é marcada pela forma como estes ingredientes são utilizados: ora o computador, através do *software,* ensina o aluno; ora o aluno, através do *software*, "ensina" o computador. A figura 3.1 ilustra as situações descritas.

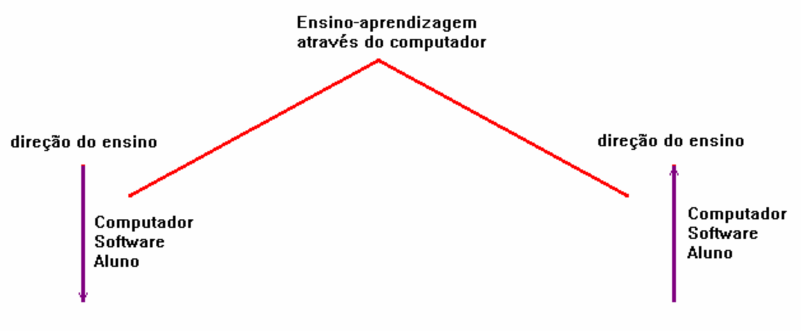


Figura 3.1 : Esquema sobre o Processo Ensino-aprendizagem através do computador
Fonte: BARROSO (1999)

Estes pólos ajudam a compreender que a simples introdução do computador no cotidiano escolar não implica mudanças significativas para a aprendizagem, se este não for utilizado adequadamente. Por este motivo, é necessário que se faça uma escolha criteriosa do *software* a ser utilizado e, principalmente, das atividades que serão aplicadas.

3.3 – Paradigmas para a Classificação de *Softwares* Educacionais

Nos últimos anos, muitos *softwares* educacionais têm sido desenvolvidos por instituições de pesquisa e por empresas interessadas na comercialização dos mesmos. Alguns destes, são de boa qualidade e auxiliam a desenvolver atividades educativas desafiadoras, estimulando o desenvolvimento da inteligência nos alunos, enquanto outros nem tanto.

Devido à escassez de tempo, ocasionada muitas vezes por baixos salários que obrigam o professor a se deslocar de um emprego a outro, nem sempre é possível que este profissional reflita sobre a qualidade do material didático que está utilizando, seja este material um livro ou um *software.*

Deste modo, vários grupos de pesquisa, que trabalham na área de informática educativa, vêm desenvolvendo ações que visam a prática do professor com uso de tecnologia informática na escola, a fim de encontrar formas de oferecer um suporte permanente ao trabalho deste profissional.

Uma das maiores preocupações destes grupos é com relação ao desenvolvimento, classificação e avaliação dos *softwares* educativos.

Quando se fala em desenvolvimento, classificação e avaliação de *softwares* para a educação, não se pode esquecer dos fatores inerentes ao contexto educacional, como as questões éticas, filosóficas, psico-pedagógicas e culturais que influenciam estes processos. Decidir se um novo *software* realmente contribui para o processo ensino-aprendizagem não é tarefa fácil. Por este motivo, o conhecimento de algumas classificações sobre os tipos de *softwares* existentes no mercado pode colaborar com esta empreitada.

Desde a década de 60 do século XX que foram realizadas diferentes classificações sobre os *softwares* educacionais. Em 1977, KEMMIS, ATKIN & WRIGHT, no livro *How Do Students Learn?,* descrevem quatro paradigmas educacionais em que a utilização de *software* educativo pode ser inserida: instrucional, revelatório, conjectural e emancipatório (UNDERWOOD & UNDERWOOD, 1990). Os quais podem ser assim descritos:

- O ***Paradigma instrucional*** que inclui a instrução programada e exercício-e-prática;
- O ***Paradigma revelatório*** em que o aluno faz descobertas através simulações;

- O ***Paradigma conjectural*** em que o computador é um instrumento para construção e avaliação de modelos;
- O ***Paradigma emancipatório*** em que o computador é uma ferramenta para a manipulação de números e/ ou textos ou para tratamento e recuperação de informação, liberando o usuário para concentrar-se no processo de aprendizagem.

Estes paradigmas não eram vistos como categorias mutuamente exclusivas, pois no caso do tratamento e recuperação da informação, por exemplo, classificado inicialmente no paradigma emancipatório, também poderia servir para testar hipóteses e construir modelos, o que o colocaria no paradigma conjectural (UNDERWOOD & UNDERWOOD, 1990).

Estes autores relacionam cada um dos paradigmas acima às quatro condições para aprendizagem descritas por R. M. Gagné no seu livro intitulado *The Conditions of Learning* (1970):

- Aprendizagem intelectual, que inclui a aprendizagem, a prática e a verificação de regras ou conceitos (por exemplo, os programas de exercício-e-prática);
- Aprendizagem Cognitiva, que inclui a resolução de problemas com a utilização de regras previamente aprendidas (por exemplo, jogos de aventura e simulações);
- Aprendizagem através de informação verbal (e, no caso dos computadores, também se considera a informação visual) que inclui a aprendizagem por meio da audição, leitura e visão com relação a algum assunto (por exemplo, programas de demonstração que incluem algumas simulações);
- Aprendizagem através de habilidades motoras que inclui o desenvolvimento e verificação das habilidades motoras (por exemplo, jogos de RPG).

A análise de tais classificações revela que os critérios empregados são ao mesmo tempo explícitos e implícitos. KEMMIS, ATKIN & WRIGHT (1977) destacam que os programas de exercício-e-prática possuem uma natureza de aprendizagem passiva, em contraste com os programas revelatórios que possuem uma natureza de aprendizagem ativa. Os programas emancipatórios e os conjecturais, por outro lado, são direcionados ao usuário e, principalmente no caso dos primeiros, tais como os processadores de texto, os objetivos são mais definidos pelos usuários que pelo próprio *software* (UNDERWOOD & UNDERWOOD, 1990).

Recentemente diversos autores (PAPERT,1985; VALENTE, 1993; CYSNEIROS, 1996; ALVES, 2003, entre outros) têm inserido os *softwares* educativos, tanto com relação ao seu desenvolvimento quanto à sua utilização, em duas diferentes abordagens educacionais, ainda que usando outras denominações:

- **Paradigma Instrucionista:** VALENTE (1993) se refere aos *softwares* com este tipo de abordagem como aqueles em que o computador é utilizado como máquina de ensinar e CYSNEIROS (1996) diz que eles são uma forma de transposição para o computador de formas tradicionais de ensinar. Este tipo de programa educativo tem como fundamento a teoria comportamentalista ou behaviorista[2] e se caracteriza por passar informações ao aluno ou verificar a quantidade de conhecimento acumulado por ele. São exemplos de *softwares* com esta abordagem os tutoriais, exercícios-e-prática, jogos educativos ou algumas simulações.

[2] Na Teoria Behaviorista ou Comportamentalista, cujo principal representante é Skinner, os alunos são conduzidos pelas mesmas regras para receber informações sobre conteúdos específicos que podem ser decompostos em pequenas unidades.

ALVES (2003) destaca que:

> O *software* instrucionista não deixa explícito o pensamento do aluno que o utiliza. Para que o professor descubra o que o educando pensa em relação ao tema e possa intervir para provocar reflexões significativas, é preciso que ele acompanhe todos os passos da exploração e questione exaustivamente o aluno. Além disso, não dispomos no mercado de uma gama de softwares com qualidade e adequação para o desenvolvimento cognitivo-afetivo dos alunos. A maioria deles conduz a uma atividade mecânica e repetitiva, que desperta só momentaneamente a motivação, e deixa para o professor o trabalho de provocar a reflexão dos educandos (ALVES, 2003, p. 16)

- **Abordagem Construcionista:** VALENTE (1993) constata que os *softwares* desta categoria são aqueles em que o computador é utilizado como uma ferramenta educacional e CYSNEIROS (1996) afirma que eles são uma forma de aplicação dos recursos inerentes ao ensino e à aprendizagem de conteúdos específicos. Este tipo de *software* tem como fundamento a Epistemologia Genética e as Teorias Cognitivistas e pode ser representado por processadores de texto, pesquisa de banco de dados, resolução de problemas de diferentes domínios do conhecimento, *softwares* de geometria dinâmica e linguagens de computador, como o LOGO, por exemplo. Através dos programas desta abordagem, o aluno necessita demonstrar seu conhecimento ao computador a fim de indicar as operações que devem ser processadas para produzir os resultados desejados, enquanto o professor deve esforçar-se para compreender o processo mental que o aluno utilizou para estimulá-lo, questioná-lo, ajudá-lo a interpretar as respostas e colocar novos desafios que possam auxiliá-lo na compreensão de uma determinada situação-problema, acumulando, assim, novos conhecimentos.

Neste caso,

> é necessário que o professor crie um ambiente que estimule o pensar, que desafie o aluno a aprender e construir conhecimento individualmente ou em parceria com os colegas, o que propicia o desenvolvimento da auto-estima, do senso crítico e da liberdade responsável (ALVES, 2003, p.21).

Toda a discussão em torno da classificação dos diferentes tipos de *softwares* educativos é bastante importante; entretanto, torna-se ainda mais interessante refletir sobre os efeitos que cada tipo de programa provoca na aprendizagem e na motivação dos alunos.

Nesta dissertação, a principal preocupação é com relação aos *softwares* educativos utilizados na aprendizagem da geometria e como eles podem contribuir para a construção dos conceitos geométricos e para a mudança das estratégias pedagógicas utilizadas pelo professor de matemática em suas aulas.

A seguir serão descritos alguns recursos, potencialidades e limitações dos *softwares* de geometria dinâmica. Além disso, será feita uma análise de como algumas das principais características destes *softwares* podem colaborar para o processo de visualização de objetos geométricos e para a realização de provas de alguns de resultados geométricos.

3.4 – Um Estudo dos Recursos, Potencialidades e Limitações da Geometria Dinâmica

O termo geometria dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc*. com o objetivo de diferenciar este tipo de *software* dos demais *softwares* geométricos. Comumente ele é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, não devendo ser visto como referência a uma nova geometria.

O desenvolvimento destes *softwares* foi proporcionado pelos avanços nos recursos disponíveis no *hardware* dos computadores pessoais. Eles apareceram a partir do crescimento na capacidade de memória e na velocidade de processamento das informações dos microcomputadores, além do surgimento do *mouse* como meio de comunicação do usuário com a interface gráfica.

Além de serem importantes ferramentas para o ensino da geometria euclidiana, estes *softwares* também costumam ser usados em outras áreas da geometria, como as geometrias não-euclidianas, geometria analítica e geometria descritiva, assim como podem ser explorados em outras áreas como a física, por exemplo.

3.4.1 – Recursos

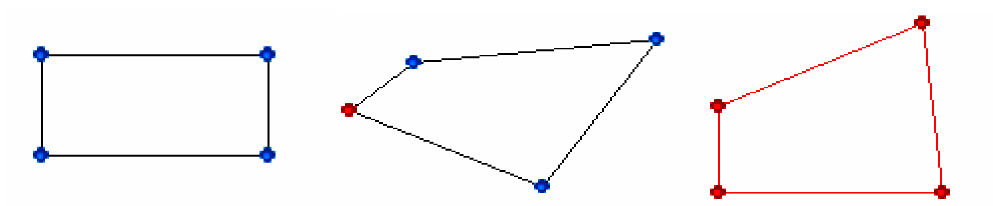
Ao abrir qualquer programa de geometria dinâmica, o usuário se depara com uma tela em branco e uma grande gama de recursos que possibilitam que ele caminhe em direção à construção do seu conhecimento em qualquer uma das áreas já mencionadas.

Estes recursos podem ser desde o uso de **cores** nos desenhos até a existência de uma **calculadora interna** e a possibilidade de medição de ângulos, distâncias e áreas, ocorrendo a atualização dos valores em tempo real a partir da movimentação da figura.

Se um determinado problema requer o uso de sistemas de coordenadas, estes *softwares* disponibilizam tanto as **coordenadas cartesianas** quanto as **polares**, porém alguns deles são visualmente mais detalhados e mais fáceis de manipular que outros.

Uma outra possibilidade para o usuário é a criação e arquivamento de construções que podem ser utilizadas numa outra situação, através de **macro-construções ou *scripts.***

O **arrastar** talvez seja o principal entre todos recursos destes *softwares*. Através do *mouse* é possível clicar sobre um ponto do objeto geométrico construído e depois arrastá-lo pela tela, criando um movimento que provoca uma mudança na configuração. A questão sobre ***o que*** se pode arrastar e sobre ***por que*** arrastar permite a diferenciação entre construir uma figura ou simplesmente desenhá-la. Quando constrói uma figura, o usuário não pode fazer apenas uma aproximação e sim ter a clareza sobre as relações entre os diferentes elementos da figura, senão ela não mantém seu formato original ao ser arrastada. A figura 3.2 mostra o que ocorre a um retângulo desenhado sem a utilização de suas propriedades quando um de seus vértices é arrastado.



(i) (ii) (iii)

Figura 3.2: Exemplo de retângulo mal construído (i), após o arrastar do mouse podem ser gerados os trapézios (ii) e (iii)

Por outro lado, quando o usuário utiliza corretamente as propriedades geométricas na construção, a dinâmica dos movimentos possibilita que ele perceba o que permanece invariante, alertando-o para determinados padrões e motivando-o a fazer conjecturas e a testar suas convicções. O paralelismo, a ortogonalidade, a proporcionalidade, a simetria axial, a simetria pontual (rotação de 180^0) e a incidência são os chamados invariantes geométricos

Uma outra importante característica destes programas é a possibilidade de **supressão de elementos que não interessam** na construção. Um exemplo em que se utiliza este recurso pode ser da própria construção do retângulo através de suas propriedades: só é possível no Tabulae, por exemplo, utilizar a condição dos lados serem perpendiculares, usando retas e não segmentos, isto é, a partir da função <CONSTRUIR> ⇒ <RETAS> ⇒ <RETAS PERPENDICULARES>. Em cima da figura construída desenham-se os segmentos de reta que representam os lados do retângulo, com a função <CONSTRUIR> ⇒ <SEGMENTO DE RETA> e depois as retas devem ser omitidas, selecionando-as e usando a função <EXIBIR> ⇒ <ESCONDER OBJETO>. A figura 3.3 ilustra a situação descrita.

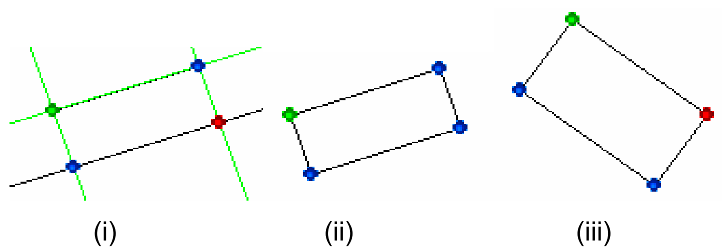


Figura 3.3: (i) retângulo construído sobre retas, utilizando as suas propriedades, (ii) retângulo com as retas ocultas e (iii) retângulo obtido após uma movimentação do mouse, preservando suas propriedades.

Versões mais atualizadas de alguns destes programas dispõem de comandos de traço ou rastro que possibilitam a visualização ponto a ponto da trajetória de um objeto escolhido. Além disso, é possível a animação de figuras, permitindo a simulação de situações físicas, tais como o funcionamento de motores e engrenagens, ou de funções periódicas da Matemática, tais como as funções trigonométricas.

Estes *softwares* também permitem a realização de várias **transformações geométricas,** tais como simetria, reflexão, rotação, translação e homotetia (ampliação e redução).

A construção de lugares geométricos ou *locus* num ambiente computacional ocorre segundo uma abordagem informal, baseada na trajetória de um objeto em função de um caminho conhecido que outro objeto percorre (BELFORT, 2001).

BELFORT (2001) ressalta que este é um dos recursos mais notáveis da Geometria Dinâmica, pois caso o usuário precisasse usar recursos gráficos tradicionais do desenho geométrico, um determinado procedimento deveria ser repetido tantas vezes quantas fossem necessárias para obter uma amostra de pontos do lugar geométrico que reproduzisse um comportamento satisfatório. Enquanto isso, estes programas geram automaticamente uma amostra com um número n de pontos que representam posições possíveis da trajetória do *locus* considerado.

3.4.2 – Potencialidades

As potencialidades dos *softwares* de geometria dinâmica, aqui indicadas, são algumas de suas mais importantes características que ajudam a enriquecer o processo de ensino-aprendizagem da geometria, além de valorizar o conhecimento matemático e a sua construção, através das ações de experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar.

Cada uma destas características está fortemente relacionada às demais, porém elas são apresentadas separadamente com o objetivo de tornar mais inteligível a sua importância.

3.4.2.1 – Precisão e Variedade na Construção de Objetos Geométricos

Um argumento lógico pode oscilar de acordo com que os olhos vêem numa configuração geométrica. Daí a importância da construção de desenhos corretos e precisos e da variedade de construções de uma mesma configuração para a aprendizagem e pesquisa da geometria.

FISCHBEIN (1993), em sua teoria dos conceitos figurais, afirmava que os objetos geométricos se constituem de duas componentes: a conceitual e a figural.

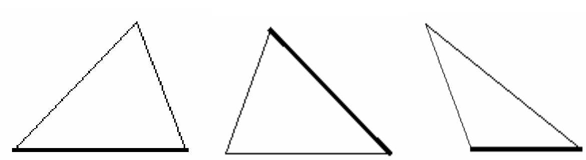
A componente conceitual expressa as propriedades que caracterizam uma certa classe de objetos, através de linguagem escrita ou falada e, num maior ou menor grau de formalismo, conforme o nível de axiomatização considerado.

A componente figural é a imagem ou representação mental associada ao conceito (visualização), com movimentos de translação, rotação etc., mantendo invariantes certas relações.

O equilíbrio e a harmonia entre estas duas componentes determinam a noção correta sobre o objeto geométrico (GRAVINA, 1996). Portanto, o desenho bem realizado adquire grande importância para a obtenção desta harmonia, já que ele é um suporte concreto de expressão e entendimento do objeto geométrico e possui um papel importante na formação de sua imagem mental.

Um aspecto bastante importante é que a possibilidade de construções precisas e variadas, proporcionadas pela geometria dinâmica, permite que representações contingentes (os desenhos prototípicos, por exemplo) não sejam confundidas com as propriedades matemáticas que determinam a configuração geométrica.

GRAVINA (1996) realizou um estudo com alunos ingressantes no curso de licenciatura em matemática da UFRGS, onde solicitou que eles traçassem as alturas dos triângulos representados na figura 3.4, relativamente aos lados destacados.



(i) (ii) (iii)

Figura 3.4: Triângulos a partir dos quais foram traçadas as alturas relativas aos lados destacados

Os resultados mostraram 90% , 17% e 49% de acertos respectivamente em relação aos triângulos (i), (ii) e (iii), evidenciando um desequilíbrio entre componentes conceitual e figural do objeto geométrico, uma vez que a altura do triângulo é um típico exemplo da influência do desenho prototípico, sendo normalmente identificada como o segmento que tem extremidades no lado "base" e no vértice oposto a esta base, estando este segmento sempre no interior do triângulo.

Estes resultados podem ser o reflexo das dificuldades decorrentes do aspecto estático do desenho e da opção pela representação prototípica encontrada normalmente nos livros didáticos de matemática.

Com o **"arrastar"** as particularidades contingentes de uma configuração geométrica mudam, possibilitando uma grande variedade de representações e permitindo a observação das propriedades geométricas invariantes. Deste modo fica possível estabelecer a harmonia entre os aspectos conceitual e figural.

Estas questões mostram como a geometria dinâmica pode colaborar para os processos de formação do conceito de objeto geométrico, permitindo que o aluno não confunda as propriedades de um desenho com as propriedades de um objeto geométrico, ou seja, a posição particular de um desenho não faz parte das características do objeto geométrico considerado.

3.4.2.2 – Exploração e Descoberta

O trabalho com a geometria dinâmica possibilita duas maneiras diferentes de utilização: **atividades de expressão** ou **atividades de exploração**, também chamada de **caixa preta** (GRAVINA, 1996; LABORDE, 1998).

As **atividades de expressão** proporcionam ao aluno a autonomia para construir seus próprios modelos, visando o domínio dos conceitos relacionados à configuração geométrica necessários para sua construção. Nas **atividades de exploração** os alunos recebem as construções prontas e são desafiados a compreendê-las.

Nas duas situações, com a figura construída, o estudante pode movimentar os pontos de base e verificar algumas propriedades através da observação dos invariantes geométricos.

Através da experimentação, **exploração** e análise das propriedades das figuras geométricas, ocorre um estímulo ao raciocínio e o favorecimento da **descoberta** de novas relações e conceitos geométricos.

Ambos os casos são baseados numa interação entre a visualização e o conhecimento de conceitos e propriedades. Novamente aparecem os aspectos intuitivo e lógico da aprendizagem da geometria.

3.4.2.3 – Visualização ou Representação Mental de Objetos Geométricos

Anteriormente foi mencionada a importância da visualização para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Procura-se aqui refletir sobre as possíveis contribuições da geometria dinâmica a este processo.

LABORDE (1998) observou adultos com conhecimento de geometria que tentavam resolver problemas geométricos incomuns num ambiente computacional e constatou que a evidência visual exercia um importante papel no processo de solução: (a) a evidência visual, neste caso, é interpretada em termos geométricos e gera questionamentos que são resolvidos pelo significado geométrico; (b) a análise geométrica provoca novas questões que, num primeiro momento, são exploradas empiricamente através dos *softwares*.

Entretanto, os especialistas estão aptos a gerar diversas questões a partir da evidência visual devido ao seu conhecimento prévio do conteúdo.

Passa a ser um problema interessante investigar se os iniciantes conseguem resolver problemas geométricos nos ambientes virtuais e dinâmicos e como a geometria dinâmica pode auxiliar neste processo. Em outras palavras, é de grande relevância a investigação sobre se a integração de métodos visuais com métodos geométricos, comuns nos programas de geometria dinâmica, contribui para a aquisição do conhecimento geométrico.

As atividades que estimulam a **exploração** e a **descoberta** dos invariantes são realizadas através de experiências visuais, devido a facilidades já mencionadas, tais como a **precisão e a variedade na construção dos objetos geométricos**. Estes atividades possibilitam a formação de noções e conceitos geométricos e levam à representação mental correta destes conceitos por parte do estudante, isto é, acabam auxiliando no processo de visualização.

Para atingir os principais objetivos do ensino da geometria, é necessário que o aluno seja capaz de relacionar os fenômenos visuais aos fatos geométricos, reconhecer visualmente as propriedades geométricas, interpretar os desenhos em termos geométricos e saber realizar construções de configurações geométricas (LABORDE, 1998).

Uma aprendizagem alcança tais metas quando capacita o estudante a utilizar o desenho como um auxílio ao seu raciocínio num nível abstrato, selecionando as informações relevantes extraídas de representações visuais e distinguindo as verdadeiras propriedades dos objetos geométricos daquelas encontradas em representações prototípicas ou contingentes. Para LABORDE (1998) esta é a base para a elaboração das provas de proposições geométricas em ambientes de geometria dinâmica.

3.4.2.4 – Prova

Inúmeros trabalhos têm se preocupado em relacionar a utilização de *softwares* de geometria dinâmica com a prova de resultados geométricos na aprendizagem e na pesquisa (MARIOTTI, 1997; HOYLES & JONES, 1998; GRAVINA, 2000; DE VILLIERS, 2001).

Segundo DE VILLIERS (2001), as principais funções da demonstração em matemática são: verificação ou convencimento (justificar um resultado); explicação (tornar perceptível a razão pela qual uma proposição é verdadeira); descoberta (dar origem a novos resultados); sistematização (organizar vários resultados num sistema axiomático); meio de comunicação (transmitir o conhecimento matemático); desafio intelectual (auto-realização/gratificação pela construção de uma prova).

SILVA (2002) se concentra apenas nas funções de verificação, explicação e descoberta que parecem trazer maiores implicações para o ensino de matemática no nível fundamental e médio.

O primeiro aspecto apresenta a demonstração como um discurso com poder persuasivo, com a intenção de convencer o interlocutor sobre a veracidade da proposição provada. O segundo traz o significado de demonstração tradicionalmente conferido pela lógica matemática. E finalmente no terceiro aspecto, a demonstração possui uma função heurística, segundo uma perspectiva da epistemologia falibilista de Popper, representada em filosofia da matemática pela dialética de provas e refutações de Lakatos.

Para a demonstração desempenhar satisfatoriamente seu papel retórico é necessário que qualquer pessoa possa efetivamente acompanhá-la em cada um de seus passos e para tanto ela não pode ser infinita. A importância do papel retórico na pesquisa avançada em matemática é evidente, uma vez que é objetivo de qualquer pesquisador convencer seus pares sobre a veracidade de suas descobertas. Do mesmo modo, deve ser preocupação de um professor, seja ele de qualquer nível de ensino, o convencimento e a justificativa dos resultados que ele vier apresentar em sala de aula.

O segundo aspecto, o lógico-epistemológico, é o próprio método fornecido pela lógica matemática e usualmente utilizado na pesquisa avançada em matemática. No processo de ensino-aprendizagem, muitos professores acreditam que uma demonstração rigorosa prepare para o domínio do processo dedutivo. Há uma forte crença que quando o aluno acompanha as demonstrações apresentadas pelo professor, ele vai conhecendo algumas estruturas da matemática e, no futuro, acaba desenvolvendo uma autonomia para fazer demonstrações por si mesmo. Esta visão é bastante influenciada pelo formalismo.

Com relação ao papel heurístico, ele só aparecerá numa demonstração, se esta for logicamente falha. Este aspecto é bastante rico tanto para o avanço da pesquisa em matemática, quanto sob o ponto de vista educacional.

A história da matemática registra inúmeros momentos em que matemáticos visionários e insubordinados à ordem estabelecida em sua época, ousaram produzir contra-exemplos de teses demonstradas ou que buscaram estender conceitos envolvidos em uma demonstração para um contexto mais amplo em que aqueles conceitos perdiam a validade. O questionamento do quinto postulado formulado em *Os Elementos* de Euclides levou ao desenvolvimento das geometrias não-euclidianas e as inúmeras tentativas mal-sucedidas ou incompletas de demonstração do último teorema de Fermat levaram a importantes descobertas e até mesmo ao desenvolvimento de novas áreas de pesquisa como a criptografia, por exemplo.

Na educação matemática, a função heurística tem por objetivo levar o aluno a aceitar o desafio de questionar cada passo dado na demonstração, a verificar cada afirmação e a compreender cada resultado. A função retórica, juntamente com a heurística, são normalmente as mais enfatizadas quando se trabalha com a demonstração em informática aplicada à educação.

É importante que o professor sempre incentive seus alunos a conjecturar, a explorar e levantar hipóteses e a refinar as suas crenças e convicções, levando-os a compreender as verdades de proposições matemáticas.

Neste cenário, o computador pode ser um importante aliado e não um obstáculo a mais. Através do manuseio dos *softwares* da geometria dinâmica, o professor pode instigar os alunos a explicarem o porquê da verdade de suas conjecturas, não deixando que as demonstrações fiquem esquecidas e relegadas ao segundo plano.

3.4.3 – Limitações

As limitações encontradas nos *softwares* de geometria dinâmica são, muitas vezes, conseqüências da própria tecnologia utilizada e algumas delas podem, até mesmo, ser exploradas pelo professor em suas aulas.

Quando o usuário desenha retas, semi-retas e segmentos de retas é possível perceber, em alguns momentos, descontinuidade no traçado. Além disso, o professor deve estar sempre atento ao fato de que determinadas medidas obtidas estão sempre sujeitas a erros e aproximações. A precisão das medidas acaba dependendo das limitações da tela, da impressora e de cálculos internos do computador.

SOUZA (1998) aponta a impossibilidade de medição de ângulos poliédricos e de geração de superfícies esféricas como duas importantes restrições ao uso destes programas na aprendizagem da geometria espacial e esférica, quando esta não ocorre através das representações planas.

Muitas outras limitações poderiam ser mencionadas, porém o importante é que o professor sempre fique atento a elas, não entendendo as soluções encontradas pelo *software* como absolutas e sim como uma rica fonte para novas descobertas e explorações.

A partir das representações precisas e variadas de objetos geométricos, obtidas com a utilização dos *softwares* de geometria dinâmica, verificou-se a possibilidade de superação de alguns obstáculos rumo ao processo de representação mental destes objetos, base para a formalização de conceitos.

Além disso, a percepção dos invariantes geométricos a partir da exploração proporcionada pelo "arrastar" do *mouse,* permite que o usuário destes programas refine suas crenças e convicções, faça conjecturas e caminhe no sentido de realizar provas de resultados geométricos, unindo os aspectos intuitivo e lógico, fundamentais para a aprendizagem da Geometria; rompendo, assim, a dicotomia predominante até os dias de hoje.

Todas estas reflexões visaram compreender que a utilização do computador como recurso pedagógico nas aulas de geometria pode evitar que o esquecimento desta disciplina persista no cotidiano de nossas escolas, permitindo que ela volte a ocupar o espaço que lhe é devido nas aulas de matemática. Para isto, o seu ensino deve se adequar à realidade educacional, científica e tecnológica de nossos dias.

3.4.4 – Principais *Softwares*

No mercado há vários exemplos de *softwares* de geometria dinâmica, entre os quais podem ser citados: *Cabri-géomètre* (IMAG/CNRS, França), *The Geometer's Sketchpad* (*Key*

Curriculum Press, EUA), *Geometric Supposer* (*Apple II,* Israel), o pioneiro, Dr. Geo (H. Fernandes, Grenoble, França), *Cinderella* (Alemanha), *Euklid* (Alemanha), Régua e Compasso (França), o *Geometricks,* cuja versão para a língua portuguesa ficou sob a responsabilidade de uma equipe da UNESP – Rio Claro – SP, o *Tabulae* (geometria plana) e o Mangaba (geometria espacial), desenvolvidos no Instituto de Matemática da UFRJ e finalmente o *Calques 3D*, desenvolvido por Nicolas Van Labeke como parte de sua tese de doutoramento em Ciência Computacional na França.

A seguir serão descritos apenas os dois ambientes mais populares do mercado, o *Cabri-géomètre* e o *Geometer's Sketchpad*, e o dois utilizados no presente trabalho, o *Tabulae* e o *Calques 3D*.

3.4.4.1 – *Cabri-Géomètre*

Em 1985, Jean-Marie Laborde propôs a criação de um *software* para a geometria que permitisse a exploração de propriedades dos objetos geométricos e a relação entre elas (PURIFICAÇÃO, 1999). Trata-se do *Cabri Géomètre*, um caderno de rascunho interativo para a geometria (*CAhier de BRouillon Interactive pour la Géomertrie*).

A versão inicial do *Cabri*, conhecida como Cabri I, foi desenvolvida, em 1988, por Jean-Marie Laborde, Philippe Cayet, Yves Baulac e Franck Bellemain, os três primeiros cientistas da área computacional e o último pesquisador da área educacional. Esta primeira versão foi desenvolvida no Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática do Instituto de Informática e Matemática Aplicada de Grenoble da Universidade Joseph Fourier (França), com o apoio do Centro Nacional de Pesquisa Científica (PURIFICAÇÃO, 1999).

Em 1989, o Cabri já estava disponível no mercado francês de *softwares* educativos, através da *Nathan Logiciels* , com o apoio do Ministério da Educação. Depois ele chega a outros países na versão para MacOS e DOS.

O *Cabri Géomètre II* foi desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain, através das mesmas instituições, sendo o resultado da colaboração constante de cientistas de informática, especialistas em educação e professores.

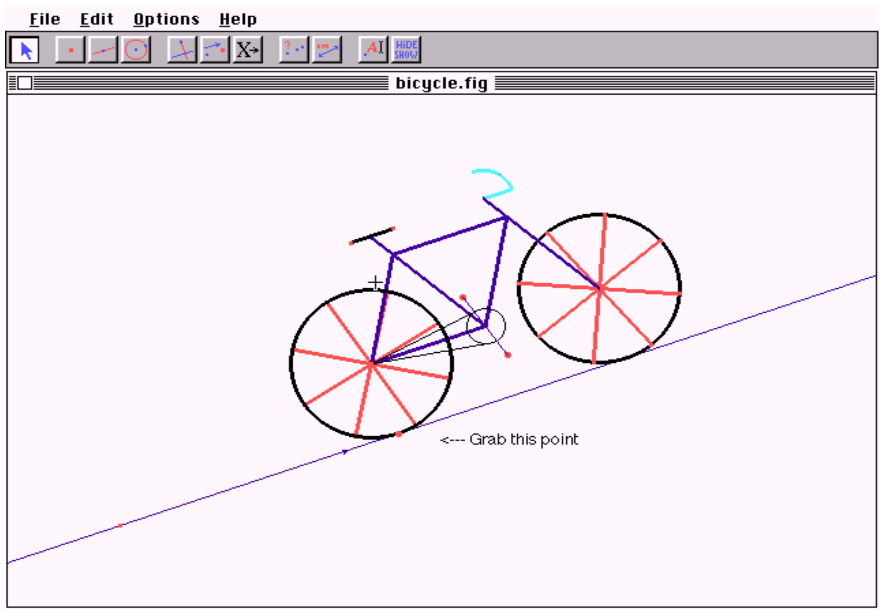


Figura 3.5: Interface do Cabri-Géomètre

O *software* possui uma interface com *menus* de construção em linguagem clássica da geometria, lida com pontos, retas, círculos e suas relações e permite ao usuário realizar construções geométricas. Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem. Além disso, a representação interna do *software* oferece a possibilidade de mover quaisquer dos pontos básicos de uma figura através da manipulação direta com o *mouse*, permitindo que o usuário sempre veja que a figura redesenhada em tempo real mantém todas as suas propriedades iniciais. Esta característica possibilita ao usuário considerar uma figura não como um desenho estático, mas como um conjunto de objetos ligados por relações geométricas.

O *Cabri* possui uma metodologia de trabalho diferente de alguns outros softwares de geometria dinâmica, com relação à sua sintaxe. Através dele, o usuário primeiro determina a ação a ser executada e depois seleciona os objetos desejados (SOUZA,1998).

3.4.4.2 – *The Geometer's Sketchpad (GSP)*

O desenvolvimento do *The Geometer's Sketchpad* foi supervisionado por Doris Schattschneider, do *Moravin College* e Eugene Klotz, do *Swarthmore College* como parte do projeto *Visual Geometry* da *Key Curriculum Press Inc*., na Pensilvânia, EUA. A primeira versão foi lançada em 1991 e já apresentava uma interface bastante simples que permitia a construção de objetos geométricos como se o usuário estivesse usando régua e compasso (MIRA, 2001; SOUZA, 1998).

Através de operações simples, os alunos podem construir e aplicar regras e algoritmos matemáticos na resolução de problemas; estimar e usar medidas de comprimento, massa, tempo etc.; formular hipóteses e realizar experimentos; observar, analisar e explicar relações matemáticas; identificar, descrever, desenhar, comparar e classificar modelos físicos de figuras geométricas; construir modelos bidimensionais e tridimensionais usando uma grande variedade de recursos; conjecturar a respeito de figuras geométricas e de suas propriedades e provar relações e propriedades entre elas, através da incorporação apropriada da tecnologia.

Para realizar uma construção geométrica no GSP, primeiro é preciso selecionar os elementos necessários à construção desejada para depois buscar o comando de execução. Aqui primeiro se seleciona o objeto e depois se realiza a ação, ao contrário do que acontece no *Cabri*.

Para Nicholas Jakiw, o *designer* do GSP, este procedimento foi adotado porque, deste modo, o usuário precisa saber que elementos ele deve utilizar para a construção, pois do contrário o programa não disponibilizará a ação. Além disso, é seguida a convenção do sistema operacional mais difundido do mercado, o *Windows* da *Microsoft* (SOUZA, 1998).

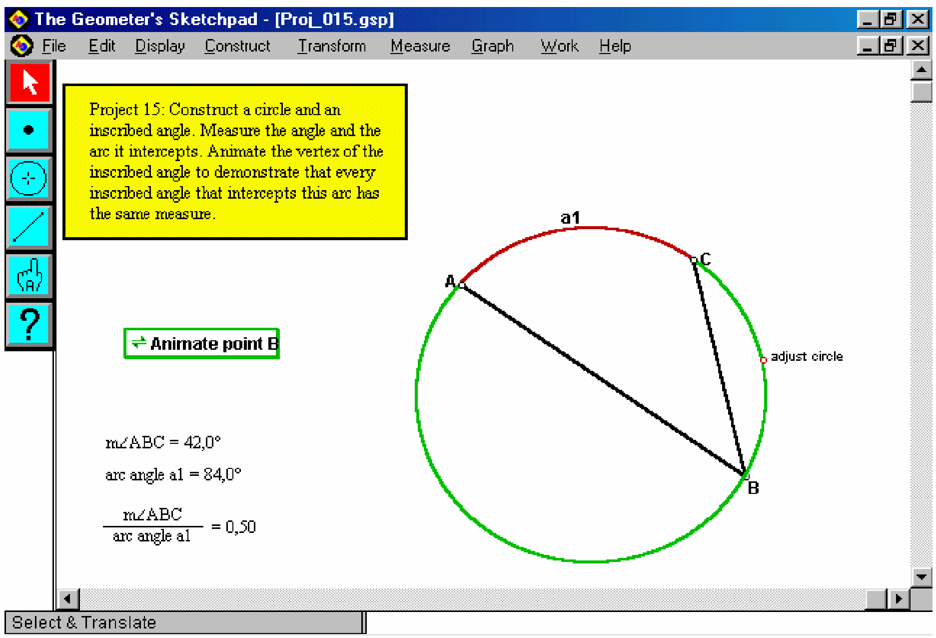


Figura 3.6 : Interface do Geometer's Sketchpad

3.4.4.3 – Tabulæ

O *Tabulæ*[3] é um *software* de geometria dinâmica em desenvolvimento no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

As principais razões para a execução e desenvolvimento do programa foram as considerações de custo e de disponibilidade para os professores que se formam nos cursos de licenciatura plena em matemática e de especialização para professores (BELFORT, 2001).

[3] Este nome era dado ao conjunto de tábuas de cera que os antigos gregos e romanos usavam para rabiscar mensagens e diagramas (BELFORT, 2001; GUIMARÃES, 2001).

Normalmente os *softwares* de geometria dinâmica do mercado apresentam alto custo para o professor e ainda não dispõem de recurso para a comunicação via internet.

O desenvolvimento deste *software*, assim como de um outro chamado Mangaba, faz parte do projeto PACE – Pesquisa em Ambientes Computacionais de Ensino, responsável pelo desenvolvimento de outros materiais voltados para a criação de ambientes colaborativos de aprendizagem via Internet.

O Tabulæ é um *software* inteiramente escrito na linguagem Java e por este motivo apresenta a facilidade de ser compatível com diferentes sistemas operacionais, tais como *Windows*, *Linux* e *Macintosh*. Sua versão atual apresenta as mesmas funcionalidades geométricas de outros programas de geometria dinâmica existentes no mercado.

Como sua concepção é inteiramente orientada a objeto, é possível que novas ferramentas sejam adicionadas ao programa, sem a necessidade de reiniciar seu processo de montagem (BELFORT, 2001; GUIMARÃES, 2001).

O *Tabulæ* permite gerar *applets* que podem ser usados como ferramenta de autoria para redes locais e através da internet. Um usuário pode fazer uma construção geométrica e enviar para outro(s) cujos computadores estejam conectados à rede (GUIMARÃES, 2001).

Através deste programa, é possível que professores e/ou pesquisadores acompanhem passo a passo o trabalho de cada aluno ou em pequenos grupos, possibilitando que tais registros sejam utilizados para avaliações ou para pesquisas sobre a diversidade de soluções apresentadas.

A listagem, gerada pelo programa em linguagem HTML, contém todas as atividades desenvolvidas pelo estudante durante o processo de investigação de um problema, incluindo as etapas das construções realizadas pelo aluno e a indicação do tempo gasto por ele para finalizar cada uma delas.

De acordo com BELFORT (2001), o *design* da interface gráfica envolveu, além dos aspectos estéticos e tecnológicos, elementos que pudessem interferir na comunicação ou apreensão da informação apresentada. Assim, foram levados em consideração no *design*, os aspectos perceptuais, cognitivos e de interação homem-máquina. Também foram mantidos determinadas normas e um vocabulário simples que permitisse que o usuário tivesse familiaridade com conceitos já conhecidos e pudesse aprender com facilidade os novos.

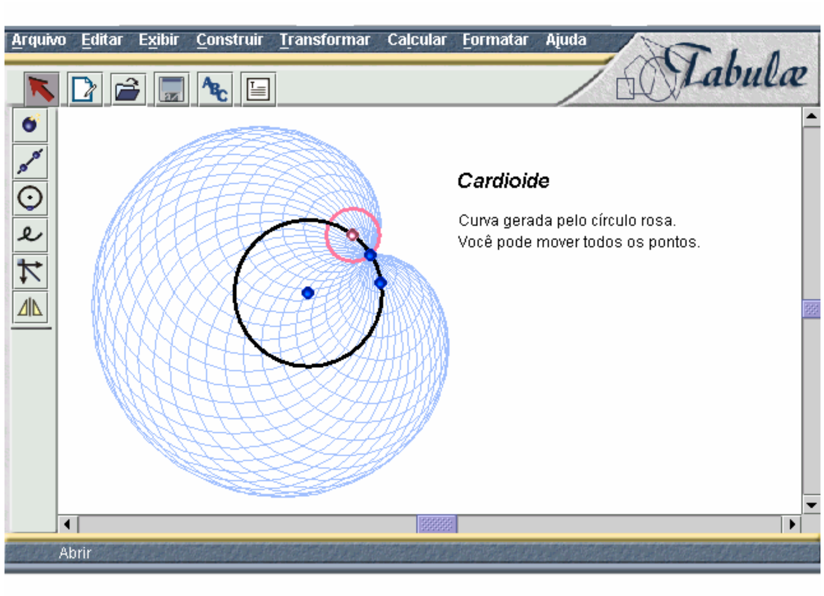


Figura 3.7: Interface do Tabulæ

3.4.4.4 – *Calques 3D*

O *Calques 3D* é um *software* de geometria dinâmica destinado à aprendizagem da geometria espacial. Ele foi desenvolvido por Nicolas Van Labeke como parte de sua tese de doutoramento em Ciência Computacional na França, a partir de trabalho realizado com duas equipes de professores de matemática do ensino médio que auxiliaram a planejar e a desenvolver o sistema.

De acordo com VAN LABEKE (2004) o principal objetivo deste trabalho colaborativo foi prover os professores com um programa que suprisse suas necessidades na abordagem da geometria espacial.

Calques 3D é um micro-mundo planejado para a construção, observação e exploração ou manipulação de figuras geométricas espaciais.

- Observação: permitindo que o usuário veja e compreenda o espaço tridimensional, modificando o sistema de referência espacial (eixos coordenados, solo, paredes etc.), escolhendo a perspectiva (oblíqua, cavalera etc.) e modificando o ponto de vista do observador;
- Construção: permitindo uma construção dinâmica de figuras geométricas a partir de objetos geométricos elementares (pontos, retas, planos etc.) e de suas propriedades primitivas (paralelismo, interseção, perpendicularismo etc.);
- Exploração: permitindo que o usuário explore e descubra as propriedades geométricas das figuras, deformando-as através do "arrastar" de alguns pontos e modificando o ponto de vista do observador.

A interface deste programa permite um acesso bastante intuitivo e adaptável, pois o aluno não necessita ter uma preparação especial para utilizá-lo e o professor pode decidir, de acordo com a seqüência didática preparada por ele, quais funcionalidades devem estar disponíveis ao estudante.

O Calques 3D foi desenvolvido na linguagem C++ 4.5 com cerca de 30000 linhas de código e está disponível para PC 486 ou superior e *Windows* 3.1 ou *Windows* 95/NT ou superior (VAN LABEKE, 2004).

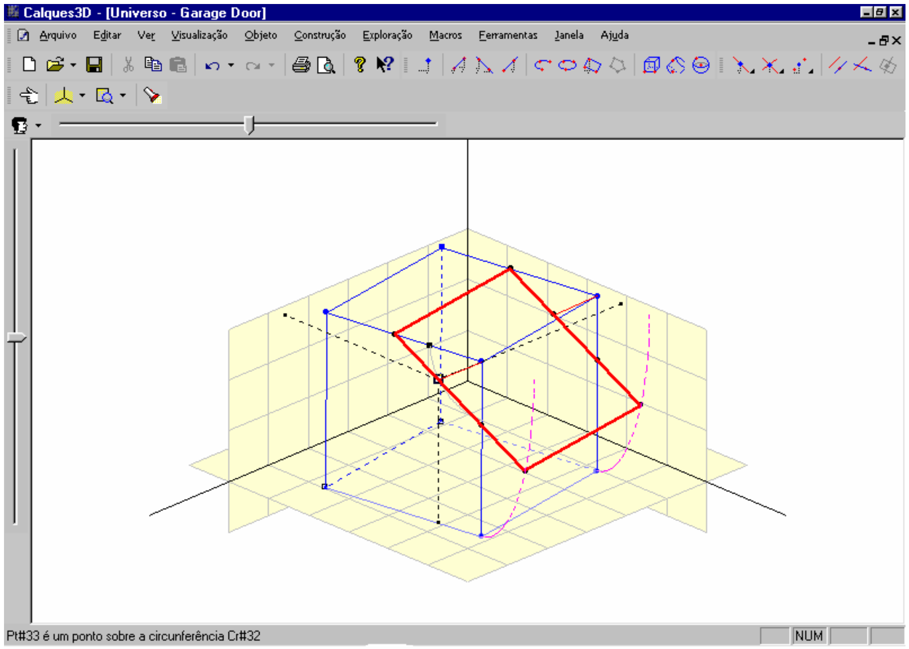


Figura 3.8: Interface do Calques 3D

Em sua versão mais recente há múltiplas formas de representação das construções geométricas realizadas:

- ***Universe (Universo)***, onde o aluno deve desenhar a configuração geométrica;
- ***Tracing (Quadro)***, onde é mostrada uma visão parcial da figura construída na representação principal (***Universo***);
- ***History (Histórico)***, uma descrição textual da figura construída;
- ***MathPad***, permite o acesso à forma algébrica de objetos da figura construída, tais como equações de planos, coordenadas de pontos, medidas de volumes, distâncias e ângulos;
- ***Graph (Diagrama de árvore)***, possibilita uma visão gráfica das relações estruturais da configuração geométrica realizada.

