

# Incerteza Difusa Aplicada a Problemas de Condução de Calor

por

GLAUCO ANTONI DINIZ MONTEIRO  
glaucoadm@posgrad.nce.ufrj.br

Orientadores:

Mauro Antonio Rincon  
Marcello Goulart Teixeira

Área de Pesquisa:

Algoritmos, Métodos Numéricos e Robótica

(NCE/IM) - UFRJ

2006

# Incerteza Difusa Aplicada a Problemas de Condução de Calor

por

Glauco Antoni Diniz Monteiro

Dissertação submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática e do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em informática.

Área de concentração: Algoritmos, Métodos Numéricos e Robótica

Aprovada por:

---

Mauro Antonio Rincon  
(Orientador)

---

Marcello Goulart Teixeira  
(Co-orientador)

---

I Shih Liu  
(IM/UFRJ)

---

Carlos Alberto Nunes Cosenza  
(DCS/UFRJ)

Aos meus pais

# Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram com o seu apoio e suas sugestões, entre os quais não posso deixar de citar meu orientador, meu co-orientador, minha noiva e meus amigos Sérgio e Neise. Agradeço ao NCE, pelo apoio financeiro, aos funcionários da secretaria pela ajuda em todas as ocasiões e a DEUS.

# Resumo

A aritmética fuzzy, baseada no princípio da extensão de Zadeh, é apresentada como uma ferramenta para resolver problemas de transmissão de calor com parâmetros do material incertos. Os números fuzzy são introduzidos, e os diferentes conceitos para executar a incerteza dos parâmetros são discutidos. Como exemplo, um problema de transmissão de calor é considerado e o Método de Elementos Finitos é utilizado. A aplicação direta da aritmética fuzzy às técnicas tradicionais para a resolução numérica de problemas de engenharia, entretanto, traz consigo alguns problemas que a tornam, algumas vezes, impraticável. No contraste ao uso de números exclusivamente crisp (precisos), os resultados para os cálculos incluindo números fuzzy, dependendo da técnica aplicada para encontrar a solução, apresentam um aumento considerável da incerteza inicialmente considerada. As incertezas expressas nos diferentes resultados do cálculo são então basicamente aumentadas. Isto ocorre porque, por um lado, tem-se a incerteza causada pela presença dos parâmetros com valor fuzzy e, por outro lado, uma incerteza adicional, indesejável é criada artificialmente pela própria técnica utilizada para encontrar a solução. Este efeito fuzzy-específico de incertezas artificiais é discutido e alguns conceitos para redução de tal incerteza são apresentados.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Equação do calor com transformação micro-estrutural</b>	<b>3</b>
1.1 Equação do Calor . . . . .	3
1.2 Transformação Martensítica . . . . .	4
1.2.1 A Estrutura Cristalina da Martensita . . . . .	4
1.2.2 A Têmpera dos Aços . . . . .	5
1.2.3 Cálculo da Fração Transformada . . . . .	6
1.3 Formulação Forte e Fraca do Problema . . . . .	7
1.3.1 Formulação Forte . . . . .	7
1.3.2 Formulação Fraca . . . . .	8
1.3.3 Existência e Unicidade de Solução . . . . .	10
1.4 Formulação de Galerkin . . . . .	12
1.5 O Método de Elementos Finitos . . . . .	12
1.5.1 Discretização do Domínio . . . . .	13
1.5.2 Formulação Matricial . . . . .	17
<b>2 Números Difusos (Fuzzy Numbers)</b>	<b>20</b>
2.1 Número Difuso . . . . .	20
2.2 Incerteza Difusa . . . . .	22
2.3 Aritmética Fuzzy . . . . .	25
2.3.1 Princípio da Extensão . . . . .	25
2.3.2 Representação de Número Fuzzy por Intervalos (Técnica dos Alfa-cortes) . . . . .	26
2.3.3 Aritmética intervalar . . . . .	28
2.3.4 Aritmética Fuzzy . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Implementação Computacional</b>	<b>33</b>
3.1	Algoritmos . . . . .	33
3.1.1	Arquivo de dados.cpp . . . . .	33
3.1.2	O algoritmo do programa principal . . . . .	38
3.2	Método Trapezoidal Generalizado . . . . .	43
3.2.1	Algoritmo . . . . .	43
3.2.2	Estabilidade . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Resultados Numéricos Crisp</b>	<b>46</b>
4.1	Análise Estacionária . . . . .	46
4.1.1	Exemplo com Temperatura Prescrita . . . . .	46
4.1.2	Exemplo com Fluxo de Calor . . . . .	49
4.2	Análise Transiente . . . . .	51
4.2.1	Exemplo com Temperatura Prescrita . . . . .	51
4.2.2	Exemplo com Fluxo de Calor . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos Fuzzy</b>	<b>56</b>
5.1	Análise Estacionária . . . . .	57
5.1.1	Exemplo do Reator: . . . . .	57
5.1.2	Resultado: Exato ou Combinatorial . . . . .	59
5.1.3	Resultado: Aritética Fuzzy . . . . .	61
5.1.4	Resultado: Manipulação Algébrica do Sistema ou K Fora da Integral . . . . .	64
5.1.5	Resultado: Pré-Condicionamento do Sistema . . . . .	68
5.1.6	Comparação dos Resultados . . . . .	71
5.2	Análise Transiente . . . . .	72
5.2.1	Resultado: Exato ou Combinatorial . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>78</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>80</b>

# Introdução

Abordagens tradicionais da resolução numérica de equações diferenciais parciais assumem que todos os dados do problema, em particular os dados do material, são conhecidos com precisão. Porém, na prática, a maioria dos problemas possui algum tipo de imprecisão que, por isso, deve ser considerada pelos modelos matemáticos, obtendo assim resultados representativos de todo o espectro possível de resultados.

Há três abordagens fundamentais desenvolvidas para tratar matematicamente incertezas: teoria das probabilidades, matemática intervalar e teoria das possibilidades, esta última baseada na teoria dos conjuntos difusos, desenvolvida por Lotfi A. Zadeh em 1965.

A abordagem da incerteza pela teoria das probabilidades considera os dados do material modelados por função de densidade de probabilidade, que na maioria dos métodos de análise tem valores diferentes de zero porém pequenos em quase todo o intervalo de valores dependentes. Assim, todo resultado é possível, mesmo que com uma pequena chance de ocorrência. Porém, a utilização de probabilidades muito pequenas fornece resultados pouco precisos (MUHANNA et al, 1999).

No caso de matemática intervalar, um intervalo é utilizado para representar uma variável do problema. Assim, os resultados também são representados por dois números que representam o intervalo de valores possíveis para a saída, porém não fornece informações adicionais sobre o resultado no interior do intervalo (AYDEMIR e GUNAY, 2004).

Nos últimos anos, os números difusos (fuzzy numbers) têm sido utilizados na modelagem de incertezas de natureza não-estocásticas, ou seja, aquelas geradas por imprecisão (TAWAB e NOOR, 1999), tanto dos dados do material quanto do carregamento e da própria geometria do problema (MUHANNA e MULLEN, 1999). A teoria dos conjuntos difusos (fuzzy) e sua lógica oferecem, assim, uma nova abordagem na análise numérica de

equações diferenciais parciais, principalmente em aplicações reais de engenharia, quando não é possível determinar com precisão as características físicas do material considerado.

Como exemplo, as tensões residuais geradas no tratamento térmico de têmpera de peças de aço dependem fortemente dos vários tipos de transformações metalúrgicas que ocorrem no material durante o processo, que por sua vez, dependem e influenciam a distribuição de temperatura. Devido à falta de dados experimentais e à limitação da tecnologia, muitos dos parâmetros do material envolvidos no cálculo da distribuição de temperatura não podem ser determinados ou estimados com suficiente exatidão ou confiabilidade (TAWAB e NOOR, 1999). Assim, na análise e simulação numérica da têmpera de aços a inclusão de incertezas nos dados do material permite avaliar os efeitos da variação dos parâmetros do material sobre a distribuição de temperatura.

No desenvolvimento da presente dissertação de mestrado utilizou-se o método de elementos finitos para encontrar uma solução para um problema de calor, cujos parâmetros físicos do material são considerados como números difusos.

Resolve-se, então, numericamente o problema do calor estacionário e o problema do calor transiente e linear, considerando incerteza não-estocástica nas propriedades termo-físicas do material (condutividade térmica  $k$ , capacidade térmica  $c$  e coeficiente de transferência de calor  $h$ , considerados constantes). Não será considerada a dependência dos parâmetros do material em relação à fração transformada e à temperatura.

Pelo fato de se considerar tais incertezas, pode-se esperar que este estudo venha contribuir com resultados numéricos confiáveis e conclusão sobre o melhor modo de abordar incerteza difusa dos parâmetros do material considerando o problema estudado.

A partir desta iniciativa, ou seja, com a conclusão da resolução do problema térmico, pretende-se que este estudo seja utilizado em pesquisas posteriores visando o cálculo das tensões residuais geradas em processos de têmpera de aços.

# Capítulo 1

## Equação do calor com transformação micro-estrutural

Neste capítulo desenvolve-se um estudo sobre a formulação numérica do problema estudado. Primeiramente, na seção 1.1, apresenta-se a equação parabólica considerada, caracterizada pelo problema do calor transiente e linear. Em seguida, na seção 1.2, vê-se uma explicação resumida sobre como se dá a transformação micro-estrutural em processos de têmperas de aços, com uma maior aten o   transforma o martensítica. Na se o 1.3, são estudadas as formula es forte e fraca, as condi es para existência e unicidade de soluço para alguns tipos de condi es de fronteira e sua influência na obten o do sistema linear. Na se o 1.4 apresenta-se a formula o de Galerkin e por fim, na se o 1.5,   feita uma demonstra o de como chegar a formula o matricial a ser implementada utilizando-se do Método de Elementos Finitos.

### 1.1 Equa o do Calor

Considera-se a gera o de calor devido a transforma es da micro-estrutura e obt m-se a equa o do calor dada por:

$$\rho c \dot{\theta} + L_M \xi_M + \operatorname{div} \vec{q} = 0, \quad (1.1)$$

com as propriedades térmicas satisfazendo   regra da mistura dos gases, ou seja,

$$c = \xi_A c_A + \xi_M c_m$$

$$k = \xi_A k_A + \xi_M k_m$$

onde  $\rho$  representa a densidade do material,  $k_A$  e  $k_M$  as condutividades térmicas e  $c_A$  e  $c_M$  as capacidades térmicas dos constituintes austenita e martensita,  $L_M$  o calor latente da transformação martensítica,  $\xi_A$  e  $\xi_M$  as frações de austenita e martensita e  $\vec{q}$  o fluxo de calor dada pela Lei de Fourier  $\vec{q} = -k \vec{g}$ , onde  $\vec{g}$  é o gradiente de temperatura.

## 1.2 Transformação Martensítica

Nesta seção é apresentado um estudo sobre a transformação de austenita em martensita. Na subseção 1.2.1 é vista uma pequena abordagem sobre o estudo da estrutura cristalina da martensita. Posteriormente, na seção 1.2.2 é apresentado um estudo sobre a têmpera dos aços e por fim, na seção 1.2.3, é feito um estudo sobre o cálculo da fração de martensita transformada.

Quando uma peça de aço é aquecida por tempo suficiente até atingir uma determinada temperatura, sua micro-estrutura é alterada para uma forma estável, denominada austenita ou ferro- $\gamma$ , fornecendo à peça maleabilidade e ductilidade necessárias a processos de fabricação.

Um desses processos, a têmpera, consiste na redução, muitas vezes brusca, da temperatura da peça tendo como objetivo principal ocasionar a reação martensítica, ou seja, a transformação de austenita em martensita, esta última mais dura, resistente e não-dútil.

As ligas de ferro-níquel, em particular, são de alta temperabilidade, ou seja, a transformação austenita-martensita ocorre mesmo para taxas de resfriamento pequenas. Por isso, neste trabalho será considerado que este metal, ao ser tratado termicamente por têmpera, gera idealmente martensita.

### 1.2.1 A Estrutura Cristalina da Martensita

Em ligas de ferro-níquel, o reticulado martensítico é cúbico de corpo centrado (CCC), ao contrário da austenita, que é cúbica de face centrada (CFC). Esta transformação de CFC em CCC foi explicada em 1924 por E. C. Bain que sugeriu que um reticulado CCC poderia ser obtido de uma estrutura CFC por meio de uma compressão paralela ao eixo  $c$ , vertical, e de uma expansão

nos dois eixos  $a$ , no plano  $xy$ , da estrutura cristalina. A Figura 1.1 representa uma estrutura CFC, que pode ser considerada uma estrutura tetragonal de corpo centrado, que sofreria a distorção de Bain, convertendo-se em CCC.

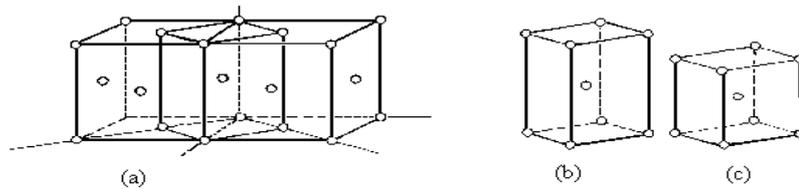


Figura 1.1: (a) célula tetragonal de corpo centrado na estrutura cúbica de face centrada, (b) tetragonal de corpo centrado e (c) cúbica de corpo centrado após distorção de Bain, liga ferro-níquel. (TEIXEIRA, 2002)

Porém, a natureza dos mecanismos atômicos que convertem uma estrutura cristalina em outra não é conhecida. Wechsler, Lieberman e Read mostraram que as características cristalográficas das transformações martensíticas podem ser explicadas em termos de três deformações básicas: uma distorção de Bain, uma deformação por cisalhamento e uma rotação do reticulado transformado (TEIXEIRA, 2002).

## 1.2.2 A Têmpera dos Aços

No tratamento térmico para formação da martensita, a têmpera, o metal é aquecido no campo austenítico e, a seguir, resfriado até a temperatura ambiente numa taxa alta o suficiente para evitar a formação de ferrita e cementita em altas temperaturas, taxa esta que depende do tipo de tratamento, tamanho e forma da amostra.

No caso dos aços-liga, como o aço 4340 abaixo, as reações bainítica e perlítica não se superpõem, e considera-se que a fração de austenita não transformada transforma-se em martensita quando resfriado até a temperatura ambiente. Na figura 1.2 vê-se as curvas de transformação isotérmica de um aço eutetóide e do aço 4340.

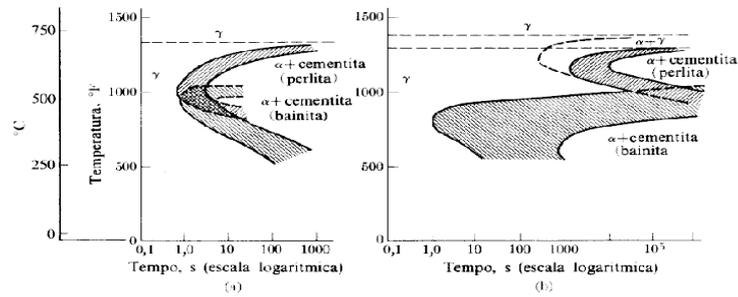


Figura 1.2: Curva de transformação isotérmica: (a) aço eutetóide, (b) aço 4340 (TEIXEIRA, 2002)

Na figura 1.3 vê-se um diagrama de resfriamento contínuo de um aço eutetóide, mostrando a taxa de resfriamento mínima (CRM) para a formação de 100% de martensita, com temperatura inicial de 740°C.

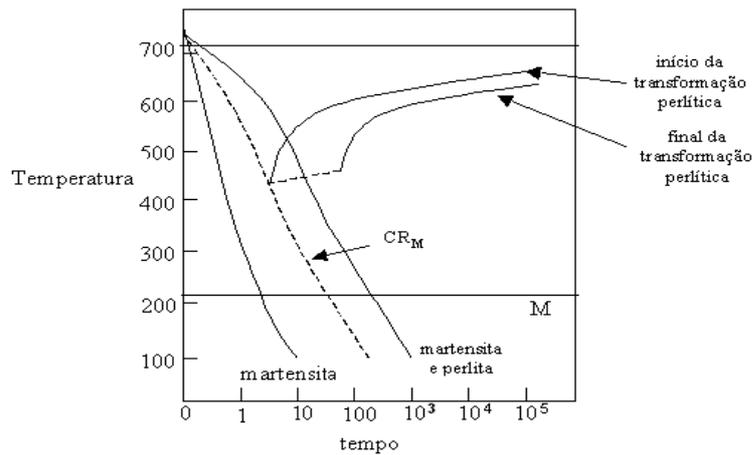


Figura 1.3: Curva CTT de um aço eutetóide (TEIXEIRA, 2002)

### 1.2.3 Cálculo da Fração Transformada

Como visto na seção 1.2.2, no decorrer da têmpera de uma peça de ferro-níquel uma estrutura de fase simples, a austenita, transforma-se idealmente em martensita. No caso de peças de aços ao carbono, a austenita transforma-se idealmente em perlita, bainita e martensita, dependendo do tempo de transformação da temperatura e da taxa de resfriamento.