Todas estas representações para a construção realizada estão dinamicamente relacionadas, e cada ação sobre determinado objeto provoca uma mudança em cada uma delas.

CAPÍTULO 4

O MODELO COGNITIVO DO CONHECIMENTO

O construtivismo piagetiano – no qual o indivíduo adquire conceitos quando interage com objetos do mundo – aparece num outro contexto neste trabalho, o da informática, no qual o sujeito interage com o computador, através de um *software* de geometria dinâmica, manipulando conceitos e construindo habilidades que contribuem para seu desenvolvimento mental, tais como o da visualização.

Na Geometria Dinâmica, as atividades que estimulam a **exploração** e a **descoberta** dos invariantes são realizadas através de experiências visuais, devido a facilidades como a **precisão e a variedade na construção dos objetos geométricos**. Estas atividades possibilitam a formação de noções e conceitos geométricos que levam a uma representação mental correta por parte do estudante, auxiliando no processo de visualização (ALVES & SOARES, 2003; ALVES ET AL, 2004).

Na abordagem sócio-construtivista de Vygotsky, o desenvolvimento cognitivo ocorre dentro de um determinado contexto social. E é este aspecto de sua teoria que foi enfatizado durante este trabalho, pois segundo ele os níveis intelectuais das idéias são mais altos quando se trabalha colaborativamente ao invés de individualmente.

Além disso, a linguagem também é um fator importante no desenvolvimento do indivíduo, pois, com base nela, é que se torna possível ocorrer a construção e reconstrução interna de uma operação externa. O plano interno é constituído pelo processo de internalização fundado nas ações, nas interações sociais e na linguagem (VYGOTSKY, 2003).

Traçando um paralelo entre os dois grandes teóricos do desenvolvimento humano, enquanto Piaget apresenta uma tendência que enfatiza o papel estruturante do sujeito, Vygotsky enfatiza o aspecto interacionista pois considera que na troca entre as pessoas é que se originam as funções mentais superiores.

Enquanto no referencial do primeiro o conhecimento se dá a partir da ação do sujeito sobre a realidade (sendo considerado ativo), para o segundo, esse mesmo sujeito não é apenas ativo, mas interativo, porque constitui conhecimentos e se constitui a partir de relações intra e interpessoais.

Outras áreas da Psicologia Cognitiva aparecem neste trabalho, através do Tratamento ou Processamento da Informação, que tem entre suas principais preocupações as questões relativas à resolução de problemas e as formas de representação do conhecimento pelo indivíduo.

Neste capítulo são descritas as principais teorias que fundamentam a pesquisa de campo realizada. As propostas apresentadas pertencem ao modelo cognitivo do conhecimento (CARRAHER, 2002), o qual rejeita o modelo tradicional da educação que trata o conhecimento apenas como a transmissão de conteúdos, informações, coisas e fatos ao aluno.

Uma característica comum das teorias apresentadas é que sempre há uma preocupação em compreender o processo de descoberta e de aprendizagem do estudante. Deste modo, elas investigam como se constrói o conhecimento e como o aluno o representa a partir dos diferentes estágios de desenvolvimento cognitivo em que se encontra, levando em consideração as diferenças individuais.

4.1 – Construtivismo cognitivista de Piaget

4.1.1 – Principais Aspectos da Teoria Piagetiana

Um dos primeiros trabalhos de Jean Piaget na área de psicologia foi em Paris com Binet, co-autor do primeiro teste de inteligência, juntamente com Simon. Sua tarefa consistia na tabulação do número de respostas corretas que as crianças de várias idades davam a questões padronizadas. Piaget, porém, acabou também se interessando pela consistência das respostas erradas destas crianças dentro da mesma faixa etária, dando-lhe uma das idéias centrais de sua teoria: a de que a inteligência de crianças mais novas é qualitativamente diferente da das mais velhas.

A diferença não era quantitativa, porque ele não considerava o maior ou o menor número de itens respondidos corretamente e sim a forma de pensar dos diferentes grupos estudados.

Assim, Piaget rejeitou os testes padronizados de inteligência, dando preferência à maior flexibilidade do método clinico. Ele realizou uma síntese original entre os métodos utilizados por Freud, Bleuler e outros ao estudo da inteligência. Além disso, a partir de seus estudos de lógica, verificou que crianças, antes de aproximadamente 11 anos de idade, não eram capazes de executar certas operações lógicas.

A partir daí, os estudos de Piaget evoluíram para a compreensão das diferenças no raciocínio da criança segundo os estágios de desenvolvimento mental. Tal desenvolvimento ocorre, segundo sua teoria, principalmente através das ações do sujeito com o mundo físico e da **equilibração**.

A **equilibração** é um processo de **adaptação cognitiva** ao ambiente em que a pessoa busca um estado de equilíbrio cognitivo, mesmo quando exposta a uma nova informação (STERNBERG, 2000). Este processo envolve dois outros: a **assimilação** e a **acomodação**.

A **assimilação** é o processo através do qual uma pessoa incorpora uma informação nova aos esquemas cognitivos já existentes e a **acomodação** é o processo pelo qual a pessoa modifica seus esquemas cognitivos para adaptar-se a novos aspectos relevantes do ambiente (STERNBERG, 2000).

Além disso, Piaget descreve o desenvolvimento cognitivo em estágios assim descritos:

- Estágio I – Sensório-motor (0-2 anos): A criança percebe o ambiente e age sobre ele. A principal realização é a permanência do objeto.
- Estágio II – Pré-operatório (2-6 anos): A principal realização neste estágio é o desenvolvimento da capacidade simbólica e lingüística. A criança se caracteriza pelo egocentrismo, atenção focalizada nos estados mais que nas transformações, centração, irreversibilidade, pensamento qualitativo, transdução etc.
- Estágio III – Operações Concretas (7-11 anos): A principal realização neste estágio é a conservação da quantidade. A criança se caracteriza pela descentração, atenção focalizada mais nas transformações, reversibilidade, pensamento quantitativo, apego à realidade empírica, pensamento empírico-indutivo e intra-proposicional.
- Estágio IV – Operações Abstratas (12 em diante): Neste estágio a criança já possui um pensamento hipotético-dedutivo e interproposicional.

A partir da estruturação de seus estudos em estágios ou etapas para o desenvolvimento cognitivo, a **maturação** também adquire alguma relevância, embora haja divergências entre os estudiosos da obra de Piaget sobre o grau desta importância.

A **maturação** é o processo de criação e mudança das habilidades mentais devido a uma crescente maturidade fisiológica (STERNBERG, 2000).

BIAGGIO (1991) assinala que o fato de Piaget falar em estágios de desenvolvimento faz com que muitos lhe atribuam erroneamente uma posição maturacionista. Para esta autora, a obra piagetiana enfatiza a importância da estimulação ambiental como essencial à progressão intelectual de estágio para estágio. Por outro lado, destacando o papel de **maturação** de estruturas cognitivas, Piaget acredita que há um limite para a atuação do ambiente. Deste modo sua posição é mais a de um interacionista do que de um maturacionista ou ambientalista.

STERNBERG (2000), entretanto, considera que a maturação biológica na obra piagetiana é decisiva e que o ambiente desempenha um papel secundário, ainda que importante.

Alguns dos principais conceitos da teoria de Piaget podem ser compreendidos através da clássica tarefa de conservação de quantidade de líquidos.

Quando são mostrados à criança dois copos d'água iguais baixos e largos, ela concorda que eles contêm a mesma quantidade. A seguir, o experimentador passa a água de um dos copos para um terceiro, mais estreito e alto do que os outros, enquanto a criança observa; então, ele pergunta à criança se as duas quantidades de água ainda são idênticas ou se um dos copos contém mais água do que o outro.

O não-conservador típico da pré-escola ou educação infantil normalmente conclui que o copo mais alto e fino agora tem mais água do que o outro. Uma razão para isto é que ele ***parece*** ter mais, e o pré-escolar é mais dado do que a criança mais velha a fazer julgamentos sobre a realidade a partir da ***aparência*** imediata percebida das coisas. Entretanto a criança operatório-concreta infere que as duas quantidades ***ainda são na verdade*** as mesmas, ainda que o copo alto ***pareça*** conter mais água.

As crianças mais novas são mais propensas a centrar sua atenção (daí o termo **centração**) exclusivamente em uma única característica (no exemplo, a altura do líquido), ignorando outras características importantes para a tarefa. Em contraste, as crianças mais velhas têm maior probabilidade de alcançar uma análise mais equilibrada, "descentrada" (daí o termo **descentração**).

Ainda no exemplo da conservação, as crianças pré-escolares tentam resolver o problema voltando sua atenção somente ao **estado final** do experimento ("**centração temporal**") e, dentro dele, sua atenção se volta somente para o nível do líquido mais alto no copo mais estreito ("**centração espacial**"). Os conservadores, ao contrário, podem dizer que as duas quantidades eram idênticas no início (**estado inicial**), ou que o experimentador tinha simplesmente passado a água de um recipiente para outro sem derramar ou acrescentar nada (**transformação interveniente**). Eles podem até mesmo dizer que a igualdade continuada das quantidades pode ser provada passando o líquido de volta a seu recipiente original (**transformação futura ou potencial**, tornando o novo estado igual ao inicial).

As crianças do estágio operatório-concreto percebem, no caso da conservação de líquidos, a existência de uma ação inversa totalmente anulante, que faz tudo retornar ao estado inicial. Ela também pode considerar uma ação que compense ou contrabalance os efeitos de outra (como é o caso, da altura maior num dos recipientes ser compensada pela largura maior neste mesmo recipiente). No primeiro caso alguns piagetianos dizem que houve **inversão** e no segundo caso houve **compensação**.

Na tarefa de conservação de quantidade numérica são colocadas duas fileiras de moedas e a criança concorda que estas fileiras têm o mesmo número de moedas. A seguir, o experimentador expande a segunda fileira e pergunta se uma fileira tem mais moedas do que a outra ou se ambas são equivalentes.

A criança menor muitas vezes carece do equipamento cognitivo para fazer mais do que produzir palpites e conclusões mais simples e acaba respondendo que a fileira mais longa possui mais moedas (**pensamento qualitativo**). Em compensação, a criança operatória-concreta parece compreender melhor que certos problemas têm soluções específicas, precisas e potencialmente quantificáveis, e que estas soluções podem ser alcançadas através do raciocínio em conjunção com operações bem definidas de mensuração, que neste exemplo, seria a contagem (**pensamento quantitativo**). Ela responde, então, que as duas fileiras possuem a mesma quantidade de moedas, depois de realizar uma contagem.

Além destas comparações entre crianças do estágio pré-operatório com as do estágio operatório-concreto, a partir da análise das tarefas de conservação de quantidade, também é possível comparar características cognitivas destas com crianças do estágio operatório-formal.

A subordinação do **real** ao **possível**, mais presente no pensamento do adolescente/adulto, se expressa em um método característico de solucionar problemas, o **hipotético-dedutivo**. O pensador **operatório-abstrato** cria uma história plausível sobre o que está acontecendo, verifica ou faz experimentos para ver o que realmente acontece e então aceita, rejeita ou revisa a história de acordo com eles. Em contraste, a criança dos 7 aos doze anos normalmente necessita realizar experiências concretas para tirar suas conclusões, caracterizando o raciocínio **empírico-indutivo**.

4.1.2 – Revisão Crítica da Teoria Piagetiana

Piaget propôs modelos lógico-matemáticos bastante detalhados de como a cognição está estruturada nos estágios operatório-concreto e operatório-formal. Entretanto estes modelos formais foram alvo de uma intensa avaliação crítica que parece apontá-los como obscuros, incorretos e incompletos para descrições teóricas dos processos mentais fundamentais. Mais tarde o próprio Piaget ficou insatisfeito com estes modelos e explorou outras descrições estruturais em seus últimos escritos.

Além disso, há evidências de pesquisa que sugerem que o período da vida da criança entre as primeiras conquistas de seu desenvolvimento cognitivo de uma determinada estrutura e o momento que este desenvolvimento atinge maior maturidade transcorre durante períodos bastante longos; este fato tem provoca um questionamento para o termo "estágio". O estágio em si, e não a transição para ele, passa a ser o período de mudança e crescimento contínuos. Assim, não se pode predizer as respostas das crianças a tarefas de determinado estágio apenas porque elas estão naquela etapa.

Esta perda da previsibilidade reduz o valor científico do conceito de estágio, mas não o torna sem valor. O fato de que todos estes desenvolvimentos levarem um tempo longo para serem completados não significa que o termo "estágio" não possa ser aplicado ao padrão evolutivo utilizado por Piaget. Neste caso, o conceito de "estágio" adquire um sentido mais dinâmico e se refere a um processo extenso de mudanças evolutivas e interdependentes.

Alguns psicólogos do desenvolvimento acreditam que a simples utilização da palavra "estágio" garante um crescimento coincidente e interligado das características daquela fase em todos os sujeitos. Algumas delas podem se desenvolver mais ou menos na mesma idade, na média, mas seus níveis de desenvolvimento não estão muito correlacionados nos indivíduos. Uma característica pode estar evolutivamente mais avançada do que a outra em uma determinada criança enquanto o oposto pode ser verdade para uma outra. Qualquer coincidência que pode haver é, portanto, do tipo aproximado da média do grupo.

As mudanças dentro dos estágios são mais graduais, importantes e extensas no tempo do que se acreditava originalmente e os desenvolvimentos no mesmo estágio são menos coincidentes que a teoria piagetiana parecia supor.

Assim mesmo, a teoria de estágios continua a ter importantes defensores. Os teóricos neopiagetianos, em particular, continuam a desenvolver modelos de estágios que tentam manter os *insights* do trabalho de Piaget, ao mesmo tempo em que descartam algumas de suas características menos promissoras (tais como as estruturas lógico-matemáticas) e incorporam ênfases modernas não consideradas por Piaget, tais como as mudanças na capacidade de processamento da informação. O sucesso destas teorias ainda é uma questão aberta. Mas, de acordo com FLAVELL, MILLER & MILLER (1999), é difícil acreditar que o desenvolvimento cognitivo não possua algumas propriedades dos estágios gerais como um todo. E, por isso, parece provável que o estudo dos estágios ou pelo menos de suas propriedades continuará.

4.2 – Sócio-Construtivismo de Vigotsky

O principal foco das preocupações de Lev Semenovitch Vigostsky e de seus colaboradores, especialmente Luria e Leontiev, foi o desenvolvimento do indivíduo e da espécie humana como resultado de um processo sócio-histórico. Esta visão possivelmente foi influenciada pelo momento histórico em que suas idéias foram geradas, a Revolução Russa de 1917.

Vigotsky considerava que as origens da vida consciente e do pensamento abstrato estavam na interação do sujeito com as condições de vida social e nas formas histórico-sociais de vida da espécie humana e não no mundo espiritual e sensorial do homem (MULTIRIO, 2000).

Ele acreditava que o longo processo de desenvolvimento cognitivo do indivíduo dependia da interação deste com a vida social. Ao contrário de Jean Piaget que considerava que o desenvolvimento cognitivo se origina "de dentro para fora" pela maturação, considerando que o ambiente pode favorecer ou impedir o desenvolvimento, mas sempre enfatizando o aspecto biológico, Vigotsky achava que o desenvolvimento procedia de fora para dentro, pela ***internalização*** – a absorção do conhecimento proveniente do contexto (STERNBERG, 2000).

Para este autor a Psicologia sempre esteve preocupada em determinar o ***nível de desenvolvimento real*** do indivíduo, ou seja, revelar apenas o produto final, o que o indivíduo consegue responder e não como ele consegue chegar às respostas. Porém a sua preocupação é também com o que ele chamou de ***nível de desenvolvimento proximal*** ou ***potencial*** do indivíduo, quando o sujeito não consegue realizar sozinho determinada tarefa, mas o faz com a ajuda de outros parceiros mais experientes, possuindo, porém, algumas noções ou conceitos já desenvolvidos.

4.2.1 – O Conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal e a Prática Docente

O conceito de zona de desenvolvimento proximal traz algumas conseqüências importantes para o processo educacional:

- O processo de formação de conhecimentos adquire maior relevância, passando a ser considerado tão importante quanto o produto (avaliação final);
- O professor passa a exercer o papel de um agente mediador, propondo desafios aos alunos e ajudando-os a resolvê-los, realizando com eles ou proporcionando atividades em grupo, em que aqueles que estiverem mais adiantados poderão cooperar com os demais;
- O planejamento deve ser constante e a reorganização de experiências significativas para os alunos deve ser contínua;

- O professor deve avaliar tanto a produção independente do aluno (nível de desenvolvimento real) quanto onde ele ainda necessita de ajuda (nível de desenvolvimento proximal);
- Em todo este processo o diálogo e a linguagem também adquirem grande importância.

4.2.2 – A Formação de Conceito na Visão de Vigotsky

VIGOTSKY (2003) considerava que o desenvolvimento dos processos que resultam na formação de conceitos começa na fase mais precoce da infância, porém as funções intelectuais que formam a base psicológica destes processos amadurecem, se configuram e se desenvolvem somente na puberdade.

Para ele, antes dessa etapa podem ser encontradas determinadas formações intelectuais que realizam funções semelhantes àquelas dos conceitos verdadeiros que ainda surgirão. Entretanto ele compara estes equivalentes funcionais aos conceitos, no que diz respeito à composição, estrutura e operação, fazendo uma analogia com a relação existente entre um embrião e um organismo plenamente desenvolvido, ou seja, equiparar os dois significaria ignorar o prolongado processo de desenvolvimento entre um estágio mais inicial e o estágio final.

VIGOTSKY (2003) aponta três fases básicas, que por sua vez estão divididas em vários estágios, que constituem a trajetória até a formação de conceitos:

- *Agregação desorganizada* ou "*amontoado*" – em que o significado das palavras para a criança denota um conglomerado vago e sincrético de objetos isolados que de alguma forma aglutinaram-se em sua mente. Os estágios que constituem esta fase são: *tentativa e erro*, em que cada objeto acrescentado é uma mera suposição ou tentativa e um outro objeto o substitui quando se prova que a suposição estava errada; *organização do campo visual*, em que a posição espacial dos objetos experimentais determina a composição do grupo; *imagem sincrética assentada numa base mais complexa*, em que os elementos são tirados de grupos ou amontoados diferentes, que já foram formados pela criança e são recombinados de modo que a formação tem a mesma incoerência;

- *Pensamento por complexos*, em que os objetos isolados associam-se na mente da criança não apenas devido as suas impressões subjetivas, mas também devido às relações que de fato existem entre estes objetos. É uma nova aquisição, uma passagem para um nível mais elevado. Em um complexo as ligações entre os objetos são concretas e factuais e não abstratas e lógicas. VIGOTSKY (2003) identifica cinco tipos de complexos: (a) *complexo associativo*, em que a criança pode acrescentar ao objeto nuclear um bloco que tenha a mesma cor, um outro que tenha a mesma forma ou tamanho ou algum outro atributo lhe eventualmente lhe chame mais a atenção, esta identificação ainda pode ocorrer por uma simples semelhança, um contraste ou pela proximidade no espaço; (b) *complexo em coleções*, em que a criança se baseia nas relações entre os objetos observados na experiência prática. Esta forma de pensar combina muitas vezes com a forma associativa e resulta em uma coleção baseada em princípios mistos. Ao longo do processo, a criança pode deixar de aceitar o princípio que formou a coleção e considerar uma nova característica, de modo que o grupo resultante se torna uma coleção mista, por exemplo, de cores e formas; (c) *complexo em cadeias*, em que consiste numa junção dinâmica e consecutiva de elos isolados numa única corrente com a transmissão de significado de um elo para outro. Não há coerência quanto ao tipo de conexão ou quanto ao modo pelo qual cada elo articula-se com o que o antecede ou com o que o sucede. A amostra original também não tem importância fundamental; (d) *complexo difuso*, caracterizado pela fluidez do atributo que une os elementos de um grupo, ou seja, grupos de objetos ou imagens perceptualmente concretos são formados por meio de conexões difusas e indeterminadas; (e) *complexo pseudoconceito*, é a ponte entre os complexos e o estágio final, porque embora a generalização formada na mente da criança seja semelhante ao conceito dos adultos, ainda é psicologicamente bem diferente do conceito propriamente dito. VIGOTSKY (2003) menciona o exemplo da criança que diante de uma amostra de um triângulo amarelo pega todos os triângulos do material experimental, ressaltando que é possível que ela tenha se orientado pela idéia ou conceito geral de um triângulo, mas a análise experimental mostra que ele se orienta pela semelhança concreta visível, formando apenas um complexo associativo restrito a um determinado tipo de conexão perceptual;

- *Pensamento por conceitos*, fase em que uma pessoa já consegue formular os conceitos adequadamente.

VIGOTSKY (2003) destaca, então, algumas destas funções intelectuais que mais intervêm no processo de formação de conceitos:

> A formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte. No entanto, o processo não pode ser reduzido à atenção, à associação, à formação de imagens, à inferência, ou às tendências determinantes. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo, ou palavra, como meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e as canalizamos em direção à solução do problema que enfrentamos *(VIGOTSKY, 2003, p.72)*.

Para estudar o processo de formação de conceitos em suas várias fases evolutivas, VIGOTSKY (2003) utilizou um método chamado de método da dupla estimulação que consistia em apresentar dois estímulos ao sujeito observado: um como objetos de sua atividade e o outro como signos que poderiam servir para organizar sua atividade.

O problema era apresentado ao sujeito logo de início e permanecia o mesmo até o final, mas as chaves para a sua solução eram introduzidas passo a passo.

A introdução gradual dos meios para a solução permitia ao pesquisador estudar o processo total da formação de conceitos em todas as suas fases dinâmicas. A formação de conceitos era seguida por sua transferência para outros objetos, ou seja, o sujeito era induzido a utilizar os novos termos ao falar sobre os objetos que não fossem os de sua atividade e a definir o seu significado de uma forma generalizada (VIGOTSKY, 2003).

4.2.3 – O Papel da Linguagem para Vigotsky

A linguagem possui uma função comunicativa que permite ao homem vivenciar um processo de interlocução constante com seus semelhantes e, além disso, também pode funcionar como instrumento da comunicação, permitindo ao homem formular conceitos e abstrair e generalizar a realidade, através de atividades mentais complexas (MULTIRIO, 2000).

VIGOTSKY (2003) considera que a comunicação verbal com os adultos é um poderoso fator no desenvolvimento dos conceitos infantis, pois é o elo de ligação entre o pensamento por complexos das crianças e o pensamento por conceitos dos adultos.

A partir de seus experimentos, ele concluiu que o significado das palavras, da forma como é percebido pela criança na fase dos complexos, refere-se aos mesmos objetos que o adulto tem em mente, o que garante a comunicação entre eles. Entretanto ele também percebeu que a criança apesar de pensar a mesma coisa, ela o faz de um modo diferente, por meio de operações mentais diferentes.

Deste modo, o autor reafirma a importância da linguagem como instrumento de pensamento, destacando que a função planejadora da fala introduz mudanças qualitativas na forma de cognição da criança, reestruturando algumas funções psicológicas como a memória, a atenção voluntária, a formação de conceitos etc.

A linguagem age, assim, na estrutura do pensamento e é ferramenta básica para a construção de conhecimentos. Ela atua para modificar o desenvolvimento e a estrutura das funções psicológicas superiores, do mesmo modo que os instrumentos criados pelos homens modificam as formas humanas de vida.

4.3 – Resolução de Problemas

As teorias do processamento ou tratamento da informação têm como principais investigações as diferentes maneiras de representar o conhecimento, o armazenamento e recuperação da memória, os diferentes raciocínios utilizados no processo de tomada de decisões e a resolução de problemas, entre outras.

Qualquer professor que pretenda trabalhar com resolução de problemas em sala de aula deve perceber antes a diferenciação entre os termos “problema” e “exercício”, pois é necessário que fique claro para o aluno o tipo de tarefa que enfrentará.

Segundo ECHEVERRÍA & POZO (1998) um exercício se caracteriza pelo fato do solucionador dispor e utilizar mecanismos e procedimentos que o leve, de maneira imediata, à solução, enquanto um problema representa uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido, requerendo, porém, a utilização de estratégias ou técnicas já conhecidas.

Um problema é uma situação em que o indivíduo ou um grupo deseja ou necessita resolver e para a qual ainda não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução (LESTER *apud* ECHEVERRÍA & POZO, 1998).

A solução de um problema exige uma demanda cognitiva e motivacional maior que a simples execução de um exercício. O primeiro requer, além do conhecimento procedimental exigido na solução do segundo, a compreensão do significado da tarefa resolvida, isto é, a aquisição de conhecimento de caráter conceitual.

É possível que uma situação seja problema para uma determinada pessoa enquanto a não o seja para outra, pois ela pode não ter despertado o interesse pela situação ou possuir mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos.

No prefácio da primeira tiragem de POLYA (1995), o autor afirma que:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta (POLYA, 1995, p.V).

MEDEIROS (2001) utiliza uma outra terminologia, para ela os problemas fechados são os exercícios e de problemas abertos são os problemas propriamente ditos. Inclusive a adoção de um ou de outro tipo no processo de ensino-aprendizagem define um contrato didático, que são as regras que determinam explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que o professor, o aluno e o conhecimento específico dever fazer e estabelece o que é válido nesta relação.

Um currículo orientado para a solução de problemas é baseado num planejamento de situações suficientemente abertas para induzir os alunos numa busca e aquisição de estratégias adequadas para darem respostas às perguntas escolares e às da realidade cotidiana.

Neste sentido a aprendizagem da solução de problemas só se transformará em autônoma e espontânea se for contextualizada, gerando no aluno a atitude de procurar respostas para as suas próprias perguntas/problemas e habilitando-o a questionar-se no lugar de receber somente respostas já elaboradas num livro-texto, pelo professor ou pelo computador. O objetivo deste tipo de aprendizagem é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender (ECHEVERRÍA & POZO, 1998).

Os estudos psicológicos e as suas aplicações educacionais consideram que a questão da resolução de problemas se fundamenta em duas abordagens distintas: (a) a solução de problemas como forma de aquisição de estratégias gerais em que ensinar a resolver problemas é proporcionar aos alunos essas estratégias gerais para serem aplicadas cada vez que eles se vêem diante de uma nova situação; (b) a solução de problemas como um processo específico de cada área ou conteúdo aos quais os problemas se referem.

4.3.1 – A Solução de Problemas como Forma de Aquisição de Estratégias Gerais

Esta abordagem se divide em dois enfoques: o primeiro deles se refere às características do sujeito que soluciona o problema e nos processos que ele utiliza para solucioná-lo e está baseado na distinção entre pensamento produtivo e pensamento reprodutivo feita pela *Gestalt*, em que o pensamento produtivo consiste na produção de novas soluções a partir de uma organização dos elementos do problema, enquanto que o pensamento reprodutivo consiste na aplicação de métodos já conhecidos. Distinção semelhante àquela feita entre problema e exercício.

O segundo enfoque se refere à distinção baseada nas características da tarefa. A classificação mais utilizada neste enfoque é a que diferencia problemas bem definidos de problemas mal definidos.

O problema bem definido ou estruturado é aquele em que é possível identificar com clareza se foi obtida uma solução, já o problema mal definido ou mal estruturado é aquele cujas normas ou regras que determinam os passos que devem ser dados para a sua solução são menos claras e específicas e, além disso, pode admitir mais de uma solução.

ECHEVERRÍA & POZO (1998) consideram que, com exceção dos exercícios, não existem problemas totalmente bem definidos nem problemas totalmente mal definidos, excetos aqueles que não admitem solução. Além disso, há muito mais exemplos de problemas mal definidos no campo das Ciências Humanas que nas Ciências da Natureza e na Matemática, pela própria natureza destas últimas.

Evidentemente que as diferenças entre estes dois tipos de problemas podem acarretar distintos procedimentos para suas resoluções, porém existe uma série de procedimentos e habilidades que são comuns a todos os problemas e que todas as pessoas colocam em ação com maior ou menor competência.

As fases para encontrar a solução de problemas, descritas por POLYA (1995), têm sido considerados métodos gerais de solução de tarefas, independentes de seu conteúdo (ECHEVERRÍA & POZO, 1998).

Segundo POLYA (1995) a solução de um problema exige:

- A compreensão da tarefa;
- O estabelecimento de um plano;
- A execução do plano para obter a solução;
- O exame da solução obtida.

Para compreender o problema o aluno deve identificar suas partes principais que são as incógnitas, os dados e a condicionante. Por este motivo o professor deve propor diversas perguntas que girem em torno destes aspectos.

Para estabelecer um plano é necessário que se encontre a conexão entre os dados e a incógnita e possivelmente será necessário recorrer a problemas auxiliares ou correlatos ou ainda variar, transformar e modificar, através de generalizações, particularizações e analogias.

A execução do plano vai requerer uma verificação de cada passo a fim de que não reste dúvidas que eles estejam corretos. Tanto a intuição quanto o raciocínio formal podem ser utilizados nesta fase.

Finalmente deve-se fazer uma retrospectiva da solução, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até a ele. Segundo POLYA (1995) esta fase permite que o professor mostre a seus alunos as relações do problema trabalhado com outros problemas matemáticos.

Porém a utilização desses procedimentos não garante por si só o sucesso na resolução de um problema, pois as estratégias apresentadas são métodos vagos e bastante gerais (ECHEVERRÍA & POZO, 1998).

Ainda segundo estes autores estas regras foram aprendidas através da apresentação reiterada de tarefas similares que contribuíram para automatizar métodos de solução que os alunos não possuíam previamente, entretanto as diferenças na utilização de estratégias não dependem, em grande parte de que a pessoa conte com regras suficientes, mas também dependem das características do conteúdo ao qual se aplicam e das instruções que o acompanham.

4.3.2 – A Solução de Problemas como um Processo Específico

De acordo com esta concepção não há regras gerais úteis para a solução de qualquer problema, já que estes métodos, como o proposto por POLYA (1995), são insuficientes e apenas orientadores.

Neste sentido, comparar o rendimento de pessoas com diferentes níveis de perícia numa determinada área ou conteúdo tem sido um bom recurso para compreensão e identificação dos processos psicológicos envolvidos na solução de um problema (ECHEVERRÍA & POZO, 1998).

Alguns pressupostos costumam ser destacados nos estudos que comparam o desempenho de especialistas e principiantes na resolução de problemas:

- A maior eficiência pelos especialistas não seria devido a uma maior capacidade cognitiva geral e sim aos seus conhecimentos específicos, ou seja, os indivíduos destes dois grupos não diferem nas suas capacidades gerais de processamento nem sua inteligência geral e sim em sua formação específica;
- Embora não se diferenciem em suas capacidades gerais dos principiantes, os especialistas destacam-se pela sua maior capacidade de prestar atenção, lembrar, reconhecer, manipular informação e raciocinar sobre ela em sua própria área de especialização;
- As habilidades para a resolução de problemas são efeito da prática, isto é, a solução do problema deve ser treinada através da prática. Porém o que costuma caracterizar a experiência de um bom especialista não é tanto a quantidade, necessária mas não suficiente, mas o fato de sua prática ser orientada por princípios conceituais que lhe dão sentido;
- A eficiência na resolução de problemas depende muito da disponibilidade e da ativação de conhecimentos conceituais adequados.

No processo ensino-aprendizagem, de acordo com esta concepção, os alunos dos níveis de ensino fundamental e médio deveriam adquirir uma perícia específica em diversas áreas do currículo para que pudessem resolver satisfatoriamente os problemas propostos pela escola.

4.3.3 – A Resolução de Problemas Matemáticos

A resolução de problemas tem sido usada em diversas situações escolares como sinônimo da própria matemática, não há área do conhecimento em que esta identificação seja tão próxima, porém na maioria das vezes o ensino desta disciplina tem se baseado mais na solução de exercícios do que dos verdadeiros problemas matemáticos.

Segundo ECHEVERRÍA (1998) a solução de problemas matemáticos constitui, ao mesmo tempo, um *método de aprendizagem* e um *objetivo* da mesma.

Pode ser visto como um *método de aprendizagem* porque grande parte do conteúdo da matemática aprendida na escola trata da aprendizagem de habilidades, técnicas, algoritmos ou procedimentos heurísticos que podem ser usados em diversos contextos. Para que tal aprendizagem seja alcançada é importante que ela ocorre no contexto de diversos problemas.

Também é *objetivo da aprendizagem* na medida em que não é possível aprender a solucionar problemas independentemente da aprendizagem de conceitos e conhecimentos de matemática e que exige o acionamento e coordenação de alguns processos complexos.

De acordo com DANTE (2003) a proposição de problemas numa aula de matemática têm os seguintes objetivos:

- Fazer pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio;
- Ensinar a enfrentar situações novas;
- Utilizar aplicações da matemática;
- Conhecer e executar procedimentos e estratégias heurísticas;
- Dar uma boa base matemática.

Um problema, quando apresentado ao aluno, primeiramente deve ser compreendido para que depois ele possa fazer sua tradução para uma série de expressões e símbolos matemáticos. Somente após esta tradução é que se deve projetar as estratégias para alcançar a solução final, quando então os resultados obtidos devem ser interpretados e analisados.

Apesar de existirem inúmeros problemas que podem ser propostos no processo de ensino-aprendizagem da matemática, "sua utilização não é fácil" (ECHEVERRÍA, 1998, p.51), pois o processo para obtenção da sua solução recebe influência tanto de fatores matemáticos quanto de fatores não matemáticos, sendo que cada um destes fatores exerce uma influência diferenciada, conforme o problema proposto.

ECHEVERRÍA (1998) destaca os seguintes fatores intervenientes, sobretudo, na etapa de tradução das tarefas para as representações matemáticas: *o conteúdo* das tarefas e a sua relação com os conhecimentos armazenados pelo aluno, o *contexto* no qual ocorre, a *forma e a linguagem* que as expressões assumem.

Quando alguém compreende um problema, supõe-se que não apenas compreenda a linguagem e as expressões através das quais o seu enunciado é expresso, reconhecendo os conceitos matemáticos, mas também o assimile ao seu conhecimento armazenado na memória.

Deste modo, a fase de tradução das tarefas para as representações matemáticas recebe influências dos seguintes tipos de conhecimento, os quais estão relacionados aos fatores citados anteriormente:

- *Conhecimento lingüístico*: faz referência à linguagem na qual está redigido o problema;
- *Conhecimento semântico*: faz referência à compreensão do contexto no qual se inserem os fatos;

- *Conhecimento esquemático*: serve para classificar o problema, decidir que dados são úteis e quais os dados que não o são e determinar que ações devem ser realizadas.

A linguagem cotidiana apresenta diferenças em relação à linguagem matemática que podem servir de obstáculo à compreensão de problemas, enquanto a primeira é mais ambígua, imprecisa e contextual, a segunda é mais precisa e rigorosa.

Segundo ECHEVERRÍA (1998), os principiantes ou pessoas com pouco conhecimento de matemática costumam traduzir os problemas numéricos de forma literal, frase por frase, já os especialistas costumam fazer uma tradução mais global. Além disso, os iniciantes tendem a traduzir o problema imediatamente a símbolos numéricos, sem dedicar-lhe um tempo para reflexão. Esta tradução rápida e linear acaba contribuindo para que não sejam detectadas as possíveis inconsistências ou incoerências do texto de um problema, ou que ainda não se tome consciência de possíveis traduções erradas ou incoerentes.

A compreensão do problema ou a sua tradução também pode ser influenciada pelo significado que as características lingüísticas evocam ou pelo choque com os conhecimentos cotidianos que o sujeito possui.

ECHEVERRÍA (1998) cita os seguintes problemas:

- Problema 1: Pedro tem 4 balões. Maria tem 5 balões a mais do que Pedro. Quantos balões tem Maria?
- Problema 2: Pedro tem 4 balões. Maria tem 5 balões. Quantos balões têm os dois juntos?

Segundo a autora o primeiro deles é mais difícil de resolver, pois mesmo que ambos possam ser resolvidos com uma simples soma e os dados sejam os mesmos, o primeiro evoca uma comparação entre duas quantidades, enquanto o segundo requer apenas uma combinação entre os dois conjuntos, estando mais próximo do conhecimento esquemático sobre a adição nos alunos que estão iniciando seus estudos em aritmética.

Uma outra observação importante desta autora diz respeito ao choque que o confronto entre os conhecimentos organizados no sujeito pode provocar, pois um problema pode levá-lo a um certo esquema matemático, porém um esquema do "mundo" pode contradizer o primeiro.

Para exemplificar tal fato ECHEVERRÍA (1998) menciona um exemplo tirado do livro *Processos Cognitivos* de Luria, colaborador de Piaget: sujeitos adultos do Uzbequistão, com baixa escolaridade, deveriam resolver diversos problemas aritméticos sobre as distâncias reais entre as aldeias conhecidas. Estes problemas exigiam que se colocassem em jogo operações aritméticas como multiplicações e divisões com valores simples. Quando os dados que o pesquisador fornecia coincidiam com a experiência dos entrevistados os problemas eram resolvidos sem nenhuma dificuldade, porém quando estes dados contradiziam as informações reais, os sujeitos rejeitavam a tarefa e mostravam-se incapazes de encontrar uma solução.

Segundo ECHEVERRÍA (1998) há ainda poucos trabalhos sobre resolução de problemas matemáticos que se voltam para a compreensão de como as idéias e teorias prévias de sujeitos solucionadores influenciam a maneira deles resolverem as tarefas. As pesquisas sobre solução de problemas em matemática consideram que a atividade cotidiana dos alunos não lhes permitiu criar as suas próprias teorias sobre os fenômenos matemáticos.

Entretanto CARRAHER, CARRAHER & SCHLIEMANN (2001) realizaram diversos estudos em que os sujeitos não chegam a uma explicitação das propriedades e modelos matemáticos conhecidos por eles, mas consideram seus conhecimentos implícitos na organização das ações para buscar soluções para os problemas propostos.

Foram relatadas experiências com crianças trabalhando como vendedores em feira livre ou com alguma atividade de ambulantes e verificou-se que, nesta situação, elas desenvolviam estratégias próprias para resolver problemas de aritmética envolvendo as quatro operações. Estas estratégias se mostraram altamente eficientes porque lidavam com os números, mas conservavam em todos os momentos o seu significado.

Além disso, um outro estudo analisa como estas operações aritméticas são utilizadas para resolver problemas típicos de marcenaria.

Foi feita uma comparação entre o desempenho de marceneiros que haviam aprendido a profissão informalmente (tinham escolaridade de zero a seis anos) e o desempenho de aprendizes que freqüentavam as diferentes séries de um curso formal de marcenaria (onde eram administradas aulas de aritmética, geometria e desenho, destinadas a sua formação).

Neste caso, a tarefa consistiu em calcular a quantidade de madeira para a construção de móveis e o objetivo do estudo foi analisar a contribuição da escolarização formal, em contraste com a contribuição da experiência trabalho, na resolução de problema de matemática relacionados à prática da marcenaria.

Segundo os autores, os resultados obtidos sugeriram primeiramente que, ao tentar resolver um problema prático envolvendo conceitos matemáticos, os indivíduos buscavam encontrar uma resposta relacionada com sua experiência prática. Entre os marceneiros, em todos os momentos da resolução do problema, havia uma preocupação em encontrar uma solução viável. Provavelmente se houvesse, por parte dos aprendizes, a mesma preocupação com a viabilidade de sua resposta, o erro poderia ser percebido e corrigido. Não havendo esta preocupação, a resposta absurda costumava ser aceita sem críticas.

As estratégias de cálculo, embora diferentes entre os grupos, eram igualmente efetivas, sendo o percentual de erros de cálculo muito baixo, tanto entre os aprendizes quanto entre os marceneiros profissionais, mesmo estes últimos apresentando menos anos de freqüência à escola.

As estratégias mais econômicas, como o uso da multiplicação no lugar da adição, apareceram com maior freqüência entre os profissionais.

Apesar de receberem instrução formal sobre como calcular o volume de objetos e de resolverem problemas escolares sobre esse tópico, os aprendizes não conseguiram utilizar este conhecimento escolar para solucionar um problema prático. CARRAHER, CARRAHER & SCHLIEMANN (2001) sugerem, então, que sejam oferecidas ao aluno oportunidades de resolver problemas em contextos práticos.

Para ECHEVERRÍA (1998) a experiência cotidiana parece também possibilitar a aquisição de certas teorias sobre o acaso e os conceitos probabilísticos e permitir que estas teorias correspondam também a métodos pessoais ou procedimentos heurísticos de julgamento para enfrentar as tarefas probabilísticas.

O conhecimento esquemático não é relevante apenas para determinar o tipo de problema que se tenta resolver, como visto antes, mas também para decidir sobre o tipo de informação que deve ser considerada para a obtenção da solução e para planejar a procura desta informação.

KAHNEMAN & TVERSKY (????) propõem ao leitor as seguintes situações:

- Situação 1: Imagine-se a caminho de uma peça de teatro na Broadway com dois bilhetes comprados a 40 dólares. Ao entrar no teatro você descobre que perdeu os bilhetes. Você pagaria novamente 40 dólares por um outro bilhete?
- Situação 2: Agora imagine que você está a caminho da mesma peça de teatro sem ter comprado os bilhetes. Ao entrar no teatro você percebe que perdeu 40 dólares em dinheiro. Agora você compraria os bilhetes para a peça?

As duas situações são idênticas, pois em qualquer um dos casos a pessoa ficará com 40 dólares a menos e deverá decidir se pagará ou não 40 dólares para ver a peça. Entretanto, muitas pessoas disseram que estariam mais dispostas a comprar os novos bilhetes caso tivessem perdido o dinheiro do que se tivessem perdido os bilhetes.

Uma interpretação para esta resposta é que a mesma perda é colocada em categorias diferentes. A perda de 40 dólares em dinheiro entra num item distinto do da peça. Esta perda, portanto, tem uma pequena influência na decisão de comprar novos bilhetes, o custo dos bilhetes perdidos é colocado no item "peça de teatro". A inesperada duplicação de custo, neste caso, é difícil de aceitar.

Recentes investigações da psicologia das preferências têm demonstrado várias discrepâncias entre as concepções subjetivas e objetivas na tomada de decisão. Por exemplo, a perda tem um impacto maior que a possibilidade equivalente de ganho.

Além dos fatores que influenciam na tradução de uma tarefa para representações matemáticas, também devem ser consideradas as técnicas e estratégias para a solução de problemas. Embora o conhecimento destas técnicas representem uma condição necessária para a solução de determinados tipos de problemas, não parece ser uma condição suficiente (ECHEVERRÍA, 1998).

De acordo com ECHEVERRÍA (1998) há trabalhos que concluem que não basta informar aos alunos sobre os diferentes procedimentos heurísticos úteis para a resolução de problemas para que eles os usem em suas tarefas escolares. Para usar este tipo de problema é necessário que tenham aprendido a regular e controlar sua própria atividade ou que o professor realize este controle.

Deste modo o professor de matemática deve ser ao mesmo tempo um modelo do comportamento que se deve adotar na solução de problemas e um treinador de modo que as habilidades e técnicas que o aluno possui sejam usadas de forma estratégica na resolução dos problemas.

4.4 – Representação do Conhecimento

A noção de representação tem se tornado cada vez mais clara e central neste campo de investigação. A utilização de métodos mais confiáveis para acessar o conhecimento deste tipo de entidade deu uma grande contribuição para que tal fato ocorresse (SOARES, 2003).

As duas principais fontes de dados empíricos sobre representação do conhecimento são os experimentos laboratoriais e os estudos neuropsicológicos. No primeiro deles, os pesquisadores observam como as pessoas lidam com várias tarefas cognitivas que exigem a manipulação do conhecimento representado mentalmente; no segundo, os pesquisadores observam como o cérebro normal responde às diversas tarefas cognitivas que envolvem a representação do conhecimento.

A partir da utilização de técnicas e de métodos mais fidedignos, a representação do conhecimento ganhou relevância em outras áreas de pesquisa, tais como na lingüística, na lógica, na informática (sobretudo na inteligência artificial e em banco de dados) e também tem sido crescentemente utilizada em pesquisas educacionais.

Nesta seção houve o interesse em verificar e compreender o conceito de representação mental e de representação não mental, descrever as atividades mentais que compõem o processo de mudança representacional.

A palavra representação, habitualmente utilizada sem adjetivo, deve receber uma distinção quando se refere a representações mentais ou a representações não mentais (SOARES, 2003).

A representação será não mental quando um objeto ou evento físico se referencia a outros diferentes objetos ou eventos físicos. Por exemplo, uma fotografia, uma canção, um desenho ou um quadro pode representar outros objetos que não eles próprios.

A representação mental do conhecimento, ou apenas representação mental, é a maneira pela qual um indivíduo concebe em sua mente os acontecimentos e as coisas que existem fora dela.

Tanto uma quanto a outra forma de representação se constitui de quatro componentes: as duas entidades A e B, em que A é o objeto representando ou representativo e B é o objeto representado; a relação R entre os dois objetos mencionados, e, finalmente, o agente cognitivo C, através do qual A possa representar B (SOARES, 2003).

A relação R entre os objetos A e B pode adquirir diferentes significados: no primeiro deles, ela pode ser uma similaridade ou analogia objetiva, como no exemplo de uma fotografia que registra um momento vivenciado por alguém, esta passa a ser uma representação daquele acontecimento no instante que o mesmo foi clicado; no segundo, R é apenas uma relação acidental, simbólica, em que o símbolo é um objeto lembrança, como a bandeira de um país ou o escudo e as cores de um time de futebol, por exemplo; e, finalmente, R pode ser uma correspondência convencional e arbitrária que pouco importa saber por quem foi fixada, desde que ela seja conhecida ou descoberta pelo agente cognitivo C, como num exemplo geométrico em que a letra grega α pode representar o ângulo interno de algum polígono dado.

No processo de efetivação da mudança representacional, tão importante para o funcionamento cognitivo na resolução de problemas matemáticos, ocorre internamente no agente cognitivo uma reconstrução do ambiente externo e interno do problema (VIEIRA, 2001).

Esta reconstrução se dá, segundo FONSECA (1998), em quatro etapas que caracterizam os níveis de atividades mentais que compõem a representação mental: a percepção, a imagem, a simbolização e a conceitualização. O esquema da figura 4.1 sintetiza todo o processo durante a mudança representacional.

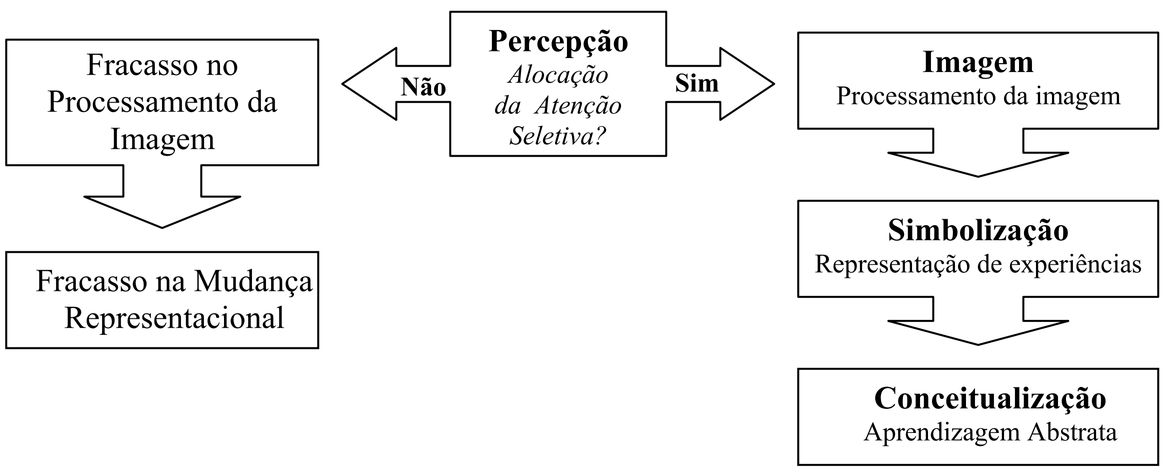


Figura 4.1: Esquema com as atividades mentais que compõem a representação mental

Com o uso da percepção o agente cognitivo reconhece, organiza, sintetiza e dá significado às sensações recebidas dos estímulos ambientais, ocorrendo a decodificação da informação recebida (STERNBERG, 2000; VIEIRA, 2001).

Para VIEIRA (2001), depois que a informação é decodificada, normalmente ocorre a alocação da atenção seletiva para a realização do processamento da imagem e para o prosseguimento do processo de representação mental. Quando o sujeito não consegue alocar a atenção seletiva, a mudança representacional acaba não ocorrendo.

Se a alocação da atenção seletiva for bem sucedida, torna-se possível a elaboração de imagens, fundamental para a continuação do processo, pois esta pode contribuir, em conjunto com as informações já retidas na memória de longo prazo, para dar maior significação à informação inicial.

A partir daí, ocorre, então, a simbolização ou a representação da realidade, possibilitando o aparecimento da próxima etapa, a conceitualização, quando o sujeito adquire condições de realizar uma aprendizagem abstrata através da classificação das experiências.

É importante ressaltar que a figura 2.1 mostra o esquema de um modelo teórico das atividades mentais envolvidas na representação mental do conhecimento, o que não significa que não poderão existir outras maneiras e modelos. A escolha deste se deve, sobretudo, à linha de raciocínio adotada ao longo do estudo.

Alguns trabalhos de filosofia da matemática, de educação matemática e de psicologia cognitiva se voltaram para a compreensão da formação de conceitos, através de teorias que abordaram a questão da representação do conhecimento matemático, de uma forma mais geral, ou do conhecimento geométrico, de uma forma mais específica.

FREGE (1848-1925), FISCHBEIN (1994) e VERGNAUD (1985) enfocaram a importância da intuição, da percepção, da visualização e da representação na construção de um conceito.

O primeiro deles contribuiu para a criação do logicismo, corrente que procurou mostrar que as leis matemáticas possuíam como fundamentos as leis da lógica.

Além desta preocupação com os fundamentos da matemática, Frege também se preocupou com a questão da construção do conhecimento matemático. Para ele um conceito se diferenciava de uma imagem ou representação, pois enquanto o primeiro pertencia ao nível do conhecimento e da idéia, o segundo pertencia ao nível da imaginação. Frege considerava que um conceito tinha uma natureza lógica, com extensão, denotação e era referente (FAINGUELERNT, 1999).

Os processos mentais da formação de conceitos ocorriam a partir de sua representação pela liberdade de imaginar. “Portanto, pensar é objetivo e leva à construção do conceito; imaginar é subjetivo e leva à representação do conceito” (FAINGUELERNT, 1999, p.38).

Para FAINGUELERNT (1999) a representação é, em um certo sentido, um prolongamento da visualização e da percepção e possui a função de dar continuidade às mesmas. Mas ela introduz como elemento diferencial um sistema de significações responsável pela diferenciação entre o significante e o significado.

O *significante* é constituído por signos (linguagem matemática, por exemplo) e símbolos (desenhos, imagens) e o *significado* é o sentido ou o conceito propriamente dito.

Este sistema de significações é de grande importância para a construção de qualquer conceito e em particular para a construção de conceitos geométricos.

Os estudos de FISCHBEIN (1994) voltaram a sua atenção para a compreensão das relações entre os aspectos intuitivos e lógicos, concretos e abstratos e informais e formais da aprendizagem matemática.

O mundo concreto lida com operações que se realizam na prática, com verificação empírica, com evidência direta e com a credibilidade intrínseca dos objetos reais (FAINGUELERNT, 1999).

O mundo matemático trabalha com entidades abstratas cuja existência é fruto de construções mentais, as certezas são estabelecidas por leis formais. As evidências são geradas por deduções, através das provas formais e substituem a evidência direta do mundo real.

FAINGUELERNT (1999) ressalta que no mundo real as propriedades invariantes e as relações com objetos reais são explicitamente dadas, enquanto que no mundo formal as propriedades e relações são justificadas explicitamente. Esta é a grande diferença entre eles. Entretanto, "o mundo das construções matemáticas tem a possibilidade de refletir as características das relações do mundo real" (FAINGUELERNT, 1999, p.39).

Segundo FISCHBEIN (1994) a mente humana foi capaz de aprender a construir um mundo estruturado imaginário governado por regras a partir de realidades gerais básicas da realidade empírica.

Tanto o comportamento simbólico quanto o prático de uma pessoa necessita se basear em fatos inquestionáveis e objetivos. Não há dúvidas, por exemplo, de como desenhar e reconhecer uma linha reta, pois o conceito de linha reta é uma convenção, leva a um significado intuitivo para o indivíduo (FAINGUELERNT, 1999).

> O conhecimento intuitivo é um tipo de conhecimento que não é baseado na evidência empírica ou em argumentos lógicos rigorosos, mas, apesar de tudo isso, tende-se a aceitá-lo como certo e evidente. Freqüentemente, em Matemática, lida-se com entidades e operações que têm um correspondente prático (FAINGUELERNT, 1999, p.41).

Em Geometria, muitas vezes a representação visual é identificada com o conhecimento intuitivo. Os conceitos de figuras geométricas não são objetos geométricos, mas possuem um significado intuitivo para as pessoas, podendo ser manipulados mentalmente (representações internas) à medida que as representações externas (objetos) sejam manipulados.

É recorrendo à intuição que se torna possível interpretar os conceitos matemáticos e falar de funções que crescem, ou de progressões, de sucessões que convergem para algum valor, da altura de triângulo etc.

Uma representação visual serve de "imediação", ou seja, a realidade é diretamente percebida pelo indivíduo e ele, de algum modo, fica emocionalmente envolvido nela. Com uma descrição formal este envolvimento poderia ser menor (FAINGUELERNT, 1999).

Deste modo, no processo de formação de conceitos estão presentes a intuição, a visualização, a percepção e a representação do conhecimento (FISCHBEIN, 1994; FAINGUELERNT, 1999).

A teoria cognitivista de VERGNAUD (1985) aprofunda a análise das relações entre significados e significantes e fornece uma estrutura à aprendizagem e, mesmo não sendo uma teoria didática, acaba envolvendo a didática.

Para ele o conceito de representação é essencial para analisar a formação de concepções e competências, assim como para analisar a formação e os processos de transmissão do conhecimento (FAINGUELERNT, 1999).

Além disso, VERGNAUD (1985) considera essencial a relação do sujeito com o real, pois é partir daí que ele põe à prova suas representações e concepções. Do mesmo modo, estas representações e concepções são responsáveis pela maneira dele agir e monitorar sua ação.

CAPÍTULO 5

UMA APLICAÇÃO DA GEOMETRIA DINÂMICA À GEOMETRIA PLANA: ESTUDO DE CAMPO I

O presente capítulo apresenta um estudo comparativo realizado numa escola técnica pública da zona norte da cidade do Rio de Janeiro.

As inscrições dos alunos foram feitas a partir do Projeto Matemática Zero da escola, que tem por objetivo nivelar o conhecimento matemático de alunos ingressantes na primeira série do ensino técnico. A adesão às aulas foi totalmente voluntária e os alunos que as procuraram eram aqueles interessados em melhorar seu desempenho em matemática e/ou em aprender os conteúdos não vistos durante o ensino fundamental.

A experiência se iniciou no segundo semestre de 2003, quando foi anunciado nos murais da escola o curso de "Geometria Euclidiana Plana – Triângulos", às terças-feiras em diversos horários, com a opção do aluno poder assistir aulas clássicas (na sala de aula tradicional) ou aulas auxiliadas por computador (no laboratório de informática – biblioteca virtual da escola 24 horas). A proposta inicial era apresentar um estudo quantitativo e comparativo.

O número inicial de inscritos foi de setenta e três alunos, trinta e um deles no primeiro grupo e quarenta e dois no segundo. No entanto, já a partir do primeiro encontro, compareceram apenas quarenta e dois alunos, ocasião em que eles foram avisados que aquelas aulas fariam parte de uma pesquisa para elaboração da presente dissertação de mestrado e que seria necessária a aplicação alguns testes e de uma entrevista.

O número de alunos se manteve flutuante, variando sempre entre vinte e vinte e cinco, havia alunos que compareciam a uma aula e deixavam de comparecer à outra e vice-versa.

Ao final do estudo apenas quinze alunos assistiram a todas as aulas e apenas dez fizeram todos os testes e entrevistas.

Deste modo, foi realizado um estudo qualitativo e comparativo cuja finalidade principal foi analisar a contribuição de um ambiente de geometria dinâmica para a formação de conceitos relacionados a triângulos em alunos ingressantes no ensino técnico, em contraste com os resultados apresentados por alunos que tomaram contato com este mesmo conteúdo a partir de aulas clássicas de geometria euclidiana plana.

5.1 – Metodologia

O estudo documentado neste capítulo teve como preocupação central compreender os seguintes problemas:

- Um *software* de geometria dinâmica contribui para uma melhor formação de conceitos sobre triângulos em estudantes ingressantes no ensino médio?
- A partir da utilização deste tipo *software*, há uma melhor compreensão dos tipos de triângulos e de suas cevianas?
- O material virtual permite que os sujeitos desenvolvam ou aperfeiçoam a habilidade de visualização destes polígonos, tópico presente no currículo de geometria euclidiana plana?

A hipótese de trabalho adotada foi que a mudança de sistemas de representação numa aula de matemática do caráter exclusivamente estático para o dinâmico, ou seja, a passagem de simples observações de objetos geométricos em livros didáticos ou na aula clássica de geometria para aulas em ambientes dinâmicos traz reflexos positivos para o funcionamento de alguns processos cognitivos dos alunos (sobretudo para a percepção, o processamento da imagem e conseqüentemente para a visualização geométrica).

5.1.1 – Sujeitos

Dos dez alunos que assistiram a todas as aulas e fizeram todos as entrevistas e testes propostos, metade participou do grupo que trabalhou no laboratório de informática, com o uso do *software* de geometria dinâmica *Tabulæ* e a outra metade assistiu as aulas clássicas de geometria.

Todos eles estavam na faixa etária compreendida entre quinze e dezessete anos e eram alunos do período da manhã ou da tarde da escola e, durante o ensino fundamental, também estudaram em ensino regular no período diurno.

No grupo que assistiu às aulas clássicas de geometria, denominado grupo de controle, três alunos disseram que resolveram fazer o ensino técnico para preparar-se para o vestibular e dois declararam que pretendiam apenas ampliar seus conhecimentos. O ensino fundamental foi feito em escola pública por apenas dois estudantes deste grupo, enquanto três deles estudaram em escola particular.

Entre as disciplinas que eles declararam ter tido maior dificuldade durante o ensino fundamental, língua portuguesa teve duas indicações, matemática obteve três e história e ciências apenas uma. Quando o aluno foi indagado sobre este assunto, ele podia optar por mais de uma disciplina ou por nenhuma delas.

Com relação ao contato com a geometria durante o ensino fundamental apenas um declarou que nunca a havia estudado.

Quando perguntados se eles possuíam computador em casa, três deles disseram que sim e dois responderam não, porém a quatro deles nunca tiveram aula de uma disciplina da formação geral num laboratório de informática e apenas um deles teve aulas de química e de história através do computador.

Ao escolher o ambiente em que teria as aulas do Projeto Matemática Zero, dois alunos do grupo de controle disseram que escolheram as aulas clássicas apenas porque o horário oferecido era mais adequado a sua disponibilidade, e os outros três consideraram que a sala de aula tradicional era o melhor ambiente para aprender geometria.

No grupo que presenciou as aulas no laboratório de informática, denominado grupo experimental, os cinco alunos disseram ter estudado geometria durante o ensino fundamental, sendo que três deles o fizeram em escola pública, um estudou em escola particular e o outro estudou uma parte em escola particular e outra parte em escola pública.

Entre as disciplinas que eles disseram possuir maior dificuldade, a matemática foi apontada por três, língua portuguesa e geografia por dois e história e ciências por um deles.

Três estudantes deste grupo têm computador em casa e dois não têm. Ainda assim, todos têm por hábito utilizá-lo, em casa e/ou na escola: dois usam mais de cinco vezes na semana, dois usam entre três e cinco vezes na semana e um utiliza uma ou duas vezes por semana.

O contato com a informática, neste grupo, ocorreu basicamente através dos *softwares* de sistemas operacionais como o *Windows* ou dos pacotes como o *Office*, pois apenas dois deles haviam tido aula de alguma disciplina do currículo da formação geral e outros três não haviam tido qualquer contato com este tipo de aula.

Ao justificar a procura pelas aulas de geometria no laboratório de informática, quatro alunos declararam que procuraram este meio por terem curiosidade em aprender esta disciplina através do computador e apenas um declarou que o horário era o mais adequado a sua disponibilidade.

5.1.2 – Instrumentos

(a) Entrevista I – Questionário sobre o perfil dos sujeitos

A primeira entrevista apresentada aos sujeitos deste estudo era um questionário que tinha por objetivo traçar um perfil individualizado e, ao mesmo tempo, determinar parâmetros que pudessem caracterizar os grupos em estudo. A sua aplicação foi bastante breve, durando em média cerca de dez minutos.

As questões procuram verificar a faixa etária dos alunos e alguns aspectos sobre a sua trajetória no ensino fundamental, tais como se este foi feito em escola pública ou particular, se o curso foi regular diurno, regular noturno ou supletivo, que disciplinas eles encontraram maior dificuldade etc.

Além disso, foi verificado se o aluno possuía ou não computador em casa, se o uso desta ferramenta era freqüente, o local onde ele mais ocorria, quais conhecimentos de informática possuía e se teve anteriormente alguma aula com computador numa disciplina da formação geral do ensino fundamental ou médio.

Finalmente pediu-se que o aluno justificasse o motivo pelo qual decidiu participar do grupo experimental ou do grupo de controle.

(b) Entrevista II – Teste de conhecimento geométrico (Pré e Pós-teste)

A entrevista II teve como principal finalidade avaliar os conhecimentos geométricos dos sujeitos, relativos a alguns aspectos sobre triângulos, tais como sua condição de existência, as relações entre os tipos de triângulo quanto aos seus ângulos internos e às medidas de seus lados e a compreensão das características de suas cevianas.

Deste modo foram abordados temas como a classificação dos triângulos quanto aos lados (eqüilátero, isósceles e escaleno) e quanto aos ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo) e o relacionamento destes conceitos para avaliar a compreensão dos mesmos. Além disso, também foi enfocada a compreensão dos conceitos de altura, mediana e bissetriz de um triângulo.

A primeira aplicação (pré-teste), realizada antes intervenção didática, objetivou verificar quais conhecimentos os sujeitos já traziam do ensino fundamental, enquanto a segunda aplicação (pós-teste) procurou verificar a evolução daqueles conceitos após a intervenção realizada.

A análise feita ao final deste capítulo procurou enfatizar que aspectos foram mais desenvolvidos, enfocando as contribuições da geometria dinâmica em contraste com o trabalho clássico da sala de aula.

No momento das aplicações foi solicitado aos sujeitos que não fizessem qualquer tipo de desenho como auxílio ao seu raciocínio, tal solicitação teve a finalidade de verificar sua capacidade de representar e manipular imagens mentalmente (visualizar) e de que forma este fato se relacionava aos sujeitos de cada grupo estudado.

Na avaliação das respostas dadas nas entrevistas considerou-se como corretos apenas os raciocínios bem estruturados, não sendo levado em consideração o raciocínio “meio correto”.

Para exemplificar, foi considerada correta a seguinte resposta dada por um dos sujeitos à questão "É possível que um triângulo escaleno seja também obtusângulo? Justifique": "Sim, é possível ter dois lados iguais e um ângulo maior que 90^0".

Enquanto foi considerada como incorreta a seguinte resposta à mesma questão: "Sim, a medida dos lados serem diferentes não implica na formação do ângulo obtuso". O sujeito neste caso não conseguiu expressar com clareza o que estava pensando.

(c) Testes de Aptidões Específicas da Bateria DAT

Os testes de aptidões específicas são instrumentos que descrevem a potencialidade individual do aluno para aprender uma série de disciplinas escolares ou tarefas profissionais, representando um processo integrado, científico e padronizado de medida de aptidões dos alunos do ensino fundamental e médio com a finalidade de lhes dar orientação educacional e profissional

Neste trabalho não será abordado o histórico de tais testes e tampouco aspectos sobre a validação dos mesmos, estes assuntos já foram amplamente discutidos e analisados na literatura da área psicológica.

Entretanto, é importante verificar o sentido da palavra *aptidão*, aqui utilizado, para compreender a finalidade de sua utilização no presente trabalho.

A definição de *aptidão* encontrada no dicionário Aurélio fala em disposição inata, queda; ou em habilidade ou capacidade resultante de conhecimentos adquiridos (FERREIRA, 1999).

BENNET ET ALL (1959) se referem a uma definição de Bingham, retirada do Dicionário de Psicologia de Warren, que contesta a concepção de que as aptidões sejam herdadas. Para estes autores, a *aptidão* é o resultado da interação da hereditariedade e do meio. Assim, uma pessoa nasce com certas potencialidades e logo inicia sua aprendizagem. A *aptidão* inclui, então, qualquer característica que possa predispor à aprendizagem, seja a inteligência, a personalidade, os interesses ou as habilidades especiais.

A finalidade da aplicação de testes de aptidões específicas da bateria DAT neste trabalho foi, então, verificar algumas características dos sujeitos envolvidos que pudessem ser intervenientes nos resultados obtidos.

A bateria completa se constitui dos seguintes testes de aptidão específica: raciocínio verbal, raciocínio abstrato, raciocino mecânico, habilidade numérica, relações espaciais, rapidez e exatidão e uso da linguagem (ortografia e sentença).

Foram aplicados os testes de raciocínio verbal (para verificar a habilidade de compreensão de conceitos expressos em palavras), de raciocínio abstrato (para verificar a capacidade de reflexão) e de relações espaciais (para verificar a capacidade de visualizar um objeto geométrico e de executar sua manipulação mental).

A aplicação dos testes foi feita em dois encontros, num período compreendido de uma semana.

(d) O histórico do aluno no *software Tabulæ*

Na seção 3.4 foi feita uma descrição de alguns aspectos do *software Tabulæ*, tais como as motivações para o seu desenvolvimento, as características de sua interface gráfica, a sua compatibilidade com diferentes sistemas operacionais e a facilidade para adição de novas ferramentas.

Porém, entre todas as características descritas, uma delas teve uma função particularmente importante para a pesquisa realizada nesta dissertação: algumas versões deste programa, assim como de alguns outros de geometria dinâmica, possuem um recurso denominado histórico.

Através deste recurso, foi possível acompanhar passo a passo o trabalho do sujeito, o que possibilitou a reconstituição de etapas das construções realizadas e a observação da indicação do tempo gasto por ele para finalizar cada uma das tarefas. Com isto, as aulas puderam fluir com maior naturalidade, sem a interferência de elementos estranhos ao cotidiano escolar, tais como um gravador ou uma câmera de vídeo, para registro de entrevistas.

O histórico do aluno, como usualmente é conhecido, é uma listagem gerada em HTML e contém três colunas: a primeira delas indica o momento da ação realizada, a segunda indica a ação propriamente dita, como CRIAR, MOVER, APAGAR, etc. e na terceira aparecem os comentários sobre a ação realizada. Nesta coluna de comentários há a identificação do objeto com um ID, a indicação do tipo de objeto em língua inglesa (se é um ponto livre, um segmento por dois pontos, um ponto em um segmento, uma reta perpendicular etc.) e finalmente se o objeto é dependente ou independente de outros. Caso ele se inclua na primeira situação, também é indicada a vinculação dele com os outros objetos, através dos ID's daqueles, como mostra a figura 5.1.

Hora	Ação	Comentários
20h 25min 7seg :	CRIAR	*Objeto identificado com o ID 2* *Objeto do tipo FreePoint* *Objeto Independente*
20h 25min 7seg :	CRIAR	*Objeto identificado com o ID 3* *Objeto do tipo FreePoint* *Objeto Independente*
20h 25min 7seg :	CRIAR	*Objeto identificado com o ID 4* *Objeto do tipo Segment2P* *Dependente dos objetos 2, 3*

Figura 5.1: Construção de um aluno para um segmento de reta

5.1.3 – Procedimentos

O trabalho de campo foi dividido em duas experiências distintas: aulas realizadas no laboratório de informática, com o uso da geometria dinâmica e aulas clássicas realizadas em sala de aula comum. Ao todo foram 11 encontros no laboratório e 12 na sala de aula, descritos a seguir:

Primeiro encontro (15/07/2003): os alunos dos grupos em estudo ficaram sabendo neste dia que as aulas fariam parte de uma pesquisa e os que desejassem prosseguir teriam que responder duas entrevistas e fazer alguns testes.

A duração total deste encontro foi de 1h 30min, assim divididos: os testes de raciocínio verbal e relações espaciais foram aplicados em trinta minutos para cada um, com a utilização de dez minutos além dos períodos mencionados, em cada caso, para as instruções necessárias. A entrevista I foi respondida em, no máximo, dez minutos.

Segundo encontro (22/07/2003): também teve 1h 30 min de duração, sendo que o teste de raciocínio abstrato foi aplicado em vinte e cinco minutos (além de cinco minutos para as instruções) e a entrevista II de conhecimento geométrico em sessenta minutos.

Terceiro encontro (12/08/2003): a partir deste encontro, as aulas no laboratório de informática passaram a ter a duração de 1h 20min, que é a duração determinada para o turno da noite em escolas da rede FAETEC e as realizadas na sala de aula tinham duração de 1h 40 min por terem sido realizadas no turno da manhã e da tarde.

Na aula do laboratório foram apresentadas atividades para reconhecimento do *software* (Anexo A), uma vez que nenhum dos alunos participantes havia tido contato com qualquer programa de geometria dinâmica anteriormente.

A elaboração da atividade visou principalmente que o aluno conhecesse alguns dos recursos mais importantes e utilizados do *Tabulæ,* necessários para a realização das atividades posteriores.

Antes da atividade com o computador, houve uma introdução com nota histórica sobre a geometria euclidiana e sobre o *Tabulæ* e a apresentação de um quadro explicativo com o menu do programa e suas respectivas funções básicas, assim como dos botões de atalho da interface do *software* e a função de cada um deles, com a finalidade de estarem sempre à disposição do aluno para consulta.

Do primeiro ao oitavo item da primeira atividade, foi solicitado ao aluno que construísse pontos, segmentos de reta, semi-retas, ângulos e circunferências e nomeasse e medisse alguns destes objetos. No item nove, ele deveria realizar a construção de um quadrado com os recursos que já conhecia dos itens anteriores e, depois, explorar o recurso do "arrastar" sobre qualquer um dos vértices do quadrado construído. O objetivo era mostrar ao aluno mais uma característica da geometria dinâmica, ou seja, verificar a invariância de algumas propriedades da construção realizada, desde que ela tivesse sido feita obedecendo algumas propriedades geométricas em sua construção. Neste primeiro momento, o aluno apenas verificava que sua construção não tinha levado em consideração tais propriedades e que o quadrado construído se desmontava com o "arrastar" de um de seus vértices.

É importante ressaltar que os alunos tiveram bastante liberdade para explorar outros recursos do *software* durante esta aula e, por este motivo, o item 10 ficou adiado para o encontro seguinte.

Na sala de aula, foi feita uma exposição dialogada sobre a classificação dos triângulos, quanto aos lados e quanto aos ângulos e apresentados, discutidos e resolvidos exercícios sobre o assunto. As aulas clássicas tiveram como base o material encontrado em GIOVANNI & GIOVANNI JR.(1996).

Quarto encontro (19/08/2003): a partir desta aula, começou a se evidenciar o ritmo diferenciado entre os alunos, alguns deles optaram por fazer livremente a atividade 2, que havia sido planejado para a primeira aula, e acabaram necessitando de todo o tempo previsto de uma hora e vinte minutos, enquanto outros preferiram seguir as orientações contidas no texto e acabaram terminando mais rápido.

A citada atividade 2 foi inicialmente formulada com o objetivo de lembrar algumas propriedades do quadrado, mostrar a importância de se realizar uma construção no *software* utilizando as propriedades geométricas da figura em estudo e familiarizar o estudante com o passo a passo desta construção.

Os alunos que seguiram o texto apresentado terminaram antes, levando em média 30 minutos, logo foram apresentadas as atividades 3 e 4, antecedidas por uma breve revisão escrita sobre os significados de ângulo reto, agudo e obtuso e da classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos.

As mencionadas atividades, assim com as de número 5 e 6, eram de exploração ou caixa preta, conforme compreendidas por GRAVINA (1996) e LABORDE (1998) e mencionadas na seção 3.4.

Na atividade 3 o objetivo era que o aluno, através da exploração, observação e análise das medidas dos lados e dos ângulos internos de um triângulo escaleno, fosse estimulado a raciocinar a respeito das relações entre este tipo de triângulo e as classificações existentes quanto a seus ângulos. De modo análogo foi elaborada a atividade 4, abordando triângulos isósceles.

Na sala de aula foi trabalhada a condição de existência de um triângulo, através de diversos exemplos e exercícios.

Quinto encontro (09/09/2003): foram apresentadas as atividades 5 e 6 ao grupo que havia feito as atividades 2, 3 e 4 no encontro anterior.

A atividade 5 apresentava a mesma finalidade das de número 3 e 4, utilizando um raciocínio análogo ao usado nestas, sendo que desta vez em relação ao triângulo eqüilátero. Na atividade 6, o objetivo era que o aluno, através da exploração, observação e análise das medidas dos lados de um triângulo e de seu desenho, concluísse que não são quaisquer três segmentos de reta que formam este polígono e estivesse apto, então, a formular a condição necessária e suficiente para realizar tal construção.

Ao grupo que apenas fez a atividade 2 na aula passada, foram apresentadas as atividades 3, 4, 5 e 6.

Na sala de aula foi realizada uma exposição teórica e dialogada sobre as relações entre os ângulos nos triângulos, enfocando a relação entre as medidas de um ângulo interno e o externo adjacente a ele, a relação entre as medidas de um ângulo externo e dos dois ângulos internos não-adjacentes e a relação de desigualdade entre lados e ângulos num triângulo.

Sexto encontro (16/09/2003): as atividades 3, 4, 5 e 6 já continham construções de triângulos prontas. A construção de um triângulo no *Tabulæ* pode ser bastante simples, bastando criar três pontos e depois uni-los dois a dois por um segmento de reta, como normalmente seria feito com papel e lápis. Porém, ao elaborar as construções utilizadas naquelas atividades foi utilizado um método de construção de triângulos do desenho geométrico, escolhida entre um dos nove problemas mencionados em REZENDE & QUEIROZ (1999, pp. 134-141):

- Problema 1: construir um triângulo, sendo conhecidas as medidas de seus lados;
- Problema 2: construir um triângulo, sendo conhecidas as medidas *a* e *b* de dois lados e a medida do ângulo θ determinado por eles;
- Problema 3: construir um triângulo, sendo conhecidas as medidas de dois de seus ângulos e a medida do lado comum a esses ângulos;
- Problema 4: construir um triângulo ABC, sendo conhecidas as medidas de seu lado *a*, do ângulo θ, oposto ao lado *c*, e do ângulo α, oposto ao lado *a;*
- Problema 5: construir um triângulo ABC, sendo conhecidas as medidas de dois de seus lados, *a* e *b*, e a medida do ângulo β, oposto ao lado *b*;
- Problema 6: construir um triângulo retângulo, sendo conhecidas sua hipotenusa *a* e a altura h_a relativa a ela;
- Problema 7: construir um triângulo, sendo conhecidas a medida de um de seus lados, e a altura e mediana relativas a esse lado;
- Problema 8: construir um triângulo ABC, sendo conhecidas a medida *c* de um de seus lados e a altura e relativas ao lado *a*;
- Problema 9: construir um triângulo ABC, sendo conhecidos seu perímetro *2p* e as medidas de seus ângulos B e C.

O primeiro destes problemas foi o utilizado nas construções das atividades citadas, pois permitia construções precisas de triângulos escalenos, isósceles e eqüiláteros e possibilitava uma melhor verificação da condição de existência do triângulo.

Pelo exposto, esta construção foi a escolhida para a elaboração da atividade 7. mesmo sabendo que caso o aluno necessitasse de um triângulo para realizar as atividades posteriores sobre a altura, a mediana e a bissetriz, ele poderia optar pelo tipo de construção mais simples.

Todos os alunos fizeram a atividade 7 neste encontro, conforme a proposta formulada no problema 1, sendo que alguns se arriscaram mais livremente, não seguindo tão fielmente as orientações do texto apresentado.

Na sala de aula, o tema abordado foi a altura do triângulo, mais uma vez através de exposição dialogada e de discussão de exercícios.

Sétimo encontro no laboratório e nono na sala de aula (07/10/2003): neste encontro os alunos realizaram a atividade 8 sobre as relações entre os ângulos no triângulo, cujo objetivo era levá-los a conjecturar sobre as seguintes proposições geométricas relacionadas a este tópico:

- Em qualquer triângulo, o ângulo interno e o externo no mesmo vértice são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é igual a 180^0;
- Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é sempre igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele;
- Em qualquer triângulo, ao maior ângulo opõe-se o maior lado, e vice-versa.

Na sala de aula, o tema foi congruência de triângulos.

Oitavo encontro e décimo na sala de aula (14/10/2003): a atividade 9, sobre a altura de um triângulo, foi proposta aos sujeitos nesta aula. O objetivo era explorar o recurso de "arrastar" da geometria dinâmica para analisar e avaliar as diferentes possibilidades de representação desta ceviana.

Na sala de aula, aconteceu a aplicação da entrevista II (pós-teste) para os sujeitos do grupo de controle e o encerramento das atividades com estes sujeitos.

Nono encontro no laboratório (21/10/2003): A atividade 10 foi apresentada, com o objetivo semelhante ao da atividade anterior, só que agora abordando a mediana de um triângulo.

Décimo encontro no laboratório (04/11/2003): Aplicação do pós-teste para os sujeitos do grupo experimental e encerramento das atividades com estes sujeitos.

5.2 – Apresentação dos Resultados

Conforme foi descrito na seção anterior, os sujeitos desta etapa do estudo foram divididos em dois grupos: os que assistiram as aulas clássicas de geometria e aqueles que assistiram as aulas no laboratório de informática, utilizando a geometria dinâmica, totalizando cinco em cada grupo.

No primeiro grupo os sujeitos foram escolhidos os nomes fictícios Daniel, Rafael, Pedro, Marcos e Mateus e no segundo eles receberam os nomes de Gabriel, Miguel, Lucas, João e Paulo.

Inicialmente serão apresentados os perfis dos dois grupos baseados nos testes de verificação das aptidões de relações espaciais, de raciocínio abstrato e de raciocínio verbal. A finalidade é avaliar a homogeneidade ou a heterogeneidade entre os sujeitos de um mesmo grupo e comparar estas características entre os dois grupos estudados.

Por se tratar de um estudo qualitativo, na segunda parte desta seção será feita uma análise individualizada dos sujeitos investigados. As descrições incluirão suas idades, sexo e breve perfil escolar durante a realização dos estudos no ensino fundamental; além, é claro, da análise do desempenho individual nos testes de aptidão específica do DAT e dos pré e pós-testes.

No caso dos sujeitos do grupo experimental a análise também abordará o desempenho individual durante o trabalho no laboratório de informática, a partir da verificação do histórico das tarefas realizadas no *Tabulæ* e das respostas nas fichas de atividades preenchidas durante as aulas e a comparação de suas respostas na entrevista II, antes e depois da intervenção realizada.

Finalmente as análises anteriores serão relacionadas e será feita uma comparação entre os desempenhos dos alunos do grupo de controle e do grupo experimental, principalmente em relação às implicações da utilização de ambientes computacionais dinâmicos para a formação de conceitos relacionados a triângulos.

5.2.1 – Caracterização dos Grupos

A predisposição dos indivíduos à aprendizagem em relação aos raciocínios verbal, abstrato e espacial mostrou alguma variedade nos resultados, tanto entre as aptidões de um mesmo sujeito quanto quando se fez uma comparação entre sujeitos de um mesmo grupo.

Os cálculos dos *percentis* foram realizados considerando a série estudada pelo indivíduo (no caso, foi utilizada como referência a oitava série do ensino fundamental) e o sexo. Além disso, foram utilizadas como tabelas de referência e conversão as resultantes de estudos feitos pelo Serviço de Estatística do Instituto de Seleção e Orientação Profissional (ISOP) da Fundação Getúlio Vargas (BENNET ET ALL, 1959).

Após a aplicação dos testes de aptidão específica e da apuração dos resultados, os cinco sujeitos do grupo de controle e os cinco do grupo experimental apresentaram os resultados expressos, respectivamente, nos quadros 5.1 e 5.2.

Quadro 5.1: Desempenho dos sujeitos do grupo de controle
nos testes de aptidão específica do tipo DAT

Grupo de Controle	Relações Espaciais		Raciocínio Abstrato		Raciocínio Verbal	
	Pontos	*Percentis*	Pontos	*Percentis*	Pontos	*Percentis*
Daniel	34	35	35,8	80	6	3
Rafael	17	10	30,3	40	3	1
Pedro	10	3	0,0	0	19	30
Marcos	41	50	37,5	85	19	35
Mateus	17	10	40,0	85	10	5

Quadro 5.2: Desempenho dos sujeitos do grupo experimental
nos testes de aptidão específica do tipo DAT

Grupo Experimental	Relações Espaciais		Raciocínio Abstrato		Raciocínio Verbal	
	Pontos	*Percentis*	Pontos	*Percentis*	Pontos	*Percentis*
Gabriel	50	65	38,75	90	14	20
Miguel	0	1	13,75	10	10	5
Lucas	47	50	42,00	95	9	3
Paulo	3	1	29,00	40	14	10
João	43	45	38,75	80	22	45

No teste de relações espaciais os indivíduos do grupo de controle diferiram em relação aos resultados, já que dois deles apresentaram *percentis* no intervalo de 35-50 e três se situaram no intervalo de 0-10. Todos, portanto, apresentaram *percentil* igual ou inferior à média (50).

A avaliação da capacidade de visualizar um objeto geométrico e de executar sua manipulação mental num espaço tridimensional também mostrou dois subgrupos no grupo experimental: três deles obtiveram um *percentil* no intervalo de 45-65 e os outros dois permaneceram com *percentil* 1.

O gráfico 5.1, entretanto, mostra uma ligeira superioridade entre os sujeitos do grupo experimental com relação ao desempenho no teste de relações espaciais, ainda que este grupo tenha dois indivíduos com desempenho bastante baixo.

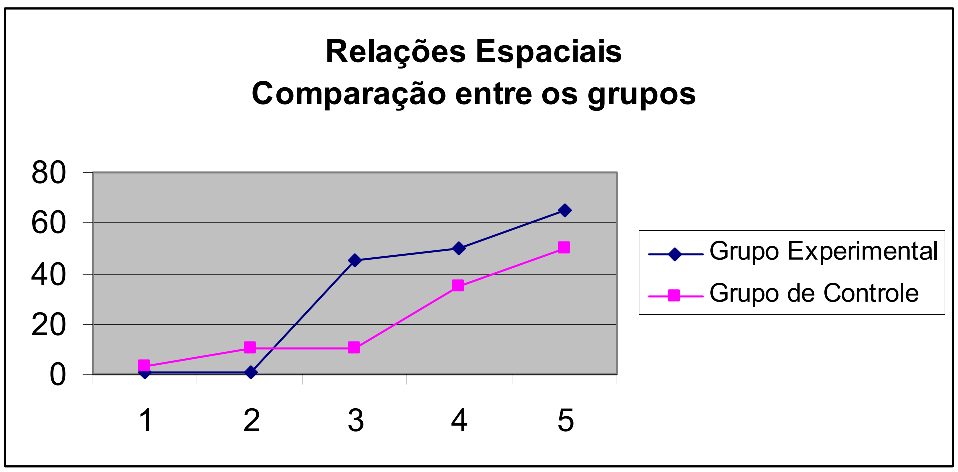


Gráfico 5.1: Comparação do desempenho dos sujeitos dos dois grupos no teste de relações espaciais

Cabe ressaltar que esta foi uma habilidade que o desempenho global dos sujeitos foi baixa, sendo que sete deles apresentaram *percentis* inferiores a 50 e apenas três se situaram num patamar igual ou superior a 50.

Em relação ao desempenho no teste de raciocínio abstrato, os sujeitos do grupo de controle novamente poderiam ser classificados em outros dois subgrupos, aqueles que apresentaram *percentis* superiores a 80 (totalizando três sujeitos) e aqueles que apresentaram O grupo experimental também apresentou uma heterogeneidade com relação à aptidão dos sujeitos para a reflexão (raciocínio abstrato), pois praticamente há uma metade de indivíduos situados acima (três sujeitos) e a outra metade abaixo (dois sujeitos) do que poderia ser considerado o *percentil* médio (50).

Desta vez, porém, houve um maior equilíbrio nos desempenhos dos sujeitos quando são comparados os dois grupos, como mostra a gráfico 5.2.

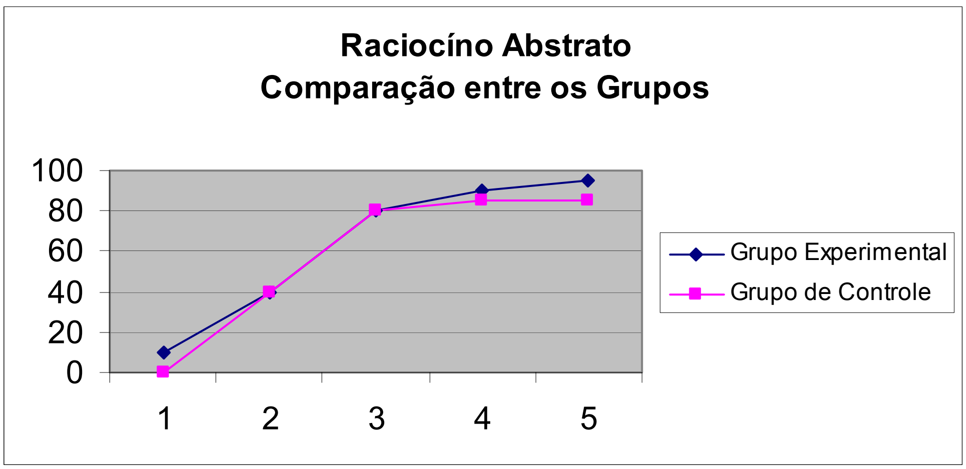


Gráfico 5.2: Comparação do desempenho dos sujeitos dos dois grupos no teste de raciocínio abstrato

Como os sujeitos deste estudo são todos adolescentes, não chega surpreender que o desempenho global foi bem melhor do que no teste anterior, apresentando apenas dois sujeitos com desempenho muito baixo (*percentil* igual ou inferior a 10), outros dois com desempenho próximo ao *percentil* de 50, na verdade ambos apresentaram *percentil* igual a 40 e os seis restantes com *percentis* iguais ou superiores a 80.

Na habilidade para compreender conceitos expressos por palavras, medida no teste de aptidão verbal, todos os sujeitos do grupo de controle se situaram abaixo da média, não ultrapassando sequer o *percentil* de 35.

No grupo experimental observaram-se resultados parecidos aos do outro grupo (gráfico 5.3). Do mesmo modo, todos os indivíduos apresentaram desempenho inferior à média no teste de raciocínio verbal, sendo que apenas um alcançou o *percentil* 45.

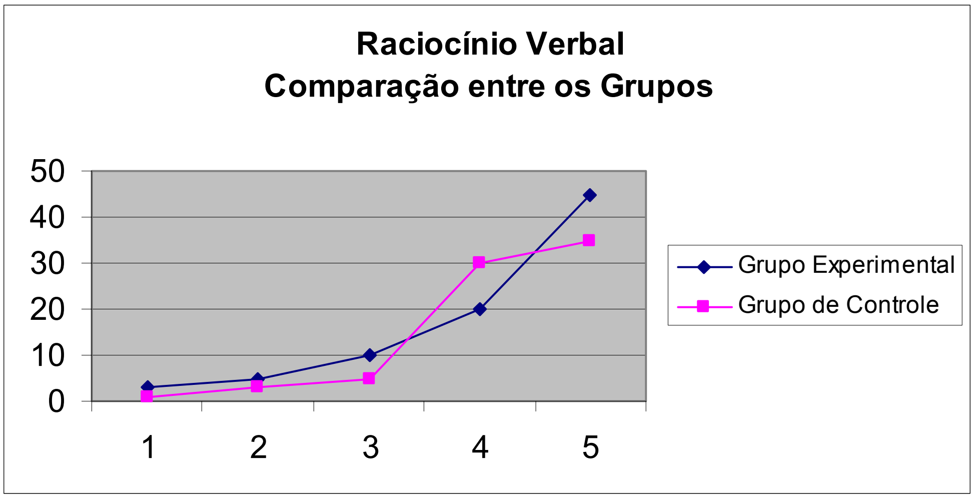


Gráfico 5.3: Comparação do desempenho dos sujeitos dos dois grupos no teste de raciocínio verbal

Assim como no teste de raciocínio abstrato, desta também vez houve equilíbrio quando são comparados os sujeitos dos dois grupos, cabendo ressaltar que o nivelamento se deu por baixo.

Em relação ao conhecimento geométrico, todos os sujeitos haviam declarado ter estudado geometria no ensino fundamental, deste modo a entrevista II avaliou seus desempenhos antes da intervenção realizada, apresentando os resultados do quadro 5.3.

Quadro 5.3: Desempenho percentual dos sujeitos dos dois grupos no pré-teste de conhecimento geométrico.

GRUPO EXPERIMENTAL		GRUPO DE CONTROLE	
Gabriel	58,52	**Daniel**	47,06
Miguel	23,53	**Rafael**	32,35
Lucas	38,23	**Pedro**	11,76
Paulo	41,18	**Marcos**	47,06
João	17,65	**Mateus**	61,76

Apenas dois deles apresentou um desempenho superior a 50% e, na comparação dos dois grupos, também se observou um equilíbrio entre os mesmos.

O gráfico 5.4 mostra que o desempenho do grupo de controle foi ligeiramente melhor que o do grupo experimental antes das seções de aulas realizadas.