As frações volumétricas das fases transformadas são determinadas pela expressão de Avrami (TEIXEIRA, 2002), assumindo-se válido o princípio da aditividade, dado genericamente por,

$$\xi = 1 - e^{-bt^n}$$

A fração volumétrica da martensita, cuja formação é adifusional, é dada pela equação empírica de Koistiner e Marburger (TEIXEIRA, 2002)

$$\xi_M(\theta) = 1 - e^{-0,011(M_s - \theta)}, \quad \theta < M_s$$

onde  $M_s$  é a temperatura de início da transformação martensítica. Além disso, o princípio da aditividade fornece a fração volumétrica da austenita retida.

## 1.3 Formulação Forte e Fraca do Problema

Nesta seção são apresentadas as formulações forte e fraca, assim como as demonstrações de existência e unicidade da solução do problema estudado.

### 1.3.1 Formulação Forte

(I) Dadas as funções  $f : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \Gamma_g \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  e o fluxo  $h$  dado por  $h : \Gamma_h \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ , deseja-se encontrar uma solução  $\theta$  dada por  $\theta : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo a seguinte equação

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_{i,i} + \rho c \theta_{,t} = f, & \text{em } \Omega \times ]0, T[, \\ \theta = g, & \text{em } \Gamma_g \times ]0, T[, \\ -q_i n_i = h, & \text{em } \Gamma_h \times ]0, T[, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), & \forall x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.2)$$

onde  $q$  dado pela lei de Fourier,  $q_i = -K_{ij}\theta_{,j}$ , sendo  $K_{ij} = K_{ij}(x)$  o tensor de condutividade térmica do material.

### 1.3.2 Formulação Fraca

(II) Sejam  $H = \{\theta \in H^1(\Omega); \theta(x, t) = g(x, t) \text{ em } \Gamma_g\}$  como o espaço das soluções aproximadas e  $V = \{w \in H^1(\Omega); w = 0 \text{ em } \Gamma_g\}$  como o espaço das funções testes. A formulação fraca do problema é descrita da seguinte forma:

Dados  $f : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \Gamma_g \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \Gamma_h \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ , encontrar  $\theta(x, t) \in H$  tal que

$$-\int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega + \int_{\Omega} w \rho c \theta_{,t} d\Omega = \int_{\Omega} w f d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma, \quad \forall w \in V$$

O teorema seguinte estabelece uma relação entre as duas formulações.

**Theorem 1 (Equivalência de Solução):** *Suponhamos que as funções sejam suficientemente regulares. Então os problemas (I) e (II) são equivalentes.*

Demonstração:

(I)  $\Rightarrow$  (II): Seja  $\theta \in H$  a solução do problema (I) e considere  $w \in V$ . Multiplicando a primeira equação de (I) por  $w$ , integrando em  $\Omega$  e usando o **teorema da divergência**,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \left( -K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} w \left( -K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) n_i d\Gamma \\ \int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial x_i} q_i d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} q_i d\Omega + \int_{\Gamma} w q_i n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde é usado que  $q_i = -K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$ , assim, pode-se concluir que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + \int_{\Omega} w \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} w f d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma$$

onde é usado que  $q_i n_i = \left( -K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) n_i = h(x)$  em  $\Gamma_h$ , que  $w = 0$  em  $\Gamma_g$  e que  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \theta_{,t}$ . Portanto,  $\theta$  é solução do problema (II).

(II)  $\Rightarrow$  (I): Seja  $\theta \in H$  a solução do problema (I) e considere  $w \in V$ . Do problema (II) temos

$$0 = \int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega - \int_{\Omega} w \rho c \theta_{,t} d\Omega + \int_{\Omega} w f d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma$$

Usando (1.3) no primeiro termo, obtem-se

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} q_i d\Omega = \Gamma \int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial x_i} q_i d\Omega + \int_{\Gamma} w q_i n_i d\Gamma$$

Logo,

$$0 = \Gamma \int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial x_i} q_i d\Omega + \int_{\Gamma} w q_i n_i d\Gamma - \Gamma \int_{\Omega} w \rho c \theta_{,t} d\Omega + \int_{\Omega} w f d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma$$

assim, podemos escrever que

$$0 = \int_{\Omega} w \left( \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) \rho c \theta_{,t} + f \right) d\Omega + \int_{\Gamma_h} w (q_i n_i + h) d\Gamma$$

Definindo:

$$\alpha = \Gamma \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \rho c \theta_{,t} + f = \Gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \rho c \theta_{,t} + f \quad \text{em } \Omega,$$

$$\beta = q_i n_i + h \quad \text{em } \Gamma_h.$$

Assim,  $w \in K$  é solução do problema se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ . De fato, seja  $w = \alpha \phi$ , onde

- i)  $\phi > 0$  em  $\Omega$ ,
- ii)  $\phi = 0$  em  $\Gamma$ ,
- iii)  $\phi$  é suficientemente regular.

Nestas condições  $w \in V = \{ w(x) : w \in H^1, w = 0 \text{ em } \Gamma_g \}$ . Além disso,

$$0 = \int_{\Omega} w \alpha d\Omega + \int_{\Gamma_h} w \beta d\Gamma = \int_{\Omega} \phi \alpha^2 d\Omega$$

Desde que  $\phi > 0$  em  $\Omega$ , então  $\alpha = 0$  em  $\Omega$ . Por outro lado, tomando em particular,  $w = \beta \varphi$ , onde

- i)  $\varphi > 0$  em  $\Omega$ ,
- ii)  $\varphi = 0$  em  $\Gamma$ ,
- iii)  $\varphi$  é suficientemente suave.

Nestas condições  $w \in V = \{ w(x) : w \in H^1, w = 0 \text{ em } \Gamma_g \}$ . Desde que  $\alpha = 0$ ,

$$0 = \int_{\Gamma_h} w \beta \, d\Gamma = \int_{\Gamma_h} \varphi \beta^2 \, d\Gamma$$

Logo, necessariamente,  $\beta = 0$  em  $\Gamma_h$ . Como  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + \rho c \theta_{,t} &= f \quad \text{em } \Omega, \\ - \left( -K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) n_i &= h \quad \text{em } \Gamma_h. \end{aligned}$$

Portanto  $w$  é solução do problema (I). Conclui-se, então a equivalência de solução entre os problemas (I) e (II), se a solução é suficientemente regular.

### 1.3.3 Existência e Unicidade de Solução

Mostra-se a existência e a unicidade da solução fraca do problema(II), quando os dados iniciais  $f$ ,  $h$  e  $g$  são regulares. Considere

$$a(w, \theta) = \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \, d\Omega, \quad (1.4)$$

$$(w, \rho c \theta_{,t}) = \int_{\Omega} w \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \, d\Omega, \quad (1.5)$$

$$(w, f) = \int_{\Omega} w f \, d\Omega \quad (1.6)$$

e

$$(w, h)_{\Gamma} = \int_{\Gamma_h} w h \, d\Gamma \quad (1.7)$$

Dessa forma, a formulação fraca pode ser escrita por

$$a(w, \theta) + (w, \rho c \theta_t) = (w, f) + (w, h)_\Gamma. \quad (1.8)$$

Por hipótese, a matriz de condutividade  $K_{ij}$  é simétrica e definida positiva.

Considere a norma do subespaço  $V$  de  $H^1(\Omega)$  dada por

$$\|w\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla w|^2 d\Omega.$$

Pode-se mostrar que no subespaço  $V$ , as normas  $\|\cdot\|_V$  e  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  são equivalentes. A seguir, mostra-se que a forma bilinear  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as condições de Lax-Milgram:

i)  $a(w, \theta) = a(\theta, w)$  pois  $K_{ij}$  é simétrica.

ii)  $|a(w, \theta)| = |(w, \theta)_V| \leq C\|w\|_V\|\theta\|_V$ .

Assim,  $\frac{|a(w, \theta)|}{\|\theta\|} \leq C\|w\|_V \Rightarrow a(\cdot, \cdot)$  é contínua em  $V$ .

iii)  $|a(w, w)| = \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \geq C \int_\Omega \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 = C\|w\|_V^2$ ,

pois, por hipótese,  $K_{ij}$  é definida positiva.

Assim,  $a(\cdot, \cdot)$  é coerciva em  $V$ . Por outro lado, a aplicação linear

$$w \in V \mapsto (w, f) + (w, h)_\Gamma \in \mathbb{R}$$

é contínua para  $h \in H^1(\Omega)$  e  $f \in L^2(\Omega)$ .

De fato, do Teorema do Traço, temos que o traço de  $h$ , que pode ser escrito por  $(\gamma \circ h) \in L^2(\Gamma)$ , satisfaz

$$\begin{aligned} \int_\Omega w f d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma &\leq \|w\|_{L^2(\Gamma)} \|f\|_{L^2(\Gamma)} + \|\gamma \circ w\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma \circ h\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|w\|_{H^1(\Omega)} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma \circ h\|_{L^2(\Gamma)}) \leq C\|w\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear, contínua e coerciva no espaço de  $H^1(\Omega)$  e  $f$  é uma função contínua, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única solução  $w \in V$ , quando  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $h \in H^1(\Omega)$  e  $g \in L^2(\Omega)$ .

## 1.4 Formulação de Galerkin

Sejam  $H^h \subset H$  e  $V^h \subset V$  subespaços de dimensão finita dos espaços de Hilbert  $H$  e  $V$ . Considere os elementos  $\theta^h \in H^h$  satisfazendo a condição

$$\theta^h = v^h + g^h, \quad (1.9)$$

onde  $v^h \in V^h$  e  $g^h$  é uma função que satisfaz a condição de fronteira de  $\theta$ , ou seja,

$$g^h(x) = g(x), \quad \forall x \in \Gamma_g.$$

Nestas condições, temos

$$\theta^h(x) = v^h(x) + g^h(x) = g(x), \quad \forall x \in \Gamma_g.$$

A formulação variacional é dada por

$$a(w, \theta) + (w, \rho c \theta_{,t}) = (w, f) + (w, h)_{\Gamma}, \quad \forall w \in V. \quad (1.10)$$

As funções  $v^h \in V^h$  são em geral, funções lineares por partes. Assim, para domínios em geral, a fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  pode não coincidir com a fronteira aproximada  $\Gamma_h$ . Restringindo a formulação (1.10) aos subespaços  $V^h$  e  $H^h$ , temos

$$\begin{aligned} a(w^h, \theta^h) + (w^h, \rho c \theta_{,t}^h) &= (w^h, f) + (w^h, h)_{\Gamma}, \\ (w^h, \rho c \theta(x, 0)) &= (w^h, \rho c \theta_0), \quad \forall w^h \in V^h. \end{aligned}$$

Por (1.9) e  $\forall w^h \in V^h$ ,

$$a(w^h, v^h) + (w^h, \rho c v_{,t}^h) = (w^h, f) + (w^h, h)_{\Gamma} - (w^h, \rho c g_{,t}^h) - a(w^h, g^h). \quad (1.11)$$

Pode-se então formular o problema descrito na subseção 1.5.2.

## 1.5 O Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos consiste em dividir um domínio  $\Omega$  em várias partes menores  $\Omega_e$ , chamadas de elementos finitos, de maneira que se possa analisar cada elemento deste domínio e a partir disto pode-se fazer uma análise completa do domínio como um todo.

### 1.5.1 Discretização do Domínio

Considere uma partição do domínio  $\Omega$  em subregiões  $\Omega_e$ , de tal forma a satisfazer as seguintes condições:

$$\Omega = \left( \bigcup_{e=1}^{Nel} \overline{\Omega_e} \right)^o \quad e \quad \Omega_e \cap \Omega_k = \emptyset, \quad se \quad e \neq k,$$

onde  $Nel$  é o número total de elementos. Na partição do domínio são definidos os nós globais  $A$ ,  $A = 1, 2, \dots, Nno$ , onde  $Nno$  é o número total de nós da malha.

As subregiões neste caso bidimensional, são retângulos, consistindo em 4 nós locais para cada elemento finito  $\Omega_e$ .

#### Construção da malha

Para a geração da malha considera-se no domínio  $\Omega$  um retângulo da forma  $(a, b) \times (c, d)$ . Os elementos finitos  $\Omega_e$  que serão representados por  $e$ , também serão retângulos. Para obter os elementos retangulares basta subdividir os intervalos  $[a, b]$  e  $[c, d]$  e fazer o produto cartesiano. A geração da malha é feita pelo programa Mtool, que é o programa que não só gera a malha de elementos finitos mas gera também todos os dados de entrada necessários.

A seguir, vê-se na figura 1.4, uma malha de elementos finitos retangulares com 9 elementos finitos e 16 nós globais.

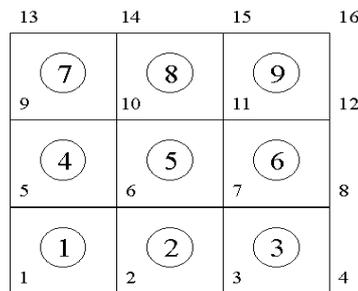


Figura 1.4: Malha de Elementos Finitos Retangulares.

Na malha da figura anterior pode-se observar que o número de elementos na direção  $x$  é 3 e será chamado de  $Nel_x$  e, analogamente, o número de

elementos na direção  $y$  de  $Nely$ . Portanto, na figura anterior temos:  $Nelx = 3$  e  $Nely = 3$ .

Gerada a malha de elementos finitos, torna-se necessário criar algumas subrotinas que possam identificar, calcular e armazenar alguns dados indispensáveis para a resolução do problema.

### Subrotinas do Programa:

- Nó Global  $\mapsto$  Posição: NoPos

Esta subrotina identifica a posição  $(i, j)$  do nó global  $A$ , obedecendo a enumeração sucessiva horizontal da seguinte forma:

$$(i, j) = \text{NoPos}(A),$$

onde

$$\begin{aligned} i &= \text{resto da divisão de } (A - 1) \text{ por } (Nelx + 1), \\ j &= \text{quociente da divisão de } (A - 1) \text{ por } (Nelx + 1), \end{aligned}$$

- Posição  $\mapsto$  Nó Global: PosNo

Esta faz o processo inverso da anterior, ou seja, dada a posição identifica-se o nó global  $A$ ,

$$A = \text{PosNo}(i, j),$$

através da relação:

$$A = j(Nelx + 1) + i + 1.$$

- Elemento  $\mapsto$  Posição: ElmPos

Para cada elemento  $e$ , temos 4 nós globais. Para identificá-lo é suficiente conhecer a posição apenas do menor nó global do elemento  $e$ , dado pela relação:

$$(i, j) = \text{ElmPos}(e),$$

onde

$$i = \text{resto da divis\~ao de } (e - 1) \text{ por Nelx,}$$

$$j = \text{quociente da divis\~ao de } (e - 1) \text{ por Nelx,}$$

- N3o Local  $\mapsto$  N3o Global: NoLG

A subrotina NoLG identifica os n3os locais  $a = 1, 2, 3, 4$  de cada elemento com os n3os globais  $A$  da malha,

$$A = \text{NoLG}(a, e)$$

da seguinte forma:

Dado um elemento  $e$ , o primeiro passo 3e identificar sua posi3ao atrav3es da subrotina anterior.

Sabemos que, na posi3ao  $(i, j)$  existe um n3o global  $A$  que representa o elemento  $e$ . O n3o global  $A$  ser3a ent3o o primeiro n3o local do elemento  $e$ . Assim,

$$a = 1 \Leftrightarrow (i, j),$$

$$a = 2 \Leftrightarrow (i + 1, j),$$

$$a = 3 \Leftrightarrow (i + 1, j + 1),$$

$$a = 4 \Leftrightarrow (i, j + 1),$$

e geometricamente, temos:

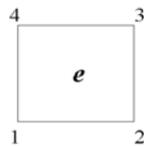


Figura 1.5: Disposi3ao dos n3os locais de um elemento  $e$ .

Com a posição identificada, o nó  $A$  pode ser encontrado pela função PosNo.

- Número de Equações do Sistema: EqNo

Alguns nós globais podem ter seus valores prescritos, ou seja, a solução  $\theta_A = \theta(A)$  pode ser conhecida devido às condições de fronteira. Assim, para estes nós não é necessário gerar equações no sistema. Dessa forma, a subrotina EqNo identifica o nó global  $A$  com a sua correspondente equação eqn[ $A$ ] no sistema e o número total de equações Neq do sistema. Assim, temos

$$I = \text{eqn}[A],$$

onde  $I = 1, \dots, \text{Neq}$ . Por convêniência, para os nós onde os valores são prescritos, tomamos  $I = 0$ . É claro que o número de equações é menor ou igual ao número de nós globais,  $\text{Neq} \leq \text{Nno}$ .