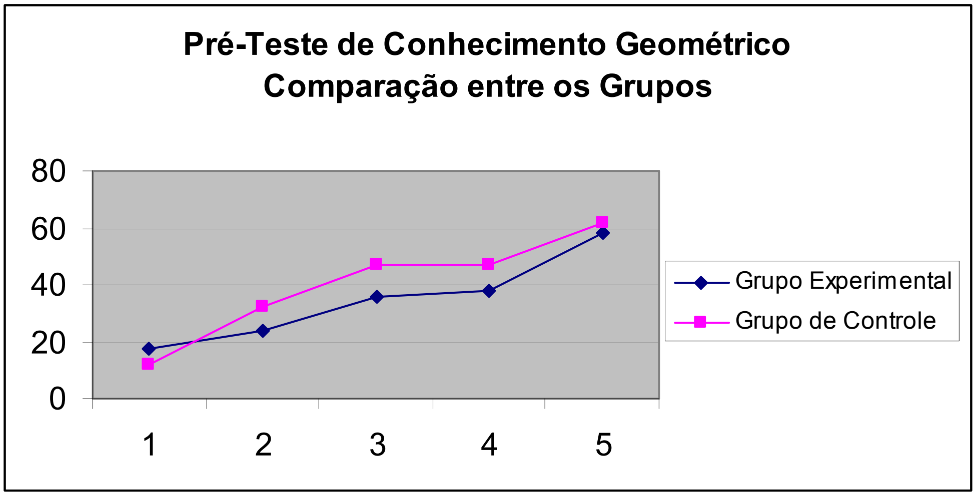


Gráfico 5.4: Comparação do desempenho dos sujeitos dos dois grupos no pré-teste de conhecimento geométrico.

5.2.2 – Caracterização dos Sujeitos

5.2.2.1 – Grupo de Controle

5.2.2.1.1 – Daniel

Daniel é um adolescente de 15 anos que nunca realizou qualquer atividade profissional e sempre estudou em escola pública em regime regular diurno. Ele está fazendo o ensino médio principalmente para preparar-se para o vestibular, sendo que a disciplina que apresentou maior dificuldade durante o ensino fundamental foi matemática. Durante este nível de ensino, ele diz ter estudado geometria. Não possui computador em casa e não tem por hábito usá-lo em qualquer outro lugar.

Quando fez sua escolha para assistir as aulas no Projeto Matemática Zero, Daniel declarou que sua opção por participar deste grupo foi por considerar que a sala de aula é o ambiente ideal para aprender geometria.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, Daniel apresentou o seguinte desempenho: fez 34 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 35), 35,8 no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 80) e apenas 6 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 3).

Ele acertou 47,06% do pré-teste de conhecimento geométrico, dominando desde o início as definições básicas, tais como as de triângulos e suas classificações; porém, mesmo respondendo corretamente boa parte das questões que relacionavam estas classificações, ele apresentou dificuldades para justificar seu raciocínio, deixando em branco boa parte das respostas relacionadas ao assunto.

Na questão para traçar alturas, Daniel acertou os dois primeiros triângulos (que são acutângulos, portanto mais próximos dos casos prototípicos dos livros didáticos, porém no segundo caso foi solicitando que fosse traçada a altura de um lado que não correspondia à base do mesmo; um exemplo, portanto, não prototípico). Entretanto ele errou o terceiro caso (um triângulo obtusângulo, exemplo pouco encontrado em livros didáticos). No momento que foi solicitado que Daniel definisse com suas palavras o que era "altura", ela apenas declarou: "não me lembro bem da definição".

Com relação à mediana, Daniel inicialmente errou os três casos propostos e deixou em branco quando foi solicitado que definisse com suas palavras o que era essa ceviana, parecendo ainda não conhecer o assunto.

Quando solicitado a traçar as bissetrizes relativas aos ângulos indicados nos triângulos propostos, Daniel apenas assinalou a divisão do ângulo e traçou o segmento, não indicando se eles estavam divididos pela metade. Quanto à definição, ele novamente deixou em branco.

Após as aulas, Daniel obteve um desempenho superior (acertou 67,65% das respostas, apresentando um crescimento de 43,75%). Nas questões anteriores sobre o conceito de triângulo e suas classificações, ele seguiu acertando, cabendo a ressalva que ela continuou considerando que um ângulo agudo “possui medida < ou = a 90^0” e que o ângulo obtuso “possui medida > ou = a 90^0”.

Com relação à condição de existência de um triângulo, ele apresentou pouca evolução: tanto no pré-teste quanto no pós-teste, Daniel considerava que não era possível garantir a construção de um triângulo para quaisquer tamanhos de ripas de madeira que fossem considerados, mas quando solicitado a dizer qual era esta condição de existência, ele deixou a resposta em branco no pré-teste e escreveu a relação $a < b + c$ no pós-teste, parecendo compreender ou lembrar que condição era esta, porém descrevendo-a da seguinte maneira: “a hipotenusa deve ser menor que a soma dos dois catetos”, considerando apenas o caso particular do triângulo retângulo e de um de seus lados, a hipotenusa.

Ele confirmou as respostas sobre as classificações dos triângulos, apresentando alguma evolução para as justificativas, já que antes tinha deixado boa parte delas em branco.

Na parte referente às cevianas do triângulo, Daniel acertou o traçado das alturas dos mesmos que já havia acertado no pré-teste, errando também o terceiro caso. Ao definir “altura”, ele o fez da seguinte maneira: “é a linha que divide um triângulo em duas partes e às vezes forma 90^0 (pra mim)”, demonstrando ainda não ter dominado o assunto.

Após as aulas clássicas Daniel acertou os traçados da mediana solicitados e tentou definir da seguinte forma: “é o traço que marca o ponto médio de uma reta”, que demonstra que mesmo não apresentando uma resposta correta, as aulas a ajudaram a ter alguma noção sobre o assunto. Quanto à bissetriz, ela respondeu exatamente igual ao pré-teste, porém tentou elaborar a seguinte definição: “é a **reta** que divide o ângulo em duas partes iguais”. Não estava correta, mas bem próximo da correção.

De um modo geral Daniel apresentou alguma evolução em suas respostas após as aulas clássicas, as dificuldades nas justificativas continuaram, mas houve uma melhora, o que pode mostrar que havia um desconhecimento do assunto tratado (principalmente no pré-teste, onde algumas respostas estavam em branco) ou tal fato ser reflexo de seu baixo desempenho no teste de raciocínio verbal (nos dois casos, já que algumas justificativas permaneceram sem resposta ou foram imprecisas). O teste de relações espaciais também mostra alguma dificuldade para a visualização, ainda que tenha havido uma melhora no desempenho em relação ao pré-teste.

O bom desempenho no teste de raciocínio abstrato de certa forma vem ratificar resultados obtidos por Piaget, já que Daniel é um adolescente e supõe-se que ele tenha atingido o estágio de operações abstratas.

5.2.2.1.2 – Rafael

O jovem Rafael também tem 15 anos e nunca realizou qualquer atividade profissional. Durante o ensino fundamental estudou em escola pública em regime regular diurno, sendo que sua maior dificuldade foi em língua portuguesa e diz ter estudado “mais ou menos” geometria. Não possui computador em casa, mas costuma usá-lo uma ou duas vezes no laboratório da escola.

Ele está fazendo o ensino médio para ampliar seus conhecimentos e optou por assistir as aulas clássicas porque entre os horários oferecidos era o que mais se adequava à sua disponibilidade.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, Rafael apresentou o seguinte desempenho: fez 17 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 10), 30,3 no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 40) e apenas 3 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 1).

No pré-teste de geometria, Rafael acertou 32,35% das questões propostas, obtendo sucesso principalmente nos conceitos de triângulos e suas classificações. Inicialmente, porém, ele apresentou dúvidas quanto à compreensão do conceito de triângulo escaleno, dizendo que o mesmo "possui os mesmos lados iguais" e em relação ao triângulo obtusângulo, deixando em branco quando foi solicitado a dar a sua definição.

Nas questões que relacionavam os diversos tipos de triângulos, Rafael apresentou dificuldades, acertando algumas poucas dessas relações, errando outras ou deixando em branco as justificativas para as respostas.

Nas questões relativas às cevianas do triângulo, ele demonstrou desconhecer os conceitos de altura e mediana, errando os três traçados para as medianas e deixando em branco as demais questões, porém no caso das bissetrizes ele acertou todos os exemplos propostos, deixando em branco a definição, parecendo compreender o conceito, mas com dificuldades para verbalizá-lo talvez.

Mesmo após a seqüência de aulas, Rafael apresentou um fraco desempenho no pós-teste de conhecimento geométrico, acertando apenas 44,12% das questões e ainda deixando muitas delas em branco. Seu ganho em relação ao pré-teste foi de 36,36%.

O aluno continuou apresentando muitas dificuldades para articular os conceitos trabalhados nas aulas e pouca evolução com relação a estes conceitos. Por exemplo, tanto no pré-teste quanto no pós-teste, ele considerou ser possível garantir a construção de um triângulo com três ripas independente do tamanho delas. Ao enunciar qual era a condição de existência para a formação do triângulo ele deixou em branco no pré-teste e disse, no pós-teste, que "o que garante é as medidas dos ângulos [sic]".

Ele também continuou confundindo a definição para triângulo escaleno, passando a dizer que "é um triangulo que possui dois lados iguais[sic]", mudou sua concepção para triângulo isósceles, considerando agora que era "um triângulo que possui todos os lados diferentes" e acertou a definição para triângulo obtusângulo, "é um triângulo que possui um ângulo obtuso [sic]". Portanto os erros que cometeu ao relacionar os tipos de triângulos, principalmente nas justificativas, deveram-se ao fato dele confundir e não compreender as definições, isso ocorreu tanto no pré-teste quanto no pós-teste.

Pouca evolução também se verificou com relação à compreensão das cevianas do triângulo: as alturas dos dois primeiros triângulos apresentados foram traçadas corretamente por Rafael antes e após as aulas, assim como ele errou o terceiro caso nos dois momentos. Quanto à definição, ele que já havia deixado em branco no pré-teste, disse que "É o comprimento dos triângulos" no pós-teste. Para as medianas, ele tinha deixado em branco na primeira entrevista e errou os três casos na segunda, definindo-a da seguinte maneira, após ter deixado em branco no pré-teste: "e o ponto central no cruzamento de duas retas" [sic].

Houve um curioso retrocesso no caso das bissetrizes, pois Rafael havia acertado os três casos no pré-teste e passou a apenas assinalar a divisão do ângulo, traçando o segmento, mas não indicando desta vez que eles estavam divididos pela metade. Ele deixou a definição em branco nos dois momentos.

De um modo geral Rafael apresentou um baixo desempenho no pré e pós-teste, o ganho de 36,36% se deveu principalmente ao número maior de acertos no trecho da entrevista que relacionava as classificações dos triângulos. Assim mesmo, esses acertos foram nas respostas de "sim" ou "não", com as justificativas apresentando uma certa confusão conceitual como já foi observado. O aumento no número de acertos pode ter sido ao acaso.

A confusão conceitual acima referida talvez esteja relacionada ao baixíssimo desempenho que Rafael obteve no teste de raciocínio verbal (compreensão de conceitos através de palavras escritas) e relações espaciais (relacionado à capacidade de visualização). Portanto, as aulas tradicionais não foram suficientes para a evolução de seu aprendizado.

5.2.2.1.3 – Pedro

Pedro tem 15 anos e nunca trabalhou. Seus estudos durante o ensino fundamental foram feitos em escola particular no regime regular diurno e sua maior dificuldade foi com a matemática, sendo que nunca havia estudado geometria antes.

Este adolescente possui computador em casa e o utiliza mais de cinco vezes na semana, tanto em sua casa quanto no laboratório da escola. A opção pelas aulas clássicas durante a realização da experiência para este estudo foi devido ao horário mais conveniente.

O ensino médio em sua concepção serve como preparação para o vestibular.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, Pedro apresentou o seguinte desempenho: fez 10 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 3), não pontuou no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 0) e apenas 19 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 30).

Pedro também apresentou um baixo rendimento no pré-teste de conhecimento geométrico, acertando 11,76% da prova, o pior entre todos os sujeitos deste estudo, incluindo os deste grupo e os do grupo experimental. Mesmo em conceitos mais simples como o de triângulos ele dizia inicialmente que era “um objeto de três pontas”.

Ao menos ele parecia compreender o que era ângulo reto, agudo e obtuso, mas não dominava outros conceitos: triângulo eqüilátero (“possui dois lados iguais e um diferente”), triângulo isósceles ("é um triângulo que possui um ângulo de 90^0"), acutângulo (em branco), obtusângulo (em branco). Apenas acertou o que era um triângulo retângulo nesta parte.

Ao relacionar estes conceitos, ele apenas respondia "sim" ou "não", sem justificar suas respostas e ainda assim errando a maioria.

Pedro errou ou deixou em branco todas as questões relativas às cevianas do triângulo no pré-teste.

No teste de conhecimento geométrico aplicado após as aulas, o desempenho de GSC evoluiu para 55,88% de acertos, tendo um ganho de 375%, o maior entre todos os sujeitos do estudo. Tal fato talvez se justifique por ele não ter estudado geometria no ensino fundamental, a intervenção realizada, mesmo que de forma tradicional, com aulas clássicas, trouxe informações que ele desconhecia antes. Uma resposta que ilustra esta situação é a nova definição que deu para triângulos: "é uma figura geométrica com 3 lados e 3 ângulos, cuja soma resulta em um ângulo de 180^0", bem mais elaborada, ainda que ele já dominasse antes o conceito.

Com relação à condição de existência do triângulo, Pedro tinha antes dúvidas se era possível construir o triângulo com três ripas quaisquer, passando a garantir que não a seguir. Ao escrever sobre esta condição de existência ele inicialmente dizia que era necessário que "tenha tamanhos diferentes uns nos outros" [sic] e passa a dizer que "a soma de 2 lados menores de um triângulo tem que se menor do que o tamanho da hipotenusa". Raciocínio ainda não correto mas que mostra alguma evolução.

Após as aulas ele passou a definir corretamente os diversos tipos de triângulos e compreender razoavelmente as relações entre eles. Por exemplo, à pergunta que indagava se era possível que um triângulo eqüilátero também fosse retângulo, ele, que antes tinha dito que não sem justificar, passou a justificar corretamente sua resposta, dizendo que "não, pois cada ângulo será igual a 60^0".

Quanto às cevianas, Pedro tinha errado o traçado das alturas nos três casos, passando a acertar os dois primeiros casos no pós-teste, porém quanto à definição ele inicialmente tinha dito não ser possível definir e escrevei no pós-teste que “é a altura de uma extremidade a outra” , não demonstrando muita evolução.

Sobre o traçado de medianas, ele deixou em branco no pré-teste e apenas assinalou o ponto médio do lado destacado nos exemplos propostos, não conseguindo também dizer com suas palavras o conceito desta ceviana. Para o caso da bissetriz, ocorreu algo parecido, deixando em branco no pré-teste e assinalando a divisão do ângulo, traçando o segmento mas não indicando que eles estavam divididos pela metade. Na definição também deixou em branco o pré-teste mas disse que “é quando dividimos um ângulo em duas partes iguais”, demonstrando alguma noção do que dizia.

O desempenho bastante fraco de Pedro nos testes da bateria DAT pode evidenciar um desinteresse pelos mesmos, reação comum entre adolescentes, já que ele mostrou uma grande melhora após as aulas na sala de aula comum.

5.2.2.1.4 – Marcos

Marcos considera que a melhor forma de estudar geometria é na sala de aula tradicional e, por este motivo optou por esta maneira de participar do Projeto Matemática Zero. Este adolescente de 15 anos nunca exerceu uma atividade profissional e espera que o ensino médio lhe dê uma boa preparação para o vestibular.

Durante o ensino fundamental ele estudou em escola particular no regime regular diurno e teve maior dificuldade em matemática. Entre os diversos tópicos desta disciplina vistos naquele nível de ensino se incluía a geometria.

Ele possui computador em casa e o utiliza uma a duas vezes na semana, tanto em sua casa quanto na escola.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, Marcos apresentou o seguinte desempenho: fez 41 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 50), 37,5 no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 85) e apenas 19 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 35).

No pré-teste de conhecimento geométrico Marcos acertou 47,06% das questões, demonstrando dominar o conceito de triângulo e suas classificações. Quando foi solicitado a relacionar os diversos tipos de triângulo também acertou a maioria das respostas de "sim ou não", porém apenas conseguiu justificar aquelas que envolviam o triângulo eqüilátero: (a) eqüilátero & retângulo ("não, o eqüilátero tem a medida dos ângulos igual a 60^0); (b) eqüilátero & acutângulo ("sim, sob a condição de que ângulo seja de 60^0) e (c) eqüilátero & obtusângulo ("não, pois seus ângulos são de 60^0).

Nas questões relativas às cevianas do triângulo, Pedro acertou apenas o traçado do primeiro caso para altura e assim a definiu: "é a altura adequada aquele tipo de caso" [sic]. No caso da mediana e da bissetriz, ela deixou em branco tanto o desenho quanto as definições.

No teste realizado após as aulas Pedro acertou 50% das respostas, apresentando um ganho de apenas 6,25% em relação ao pré-teste.

A pequena mudança verificada ocorreu apenas nas justificativas das questões que relacionavam o triângulo isósceles ao triângulo acutângulo e ao obtusângulo. No pré-teste Pedro dizia vagamente que "a medida não altera este processo", enquanto no pós-teste ela parecia mais segura ao afirmar que era possível sim, porque "independem das medidas dos ângulos", ainda um pouco vago, mas talvez já indicando que um triângulo pode ser isósceles independentemente de ter os três ângulos agudos ou um deles ser obtuso.

Pedro apresentou desempenho razoável nos testes de relações espaciais, mostrando uma capacidade mediana para a visualização, bom desempenho no raciocínio abstrato (mais uma vez confirmando conclusões de Piaget) e baixo desempenho no raciocínio verbal, apesar de ter sido o melhor do grupo de controle e o segundo melhor entre todos os sujeitos do estudo. Mais uma vez as dificuldades encontradas para expressar alguns conceitos trabalhados podem estar relacionadas ao resultado deste último teste.

O que se verificou, portanto, foi um aluno que já trazia alguns conhecimentos geométricos do ensino fundamental e que pouco se modificou após as aulas clássicas, seus resultados em relação ao conteúdo escolhido eram medianos e permaneceram medianos após as aulas tradicionais ministradas em sala de aula.

5.2.2.1.5 – Mateus

Mateus, 15 anos, realizou seus estudos no ensino fundamental em escola particular no regime regular diurno. Sua maior dificuldade foi em língua portuguesa, ciências e história. Ele também diz ter estudado geometria durante aquele nível de ensino.

Há computador em sua casa e ele o utiliza mais de cinco vezes na semana, porém a escolha pelas aulas clássicas foi por considerar que esta é a melhor maneira de se aprender matemática.

Mateus declara já ter exercido atividade profissional e considera que o ensino médio pode proporcionar-lhe uma melhoria salarial.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, ele apresentou o seguinte desempenho: fez 17 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 10), 40 no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 85) e apenas 10 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 5).

Mateus acertou 61,76% das questões, apresentando melhor desempenho entre os sujeitos do grupo de controle no pré-teste. Inicialmente, ele já dominava os conceitos de triângulos e suas classificações, mas parecia não compreender a condição de existência de um triângulo, indicando apenas que não era possível se construir este polígono com quaisquer três tamanhos de ripas e declarando não saber enunciar aquela condição.

Quanto à classificação dos triângulos, ele apenas não compreendia ainda o que é um triângulo obtusângulo, dizendo ser aquele “que tem a medida dos ângulos superior a 90^0”, indicando ter a noção, porém afirmando que todos os ângulos internos do triângulo serem maiores que 90^0.

Assim como Marcos, ao relacionar os diferentes tipos de triângulo, Mateus acertou as respostas envolvendo “sim ou não” mas deixou em branco a maioria das justificativas, obtendo sucesso naquelas que relacionavam o triângulo eqüilátero aos triângulos retângulo, acutângulo e obtusângulo.

Ao ser solicitado a traçar a altura dos triângulos sugeridos na entrevista, Mateus acertou os dois primeiros casos e a definiu como sendo “uma reta que forma 90^0”. Para a mediana ele deixou em branco tanto os desenhos quanto a definição, mas acertou os três casos para traçar as bissetrizes, deixando também em branco a definição desta ceviana.

No pós-teste Mateus apresentou um crescimento de 14,28% em seu desempenho, acertando 70,59% das questões propostas. Sua melhora ocorreu, sobretudo, à definição mais exata para triângulo obtusângulo, dizendo apenas que ele “tem um ângulo obtuso”.

O desempenho na parte que relacionava os tipos de triângulo foi rigorosamente igual ao anterior.

Quanto à altura, ele apenas aperfeiçoou sua definição, dizendo agora que “é uma reta que faz um ângulo de 90^0 com a base e se liga ao ponto mais alto do triângulo”. Ainda que não esteja correta, percebe-se uma evolução em relação ao pré-teste.

No caso da mediana, agora ele traçou o segmento de reta que supostamente representaria a mediana, mas não indicou que este segmento dividiria o lado oposto ao meio, enquanto sua definição dizia que era a “reta que marca o meio da reta”.

Para as bissetrizes não houve qualquer mudança em relação ao pré-teste.

Mais uma vez os *insights* de Piaget parece se confirmar também para Mateus a respeito do raciocínio abstrato, mas seu desempenho foi fraco nos outros dois testes, porém ele mostrou um desempenho satisfatório tanto no pré-teste quanto no pós-teste, porém apresentando, assim como os demais sujeitos deste grupo dificuldades para justificar algumas respostas.

5.2.2.1.6 - Comentários sobre o grupo

Os sujeitos deste grupo acertaram em conjunto 40% das questões no pré-teste e 57,65% no pós-teste, representando um crescimento de 44,12%. O que se observou é que apenas um deles ultrapassou a margem de 60% de aproveitamento após as aulas ministradas.

De um modo geral, eles continuaram com dificuldades para justificar seu raciocínio e definir alguns conceitos, tal fato pode ser devido à dificuldade para compreender e expressar conceitos através de palavras, habilidade avaliada no teste de raciocínio verbal, cujo desempenho geral ficou abaixo da média neste grupo.

Um outro fator que também pode ter sido interveniente foi a dificuldade apresentada por eles para visualizar um objeto geométrico e executar sua manipulação mental, habilidade medida pelo teste de relações espaciais. As aulas clássicas com o uso de quadro de giz e texto impresso parecem ter pouco contribuído para a mudança deste quadro. O crescimento que se observou pode ter sido, sobretudo, devido à apresentação de novas definições e conceitos durante as aulas.

5.2.2.2 – Grupo Experimental

5.2.2.2.1 – Gabriel

Gabriel é um jovem de 17 anos que nunca realizou atividade profissional e está fazendo o ensino médio pelo diploma, para ampliar seus conhecimentos e para preparar-se para o vestibular. O ensino fundamental foi realizado em escola pública no regime regular diurno e sua maior dificuldade foi em língua portuguesa e geografia. Segundo ele, a geometria também fez parte de seus estudos durante aquele nível de ensino.

Ele costuma usar computador de 3 a 5 vezes por semana, predominantemente em casa e já sabe usar o *Windows*, o *Excell*, o *Word* e o *Power Point*.

A sua opção por fazer parte deste grupo no estudo realizado foi pela curiosidade em aprender geometria através do computador. Anteriormente ele já tinha tido aulas de física e história em laboratório de informática.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, Gabriel apresentou o seguinte desempenho: fez 50 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 65), 38,75 no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 80) e apenas 14 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 20).

No pré-teste de conhecimento geométrico ele acertou 58,52% das questões, melhor desempenho do grupo. Suas respostas neste primeiro teste demonstram que ele já dominava alguns conceitos básicos, tais como o de triângulo e suas classificações, as relações entre os tipos de triângulos, mas ainda não compreendia a sua condição de existência, pois garantia que uma pessoa sempre poderia montar um triângulo com três ripas independentemente do tamanho de cada uma delas.

Ainda que Gabriel tenha acertado todas as questões que relacionavam os tipos de triângulos (quanto aos lados e quanto aos ângulos), em nenhuma delas ele justificou seu raciocínio.

Na parte do teste que se referia às cevianas, ele acertou o traçado das alturas dos três triângulos propostos, não conseguindo, porém definir com suas palavras o que era altura, dizendo estranhamente ser "a altura do triângulo". Quanto às medianas e bissetrizes, Gabriel parecia ainda não conhecer os conceitos, já que deixou em branco, tanto as questões que solicitavam seus traçados, quanto àquelas que pediam suas definições.

No pós-teste, ele teve um excelente desempenho, acertando 91,18% das questões e apresentando um ganho de 55% em relação ao teste realizado antes das aulas com geometria dinâmica.

De um modo geral, o que Gabriel já havia acertado se confirmou no pós-teste, sendo que se observou, sobretudo, que ele conseguiu justificar corretamente as relações entre os tipos de triângulos, passou a compreender melhor a condição de existência deste polígono, inclusive chegado a enunciar que "a medida do segmento tem que ser menor que a soma dos outros lados, para existir".

Quanto às cevianas, ele acertou todos os traçados para a altura, para a mediana e para a bissetriz, passando a tentar a defini-las, ainda que não corretamente como fez para a altura: "uma reta que determina um ângulo de 90^0 em relação a um lado de qualquer triângulo" (incorreto mas já apresentando um raciocínio que pode caminhar para a correção).

O mesmo ocorrendo para a mediana e para a bissetriz, respectivamente ela disse: "é o segmento que divide o lado em dois (iguais)" [sic] e "divide em duas partes iguais o ângulo de qualquer vértice de um triângulo".

Há que se destacar aqui o fato de que Gabriel possui uma habilidade razoável para a visualização (*percentil* de 65 no teste de relações espaciais), o que talvez explique seu excelente desempenho no teste de conhecimento geométrico após as aulas no laboratório, mas considerando que ele não tinha ido bem no teste de raciocínio verbal (compreensão e expressão de conceitos através de palavras) e a sua grande melhora na justificativa das respostas, é possível que as aulas tenham contribuído para melhor aquisição e compreensão dos conceitos trabalhados.

Gabriel foi um aluno bastante interessado e atento às aulas no laboratório, percebia-se que ele sempre que possível não seguia fielmente as instruções recebidas nos textos das atividades, procurando caminhos mais independentes.

Numa das aulas ele chegou mesmo a comentar que as atividades estavam tão detalhadas que davam pouca margem para o aluno ter maior independência.

5.2.2.2.2 – Miguel

Para Miguel, 17 anos, a maior dificuldade que encontrou durante o ensino fundamental foi em Matemática, incluindo o contato que teve com a geometria. Neste nível de ensino, ele estudou em escola particular no regime regular diurno.

Miguel já trabalhou e está fazendo o ensino médio para preparar-se para o vestibular, pelo diploma e por uma melhoria salarial. Ele costuma usar o computador mais de cinco vezes na semana, seja em sua casa ou na escola e domina o *Windows*, o *Excell*, o *Word* e o *Power Point*.

A sua opção pelas aulas com a geometria dinâmica foi pela curiosidade em estudar geometria com o computador. Anteriormente ele nunca tinha tido aulas de alguma disciplina da formação geral em laboratório de informática.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, Miguel apresentou o seguinte desempenho: não fez pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 1), 13,75 no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 10) e apenas 10 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 5).

Ele obteve apenas 23,53% de acertos no pré-teste de conhecimento geométrico, mesmo em questões mais simples como a que solicitava que o aluno dissesse o que é um triângulo, FOS se confundiu definindo como “todo e qualquer ângulo que tenha maior que 90^0”. Para a condição de existência do triângulo ele deixou em branco até mesmo a questão que perguntava se era possível montar um triângulo com três ripas independentemente de seus tamanhos. No pós-teste ele parece ter encontrado o caminho para a definição de triângulos (“é um polígono que contém três lados e três ângulos”) e para justificar porque não é possível construir um triângulo com três ripas quaisquer, dizendo que “ medida do segmento deve ser menor do que a soma dos outros lados do triângulo”.

Além disso, ele confundia alguns conceitos tais como o de triângulo escaleno (“dois lados iguais, um diferente”), o de triângulo isósceles (“ângulo que contém um ângulo menor que 90^0”), o de triângulo retângulo (“ângulo que tem os seus vértices”), triângulo acutângulo (“triângulo agudo maior que 90^0”), triângulo obtuso (“não, porque ângulo vai ficar maior que 90^0”). Respostas que não faziam muito sentido.

Uma contradição que aparece no pré-teste de Miguel é que mesmo ele confundindo as diversas definições, houve um número razoável de acertos quando se solicitava o relacionamento entre os tipos de triângulo. Ou ele conhecia os conceitos anteriores mas não quis dizê-los ou os acertos se deveram mais à sorte, o que parece mais provável.

Na parte das cevianas, ele deixou em branco todas as questões, com exceção da que pedia a definição de altura: "é a maior distância de um ângulo a seu lado oposto".

Durante o trabalho, foi possível perceber que Miguel era um aluno bastante agitado e isso o tornava disperso. O contato com a geometria dinâmica despertou seu interesse tornando-o um pouco mais concentrado, ele normalmente seguia as instruções conforme estavam no texto, mas interagia bastante com os outros sujeitos, trocando impressões.

Tudo isso parece ter contribuído para a melhora que ele apresentou no pós-teste, pois desta vez acertou 61,76% das questões, dando um salto de 137,5% em relação ao pré-teste. Sobretudo os conceitos mais simples parecem ter passado a fazer mais sentido para Miguel, agora ele assim definia triângulo escaleno ("possui os 3 lados ≠"), triângulo isósceles ("possui 2 lados iguais"), etc.

Quanto ao relacionamento entre os tipos de triângulo, ele acertou todas as questões, sendo que desta vez algumas delas apresentaram justificativas corretas, demonstrando uma melhor apreensão dos conceitos: triângulo escaleno – triângulo retângulo ("sim, porque o triângulo pode ter 3 lados diferentes e um ângulo de 90^0"), triângulo eqüilátero – triângulo retângulo ("não, porque todos os **lados** do triângulo eqüilátero possuem 60^0"). Neste último caso, mesmo ele trocando ângulos por lados, já demonstra que o raciocínio faz sentido.

Em outros casos sua justificativa permanecia incorreta e sem fazer sentido: triângulo isósceles – triângulo acutângulo ("sim, porque podem os outros dois serem iguais").

Em relação às cevianas continuou demonstrando não compreender o conceito de altura, deixando ainda em branco a questão que solicitava os traçados das mesmas nos triângulos indicados e agora definindo-a da seguinte forma: "divide o ângulo em 90^0".

Ele acertou os três desenhos para a mediana e para a bissetriz no pós-teste, mas ainda deixou em branco as definições.

Os resultados iniciais demonstrados por Miguel podem indicar a dispersão verificada durante o trabalho. O que se verificou foi um grande crescimento deste aluno, considerando principalmente o amadurecimento de algumas justificativas e uma maior precisão para algumas definições. Há indícios de progressos em sua capacidade de visualizar conceitos relacionados a triângulos.

5.2.2.2.3 – Lucas

A maior dificuldade que Lucas, de 17 anos, encontrou no ensino fundamental foi em história e geografia. Seus estudos naquele nível de ensino foram feitos em escola pública no regime regular diurno e incluíram a geometria.

Ele nunca realizou qualquer atividade profissional e está fazendo o ensino médio para ampliar seus conhecimentos.

Lucas possui computador em casa e o utiliza mais de cinco vezes por semana, tanto em casa quanto na escola. Ele domina o *Windows*, o *Excell*, o *Word* e o *Power Point,* mas nunca teve aulas de alguma disciplina da formação geral com o computador. A opção por assistir as aulas assistidas por computador foram porque não havia horário mais adequado a sua disponibilidade.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, Lucas apresentou o seguinte desempenho: fez 47 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 50), 42 no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 95) e apenas 9 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 3).

No pré-teste de conhecimento geométrico Lucas acertou apenas 38,23% das questões propostas, mostrando compreender alguns conceitos básicos como o de triângulos, triângulo eqüilátero, triângulo retângulo, triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo, mas confundindo outros tantos como o de triângulo escaleno (“possui 2 lados iguais”) e triângulo isósceles (“possui 3 lados diferentes”).

Ao relacionar os tipos de triângulo, ele acertou a maioria das questões, mas sem justificar suas respostas. Como Lucas confundia alguns daqueles conceitos, é possível que alguns destes acertos tenham sido por sorte.

Na parte das cevianas, ele já acertou no pré-teste os dois primeiros exemplos para traçar a altura e deixou em branco os exemplos da mediana e da bissetriz. Quanto às definições, ele tentou assim definir respectivamente a altura, a mediana e a bissetriz: “é uma distância entre o ângulo oposto ao lado”, “é a divisão a partir do ponto de interseção” e “é os segmentos que se cruzam para achar o “centro” do triângulo”[sic]. Bastante imprecisos e confusos.

Após as aulas no laboratório, Lucas acertou 61,76% das questões do teste de conhecimento geométrico, apresentando um crescimento de 61,54% em relação ao pré-teste. Sua melhora, assim como foi verificado em outros sujeitos, deveu-se, sobretudo, a um melhor domínio de alguns conceitos e definições e às justificativas mais seguras que aquelas apresentadas antes das aulas.

Em relação à condição de existência do triângulo, ele demonstrava não saber do que se tratava ao dizer que era possível construir este polígono com quaisquer três tamanhos de ripas, mas depois negou tal possibilidade e disse “que um segmento deve ser menor do que a soma dos outros dois”.

Quanto às cevianas, ele acertou os três casos da altura, da mediana e da bissetriz no pós-teste, mas ainda permaneceu com dificuldades para defini-las, dizendo que a altura “seria a maior linha que pudesse ser feita referente ao lado desejado” e deixou em branco tanto a definição para mediana quanto para bissetriz.

Lucas apresentava algumas resistências em relação ao trabalho com o computador, sua expectativa era a de que seriam trabalhados problemas tradicionais mesmo utilizando uma ferramenta computacional e não fossem trabalhados conceitos tão simples que ele acreditava já dominar. Assim mesmo ele levou as aulas até o fim e demonstrou alguma evolução com relação às definições trabalhadas.

5.2.2.2.4 – Paulo

Paulo tem 16 anos e optou por assistir as aulas no laboratório de informática pela curiosidade em aprender geometria com o computador, já que nunca teve aula de alguma disciplina da formação geral desta maneira. Ele não possui computador em casa, mas costuma usar esta ferramenta de uma a duas vezes por semana na escola e domina o *Windows* e o *Word*.

Durante o ensino fundamental a maior dificuldade que Paulo encontrou foi em matemática e os estudos nesta disciplina incluíram a geometria.

Naquele nível de ensino ele estudou tanto em escola pública quanto em particular no regime regular diurno. Paulo nunca realizou atividade profissional e está fazendo o ensino médio para ampliar seus conhecimentos.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, Paulo apresentou o seguinte desempenho: fez 3 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 1), 29 no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 40) e apenas 14 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 10).

No pré-teste de conhecimento geométrico, Paulo acertou 41,18% das questões, demonstrando dominar definições básicas como a de triângulo e de seus tipos e compreender superficialmente a maioria das relações entre eles. Estas relações, a princípio, não foram corretamente justificadas.

Paulo errou os três exemplos dos exercícios relativos a traçar a altura, a mediana e a bissetriz do triângulo no pré-teste e expressou com muita imprecisão as definições para estas cevianas: altura (“é quando uma linha é traçada para determinar a altura”), mediana (“é a divisão a partir do ponto de interseção”) e (“é a divisão também”).

No pós-teste ele acertou 76,47% das questões, representando um crescimento de 85,71% em relação ao pré-teste.

Em relação à condição de existência do triângulo, Paulo havia dito no pré-teste que bastava juntar quaisquer três ripas para formarem um triângulo, enquanto que no pós-teste ele dizia que esta condição era a de que “um segmento deve ser menor que a soma dos outros lados”. Ainda que a questão não tivesse sido enunciada com termos geométricos, o aluno enunciou sua definição incorporando estes termos.

Ele continuou acertando as definições mais simples, sendo que incorporou justificativas corretas às suas respostas ao relacionar alguns tipos de triângulo, tais como: triângulo escaleno – triângulo retângulo (“sim, pois as medidas podem ser: 90, 30 e 60; para formar 180” [sic], dando um exemplo) ou triângulo isósceles – triângulo retângulo (“sim, pois ele pode ter dois ângulos iguais” – referindo-se ao triângulo retângulo), por exemplo.

Na questão que pedia para traçar as alturas, medianas e bissetriz nos três triângulo indicados, ele, que não havia acertado nenhum no pré-teste, desta vez acertou todos os exemplos, porém continuou com dificuldades para a definição destas cevianas: altura (“é uma perpendicular que liga um vértice ao seu lado oposto”), mediana (“é uma **reta** que liga o vértice à metade do lado oposto”) e bissetriz (“é a reta que parte da divisão de um ângulo ao seu lado oposto”).

Paulo esteve bastante interessado em seu trabalho no laboratório, sendo que não demonstrou muita independência para realizar as tarefas de aula, sempre precisando trocar impressões com o professor e com os colegas, além de apresentar uma certa dependência em relação ao texto das atividades, seguindo à risca cada uma delas.

Mesmo apresentando um baixo desempenho no texto de relações espaciais, observou-se uma grande evolução de Paulo para compreensão dos conceitos e definições trabalhados. No teste de aptidão verbal, ele também mostrou um baixo desempenho, assim mesmo percebeu-se uma melhora ao justificar suas respostas e em algumas definições.

5.2.2.2.5 – João

João tem 15 anos, nunca realizou atividade profissional e está fazendo o ensino médio para ampliar seus conhecimentos. Ele não possui computador em casa, mas o usa de três a cinco vezes por semana na escola.

João sabe usar o *Windows*, o *Word* e o *Excell* e já teve aulas de educação artística através do computador. A sua preferência por assistir as aulas de geometria dinâmica foi pela curiosidade.

Durante o ensino fundamental, João estudou em escola pública no regime regular diurno e teve aulas de geometria, tendo maiores dificuldades em língua portuguesa e matemática.

Durante os testes de aptidões específicas da bateria DAT, João apresentou o seguinte desempenho: fez 43 pontos no teste de relações espaciais (*percentil* de 45), 38,75 pontos no teste de raciocínio abstrato (*percentil* de 80) e 22 pontos no teste de raciocínio verbal (*percentil* 45).

No pré-teste de conhecimento geométrico, João acertou apenas 17,65% das questões, apresentando dúvidas mesmo nas definições mais básicas para os tipos de triângulo, tal como ele o fez para o triângulo obtusângulo, por exemplo, dizendo que era "quando tem um lado com ângulo menor que 90^0".

Decorrente destas dúvidas, João também encontrou dificuldades para relacionar os tipos de triângulo.

Na parte referente às cevianas, ele errou todos os exemplos para traçar altura, mediana e bissetriz nos triângulos indicados, dizendo que "infelizmente não sei explicar" ou deixando em branco quando solicitado que definisse cada uma delas.

No pós-teste João deu um salto para 61,767% de acertos, representando um crescimento de 250% em relação ao pré-teste, o maior do grupo.

Mesmo havendo este crescimento considerável, ele continuou não compreendendo a condição de existência do triângulo, mas mostrou alguma evolução nesta compreensão. No pré-teste ele disse que bastava juntar "as 3 ripas agrupando-as formando um triângulo escaleno" e passou a dizer que "pro triângulo existir a soma de **alguns** dos lados tem que se **maior** que a do lado que sobrou".

As definições também se aperfeiçoaram. Por exemplo, ele inicialmente dizia que o triângulo retângulo "é quando tem um lado do triângulo com 90^0" e passou dizer precisamente que "é um triângulo com um ângulo de 90^0" ou ainda no caso do triângulo acutângulo, ele dizia que "é quando tem um lado com ângulo maior que 90^0" e passou a definir como "um triângulo que possui todos os ângulos agudos".

No caso das cevianas, João acertou no pós-teste os dois primeiros casos para traçar a altura e os três casos para a mediana e altura, porém continuou sem definir altura e assim o fez respectivamente para a mediana e bissetriz: "é a reta que parte da divisão de um ângulo ao seu lado oposto" e "é uma divisão do ângulo em duas partes iguais".

João foi um aluno bastante participante durante as aulas, sempre interagindo com os colegas e o professor. Há que se destacar seu bom desempenho nos testes de aptidões específicas, mesmo não indo bem no pré-teste de conhecimento geométrico. Ele demonstrou de uma razoável capacidade para visualização o que pode ter contribuído para o melhora de seu desempenho no pós-teste, além de ter sido um dos melhores no teste de raciocínio verbal. As aulas no laboratório de informática, com o uso da geometria dinâmica, provavelmente colaboraram para este crescimento.

5.2.2.1.6 - Comentários sobre o grupo

Os sujeitos deste grupo acertaram em conjunto 35,88% das questões no pré-teste e 67,65% no pós-teste, representando um crescimento global de 88,52%. O que se observou é que todos eles ultrapassaram a margem de 60% de aproveitamento após as aulas ministradas, sendo que um chegou atingir uma marca superior a 90%.

De um modo geral, os sujeitos aperfeiçoaram as justificativas de seu raciocínio e as formas de expressar algumas definições, mesmo que eles tenham apresentado de um modo geral dificuldades para compreender e expressar conceitos através de palavras, habilidade avaliada no teste de raciocínio verbal.

Um outro fator que também os sujeitos deste grupo também apresentaram deficiência inicial foi com relação à visualização de um objeto geométrico e à execução de sua manipulação mental, habilidade medida pelo teste de relações espaciais. As aulas com o computador, através do uso da geometria dinâmica, parecem ter contribuído para a mudança deste quadro. O crescimento que se observou pode ter sido, sobretudo, devido à apresentação de novas definições e conceitos durante as aulas.

Convém ressaltar aqui que os sujeitos do grupo já tinham por hábito utilizar computador tanto os que já possuem esta ferramenta em casa quanto os que ainda não a tem.

O maior crescimento verificado foi principalmente com relação à compreensão da condição de existência dos triângulos e às justificativas sobre as relações entre os tipos de triângulo. Houve também um crescimento em relação às questões que solicitavam o traçado da altura, mediana e bissetriz dos triângulos indicados, porém este foi menor quando o sujeitos eram solicitados a definir estas cevianas.

5.3 – Discussão dos Resultados

Para comparar os resultados obtidos pelos sujeitos do grupo de controle e do grupo experimental foi levado em consideração o número total de respostas corretas dos sujeitos dos dois grupos sobre o número total de questões propostas na entrevista II, que corresponde ao teste de conhecimento geométrico, antes e depois do trabalho de campo realizado, isto é, foi considerado o percentual de acertos de cada um dos sujeitos.

Deve-se aqui ressaltar que durante a aplicação das entrevistas foi solicitado ao aluno que não utilizasse o recurso do desenho como auxílio a seu raciocínio. A finalidade foi verificar se houve algum avanço dos alunos com relação à representação mental de conceitos relacionados a triângulos, ou seja, se houve algum desenvolvimento na habilidade de visualizar tais objetos.

Houve exceção apenas em três questões que solicitavam o traçado da altura, mediana e bissetriz em três desenhos de triângulos sugeridos.

Os resultados obtidos por todos os sujeitos no pré-teste já haviam sido apresentados no quadro 5.3. O quadro 5.4 mostra novamente estes resultados preliminares e acrescenta os desempenhos no pós-teste e os ganhos percentuais dos sujeitos em relação aos valores iniciais, já comentados na análise individual.

Quadro 5.4: Desempenho dos sujeitos dos dois grupos no teste de conhecimento geométrico.

Grupo Experimental						Grupo de Controle					
Sujeitos	**Pré-teste**		**Pós-teste**		**Ganho**	**Sujeitos**	**Pré-teste**		**Pós-teste**		**Ganho**
	Acertos	%	Acertos	%	%		Acertos	%	Acertos	%	%
Gabriel	20	58,52	31	91,18	55,00	**Daniel**	16	47,06	23	67,65	43,75
Miguel	8	23,53	21	61,76	137,50	**Rafael**	11	32,35	15	44,12	36,36
Lucas	13	38,23	21	61,76	61,54	**Pedro**	4	11,76	19	55,88	375,00
Paulo	14	41,18	26	76,47	85,71	**Marcos**	16	47,06	17	50,00	6,25
João	6	17,65	21	61,76	250,00	**Mateus**	21	61,76	24	70,59	14,28
Global	61	35,88	115	67,65	88,52	**Global**	68	40,00	98	57,65	44,12

Os gráficos 5.5 e 5.6 mostram que houve uma melhora no desempenho de cada sujeito no pós-teste em relação ao pré-teste, tanto no grupo experimental quanto no grupo de controle, porém o gráfico 5.7 ilustra que essa melhora foi maior entre os sujeitos do grupo experimental.

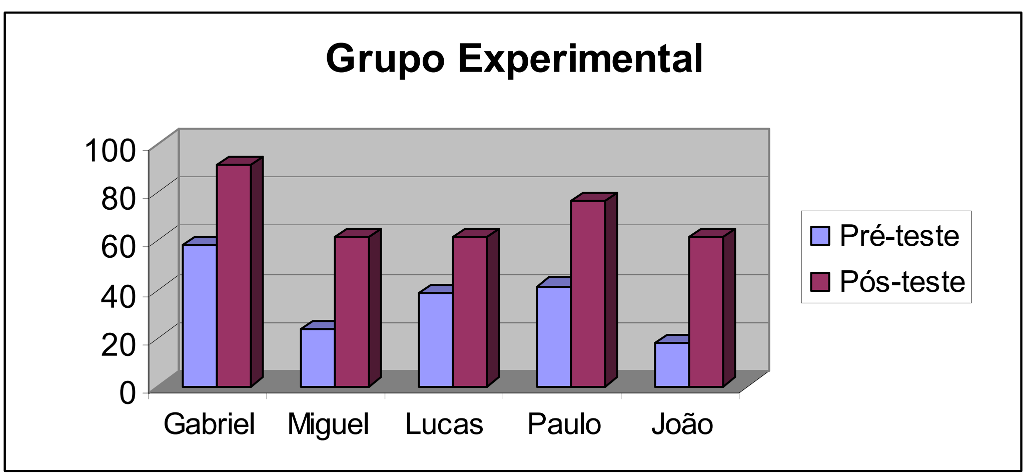


Gráfico 5.5: Desempenho dos sujeitos do grupo experimental no pré e pós-teste de conhecimento geométrico

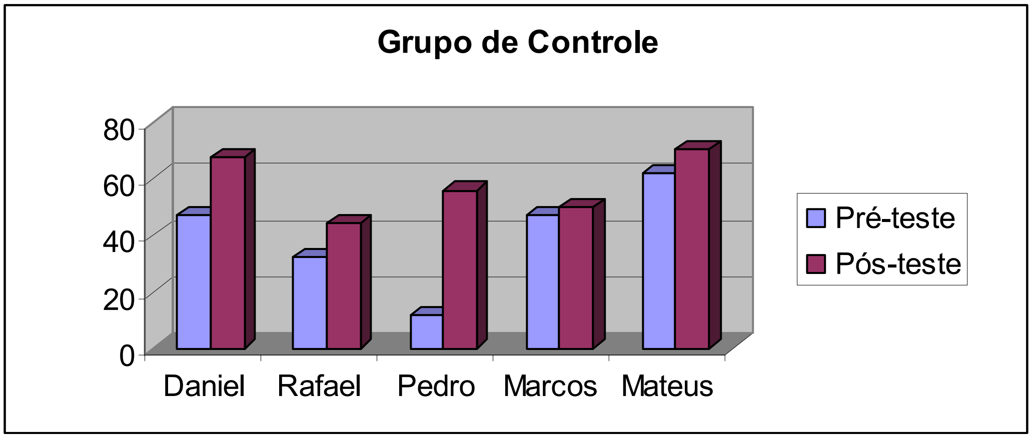


Gráfico 5.6: Desempenho dos sujeitos do grupo de controle no pré e pós-teste de conhecimento geométrico

Através da última linha do quadro 5.4 e do gráfico 5.7, é possível observar que o desempenho global dos sujeitos do grupo de controle no pré-teste foi ligeiramente superior (conforme já havia sido mostrado também no gráfico 5.4), porém no pós-teste a situação se inverte e o desempenho global dos sujeitos do grupo experimental se torna superior, resultando num ganho maior entre estes sujeitos em relação aos resultados iniciais.

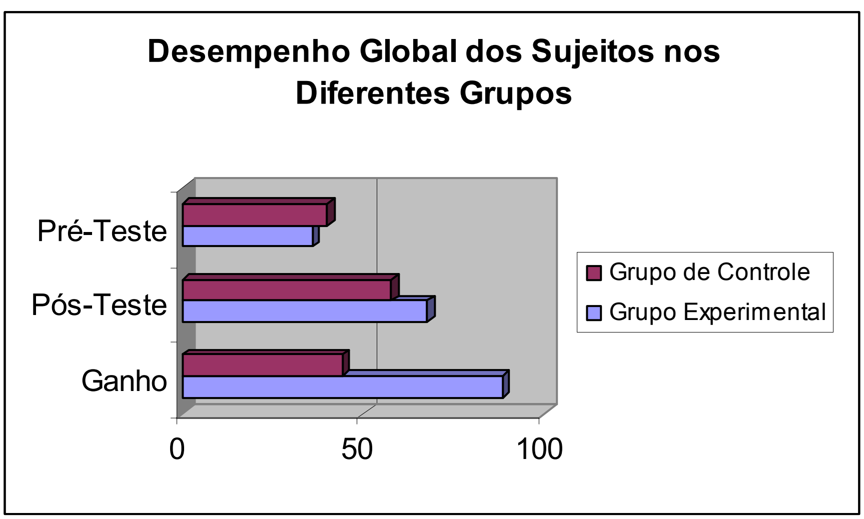


Gráfico 5.7: Desempenho global dos sujeitos dos dois grupos no pré e pós-teste de conhecimento geométrico e o ganho global obtido no pós-teste em relação ao pré-teste

Num estudo que teve como base grupos de sujeitos tão pequenos não se deve ousar em fazer afirmações genéricas, porém ao comparar os resultados encontrados com estes sujeitos é possível dizer que há evidências que o uso do *software* de geometria dinâmica contribui para uma melhor aprendizagem entre os sujeitos do grupo experimental.

Verificou-se que estes mesmos sujeitos apresentaram respostas qualitativamente melhores que os do grupo de controle, mostrando que eles talvez tenham sedimentado e compreendido melhor os conceitos relacionados a triângulos trabalhados durante o trabalho de campo.

Tal fato está relacionado possivelmente a uma melhor representação mental dos objetos geométricos vistos em maior quantidade na tela do *software* de geometria dinâmica, devido à precisão e variedade na construção destes objetos possibilitada pelo *software*.

Além de terem tido uma melhora maior no pós-teste, os alunos do grupo experimental mostraram maior desenvoltura para justificar suas respostas, ainda que tenham apresentado baixo desempenho prévio no teste de raciocínio verbal.

Retomando algumas idéias de VIGOTSKY (2003), a formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas tomam parte e este processo engloba a atenção, a associação, a formação de imagens e a inferência.

Todas estas funções intelectuais são muito importantes, porém nenhuma delas pode dispensar o uso da palavra como forma de conduzir as operações mentais. É através da palavra que pode se controlar a trajetória do pensamento e se caminhar em direção à solução de um problema proposto.

CAPÍTULO 6

UMA APLICAÇÃO DA GEOMETRIA DINÂMICA À GEOMETRIA ESPACIAL: ESTUDO DE CAMPO II

O presente capítulo apresenta outro estudo comparativo, sendo que o grupo estudado aqui é maior que o anterior e os sujeitos desta fase do estudo são agora alunos concluintes do ensino técnico e estudam no período noturno dos cursos de eletrônica, eletrotécnica, eletromecânica e mecânica de uma escola pública da zona norte da cidade do Rio de Janeiro.

Sendo o autor deste trabalho professor regente de turmas concluintes do período noturno e, aproveitando o fato do conteúdo da quarta série ser o de geometria espacial, foi possível fazer um novo estudo que incluísse uma análise da interferência da geometria dinâmica também neste domínio.

A experiência foi realizada no segundo semestre de 2004 e teve como motivação a análise de um grupo maior que o do capítulo anterior. O número total de alunos das quatro turmas em que o trabalho foi realizado perfazia 26 alunos da turma de eletrônica, 23 da turma de eletrotécnica, 25 da turma de mecânica e 24 da turma de eletromecânica.

O critério de constituição dos grupos para análise foi exclusivamente o de horários disponíveis no laboratório de informática da escola. Como o turno da noite possui 6 tempos de aula e o laboratório fica aberto apenas até o final do quarto tempo, o grupo experimental foi formado pelas turmas de eletrônica e eletrotécnica, que tinham suas aulas de matemática nos dois primeiros tempos, respectivamente às segundas-feiras e às quartas-feiras. Já o grupo de controle foi constituído pelas turmas de mecânica e eletromecânica, que tinham aulas de matemática nos dois últimos tempos, respectivamente às segundas-feiras e às quartas-feiras, não havendo mesmo a possibilidade de ter aulas no laboratório. Desta forma não houve questionamento por parte dos alunos em relação à decisão tomada, apenas um inconformismo em relação ao fato do laboratório fechar antes do final do turno.

Inicialmente tanto o grupo de controle quanto o grupo experimental tinham 49 sujeitos cada. Para análise deste estudo, porém, foram considerados apenas os alunos que freqüentaram todas as aulas e responderam a todas as entrevistas e testes, reduzindo o grupo de controle para 31 sujeitos (17 da turma de eletromecânica e 14 da turma de mecânica) e o experimental para 39 sujeitos (20 da turma de eletrônica e 19 da turma de eletrotécnica).

6.1 – Metodologia

O problema proposto foi o seguinte: a combinação de uma seqüência didática utilizando o Princípio de Cavalieri com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica realmente facilita a compreensão das deduções das fórmulas para o volume dos sólidos mais estudados no ensino médio? O uso de representações espaciais na tela do computador realmente melhora a representação mental de conceitos e objetos geométricos pelos alunos?

A hipótese de trabalho adotada foi a de que se um *software* de geometria dinâmica possibilita que o aluno veja as construções geométricas de diferentes pontos de vista devido, sobretudo, à possibilidade de movimentação destas figuras, observando as propriedades invariantes das construções e se o Princípio de Cavalieri permite uma abordagem mais intuitiva para justificar aquelas fórmulas, então os estudantes têm uma melhor compreensão das mesmas.

6.1.1 – Sujeitos

Os alunos desta fase do estudo também foram classificados em grupo de controle, constituído de 31 sujeitos e grupo experimental, constituído de 39 sujeitos. É importante ressaltar que os grupos não foram formados randomicamente, pois as turmas tinham a formação definida pela própria escola.

Após a aplicação da entrevista III e da apuração dos resultados, verificou-se que os dois grupos apresentaram perfis bastante semelhantes em diversos aspectos. Entretanto, o quadro 6.1 mostra que em relação à distribuição etária, ocorre uma pequena diferenciação: no grupo de controle 41,93% estão com menos de 20 anos, 41,93% estão com idade entre 21 e 30 anos e 16,14% com mais de 31 anos e no grupo experimental, 33,33% com menos de 20 anos, 51,28% entre 21 e 30 anos e 15,39% com mais de 31 anos.

Quadro 6.1: Distribuição etária dos grupos de controle e experimental

Pergunta	Grupo de Controle 31 alunos		Grupo Experimental 39 alunos	
	Quantidade	Percentual (%)	Quantidade	Percentual (%)
Qual a sua idade? **(a) até 20 anos** **(b) de 21 a 30 anos** **(c) mais de 31 anos**	(a) 13 (b) 13 (c) 5	(a) 41,93 (b) 41,93 (c) 16,14	(a) 13 (b) 20 (c) 6	(a) 33,33 (b) 51,28 (c) 15,39

O quadro 6.2 mostra que em relação à atividade profissional dos estudantes 70,97% do grupo de controle e 66,67% do grupo experimental trabalham ou fazem estágio e que a maior motivação para a maioria dos sujeitos deste estudo para fazer o ensino técnico ou médio foi em conseguir uma melhoria salarial no futuro: 74,19% dos sujeitos do grupo de controle e 69,23% consideraram esta a maior razão para estarem estudando, enquanto os demais em cada grupo disseram que estão estudando para ampliar seus conhecimentos.

Quadro 6.2: Perfil dos grupos em relação à atividade profissional e perspectivas em relação ao ensino técnico

Pergunta	Grupo de Controle 31 alunos		Grupo Experimental 39 alunos	
	Quantidade	Percentual (%)	Quantidade	Percentual (%)
Você trabalha? **(a) Sim** **(b) Não**	(a) 22 (b) 9	(a) 70,97 (b) 29,03	(a) 26 (b) 13	(a) 66,67 (b) 33,33
Quando você resolveu fazer o ensino médio/técnico, sua maior motivação foi: **(a) o diploma** **(b) ampliar seus conhecimentos** **(c) ter uma formação profissional para melhoria salarial** **(d) preparar-se para o vestibular**	(a) 0 (b) 8 (c) 23 (d) 0	(a) 0 (b) 25,81 (c) 74,19 (d) 0	(a) 0 (b) 9 (c) 27 (d) 3	(a) 0 (b) 23,08 (c) 69,23 (d) 7,69

Durante o ensino fundamental 80,64% do grupo de controle estudaram em escola pública, 9,68% em escola particular, enquanto os outros 9,68% estudaram uma parte em escola pública e outra parte em particular. No grupo experimental estes valores foram respectivamente, 71,79%, 23,08% e 5,13%. A maioria realizou estes estudos no regime regular diurno, 74,20% no grupo de controle e 74,36% no grupo experimental.

A maior dificuldade enfrentada durante este nível de ensino foi em matemática, indicada por 45,16% dos sujeitos do grupo de controle e por 41,02% do grupo experimental.

Um dado que de certa forma surpreende é que 58,06% do grupo de controle e 69,23% do grupo experimental disseram ter estudado geometria no ensino fundamental, porém entre estes alunos 77,78% do grupo de controle e 74,06% do grupo experimental consideram que a experiência foi apenas superficial.

O quadro 6.3 sintetiza estas informações.

6.3: Perfil dos grupos durante a realização do ensino fundamental

Perguntas	**Grupo de Controle**		**Grupo Experimental**	
	31 alunos		**39 alunos**	
	Quantidade	**Percentual (%)**	**Quantidade**	**Percentual (%)**
Durante o ensino fundamental (5ª a 8 ª séries) você estudou em escola: **(a) pública** **(b) particular** **(c) uma parte em pública e outra em particular**	(a) 25 (b) 3 (c) 3	(a) 80,64 (b) 9,68 (c) 9,68	(a) 28 (b) 9 (c) 2	(a) 71,79 (b) 23,08 (c) 5,13
Qual a forma de estudo realizada no ensino fundamental: **(a)Regular diurno** **(b)Regular noturno** **(c) Supletivo**	(a) 23 (b) 2 (c) 6	(a) 74,20 (b) 6,45 (c) 19,35	(a)29 (b) 5 (c) 5	(a) 74,36 (b) 12,82 (c) 12,82
Em qual disciplina você sentiu maior dificuldade no ensino fundamental? **(É possível escolher mais de uma opção).** **(a)Língua Portuguesa** **(b) Matemática** **(c) Ciências** **(d) História** **(e) Geografia** **(f) Educação Física** **(g) Nenhuma**	(a) 12 (b) 14 (c) 3 (d) 6 (e) 1 (f) 0 (g) 3	(a) 30,77 (b) 45,16 (c) 9,68 (d) 19,35 (e) 2,56 (f) 0 (g) 9,68	(a) 10 (b) 16 (c) 5 (d) 7 (e) 1 (f) 0 (g) 5	(a) 25,64 (b) 41,02 (c) 12,82 (d) 17,94 (e) 2,56 (f) 0 (g) 12,82
Você estudou Geometria durante o ensino fundamental? **(a) Sim** **(b) Não**	(a) 18 (b) 13	(a) 58,06 (b) 41,94	(a) 27 (b) 12	(a) 69,23 (b) 30,77
Em caso afirmativo, como foi esta experiência? **(a) Superficial** **(b) Aprofundado**	(a) 14 (b) 4	(a) 77,78 (b) 22,22	(a) 20 (b) 7	(a) 74,06 (b) 17,94

Um outro dado relevante para o estudo foi com relação ao acesso e uso de tecnologia informática pelos estudantes (quadro 6.4). Tanto no grupo de controle quanto no grupo experimental, a maioria ainda não possui computador em casa (respectivamente 67,74% e 66,67%). No entanto, apenas 16,13% no grupo de controle e 10,26% no grupo experimental disseram que nunca utilizaram o computador.

Quadro 6.4: Perfil dos estudantes em relação ao acesso e uso de tecnologia informática

Perguntas	**Grupo de Controle**		**Grupo Experimental**	
	31 alunos		**39 alunos**	
	Quantidade	**Percentual (%)**	**Quantidade**	**Percentual (%)**
Você possui computador em casa? **(a) Sim** **(b) Não**	(a) 10 (b) 21	(a) 32,26 (b) 67,74	(a) 13 (b) 26	(a) 33,33 (b) 66,67
Com que freqüência você costuma usar o computador? **(a) Nunca** **(b) uma a duas vezes por semana** **(c) 3 a 5 vezes por semana** **(d) mais de 5 vezes por semana**	(a) 5 (b) 18 (c) 5 (d) 3	(a) 16,13 (b) 58,06 (c) 16,13 (d) 9,68	(a) 4 (b) 28 (c) 2 (d) 5	(a) 10,26 (b) 71,79 (c) 5,13 (d) 12,82
Caso já utilize o computador, onde isto ocorre com mais freqüência? **(a) em casa** **(b) no trabalho** **(c) na escola** **(d) em casa e no trabalho** **(e) na escola e em casa** **(f) no trabalho e na escola** **(g) no trabalho, na escola e em casa**	(a) 3 (b) 5 (c) 9 (d) 3 (e) 3 (f) 3 (g) 0	(a) 11,54 (b) 19,23 (c) 34,61 (d) 11,54 (e) 11,54 (f) 11,54 (g) 0	(a) 11 (b) 5 (c) 22 (d) 0 (e) 1 (f) 0 (g) 0	(a) 28,20 (b) 12,82 (c) 56,42 (d) 0 (e) 2,56 (f) 0 (g) 0
O que você sabe utilizar no computador? **(É possível escolher mais de uma opção).** **(a) *Windows*** **(b) *Word*** **(c) *Excell*** **(d) *Power Point*** **(e) Outros programas. Quais? _________** **(f) Nada.**	(a) 24 (b) 22 (c) 20 (d) 16 (e) 11 (f) 2	(a) 77,41 (b) 70,97 (c) 64,45 (d) 51,61 (e) 35,48 (f) 6,45	(a) 31 (b) 31 (c) 23 (d) 13 (e) 13 (f) 2	(a) 79,48 (b) 79,48 (c) 58,97 (d) 33,33 (e) 33,33 (f) 5,13
Você já teve aula de alguma disciplina da formação geral no computador? **(a) Sim. Quais? ________** **(b) Não.**	(a) 7 (b) 24	(a) 22,58 (b) 77,42	(a) 6 (b) 33	(a) 15,38 (b) 84,62

Entre os que utilizam esta ferramenta, a maioria o faz no laboratório da escola (34,61% no grupo de controle e 56,42% no grupo experimental) e o fazem uma a duas vezes por semana (58,06% e 71,79%, respectivamente).

Mesmo numa escola que tem laboratório de informática com acesso à internet com banda larga, apenas 22,58% do grupo de controle e 15,38% do grupo experimental já haviam tido alguma aula de uma disciplina da formação geral no laboratório de informática.

Observa-se através destes dados que os perfis dos dois grupos não diferem significativamente e que grande parte dos alunos que vivenciaram a experiência das aulas com o uso do *software* de geometria dinâmica, já traziam alguma experiência com o uso do computador (89,74%).

6.1.2 – Instrumentos

Os instrumentos utilizados para a observação foram um questionário para sondagem e caracterização dos grupos (a entrevista III), o pré e o pós-teste de conhecimento geométrico (a entrevista IV), as notas de provas realizadas com o conteúdo proposto durante o terceiro e quarto bimestres letivos de 2004 e os testes de raciocínio verbal, raciocínio abstrato e raciocínio espacial da Bateria de Provas de Raciocínio (BPR-5) da Casa do Psicólogo. O último deles foi aplicado antes e após o trabalho da sala de aula, a fim de verificar se o desempenho dos alunos havia se modificado com o uso ou não do software de geometria dinâmica.

(a) Entrevista III – Questionário sobre o perfil dos sujeitos

A primeira entrevista apresentada aos sujeitos deste estudo era um questionário que tinha por objetivo caracterizar os grupos em estudo. A sua aplicação foi bastante breve, durando em média cerca de dez minutos.

As questões procuraram verificar a faixa etária dos alunos e alguns aspectos sobre a sua trajetória no ensino fundamental, tais como se este foi feito em escola pública ou particular, se o curso foi regular diurno, regular noturno ou supletivo, que disciplinas eles encontraram maior dificuldade, etc.

Também foi perguntado se o aluno possuía ou não computador em casa, se o uso desta ferramenta era freqüente, o local onde ele mais ocorria, quais conhecimentos de informática possuía e se teve anteriormente alguma aula com computador numa disciplina da formação geral do ensino fundamental ou médio.

(b) Entrevista IV – Teste de conhecimento geométrico (Pré e Pós-teste)

A entrevista IV teve como principal finalidade avaliar os conhecimentos geométricos dos sujeitos. Se eles compreendiam a noção de volume, as características dos sólidos estudados no ensino médio e as relações entre eles para a compreensão das deduções das fórmulas de seus volumes. Além de verificar se compreendiam o Princípio de Cavalieri.

Neste teste houve uma preocupação maior em avaliar a apreensão de conceitos por parte dos sujeitos, já que a parte de realização de cálculos de volumes foi feita através das provas aplicadas durante o bimestre letivo.

A primeira aplicação (pré-teste) objetivou verificar se os sujeitos já traziam algum conhecimento prévio sobre o assunto, enquanto a segunda aplicação (pós-teste) procurou verificar a evolução daqueles conceitos após a intervenção realizada.

A análise feita ao final deste capítulo procurou enfatizar que aspectos foram mais desenvolvidos, enfocando as contribuições da geometria dinâmica em contraste com o trabalho clássico da sala de aula.

Na avaliação das respostas dadas nas entrevistas considerou-se como corretos apenas os raciocínios bem estruturados, não sendo levado em consideração o raciocínio “meio correto”.

(c) Testes de Raciocínio da Bateria BPR-5

Segundo ALMEIDA & PRIMI (2000), a BPR-5 é uma bateria multidimensional padronizada de avaliação de habilidades cognitivas que oferece estimativas tanto do funcionamento cognitivo geral de um indivíduo quanto das suas forças e fraquezas em cinco habilidades, competências ou aptidões cognitivas específicas: raciocínio abstrato (RA), raciocínio verbal (RV), raciocínio espacial (RE), raciocínio numérico (RN) e raciocínio mecânico (RM).

Para eles, esta bateria pode ser usada em variados contextos em que seja necessário obter informações sobre o funcionamento cognitivo das pessoas e o profissional deve ter uma noção clara das questões que a avaliação precisa responder para então definir os construtos que deverão ser avaliados.

Esta bateria apresenta duas formas diferentes: a BPR-5 forma A, que é para ser aplicada em alunos da sexta, da sétima ou da oitava séries do ensino fundamental e a BPR-5 forma B, que deve ser aplicada em alunos de qualquer série do ensino médio. As duas formas contêm itens comuns, mas parte deles é única, com a finalidade de ajustar a dificuldade ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos para os quais elas foram desenvolvidas.

Neste estudo foi aplicado o teste de raciocínio abstrato, com duração de dez minutos e com a finalidade de avaliar a extensão do vocabulário e a capacidade de estabelecer relações abstratas entre conceitos verbais; o teste de raciocínio abstrato, com duração de doze minutos e com a finalidade de avaliar a capacidade de estabelecer relações abstratas em situações novas para as quais se possui pouco conhecimento previamente aprendido; o de raciocínio espacial, com duração de 18 minutos, objetivando avaliar a capacidade de visualização, ou seja, de formar representações mentais visuais e manipulá-las, transformando-as em novas representações; o de raciocínio numérico, com duração de 18 minutos, visando avaliar a capacidade de raciocinar indutiva e dedutivamente com símbolos numéricos em problemas quantitativos, além de verificar o conhecimento de operações aritméticas básicas. Os dois primeiros foram aplicados em uma sessão e os outros dois numa outra sessão.

O teste de raciocino mecânico não foi aplicado pois não era finalidade do trabalho verificar o conhecimento prático de mecânica e física, adquirido em experiências cotidianas e práticas.

A escolha dos quatro testes, e não apenas o de raciocino espacial, deu-se pela necessidade de um escore geral que auxiliasse na interpretação dos resultados, pois, de acordo com ALMEIDA & PRIMI (2000), a interpretação das notas deve ser feita primeiramente examinando o escore geral e depois o perfil de habilidades que gerou esse escore.

Após a apuração dos escores brutos (número de acertos) em cada teste, então eles devem ser somados para obter-se o escore geral (EG-4) e em seguida todos os resultados são convertidos para um escore-padrão normalizado (EPN) através de tabelas apropriadas, de acordo com o gênero do sujeito ou se a escola onde estuda é pública ou particular. O EPN é uma escala padronizada na qual a média é igual a 100 e o desvio padrão é igual a 15 como no QI de desvio. Para facilitar a interpretação o EPN é convertido em *percentil*.

Outro recurso importante para interpretar o perfil é o erro padrão de medida (EPM), que é uma estimativa do erro de mensuração baseada nos coeficientes de precisão, pois vários fatores não relacionados diretamente à habilidade de um examinando e que não podem ser controlados totalmente podem influenciar seu desempenho (ALMEIDA & PRIMI, 2000).

De acordo com estes autores, se os mesmos testes forem aplicados para avaliar a mesma habilidade, em aproximadamente 67% das vezes a nota atribuída ao sujeito ficará num intervalo de EPN +/- 1 EPM. O quadro 6.1 mostra estes valores:

Quadro 6.5: Valores de EPM por teste e habilidade

EPM	Teste A	Teste B
RA	5	7
RV	6	6
RM	9	6
RE	6	6
RN	4	5
EG-5	3	3
EG-4	3	4

(d) As notas das provas aplicadas no período de realização do estudo: P_1 e P_2

As provas aplicadas aos alunos durante os bimestres letivos foram incluídas na análise para verificar se poderia haver alguma relação entre o uso ou não de um *software* de geometria dinâmica, uma melhor compreensão pelos alunos dos conceitos trabalhados e seu rendimento escolar na disciplina de matemática.

Duas provas foram consideradas para a análise: uma aplicada após a primeira metade das aulas (final do terceiro bimestre) e a outra logo após o final das aulas (início do quarto bimestre).

6.1.3 – Procedimentos

As aulas se realizaram sempre às segundas-feiras com as turmas 3241 (turma de eletrônica – grupo experimental) e 3441 (turma de mecânica – grupo de controle) e às quartas-feiras com as turmas 3341 (turma de eletrotécnica – grupo experimental) e 3541 (turma de eletromecânica – grupo de controle).

As aulas no turno da noite têm duração oficial de 80 minutos, sendo que normalmente elas começam com 10 minutos de atraso como tolerância para que os alunos que chegam do trabalho possam jantar no refeitório. No último tempo os alunos também costumam ser liberados com 10 minutos de antecedência pelas dificuldades de condução para o retorno para a casa. Deste modo, apenas as aulas dos tempos do meio têm efetivamente duração de 80 minutos.

Como as aulas foram ministradas no primeiro e último tempos, elas contaram com uma duração total de 70 minutos em média.

Primeira aula (09/08/2004 – segunda-feira e 11/08/2004 – quarta-feira): aplicação da entrevista III em cerca de 10 minutos e da entrevista IV – pré-teste de conhecimento geométrico no tempo restante, cerca de 60 minutos.

Segunda aula (16/08/2004 – segunda-feira e 18/08/2004 – quarta-feira): foram aplicados os testes BPR-5 de raciocínio abstrato (12 minutos) e raciocínio verbal (10 minutos), além de cerca de 10 minutos antes de cada teste.

Terceira aula (23/08/2004 – segunda-feira e 25/08/2004 – quarta-feira): foram aplicados os testes BPR-5 de raciocínio espacial (18 minutos) e raciocínio numérico (18 minutos), além de cerca de 10 minutos antes de cada teste.

Quarta aula (30/08/2004 – segunda-feira e 01/09/2004 – quarta-feira):

A partir desta aula foi iniciada a seqüência didática “O Cálculo de Volumes e o Princípio de Cavalieri”, com a finalidade de justificar as fórmulas dos volumes de sólidos como o paralelepípedo retângulo ou bloco retangular, o cubo, um prisma qualquer, o cilindro, a pirâmide, o cone e a esfera, através do Princípio de Cavalieri.

De acordo com LIMA (1991), há três maneiras para a abordagem deste assunto no ensino médio: utilizar a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes, usar o cálculo infinitesimal ou finalmente utilizar o Princípio de Cavalieri.

Dentre as alternativas citadas, LIMA (1991, p.89) considera que o Princípio de Cavalieri “permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume”. Daí ser esta a opção adotada neste estudo.

As seqüências didáticas utilizadas foram baseadas naquelas propostas por DANTE (1999) e TROTTA, IMENES & JAKUBOVIC (1980): inicialmente comprova-se a fórmula para o cálculo do volume do paralelepípedo retângulo e do cubo, em seguida parte-se para a fórmula de um prisma qualquer, para a do cilindro, a de uma pirâmide qualquer, a do cone e, finalmente a da esfera.

Nesta primeira aula, foi aplicada a atividade 1 que tratava do conceito de volume, da dedução da fórmula para o cálculo do volume de um bloco retangular e do cubo.

Os principais objetivos foram:

- Compreender o conceito de volume;
- Compreender o conceito de bloco retangular ou de paralelepípedo retângulo;
- Justificar e compreender a fórmula do volume de um bloco retangular de dimensões a, b e c;
- Determinar o volume de um bloco retangular;
- Compreender o conceito de cubo;
- Justificar e compreender a fórmula do volume de um cubo de aresta a;
- Determinar o volume de um cubo.

Quinta aula (08/09/2004 – quarta-feira e 13/09/2004 – segunda-feira): foram aplicadas as atividades 2 e 3, que tratavam do Princípio de Cavalieri e do prisma e seu volume. Os principais objetivos foram:

- Compreender o Princípio de Cavalieri e sua importância;
- Aplicar o Princípio de Cavalieri para justificar fórmulas de volume;
- Compreender e identificar as principais características de um prisma;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de um prisma através do Princípio de Cavalieri;
- Determinar o volume de um prisma.

Sexta aula (15/09/2004 – quarta-feira e 20/09/2004 – segunda-feira): aplicação da atividade 4 sobre o cilindro e seu volume, cujos objetivos principais eram:

- Compreender e identificar as principais características de um cilindro;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de um cilindro através do Princípio de Cavalieri;
- Determinar o volume de um cilindro.

Sétima aula (22/09/2004 – quarta-feira e 27/09/2004 – segunda-feira): aula de exercícios e problemas.

Oitava aula (22/09/2004 – quarta-feira e 27/09/2004 – segunda-feira): aplicação da prova bimestral, relativa ao terceiro bimestre.

Nona aula (29/09/2004 – quarta-feira e 04/10/2004 – segunda-feira): aplicação da atividade 5 sobre a pirâmide e seu volume que tinha como principais objetivos:

- Compreender e identificar as principais características de uma pirâmide;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de uma pirâmide através da decomposição de um prisma triangular em três pirâmides equivalentes;
- Determinar o volume de uma pirâmide.

Décima aula (06/10/2004 – quarta-feira e 18/10/2004 – segunda-feira): aplicação das atividades 6 e 7 sobre o cone, a esfera e seus volumes, cujos objetivos eram:

- Compreender e identificar as principais características de um cone;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de um cone através do Princípio de Cavalieri;
- Determinar o volume de um cone;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de uma esfera através do Princípio de Cavalieri;
- Determinar o volume de uma esfera.

Décima primeira aula (13/10/2004 – quarta-feira e 25/10/2004 – segunda-feira): aplicação da primeira prova do quarto bimestre, a segunda para o presente estudo.

Décima segunda aula (20/10/2004 – quarta-feira e 05/10/2004 – sexta-feira): aplicação da entrevista IV como pós-teste.

Décima terceira aula (03/11/2004 – quarta-feira e 08/10/2004 – segunda-feira): aplicação do teste de raciocínio espacial da bateria BPR-5.

Uma observação importante a fazer é que mesmo as aulas que não foram realizadas no laboratório de informática (as do grupo de controle) não foram completamente tradicionais, pois elas não eram exclusivamente expositivas e, assim como as do laboratório, foram baseadas em atividades de ensino em que a movimentação das figuras era substituída por desenhos estáticos nas folhas impressas.

Na segunda parte das aulas, após a primeira prova, não houve necessidade de uma aula exclusiva de exercícios porque estes eram propostos imediatamente após a apresentação, realização e conclusão das atividades.

6.2 – Apresentação e Discussão dos Resultados

A variável independente[1] da pesquisa foi o uso ou não do *software* de geometria dinâmica, daí a existência de um grupo experimental e de um grupo de controle.

Foram três as variáveis dependentes[2] adotadas para análise dos resultados obtidos no trabalho de campo aqui realizado: os desempenhos dos sujeitos no pré e pós-teste de conhecimento geométrico (entrevista IV) e no teste de raciocínio espacial da bateria BPR-5 (antes e após o trabalho da sala de aula) e as notas das provas realizadas durante e após as aulas.

Um pressuposto básico e importante em qualquer tipo de planejamento é o de que as médias dos grupos não sejam significativamente diferentes no início de um experimento (MACGUIGAN, 1976).

[1] São as condições, tratamentos ou métodos utilizados pelo experimentador no grupo experimental.
[2] São as grandezas que variam conforme as condições impostas.

Deste modo, como não se trata de grupo randômico[3] e nem emparelhado[4], o pré-teste de raciocínio geométrico e os testes de raciocínio BPR-5 servem para uma caracterização e comparação dos grupos antes da realização do experimento.

No pré-teste de conhecimento geométrico, o grupo experimental teve média de acertos de aproximadamente 6,54 num total de 15 questões, ou seja, 42,79% de acertos, enquanto no grupo de controle essa média foi de aproximadamente 6,42, ou aproximadamente 43,59% de acertos. Portanto valores bastante próximos.

Porém, quando se verifica o desempenho dos mesmos sujeitos em quatro testes da bateria BPR-5 (raciocínio abstrato, raciocínio verbal, raciocínio espacial e raciocínio numérico, além do escore geral) verifica-se uma ligeira diferença entre os grupos.

Os resultados obtidos por cada sujeito e em cada grupo nos testes de raciocínio estão no apêndice H, enquanto os quadros 6.6 e 6.7 mostram um resumo destes resultados numa divisão por categoria conforme os intervalos de *percentis* considerados.

Quadro 6.6: Desempenho do grupo de controle nos testes de raciocínio BPR-5, de acordo com intervalos de percentis

Percentil	GRUPO DE CONTROLE									
	RA		RV		RE		RN		EG-4	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
0-25	17	54,84	18	58,07	7	22,58	16	51,62	19	61,29
26-50	10	32,26	8	25,81	16	51,62	9	29,03	9	29,03
51-75	2	6,45	4	12,90	7	22,58	2	6,45	3	9,68
75-100	2	6,45	1	3,22	1	3,22	4	12,90	0	0
Total	31	100	31	100	31	100	31	100	31	100

[3] Escolhido ao acaso em uma população.
[4] Quando são usadas medidas da variável emparelhada para ajudar a garantir a equivalência dos grupos.

Quadro 6.7: Desempenho do grupo experimental nos testes de raciocínio BPR-5, de acordo com intervalos de percentis

Percentil	GRUPO EXPERIMENTAL									
	RA		RV		RE		RN		EG-4	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
0-25	13	33,34	13	33,34	13	33,34	13	33,34	14	35,90
26-50	15	38,46	18	46,16	9	23,08	12	30,77	19	48,72
51-75	6	15,38	4	10,25	14	35,90	8	20,51	4	10,25
75-100	5	12,82	4	10,25	3	7,68	6	15,38	2	5,13
Total	39	100	39	100	39	100	39	100	39	100

Os resultados destes testes mostraram dificuldades em situações envolvendo raciocínio quantitativo com símbolos numéricos. No grupo de controle 80,65% dos sujeitos tiveram desempenho que os situam no intervalo de 0 a 50 de *percentil*, enquanto 64,11% do grupo experimental se situaram na mesma faixa. Houve, porém, um predomínio de indivíduos do grupo de controle no intervalo mais baixo de 0 a 25, cerca de 51,62%, enquanto que no grupo experimental este valor foi de 33,34%.

Verificou-se também dificuldade para visualização pela maioria dos sujeitos (avaliada pelo teste de raciocínio espacial). Esta dificuldade foi em maior número entre os sujeitos do grupo de controle (cerca de 74,20% dos alunos se situam no intervalo de 0 a 50 de *percentil*) que no grupo experimental (cerca de 56,40%). Porém, quando foi considerado apenas o intervalo de 0 a 25, a situação se inverte e cerca de 22,58% dos sujeitos do grupo de controle se encontram neste intervalo, em comparação com os 33,34% dos sujeitos do grupo experimental.

No teste que avalia a capacidade de estabelecer relações abstratas em situações novas para as quais se possui pouco conhecimento previamente aprendido (RA – raciocínio abstrato), 87,10% dos sujeitos do grupo de controle obtiveram um desempenho com *percentil* inferior a 50 e no grupo experimental foram 71,80%.

A extensão do vocabulário e a capacidade de estabelecer relações abstratas entre conceitos verbais, medida no teste de raciocínio verbal, mostrou um grupo de 83,88% dos sujeitos do grupo de controle e 79,50% dos sujeitos do grupo experimental com *percentil* inferior a 50, evidenciando o maior equilíbrio entre todas as habilidades verificadas pelos testes de raciocínio BPR-5.

Embora tenha havido uma diferença entre os grupos, principalmente na distribuição das faixas de *percentis*, com relação ao escore geral (veja gráficos 6.1 e 6.2), verifica-se que a grande maioria se situa numa capacidade geral inferior à média, pois 90,32% dos sujeitos do grupo de controle e 84,62% dos sujeitos do grupo experimental não superam 50% das pessoas com o mesmo nível de escolaridade com as quais seu desempenho foi comparado.

Porém quando é verificado o intervalo de 0 a 25, observou-se um predomínio entre os sujeitos de grupo de controle (61,29%) em relação ao grupo experimental (35,90%).

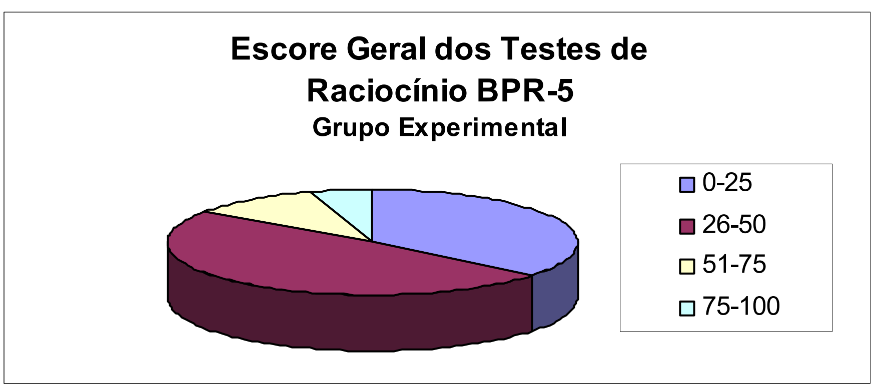


Gráfico 6.1: Distribuição dos sujeitos do grupo experimental nas faixas de percentis para o escore geral dos testes de raciocínio BPR-5

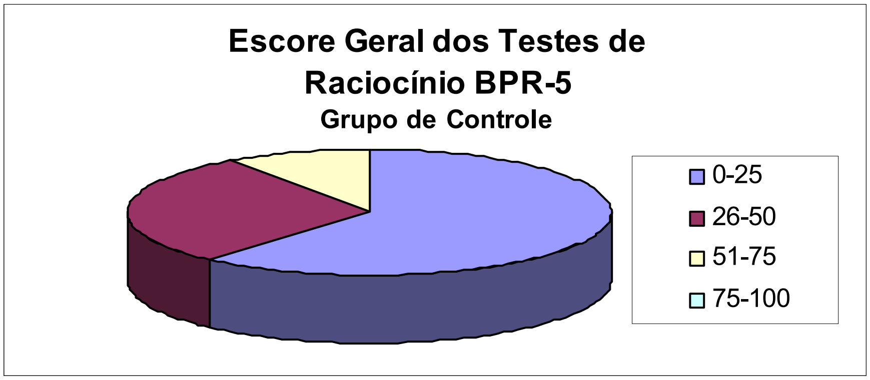


Gráfico 6.2: Distribuição dos sujeitos do grupo de controle nas faixas de percentis para o escore geral dos testes de raciocínio BPR-5

Segundo ALMEIDA & PRIMI (2000) estes resultados sugerem que a grande maioria dos sujeitos dos dois grupos possui uma capacidade abaixo do que seria esperado nesse nível de escolaridade para resolver problemas relativamente novos que requerem a análise das informações apresentadas pela situação-problema, o relacionamento das informações, a criação de novas concepções abstratas e a dedução de respostas para o problema a partir de suas concepções.

Pessoas com desempenho geral abaixo do *percentil* 50 podem encontrar dificuldades em planejar e executar efetivamente uma estratégia analítica de raciocínio diante de situações nas quais é necessário o manuseio mental de um grande número de informações. Estas características parecem ser comuns aos dois grupos estudados.

Para realizar a análise dos resultados foram consideradas três variáveis dependentes: as notas dos alunos nos bimestres em que as aulas foram realizadas, o desempenho deles na entrevista IV (pós-teste de conhecimento geométrico, abordando o conteúdo trabalhado) e finalmente o desempenho dos alunos no teste de raciocínio espacial após a realização das aulas, que avalia justamente sua capacidade de visualização ou de formar representações mentais visuais e manipulá-las transformando-as em novas representações.

6.2.1 – Análise das notas de provas realizadas durante e depois das aulas

Durante o presente trabalho de campo foram aplicadas duas provas: uma na primeira parte do estudo em que o conteúdo foi o conceito de volumes, a determinação do volume do cubo e do bloco retangular, o Principio de Cavalieri, a determinação do volume de um prisma qualquer e do volume de um cilindro. A segunda prova foi aplicada após a conclusão de todas as aulas e nesta segunda etapa o conteúdo foi a determinação do volume de uma pirâmide, do volume de um cone e do volume da esfera.

Os resultados individuais obtidos por todos os sujeitos dos dois grupos estão apresentados no apêndice G e resumidos no quadro 6.8, onde consta o número de sujeitos e respectivos percentuais, de acordo com intervalos escolhidos para as notas das provas P_1 e P_2 e para a média das duas.

Quadro 6.8: Resumo do desempenho obtido pelos sujeitos dos dois grupos nas provas aplicadas com o conteúdo trabalhado durante a intervenção em sala de aula.

NOTAS	GRUPO DE CONTROLE						GRUPO EXPERIMENTAL					
	P_1		P_2		MÉDIA		P_1		P_2		MÉDIA	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
0 a 2,5	1	3,23	2	6,46	0	0	0	0	1	2,56	0	0
2,6 a 5,0	7	22,58	11	35,48	10	32,26	3	7,69	7	17,96	5	12,82
5,1 a 7,5	18	58,06	11	35,48	18	58,06	15	38,46	16	41,02	17	43,59
7,6 a 10,0	5	16,13	7	22,58	3	9,68	21	53,85	15	38,46	17	43,59
TOTAIS	31	100	31	100	31	100	39	100	39	100	39	100

A média geral obtida pelos sujeitos do grupo de controle foi de 5,86 e a obtida pelos sujeitos do grupo experimental[5] foi de 7,36, aproximadamente 26% superior à média do outro grupo.

A aplicação do teste t, para decidir se a diferença entre as médias dos dois grupos foi apenas resultado de flutuações casuais ou se foi significativa, mostrou os resultados do quadro 6.9, onde N indica o número de sujeitos usados na comparação, df = N – 1 é o grau de liberdade, t indica a medida de comparação e p é a probabilidade ou nível de significância que, no caso da psicologia, é usado o parâmetro $p < 0,05$.

Quadro 6.9: Resultados do teste t para as médias das provas bimestrais aplicadas durante e após o trabalho de campo, comparando grupo experimental com o grupo de controle

Comparação das médias Grupo Experimental X Grupo de Controle	Média do Grupo Experimental [6]	N	df	t	p
	7,3790	31	30	3,322	0,002

A hipótese nula garante que só haverá diferença significativa entre os grupos se t não for suficientemente grande, ou seja, se a diferença entre os grupos não for grande demais para ser explicada unicamente a flutuações casuais ou por um erro experimental.

Neste caso recusa-se a aceitar como razoável que a diferença real entre as médias dos dois grupos seja zero e supõe-se que foram utilizadas todas as garantias experimentais adequadas na obtenção destes resultados e que conseqüentemente os grupos diferem somente em termos que

[5] Foram considerados para cálculo os 39 sujeitos do grupo experimental.
[6] O software SPSS considerou apenas 31 sujeitos do grupo experimental para comparação com o mesmo número de sujeitos do grupo de controle.

cada um sofreu um tratamento experimental diferente, pois receberam valores diferentes para a variável independente. Logo esta foi capaz de influir nas medidas da variável dependente e este é justamente o objeto do experimento (MACGUIGAN, 1976).

Conforme os resultados apresentados no quadro 6.9, pode-se rejeitar a hipótese nula no caso do estudo realizado, já que foi obtido um valor para $t = 3{,}322$ e para $p = 0{,}002 < 0{,}05$, mostrando que a diferença obtida pode ser atribuída ao fato dos grupos terem sofrido tratamento experimental diferenciado.

No presente estudo a variável independente considerada foi o uso ou não de um *software* de geometria dinâmica, que no caso foram o *Tabulae* e o *Calques 3D*.

6.2.2 – Análise do desempenho dos alunos no pré e pós-teste de conhecimento geométrico

O teste de conhecimento geométrico (entrevista IV) foi aplicado antes (pré-teste) e depois das aulas (pós-teste) realizadas para o trabalho de campo descrito neste capítulo. Os resultados individuais obtidos por todos os sujeitos dos dois grupos estão apresentados no apêndice I e resumidos no quadro 6.10, onde são mostrados os números de sujeitos e respectivos percentuais, de acordo com intervalos de percentuais de acertos no pré-teste e no pós-teste.

Resumidamente verifica-se que não houve qualquer sujeito que tenha tido percentual de acertos no intervalo de 0 a 25% tanto no pré-teste quanto no pós-teste e nos dois grupos.

Houve melhora no desempenho nos dois grupos quando são comparados os resultados do pré-teste e do pós-teste. No grupo de controle inicialmente 77,72% dos alunos haviam acertado entre 26 e 50% da prova no pré-teste e posteriormente apenas 38,71% dos alunos obtiveram percentual de acertos no intervalo considerado.