- Condições de Fronteira: CondFront

Para cada nó global  $A$ , são introduzidas as condições de fronteira do tipo Dirichlet e do tipo Neumann. Nas condições de fronteira do tipo Dirichlet a solução  $\theta_A = \theta(A)$  é prescrita no nó, enquanto que na fronteira de Neumann a derivada normal de  $\theta(x)$  no nó  $A$  é prescrita. Como vimos anteriormente, o número de equações do sistema linear depende do tipo de condição de fronteira, os nós globais da malha são classificados por tipo (typ) da seguinte forma:

$$\text{typ}[A] = \begin{cases} 0, & \text{nó } A \text{ não pertence à fronteira,} \\ 1, & \text{a solução } \theta(A) \text{ é prescrita,} \\ 2, & \text{a derivada da solução } \partial\theta/\partial x \text{ é prescrita,} \\ 3, & \text{a derivada da solução } \partial\theta/\partial y \text{ é prescrita.} \end{cases}$$

- Construção do Sistema Linear

A construção do sistema linear pode ser feita seguindo a formulação matricial descrita na seção seguinte.

## 1.5.2 Formulação Matricial

A partir da formulação de Galerkin, discretizando o domínio pelo método de elementos finitos descrito na seção anterior, pode-se então formular o seguinte problema:

### Problema Aproximado.

Dadas as funções  $f$ ,  $h$  e  $g$ , queremos determinar a função  $\theta^h = v^h + g^h \in H^h$  solução da formulação (1.11).

Seja  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  uma base do subespaço  $V^h$ . Dessa forma, todo elemento  $v^h \in V^h$  pode ser representado por

$$v^h = \sum_{j=1}^m C_j \varphi_j. \quad (1.12)$$

e como consequência disto, pode-se representar também

$$v_{,t}^h = \sum_{j=1}^m (C_{,t})_j \varphi_j.$$

e

$$g^h = \sum_{j=1}^m g(x_j, t) \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^m g_j(t) \varphi_j(x)$$

Para simplificação da escrita denota-se daqui por diante que  $(C_{,t})_j = \dot{C}_j$  e que  $(g_{,t}^h)_j = \dot{g}_j^h$ . Substituindo então em (1.11), tem-se

$$a(w^h, \sum_{j=1}^m C_j \varphi_j) + (w^h, \rho c \sum_{j=1}^m \dot{C}_j \varphi_j) = (w^h, f) + (w^h, h)_\Gamma - (w^h, \rho c \dot{g}^h) - a(w^h, g^h).$$

A igualdade permanece válida tomando em particular  $w^h = \varphi_i$ , ou seja,

$$a(\varphi_i, \sum_{j=1}^m C_j \varphi_j) + (\varphi_i, \rho c \sum_{j=1}^m \dot{C}_j \varphi_j) = (\varphi_i, f) + (\varphi_i, h)_\Gamma - (\varphi_i, \rho c \dot{g}^h) - a(\varphi_i, g^h).$$

Da linearidade da forma  $a(\cdot, \cdot)$ , segue que

$$\sum_{j=1}^m C_j a(\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{j=1}^m \dot{C}_j (\varphi_i, \rho c \varphi_j) = (\varphi_i, f) + (\varphi_i, h)_{\Gamma} - (\varphi_i, \rho c \dot{g}^h) - a(\varphi_i, g^h).$$

De modo análogo, tem-se

$$\sum_{j=1}^m C_j(0)(\varphi_i, \varphi_j) = (\varphi_i, \rho c \theta_0) - \sum_{j=1}^m (\varphi_i, \varphi_j g_j(0))$$

Denotando

$$K_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j), \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (1.13)$$

$$M_{ij} = (\varphi_i, \rho c \varphi_j), \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (1.14)$$

$$F_i = (\varphi_i, f) + (\varphi_i, h)_{\Gamma} - (\varphi_i, \rho c \dot{g}^h) - a(\varphi_i, g^h) \quad (1.15)$$

$$\theta_i(0) = (\varphi_i, \rho c \theta_0) - (\varphi_i, g_0^h) \quad (1.16)$$

a formulação (1.11) pode ser escrita na forma matricial seguinte (TEIXEIRA, 2002),

$$M \dot{\theta} + K\theta = F, \quad \forall t \in ]0, T[. \quad (1.17)$$

$$\theta(0) = \theta_0.$$

Porém para a resolução do problema em regime estacionário (LIU e RINCON, 2003), temos que

$$\dot{\theta} = 0$$

e, portanto, o problema matricial resume-se a:

$$K\theta = F, \quad (1.18)$$

onde,

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=1}^{Nel} A K^e, & K_{ij}^e &= a(\varphi_i, \varphi_j)_{\Omega^e} \\ M &= \sum_{n=1}^{Nel} A M^e, & M_{ij}^e &= (\varphi_i, \rho c \varphi_j)_{\Omega^e} \\ F &= \sum_{n=1}^{Nel} A F^e, & F_i^e &= (\varphi_i, f)_{\Omega^e} + (\varphi_i, h)_{\Gamma_h^e} - (\varphi_i, \rho c \dot{g}^h)_{\Omega^e} - a(\varphi_i, g^h)_{\Omega^e} \end{aligned}$$

$$\theta(0) = M^{-1} \underset{n=1}{\overset{N_{el}}{A}} \theta^e, \quad \theta_i^e = (\varphi_i, \rho c \theta_0)_{\Omega^e} - (\varphi_i, g_0^h)_{\Omega^e}$$

A solução do sistema linear de ordem  $m \times m$ , permitirá calcular a solução numérica  $\theta^h \in V^h$  do problema aproximado. Como  $\theta^h \in V^h$  é uma solução aproximada da solução  $\theta \in H$ , então se  $m$  é grande, melhor será a solução aproximada. Por outro lado, as matrizes  $K$  e  $M$  do sistema linear aumentam quadraticamente, o que significa custo operacional. Neste aspecto, é então introduzido o método de elementos finitos que, através de uma escolha conveniente da base  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  de  $V^h$ , tornará as matrizes  $K$  e  $M$  do sistema em matrizes de banda e em geral de fácil resolução (LIU e RINCON, 2003).

Para resolver o problema matricial (1.17) acima descrito, utilizou-se primeiramente o método trapezoidal generalizado para problemas lineares (HUGHES, 1987) estudado na seção 3.2 deste trabalho.

# Capítulo 2

## Números Difusos (Fuzzy Numbers)

Neste capítulo desenvolve-se um estudo sobre os números difusos e suas operações aritméticas básicas. Em primeiro lugar, na seção 2.1, é feito um estudo sobre o que vem a ser um número difuso e como pode-se representar tal número na forma de função e também como ficaria sua representação gráfica. Na seção 2.2, mostra-se como um número difuso pode representar incertezas não-estocásticas e os diferentes tipos de números com suas representações gráficas. Finalizando este capítulo, na seção 2.3, faz-se um estudo sobre a aritmética dos números difusos mostrando as duas formas existentes para operações aritméticas com tais números.

### 2.1 Número Difuso

Segundo Hanss e Willner (1999), basicamente, os números difusos (fuzzy) podem ser considerados como uma classe especial dos conjuntos difusos (fuzzy) que mostram algumas propriedades específicas. Os próprios conjuntos difusos (fuzzy) resultam de uma generalização de conjuntos convencionais, permitindo que os elementos de um conjunto universo não somente pertençam ou não pertençam a um conjunto específico, mas também pertençam ao conjunto por um determinado grau. Assim, os conjuntos difusos (fuzzy) podem ser expressos pelos elementos  $x$  de um conjunto universo  $\Omega$  com um determinado grau de pertinência  $\mu(x) \in [0, 1]$ , que pode ser representado por uma função. Os elementos  $x$  que pertencem aos conjuntos convencionais possuem

grau de pertinência zero ou um, ou seja,  $\mu(x) \in \{0, 1\}$ .

Com base nisto, intervalos fechados

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad (2.1)$$

e números reais

$$c = \{x \mid x = c\} \quad (2.2)$$

podem ser considerados como subconjuntos convencionais do conjunto universo  $\mathbb{R}$  e podem também ser expressos por

$$\mu_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{senão} \end{cases} \quad (2.3)$$

cujas funções de pertinência  $\mu(x) \in \{0, 1\}$  podem ser representadas graficamente como mostra a figura 2.1 a seguir.

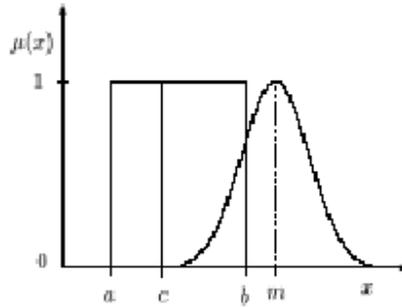


Figura 2.1: Intervalo fechado  $[a, b]$ , número real (crisp)  $c$  e um número fuzzy da forma gaussiana com valor médio  $m$  expresso por sua função de pertinência.

Um número fuzzy é definido como um conjunto fuzzy convexo sobre o conjunto universo  $\mathbb{R}$  por meio de uma função de pertinência  $\mu(x) \in [0, 1]$ , onde  $\mu(x) = 1$  é verdadeiro somente para um único valor  $x = m \in \mathbb{R}$ . Como exemplo, os números fuzzy simétricos da forma gaussiana são definidos pela função de pertinência

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.4)$$

onde  $m$  e  $\sigma$  denotam, respectivamente, o valor médio e a amplitude da distribuição gaussiana (figura 2.1).

## 2.2 Incerteza Difusa

Existem diferentes tipos de abordagens para as funções de pertinência, sendo mais usadas as funções trapezoidais, gaussianas e triangulares.

Uma função trapezoidal de pertinência é definida por quatro parâmetros  $\{a, b, c, d\}$  da seguinte forma:

$$\text{trapezoidal}(x : a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ (x-a)/(b-a), & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x < c \\ (d-x)/(d-c), & \text{se } c \leq x < d \\ 0, & \text{se } x \geq d \end{cases} \quad (2.5)$$

O aspecto da função é determinado pela escolha dos parâmetros  $a, b, c$  e  $d$ . A figura 2.2 seguinte ilustra um exemplo de uma função trapezoidal de pertinência dada por  $\text{trapezoidal}(x : 20, 40, 60, 80)$ .

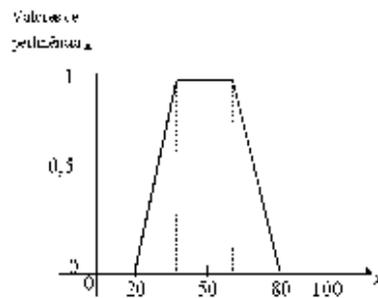


Figura 2.2: Número difuso representado por sua função trapezoidal de pertinência.

Uma função de pertinência gaussiana é definida por dois parâmetros da seguinte forma:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

onde  $m$  e  $\sigma$  denotam o centro e a amplitude da função respectivamente. Pode-se controlar o aspecto da função ajustando o parâmetro  $\sigma$ . Um pequeno  $\sigma$  gera uma função de pertinência com uma pequena amplitude, enquanto que um grande  $\sigma$  nos conduz a uma função de pertinência com uma amplitude maior.

A figura 2.3 seguinte ilustra um exemplo de uma função gaussiana de pertinência dada por  $gaussiana(x : 50, 20)$ .

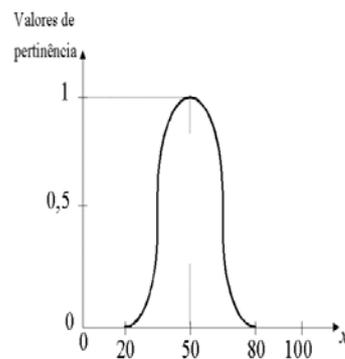


Figura 2.3: Número difuso representado por sua função gaussiana de pertinência.

Os números fuzzy triangulares são os mais comumente utilizados em diversos problemas de engenharia por ter suas funções de pertinência definidas por funções lineares, o que facilita a aritmética de tais números.

Uma função triangular de pertinência é definida por três parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  da seguinte forma:

$$triangular(x : a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ (x-a)/(b-a), & \text{se } a \leq x \leq b \\ (c-x)/(c-b), & \text{se } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{se } x > c \end{cases} \quad (2.6)$$

O aspecto da função é determinado pela escolha dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ . A figura 2.4 seguinte ilustra um exemplo de uma função triangular de

pertinência dada por  $triangular(x : 20, 50, 80)$ .

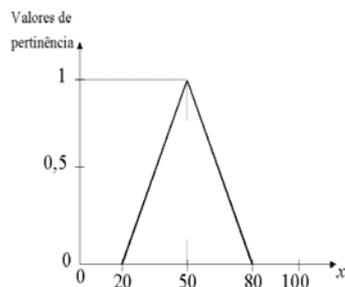


Figura 2.4: Número difuso representado por sua função triangular de pertinência.

Alguns trabalhos, como Muhanna e Mullen (1999), uma vez tendo definida a função de pertinência para um dado do problema, modelam o número fuzzy em termos de intervalos de confiança  $A_\alpha$  definido por um parâmetro  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . O número difuso é então definido pelo intervalo de confiança dado por  $A_\alpha = \{x/\mu(x) \geq \alpha\}$ . Desse modo a aritmética fuzzy restringe-se a operações com intervalos. Uma abordagem bastante atual para tais números é a dos números fuzzy discretos, obtidos a partir de uma discretização de um número fuzzy na sua representação gaussiana. Segundo Hanss e Willner (1999), a função de pertinência é discretizada subdividindo a abscissa ou a ordenada em intervalos de comprimento iguais. A figura 2.5 a seguir mostra uma discretização de um número fuzzy.

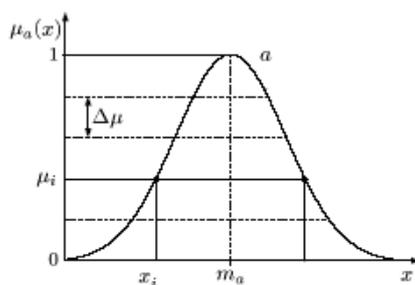


Figura 2.5: Discretização de um número difuso na forma gaussiana.

Na representação acima,  $a$  é um número fuzzy gaussiano e  $\mu_a(x)$  é a função de pertinência. A sequência dos pontos formam o número fuzzy discreto e

$\Delta\mu = 1/n$  é o comprimento das subdivisões feitas na ordenada, considerando  $n$  o número de divisões.

Como visto acima, há diversas possibilidades de abordagem da incerteza em resolução numérica de equações diferenciais parciais. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho foi escolhida a forma triangular, pois possui funções lineares de pertinência, forma esta que fornece melhores resultados para a equação considerada.

## 2.3 Aritmética Fuzzy

Para definir operações aritméticas com os números fuzzy, dois conceitos podem ser aplicados. Por um lado, o princípio da extensão de Zadeh de acordo com Eq. (2.8) pode ser aplicado, estendendo assim, para os operandos fuzzy a avaliação de funções aritméticas reais. Por outro lado, os números fuzzy podem se decompor em conjuntos de intervalos para graus diferentes de pertinência, através de uma técnica chamada de técnica dos alfa-cortes. Dessa forma, a aritmética para números fuzzy pode ser reduzida à aritmética de intervalos. Como citado acima, para que se possa definir operações aritméticas com os números fuzzy, dois conceitos podem ser aplicados:

### 2.3.1 Princípio da Extensão

O princípio da extensão de Zadeh, de acordo com Eq. (2.8), pode ser aplicado, o que permite a avaliação de funções reais com variáveis fuzzy. Explicitamente, se  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  forem números fuzzy definidos pelas funções de pertinência  $\mu_{\bar{a}}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $\mu_{\bar{b}}(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , o resultado da operação binária

$$\bar{c} = f(\bar{a}, \bar{b}) \quad (2.7)$$

para uma função arbitrária  $f$  é determinado por:

$$\mu_{\bar{c}}(z) = \sup \min\{\mu_{\bar{a}}(x), \mu_{\bar{b}}(y)\} \quad (2.8)$$

Como exemplo, considerando  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  dois números fuzzy definidos por

$$\bar{a} = \{0.3/1; 0.6/2; 1/3; 0,7/4; 0,2/5\}$$

$$\bar{b} = \{0.5/10; 1/11; 0,5/12\}$$

sua soma é determinada do seguinte modo:

$$\bar{c} = f(\bar{a} + \bar{b}) = \{0.3/11; \sup(0.5/12; 0.3/12); \sup(0.5/13; 0.3/13; 0.6/13); \\ \sup(0.5/14; 1/14); \sup(0.2/15; 0.7/15; 0.5/15) \sup(0.2/16; 0.5/16); 0.2/17\}$$

Observa-se que foram somados cada um dos números (representados depois das barras) de  $\bar{b}$  com todos os números de  $\bar{a}$ , tomando o mínimo entre suas possibilidades (representados antes das barras). Deve-se tomar o supremo (máximo) das possibilidades (representados antes das barras), como definido na equação(2.8) acima. Assim tem-se

$$\bar{c} = f(\bar{a} + \bar{b}) = \{0.3/11; 0.5/12; 0.6/13; 1/14; 0.7/15; 0.5/16; 0.2/17\}$$

### 2.3.2 Representação de Número Fuzzy por Intervalos (Técnica dos Alfa-cortes)

Os números fuzzy podem ser representados por meio de intervalos, denominados intervalos de confiança. Assim, a aritmética para esse tipo de número fuzzy pode ser reduzida à aritmética de intervalos, que é utilizada neste trabalho. Sabemos que um número difuso pode ser representado de diversas formas, como visto na seção 2.2. Entre outras, destacamos as seguintes formas: forma gaussiana, forma trapezoidal e forma triangular. Neste trabalho, utilizaram-se números difusos na forma triangular, pois suas funções de pertinência são lineares e isto torna mais fácil a implementação computacional. Tomando um número difuso na forma triangular dada na Figura 2.6, este fica definido por meio de três parâmetros, como visto anteriormente, ou seja,

$$\mu_{\bar{a}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 20 \\ (x-20)/30, & \text{se } 20 \leq x \leq 50 \\ (80-x)/30, & \text{se } 50 < x \leq 80 \\ 0, & \text{se } x > 80 \end{cases} \quad (2.9)$$

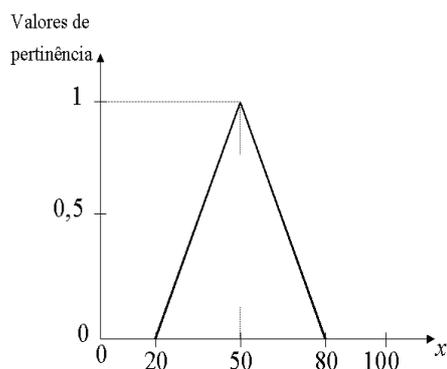


Figura 2.6: Número difuso  $\bar{a}$  representado por sua função triangular de pertinência.

Um alfa-corte é um intervalo fechado definido por dois valores obtidos para  $x$  quando se faz  $\mu_a(x) = \alpha$ , e serve para definir o intervalo de confiança quando se faz  $\alpha$  igual a um determinado valor pertencente ao intervalo  $[0, 1]$ . Utilizando a técnica dos alfa-cortes obtêm-se os intervalos de confiança, como mostrado na figura a seguir. Vê-se seis alfa-cortes, correspondentes aos graus de pertinência 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 e 1, definindo, assim, seis intervalos de confiança, vistos na figura 2.7.

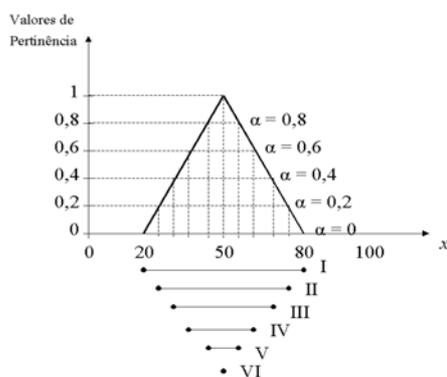


Figura 2.7: Número difuso  $\bar{a}$  com seis alfa-cortes e os seis intervalos, de I a VI, representados abaixo do gráfico.

No exemplo acima utilizou-se seis alfa-cortes, o que faz com que a aritmética fuzzy fique resumida a aritmética destes seis intervalos criados, como apresentado a seguir.

### 2.3.3 Aritmética intervalar

Considerando  $*$  como sendo uma das quatro operações aritméticas básicas, então:  $[a, b] * [c, d] = \{x * y \mid a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$  (MUHANNA e MULLEN, 1999). No caso da divisão, esta não está definida quando  $0 \in [c, d]$ . Dessa forma pode-se dizer que as operações aritméticas para intervalos fechados são:

- $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
- $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$
- $[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] =$
- $[a, b] / [c, d] = [a, b] \cdot [1/c, 1/d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$   
com  $0 \notin [c, d]$

Os exemplos a seguir ilustram essas definições:

- $[3, 5] + [1, 7] = [3 + 1, 5 + 7] = [4, 12]$
- $[3, 5] - [1, 7] = [3 - 7, 5 - 1] = [-4, 4]$
- $[3, 5] \cdot [1, 7] = [\min(3 \cdot 1, 3 \cdot 7, 5 \cdot 1, 5 \cdot 7), \max(3 \cdot 1, 3 \cdot 7, 5 \cdot 1, 5 \cdot 7)] = [3, 35]$
- $[4, 6] / [1, 2] = [\min(4/1, 4/2, 6/1, 6/2), \max(4/1, 4/2, 6/1, 6/2)] = [2, 6]$

### 2.3.4 Aritmética Fuzzy

Considere A e B números difusos com um certo número de alfa-cortes. Considere ainda que  $A_\alpha$  e  $B_\alpha$  são os intervalos gerados nos números difusos A e B por um dos alfa-cortes, com  $\alpha \in [0, 1]$ . Dessa forma, podemos definir a aritmética fuzzy da seguinte forma:

- $(A * B)_\alpha = A_\alpha * B_\alpha = \{x * y \mid (x, y) \in A_\alpha \times B_\alpha\}$ , com  $\alpha \in [0, 1]$

Ou seja:

- $A * B = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} (A * B)_\alpha$

Para que sejam efetuadas tais operações é necessário que A e B tenham funções contínuas de pertinência e, quando o operador \* é igual divisão devemos ter  $0 \notin B_\alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$ .

Assim temos definida a aritmética fuzzy por meio das quatro operações definidas para a aritmética de intervalos. A seguir, têm-se alguns exemplos que podem ilustrar a referida aritmética:

Considere os números difusos seguintes:

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1 \\ (x+1)/(2), & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ (3-x)/(2), & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 0, & \text{se } x > 3 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$B(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ (x-1)/(2), & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ (3-x)/(2), & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0, & \text{se } x > 5 \end{cases} \quad (2.11)$$

A e B podem ser representados graficamente por:

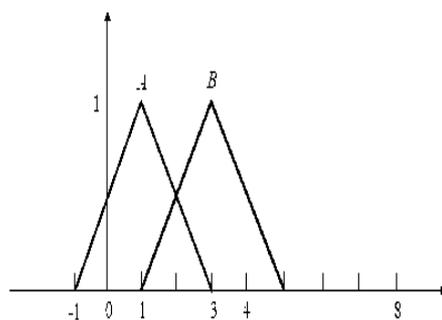


Figura 2.8: Números difusos A e B.

Sendo assim, seus alfa-cortes possuem os seguintes aspectos gerais:

$$A_\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha] \text{ e } B_\alpha = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$$

Desta forma, a aritmética fuzzy dos números fuzzy A e B resume-se a aritmética dos intervalos  $A_\alpha$  e  $B_\alpha$  acima, obtidos com a técnica dos alfa-cortes. Portanto:

$$A_\alpha + B_\alpha = (A + B)_\alpha$$

Utilizando a aritmética de intervalos definida anteriormente, tem-se:

$$A_\alpha + B_\alpha = [2\alpha - 1 + 2\alpha + 1, 3 - 2\alpha + 5 - 2\alpha] \rightarrow A_\alpha + B_\alpha = [4\alpha, 8 - 4\alpha]$$

Desta forma, tem-se que:

$$(A + B)(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ (x)/(4), \text{ se } 0 \leq x \leq 4 \\ (8-x)/(4), \text{ se } 4 < x \leq 8 \\ 0, \text{ se } x > 8 \end{cases} \quad (2.12)$$

Para a subtração de números difusos o procedimento é análogo ao descrito acima, porém observando as regras para subtração da aritmética intervalar vistas na seção 2.3.3. Ao contrário da soma e da subtração, o produto e a divisão não resultam necessariamente em números fuzzy triangulares, como pode ser visto nas figuras a seguir.

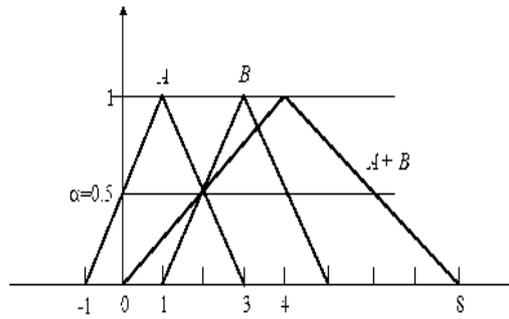


Figura 2.9: Números difusos A e B, juntamente com o número difuso soma  $A + B$ .

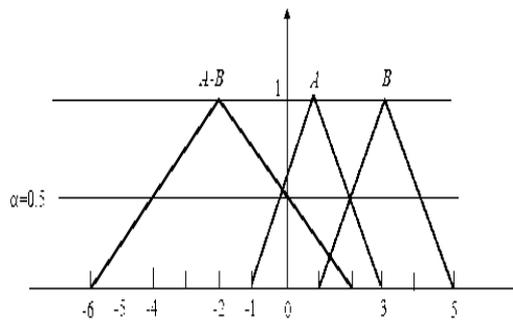


Figura 2.10: Números difusos A e B, juntamente com o número difuso subtração  $A - B$ .

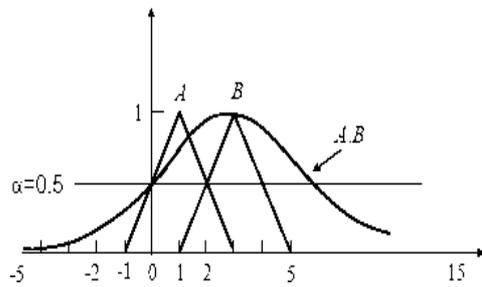


Figura 2.11: Números difusos A e B, juntamente com o número difuso multiplicação  $A \cdot B$ .

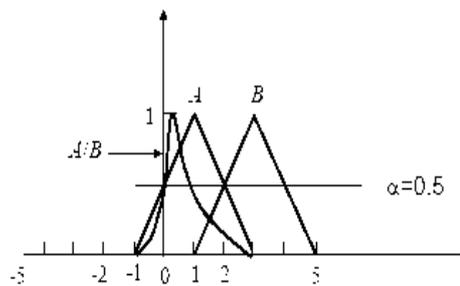


Figura 2.12: Números difusos A e B, juntamente com o número difuso divisão  $A/B$ .

# Capítulo 3

## Implementação Computacional

Neste capítulo será descrito, na seção 3.1, como é o aspecto geral do algoritmo que resolve cada uma das etapas do problema estudado. Posteriormente vê-se, na seção 3.2, uma explicação do método trapezoidal generalizado, que é usado para resolução do problema transiente, assim como a sua estabilidade.

### 3.1 Algoritmos

O programa computacional que resolve o problema dado é composto por um programa principal chamado `calor_fuzzy.cpp`, que contém o corpo principal do programa, e alguns outros programas secundários que contém funções que são chamadas pelo programa principal no decurso da resolução do problema. São eles: `Arquivo de dados.cpp`, `Abre arquivo de dados.cpp`, `Grid.cpp`, `Typedef.cpp`, `Fluxo.cpp` e por último, `Solver.cpp`. Nas subseções seguintes apresenta-se o algoritmo principal do programa que resolve o problema estudado.

#### 3.1.1 Arquivo de dados.cpp

Este arquivo contém todos os dados de entrada necessários para resolução do problema. Segue um exemplo de como é o corpo deste arquivo que é gerado por um outro programa chamado `Mtool` desenvolvido na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. A seguir pode-se observar um destes arquivos de entrada gerado pelo `Mtool`:

```
%HEADER
File created by mtool program

%HEADER.ANALYSIS
%'axisymmetric ter'

%HEADER.ANALYSIS
'temperature2d'

%HEADER.ANALYSIS.MAXIMUM.ITERATIONS
50

%HEADER.ANALYSIS.TOLERANCE
0.1

%NODE
33

%NODE.COORD
33

1  0.0000000  0.0000000  0.0000000
2  0.0025000  0.0000000  0.0000000
3  0.0050000  0.0000000  0.0000000
4  0.0075000  0.0000000  0.0000000
5  0.0100000  0.0000000  0.0000000
6  0.0125000  0.0000000  0.0000000
7  0.0150000  0.0000000  0.0000000
8  0.0175000  0.0000000  0.0000000
9  0.0200000  0.0000000  0.0000000
10 0.0225000  0.0000000  0.0000000
11 0.0250000  0.0000000  0.0000000

12 0.0000000  0.0025000  0.0000000
13 0.0025000  0.0025000  0.0000000
14 0.0050000  0.0025000  0.0000000
15 0.0075000  0.0025000  0.0000000
16 0.0100000  0.0025000  0.0000000
```

17 0.01250000 0.00250000 0.000000  
18 0.01500000 0.00250000 0.000000  
19 0.01750000 0.00250000 0.000000  
20 0.02000000 0.00250000 0.000000  
21 0.02250000 0.00250000 0.000000  
22 0.02500000 0.00500000 0.000000

23 0.00000000 0.00500000 0.000000  
24 0.00250000 0.00500000 0.000000  
25 0.00500000 0.00500000 0.000000  
26 0.00750000 0.00500000 0.000000  
27 0.01000000 0.00500000 0.000000  
28 0.01250000 0.00500000 0.000000  
29 0.01500000 0.00500000 0.000000  
30 0.01750000 0.00500000 0.000000  
31 0.02000000 0.00500000 0.000000  
32 0.02250000 0.00500000 0.000000  
33 0.02500000 0.00500000 0.000000

%FEMOOP.TRANSIENT.PARAMETER  
0.5

%FEMOOP.TRANSIENT.INIT.VECTOR  
293.15

%FEMOOP.NUM.TIME.STEPS  
30

%FEMOOP.TIME.STEP  
10

%FEMOOP.PRINT.STEPS  
1

%MATERIAL  
1

%MATERIAL.LABEL

1  
1 'qwe'

%MATERIAL.ISOTROPIC

1  
1 1000 0.3

%MATERIAL.PROPERTY.THERMAL.CONDUCTIVITY

1  
1 35.0

%MATERIAL.PROPERTY.SPECIFIC.HEAT

1  
1 460.0

%MATERIAL.PROPERTY.DENSITY

1  
1 8618.0

%MATERIAL.PROPERTY.SOURCE.TEMPERATURE

1  
1 8122.0

%MATERIAL.MARTENSITE.START.TEMPERATURE

1  
1 500

%THICKNESS

1  
1 1.0

%INTEGRATION.ORDER

1  
1 3 2 1 2 2 1

%ELEMENT

20

%ELEMENT.Q4

20

1 1 2 13 12  
2 2 3 14 13  
3 3 4 15 14  
4 4 5 16 15  
5 5 6 17 16  
6 6 7 18 17  
7 7 8 19 18  
8 8 9 20 19  
9 9 10 21 20  
10 10 11 22 21  
11 12 13 24 23  
12 13 14 25 24  
13 14 15 26 25  
14 15 16 27 26  
15 16 17 28 27  
16 17 18 29 28  
17 18 19 30 29  
18 19 20 31 30  
19 20 21 32 31  
20 21 22 33 32

%LOAD

1

1 'Load Case 1'

%LOAD.CASE

1

```

%LOAD.CASE.NODAL.TEMPERATURE
3
11 293.15
22 293.15
33 293.15

%LOAD.CASE.LINE.HEAT.CONVECTION.UNIFORM
2
10 11 22 25000 293.15
20 22 33 25000 293.15

```

Neste exemplo tem-se uma malha de elementos finitos retangulares de 20 elementos e 33 nós com suas coordenadas. Em seguida tem-se dados como: o parâmetro do método trapezoidal generalizado, a temperatura inicial nos nós, o número de passos de tempo, o passo de tempo, o passo de tempo que será impresso, o número de materiais considerados na análise, a condutividade térmica, o calor específico, a densidade e a geração interna de calor do material. Tem-se ainda, na sequência, a temperatura de início da transformação de austenita em martensita, os nós associados a cada elemento da malha e, por fim, as condições de contorno como temperatura prescrita e fluxo de calor.

### 3.1.2 O algoritmo do programa principal

O algoritmo que resolve o problema consiste nos seguintes passos:

1. Abre arquivo de dados:

Esta rotina consiste em abrir um arquivo cujo nome é Arquivo de dados.cpp e armazenar as informações como a malha de elementos finitos com as coordenadas de cada um dos nós, os valores relativos às condições de fronteira, os parâmetros do material, a temperatura inicial dos nós da malha e assim por diante, cada uma em sua respectiva variável.

2. A montagem das matrizes globais é feita por três funções: MontaK, MontaM e MontaF.

- (a) MontaK:

A rotina MontaK consiste em;

Para  $e = 1, \dots, Nel$ .

i. LocalK(e).