Quadro 6.10: Resumo do desempenho obtido pelos sujeitos dos dois grupos no teste de conhecimento geométrico antes e após as aulas ministradas para o trabalho de campo

Percentual de Acertos	GRUPO DE CONTROLE				GRUPO EXPERIMENTAL			
	PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE		PRÉ-TESTE		PÓS-TESTE	
	N	%	N	%	N	%	N	%
0-25	0	0	0	0	0	0	0	0
26-50	24	77,42	12	38,71	27	69,23	8	20,51
51-75	7	22,58	19	61,29	12	30,77	24	61,54
76-100	0	0	0	0	0	0	7	17,95
TOTAIS	31	100	31	31	39	100	39	100

No intervalo de 51 a 75% de acertos havia 22,58% de sujeitos no pré-teste, passando para 61,29% no pós-teste, ainda considerando o grupo de controle. Ninguém atingiu o intervalo de acertos de 76 a 100%.

No grupo experimental, inicialmente havia 69,23% de indivíduos que acertaram cerca de 26 a 50% da prova no pré-teste, reduzindo para 20,51% deste grupo no pós-teste. Por outro lado, o intervalo de 51 a 75% apresentou um crescimento de 30,77% para 61,54% e o intervalo de 76 a 100% de acertos que ninguém tinha atingido no pré-teste, no pós-teste passou a contar com 17,95% dos sujeitos do grupo.

Numa análise inicial já se percebe uma superioridade no desempenho do grupo experimental sobre o grupo de controle. Quando são analisadas as médias de acertos este fato se confirma, já que no pré-teste o grupo de controle apresenta média de acertos de 42,80% de acertos passando para 53,54% de acertos no pós-teste, demonstrando um crescimento médio de 25,09%.

No grupo experimental houve uma média inicial de 43,59% de acertos no pré-teste e de aproximadamente[7] 62,90% no pós-teste, demonstrando um ganho de 44,30%. Portanto superior ao do grupo de controle.

Quando aplicado o teste t, foram obtidos os resultados apresentados no quadro 6.11.

Os resultados do pré-teste mostram que a hipótese nula é válida para antes do início do estudo, já que t = 0,141 e p = 0,89 > 0,05.

Quadro 6.11: Resultados do teste t para comparação do grupo experimental com o grupo de controle a partir das médias dos grupos obtidas no pós-teste

Teste de Conhecimento Geométrico	Média de Acertos do Grupo Experimental [8]	Média de Acertos do Grupo Controle	N	df	t	p
Pré-teste	43,22%	42,80%	31	30	0,141	0,89
Pós-teste	63,64%	53,54%	31	30	3,063	0,05

Assim como foi verificado anteriormente, quando foram comparadas as médias das provas aplicadas ao final de cada etapa do estudo, desta vez também se verificou significância na comparação dos percentuais de acertos no pós-teste de conhecimento geométrico, já que t = 3,063 e p = 0,05. Este valor não é menor que 0,05 mas igual, porém parece razoável rejeitar a hipótese nula neste caso.

[7] Foram considerados para cálculo os 39 sujeitos do grupo experimental.

[8] O *software* SPSS considerou apenas 31 sujeitos do grupo experimental para comparação com o mesmo número de sujeitos do grupo de controle.

Observa-se que as médias obtidas pelos dois grupos não são exatamente extraordinárias, pois não ultrapassam 65% de acertos do pós-teste, mas deve-se levar em consideração os perfis apresentados pelos grupos antes da experiência. Os resultados dos testes de raciocínio da bateria BPR-5 sugeriam que a grande maioria dos sujeitos dos dois grupos possui uma capacidade abaixo do que seria esperado nesse nível de escolaridade para resolver problemas que requerem a análise das informações apresentadas pela situação, o cruzamento das informações, a criação de concepções abstratas e a dedução de respostas para o problema a partir destas concepções.

Ainda assim quando o teste t é aplicado para comparar a variação do desempenho dos grupos no pré e pós-teste, os resultados apontam para diferenças de desempenho significativas (quadro 6.12), pois $t = 9{,}909$ e $p = 0{,}000 < 0{,}05$ (os resultados fornecidos pelo software SPSS são aproximados até a casa de milésimos) para o grupo experimental e $t = 7{,}835$ e $p = 0{,}000 < 0{,}05$ para o grupo de controle.

Quadro 6.12: Resultados do teste t para comparação do pré com oe pós-teste de conhecimento geométrico no grupo experimental e no grupo de controle

Teste de Conhecimento Geométrico	Pré-teste	Pós-teste	N	df	t	p
Grupo Experimental	43,59%	62,90%	39	38	9,909	0,000
Grupo de Controle	42,81%	53,55%	31	30	7,835	0,000

Estes valores podem indicar que a utilização da seqüência utilizando o Princípio de Cavalieri, com ou sem o uso do *software* de geometria dinâmica, já traz ganhos significativos para o desempenho dos alunos, porém quando os dois grupos foram comparados no pós-teste verificou-se que o desempenho do grupo experimental foi significativamente melhor que o do grupo de controle.

Os resultados mostram, então, que a introdução da geometria dinâmica pode contribuir ainda mais para a melhoria da aprendizagem dos volumes dos sólidos mais utilizados no ensino médio.

6.2.3 – Análise da variação do desempenho dos alunos no teste de raciocínio espacial

O teste de raciocínio espacial que avalia a capacidade de visualização do sujeito, ou seja, de formar representações mentais visuais e manipulá-las transformando-as em novas representações, foi de grande importância para a verificação da hipótese geral estabelecida no estudo realizado: a de que a geometria dinâmica contribui para a representação mental de objetos e conceitos geométricos.

Os resultados obtidos por todos os sujeitos participantes do presente estudo estão no apêndice F.

De acordo com o quadro 6.3, o intervalo que deve ser considerado para a flutuação prevista numa aplicação do mesmo teste de raciocínio espacial da bateria BPR-4 é d e +/– 6 EPM, pois segundo ALMEIDA & PRIMI (2000) quando é dada uma nova oportunidade ao examinando aplicando uma prova semelhante e avaliando a mesma habilidade, em 67% das vezes essa nota estaria dentro da faixa de um EPM abaixo da nota obtida na primeira vez até um EPM acima dessa nota.

O quadro 6.13 mostra como variaram os grupos entre uma aplicação e outra do mesmo teste de raciocínio espacial.

Comparando as informações do quadro 6.13 com as conclusões de ALMEIDA & PRIMI (2000), verifica-se a flutuação apresentada pelos sujeitos do grupo de controle está dentro do esperado que seria de 67% dos casos. Os resultados mostram que 70,97% dos sujeitos do grupo de controle flutuaram o valor de seu EPN no teste de raciocínio espacial dentro do previsto.

Quadro 6.13: Variação do EPM entre duas aplicações do teste de raciocínio espacial da bateria BPR-5, antes e após as aulas ministradas para o trabalho de campo

Variação do EPM	GRUPO DE CONTROLE (%)	GRUPO EXPERIMENTAL (%)
EPM < – 6	6,45	5,13
$-6 \leq$ EPM $\leq +6$	70,97	51,28
EPM > + 6	22,58	43,59

O que chama a atenção é o fato de 43,59% dos sujeitos do grupo experimental apresentarem EPM maior que 6 na segunda aplicação. Este fato pode indicar que houve um ganho real nesta habilidade após a realização da experiência com o uso do *software* de geometria dinâmica, já que a flutuação dentro de intervalo de +/– 6 esteve abaixo dos 67% indicados por ALMEIDA & PRIMI (2000), pois cerca de 51,28% dos sujeitos do grupo experimental oscilaram neste intervalo.

Os desempenhos de todos os sujeitos dos dois grupos estão no apêndice F e o resumo destes resultados encontra-se no quadro 6.14, que mostra o número de sujeitos por grupo e os respectivos percentuais conforme seu desempenho no teste de raciocínio espacial da bateria BPR-5.

Os resultados do grupo de controle mostram que praticamente não houve alteração no desempenho dos sujeitos nas duas aplicações do teste de raciocínio espacial, no pré-teste e no pós-teste a distribuição dos sujeitos pelos percentis apresentou uma pequena alteração nos intervalos de percentis de 26 a 50 e de 51 a 75. Inicialmente eram 41,93% dos sujeitos deste grupo na primeira faixa e 32,26% na segunda faixa. Após a segunda aplicação dos testes estes resultados passaram a ser respectivamente, 38,71% e 35,48%.

Quadro 6.14: Resumo do desempenho obtido pelos sujeitos dos dois grupos no teste de raciocino espacial da bateria BPR-5, antes e apóss as aulas ministradas para o trabalho de campo

Percentis	GRUPO DE CONTROLE				GRUPO EXPERIMENTAL			
	PRÉ-TESTE Raciocínio Espacial		PÓS-TESTE Raciocínio Espacial		PRÉ-TESTE Raciocínio Espacial		PÓS-TESTE Raciocínio Espacial	
	N	%	N	%	N	%	N	%
0-25	7	22,59	7	22,59	13	33,33	8	20,52
26-50	13	41,93	12	38,71	9	23,09	11	28,21
51-75	10	32,26	11	35,48	14	35,89	14	35,89
76-100	1	3,22	1	3,22	3	7,69	6	15,38
TOTAIS	31	100	31	31	39	100	39	100

Na distribuição por faixas de *percentis* dos sujeitos do grupo experimental se observa alguma mudança: no início eram 33,33% dos sujeitos deste grupo com percentil de 0 a 25, sendo que posteriormente esta faixa se reduziu a 20,52% dos indivíduos; no intervalo de *percentil* entre 26 e 50, inicialmente eram 23,09% passando a 28,21%; no intervalo de *percentil* 51 a 70, apresentava 35,89% de sujeitos antes das aulas e permaneceu do mesmo tamanho o sub-grupo com este desempenho após as aulas. No intervalo superior de *percentil* (76 a 100), o grupo dobrou de tamanho: 7,69% (no início) e 15,38% (no final).

Quando o teste t é aplicado aos resultados obtidos pelos sujeitos dos dois grupos, observa-se que no grupo experimental houve ganho significativo, já que t = 3,846 e p = 0,000 < 0,05, sendo descartada, portanto, a hipótese nula. No entanto, no grupo de controle não houve ganho significativo pois t = 1,696 e p = 0,100 > 0,05, não podendo ser descartada a hipótese nula. Os dados estão no quadro 6.15.

Quadro 6.15: Resultados do teste t para comparação do pré com o pós-teste de raciocínio espacial da bateria BPR-5 no grupo experimental e no grupo de controle

Teste de Raciocínio Espacial	**Pré-teste (média de *percentil*)**	**Pós-teste (média de *percentil*)**	**N**	**df**	**t**	**p**
Grupo de Controle	38,39	42,19	31	30	1,696	0,100
Grupo Experimental	42,92	51,84	39	38	3,846	0,000

Uma outra comparação que pode ser feita é aquela que confronta o desempenho dos dois grupos no teste de raciocínio espacial. Através do quadro 6.16 é possível verificar que antes da realização do presente trabalho de campo a hipótese nula não poderia ser descartada, ou seja, não havia diferença significativa entre os grupos, pois t = 0,948 e p = 0,351 > 0,05.

Após as aulas, segundo a aplicação do teste t, a diferença entre os grupos ainda não é significativa, pois t = 1,734 e p = 0,093 > 0,05.

Quadro 6.16: Resultados do teste t para comparação do grupo experimental com o grupo de controle no teste de raciocínio espacial da bateria BPR-5

Teste de Raciocino Espacial	**Grupo Controle (média de *percentil*)**	**Grupo Experimental (média de *percentil*)**	**N**	**df**	**t**	**p**
Pré-teste	38,99	45,25	31	30	0,948	0,351
Pós-teste	42,19	53,93	31	30	1,734	0,093

Ainda que o teste t indique que não houve diferença significativa no teste de raciocínio espacial, mesmo após a realização da intervenção do presente trabalho, houve uma melhora no desempenho dos sujeitos do grupo experimental em relação ao grupo de controle. O valor encontrado para p = 0,093, ainda que seja superior ao parâmetro de 0,05, utilizado pela psicologia, já está bem mais próximo do que o encontrado na comparação feita com os resultados do pré-teste que era de p = 0,351.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação de nível médio deve ser contextualizada e procurar a interdisciplinaridade sempre que possível. Os trabalhos de campo aqui apresentados buscaram compreender de que forma o uso do computador pode colaborar para esta contextualização e como um *software* de geometria dinâmica pode auxiliar na melhoria da habilidade de visualização no processo de ensino-aprendizagem da geometria.

Retomando algumas idéias de FISCHBEIN (1994) e FAINGUELERNT (1999), descritas no capítulo 4, o mundo concreto lida com operações que se realizam na prática, com verificação empírica, com evidência direta e com a credibilidade intrínseca dos objetos reais. Para o aluno da educação básica, seja ele do ensino fundamental ou médio, a geometria dinâmica contribui para esta concretização no mundo geométrico.

Em geometria, as figuras geométricas não são objetos geométricos, mas possuem um significado intuitivo para as pessoas, podendo ser manipuladas mentalmente (representações internas) à medida que os objetos sejam manipulados (representações externas).

Segundo VERGNAUD (1985), o conceito de representação é fundamental para analisar a formação de concepções e competências, assim como para analisar a formação e os processos de transmissão do conhecimento.

Ele considera essencial a relação do sujeito com o real, pois é partir daí que este põe à prova suas representações e concepções. Do mesmo modo, estas representações e concepções são responsáveis pela maneira dele agir e monitorar sua ação.

Assim foi verificado no trabalho realizado: os alunos que passaram pela experiência de lidar com as representações dinâmicas dos *softwares* utilizados demonstraram uma evolução maior em relação à compreensão dos conceitos geométricos vistos; suas justificativas, sobretudo no estudo de campo documentado no capítulo 5, melhoraram demonstrando uma melhor apreensão dos conceitos.

Os sujeitos do grupo experimental do estudo documentado no capítulo 6 também demonstraram desempenho significativamente superior no pós-teste de conhecimento geométrico e na média das provas aplicadas durante o trabalho realizado (abordando o conteúdo sobre cálculo de volumes). No pós-teste de raciocínio espacial da bateria BPR-5 estes sujeitos também obtiveram desempenho superior aos do grupo de controle, mas não significativamente, conforme mostrou o teste t.

Em contraste, os alunos que tiveram aulas através das representações estáticas dos textos matemáticos ou do quadro de giz demonstraram maior dificuldade para as justificativas das respostas no capítulo 5, enquanto os sujeitos do grupo de controle apresentaram oscilações no seu desempenho no teste de raciocínio espacial dentro das flutuações previstas.

Observa-se que os resultados obtidos pelos sujeitos do grupo experimental nos dois experimentos foram superiores aos verificados entre os sujeitos do grupo de controle.

Entretanto os desempenhos dos sujeitos dos dois grupos e nos dois experimentos não chegaram a ser brilhantes, pois suas médias não foram altas. Tanto os testes da bateria DAT (capítulo 5) quanto os da bateria BPR-5 (capítulo 6) já indicavam sujeitos com algumas dificuldades de raciocínio espacial e verbal. Além destes fatores, outros ainda podem ter sido intervenientes nos resultados, o que implica em algumas reflexões sobre os trabalhos de campo realizados. Tais reflexões foram divididas em aspectos metodológicos, operacionais e comportamentais.

7.1 – Aspectos Metodológicos

- A seqüência das aulas, sobretudo, a da do primeiro trabalho, ficou um pouco comprometida, já que elas ficaram esparsas, por diversos problemas com calendário da escola durante o ano de 2003;
- Mesmo durante as aulas clássicas foi evitado o uso exclusivo da representação prototípica dos triângulos e, no caso da condição de existência foi mostrado uma seqüência de desenho com o passo a passo de sua construção, isto também pode ter colaborado para uma razoável compreensão pelos sujeitos do grupo de controle;
- No caso do cálculo de volumes foi também utilizada na sala de aula tradicional a seqüência didática com o Principio de Cavalieri e foi incentivada a participação dos alunos através de interações entre eles e deles com o professor;
- Um dos sujeitos do grupo experimental do primeiro trabalho observou que as atividades elaboradas estavam tão detalhadas que davam pouca autonomia para os alunos. Por que tão detalhadas? Por causa de problemas com o tempo;
- A partir desta observação do aluno, no segundo estudo as atividades procuraram ser mais abertas, dando maior autonomia para os alunos tirarem suas próprias conclusões;

- Nos dois estudos realizados os grupos não eram totalmente representativos da população de alunos como um todo, mas representavam um subgrupo desta população, com suas características próprias. Daí não ser possível chegar a inferências gerais sobre os resultados obtidos;
- A introdução do uso da geometria dinâmica pode trazer uma importante implicação para o currículo de matemática tanto do ensino fundamental quanto do médio, pois as aulas com o uso destes softwares certamente exigirão mais tempo para formalização dos conceitos e muito planejamento das atividades por parte do professor.

7.2 – Aspectos Comportamentais

- Na primeira experiência os alunos eram voluntários. Este fato prejudicou um pouco o andamento das aulas, já que eles também tinham que se preocupar com provas e/ou com outras atividades curriculares obrigatórias;
- A introdução do computador no cotidiano escolar costuma despertar interesse e motivação por parte dos alunos, mas também pode gerar uma expectativa de que seu uso é apenas uma brincadeira ou passatempo. Ainda há uma cultura na escola que não associa seu uso a um trabalho didático mais consistente através do uso adequado de *softwares* educacionais. Assim como ele estimula a motivação também pode vir a ser fator de dispersão quando se dispõe de um laboratório, por exemplo, com acesso à Internet através de banda larga;

- Os alunos costumam não gostar de ler as atividades (não têm muita paciência). Talvez fosse interessante elaborar atividades na própria tela do computador, a partir do ambiente da ferramenta computacional.

7.3 – Aspectos Operacionais

- Houve datas que estavam previstas inicialmente para as aulas e coincidiram com conselhos de classe, feira técnica, Semana de Vida e Cidadania etc.;
- O laboratório da escola fica normalmente aberto para atividades curriculares e apesar de ter diversos horários, estes são disputados por vários professores algumas vezes, especialmente os de disciplinas técnicas;
- Nos dois trabalhos houve dificuldades de ordem técnica: computadores infectados com vírus, programas com problemas no funcionamento e falta de suporte especializado. Havia apenas um monitor que se encarregava de prestar socorro quando havia falha no funcionamento dos programas;
- Deve-se ressaltar que os muitos problemas ocorridos durante a prática se constituem em problemas comuns no cotidiano escolar.

7.4 – Trabalhos futuros

O momento de finalizar um estudo como este traz profundas reflexões para um aspirante a pesquisador, como o autor do trabalho. Estas reflexões levam a uma auto-crítica sobre desacertos durante toda a trajetória da pesquisa realizada, erros que podem ser cometidos até mesmo que por um professor-regente experiente em ministrar aulas tradicionais, mas um iniciante na busca de caminhos para a melhoria da qualidade de seu trabalho com a aprendizagem da geometria. O uso do *software* de geometria dinâmica foi uma novidade para os alunos que participaram do estudo e para o pesquisador, que ainda não havia usado este recurso em suas aulas.

Esta auto-crítica permite uma avaliação do estudo realizado e acaba indicando novos caminhos que podem ser percorridos em trabalhos futuros.

As idéias do capítulo 5, a seqüência didática com o conteúdo de triângulos, suas classificações, relações entre ângulos e cevianas podem ser ampliadas para um estudo que também incluísse congruência e semelhança de triângulos. O mesmo pode ser dito em relação a um amplo estudo sobre quadriláteros.

O grupo estudado naquela etapa foi de apenas 10 sujeitos, o que acabou permitindo uma análise mais detalhada dos desenvolvimentos individuais, mas um novo estudo poderia considerar um grupo maior, a fim de que os resultados permitam alguma generalização.

Inversamente ao proposto no parágrafo anterior, um novo estudo com as idéias do capítulo 6, o uso de um *software* de geometria dinâmica em conjunto com a seqüência didática que utiliza o Princípio de Cavalieri para justificar as fórmulas de volumes dos principais sólidos estudados no ensino médio, poderia ser feito com um grupo menor a fim de verificar detalhadamente como o uso do *software* dinâmico auxilia numa melhor compreensão conceitual por parte dos sujeitos que o utilizam.

As atividades de ensino elaboradas para os estudos dos capítulos 5 e 6 foram mais de exploração que de expressão (os conceitos estão na seção 3.4.2.2), num trabalho futuro seria interessante utilizar mais as atividades de expressão.

O uso do histórico do aluno pelo pesquisador ainda é restrito, devido ao tempo que se necessita despender para análise de cada estudante a partir do arquivo em HTML gerado pelos programas. Este problema se torna ainda maior quando se pensa no trabalho docente diário.

Seria interessante o desenvolvimento de ferramenta computacional que reproduzisse a ação do aluno através de pequenos filmes, facilitando o trabalho do professor e/ou pesquisador para a avaliação de seu desempenho e compreensão de seu raciocínio.

Para finalizar, os estudos também poderiam também ser estendidos a turmas de escolas da rede privada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M.E.B. **O Aprender e a Informática:** Arte do Possível na Formação do Professor. Disponível na internet via www.proinfo.gov.br. Arquivo consultado em janeiro de 2003.

ALMEIDA, L.S.; PRIMI, R. **Manual Técnico – Bateria de Provas de Raciocínio**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2000.

ALVES, G.S.; SAMPAIO, F.F. O Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele e Possíveis Contribuições da Geometria Dinâmica. In: I Simpósio Sul-Brasileiro de Matemática e Informática. **Anais Eletrônicos...** Curitiba: Uniandrade. 2002. Disponível na internet via http://www.uniandrade.br/simposio/pdf/mat114.pdf. Arquivo consultado em set de 2002.

__________________________. O Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele e Possíveis Contribuições da Geometria Dinâmica. **Relatório Técnico**. Rio de Janeiro: NCE-UFRJ, n$^{\underline{0}}$ 20/02, pp. 1-10, 2002.

ALVES, G.S.; SOARES, A.B.; LIMA, J.C.M.. Uma Introdução ao Estudo dos Poliedros com o uso do Computador. In: I Simpósio Sul-Brasileiro de Matemática e Informática. Uniandrade. **Anais Eletrônicos...** Curitiba: Uniandrade. 2002. Disponível na internet via http://www.uniandrade.br/simposio/pdf/mat106.pdf. Arquivo consultado em set de 2002.

____. Uma Introdução ao Estudo dos Poliedros com o uso do Computador. **Relatório Técnico**. Rio de Janeiro: NCE-UFRJ, n$^{\underline{0}}$ 19/02, pp. 1-10, 2002.

____. Utilização de Poliedros: Um Estudo de Caso. **Relatório Técnico**. Rio de Janeiro: NCE-UFRJ, n$^{\underline{0}}$ 16/02, pp. 1-10, 2002.

____. Triângulos Dinâmicos: uma seqüência didática sobre conceitos relacionados a triângulos com o auxílio do *software Tabulae*. In: XVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. **Anais...** Porto Alegre: PUC-RS. 2004.

______________________________________. O Cálculo de Volumes e o Princípio de Cavalieri: Uma Seqüência Didática com o Auxílio da Geometria Dinâmica. In: XVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. **Anais...** Porto Alegre: PUC-RS. 2004.

______________________________________. Uma Seqüência Didática com o Auxílio da Geometria Dinâmica: O Cálculo de Volumes e o Princípio de Cavalieri. In: XXXIV Reunião Anual de Psicologia. **Anais...** Ribeirão Preto: USP. 2004.

ALVES, G.S.; SOARES, A.B. A Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Jean Piaget: Principais Conceitos e Aproximações com a Aprendizagem da Geometria. In: III Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, 2003. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Anais...** Vassouras: Universidade Severino Sombra. 2003

________________________. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *Software Tabulae*. In: XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação – IX Workshop de Informática na Escola. **Anais...** Campinas: Unicamp. 2003, pp 275-286.

________________________. Um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações dos *softwares* de Geometria Dinâmica. **Relatório Técnico**. Rio de Janeiro: NCE-UFRJ, n$^{\underline{0}}$ 10/04, pp. 1-13, 2004.

________________________. Compreendendo a Formação de Conceitos Geométricos através do Processo de Representação Mental. **Relatório Técnico**. Rio de Janeiro: NCE-UFRJ, n$^{\underline{0}}$ 12/04, pp. 1-11, 2004.

ALVES, G.S.et al. A Perspectiva Construtivista e os *Softwares* de Geometria Dinâmica: Compreendendo suas Correlações. In: III CAREM – Conferencia Argentina de Educación Matemática . **Anais...** Salta – Argentina: UNSA – Universidad Nacional de Salta. 2003.

________________. A Perspectiva Construtivista e os *Softwares* de Geometria Dinâmica: Compreendendo suas Correlações. **Revista Científica da UBM** – Universidade de Barra Mansa. n$^{\underline{o}}$ 09, vol. 5, pp. 23-27, jun de 2003.

________________. Um Estudo das Correlações entre os *Softwares* de Geometria Dinâmica e a Perspectiva Construtivista. **Relatório Técnico**. Rio de Janeiro: NCE-UFRJ, n$^{\underline{0}}$ 11/04, pp. 1-9, 2004.

BALDINO, R.R. A Figura do Professor-Pesquisador**. Boletim Informativo da DNE**, São Paulo: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 17, jun/jul de 1993.

BARBOSA, A.E.C. **O Ensino de Funções por meio da Visualização Usando Derive:** um estudo de caso. Orientadores: Gilda Helena Bernardino de Campos e Paulo Afonso Lopes da Silva: Universidade Santa Úrsula, 1997. 108p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).

BARROSO, I.C. **Geometria Dinâmica, novas perspectivas para o aprendizado da geometria.** Orientador: João Bosco Pitombeiras: PUC-RIO, 1999, 124 p. Dissertação (Mestrado em Matemática).

BELFORT, E. Tabulæ e Mangaba: Geometria Dinâmica. In: VII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ. **Anais...** Rio de Janeiro. 2001.

BELFORT, E.; GUIMARÃES, L.C. **Roteiros de Laboratório.** Pró-Ciências/Convênio CAPES/FAPERJ. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática – UFRJ/LabMa/Projeto Fundão. 1999. 59 pp.

BIAGGIO, A.M.B. **Psicologia do Desenvolvimento.** Petrópolis: Vozes, 1991. Cap. 3: A teoria do desenvolvimento intelectual de Piaget.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G., **Informática e Educação Matemática.** Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica. 2001. 98 pp.

BOYER, C. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1985, 488 p.

CANÇADO, P. A lousa e o giz da era digital. Forbes Brasil, São Paulo, 08 nov 2000. Disponível em http://www.escola24h.com.br/midia-detalhes.cfm?cod=11 . Acesso em: 11 abr 2004.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHILEMANN, A. **Na Vida Dez, Na Escola Zero.** São Paulo: Cortez, 2001, 182p.

CARRAHER, T. (org.). **Aprender Pensando – Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação.** Petrópolis: Vozes, 2002, 127p.

CYSNEIROS, P.G. A Assimilação da Informática pela Escola. In: III Congresso da RIBIE – Rede Iberoamericana de Informática Educativa. **Anais...** Barranquilla. 1996.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2003, 176p.

______________. **Matemática – Contexto e Aplicações.** Ensino Médio, volume 2, São Paulo: Ática, 1999, 526 p.

DE VILLIERS, M.D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*, ***Educação e Matemática***. Lisboa, Portugal: APM – Associação dos Professores de Matemática. n$^{\underline{0}}$ 62, pp. 31-36, mar/abr de 2001.

________________. **Why Proof in Dynamic Geometry**. Disponível na internet via http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/why.pdf. Arquivo consultado em fevereiro de 2003.

ECHEVERRÍA, M.P.P. A Solução de Problemas em Matemática. In: POZO (org.). **A Solução de Problemas**. Porto Alegre: Artmed, 1998, cap. 2, p. 43-65.

ECHEVERRÍA, M.P.P.; POZO, J.I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO (org.). **A Solução de Problemas**. Porto Alegre: Artmed, 1998, cap. 1, p. 13-42.

FERREIRA, A.B.H. **Novo Aurélio Século XXI: O Dicionário da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999. 3ª ed. 2128 p.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula - Geometria.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. 77 p.

__________.**Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1997. 2ª ed. 843 p.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria.** Porto Alegre: Artmed, 1999, 227p.

FAINGUELERNT, E. K. **Representação do Conhecimento Geométrico através da Informática**. Orientadora: Ana Regina Cavalcanti da Rocha: UFRJ, 1996. 249 p. Tese Doutorado em Ciências – Engenharia de Sistemas e Computação).

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts**, Educacional Studies in Mathmatics**, Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, nº 24/2, pp. 139-162, 1993.

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and Mathmatics: an Educational Aproach.** Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1994.

FLAVELL, J. H.; MILLER, P. H.; MILLER, S. A. **Desenvolvimento Cognitivo.** Tradução: Cláudia Dornelles. Porto Alegre: Artmed, 1999. 341p.

FONSECA, V. **Introdução às Dificuldades de Aprendizagem.** Porto Alegre: Artmed, 1998, 388p.

GINAPE. O Estado da Arte dos NTE's do Brasil: Um Estudo de Levantamento de Dados. In: XIII SBIE – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2002, **Anais...** São Leopoldo – RS, pp. 539-541.

GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR., J.R. **Matemática: Pensar e Descobrir.** São Paulo: FTD, vol.3 – sétima série, 1996, 312 p.

GRAVINA, M.A. Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria. In: VII SBIE – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1996, **Anais...** Belo Horizonte, pp. 1-13.

GRAVINA, M.A.; SANTAROSA, L.M.A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. In: RIBIE 98 – iv Congresso da Rede Ibero-Americana de Informática Educativa, 1998, **Anais Eletrônicos...** Brasília.Centro de Convenções Ulysses Guimarães. Disponível na internet via http://www.niee.ufrgs.br/ribie98/TRABALHOS/117.PDF Arquivo consultado em jan de 2004.

____________. The Proof in Geometry: essays in a dynamical environment. In: Proof and Proving in Mathematics Education. ICME9 TSG 12, **Anais...** Tóquio/Makuhari, 2000.

GUARDA, A. Escola24 horas prepara expansão no Nordeste. Gazeta Mercantil - Nordeste, Recife, 25 jun 2001. Disponível em http://www.escola24h.com.br/midia.cfm?start=11. Acesso em: 11 abr 2004.

GUIMARÃES, L.C. Ferramentas Computacionais para o Ensino de Matemática à Distância.In: VII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ. **Anais...** Rio de Janeiro. 2001.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos Psicológicos da Aprendizagem da Geometria**. Boletim GEPEM** – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, $n^{\underline{o}}$ 32, ano XVIII, pp. 3-31, 1994.

HOYLES, C. ; JONES, K. Proof in Dynamic Geometry Contexts. In: MAMMANA, C. (ed.), VILLANI,V.(ed.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21^{st} Century – An ICMI Study.** Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic, 1998. pp. 121-128.

KALEFF, A.M.M.R *et al* Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele**, Bolema***,* Rio Claro. $n^{\underline{0}}$ 10, pp.21-30, 1994.

KALEFF, A.M.M.R, Tomando o Ensino de Geometria em nossas mãos**, Educação Matemática em Revista**, SBEM, São Paulo. $n^{\underline{0}}$ 2, pp. 19-25, $1^{\underline{0}}$ sem. de 1994.

________________. **Vendo e Entendendo Poliedros.** Niterói: EdUFF, 1998, 209 p.

LABORDE, C. Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry in a Computer-Based Environment. In: MAMMANA, C. (ed.), VILLANI,V.(ed.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21^{st} Century – An ICMI Study.** Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic, 1998. pp. 113-121.

LIMA, E.L. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança.** Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. 98 p.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria?**, Educação Matemática em Revista***,* SBEM, São Paulo. $n^{\underline{0}}$ 4 , pp. 3-13, 1995.

MACHADO, A.S. **Matemática – Temas e Metas.** Elza F. Gomide. São Paulo: Atual, 1996, 276 p.

MARIOTTI, M.A. Justifying and Proving in Geometry: the mediation of a Microworld.In: The European Conference on Mathematical Education. **Anais...** Praga: Prometheus, 1997, pp. 21-26.

MCGUIGAN, F.J. **Psicologia Experimental – Uma Abordagem Metodológica**. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária (EPU), 1976, 436p.

MEDEIROS, K.M. O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula**, Educação Matemática em Revista**, SBEM, São Paulo. n$^{\underline{0}}$ 9/10, pp. 32-39, abr de 2001.

MIRA, E.C. **Propriedades Básicas de Triângulos e Quadriláteros:** Um Estudo de Caso com o *Geometers Sketchpad*. Orientadora: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner: UFRJ, 2001. 240 p. Dissertação (Mestrado em Informática).

MORROW, J. Dynamic Visualization from Middle School through College. In: KING, J.R.(ed.), SCHATTSCHNEIDER, D.(ed.). **Geometry turned on! Dynamic Software in Learning, Teaching and Research.** Washington D.C.: Mathmatical Association of America, 1997. pp. 47-54.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN). Ministério da Educação. Brasília. 1996.

PAPERT, S. **A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática.** Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artmed, 2ª reimpressão, 2002, 210p.

PIAGET, J. **O Raciocínio na Criança.** Tradução: Valérie Rumjonek Chaves. Rio de Janeiro: Record, 1967, 241p.

_________. **Abstração Reflexionante – Relações Lógico-Aritmética e Ordem das Relações Espaciais.** Tradução: Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artmed, 1995, 292p.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995, 179p.

POURBAIX, M.S. **As Representações Mentais na Resolução de Problemas Matemáticos Relacionados à Aritmética:** Desafios e Implicações nas Ciências Cognitivas. Orientadora: Adriana Benevides Soares. Campos: UENF, 2002. Dissertação (Mestrado em Cognição e Linguagem).

PROJETO FUNDÃO. **Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele**. IM/UFRJ. 2000.

PURIFICAÇÃO, I.C. **Cabri-Géométre e a Teoria de Van Hiele:** possibilidades e avanços na construção do conceito de quadrilátero. Orientadora: Maria Tereza Carneiro Soares. Co-orientadora: Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 1999.228p. Dissertação (Mestrado em Educação).

REZENDE, E.Q.F.; QUEIROZ, M.L.B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** Campinas: Editora da Unicamp, 1999, 117p.

RODRIGUES, C.I.; REZENDE, E.Q.F. **Cabri-Géomètre e a Geometria Plana.** Campinas: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000, 256p.

SILVA, J. J. da Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática**, Bolema,**. Rio Claro. Ano 15 n$^{\underline{0}}$ 18, pp. 68 a 78, 2002.

SINGH, S., **O Último Teorema de Fermat.** Tradução: Jorge Luís Calife, São Paulo: Record, 1999, 324 p.

SOARES, A.B. Representação e Representação Mental, **Relatório Técnico.** Rio de Janeiro: NCE-UFRJ, n$^{\underline{0}}$ 05/03, pp. 1-18, 2003.

SOUZA, F.C.A.G. **Geometria Dinâmica**: um estudo. Orientadores: Luiz Carlos Guimarães e Paulo Roberto de Oliveira: UFRJ/COPPE, 1998. 211p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas).

STERNBERG, R.J. **Psicologia Cognitiva.** Tradução: Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: Artmed, 2000. 494p.

UNDERWOOD, J.D.M.; UNDERWOOD, G. **Computers and Learning: Helping Children Acquire Thinking Skills.** Oxford: Basil Blackwell, 1990, 209 p.

TROTTA, F., IMENES, L.M.P., JAKUBOVIC, J. **Matemática Aplicada.** Segundo grau, vol.2, São Paulo: Moderna, 1980, 394p.

VALENTE, J.A. Diferentes Usos do Computador na Educação**. Em Aberto**. nº 57. Ano 12. pp.3-16, 1993.

VAN HIELE, P. **Structure and Insight.** Orlando: Academic Press. 1986.

VERGNAUD, G. **Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação.** Trad. Anna Franchi e Dione Luchesi de Carvalho. Psychologie Française, nº 30-3/4, pp.245-252, novembro de 1985.

VIEIRA, E. Representação Mental: As Dificuldades na Atividade Cognitiva e Metacognitiva na Resolução de Problemas Matemáticos**. Psicologia: Reflexão e Crítica**, 14(2), pp.439-448, 2001.

VIGOTSKY, L.S. **Pensamento e Linguagem.** Tradução: Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 2003, 194p.

WYATT, K.W.; LAWRENCE, A.; FOLETTA, G.M. **Geometry Activities for Middle School Students with The Geometer's Sketchpad.** Berkeley: Key Curriculum Press, 1998, 205p.

ZULATTO, R.B.A. **Professores de Matemática que Utilizam *Softwares* de Geometria Dinâmica:** suas características e perspectivas. Orientadora: Miriam Godoy Penteado: UNESP, 2002. 119p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).

Apêndice A

Governo do Estado do Rio de Janeiro
Fundação de Apoio à Escola Técnica
Escola Técnica Estadual Visconde de Mauá

Curso de Geometria Euclidiana Plana com o uso do Computador

Professor George de Souza Alves

Caderno de Atividades

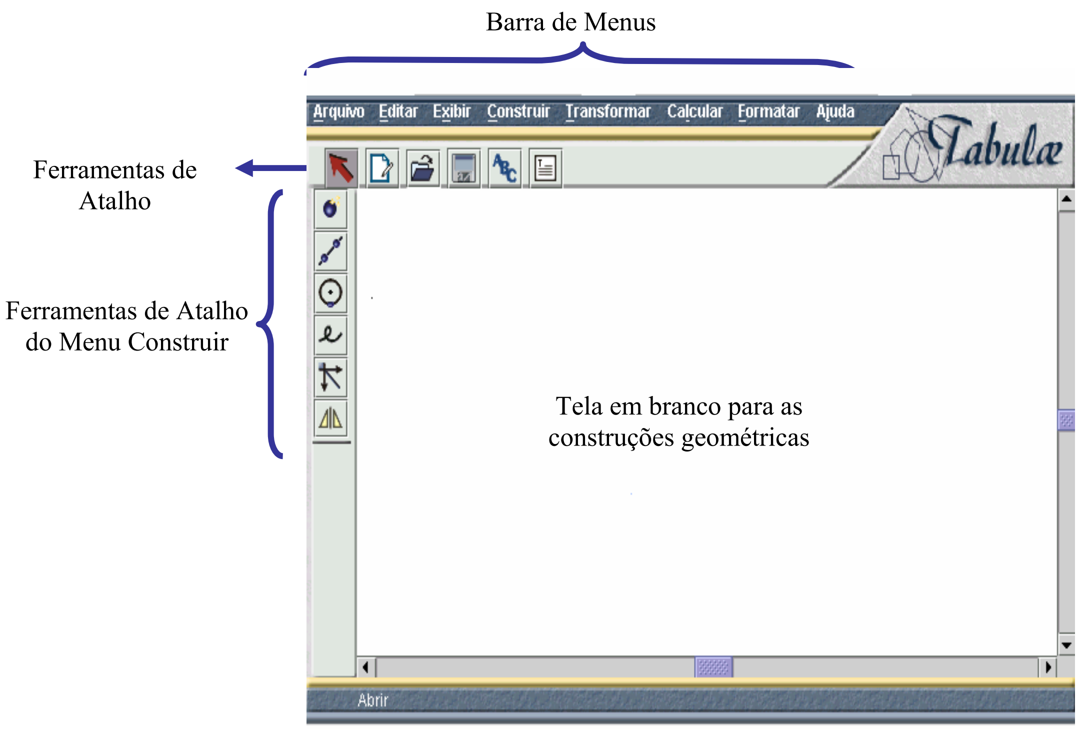
2003

1. Introdução

A Geometria que estudamos no ensino fundamental e médio recebeu o nome de Geometria Euclidiana em homenagem a um matemático grego chamado Euclides, que viveu em Alexandria por volta de 300 a.C.. Ele juntou todo o conhecimento matemático existente até a sua época em 465 proposições distribuídas em treze livros, denominados de *Elementos*. Os textos de Geometria Plana e Espacial encontrados em livros didáticos trazem basicamente o material que se encontra nos livros I, III, VI, XI e XII dos *Elementos*.

Neste curso estudaremos alguns dos conceitos, definições e resultados encontrados naqueles livros utilizando o computador como ferramenta, através de um programa chamado *Tabulæ*. O nome *Tabulæ* era dado ao conjunto de tábuas de cera que os antigos gregos e romanos usavam para rabiscar mensagens e diagramas. O objetivo do programa é exatamente este, o de servir de rascunho para realizarmos nossas construções geométricas.

Abaixo, você pode observar a tela inicial do *Tabulæ* com os seus principais elementos.



Abaixo você encontrará os menus principais do *Tabulæ* e suas funções básicas, assim como as funções de alguns botões de atalho da tela inicial. O objetivo não foi criar uma manual de instrução e sim apresentar alguns recursos do programa.

Menu	***Funções Básicas***
Arquivo	Permite realizar uma nova construção, abrir uma já existente, gravar o trabalho realizado, exportar a construção para outro arquivo e imprimir.
Editar	Através deste menu é possível desfazer e refazer uma ação, selecionar um objeto e apagar o objeto selecionado.
Exibir	Nele estão comandos para ampliar, reduzir, apresentar e esconder os objetos construídos, além de mostrar o rastro dos mesmos.
Construir	Aqui encontram-se comandos que permitem criar pontos, retas, semi-retas, segmentos de reta , círculos, lugares geométricos ou locus e vetores.
Transformar	Através deste menu é possível realizar reflexão, rotação, translação, simetria, homotetia, inversão e projetividade.
Calcular	Este menu dispõe de uma calculadora comum e ainda permite medir distâncias, áreas, ângulos, etc.
Formatar	Nele é possível utilizar ou trocar as cores das construções, determinar o tipo de linha e da fonte utilizada, fazer uso de identificador e de texto, etc.
Ajuda	Algumas versões dispõem de ajuda para o usuário.

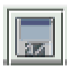
Além dos menus acima, o *Tabulæ* dispõe de algumas ferramentas de atalho em sua área de trabalho.

Os atalhos dispostos na horizontal são:

 Ferramenta de Seleção – quando é necessário selecionar algum objeto.

 Ferramenta para criação de um novo arquivo.

 Ferramenta para abrir um arquivo já existente.

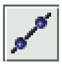
 Ferramenta para gravar um arquivo.

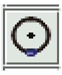
 Ferramenta para ativar o identificador de algum objeto.

 Ferramenta de texto.

Os atalhos da vertical são:

 Ferramenta Pontos, através dela você pode criar um ponto livre na tela, um ponto sobre um objeto, um ponto dentro da circunferência, ponto de interseção entre dois objetos selecionados, ponto médio entre dois pontos livres na tela e ponto médio sobre um segmento.

 Ferramenta Linha Reta, através dela você pode criar uma reta, uma semi-reta, um segmento de reta, uma reta perpendicular, reta paralela, reta bissetriz e reta mediatriz.

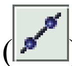
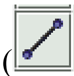
 Ferramenta Compasso, a através dela você pode criar um círculo por centro e segmento, um círculo por três pontos, um arco, uma reta tangente a um círculo, uma cônica por cinco pontos e o centro de um círculo, de um arco ou de um setor circular.

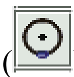
 Ferramenta de Locus ou Lugar Geométrico, para criar locus de retas ou de círculos, um polígono, o interior de um círculo, segmento circular e um setor circular.

 Ferramenta Vetor, você pode criar o produto de um vetor por um escalar, a soma de dois vetor, reta por vetor, razão, razão por três pontos e ângulo.

 Ferramenta Transformação, para fazer reflexão, rotação, translação, simetria, homotetia, inversão e projetividade.

ATIVIDADE 1: RECONHECIMENTO DO PROGRAMA

1. Clique na ferramenta Pontos () na tela.
2. Para construir um segmento, você pode proceder de duas maneiras diferentes:
   (a) Com a ferramenta Pontos (), você pode clicar em dois lugares quaisquer da tela para criar dois pontos. Selecione estes dois pontos, através da ferramenta de Seleção () , com a tecla SHIFT pressionada. Depois vá ao menu CONSTRUIR e clique em segmento e, em seguida, em novamente em segmento.
   (b) Construa outro segmento de reta, agora utilizando o seguinte procedimento: quando você clicar na ferramenta Linha Reta () , aparecem outras seis ferramentas, clique em () e vá para a tela em branco, clique num ponto qualquer e arraste mouse até outro ponto, clique novamente para formar um segmento.
3. Com a ferramenta de Seleção (), selecione cada extremidade dos segmentos criados e escolha um nome para estes pontos, através da tecla (). Lembre apenas que um ponto sempre deve ser representado por uma letra maiúscula.
4. Para medir o comprimento dos segmentos criados, você deve ir à ferramenta () e clicar sobre o segmento desejado. Vá ao menu CALCULAR e escolha comprimento. Clique numa das extremidades dos segmentos e arraste o mouse, observe o que acontece.

5. Você agora deve construir um ângulo. Primeiro construa um segmento de reta e a partir de uma das extremidades do segmento determinado, construa outro segmento para formar um ângulo.
6. Para medir este ângulo você deve selecionar, de uma extremidade a outra, os três pontos que formam os segmentos. Lembre-se que para fazer uma seleção simultânea é necessário que a tecla SHIFT esteja pressionada. Agora vá ao menu CALCULAR e em Ângulo. Clique num dos pontos e arraste o mouse, observe o que acontece.
7. Para construir uma circunferência, vá até a ferramenta de compasso (). Dê um clique nela e depois um outro na tela em branco. Arraste o mouse pressionado e clique onde desejar para formar a circunferência. Selecione a circunferência e vá até o menu CALCULAR. Meça o comprimento e a área da circunferência desenhada. Clique no centro da circunferência ou no ponto sobre ela e arraste o mouse pressionado. Observe o que acontece com estes valores.
8. Para construir o interior de um círculo, selecione apenas a circunferência, vá até o menu CONSTRUIR e escolha *Locus* e depois Interior.
9. Com o que você já conhece do programa, tente desenhar um quadrado. Após a execução do desenho, clique num dos vértices deste quadrado e observe o que acontece.

ATIVIDADE 2: REALIZANDO UMA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Agora você deve tentar construir um outro quadrado, usando suas propriedades, para que não aconteça o que você observou no item anterior. Tente recordar algumas propriedades do quadrado.

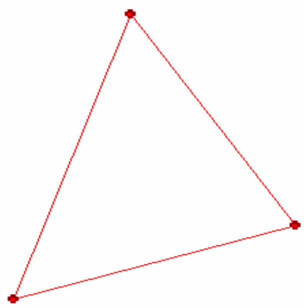
O quadrado possui 4 lados iguais e 4 ângulos retos. Como, informar isto ao programa? Uma maneira possível de realizar esta construção é a seguinte:

1. Para garantir estas duas propriedades você deve se lembrar de outras duas: um quadrado possui duas diagonais iguais e estas diagonais são perpendiculares, ou seja, elas formam um ângulo reto entre si.
2. Para garantir que as diagonais possuem a mesma medida, vamos construi-las interceptando uma circunferência. Construa inicialmente uma circunferência.
3. Construa, agora, uma reta que passa pelo centro da circunferência e por um ponto sobre ela. Para isto, selecione os dois pontos mencionados, vá ao menu CONSTRUIR, escolha Reta e Reta por dois pontos.
4. Como as diagonais devem ser perpendiculares, você deve construir uma outra reta perpendicular à anterior. Para isto, selecione a reta e o centro da circunferência, vá ao menu CONSTRUIR e escolha Reta e Reta Perpendicular. Não esqueça que para selecionar mais de uma opção, a tecla SHIFT deve permanecer pressionada.
5. Agora devemos marcar os pontos de interseção entre a circunferência e as retas construídas, que serão os vértices de nosso quadrado. Para isto, selecione a circunferência e uma das retas, vá ao menu CONSTRUIR e escolha Ponto e Ponto de Interseção. Repita o mesmo procedimento para a outra reta.

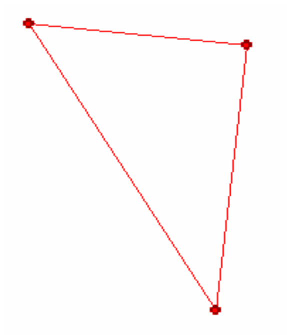
6. Selecione estes pontos dois a dois, vá ao menu CONSTRUIR e escolha Segmento e depois Segmento novamente, a fim de formar os 4 segmentos de reta que formam os lados dos quadrado.
7. Agora vamos esconder os objetos que não nos interessam. Para isto selecione uma das retas, vá ao menu EXIBIR e escolha Esconder Objetos. Repita o mesmo procedimento para a outra reta e para a circunferência. Clique num dos vértices do quadrado e arraste-o pressionado pela tela. O que você observou?
8. Agora selecione os 4 vértices do quadrado, vá ao menu CONSTRUIR e escolha Locus e depois Polígono.
9. Para finalizar determine a medida do lado, perímetro e área deste quadrado.
10. Clique num de seus vértices e observe o que acontece com a figura e as medidas obtidas no item anterior.

Lembre-se: um ângulo **agudo** é um ângulo **menor que 90^0**, um ângulo **reto** é **igual a 90^0** e um ângulo **obtuso** é **maior que 90^0** e **menor que 180^0**. Por este motivo, os triângulos são classificados quanto aos seus ângulos, em:

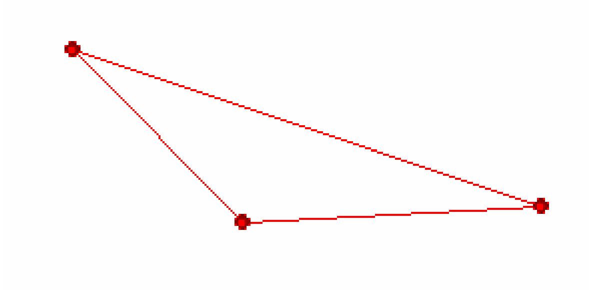
(a) Triângulo Acutângulo: com três ângulos agudos.



(b) Triângulo Retângulo: com um ângulo reto.



(c) Triângulo Obtusângulo: com um ângulo obtuso.



Os triângulos também podem ser classificados quanto a seus lados em:

(a) Escaleno: possui três lados com medidas diferentes.

(b) Isósceles: possui dois lados com medidas iguais.

(c) Eqüilátero: possui três lados com medidas iguais.

ATIVIDADE 3: ESTUDO DO TRIÂNGULO ESCALENO

1. Vá até o botão (), selecione a pasta EXEMPLOS e o arquivo triangulo_escaleno.ae.
2. Selecione um lado do triângulo de cada vez, vá ao menu CALCULAR e escolha COMPRIMENTO.

3. Agora, selecione, na seqüência, os pontos A, B e C no triângulo e vá ao menu CALCULAR, escolha ÂNGULO.
4. Clicando numa das extremidades dos segmentos de reta, responda:

(a) Um triângulo escaleno também pode ser acutângulo? ....

(b) Um triângulo escaleno também pode ser retângulo? ....

(c) Um triângulo escaleno também pode ser obtusângulo? ....

ATIVIDADE 4: ESTUDO DO TRIÂNGULO ISÓSCELES

1. Vá até o botão (), selecione a pasta EXEMPLOS e o arquivo triangulo_isosceles.ae.
2. Selecione um lado do triângulo de cada vez, vá ao menu CALCULAR e escolha COMPRIMENTO.
3. Agora, selecione, na seqüência, os pontos A, B e C no triângulo e vá ao menu CALCULAR, escolha ÂNGULO.
4. Clicando numa das extremidades dos segmentos de reta, responda:

(a) Um triângulo isósceles também pode ser acutângulo? ....

(b) Um triângulo isósceles também pode ser retângulo? ....

(c) Um triângulo isósceles também pode ser obtusângulo? ....

ATIVIDADE 5: ESTUDO DO TRIÂNGULO EQÜILÁTERO

1. Vá até o botão (), selecione a pasta EXEMPLOS e o arquivo triangulo_equilatero.ae.
2. Selecione um lado do triângulo de cada vez, vá ao menu CALCULAR e escolha COMPRIMENTO.

3. Agora, selecione, na seqüência, os pontos A, B e C no triângulo e vá ao menu CALCULAR, escolha ÂNGULO.
4. Clicando numa das extremidades dos segmentos de reta, responda:

(a) Um triângulo equilátero também pode ser acutângulo?

....

(b) Um triângulo equilátero também pode ser retângulo?

....

(c) Um triângulo equilátero também pode ser obtusângulo?

....

ATIVIDADE 6: CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

1. Vá até o botão (), selecione a pasta EXEMPLOS e o arquivo condição_de_existecia_triangulo.ae.
2. Clique numa das extremidades do segmento a e arraste-o até que a soma das medidas dos segmentos b e c seja ultrapassada. O que acontece com o triângulo?.. ....
3. Repita o mesmo procedimento para o segmento b , observando a soma das medidas de a e c, assim como para o segmento c, observando a soma das medidas dos segmentos a e b. O que acontece com o triângulo nos dois casos quando a medida do segmento ultrapassa a soma das medidas dos outros dois segmentos?.................................. ....
4. Você agora seria capaz de dizer qual é a condição de existência de um triângulo? Utilize o espaço abaixo e enuncie esta condição com suas

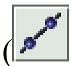
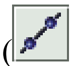
palavras.

....

....

....

ATIVIDADE 7: CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO

1. Vá até as ferramentas ( e ) e crie três segmentos de reta de tamanhos diferentes.
2. Agora com as ferramentas ( e ) crie uma semi-reta.
3. Selecione o primeiro ponto da semi-reta, chame-o de ponto A. Selecione novamente o ponto A e o primeiro segmento de reta desenhado no item 1. Vá ao menu CONSTRUIR e escolha Círculo e Círculo por Centro e Segmento.
4. Selecione a circunferência resultante e a semi-reta. Vá ao menu CONSTRUIR, escolha Ponto e Ponto de Interseção. Chame o ponto criado de ponto B.
5. Selecione o ponto B e o segundo segmento criado no item 1. Vá ao menu CONSTRUIR e escolha Círculo e Círculo por Centro e Segmento.
6. Repita o procedimento anterior, selecionando o ponto A e o terceiro segmento desenhado no item 1.
7. Selecione as circunferências desenhadas nos itens 5 e 6. Vá ao menu CONSTRUIR, escolha Ponto e Ponto de Interseção. Entre os dois pontos criados, selecione o de baixo. Vá ao menu vá ao menu EXIBIR e escolha ESCONDER OBJETOS. Chame o ponto de cima de C.

8. Selecione todas circunferências, vá ao menu EXIBIR e escolha ESCONDER OBJETOS.
9. Selecione, nesta ordem, os pontos B e C. Vá ao menu CONSTRUIR, escolha Semi-reta e Semi-reta por dois pontos.
10. Selecione, nesta ordem, os pontos C e A. Vá ao menu CONSTRUIR, escolha Semi-reta e Semi-reta por dois pontos.

ATIVIDADE 8: ÂNGULOS E TRIÂNGULOS

1. Com o triângulo construído na atividade 1, selecione um ponto, fora do triângulo, sobre a semi-reta que passa pelos pontos A e B e chame-o de L.
2. Crie pontos, fora do triângulo, sobre as outras duas semi-retas: a que passa pelos pontos B e C e a que passa pelos pontos C e A. Chame-os respectivamente de M e N.
3. Selecione, nesta ordem, os pontos C, B e A. Vá ao menu CALCULAR e escolha ÂNGULO.
4. Repita o mesmo procedimento do item anterior, agora considerando, nesta ordem, os pontos L, B e C.
5. Vá ao menu CALCULAR, escolha Calculadora. Clique sobre a medida do ângulo CAB, depois em (+), na medida do ângulo LBC e em (OK). Aparecerá na tela o valor da soma dos dois ângulos em radianos. Observe que este valor é aproximadamente o valor de π. Vá novamente CALCULAR, escolha converter.

   Que valor apareceu?...

6. Saiba que o ângulo CAB é chamado de ***ângulo interno*** do triângulo ABC e o ângulo LBC é chamado de ***ângulo externo*** adjacente a CAB.

7. Arrastando um dos pontos dos segmentos de reta existentes na construção, o valor da soma daqueles ângulos se modifica? Qual é o este valor?................
....

8. Repita o mesmo procedimento para os ângulos BAC e NAB e para os ângulos ACB e MCA.

Você acaba de perceber que a soma das medidas de qualquer ângulo interno de um triângulo com o seu respectivo ângulo externo adjacente é igual a 180^0.

9. Agora selecione, nesta ordem, os pontos B, A e C. Vá ao menu CALCULAR e escolha ÂNGULO.

10. Repita o mesmo procedimento do item anterior, agora considerando, nesta ordem, os pontos A, C e B.

11. Vá ao menu CALCULAR, escolha Calculadora. Clique sobre a medida do ângulo BAC, em (+), a medida do ângulo ACB e em (OK). Aparecerá na tela o valor da soma dos dois ângulos em radianos. Vá novamente CALCULAR, escolha converter. Compare o resultado com o valor do ângulo LBC. Utilize > , < ou =.

LBC .... BAC + ACB

12. Agora compare a medida do ângulo NAB com as medidas dos ângulos CBA e ACB. Assim como a medida do ângulo MCA com as medidas dos ângulos CBA e BAC. Preencha o quadro abaixo:

NAB .... CBA + ACB
MCA .... CBA + BAC

Você acaba de perceber que em qualquer triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes.

13. Determine as medidas dos lados AB, BC e AC do triângulo desenhado.

    Coloque-os em ordem descrescente:

    ....

14. Qual é o ângulo oposto a cada um destes segmentos?

AB - ....
BC - ....
AC - ....

15. Coloque cada um destes ângulos em ordem decrescente. Compare com a ordem obtida no item (m).

Você acaba de notar que o maior ângulo se opõe ao .... e vice-versa.

ATIVIDADE 9: ALTURA DE UM TRIÂNGULO

1. Vá até o botão (), selecione a pasta EXEMPLOS e o arquivo altura_do_triangulo.ae. Você pode observar que neste exemplo foi traçada a altura relativa ao lado BC do triângulo.
2. Calcule a medida do ângulo AHC. O que você observou?

3. Saiba que a altura de um triângulo é o segmento que une um vértice ao lado oposto e é perpendicular a esse lado ou ao seu prolongamento. Agora trace as alturas relativas aos lados AB e AC. Crie uma reta pontilhada sobre as três alturas traçadas. Determine o ponto de interseção entre estas retas.

Saiba que este ponto de interseção entre as alturas relativas aos lados de um triângulo, ou os seus prolongamentos, é chamado de ***ortocentro***.

4. Arrastando livremente o mouse sobre um dos vértices do triângulo, observe o que ocorre e responda:

(a) Qual é a localização do ortocentro quando o triângulo é acutângulo?

....

(b) Qual é a localização do ortocentro quando o triângulo é obtusângulo?

....

(c) Qual é a localização do ortocentro quando o triângulo é retângulo?

....

ATIVIDADE 10: MEDIANA DE UM TRIÂNGULO

1. Vá até o botão (), selecione a pasta EXEMPLOS e o arquivo mediana_do_triangulo.ae. Você pode observar que neste exemplo foi traçada a mediana relativa ao lado BC do triângulo.
2. Calcule a medida dos segmentos BM e MC. O que você observou?

....

....

3. Saiba que a mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Agora trace as medianas relativas aos lados AB e AC. Determine o ponto de interseção entre estas retas.

> Saiba que este ponto de interseção entre as medianas relativas aos lados de um triângulo é chamado de ***baricentro***.

4. Arrastando livremente o mouse sobre um dos vértices do triângulo, observe o que ocorre e responda:
   (a) Qual é a localização do baricentro quando o triângulo é acutângulo?

   ....

   (b) Qual é a localização do baricentro quando o triângulo é obtusângulo?

   ....

   (c) Qual é a localização do baricentro quando o triângulo é retângulo?

   ....

ATIVIDADE 11: BISSETRIZ DE UM TRIÂNGULO

1. Vá até o botão (), selecione a pasta EXEMPLOS e o arquivo bissetriz_do_triangulo.ae. Você pode observar que neste exemplo foi traçada a bissetriz relativa ao ângulo BAC do triângulo.
2. Calcule a medida dos ângulos BAS e SAC. O que você observou?

   ....

3. Saiba que a bissetriz de um triângulo é o segmento que une um vértice ao lado oposto, dividindo o ângulo interno desse vértice em dois ângulos de mesma medida. Agora trace as bissetrizes relativas aos ângulos CBA e ACB. Determine o ponto de interseção entre estes segmentos.

Saiba que este ponto de interseção entre as bissetrizes relativas aos ângulos internos de um triângulo é chamado de ***incentro***.

4. Arrastando livremente o mouse sobre um dos vértices do triângulo, observe o que ocorre e responda:

   (a) Qual é a localização do incentro quando o triângulo é acutângulo?

   ....

   (b) Qual é a localização do incentro quando o triângulo é obtusângulo?

   ....

   (c) Qual é a localização do incentro quando o triângulo é retângulo?

   ....

Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Apêndice B
Entrevista I
Sondagem para a caracterização dos sujeitos

(1) Faixa etária:
(a) de 14 a 17 anos
(b) de 18 a 21 anos
(c) de 22 a 30 anos
(d) acima de 31 anos

(2) Você realiza ou realizou atividade profissional?
(a) Sim
(b) Não

(3) O que você espera do ensino médio?
(a) diploma
(b) ampliar conhecimentos
(c) melhoria salarial
(d) preparar-se para o vestibular

(4) A escola onde você estudou no ensino fundamental (5 ª a 8 ª séries) era:
(a) Pública
(b) Particular
(c) Pública/Particular

(5) Assinale a forma de estudo realizada no ensino fundamental:
(a) Regular diurno
(b) Regular noturno
(c) Supletivo

(6) Em qual disciplina você sentiu maior dificuldade no ensino fundamental?
(a) Língua Portuguesa
(b) Matemática
(c) Ciências
(d) História
(e) Geografia
(f) Educação Física
(h) Nenhuma

(7) Durante o ensino fundamental, na disciplina de Matemática, você estudou Geometria?
(a) Sim
(b) Não

(8) Você possui computador em casa?
(a) Sim
(b) Não

(9) Com que freqüência você costuma usar o computador?
(a) Nunca
(b) uma a duas vezes por semana
(c) 3 a 5 vezes por semana
(d) mais de 5 vezes por semana

(10) Caso já utilize o computador, onde isto ocorre com mais freqüência?
(a) em casa
(b) no trabalho
(c) na escola
(d) em casa e no trabalho
(e) na escola e em casa
(f) no trabalho e na escola
(g) no trabalho, na escola e em casa

(11) O que você sabe utilizar no computador?
(a) *Windows*
(b) *Word*
(c) *Excell*
(d) *Power Point*
(e) Outros programas
(f) Nada

(12) Você já teve aula de alguma disciplina no computador?
(a) Sim. Quais? _____________
(b) Não

(13) Qual o ambiente que você escolhe para assistir as aulas do Projeto Matemática Zero?
(a) Sala de aula tradicional
(b) Biblioteca virtual da escola 24 horas

(14) Por que você fez esta escolha?
(a) Por ter um horário mais adequado à minha disponibilidade.
(b) Porque considero que a sala de aula comum é o melhor ambiente para aprender geometria.
(c) Porque tenho curiosidade em aprender geometria através do computador.

Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Apêndice C
Entrevista II
Teste de Conhecimento Geométrico

Teste de Conhecimento Geométrico			
Grupo de Controle			
Questões	Sujeitos	Respostas	
		Pré-teste	Pós-teste
1 – Com suas palavras, tente definir: (a) ângulo reto (b) ângulo agudo (c) ângulo obtuso	BBA	(a) possui medida igual a 90^0. (b) possui medida < ou = a 90^0. (c) possui medida > ou = a 90^0.	(a) 90^0 (b) < ou = 90^0 (c) > ou = 90^0
	BGF	(a) E um ângulo de 90^0.[sic] (b) E um ângulo menor que 90^0.[sic] (c) E um ângulo maior que 90^0.[sic]	(a) igual a 90^0. (b) menor que 90^0. (c) maior que 90^0.
	GSC	(a) é o ângulo que tem 90^0. (b) possui menos de 90^0. (c) possui mais de 90^0.	(a) ângulo igual a 90^0. (b) ângulo menor que 90^0. (c) ângulo maior que 90^0.
	JSS	(a) É um ângulo de 90^0. (b) É um ângulo com menor que 90^0. (c) Ângulo com maior que 90^0.	(a) ângulo de 90^0 (b)ângulo < 90^0 (c)ângulo > 90^0
	LDC	(a) É igual ao ângulo de 90^0. (b) É o ângulo menor que 90^0. (c) É o ângulo maior que 90^0.	(a) igual a 90^0 (b)menor que 90^0 (c)maior que 90^0
2 – O que é um triângulo?	BBA	Um polígono de três lados com três ângulos internos.	Um polígono de três lados com três ângulos.
	BGF	Tem três lados.	E o conjunto de três

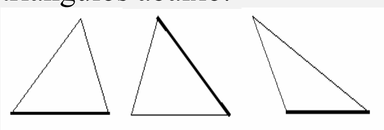
			semi-retas que formam três ângulos. [sic]
	GSC	É um objeto de três pontas.	É uma figura geométrica com 3 lados e 3 angulos, cuja soma resulta em um ângulo de 180^0.
	JSS	É um polígono de três lados.	Um polígono com três lados.
	LDC	É um desenho que três lados e três ângulos.	É uma figura com três lados e três ângulos.
3 – Se uma pessoa possui três ripas de madeira de tamanhos diferentes e desconhecidos, é possível garantir a construção de um triângulo com elas?	BBA	Não, é preciso conhecer os tamanhos das 3 ripas.	Não.
	BGF	Sim.	Sim.
	GSC	Talvez.	Não, pois é necessário seguir alguns critérios.
	JSS	Sim.	Sim.
	LDC	Não.	Não, porque não adianta ter as três ripas de tamanhos diferentes mas a soma das duas menores tem que ser maior que a maior ripa.
4 – Qual a condição que garante que as três ripas formarão um triângulo?	BBA	Em branco.	$a < b + c$ (a hipotenusa dever ser menor que a soma dos dois catetos).
	BGF	Em branco.	O que garante e as medidas dos ângulos. [sic]
	GSC	Que tenha tamanhos diferentes uns nos outros. [sic]	A soma de 2 lados menores de um triangulo tem que ser menor do que o tamanho da hipotenusa.
	JSS	Não sei.	É que um dos lados seja menor que a soma dos dois outros lados.
	LDC	Não sei.	Está explicado na

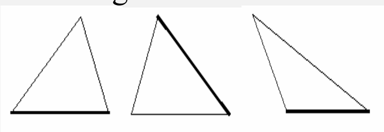
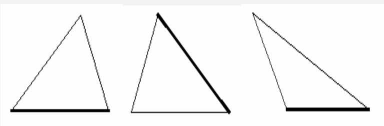
			anterior.
5 – O que é um triângulo escaleno?	BBA	Possui nenhum lado igual.	Possui nenhum lado igual.
	BGF	Possui os mesmos lados iguais.	E um triangulo que possui dois lados iguais.[sic]
	GSC	Em branco.	É aquele que o valor dos 3 lados é diferente.[sic]
	JSS	Tem os três lados diferentes.	Um triângulo com três lados diferentes.
	LDC	É o triângulo com os três lados diferentes.	Tem três lados diferentes.
6 – O que é um triângulo eqüilátero?	BBA	Possui os três lados iguais.	Possui os três lados iguais.
	BGF	E um triangulo com três ângulos iguais. [sic]	E um triangulo que possui três lados iguais. [sic]
	GSC	Possui dois lados iguais e um diferente.	É aquele que possui os três lados iguais.
	JSS	Tem os três lados iguais.	Um triângulo com três lados iguais.
	LDC	É o triângulo com três lados iguais.	Tem três lados iguais.
7 – O que é um triângulo isósceles?	BBA	Possui dois lados iguais.	Possui dois lados iguais.
	BGF	E que possui dois ângulos iguais.[sic]	E um triangulo que possui todos os lados diferentes.[sic]
	GSC	É um triângulo que possui um ângulo de 90^0.	É aquele que possui 2 lados iguais.
	JSS	Tem dois lados iguais.	Um triângulo com dois lados iguais.
	LDC	É o triângulo com dois lados iguais.	Tem dois lados iguais.
8 – O que é um triângulo retângulo?	BBA	Possui um ângulo reto.	Possui um ângulo reto.
	BGF	E um triangulo com um ângulo de 90^0.[sic]	E um triangulo que possui um ângulo de 90^0.[sic]
	GSC	Possui um ângulo de 90^0.	É aquele que possui um ângulo de 90^0.
	JSS	Aquele que possui um ângulo de 90^0.	Possui um ângulo reto.
	LDC	É o triângulo que	Tem um ângulo de

		tem um ângulo de 90^0.	90^0.
9 – O que é um triângulo acutângulo?	BBA	Possui um ângulo agudo.	Possui um ângulo agudo.
	BGF	Possui um ângulo agudo.	E um triangulo que possui um ângulo agudo.[sic]
	GSC	Em branco.	É aquele que possui um ângulo menor que 90^0.
	JSS	Possui um ângulo menor que 90^0.	Possui um ângulo agudo.
	LDC	É o triângulo que tem as medidas dos ângulos inferior a 90^0.[sic]	Tem três ângulos agudos.
10 – O que é um triângulo obtusângulo?	BBA	Possui um ângulo obtuso.	Possui um ângulo obtuso.
	BGF	Em branco.	E um triangulo que possui um ângulo obtuso.[sic]
	GSC	É um triângulo que tem um ângulo de $180^0:2 = 90^0$.	É aquele que possui um ângulo maior que 90^0.
	JSS	Possui um ângulo maior que 90^0.	Possui um ângulo obtuso.
	LDC	É o triângulo que tem a medida dos ângulos superior a 90^0.	Tem um ângulo obtuso.
11 – É possível que um triângulo escaleno seja também retângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Sim.	Sim, a medida dos lados serem diferentes não implica na formação do ângulo reto.
	BGF	Não, porque o escaleno possui três ângulos iguais já o retângulo possui um ângulo reto.	Sim, porque o triangulo escaleno pode ter dois lados iguais e um ângulo de 90^0 (ele pode ter os catetos iguais).
	GSC	Sim, pois ele possui um ângulo de 90^0.	Sim, desde que os lados menores seja menor que a hipotenusa. [sic]
	JSS	Sim.	Sim, pois tem medidas diferentes.
	LDC	Sim.	Sim.

12 – É possível que um triângulo escaleno seja também acutângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Sim.	Sim, a medida dos lados serem diferentes não implica na formação do ângulo agudo.
	BGF	Não, porque o escaleno possui três lados iguais.	Sim, pode ter dois lados iguais e um ângulo menor que 90^0.
	GSC	Nunca.	Não, porque senão seria um ângulo obtuso e não agudo.
	JSS	Sim.	Sim, pois as medidas são diferentes.
	LDC	Sim.	Sim.
13 – É possível que um triângulo escaleno seja também obtusângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Sim.	Sim, a medida dos lados serem diferentes não implica na formação do ângulo obtuso.
	BGF	Não.	Sim, e possível ter dois lados iguais e um ângulo maior que 90^0.
	GSC	Nunca.	Sim, não sei.
	JSS	Sim.	Sim, porque tem medidas diferentes.
	LDC	Sim.	Sim.
14 – É possível que um triângulo equilátero seja também retângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Não.	Não, as medidas sendo iguais não é possível formar um ângulo reto.[sic]
	BGF	Não.	Não.
	GSC	Não.	Não, pois cada ângulo será igual a 60^0.
	JSS	Não, porque o triângulo eqüilátero só possui ângulo de 60^0.	Não, pois todos os ângulos do triangulo eqüilátero são iguais a 60^0.
	LDC	Não, o eqüilátero tem a medida dos ângulos igual a 60^0.	Não, pois todos os ângulos do eqüilátero são iguais a 60^0.
15 – É possível que um triângulo equilátero seja também acutângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Sim, são três ângulos de 60^0.	Sim, os três lados iguais formam ângulos agudos.
	BGF	Não.	Não, não e possível

			porque o triangulo acutangulo possui um ângulo agudo já eqüilátero possui dois ângulos iguais.
	GSC	Não.	Sim, pois cada ângulo será igual a 60^0.
	JSS	Sim, sob a condição de que o ângulo seja de 60^0.	Sim, pois o triângulo eqüilátero só tem ângulos iguais a 60^0.
	LDC	Sim, idem ao 14.	Sim, a mesma resposta da anterior.
16 – É possível que um triângulo equilátero seja também obtusângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Sim.	Não, as medidas dos lados iguais não permite a formação de ângulo obtuso.[sic]
	BGF	Sim.	Não.
	GSC	Sim.	Não, pois cada ângulo será igual a 60^0.
	JSS	Não, pois seus ângulos são de 60^0.	Não, idem ao 14.
	LDC	Não, idem ao 14.	Não, a mesma resposta da anterior.
17 – É possível que um triângulo isósceles seja também retângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Sim.	Sim, dois lados iguais podem formar o ângulo reto.
	BGF	Sim, porque um triangulo retângulo possui um ângulo reto e isósceles também pode ter esse ângulo reto.[sic]	Sim, e possível que o triangulo tenha três lados diferentes e um ângulo de 90^0.
	GSC	Não, pois o isósceles possui três lados iguais.	Sim, não sei.
	JSS	Não.	Não, porque sua medida não é possível.
	LDC	Sim.	Sim.
18 – É possível que um triângulo isósceles seja também acutângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Sim.	Sim, os dois lados iguais podem formar o ângulo agudo.
	BGF	Sim.	Sim, é possível que o triangulo tenha

			três lados diferentes e um ângulo menor que 90^0.
	GSC	Em branco.	Sim, não sei.
	JSS	Sim, porque a medida não altera esse processo.	Sim, independem das medidas dos ângulos.
		Sim.	Sim.
19 – É possível que um triângulo isósceles seja também obtusângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	BBA	Sim.	Sim, dois lados iguais podem formar o ângulo obtuso.
	BGF	Sim.	Sim, porque ele pode ter três lados diferentes e um ângulo maior que 90^0.
	GSC	Não, pois o obtusângulo tem um ângulo de 90^0.	Sim, não sei.
	JSS	Sim, porque as medidas não interferem.	Sim, idem ao anterior.
	LDC	Sim.	Sim.
20 - Trace as alturas relativas aos lados destacados nos triângulos abaixo: 	BBA	Acertou os dois primeiros casos.	Acertou os dois primeiros casos.
	BGF	Em branco.	Errou os três casos.
	GSC	Errou os três casos.	Acertou os dois primeiros casos.
	JSS	Acertou apenas o primeiro caso.	Acertou apenas o primeiro caso.
	LDC	Acertou os dois primeiros casos.	Acertou os dois primeiros casos..
21 – Tente dizer com suas próprias palavras o que é altura relativa de um dado lado num triângulo.	BBA	Não me lembro bem a definição.	É a linha que divide um triângulo em duas partes e às vezes forma 90^0 (pra mim).
	BGF	Em branco.	É o comprimento dos triângulos.
	GSC	Não foi possível.	É a altura de uma extremidade a outra. [sic]
	JSS	É a altura adequada aquele tipo de caso.[sic]	É a altura que está posicionada relativamente ao lado.
	LDC	Uma reta que forma	É uma reta que faz

		90^0.	um ângulo de 90^0 com a base e se liga ao ponto mais alto do triângulo.
22 – Trace as medianas relativas aos lados destacados nos triângulos abaixo: 	BBA	Errou os três casos.	Acertou os três casos.
	BGF	Em branco.	Errou os três casos.
	GSC	Em branco.	Apenas assinalou o ponto médio do lado destacado.
	JSS	Em branco.	Apenas indicou o ponto médio em cada lado do triângulo.
	LDC	Em branco.	Traçou o segmento de reta que supostamente representaria a mediana mas não indicou que este segmento dividiria o lado ao meio.
23 – Tente dizer com suas próprias palavras o que é mediana relativa a um dado lado num triângulo.	BBA	Em branco.	É o traço que marca o ponto médio de uma reta.
	BGF	Em branco.	E o ponto central no cruzamento de duas retas.
	GSC	Em branco.	Não sei.
	JSS	Em branco.	É a metade de um dos lados do triângulo.
	LDC	Em branco.	Reta que marca o meio da reta.
24 - Trace as bissetrizes relativas aos vértices assinalados nos triângulos abaixo: 	BBA	Apenas assinalou a divisão do ângulo e traçou o segmento mas não indicou que eles estavam divididos pela metade.	Apenas assinalou a divisão do ângulo e traçou o segmento mas não indicou que eles estavam divididos pela metade.
	BGF	Acertou os três casos.	Apenas assinalou a divisão do ângulo e traçou o segmento mas não indicou que eles estavam divididos pela metade.

	GSC	Em branco.	Apenas assinalou a divisão do ângulo e traçou o segmento mas não indicou que eles estavam divididos pela metade.
	JSS	Em branco.	Apenas assinalou os ângulos e os dividiu à metade.
	LDC	Acertou os três casos.	Acertou os três casos.
25 – Tente dizer com suas próprias palavras o que é bissetriz de um ângulo interno num dado triângulo.	BBA	Em branco.	É a reta que divide o ângulo em duas partes iguais.
	BGF	Em branco.	Em branco.
	GSC	Em branco.	É quando dividimos um ângulo em duas partes iguais.
	JSS	Em branco.	É a metade do ângulo do triângulo.
	LDC	Em branco.	Em branco.

Teste de Conhecimento Geométrico			
Grupo Experimental			
Questões	**Sujeitos**	**Respostas**	
		Pré-teste	**Pós-teste**
1 – Com suas palavras, tente definir: (a) ângulo reto (b) ângulo agudo (c) ângulo obtuso	FLD	(a) igual a 90^0 (b)menor que 90^0 (c)maior que 90^0	(a) igual a 90^0 (b)menor que 90^0 (c)maior que 90^0
	FOS	(a) igual a 90^0 (b)menor que 90^0 (c)maior que 90^0	(a) igual a 90^0 (b)menor que 90^0 (c)maior que 90^0
	FVL	(a) ângulo de 90^0 (b)ângulo $< 90^0$ (c)ângulo $> 90^0$	(a) ângulo de 90^0 (b)ângulo $< 90^0$ (c)ângulo $> 90^0$
	RSM	(a) ângulo = à 90^0 (b) ângulo < que 90^0 (c)ângulo > que 90^0	(a) $= 90^0$ (b) $< 90^0$ (c) $> 90^0$
	SCB	(a) é um ângulo de 180^0 (b) é um ângulo maior que 90^0 (c) é um ângulo menor que 90^0	(a) $= 90^0$ (b) $< 90^0$ (c) $> 90^0$
2 – O que é um triângulo?	FLD	Uma figura que possui 3 lados.	É uma figura geométrica que tem 3 lados.
	FOS	E todo e qualquer ângulo que tenha maior que 90^0.[sic]	É um polígono que contém três lados e três ângulos.
	FVL	É uma figura geométrica de 3 lados.	É um polígono composto de 3 lados e 3 ângulos.
	RSM	É um polígono de	É uma figura

		três lados.	geométrica c/ 3 lados sendo que uma delas não pode ser maior que a soma das outras duas.
	SCB	É uma figura geométrica composta por 3 lados.	É um polígono com 3 lados e 3 ângulos.
3 – Se uma pessoa possui três ripas de madeira de tamanhos diferentes e desconhecidos, é possível garantir a construção de um triângulo com elas?	FLD	Sim	Não
	FOS	Em branco	Não
	FVL	Sim	Não
	RSM	Escalenos	Sim
	SCB	Sim	Não
04 – Qual a condição que garante que as três ripas formarão um triângulo?	FLD	Elas estarem ligadas umas as outras[sic].	1º A existência de 3 lados. 2º A soma dos internos devem ser 180^0. [sic] 3º A soma dos internos devem ser 360^0. [sic] 4º A medida do segmento tem que ser menor que a soma dos outros lados, para existir.
	FOS	Não porque dependerão de seus vértices.	A medida do segmento deve ser menor do que a soma dos outros lados do triângulo.
	FVL	Do triângulo isósceles de 3 lados diferentes.	Um segmento deve ser menor do que a soma dos outros dois.
	RSM	Juntando-as	O segmento tem que ser menor que a soma dos outros lados.
	SCB	Juntando as 3 ripas agrupando-as formando um triângulo escaleno.	Pro triângulo existir a soma de alguns dos lados tem que ser maior que a do lado que sobrou.
5 – O que é um triângulo escaleno?	FLD	Possui os 3 lados diferentes. Refere-se a medida dos lados.	É um triângulo que possui todos os lados diferentes.

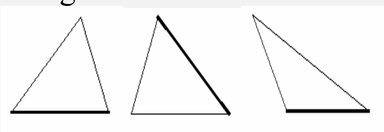
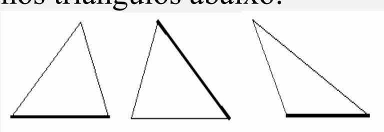
	FOS	2 lados iguais, 1 ≠	Possui os 3 lados ≠
	FVL	Possui 2 lados iguais.	Tem 3 lados diferentes.
	RSM	È um triângulo com três lados diferentes.	È um triângulo com três lados diferentes.
	SCB	Um triângulo com três lados diferentes.	Um triângulo que possui 3 lados diferentes.
6 – O que é um triângulo eqüilátero?	FLD	Possui os 2 lados iguais, com as mesmas medidas. Refere-se a medida dos lados.	É um triângulo que possui todos os lados iguais.
	FOS	Todos os lados iguais.	Possui 3 lados =.
	FVL	Possui três lados iguais.	È um triângulo com três lados iguais.
	RSM	É um triângulo com os três lados iguais.	É um triângulo que possui três lados iguais.
	SCB	Não sei.	Um triângulo que possui 3 lados iguais.
7 – O que é um triângulo isósceles?	FLD	Possui os 3 lados iguais. Refere-se a medida dos lados.	É um triângulo que possui dois lados iguais.
	FOS	Ângulo que contém um ângulo menor que 90^0.	Possui 2 lados =.
	FVL	Possui 3 lados diferentes.	É um triângulo que possui dois lados com a mesma medida.
	RSM	É um triângulo com dois lados iguais.	É um triângulo com dois lados iguais
	SCB	É o triângulo que possui 3 lados iguais?	É um triângulo com 3 lados iguais.
8 – O que é um triângulo retângulo?	FLD	Que possui um ângulo igual a 90^0.	É um triângulo que possui um ângulo de 90^0.
	FOS	Ângulo que tem os seus vértices.	Que possui 90^0.
	FVL	Triângulo com um ângulo de 90^0.	É um triângulo que possui em um dos lados um ângulo de

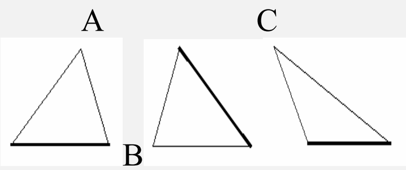
			90^0.
	RSM	É um triângulo com ângulo igual a 90^0.	É um triângulo com um ângulo de 90^0.
	SCB	É quando tem um lado do triângulo com 90^0.	É um triângulo com um ângulo de 90^0.
9 – O que é um triângulo acutângulo?	FLD	Que possui um ângulo menor que 90^0.	É um triângulo que possui um ângulo agudo (menor que 90^0).
	FOS	Triângulo agudo maior que 90^0.	Que possui ângulo menor que 90^0.
	FVL	Triângulo com ângulo $< 90^0$.	É um triângulo que possui um ângulo menor de 90^0.
	RSM	É um triângulo com ângulo menor que 90^0.	É um triângulo que possui todos os ângulos menores que 90^0.
	SCB	É quando tem um lado com ângulo maior que 90^0.	É um triângulo que possui ângulos agudos.
10 – O que é um triângulo obtusângulo?	FLD	Possui um ângulo maior que 90^0.	É um triângulo que possui um ângulo obtuso (maior que 90^0).
	FOS	Não porque o ângulo vai ficar maior que 90^0.	Que possui ângulo maior que 90^0.
	FVL	Triângulo com ângulo $> 90^0$.	É um triângulo que possui um ângulo maior de 90^0.
	RSM	É um triângulo com ângulo maior que 90^0.	É um triângulo que possui um ângulo maior que 90^0.
	SCB	É quando tem um lado com ângulo menor que 90^0.	É um triângulo que possui lados obtusos.
11 – É possível que um triângulo escaleno seja também retângulo? ( ) Sim ( ) Não .Justifique	FLD	Sim.	Sim, porque o triângulo pode ter 3 lados diferentes e um ângulo de 90^0 (ele pode ter os catetos diferentes).
	FOS	Não. Porque ia inverter os triângulos.	Sim, porque pode os outros dois ângulos com medidas diferentes.

	FVL	Sim, pois um triângulo retângulo pode ter 2 lados iguais	Sim, contanto que os outros possuam medidas diferentes.
	RSM	Sim, porque se um dos lados ficarem reto ele se transforma num triângulo retângulo.[sic]	Sim, pois as medidas podem ser:90, 30 e 60; para formar 180.[sic]
	SCB	Sim. Porque pode ter um lado com 90^0 e outros com ângulo diferentes.[sic]	Sim
12 – É possível que um triângulo escaleno seja também acutângulo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique	FLD	Sim.	Sim, pode ter 3 lados diferentes e um ângulo menor que 90^0.
	FOS	Sim. Quando esse angulo apresentar mais que 90^0[sic].	Sim. Porque os outros podem ter outras medidas.
	FVL	Sim, idem ao 11.	Sim, contanto que os outros ângulos tenham medidas diferentes e que a soma dos três forme 180^0.
	RSM	Sim, pelo mesmo motivo do anterior.	Sim, pode pois a soma deve dar 180: 35, 45, 100.[sic]
	SCB	Sim. Porque pode ter um ângulo > que 90^0 é que ao mesmo tempo os outros 2 sejam diferentes.[sic]	Sim, ele pode ter ângulos agudos e lados diferentes.
13 – É possível que um triângulo escaleno seja também obtusângulo? ( ) Sim ( ) Não .Justifique	FLD	Sim.	Sim, é possível que tenha 3 lados diferentes e um ângulo maior que 90^0.
	FOS	Sim. Porque assim a uma variação quanto a seu vértice [sic].	Sim. Porque pode apresentar outras medidas.
	FVL	Sim, idem ao 11.	Sim, contanto que os outros lados tenham medidas diferentes e que a soma deles seja de 180^0.

	RSM	Sim, pelo mesmo motivo.	Sim, pois tem que somar 180^0.
	SCB	Sim. Porque sim.	Sim
14 – É possível que um triângulo equilátero seja também retângulo? ( ) Sim ( ) Não .Justifique	FLD	Não, não existe triângulo eqüilátero nessas condições.	Não. Porque os ângulos serão sempre iguais: 60^0, 60^0, 60^0.
	FOS	Sim. Porque poderíamos inverter seus lados através de uma conversão.	Não. Porque todos os lados do triângulo eqüilátero possuem 60^0.
	FVL	Não, pois não pode fugir a regra do triângulo eqüilátero de 3 lados iguais.	Não, pois no triângulo retângulo, todos os seus ângulos medem 60^0[sic].
	RSM	Não.	Não, pois ele deve ter os três ângulos iguais.
	SCB	Sim. Não sei.	Não, ele não possui ângulo de 90^0.
15 – É possível que um triângulo equilátero seja também acutângulo? ( ) Sim ( ) Não .Justifique	FLD	Sim, somente existe triângulo eqüilátero nessa condição.	Sim. Porque ele terá 3 ângulos menores que 90^0.
	FOS	Sim. Porque assim a uma viabilidade maior no ângulo[sic].	Sim. Porque soma 180^0 cada um de seus ângulos de 60^0.[sic]
	FVL	Não, idem ao 14.	Sim, contanto que todos os lados possuam 60^0.
	RSM	Não.	Sim, pois seus ângulos medem 60^0.
	SCB	Sim. Não sei.	Sim, todos os ângulos medem menos que 90^0.
16 – É possível que um triângulo eqüilátero seja também obtusângulo? ( ) Sim ( ) Não .Justifique	FLD	Não, não pode porque não existe triângulo eqüilátero com ângulo maio que 60^0. [sic]	Não. Idem ao 14.
	FOS	Não. Porque não poderíamos inverter seus lados iguais.	Não. Porque deve ter 60^0 cada ângulo.
	FVL	Não, idem ao 14.	Não, pois a soma dos ângulos seria maior que 180^0.
	RSM	Não.	Não, pois seus

			ângulos medem 60^0.
	SCB	Sim. Não sei.	Não
17 – É possível que um triângulo isósceles seja também retângulo? ( ) Sim ( ) Não .Justifique	FLD	Sim.	Sim, é possível que o triângulo tenha dois lados iguais é um ângulo de 90^0.
	FOS	Sim. Porque apresentaria vértices iguais.	Sim.Porque tirando o de 90^0, sobra dois ângulos iguais.
	FVL	Sim, um triângulo retângulo pode ter 3 lados diferentes.	Sim, pois os outros lados teriam 45^0.
	RSM	Sim.	Sim, pois ele tem se ter dois ângulos iguais [sic]
	SCB	Não. Porque os lados do triângulo isóiceles tem que ser iguais. [sic]	Sim.
18 – É possível que um triângulo isósceles seja também acutângulo? ( ) Sim ( ) Não .Justifique	FLD	Sim.	Sim, é possível que o triângulo 2 lados iguais e um ângulo menor que 90^0.[sic]
	FOS	Sim. Modificando seus vértices.	Sim. Porque basta os outros dois serem iguais.
	FVL	Sim, idem ao 17.	Sim, contanto que os outros lados possuam a mesma medida.
	RSM	Sim.	Sim, pois ele pode ter dois ângulos iguais.
	SCB	Não. Porque os lados do isósceles tem ser iguais.	Sim.
19 – É possível que um triângulo isósceles seja também obtusângulo? ( ) Sim ( ) Não .Justifique	FLD	Sim.	Sim, porque ele pode ter 2 lados iguais e um ângulo maior que 90^0.
	FOS	Não. Porque não seria convexo.	Sim. Porque podem os outros dois serem iguais.
	FVL	Sim, idem ao 17.	Sim, contanto que os outros lados tenham a mesma medida e que a soma dos três forme 180^0.