A rotina LocalK(e), por sua vez, calcula a matriz local  $K_{ab}^e$  através da seguinte formulação;

Para  $a = 1, \dots, 4$ .

Para  $b = 1, \dots, 4$ .

$$K_{ab}^e = \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi_a)^T k (\nabla \varphi_b) d\Omega \quad (3.1)$$

onde  $\varphi_a$  e  $\varphi_b$  são funções de interpolação locais (RINCON e LIU, 2003).

ii. MontaH(e,  $K_{ab}^e$ ).

A rotina MontaH(e,  $K_{ab}^e$ ), por sua vez, verifica se o elemento e em questão possui convexão (fluxo de calor) em alguma das suas arestas. Se possuir, inclui tal convexão na matriz local do elemento e da seguinte forma;

- Identifica a aresta com convexão.
- Calcula o determinante do Jacobiano de 1 dimensão através da seguinte fórmula:

$$Det J = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2} \quad (3.2)$$

onde  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são, respectivamente, as coordenadas do 1º e do 2º nós da aresta em questão.

- Calcula  $(\varphi_a)_{1d}$  e  $(\varphi_b)_{1d}$ , funções de interpolação de 1 dimensão para o primeiro ponto de Gauss.
- Calcula PHW através da seguinte fórmula:

$$PHW = (\varphi_a)_{1d} \cdot Det J \cdot \text{peso de Gauss} \cdot h_t \cdot (\varphi_b)_{1d}$$

onde  $h_t$  é o coeficiente de transferência de calor do material considerado.

- Calcula a nova matriz local  $K_{ab}^e$  da seguinte forma:

$$K_{ab}^e = K_{ab}^e + PHW \quad (3.3)$$

- Calcula  $(\varphi_a)_{1d}$  e  $(\varphi_b)_{1d}$ , funções de interpolação de 1 dimensão para o segundo ponto de Gauss.
- Calcula um novo PHW através da seguinte fórmula:

$$PHW = (\varphi_a)_{1d} \cdot Det J \cdot \text{peso de Gauss} \cdot h_t \cdot (\varphi_b)_{1d}$$

onde  $h_t$  é o coeficiente de transferência de calor do material considerado.

- Calcula a nova matriz local  $K_{ab}^e$  da seguinte forma:

$$K_{ab}^e = K_{ab}^e + PHW \quad (3.4)$$

Montadas todas as matrizes locais  $K_{ab}^e$  pode-se montar, agora a matriz global  $K$  através da formulação matricial abaixo (ver seção 1.5.2):

$$K = \sum_{n=1}^{Nel} A K_{ab}^e$$

(b) MontaM:

A rotina MontaM consiste em;

Para  $e = 1, \dots, Nel$ .

i. LocalM(e).

A rotina LocalM(e), por sua vez, calcula a matriz local  $M_{ab}^e$  através da seguinte formulação;

Para  $a = 1, \dots, 4$ .

Para  $b = 1, \dots, 4$ .

$$M_{ab}^e = c \rho \int_{\Omega_e} \varphi_a \varphi_b d\Omega \quad (3.5)$$

onde  $\varphi_a$  e  $\varphi_b$  são funções de interpolação locais (RINCON e LIU, 2003).

Montadas todas as matrizes locais  $M_{ab}^e$  pode-se montar, agora a matriz global  $M$  através da formulação matricial abaixo (ver seção 1.5.2):

$$M = \underset{n=1}{\overset{Nel}{A}} M_{ab}^e$$

(c) MontaF.

A rotina MontaF consiste em;

Para  $e = 1, \dots, Nel$ .

i. LocalF(e).

A rotina LocalF(e), por sua vez, calcula a matriz local  $K_{ab}^e$  através da seguinte formulação;

Para  $a = 1, \dots, 4$ .

$$F_a^e = f_a^e + h_a^e - g_{,t_a}^e - g_a^e \quad (3.6)$$

onde  $f_a^e$ ,  $h_a^e$ ,  $g_{,t_a}^e$  e  $g_a^e$  podem ser calculados da seguinte forma:

$$f_a^e = \sum_{b=1}^4 f_b^e \int_{\Omega_e} \varphi_a \varphi_b d\Omega_e, \quad (3.7)$$

$$h_a^e = \sum_{b=1}^4 \int_{\Gamma_h} \varphi_a \varphi_b h_b^e d\Gamma_e, \quad (3.8)$$

$$g_{,t_a}^e = c \rho \sum_{b=1}^4 \int_{\Omega_e} \varphi_a \varphi_b g_{,t_b}^e d\Omega_e \quad (3.9)$$

e

$$g_a^e = \sum_{b=1}^4 K_{ab}^e g_b^e \quad (3.10)$$

ii. MontaH(e,  $F_a^e$ ).

A rotina MontaH(e,  $F_a^e$ ), por sua vez, verifica se o elemento e em questão possui convexão(fluxo de calor) em alguma das suas arestas. Se possuir, inclui tal convexão no vetor local do elemento e da seguinte forma;

- Identifica a aresta com convexão.

- Calcula o determinante do Jacobiano de 1 dimensão através da seguinte fórmula:

$$Det J = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{2} \quad (3.11)$$

onde  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são, respectivamente, as coordenadas do 1º e do 2º nós da aresta em questão.

- Calcula  $(\varphi_a)_{1d}$  e  $(\varphi_b)_{1d}$ , funções de interpolação de 1 dimensão para o primeiro ponto de Gauss.
- Calcula PHW através da seguinte fórmula:

$$PHW = (\varphi_a)_{1d} \cdot Det J \cdot \text{peso de Gauss} \cdot h_t \cdot T_\infty \cdot (\varphi_b)_{1d}$$

onde  $h_t$  é o coeficiente de transferência de calor do material considerado.

- Calcula a novo vetor local  $F_a^e$  da seguinte forma:

$$F_{ab}^e = F_a^e + PHW \quad (3.12)$$

- Calcula  $(\varphi_a)_{1d}$  e  $(\varphi_b)_{1d}$ , funções de interpolação de 1 dimensão para o segundo ponto de Gauss.
- Calcula um novo PHW através da seguinte fórmula:

$$PHW = (\varphi_a)_{1d} \cdot Det J \cdot \text{peso de Gauss} \cdot h_t \cdot T_\infty \cdot (\varphi_b)_{1d}$$

onde  $h_t$  é o coeficiente de transferência de calor do material considerado.

- Calcula o novo vetor local  $F_a^e$  da seguinte forma:

$$F_a^e = F_a^e + PHW \quad (3.13)$$

Montados todos os vetores locais  $F_a^e$  pode-se montar, agora o vetor global  $F$  através da formulação matricial abaixo (ver seção 1.5.2):

$$F = \sum_{n=1}^{Nel} F_a^e$$

3. Se o problema é estacionário, então resolve-se o seguinte sistema linear através da decomposição LU.

$$K \theta = F$$

4. Se o problema é transiente então resolve-se o problema seguinte através do método trapezoidal generalizado cujo algoritmo é descrito na seção seguinte.

$$M \dot{\theta} + K\theta = F$$

## 3.2 Método Trapezoidal Generalizado

### 3.2.1 Algoritmo

Com o objetivo de alcançar estabilidade com uma convergência quadrática foi implementado o algoritmo do método trapezoidal generalizado proposto por Hughes (1977), devidamente adaptado para o problema térmico com mudança de fase, que consiste em encontrar  $\theta_n$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} M\dot{\theta}_{n+1} + K\theta_{n+1} = F_{n+1} \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\theta}(t) dt = \theta_n + \Delta t \dot{\theta}_\alpha \\ \dot{\theta}_\alpha = (1 - \alpha)\dot{\theta}_n + \alpha\dot{\theta}_{n+1} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

onde  $\dot{\theta}_n$  e  $\theta_n$  são as aproximações de  $\theta'(t_n)$  e  $\theta(t_n)$  respectivamente e o vetor  $F_{n+1} = F(t_{n+1})$ ,  $\Delta t$  é o incremento do tempo e  $\alpha \in [0, 1]$  é um parâmetro.

O problema computacional é para determinar  $\theta_{n+1}$  e  $\dot{\theta}_{n+1}$  a partir dos valores conhecidos do tempo anterior  $\theta_n$  e  $\dot{\theta}_n$ .

Inicializando então o algoritmo temos que no tempo  $t = 0$ , a temperatura inicial  $\theta_0$  é conhecida e, dessa forma,  $\dot{\theta}_0 = \theta'(0)$  pode ser determinado fazendo  $t = t_0 = 0$  na equação discreta (3.14)<sub>1</sub>, obtendo-se:

$$M \dot{\theta}_0 = F_0 - K \theta_0.$$

Resolvendo o sistema linear, determina-se  $\dot{\theta}_0 = \theta'(0)$ .

Para  $n = 0, 1, \dots, (N - 1)$  o procedimento para determinar a solução aproximada é dividido nas seguintes etapas:

(i) Definimos um preditor para  $\theta_{n+1}$  na forma:

$$\tilde{\theta}_{n+1} = \theta_n + (1 - \alpha) \Delta t \dot{\theta}_n$$

(ii) De (3.14)<sub>2</sub> e (3.14)<sub>3</sub> tem-se que:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t \dot{\theta}_\alpha = \theta_n + \Delta t (\alpha \dot{\theta}_{n+1} + (1 - \alpha) \dot{\theta}_n) = \tilde{\theta}_{n+1} + \alpha \Delta t \dot{\theta}_{n+1}$$

(iii) Substituindo (ii) em (3.14)<sub>1</sub>, temos:

$$(M + \alpha \Delta t K) \dot{\theta}_{n+1} = F_{n+1} - K \tilde{\theta}_{n+1}$$

Resolvendo o sistema linear obtém-se  $\dot{\theta}_{n+1}$ . Com  $\dot{\theta}_{n+1}$  calculado os valores de  $\theta_{n+1}$  são então calculados por (3.14)<sub>3</sub> e (3.14)<sub>2</sub>. E assim sucessivamente para  $n = 0, 1, \dots, (N - 1)$ .

### 3.2.2 Estabilidade

Faremos alguns comentários sobre a estabilidade da família de métodos, sem no entanto demonstrá-los. Os detalhes das demonstrações podem ser encontradas em Hughes (1987).

(i) Se  $\alpha \geq 1/2$ , então o método trapezoidal generalizado é incondicionalmente estável, ou seja, não existe qualquer restrição ao passo de tempo  $\Delta t$ .

(ii) Se  $\alpha < 1/2$ , então o método trapezoidal generalizado é condicionalmente estável, ou seja, o passo de tempo  $\Delta t$  deve satisfazer a seguinte condição:

$$\Delta t < \frac{2}{(1 - 2\alpha)\lambda_n}$$

onde  $\lambda$  é o maior autovalor da matriz dos coeficientes.

Em particular, para a equação do calor, o passo  $\Delta t$  deve satisfazer a condição de que  $\Delta t < ch^2$ , onde  $c$  é uma constante e  $h$  é o passo no espaço. Note que essa condição é bastante restritiva, pois  $\Delta t$  é muito pequeno para valores de  $h \ll 1$ .

Dessa forma podemos concluir que o Método de Euler ( $\alpha = 0$ ) é condicionalmente estável e o Método de Crank-Nicolson ( $\alpha = 1/2$ ) é incondicionalmente estável.

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos Crisp

Nesta seção serão apresentados alguns resultados numéricos crisp, ou seja, apresenta-se aqui, os resultados de alguns exemplos ainda sem considerar incerteza nos parâmetros do material. O motivo da apresentação destes resultados se dá por dois motivos principais. Em primeiro lugar, ter uma base para uma posterior comparação com os resultados fuzzy, que é a principal proposta deste trabalho. Em segundo lugar, para que seja feita uma comparação com os resultados encontrados na literatura para os mesmos exemplos, ou seja, para verificação da validade das respostas encontradas.

### 4.1 Análise Estacionária

Aqui vamos apresentar um exemplo de análise, por elementos finitos, de problemas de transmissão de calor em materiais isotrópicos.

#### 4.1.1 Exemplo com Temperatura Prescrita

- Exemplo 1:

Este exemplo trata do problema da transmissão de calor por condução em regime estacionário, com geração interna de calor. Considera-se um reator submerso cujo núcleo é constituído de um número de placas verticais de comprimento  $2L$ . Inicialmente o sistema possui temperatura uniforme  $T_\infty$ . Assume-se que a energia interna constante  $u'''$  é gerada uniformemente nestas placas. Considera-se uma temperatura constante e igual a  $293.15^\circ K$  na borda de contato da placa com o meio e  $h = 0$  nas demais bordas, ou seja,

temperatura prescrita na borda de contato com o meio e fluxo de calor igual a zero nas outras três bordas. A temperatura do fluido permanece constante e a espessura das placas é pequena quando comparada com as outras dimensões.

Assim, se os efeitos de borda são desprezados, a transferência de calor pode ser considerada unidimensional (TEIXEIRA, 2002).

Utilizando-se  $T_\infty = 293,15^\circ K$ ,  $L = 25,0mm$ ,  $u''' = 8122,0W/m^3$ ,  $c = 460,0J/Kg^\circ K$ ,  $\rho = 8618,0Kg/m^3$ ,  $K = 35,0W/m^\circ K$  como dados de entrada e uma malha de elementos finitos com 33 nós, 20 elementos isoparamétricos Q4 (Figura 4.1),

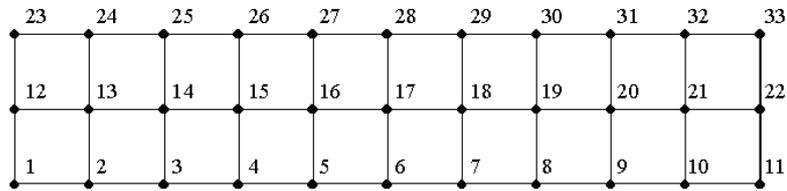


Figura 4.1: Malha de elementos finitos para o exemplo 1.

obtém-se as distribuições de temperatura mostradas na tabela 4.1.

Nó	Coord.(x, y)	Temperatura
1	(+0.00000, +0.00000)	+918.10706
2	(+0.00250, +0.00000)	+911.85748
3	(+0.00500, +0.00000)	+893.10883
4	(+0.00750, +0.00000)	+861.86090
5	(+0.01000, +0.00000)	+818.11389
6	(+0.01250, +0.00000)	+761.86798
7	(+0.01500, +0.00000)	+693.12262
8	(+0.01750, +0.00000)	+611.87823
9	(+0.02000, +0.00000)	+518.13477
10	(+0.02250, +0.00000)	+411.89197
11	(+0.02500, +0.00000)	+293.14999

12	(+0.00000, +0.00250)	+918.10706
13	(+0.00250, +0.00250)	+911.85754
14	(+0.00500, +0.00250)	+893.10876
15	(+0.00750, +0.00250)	+861.86096
16	(+0.01000, +0.00250)	+818.11401
17	(+0.01250, +0.00250)	+761.86792
18	(+0.01500, +0.00250)	+693.12268
19	(+0.01750, +0.00250)	+611.87836
20	(+0.02000, +0.00250)	+518.13477
21	(+0.02250, +0.00250)	+411.89200
22	(+0.02500, +0.00250)	+293.14999
23	(+0.00000, +0.00500)	+918.10724
24	(+0.00250, +0.00500)	+911.85754
25	(+0.00500, +0.00500)	+893.10895
26	(+0.00750, +0.00500)	+861.86115
27	(+0.01000, +0.00500)	+818.11414
28	(+0.01250, +0.00500)	+761.86804
29	(+0.01500, +0.00500)	+693.12268
30	(+0.01750, +0.00500)	+611.87842
31	(+0.02000, +0.00500)	+518.13483
32	(+0.02250, +0.00500)	+411.89209
33	(+0.02500, +0.00500)	+293.14999

Tabela 4.1: Temperaturas calculadas para cada nó da malha do exemplo 1.

- Exemplo 2:

Este exemplo trata do problema da transmissão de calor por condução em regime estacionário, sem geração interna de calor. Considera-se uma placa horizontal de altura  $L$  e comprimento  $5L$ . Inicialmente o sistema possui temperatura uniforme  $T_\infty$ . Considera-se uma temperatura constante e igual a  $100^\circ\text{K}$  na borda de contato da placa com o meio superior e de  $30^\circ\text{K}$  na borda de contato com o meio inferior. Considera-se ainda fluxo de calor  $h = 0$  nas bordas laterais. Assim, se os efeitos de borda são desprezados, a transferência de calor pode ser considerada unidimensional e na direção vertical.