	RSM	Sim.	Sim, o triângulo pode ter dois ângulos iguais e um maior que 90. [sic]
		Não. Porque os lados do isósceles tem ser iguais.	Não, pois ele deve ter dois ângulos iguais.
20 - Trace as alturas relativas aos lados destacados nos triângulos abaixo: 	FLD	Traçou corretamente nos três casos.	Traçou corretamente nos três casos.
	FOS	Em branco.	Em branco.
	FVL	Acertou os dois primeiros casos. (N.A.: Embora não tenha colocado o símbolo do ângulo reto)	Acertou os três casos. (N.A.: Desta vez colocou o símbolo do ângulo reto).
	RSM	Errou os três casos.	Acertou os três casos.
	SCB	Errou os três casos.	Acertou os dois primeiros casos.
21 – Tente dizer com suas próprias palavras o que é altura relativa de um dado lado num triângulo.	FLD	É a altura do triângulo.	Uma reta que determina um ângulo de 90^0 graus em relação a um lado de qualquer triângulo.
	FOS	É a maior distância de um ângulo a seu lado oposto.	Divide o ângulo em 90^0.
	FVL	É uma distância entre o ângulo oposto ao lado.	Seria a maior linha que pudesse ser feita referente ao lado desejado.
	RSM	É quando uma linha é traçada para determinar a altura.	É uma perpendicular que liga um vértice ao seu lado oposto.
	SCB	Infelizmente não sei explicar.	Em branco.
22 – Trace as medianas relativas aos lados destacados nos triângulos abaixo: 	FLD	Em branco	Acertou os três casos.
	FOS	Em branco.	Acertou os três casos.
	FVL	Em branco.	Acertou os três casos.
	RSM	Errou os três casos.	Acertou os três casos.
	SCB	Errou os três casos.	Acertou os três casos.

23 – Tente dizer com suas próprias palavras o que é mediana relativa a um dado lado num triângulo.	FLD	Uma reta que divide em duas partes iguais qualquer lado de um triângulo.	È o seguimento que divide o lado em dois (iguais). [sic]
	FOS	Em branco.	Para achar seu meio no vértice.
	FVL	Em branco.	Em branco.
	RSM	É a divisão a partir do ponto de interseção.	É uma reta que liga o vértice à metade do lado oposto.
	SCB	Em branco.	É quando traça retas de um certo vértice à metade de seu lado oposto, achando a mediana.
24 - Trace as bissetrizes relativas aos vértices assinalados nos triângulos abaixo: 	FLD	Em branco.	Acertou os três casos.
	FOS	Em branco.	Acertou os três casos.
	FVL	Em branco.	Acertou os três casos.
	RSM	Errou os três casos.	Acertou os três casos.
	SCB	Errou os três casos.	Acertou os dois primeiros casos.
25 – Tente dizer com suas próprias palavras o que é bissetriz de um ângulo interno num dado triângulo.	FLD	É o seguimento que divide o ângulo.[sic]	Divide em duas partes iguais o ângulo de qualquer vértice de um triângulo.
	FOS	Em branco.	Divide o ângulo em duas partes iguais.
	FVL	É os segmentos que se cruzam para achar o “centro” do triângulo. [sic]	Seria [sic] N.A.: não completou a resposta.
	RSM	É a divisão também.	É a reta que parte da divisão de um ângulo ao seu lado oposto.
	SCB	Não sei.	É uma divisão do ângulo em duas parte iguais.

Apêndice D
Atividades de Ensino para o trabalho de campo documentado no capítulo 6

ATIVIDADE 1: O CONCEITO DE VOLUME

OBJETIVOS:

- Compreender o conceito de volume;
- Compreender o conceito de bloco retangular ou de paralelepípedo retângulo;
- Justificar e compreender a fórmula do volume de um bloco retangular de dimensões a, b e c;
- Determinar o volume de um bloco retangular;
- Compreender o conceito de cubo;
- Justificar e compreender a fórmula do volume de um cubo de aresta a;
- Determinar o volume de um cubo.

PROCEDIMENTOS:

Existem inúmeras atividades cotidianas que envolvem o cálculo de volume. Podemos citar algumas delas:

(a) Quando um marceneiro se dirige a uma serraria para comprar algumas pranchas de imbuia (tipo de madeira). Se o metro cúbico da imbuia custa R$ 50,00, quanto ele deverá pagar por sua compra?

Para responder a esta pergunta ele precisa saber o ***volume*** de imbuia que deve comprar.

Se o mesmo marceneiro deseja construir cinco camas de dimensões conhecidas, quanto de madeira ele deve comprar?

(b) Para revestir um piso com uma camada de massa de certa espessura, constituída de areia, cimento e água, um pedreiro deve calcular o ***volume*** de massa necessário para executar o serviço, sem que haja desperdício ou falta de material.

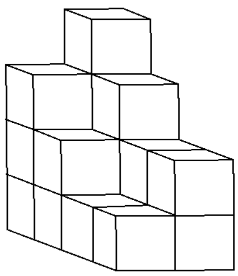
(c) A medição do consumo de água de uma residência é realizada por um aparelho chamado hidrômetro, que fornece o ***volume*** de água consumido.

O ***volume*** de um sólido é a quantidade de espaço ocupada por ele.

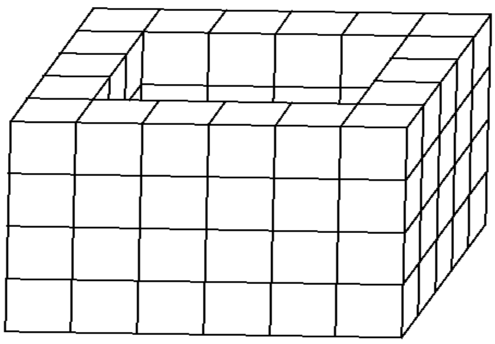
Quando medimos uma grandeza, estamos, na verdade, comparando-a com uma outra da mesma espécie, tomada como a **unidade**.

Quantos cubos unitários há nos sólidos abaixo?

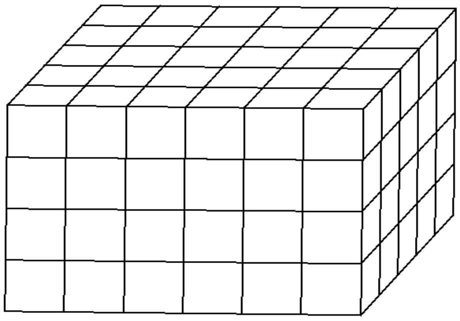
(a)



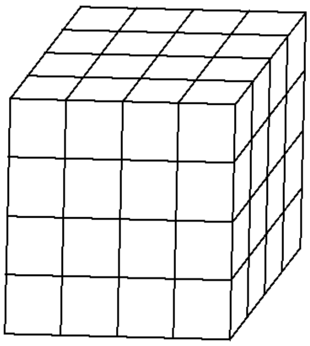
(b)



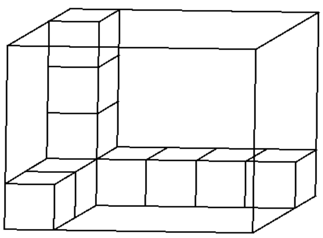
(c)



(d)

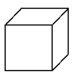


Quantos cubos unitários serão necessários para preencher completamente a caixa abaixo?



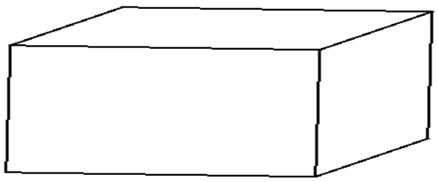
Por convenção o cubo de aresta igual a um tem volume igual a um.

Por este motivo, a unidade de volume é um cubo de aresta unitária.



VOLUME DE UM BLOCO RETANGULAR:

Um bloco retangular é um sólido delimitado por seis faces retangulares. Essas faces constituem três pares e em cada par os retângulos são iguais.
O bloco retangular abaixo possui dimensões 5 cm, 3 cm e 2 cm.



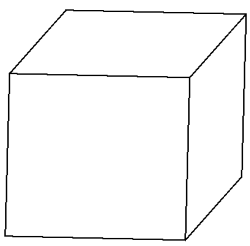
Qual é o seu volume? V = ...
Qual foi o procedimento que você utilizou para determinar este valor? ....
....

Se o bloco retangular possui dimensões a, b e c, então o seu volume é ....

Se a . b é a área da base do bloco e c é a sua altura, então seu volume também pode ser dado por ....

VOLUME DE UM CUBO:

Agora considere o cubo abaixo de aresta a = 3 cm.



Qual é o seu volume? V = ...
Qual foi o procedimento que você utilizou para determinar este valor?
....

Se todas as arestas de um cubo possuem dimensão a, então o seu volume é ....

ATIVIDADE 2: O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

OBJETIVOS:

- Compreender o Princípio de Cavalieri e sua importância;
- Aplicar o Princípio de Cavalieri para justificar fórmulas de volume.

PROCEDIMENTOS:

Nas construções realizadas no arquivo X_1 do Calques 3D, há dois sólidos S_1 e S_2 e dois planos paralelos horizontais α e π que interceptam estes sólidos.

(a) Calcule a área das seções destes sólidos que fazem interseção como o plano π e os volumes de cada um deles.

A_1 = ... A_2 = ...	V_1 = ... V_2 = ...

(b) Desloque o plano π para cima e para baixo e observe a variação das áreas das seções e dos volumes dos sólidos. O que você observa? As áreas são iguais? .... E os volumes? ....

(c) Por que isso ocorre? ....
....
....

Abra agora o arquivo X_2 e repita os mesmos procedimentos anteriores, ou seja, determine as áreas das seções planas e os volumes dos sólidos e desloque o plano π, observando os valores obtidos. O que ocorre desta vez? ....
....
Por quê? ....

Imagine que dois sólidos quaisquer S_1 e S_2 (como mostra o desenho abaixo) estejam apoiados sobre um plano horizontal α e que qualquer plano horizontal π determina nos sólidos S_1 e S_2

as seções planas s_1e s_2 respectivamente (elas são interseções do plano π com os sólidos S_1 e S_2).

Imagine agora que os sólidos S_1 e S_2 e o plano horizontal α sejam fixos e que o plano π, paralelo ao plano α, seja móvel. As seções s_1e s_2 mudarão de forma e extensão.

Suponha que o plano horizontal π se desloque (ele pode, inclusive, coincidir com α) e que em qualquer posição que ele ocupe a seção s_1 tenha a mesma área da seção s_2. Cavalieri garantia que se isso ocorresse os volumes dos sólidos S_1 e S_2 seriam iguais.

Princípio de Cavalieri

Sejam S_1 e S_2 dois sólidos quaisquer. Se todo plano horizontal π seciona S_1 e S_2 segundo figuras planas de mesma área, então:

$$\text{Volume de } S_1 = \text{Volume de } S_2$$

ATIVIDADE 3: O PRISMA E SEU VOLUME

OBJETIVOS:

- Compreender e identificar as principais características de um prisma;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de um prisma através do Princípio de Cavalieri;
- Determinar o volume de um prisma.

PROCEDIMENTOS:

Observe que na construção X_3 do Calques 3D há dois planos paralelos α e π e uma reta r que fura os dois planos. No plano α está desenhado um polígono R, cujos vértices são os pontos A, B, C, D e E.

(a) Trace as retas paralelas à reta r e que passam pelos vértices do polígono R e sejam paralelas a r;
(b) Determine os pontos de interseção de cada uma das retas traçadas com o plano π e chame-os respectivamente A', B', C', D'e E';
(c) Trace os segmentos de reta unindo A a A', B a B', C a C', D a D' e E a E', ocultando a retas suportes destes segmentos.

O conjunto de todos os segmentos paralelos à reta r que ligam um ponto de R a um ponto do outro plano (o plano π) forma um prisma.

Os prismas são, então, os poliedros que têm duas faces paralelas e congruentes, chamadas **bases** e as demais faces têm a forma de paralelogramos e são chamadas **faces laterais**.

Agora desloque a reta r para diversas posições.
Toda vez que a reta r formar um ângulo reto com os planos α e π, o prisma é **reto**. Caso contrário, o prisma é **oblíquo**.

A distância entre os planos que contêm as bases do prisma chama-se **altura** do prisma e pode ser designada como **h**.

Abra o arquivo X_4 e determine as áreas das seções planas dos prismas de base quadrangular (o bloco retangular) e o outro prisma de base hexagonal:

A_1 = ...
A_2 = ...

Agora determine o volume destes prismas:

V_1 = ...
V_2 = ...

Através desta verificação você pôde perceber um caso particular em que as áreas de seções planas de um bloco retangular e de um prisma hexagonal eram equivalentes e, além disso, os volumes dos dois sólidos também têm o mesmo valor.

Agora considere um prisma, cuja base é o polígono P, apoiado sobre um plano horizontal α. Este prisma também é cortado por um plano horizontal π. A seção plana determinada por π será sempre um polígono congruente e, portanto, equivalente a P.

Para obter a fórmula do volume de um prisma será usado o Princípio de Cavalieri.
No arquivo X_5 há um prisma colocado sobre o plano horizontal α e a seu lado foi colocado um bloco retangular cuja base é um retângulo equivalente à base do prisma e cuja altura é igual à altura do prisma.
Construa um plano horizontal π que seciona os dois sólidos, determinando no prisma uma seção s_1 , equivalente à sua base, e no bloco retangular uma seção s_2, equivalente à sua base.
Movimentando este plano é possível observar que todas as seções planas determinadas são equivalentes às respectivas bases.

O que você concluiria sobre as medidas das áreas de s_1 e de s_2 , qualquer que seja o plano horizontal π? ....

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri,

Volume de um bloco retangular = Volume de um prisma

Na atividade 1 foi visto que

Volume de um bloco retangular = Área da base x Altura

Logo,

Volume de um prisma = ...

ATIVIDADE 4: O CILINDRO E SEU VOLUME

OBJETIVOS:

- Compreender e identificar as principais características de um cilindro;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de um cilindro através do Princípio de Cavalieri;
- Determinar o volume de um cilindro.

PROCEDIMENTOS:

Observe que na construção X_6 do Calques 3D há dois planos paralelos α e π e uma reta r que fura os dois planos. No plano α está desenhado um círculo S.

O conjunto de todos os segmentos paralelos à reta r que ligam um ponto de S a um ponto do outro plano (o plano π) forma um **cilindro**.

Os cilindros possuem duas partes planas, que são as **bases**, e uma parte curva que é a **superfície lateral.**

O **eixo** do cilindro é o segmento de reta que liga os centros das bases.

Se o eixo do cilindro formar um ângulo reto com o plano da base, o cilindro é **reto** e se o este eixo for oblíquo ao plano da base, o cilindro é oblíquo.

Os segmentos paralelos ao eixo, cujas extremidades são pontos das circunferências das bases, são chamados **geratrizes** do cilindro.

A distância entre os planos que contêm as bases do cilindro chama-se **altura** do cilindro e pode ser designada como **h**.

Abra o arquivo X_7 e determine as áreas das seções planas do cilindro C e do bloco retangular P:

A_1 = ... A_2 = ...

Agora determine o volume destes sólidos:

V_1 = ... V_2 = ...

Através desta verificação você pôde perceber um caso particular em que as áreas de seções planas de um cilindro e de um bloco retangular eram equivalentes e, além disso, os volumes dos dois sólidos também têm o mesmo valor.

Agora considere um cilindro cuja base é o círculo S, apoiado sobre um plano horizontal α. Este cilindro também é cortado por um plano horizontal π. A seção plana determinada por π será sempre um círculo equivalente a S.

Para obter a fórmula do volume de um cilindro será usado o Princípio de Cavalieri.
No arquivo X_8 há um cilindro colocado sobre o plano horizontal α e a seu lado foi colocado um bloco retangular cuja base é um retângulo equivalente à base do cilindro e cuja altura é igual à altura do cilindro.
Construa um plano horizontal π que seciona os dois sólidos, determinando no cilindro uma seção s_1 , equivalente à sua base, e no bloco retangular uma seção s_2, equivalente à sua base.
Movimentando este plano é possível observar que todas as seções planas determinadas são equivalentes às respectivas bases.

O que você concluiria sobre as medidas das áreas de s_1 e de s_2 , qualquer que seja o plano horizontal π? ....

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri,

Volume de um cilindro = Volume de um prisma

Foi visto que

Volume de um prisma = Área da base x Altura

Logo,

Volume de um cilindro = ...

Ou

Volume de um cilindro = ...

ATIVIDADE 5: A PIRÂMIDE E SEU VOLUME

OBJETIVOS:

- Compreender e identificar as principais características de uma pirâmide;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de uma pirâmide através da decomposição de um prisma triangular em três pirâmides equivalentes;
- Determinar o volume de uma pirâmide.

PROCEDIMENTOS:

Observe que na construção X_9 do Calques 3D há um plano α e um polígono R, cujos vértices são os pontos A, B, C, D e E.

Crie um ponto V fora do plano α e trace segmentos de reta que unem o ponto V a cada um dos vértices do polígono R.

O conjunto de todos os segmentos que ligam qualquer ponto de R ao ponto V forma uma **pirâmide**.

A pirâmide é delimitada por faces planas: sua base é o polígono R e suas faces laterais são triângulos.

O ponto V é o **vértice** da pirâmide e a distância deste ponto ao plano α é a **altura h** da pirâmide.

Crie um prisma de base triangular no Calques 3D. Chame os vértices da base superior deste prisma de A, B e C e os da base inferior de D, E e F.

Agora crie segmentos de reta unindo os pontos C e D e os pontos C e E . Observe que ficou determinada uma pirâmide de base triangular com vértices da base D, E e F. Chame esta pirâmide de P_1.

Trace um novo segmento de reta unindo os pontos A e E e uma nova pirâmide de base triangular fica determinada, com vértices da base A, B e C. Esta pirâmide está invertida e chame-a de P_2.

Observe que a base da primeira pirâmide corresponde à base inferior do prisma considerado no início e que a da segunda corresponde à base superior do mesmo prisma. Deste modo, as duas pirâmides possuem volumes equivalentes.

Observe que ainda restou uma outra pirâmide (P_3) com base formada pelos vértices A, D e E. Se considerarmos a pirâmide P_2 em uma nova posição, a sua nova base vai possuir vértices A, B e E. Observe que as áreas dos triângulos cujos vértices são A, D e F e A, B e E também são equivalentes. Como P_2 e P_3 possuem a mesma altura, elas também possuem volume equivalentes.

Logo P_1 e P_3 também possuem volumes equivalentes e então podemos considerar:

Volume de P_1 = Volume de P_2 = Volume de P_3 = Volume da Pirâmide

Volume do Prisma = Volume de P_1 + Volume de P_2 + Volume de P_3

Volume do Prisma = 3 x Volume da Pirâmide

Então,

Volume da Pirâmide = ...

Como o volume do prisma é V = Área da base X altura do prisma, também podemos escrever:

Volume da Pirâmide = ...

ATIVIDADE 6: O CONE E SEU VOLUME

OBJETIVOS:

- Compreender e identificar as principais características de um cone;
- Compreender e justificar a fórmula do volume de um cone através do Princípio de Cavalieri;
- Determinar o volume de um cone.

PROCEDIMENTOS:

Observe que na construção X_{10} do Calques 3D há um plano α e um círculo C.

Crie um ponto V fora do plano α e trace segmentos de reta que unem o ponto V a pelo menos dois pontos do círculo C.

O conjunto de todos os segmentos que ligam qualquer ponto de C ao ponto V forma um **cone**.

O cone possui uma parte plana, que é a **base** e, uma parte curva que é a **superfície lateral.**

O ponto V é o **vértice** do cone e a distância deste ponto ao plano α é a **altura h** do cone.

Abra o arquivo X_{11} e determine as áreas das seções planas do cone C e da pirâmide P:

A_1 = ... A_2 = ...

Agora determine o volume destes sólidos:

V_1 = ... V_2 = ...

Através desta verificação você pôde perceber um caso particular em que as áreas de seções planas de um cone e de uma pirâmide eram equivalentes e, além disso, os volumes dos dois sólidos também têm o mesmo valor.

Agora considere um cone cuja base é o círculo S, apoiado sobre um plano horizontal α. Este cone também é cortado por um plano horizontal π. A seção plana determinada por π será sempre um círculo equivalente a S.

Para obter a fórmula do volume de um cilindro será usado o Princípio de Cavalieri.
No arquivo X_{12} há um cone colocado sobre o plano horizontal α e a seu lado foi colocado uma pirâmide cuja base é um hexágono equivalente à base do cone e cuja altura é igual à altura do cone.
Construa um plano horizontal π que seciona os dois sólidos, determinando no cone uma seção s_1 , equivalente à sua base, e no bloco retangular uma seção s_2, equivalente à sua base.
Movimentando este plano é possível observar que todas as seções planas determinadas são equivalentes às respectivas bases.

O que você concluiria sobre as medidas das áreas de s_1 e de s_2 , qualquer que seja o plano horizontal π? ....

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri,

Volume de um cone = Volume de uma pirâmide

Volume de uma pirâmide = 1/3 (Área da base x Altura)

Logo,

Volume de um cone = ...

Ou

Volume de um cone = ...

Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Apêndice E
Entrevista III
Sondagem para a caracterização dos grupos

(1) Qual a sua idade?
(a) té 20 anos
(b) de 21 a 30 anos
(c) mais de 31 anos

(2) Você trabalha?
(a) Sim
(b) Não

(3) Quando você resolveu fazer o ensino médio/técnico, sua maior motivação foi:
(a) o diploma
(b) ampliar conhecimentos
(c) melhoria salarial
(d) preparar-se para o vestibular

(4) Durante o ensino fundamental você estudou em escola:
(a) Pública
(b) Particular
(c) Pública/Particular

(5) Qual a forma de estudo realizada no ensino fundamental?
(a) Regular diurno
(b) Regular noturno
(c) Supletivo

(6) Em qual disciplina você sentiu maior dificuldade no ensino fundamental? (é possível escolher mais de uma opção):
(a) Língua Portuguesa
(b) Matemática
(c) Ciências
(d) História
(e) Geografia
(f) Educação Física
(g) Nenhuma

(7) Você estudou geometria durante o ensino fundamental?
(a) Sim
(b) Não

(8) Em caso afirmativo, como foi esta experiência?
(a) Superficial
(b) Aprofundado

(9) Você possui computador em casa?
(a) Sim
(b) Não

(10) Com que freqüência você costuma usar o computador?
(a) Nunca
(b) uma a duas vezes por semana
(c) 3 a 5 vezes por semana
(d) mais de 5 vezes por semana

(11) Caso já utilize o computador, onde isto ocorre com mais freqüência?
(a) em casa
(b) no trabalho
(c) na escola
(d) em casa e no trabalho
(e) na escola e em casa
(f) no trabalho e na escola
(g) no trabalho, na escola e em casa

(12) O que você sabe utilizar no computador?
(a) *Windows*
(b) *Word*
(c) *Excell*
(d) *Power Point*
(e) Outros programas
(f) Nada

(13) Você já teve aula de alguma disciplina da formação geral no computador?
(a) Sim. Quais? ____________
(b) Não

Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Apêndice F
BPR - 5
Resultados do Teste de Raciocínio Espacial

Grupo de Controle								
Alunos	**Turma**	**Acertos1**	**EPN1**	**Percentil1**	**Acertos2**	**EPN2**	**Percentil2**	**EPM**
ACC	3441	11	91	27	12	93	32	2
ACL	3441	9	86	18	11	91	27	5
CCG	3441	8	84	14	8	84	14	0
DSB	3441	18	116	86	17	110	75	-6
EAL	3441	15	102	55	15	102	55	0
GNF	3441	2	60	0	12	93	32	33
JFC	3441	11	91	27	8	84	14	-7
LCS	3441	15	102	55	14	99	47	-3
LFS	3441	11	91	27	11	91	27	0
MAB	3441	11	91	27	12	93	32	2
MCA	3441	14	99	47	12	93	32	-6
PHS	3441	12	93	32	15	102	55	9
SLS	3441	14	99	47	12	93	32	-6
MWM	3441	8	84	14	9	86	18	2
APF	3541	12	93	32	9	86	18	-7
ASG	3541	15	102	55	17	110	75	8
FAJ	3541	12	93	32	11	91	27	-2
IFB	3541	17	110	75	18	116	86	6
JVS	3541	15	102	55	15	102	55	0
MTS	3541	12	93	32	14	99	47	6
OLS	3541	2	60	0	8	84	14	24
RSC	3541	15	102	55	16	107	68	5
RYN	3541	16	107	68	16	107	68	0
RDF	3541	12	93	32	15	102	55	9
TGM	3541	10	88	21	9	86	18	-2
UVS	3541	11	91	27	10	88	21	-3
VVS	3541	15	102	55	17	110	75	8
WRS	3541	9	86	18	12	93	32	7
CFN	3541	14	99	47	15	102	55	3
FCS	3541	15	102	55	14	99	47	-3
DSR	3541	15	102	55	15	102	55	0

Grupo Experimental								
Alunos	**Turma**	**Acertos1**	**EPN1**	**Percentil1**	**Acertos2**	**EPN2**	**Percentil2**	**EPM**
CAB	**3241**	6	77	6	9	86	18	9
DTD	**3241**	15	102	55	17	110	75	8
DSS	**3241**	16	107	68	15	102	55	-5
EDO	**3241**	9	86	18	11	91	27	5
GLS	**3241**	11	91	27	16	107	68	16
GMF	**3241**	15	102	55	12	93	32	-9
IGA	**3241**	13	96	39	13	96	39	0
JCN	**3241**	15	102	55	15	102	55	0
LCB	**3241**	11	91	27	14	99	47	8
LOA	**3241**	16	107	68	17	110	75	3
MPS	**3241**	16	107	68	18	116	86	9
MPC	**3241**	13	96	39	12	93	32	-3
RVP	**3241**	15	102	55	15	102	55	0
RCP	**3241**	20	146	99	21	146	99	0
RDM	**3241**	13	96	39	15	102	55	6
RLC	**3241**	8	84	18	8	84	18	0
SVN	**3241**	11	91	27	12	93	32	2
USC	**3241**	10	88	21	12	93	32	5
AOF	**3341**	1	60	0	9	86	18	26
ALO	**3341**	8	84	18	10	88	21	4
CPL	**3341**	19	124	95	20	146	99	22
CDF	**3341**	16	107	68	16	107	68	0
DCM	**3341**	17	110	75	19	124	95	14
EAG	**3341**	13	96	39	16	107	68	11
EDM	**3341**	5	74	4	10	88	21	14
HFM	**3341**	20	146	99	20	146	99	0
HSD	**3341**	11	91	39	15	102	55	11
JOC	**3341**	16	107	68	17	110	75	3
LLF	**3341**	8	84	21	13	96	39	12
MVP	**3341**	9	86	18	13	96	39	10
PCR	**3341**	17	110	75	17	110	75	0
RAS	**3341**	13	96	39	10	88	21	-8
RMF	**3341**	15	102	55	20	146	99	44
RCS	**3341**	16	107	68	15	102	55	-5
RAB	**3341**	16	107	68	16	107	68	0
TBJ	**3341**	7	80	9	12	93	32	13
WMP	**3341**	8	84	14	11	91	39	7
JML	**3341**	2	60	0	9	86	18	26
HCM	**3341**	9	86	18	9	86	18	0

Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Apêndice G
Notas das Provas

Grupo de Controle				
Alunos	**Turma**	**P1**	**P2**	**Média**
ACC	3441	6,5	4	5,25
ACL	3441	3,5	7	5,25
CCG	3441	2,3	6	4,15
DSB	3441	8	8,5	8,25
EAL	3441	9,5	8	8,75
GNF	3441	6	1,5	3,75
JFC	3441	6	3	4,5
LCS	3441	5,5	6	5,75
LFS	3441	6	5,5	5,75
MAB	3441	7	3	5
MCA	3441	8,5	4,2	6,35
PHS	3441	2,8	8	5,4
SLS	3441	3	6,5	4,75
MWM	3441	3	5	4
APF	3541	5,5	4,8	5,15
ASG	3541	7	8	7,5
FAJ	3541	5	3,5	4,25
IFB	3541	8	6,8	7,4
JVS	3541	7,2	6	6,6
MTS	3541	7,2	7,5	7,35
OLS	3541	4,2	2	3,1
RSC	3541	5,2	8	6,6
RYN	3541	7,5	8,5	8
RDF	3541	5,5	3,5	4,5
TGM	3541	3,2	4	3,6
UVS	3541	6	7,5	6,75
VVS	3541	7,2	7,5	7,35
WRS	3541	9	5	7
CFN	3541	7,5	5	6,25
FCS	3541	6,5	8	7,25
DSR	3541	6	6	6
Média Geral do Grupo				**5,8564**

Grupo Experimental				
Alunos	**Turma**	**P1**	**P2**	**Média**
CAB	3241	6	3	4,5
DTD	3241	8	10	9
DSS	3241	8	7,5	7,75
EDO	3241	8,5	10	9,25
GLS	3241	4	7	5,5
GMF	3241	8,5	9,8	9,15
IGA	3241	7	5	6
JCN	3241	7,6	7	7,3
LCB	3241	8	10	9
LOA	3241	10	8,5	9,25
MPS	3241	8	8,2	8,1
MPC	3241	6	7,5	6,75
RVP	3241	6,5	8	7,25
RCP	3241	9	9,5	9,25
RDM	3241	8	4	6
RLC	3241	3	5	4
SVN	3241	5	7,5	6,25
USC	3241	7	6	6,5
AOF	3341	7	4,8	5,9
ALO	3341	7,2	2,5	4,85
CPL	3341	9,5	9,5	9,5
CDF	3341	8,5	8,9	8,7
DCM	3341	9	7	8
EAG	3341	10	10	10
EDM	3341	5,8	7	6,4
HFM	3341	9,5	9	9,25
HSD	3341	7	6,8	6,9
JOC	3341	9,5	7,4	8,45
LLF	3341	7	6,5	6,75
MVP	3341	6	4	5
PCR	3341	8,5	8	8,25
RAS	3341	8	6	7
RMF	3341	9,6	8,8	9,2
RCS	3341	6,5	7,5	7
RAB	3341	8	6,5	7,25
TBJ	3341	10	8,5	9,25
WMP	3341	7	7,5	7,25
JML	3341	5,5	4	4,75
HCM	3341	7,5	6	6,75
Média Geral do Grupo				**7,3641**

Governo do Estado do Rio de Janeiro
Fundação de Apoio à Escola Técnica

ETE
Visconde
de Mauá

MATEMÁTICA – P1 – PROFESSOR GEORGE – QUARTA SÉRIE

Aluno:______________________________Número:____Turma: _________

QUESTÃO I:
Determine a área total de um paralelepípedo retângulo cujo volume é 72 cm^3 e a base é quadrada, de aresta 3 cm.

QUESTÃO II:
Considere um paralelepípedo retângulo com 4 cm de largura, 6 cm de comprimento e 120 cm^3 de volume. Determine sua altura e diagonal.

QUESTÃO III:
Um cubo tem área total igual a 96 m^2. Qual é o valor de seu volume?

QUESTÃO IV:
Um prisma reto hexagonal regular tem 5 cm de altura e a aresta da base mede 4 cm. Determine:

(a) a área da base
(b) a área lateral
(c) a área total
(d) o volume

QUESTÃO V:
(ITA-SP) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área da base. Calcule o volume deste prisma.

QUESTÃO VI:
Deseja-se construir um caixa d’água em forma de um cilindro reto, de 1,6 m de raio e cuja capacidade seja de 20000 litros. Qual deve ser aproximadamente a altura do cilindro neste caso?

Governo do Estado do Rio de Janeiro
Fundação de Apoio à Escola Técnica

ETE Visconde de Mauá

MATEMÁTICA – P2 – PROFESSOR GEORGE – QUARTA SÉRIE

Aluno:_______________________________Número:____Turma: _________

QUESTÃO I:
Determine a área total e o volume de um cone circular reto de 12 cm de altura e 15 cm de geratriz.

QUESTÃO II:
Sabendo que um cone tem 12 cm de altura e 5 cm de raio da base, determine seu volume.

QUESTÃO III:
Uma pirâmide regular hexagonal tem o apótema da base igual a 6 cm. Sabendo que o apótema da pirâmide vale 10 cm, calcule o seu volume.

QUESTÃO IV:
A base de uma pirâmide reta de altura 3r é um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio r. Determine o volume da pirâmide.

QUESTÃO V:
Duas esferas de chumbo, uma de 3cm de raio e a outra de 6 cm de raio, fundem-se e formam outra esfera. Calcule o raio dessa nova esfera.

QUESTÃO VI:
Em um cilindro eqüilátero de 36π cm^2 de superfície lateral foi inscrita uma esfera. Calcule o volume da esfera.

Resultados Individuais dos Testes da Bateria BPR-4

GRUPO DE CONTROLE																
Alunos	**Turma**	**RV1 - A**	**RV1-EPN**	**RV1 - P**	**RA1 - A**	**RA1-EPN**	**RA1 - P**	**RE1 - A**	**RE1-EPN**	**RE1 -P**	**RN1 - A**	**RN1-EPN**	**RN1 - P**	**1EG4-A**	**1EG4-EPN**	**1EG4-P**
ACC	3441	14	85	16	12	78	7	11	91	27	12	96	39	49	85	16
ACL	3441	13	82	12	9	72	3	9	86	18	5	78	7	36	73	4
CCG	3441	12	79	8	15	87	19	8	84	14	6	81	10	41	77	6
DSB	3441	18	99	47	14	82	12	18	116	86	14	103	58	64	98	45
EAL	3441	19	105	63	15	87	19	15	102	55	13	98	45	62	97	42
GNF	3441	16	91	27	13	79	18	2	60	0	6	81	10	37	74	4
JFC	3441	16	91	27	16	92	30	11	91	27	11	93	32	54	89	23
LCS	3441	14	85	16	15	87	19	15	102	55	9	88	21	53	88	21
LFS	3441	15	89	23	13	79	18	11	91	27	7	83	13	46	82	12
MAB	3441	14	85	16	16	92	30	11	91	27	7	83	13	48	85	16
MCA	3441	14	85	16	15	87	19	14	99	47	8	86	18	51	86	18
PHS	3441	14	85	16	13	79	8	12	93	32	10	90	25	49	85	16
SLS	3441	10	74	4	18	99	47	14	99	47	7	83	13	49	85	16
MWM	3441	15	89	23	14	82	12	8	84	14	12	96	39	49	85	16
APF	3541	13	82	12	12	78	7	12	93	32	11	93	32	48	85	16
ASG	3541	18	99	47	15	87	19	15	102	55	14	103	58	62	97	42
FAJ	3541	5	67	1	3	59	0	12	93	32	8	86	18	28	69	2
IFB	3541	18	99	47	20	109	73	17	110	75	17	115	84	72	109	73
JVS	3541	13	82	12	18	99	47	15	102	55	11	93	32	57	91	27
MTS	3541	19	105	63	21	115	84	12	93	32	19	146	99	71	108	70
OLS	3541	12	79	8	14	82	12	2	60	0	7	83	13	35	73	4

RSC	3541	17	95	37	20	109	73	15	102	55	6	81	10	58	92	30
RYN	3541	20	111	77	17	94	34	16	107	68	18	127	96	71	108	70
RDF	3541	16	91	27	18	99	47	12	93	32	7	83	13	53	88	21
TGM	3541	19	105	63	12	78	7	10	88	21	9	88	21	50	86	18
UVS	3541	15	89	23	14	82	12	11	91	27	7	81	13	47	83	13
VVS	3541	19	105	63	18	99	47	15	102	55	13	98	45	65	99	47
WRS	3541	15	89	23	17	94	37	9	86	18	11	93	32	52	88	21
CFN	3541	17	95	37	16	92	30	14	99	47	13	98	45	60	94	34
FCS	3541	11	77	6	18	99	47	15	102	55	16	111	77	60	94	34
DSR	3541	10	74	4	22	122	93	15	102	55	9	88	21	56	91	27

GRUPO EXPERIMENTAL																
Alunos	**Turma**	**RA1 - A**	**RA1-EPN**	**RA1 - P**	**RV1 - A**	**RV1-EPN**	**RV1 - P**	**RE1 - A**	**RE1-EPN**	**RE1 -P**	**RN1 - A**	**RN1-EPN**	**RN1 - P**	**1EG4-A**	**1EG4-EPN**	**1EG4-P**
CAB	3241	17	94	34	17	95	37	6	77	6	7	83	13	47	83	13
DTD	3241	17	94	34	17	95	37	15	102	55	14	103	58	63	98	45
DSS	3241	17	94	34	17	95	37	16	107	68	14	103	58	64	98	45
EDO	3241	12	78	7	16	91	27	9	86	18	7	83	13	44	79	8
GLS	3241	14	82	12	15	95	23	11	91	27	13	98	45	53	88	21
GMF	3241	18	99	47	19	105	63	15	102	55	10	90	25	62	97	42
IGA	3241	17	94	34	16	91	27	13	96	39	12	96	39	58	92	30
JCN	3241	17	94	34	15	95	23	15	102	55	7	83	13	54	89	23
LCB	3241	15	87	19	19	105	63	11	91	27	10	90	25	55	90	25
LOA	3241	17	94	34	15	95	23	16	107	68	13	98	45	61	96	39
MPS	3241	14	82	12	19	105	63	16	107	68	11	93	32	60	94	34
MPC	3241	21	115	84	17	95	37	13	96	39	12	96	39	63	98	45
RVP	3241	14	82	12	13	82	12	15	102	55	14	103	58	56	91	27
RCP	3241	20	109	73	17	95	37	20	146	99	17	115	84	74	112	79
RDM	3241	14	82	12	18	99	47	13	96	39	13	98	45	58	92	30
RLC	3241	17	94	34	18	99	47	8	84	18	9	88	21	52	88	21
SVN	3241	16	92	30	13	82	12	11	91	27	10	90	25	50	86	18
USC	3241	9	72	3	10	74	4	10	88	21	11	93	32	40	77	6
AOF	3341	18	99	47	8	68	2	1	60	0	0	70	2	27	68	2
ALO	3341	20	109	73	15	95	23	8	84	18	17	115	84	60	94	34
CPL	3341	17	94	34	16	91	27	19	124	95	16	111	77	68	103	58
CDF	3341	17	94	34	13	82	12	16	107	68	14	103	58	60	94	34
DCM	3341	22	122	93	15	95	23	17	110	75	14	103	58	68	103	58
EAG	3341	15	87	19	21	117	87	13	96	39	11	93	32	60	94	34
EDM	3341	7	71	3	18	99	47	5	74	4	8	86	18	38	75	5

HFM	3341	24	146	99	17	95	37	20	146	99	14	103	58	75	114	82
HSD	3341	17	94	34	14	85	16	11	91	39	16	111	77	58	92	30
JOC	3341	20	109	73	19	105	63	16	107	68	14	103	58	69	104	61
LLF	3341	16	92	30	20	111	77	8	84	21	11	93	32	55	90	25
MVP	3341	19	104	61	17	95	37	9	86	18	18	127	96	63	98	45
PCR	3341	15	87	19	16	91	27	17	110	75	13	98	45	61	96	39
RAS	3341	15	87	19	16	91	27	13	96	39	14	103	58	58	92	30
RMF	3341	19	104	61	18	99	47	15	102	55	16	111	77	68	103	58
RCS	3341	16	92	30	17	95	37	16	107	68	13	98	45	62	97	42
RAB	3341	20	109	73	20	111	77	16	107	68	8	86	18	64	98	45
TBJ	3341	17	94	34	15	95	23	7	80	9	6	81	10	45	81	10
WMP	3341	21	115	84	18	99	47	8	84	14	13	98	45	60	94	34
JML	3341	14	82	12	13	82	12	2	60	0	5	78	7	34	81	10
HCM	3341	14	82	12	21	117	87	9	86	18	8	86	18	52	88	21

Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Apêndice I
Entrevista IV

Teste de conhecimento geométrico – Resultados Individuais

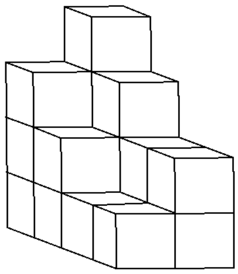
Grupo de Controle					
Alunos	**Turma**	**Pré-Teste Acertos**	**Pré-Teste Percentual de Acertos**	**Pós-Teste Acertos**	**Pós-Teste Percentual de Acertos**
ACC	3441	5	33	8	53
ACL	3441	6	40	9	60
CCG	3441	5	33	7	47
DSB	3441	9	60	10	67
EAL	3441	9	60	11	73
GNF	3441	4	27	9	60
JFC	3441	5	33	7	47
LCS	3441	7	47	8	53
LFS	3441	6	40	7	47
MAB	3441	4	27	6	40
MCA	3441	8	53	10	67
PHS	3441	5	33	8	53
SLS	3441	4	27	6	40
MWM	3441	5	33	6	40
APF	3541	6	40	9	60
ASG	3541	7	47	8	53
FAJ	3541	7	47	9	60
IFB	3541	9	60	10	67
JVS	3541	7	47	7	47
MTS	3541	7	47	8	53
OLS	3541	5	33	6	40
RSC	3541	6	40	7	47
RYN	3541	7	47	8	53
RDF	3541	6	40	9	60
TGM	3541	6	40	6	40
UVS	3541	8	53	8	53
VVS	3541	8	53	10	67
WRS	3541	9	60	11	73
CFN	3541	7	47	7	47
FCS	3541	6	40	8	53
DSR	3541	6	40	6	40

Grupo Experimental					
Alunos	**Turma**	**Pré-Teste Acertos**	**Pré-Teste Percentual de Acertos**	**Pós-Teste Acertos**	**Pós-Teste Percentual de Acertos**
CAB	**3241**	5	33	10	67
DTD	**3241**	6	40	8	53
DSS	**3241**	4	27	7	47
EDO	**3241**	8	53	11	73
GLS	**3241**	7	47	10	67
GMF	**3241**	9	60	12	80
IGA	**3241**	6	40	7	47
JCN	**3241**	6	40	6	40
LCB	**3241**	9	60	12	80
LOA	**3241**	10	67	13	87
MPS	**3241**	8	53	10	67
MPC	**3241**	6	40	5	33
RVP	**3241**	5	33	11	73
RCP	**3241**	9	60	12	80
RDM	**3241**	5	33	8	53
RLC	**3241**	4	27	7	47
SVN	**3241**	6	40	10	67
USC	**3241**	6	40	11	73
AOF	**3341**	5	33	9	60
ALO	**3341**	6	40	7	47
CPL	**3341**	9	60	10	67
CDF	**3341**	8	53	12	80
DCM	**3341**	8	53	11	73
EAG	**3341**	9	60	14	93
EDM	**3341**	4	27	8	53
HFM	**3341**	6	40	11	73
HSD	**3341**	5	33	9	60
JOC	**3341**	7	47	8	53
LLF	**3341**	4	27	9	60
MVP	**3341**	4	27	7	47
PCR	**3341**	7	47	11	73
RAS	**3341**	6	40	10	67
RMF	**3341**	8	53	9	60
RCS	**3341**	6	40	5	33
RAB	**3341**	7	47	9	60
TBJ	**3341**	9	60	9	60
WMP	**3341**	7	47	8	53
JML	**3341**	5	33	10	67
HCM	**3341**	6	40	12	80

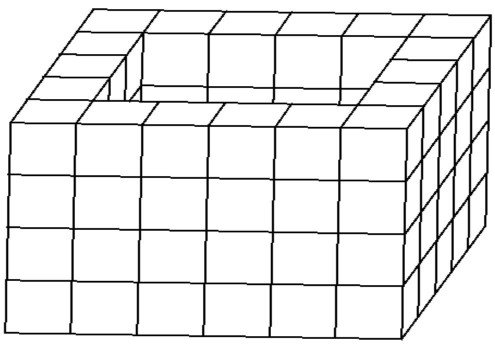
Teste de conhecimento geométrico

(1) Quantos cubos unitários há nos sólidos abaixo?

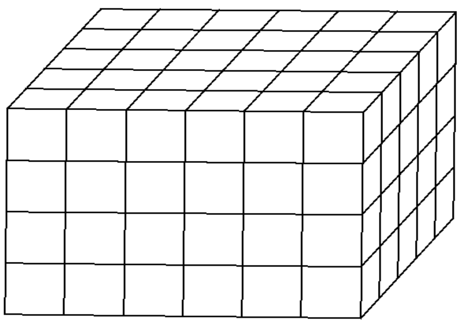
(a)



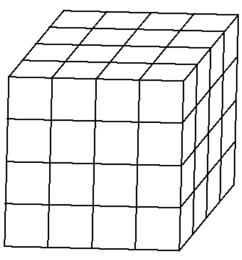
(b)



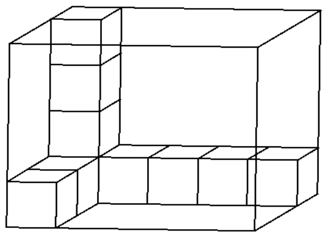
(c)



(d)



(2) Quantos cubos unitários serão necessários para preencher completamente a caixa abaixo?



(3) Qual o volume de um bloco retangular de dimensões 2,5 ; 1,8 e 3,4? ....

(4) É possível que dois sólidos, um alto e estreito e o outro baixo e largo, tenham volumes iguais? Justifique:

....

....

(5) Se, por outro lado, os sólidos possuírem a mesma altura e forem cortados por um plano paralelo às suas bases e as áreas das seções determinadas forem diferentes, o que se pode dizer de seus volumes? ....

(6) Se, por outro lado, os sólidos possuírem a mesma altura e forem cortados por um plano paralelo às suas bases e as áreas das seções determinadas forem iguais, o que se pode dizer de seus volumes? ....

(7) Como se pode garantir que o volume de prisma qualquer é dado pela multiplicação da área de sua base e sua altura, assim como o de um bloco retangular?........................

....

....

(8) Um funileiro quer construir duas canecas com a mesma capacidade, sendo que uma delas tem a forma de um prisma hexagonal e a outra tem a forma de um cilindro. Isto é possível? Em caso afirmativo, de forma ele poderia fazê-lo? ....

....

....

(9) Quantas vezes é possível despejar o conteúdo de uma jarra com a forma de uma pirâmide e em uma outra com o formato de um prisma, considerando que ambas têm a mesma altura e áreas das bases iguais? ....

(10) com que sólido é possível comparar o cone e obter a fórmula de seu volume? Por quê?...