Utilizando-se  $T_\infty = 50^\circ K$ ,  $L = 2,0m$ ,  $c = 0,46J/Kg^\circ K$ ,  $\rho = 1,0Kg/m^3$  e  $K = 35,0W/m^\circ K$  como dados de entrada e uma malha de elementos finitos com 105 nós, 80 elementos isoparamétricos Q4 (Figura 4.2),

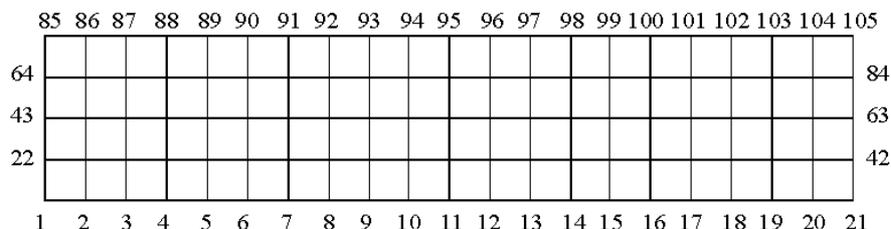


Figura 4.2: Malha de elementos finitos para o exemplo 2.

obtém-se as distribuições de temperatura mostradas na tabela 4.2 para os nós da borda direita.

Nó	Coord.(x, y)	Temperatura
105	(+10.00000, +2.00000)	+100.00000
84	(+10.00000, +1.50000)	+82.50000
63	(+10.00000, +1.00000)	+65.00000
42	(+10.00000, +0.50000)	+47.50000
21	(+10.00000, +0.00000)	+30.00000

Tabela 4.2: Temperaturas calculadas para cada nó da borda direita da malha do exemplo 2.

#### 4.1.2 Exemplo com Fluxo de Calor

- Exemplo 1:

Este exemplo trata do problema da transmissão de calor por condução em regime estacionário, com geração interna de calor. Considera-se um reator submerso cujo núcleo é constituído de um número de placas verticais de comprimento  $2L$ . Inicialmente o sistema possui temperatura uniforme  $T_\infty$ . Assume-se que a energia interna constante  $u'''$  é gerada uniformemente nestas placas. Considera-se um fluxo de calor na borda de contato da placa com o fluido, cujo coeficiente de transferência de calor  $h$ . Considera-se ainda

fluxo de calor  $h = 0$  nas demais bordas. A temperatura do fluido permanece constante e a espessura das placas é pequena quando comparada com as outras dimensões.

Assim, se os efeitos de borda são desprezados, a transferência de calor pode ser considerada unidimensional (TEIXEIRA, 2002).

Utilizando-se  $T_\infty = 293,15^\circ K$ ,  $L = 25,0mm$ ,  $u''' = 8122,0W/m^3$ ,  $h = 2500,0$ ,  $c = 460,0J/Kg^\circ K$ ,  $\rho = 8618,0Kg/m^3$  e  $K = 35,0W/m^\circ K$  como dados de entrada e uma malha de elementos finitos com 12 nós, 5 elementos isoparamétricos Q4 (Figura 4.3),

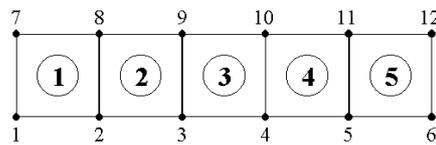


Figura 4.3: Malha de elementos finitos para o exemplo 1.

Nó	Coord.(x, y)	Temperatura
1	(+0.00000, +0.00000)	+988.11700
2	(+0.00500, +0.00000)	+963.11853
3	(+0.01000, +0.00000)	+888.12335
4	(+0.01500, +0.00000)	+763.13129
5	(+0.02000, +0.00000)	+588.14258
6	(+0.02500, +0.00000)	+363.15723
7	(+0.00000, +0.00500)	+988.11707
8	(+0.00500, +0.00500)	+963.11865
9	(+0.01000, +0.00500)	+888.12335
10	(+0.01500, +0.00500)	+693.12268
11	(+0.02000, +0.00500)	+588.14270
12	(+0.02500, +0.00500)	+363.15720

Tabela 4.3: Temperaturas calculadas para cada nó da malha do exemplo 1.

Para que os resultados encontrados para o problema acima pudessem ser aceitos, rodou-se o mesmo problema considerando o coeficiente de transferência de calor  $h$  como sendo um número muito grande e encontrou-se

resultados idênticos aos resultados encontrados quando considerou-se a temperatura prescrita. Ou seja, se o coeficiente de transferência de calor tende para infinito, então, a temperatura na borda de contato com o meio pode ser considerada prescrita e os resultados encontrados devem ser necessariamente iguais, o que foi comprovado neste trabalho para este exemplo.

## 4.2 Análise Transiente

Aqui são apresentados alguns exemplos de análise, por elementos finitos, de problemas de transmissão de calor em materiais isotrópicos, apresentando tal análise térmica em regime transiente, ou seja, é feita análise das temperaturas encontradas a cada passo de tempo, até atingir equilíbrio térmico.

### 4.2.1 Exemplo com Temperatura Prescrita

- Exemplo 1:

Este exemplo trata do problema da transmissão de calor por condução em regime transiente, com geração interna de calor. Considera-se um reator submerso cujo núcleo é constituído de um número de placas verticais de comprimento  $2L$ . Inicialmente o sistema possui temperatura uniforme  $T_\infty$ . Assume-se que a energia interna constante  $u'''$  é gerada uniformemente nestas placas. Considera-se uma temperatura constante e igual a  $293.15^\circ K$  na borda de contato da placa com o meio e  $h = 0$  nas demais bordas, ou seja, temperatura prescrita na borda de contato com o meio e fluxo de calor igual a zero nas outras três bordas. A temperatura do fluido permanece constante e a espessura das placas é pequena quando comparada com as outras dimensões.

Assim, se os efeitos de borda são desprezados, a transferência de calor pode ser assumida como unidimensional (TEIXEIRA, 2002).

A solução deste problema, assumindo-se um coeficiente de transferência de calor elevado ( $h \rightarrow \infty$ ), resulta na seguinte distribuição de calor (ARPACI, 1966):

$$\frac{\theta(x, t)}{u'''L^2/k} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n L^2} e^{-a\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x)$$

onde  $\theta = T - T_\alpha$ ,  $a = \frac{k}{\rho c}$ , com  $k$ ,  $\rho$  e  $c$  representando, respectivamente, a

condutividade térmica, a densidade e a capacidade térmica do meio e  $\lambda_n L$  é dado por  $\lambda_n L = (2n + 1)\pi/2, n = 0, 1, 2, \dots$ .

Utilizando-se, então,  $T_\infty = 293,15^\circ K, L = 25,0mm, u''' = 8122,0W/m^3, c = 460,0J/Kg^\circ K, \rho = 8618,0Kg/m^3$  e  $k = 35,0W/m^\circ K$  como dados de entrada e uma malha de elementos finitos com 33 nós, 20 elementos isoparamétricos Q4 (figura 4.4), obtém-se as distribuições de temperatura mostradas na figura 2, juntamente com a solução analítica correspondente para diferentes instantes.

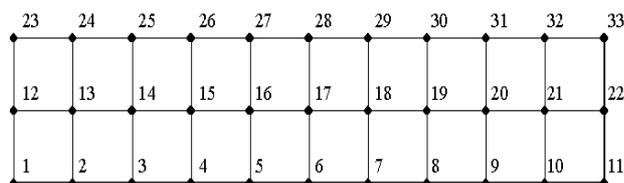


Figura 4.4: Malha de elementos finitos para o exemplo 1.

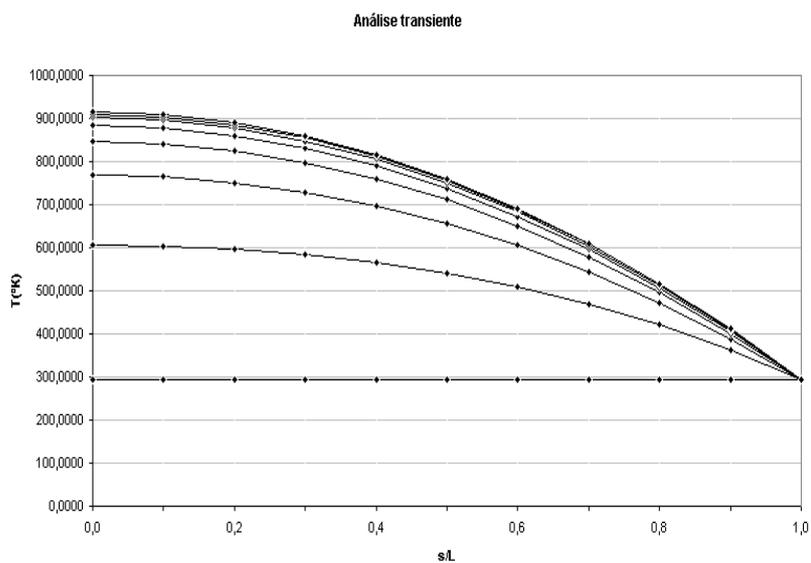


Figura 4.5: Solução numérica e analítica para os nós centrais, obtida neste trabalho.

Para esta análise utilizou-se a implementação da forma-V (HUGHES, 1987) do método trapezoidal generalizado, com parâmetro de colocação  $\alpha = 0,5$  como forma de garantir a estabilidade do algoritmo de integração no tempo. O incremento de tempo  $\Delta t = 1s$  foi escolhido de modo a atender aos requisitos de convergência do método. Para que se possa validar os resultados obtidos, foi introduzido, e mostrado na figura 3.5.3, o resultado obtido para o mesmo problema por Teixeira (2002).

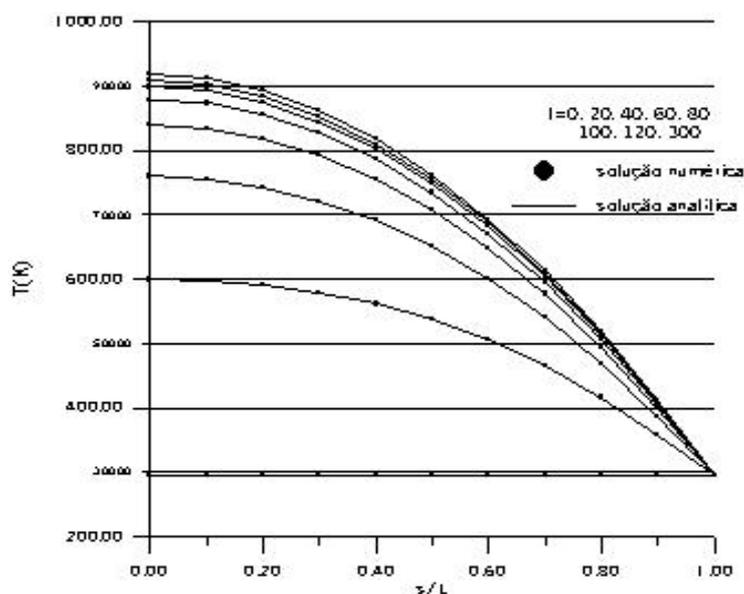


Figura 4.6: Solução numérica e analítica obtida por Teixeira (2002).

## 4.2.2 Exemplo com Fluxo de Calor

- Exemplo:

Este exemplo trata do problema da transmissão de calor por condução em regime transiente, com geração interna de calor. Considera-se um reator submerso cujo núcleo é constituído de um número de placas verticais de comprimento  $2L$ . Inicialmente o sistema possui temperatura uniforme  $T_\infty$ . Assume-se que a energia interna constante  $u'''$  é gerada uniformemente nestas placas. O coeficiente de transferência de calor entre as placas e o fluido é

dados por  $h$ . A temperatura do fluido permanece constante e a espessura das placas é pequena quando comparada com as outras dimensões.

Assim, se os efeitos de borda são desprezados, a transferência de calor pode ser assumida como unidimensional (TEIXEIRA, 2002).

Utilizando-se, então,  $T_{\infty} = 293,15^{\circ}K$ ,  $L = 25,0mm$ ,  $u''' = 8122,0W/m^3$ ,  $c = 460,0J/Kg^{\circ}K$ ,  $h = 2500,0$ ,  $\rho = 8618,0Kg/m^3$  e  $k = 35,0W/m^{\circ}K$  como dados de entrada e uma malha de elementos finitos com 12 nós, 5 elementos isoparamétricos Q4 (figura 4.7), obtém-se as distribuições de temperatura mostradas na figura 4.8.

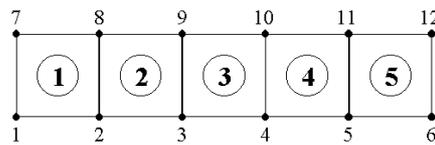


Figura 4.7: Malha de elementos finitos para o exemplo dado.

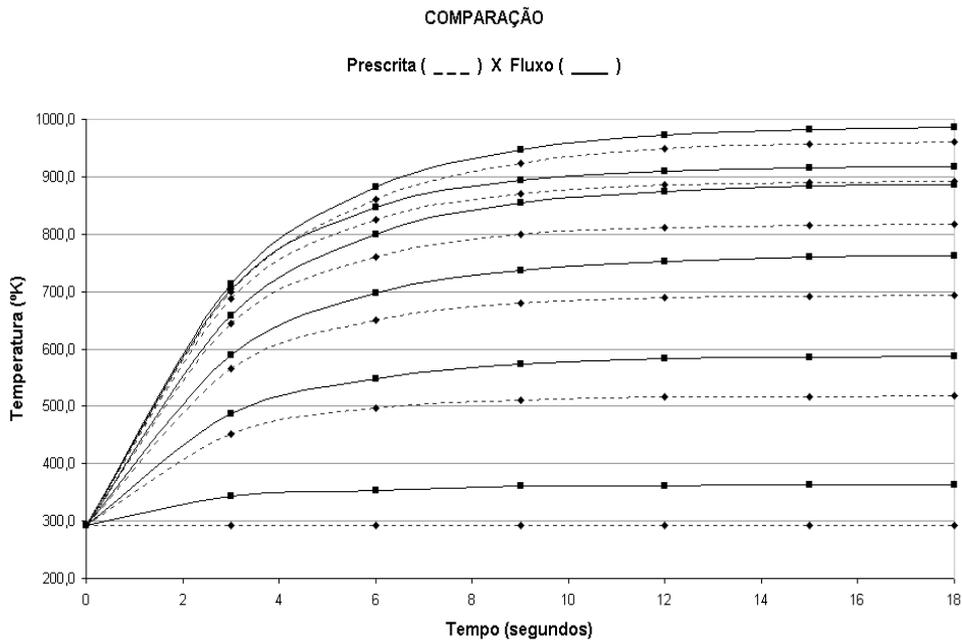


Figura 4.8: Solução numérica obtida neste trabalho para o problema do reator com fluxo de calor em comparação com a solução numérica obtida neste trabalho para o problema do reator com temperatura prescrita.

Para esta análise utilizou-se a implementação da forma-V (HUGHES, 1987) do método trapezoidal generalizado, com parâmetro de colocação  $\alpha = 0,5$  como forma de garantir a estabilidade do algoritmo de integração no tempo, como visto na subseção 3.2.2. O incremento de tempo  $\Delta t = 1s$  foi escolhido de modo a atender aos requisitos de convergência do método.

Para que os resultados encontrados para o problema acima pudessem ser aceitos, rodou-se o mesmo problema considerando o coeficiente de transferência de calor  $h$  como sendo um número muito grande e encontrou-se resultados idênticos aos resultados encontrados quando considerou-se a temperatura prescrita. Ou seja, se o coeficiente de transferência de calor tende para infinito, então, a temperatura na borda de contato com o meio pode ser considerada prescrita e os resultados encontrados devem ser necessariamente iguais, o que foi comprovado neste trabalho para este exemplo.

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos Fuzzy

Quando considera-se incerteza do tipo fuzzy nos parâmetros do material do problema estudado obtém-se resultados mais confiáveis, pois tem-se resultados representativos de toda a gama de resultados possíveis. Porém, utilizando-se da aritmética fuzzy normal, definida por Zadeh, ocorre uma propagação da incerteza, e além deste fato, é gerado, no decurso da resolução do problema, uma incerteza artificial, proveniente das operações aritméticas entre números difusos. Este fato, aumenta a incerteza de forma não muito agradável pois, dependendo do número de operações aritméticas com números difusos, os resultados tornam-se incompatíveis com aqueles que se quer obter de fato. Este problema se torna ainda mais grave quando resolve-se o problema em regime transiente, pois neste, o problema é resolvido inúmeras vezes, uma vez para cada passo de tempo, e a solução do passo de tempo atual depende da solução do passo de tempo anterior.

Com o intuito de reduzir esta incerteza artificial gerada no decurso da resolução do problema, quatro técnicas foram utilizadas. São elas:

### **i) Resultado Exato ou Combinatorial:**

Resolve-se o problema de forma a obter um resultado que será chamado de resultado exato, pois considera-se incerteza difusa do tipo triangular e a técnica dos alfa-cortes, que por sua vez discretiza tal número transformando-o em um certo número de intervalos reais  $[x_e, x_d]$ . O que este método propõe é que o problema seja resolvido  $2^N$  vezes para que se obtenha-se todas as combinações possíveis entre os extremos dos intervalos gerados pela técnica dos alfa-cortes nos  $N$  parâmetros difusos.

## ii) Aritmética Fuzzy:

Resolve-se o problema, já com a incerteza inserida nos parâmetros, utilizando-se da aritmética fuzzy, definida por Zadeh, vista na seção 2.3 e, neste caso, encontra-se um aumento da incerteza devido ao número de operações existentes entre números difusos.

## iii) Manipulação Algébrica do Sistema ou K Fora da Integral:

Resolve-se o problema retirando-se a constante K, condutividade térmica, da integral principal para que se possa evitar operações desnecessárias entre números difusos.

## iv) Pré-condicionamento do Sistema Linear:

Resolve-se o problema utilizando uma técnica chamada de pré-condicionamento, que consiste em resolver um sistema linear  $Ax = b$  pelo Método de Eliminação de Gauss pré-condicionando a matriz A.

Por fim, é feita uma comparação dos resultados obtidos para que se possa responder qual deve ser a técnica utilizada para resolver problemas com incerteza do tipo fuzzy inserida nos parâmetros do material de maneira que se obtenha os melhores resultados.

# 5.1 Análise Estacionária

Neste seção mostra-se a resolução e os resultados obtidos para o problema dado a partir de um exemplo, que é chamado de exemplo do reator.

## 5.1.1 Exemplo do Reator:

Este é um exemplo de análise, por elementos finitos, de um problema de transmissão de calor em materiais isotrópicos, apresentando tal análise térmica apenas para o problema estacionário, ou seja, analisam-se as temperaturas encontradas depois do equilíbrio térmico.

Este exemplo trata do problema da transmissão de calor por condução em regime estacionário, com geração interna de calor. Considera-se um reator submerso cujo núcleo é constituído de um número de placas verticais de

comprimento  $2L$ . Inicialmente o sistema possui temperatura uniforme  $T_\infty$ . Assume-se que a energia interna constante  $u'''$  é gerada uniformemente nestas placas. Considera-se uma temperatura constante e igual a  $293,15^\circ K$  na borda de contato da placa com o meio e  $h = 0$  nas demais bordas, ou seja, temperatura prescrita na borda de contato com o meio e fluxo de calor igual a zero nas outras três bordas. A temperatura do fluido permanece constante e a espessura das placas é pequena quando comparada com as outras dimensões.

Assim, se os efeitos de borda são desprezados, a transferência de calor pode ser considerada unidimensional (TEIXEIRA, 2002).

Utilizando-se  $T_\infty = 293,15^\circ K$ ,  $L = 25,0mm$ ,  $u''' = 8122,0W/m^3$ ,  $c = 460,0J/Kg^\circ K$ ,  $\rho = 8618,0Kg/m^3$  e  $K = 35,0W/m^\circ K$  como dados de entrada e uma malha de elementos finitos com 12 nós, 5 elementos isoparamétricos Q4 (Figura 5.1), resolve-se o problema nas subseções seguintes utilizando-se das técnicas citadas acima na seção 5.1.

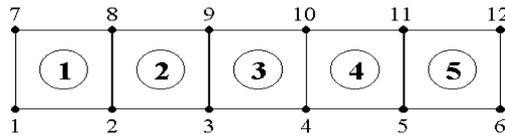


Figura 5.1: Malha de elementos finitos para o exemplo do reator.

Pode-se observar que neste exemplo todos os parâmetros do material são reais (crisp). Para que se tenha então ao menos um dos parâmetros fuzzy, foi incluída uma incerteza difusa na condutividade térmica  $K$ . Com isso,  $K$  deixa de ser o número real  $K = 35,0W/m^\circ K$  e torna-se o número difuso muito próximo de  $35,0W/m^\circ K$  dado pela função triangular de pertinência seguinte.

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 34,9965 \\ (x-34,9965)/(0,0035), & \text{ se } 34,9965 \leq x \leq 35 \\ (35,0035-x)/(0,0035), & \text{ se } 35 < x \leq 35,0035 \\ 0 & , \text{ se } x > 35,0035 \end{cases} \quad (5.1)$$

E representado graficamente pela figura 5.2.

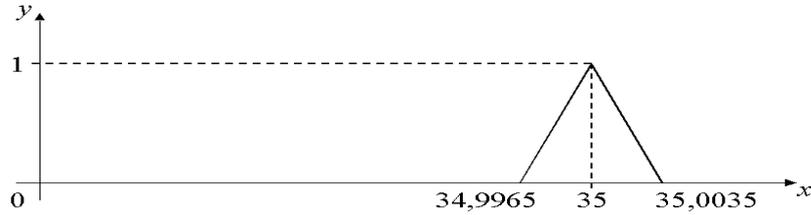


Figura 5.2: Condutividade térmica  $K$  representada por sua função triangular de pertinência.

Desta forma, pode-se se mostrar como a incerteza, incluída nos parâmetros do material, nos conduz a resultados mais confiáveis.

### 5.1.2 Resultado: Exato ou Combinatorial

Nesta subseção o problema do reator descrito na subseção 5.1.1 é resolvido utilizando-se de uma técnica que conduz a um resultado chamado de resultado exato (TAWAB e NOOR, 1999).

Como pôde ser visto na subseção 2.3.2, um número difuso pode ser discretizado, em intervalos reais, através da técnica dos alfa-cortes, onde cada alfa determina um intervalo  $[x_e, x_d]$  de pertinência  $\alpha$ , com  $\alpha \in [0, 1]$ . Sendo assim, esta técnica, que propõe o resultado exato, é descrita por Tawab e Noor em 1999 e consiste em rodar o programa  $2^N$  vezes para cada alfa-corte, onde  $N$  é o número de parâmetros considerados fuzzy no problema. Isto pode ser observado no exemplo abaixo.

Considere dois parâmetros fuzzy,  $x$  e  $y$ . Tem-se, então, para cada alfa-corte, dois intervalos, um para o primeiro parâmetro  $[x_e, x_d]$  e outro para o segundo  $[y_e, y_d]$ . Assim, para que se tenha todas as combinações possíveis entre os extremos destes intervalos, deve-se rodar o programa operando  $x_e$  com  $y_e$ ,  $x_e$  com  $y_d$ ,  $x_d$  com  $y_e$  e  $x_d$  com  $y_d$ . Ou seja,  $2^2 = 4$  vezes.

Com isso, o intervalo resultante  $[z_e, z_d]$  para este alfa-corte é dado por:

$$[z_e, z_d] = [\min \{ \text{todas as combinações} \}, \max \{ \text{todas as combinações} \}]$$

Desta forma, como o exemplo dado considera apenas um parâmetro fuzzy, deve-se resolver o problema rodando o programa  $2^1 = 2$  vezes para cada alfa-corte e como a incerteza é do tipo triangular, considera-se aqui, apenas dois

alfa-cortes: um para  $\alpha = 0.0$  e outro para  $\alpha = 1.0$ . Estes últimos, suficientes para determinar uma resposta fuzzy também do tipo triangular.

Utilizando os dados do exemplo do reator, descritos na subseção 5.1.1, a malha de elementos finitos da figura 5.1 e a técnica descrita acima, resolve-se o problema e obtém-se os resultados presentes na tabela 5.1:

Nó	Coordenada (x, y)	Temperatura $\alpha = 0.0$	Temperatura $\alpha = 1.0$	Temperatura $\alpha = 0.0$
1	(+0.00000, +0.00000)	+918.04761	+918.10944	+918.17072
2	(+0.00500, +0.00000)	+893.05176	+893.11102	+893.16980
3	(+0.01000, +0.00000)	+818.06396	+818.11591	+818.16736
4	(+0.01500, +0.00000)	+693.08441	+693.12396	+693.16321
5	(+0.02000, +0.00000)	+518.11316	+518.13531	+518.15741
6	(+0.02500, +0.00000)	+293.15000	+293.15000	+293.15000
7	(+0.01500, +0.00500)	+918.04767	+918.10950	+918.17065
8	(+0.00500, +0.00500)	+893.05170	+893.11108	+893.16992
9	(+0.01000, +0.00500)	+818.06403	+818.11597	+818.16736
10	(+0.01500, +0.00500)	+693.08447	+693.12402	+693.16309
11	(+0.02000, +0.00500)	+518.11310	+518.13538	+518.15735
12	(+0.02500, +0.00500)	+293.15000	+293.15000	+293.15000

Tabela 5.1: Temperaturas calculadas para cada nó da malha do exemplo do reator.

A figura 5.3 seguinte ilustra a temperatura fuzzy resultante do nó 1 da malha da figura 5.1, representada pelo número difuso na sua forma triangular.

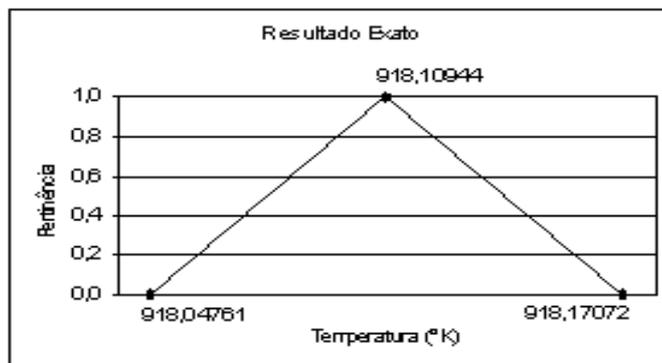


Figura 5.3: Temperatura difusa exata calculada para o nó 1 da malha.

Vantagens: Esta técnica fornece resultados bastante precisos e confiáveis, pois não utiliza da aritmética fuzzy, proposta por Zadeh em 1965, que por sua vez, gera uma incerteza artificial.

Desvantagens: O custo computacional é elevado, visto que deve-se resolver o problema  $2^N$  vezes para cada alfa-corte.

### 5.1.3 Resultado: Aritética Fuzzy

Resolver o problema descrito na subseção 5.1.1 utilizando a aritmética fuzzy vista na seção 2.3(ZADEH, 1965), consiste em resolver o problema considerando todos os números envolvidos no problema como sendo números difusos. Deve ser observado que, como todos os números envolvidos no problema são números difusos, todas as variáveis também serão difusas e, consequentemente, obteremos resultados também difusos, o que é a proposta deste trabalho.

Com isso, todos os números que são reais continuam sendo reais, porém são representados e armazenados como se fossem números difusos. A figura seguinte que apresenta dois números na forma difusa: um real e outro difuso.

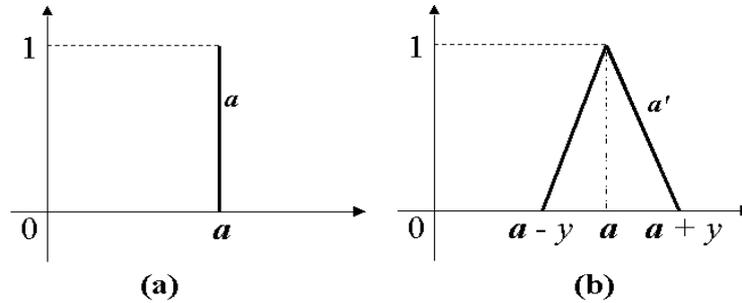


Figura 5.4: (a) Número real  $a$  representado na forma fuzzy. (b) Número difuso  $a'$ , próximo de  $a$ , representado na forma fuzzy.

Pode-se observar que quando um número real  $a$  é representado por um número difuso  $a$ , todos os alfa-cortes são intervalos que, na verdade não representam intervalos reais mas sim, números reais. Dessa forma, todo alfa-corte, para  $\alpha \in [0, 1]$ , é um intervalo, do tipo  $[a, a]$ , que representa o número real  $a$ . Ou seja, se, por um lado, um número difuso  $a'$  tem valores de pertinência variando de 0 a 1 para diferentes intervalos, desde  $[a - y, a + y]$ , de pertinência 0, até  $[a, a]$ , de pertinência 1, por outro lado, um número real  $a$  tem valores de pertinência também variando de 0 a 1, porém, para um único intervalo  $[a, a]$ , que representa na verdade o número real  $a$ .

Para operar aritméticamente com tais números no decurso da resolução do problema, deve-se usar a aritmética fuzzy. Estas operações aritméticas podem ser feitas utilizando o princípio da extensão, visto na subseção 2.3.1, ou utilizando a técnica dos alfa-cortes, que consiste em discretizar um número difuso em intervalos de pertinência variando de 0 a 1, como visto na seção 2.3.2. Utilizando-se desta última, a aritmética fuzzy resume-se a aritmética de intervalos, como visto nas subseções 2.3.3 e 2.3.4.

Utilizando os dados do exemplo do reator, descritos na subseção 5.1.1, a malha de elementos finitos da figura 5.1 e a técnica descrita acima, resolve-se o problema obtém-se os resultados constantes na tabela 5.2:

Nó	Coordenada (x, y)	Temperatura $\alpha = 0.0$	Temperatura $\alpha = 1.0$	Temperatura $\alpha = 0.0$
1	(+0.00000, +0.00000)	+910.08978	+918.10944	+926.25897
2	(+0.00500, +0.00000)	+885.45172	+893.11102	+900.89404
3	(+0.01000, +0.00000)	+811.51764	+818.11591	+824.81946
4	(+0.01500, +0.00000)	+688.22839	+693.12396	+698.09607
5	(+0.02000, +0.00000)	+515.48541	+518.13531	+520.82568
6	(+0.02500, +0.00000)	+293.15000	+293.15000	+293.15000
7	(+0.01500, +0.00500)	+910.08984	+918.10950	+926.25897
8	(+0.00500, +0.00500)	+885.45172	+893.11108	+900.89404
9	(+0.01000, +0.00500)	+811.51758	+818.11597	+824.81952
10	(+0.01500, +0.00500)	+688.22839	+693.12402	+698.09619
11	(+0.02000, +0.00500)	+515.48541	+518.13538	+520.82568
12	(+0.02500, +0.00500)	+293.15000	+293.15000	+293.15000

Tabela 5.2: Temperaturas calculadas para cada nó da malha do exemplo do reator.

A figura 5.5 abaixo ilustra a temperatura fuzzy resultante do nó 1 da malha da figura 5.1, representada pelo número difuso na sua forma triangular.

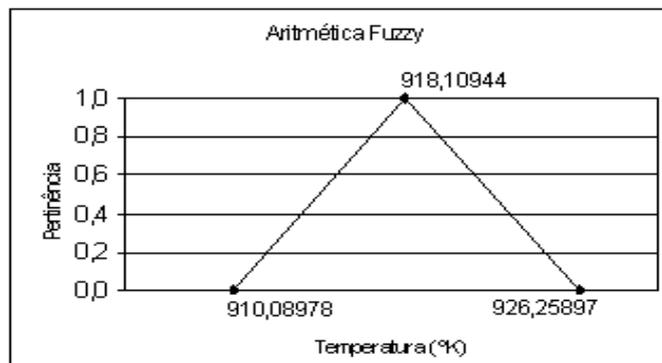


Figura 5.5: Temperatura difusa calculada pela técnica Aritmética Fuzzy para o nó 1 da malha.

Vantagens: Custo computacional pequeno visto que o programa roda uma

única vez, independente do número de parâmetros considerados fuzzy.

Desvantagens: O fato de se utilizar a aritmética fuzzy, definida por Zadeh em 1965 e vista na seção 2.3, faz com que haja, na resposta final do problema, um aumento significativo da incerteza inicialmente considerada. Aumento este, proveniente das operações aritméticas entre números difusos. Isto ocorre por que quando dois números difusos são operados, encontra-se como resposta para esta operação, na grande maioria dos casos, um número difuso com uma incerteza maior do que cada uma das incertezas dos números difusos operados.

Considere o seguinte exemplo:

$$[2, 4] - [3, 5] = [-3, 1]$$

Neste exemplo pode-se observar que as duas parcelas da subtração têm incertezas com intervalos de 2 unidades, porém o resultado da subtração tem uma incerteza com intervalo de 4 unidades. Este é um exemplo de incerteza artificial gerada pela operação aritmética entre números difusos.

Ao terminar esta etapa do trabalho, percebe-se que ainda não foi encontrada uma técnica que apresente resultados expressivos, ou seja, sem incerteza artificial incluída, e que utilizasse a aritmética fuzzy de fato, que por sua vez, reduz o custo computacional evitando que o programa seja rodado várias vezes.

Com a necessidade de encontrar um consenso entre estas duas vertentes, custo computacional baixo e resultados confiáveis, buscou-se técnicas que pudessem resolver o problema utilizando a aritmética fuzzy porém, tentando reduzir ao máximo a incerteza artificial gerada por esta aritmética. Nas duas subseções seguintes apresentam-se duas técnicas utilizadas com o intuito de reduzir a incerteza artificial gerada pelo grande número de operações entre números difusos.

#### **5.1.4 Resultado: Manipulação Algébrica do Sistema ou K Fora da Integral**

Nesta subseção o problema é resolvido ainda utilizando a aritmética fuzzy, porém foi implementada uma técnica que consiste reduzir o número de operações entre números difusos, pois quanto menor for o número de

operações arit-méticas entre números difusos, menor será a incerteza artificial incluída na resposta final do problema estudado.

Assim, a técnica de manipulação do sistema, consiste em retirar a condutividade térmica, que é o parâmetro que traz consigo a incerteza inicialmente considerada, da integral principal do problema do calor, deixando dentro desta integral uma matriz apenas de números reais.

Descreve-se, mais detalhadamente, a seguir, o procedimento citado acima.

Retomando a formulação do problema, descrita na subseção 1.5.2 na na equação para problemas estacionários (1.18), tem-se:

$$K \theta = F.$$

que pode também ser escrita por:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} w f d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma \quad (5.2)$$

É sabido ainda que  $K$  é a matriz de rigidez global montada a partir do somatório de matrizes locais  $K^e$ , como visto na subseção 1.4.2, onde

$$K^e = a(\varphi_A^e, \varphi_B^e) = \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi_A^e)^T k (\nabla \varphi_B^e) d\Omega \quad (5.3)$$

onde  $\varphi_A^e$  e  $\varphi_B^e$  são denominadas funções de interpolações locais (LIU e RINCON, 2003), e  $k$  é a matriz de condutividade térmica dada por:

$$k = \begin{bmatrix} f_1(x, y) & f_3(x, y) \\ f_2(x, y) & f_4(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Sabe-se também que  $k$  é, por hipótese, simétrica e definida positiva (LIU e RINCON, 2003). Se o material é isotrópico e homogêneo então  $f_2(x, y) = 0$  e  $f_1(x, y) = f_4(x, y) = \kappa$ . Logo, a matriz de condutividade  $k$  fica:

$$k = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}$$

e pode também ser escrita por:

$$k = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituindo em (5.3) tem-se:

$$K^e = a(\varphi_A^e, \varphi_B^e) = \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi_A^e)^T \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\nabla \varphi_B^e) d\Omega \quad (5.4)$$

e como  $\kappa$  é uma constante, pode-se colocar finalmente  $\kappa$  fora da integral.

$$K^e = a(\varphi_A^e, \varphi_B^e) = \kappa \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi_A^e)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\nabla \varphi_B^e) d\Omega. \quad (5.5)$$

Ou ainda:

$$K^e = a(\varphi_A^e, \varphi_B^e) = \kappa \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi_A^e)^T (\nabla \varphi_B^e) d\Omega. \quad (5.6)$$

Desta forma, pode-se então escrever que:

$$K^e = \kappa \cdot K'^e$$

e conseqüentemente que:

$$K = \kappa \cdot K'.$$

Substituindo no sistema linear, tem-se:

$$\kappa \cdot K' C = F.$$

Por fim, o sistema linear fica da seguinte forma:

$$K' C = \frac{1}{\kappa} \cdot F$$

Utilizando-se deste processo, evita-se um grande número de operações que seriam realizadas com  $\kappa$  que é o parâmetro fuzzy do problema e, conseqüentemente, evita-se a incerteza artificial provocada por tais operações. Com isso, encontram-se resultados com incerteza artificial reduzida, de forma considerável, e portanto, de maior confiabilidade.

Utilizando os dados do exemplo do reator, descritos na subseção 5.1.1, a malha de elementos finitos da figura 5.1 e a técnica descrita acima, resolve-se o problema obtém-se os seguintes resultados:

Nó	Coordenada (x, y)	Temperatura $\alpha = 0.0$	Temperatura $\alpha = 1.0$	Temperatura $\alpha = 0.0$
1	(+0.00000, +0.00000)	+917.98816	+918.10944	+918.23059
2	(+0.00500, +0.00000)	+892.99231	+893.11102	+893.22974
3	(+0.01000, +0.00000)	+818.00470	+818.11591	+818.22705
4	(+0.01500, +0.00000)	+693.02539	+693.12396	+693.22272
5	(+0.02000, +0.00000)	+518.05420	+518.13531	+518.21655
6	(+0.02500, +0.00000)	+293.15000	+293.15000	+293.15000
7	(+0.01500, +0.00500)	+917.98816	+918.10950	+918.23047
8	(+0.00500, +0.00500)	+892.99237	+893.11108	+893.22974
9	(+0.01000, +0.00500)	+818.00476	+818.11597	+818.22711
10	(+0.01500, +0.00500)	+693.02533	+693.12402	+693.22272
11	(+0.02000, +0.00500)	+518.05426	+518.13538	+518.21661
12	(+0.02500, +0.00500)	+293.15000	+293.15000	+293.15000

Tabela 5.3: Temperaturas calculadas para cada nó da malha do exemplo do reator.

A figura 5.6 seguinte ilustra a temperatura fuzzy resultante do nó 1 da malha da figura 5.1, representada pelo número difuso na sua forma triangular.

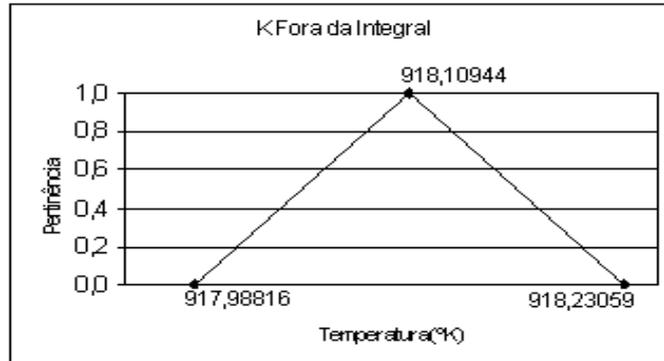


Figura 5.6: Temperatura difusa calculada pela técnica de manipulação do sistema para o nó 1 da malha.

Vantagens: Custo computacional pequeno visto que o programa roda uma única vez e resultados confiáveis, visto que a incerteza artificial incluída nos resultados é mínima.

Desvantagens: Só pode ser utilizado em problemas estacionários, ou seja, em problemas que recaem em sistemas do tipo  $K \theta = F$ .

### 5.1.5 Resultado: Pré-Condicionamento do Sistema

Esta técnica foi implementada com o intuito de reduzir a incerteza artificial e também pela necessidade de se conseguir alcançar uma técnica efetiva para a resolução do problema transiente já que a técnica utilizada na subseção anterior não pode ser aplicada ao problema transiente. Segundo Pereira (2002) esta técnica funciona bem para problemas que recaem em um sistema de ordem menor ou igual a 10. Na seção 5.2, faz-se um comentário sobre a utilização desta técnica em problemas transientes.

Sabe-se que um sistema linear do tipo  $Ax = b$  pode ser resolvido pelo fatoração  $LU$  da matriz  $A$  da seguinte forma:

$$Ax = b, \quad A = LU, \quad LUx = b, \quad Ly = b, \quad Ux = y$$

Dado o sistema linear  $Ax = b$ , sabe-se que os elementos das matrizes do sistema são intervalos referentes a cada  $\alpha$ -corte considerado. Assim, a técnica do Pré-condicionamento do sistema pode ser resumida à seguinte seqüência (PEREIRA, 2002):

- Passo 1: Calcula matriz dos pontos médios,  $\tilde{A}$ .  
Onde cada  $\tilde{A}_{ij}$  é o ponto médio do intervalo que define o  $\alpha$ -corte.
- Passo 2: Calcula a inversa da matriz dos pontos médios,  $\tilde{A}^{-1}$ .
- Passo 3: Precondiciona a matriz  $A$  com  $\tilde{A}^{-1}$ , obtendo;  $\tilde{A}^{-1}Ax = \tilde{A}^{-1}b$ .
- Passo 4: Realiza a decomposição  $LU$  do sistema precondicionado.
- Passo 5: Calcula o vetor  $y$  ( $Ly = \tilde{A}^{-1}b$ ) pela substituição para frente.
- Passo 6: Calcula o vetor de soluções  $x$  ( $Ux = y$ ) por retrossubstituição.

Utilizando os dados do exemplo do reator, descritos na subseção 5.1.1, a malha de elementos finitos da figura 5.1 e a técnica descrita acima, resolve-se o problema e obtém-se os seguintes resultados:

Nó	Coordenada (x, y)	Temperatura $\alpha = 0.0$	Temperatura $\alpha = 1.0$	Temperatura $\alpha = 0.0$
1	(+0.00000, +0.00000)	+910.72504	+918.10944	+925.49438
2	(+0.00500, +0.00000)	+884.79663	+893.11102	+901.43359
3	(+0.01000, +0.00000)	+810.86023	+818.11591	+825.37671
4	(+0.01500, +0.00000)	+687.78223	+693.12396	+698.46887
5	(+0.02000, +0.00000)	+515.25964	+518.13531	+521.01245
6	(+0.02500, +0.00000)	+293.15000	+293.15000	+293.15000

7	(+0.01500, +0.00500)	+911.56018	+918.10950	+924.66345
8	(+0.00500, +0.00500)	+883.86823	+893.11108	+902.37952
9	(+0.01000, +0.00500)	+810.31427	+818.11597	+825.93268
10	(+0.01500, +0.00500)	+688.15637	+693.12402	+698.09723
11	(+0.02000, +0.00500)	+515.80640	+518.13538	+520.46558
12	(+0.02500, +0.00500)	+293.15000	+293.15000	+293.15000

Tabela 5.4: Temperaturas calculadas para cada nó da malha do exemplo do reator.

A figura 5.7 seguinte ilustra a temperatura fuzzy resultante do nó 1 da malha da figura 5.1, representada pelo número difuso na sua forma triangular.

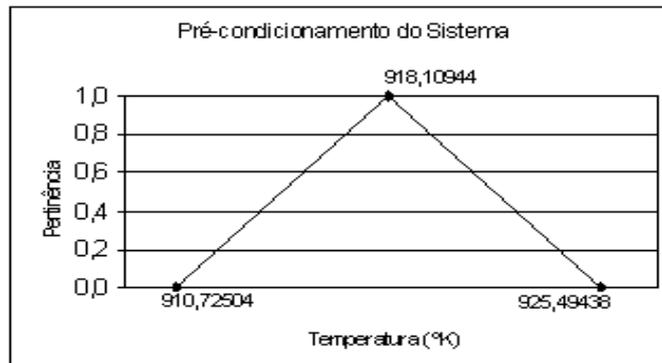


Figura 5.7: Temperatura difusa calculada pela técnica do Pré-Condicionamento do Sistema para o nó 1 da malha.

Vantagens: Custo computacional pequeno visto que o programa roda uma única vez, independente do número de parâmetros considerados fuzzy.

Desvantagens: Esta técnica não funciona bem quando o sistema linear a ser resolvido tem número de equações maior que 10 (PEREIRA, 2002), o que já é um limitador. Além disso, os resultados encontrados ainda apresentam uma grande carga de incerteza artificial gerada pelo número de operações entre números difusos, ou seja, não é muito eficaz no que diz respeito a redução da incerteza artificial no exemplo do reator.

### 5.1.6 Comparação dos Resultados

Os gráficos seguintes mostram uma comparação dos resultados obtidos para cada uma das técnicas apresentadas acima. Pode-se observar nestes gráficos que a aritmética fuzzy normal realmente traz uma incerteza artificial incluída e ainda que, das técnicas utilizadas para a redução desta incerteza artificial, a que apresenta os melhores é a Combinatorial, seguida pela técnica que utiliza K fora da integral. Ainda é observado que, para o tratamento e redução desta incerteza artificial, a técnica do Pré-Condicionamento do sistema, não apresenta resultados muito expressivos.

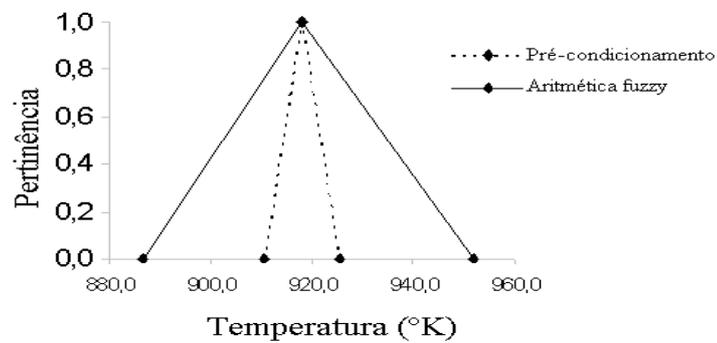


Figura 5.8: Resultado fuzzy com o método baseado na aritmética fuzzy e com o pré-processamento da matriz de condutividade

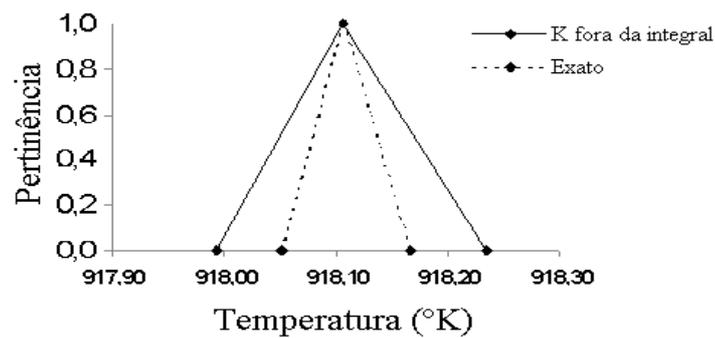


Figura 5.9: Resultado fuzzy com o método combinatorial e com a manipulação algébrica do sistema linear.

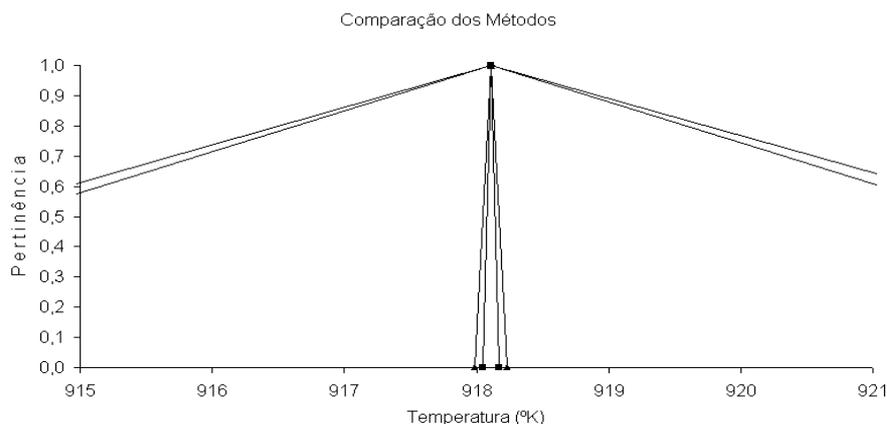


Figura 5.10: Gráfico de comparação dos resultados obtidos para as diferentes técnicas de tratamento e redução das incertezas artificiais.

## 5.2 Análise Transiente

Aqui são apresentados exemplos de análise, por elementos finitos, de problemas de transmissão de calor em materiais isotrópicos, apresentando tal análise térmica em regime transiente, ou seja, é feita análise das temperaturas encontradas a cada passo de tempo, até atingir equilíbrio térmico.

Para o problema transiente, a utilização da Aritmética Fuzzy forneceu resultados não aceitáveis, pois a inclusão da incerteza artificial nos resultados obtidos torna-se um problema ainda mais grave, uma vez que são resolvidos vários sistemas lineares, dois para cada passo de tempo. Pode-se concluir então, que a utilização da Aritmética Fuzzy, definida por Zadeh em 1965, não funciona bem para problemas transientes, visto que o aumento da incerteza nos resultados é exorbitante.

Segundo Pereira (2002), a utilização da técnica do Pré-condicionamento funciona bem para problemas transientes desde que o sistema a ser resolvido seja de ordem menor ou igual a 10. Porém, a utilização desta técnica para a resolução do problema do reator transiente, neste trabalho, não apresentou bons resultados. Só apresentou resultados aceitáveis para os três passos de tempo iniciais. A partir do quarto passo de tempo os resultados fogem daquilo que se espera, ou seja, a partir do quarto passo a inclusão de incerteza artificial compromete os resultados obtidos. Por este motivo, esta

técnica não foi utilizada para o problema de têmpera de aço, já que este   um problema de maior complexidade que o do reator.

A partir dos resultados obtidos para as diferentes técnicas utilizadas no problema estacionário, vistas na se o 5.1, pôde-se concluir que as técnicas que apresentaram os melhores resultados foram a Combinatorial e a que utiliza a Manipula o Algébrica do Sistema. Porém, para problemas transientes a formula o matricial do problema não permite a utiliza o da técnica que usa a Manipula o Algébrica do Sistema e por isso, a técnica utilizada para a resolu o do problema transiente foi a Combinatorial que, por sua vez, fornece os resultados mais precisos.

### 5.2.1 Resultado: Exato ou Combinatorial

Exemplo 1:

Este exemplo trata do problema da transmissão de calor por condu o em regime transiente, com gera o interna de calor. Considera-se um reator submerso cujo núcleo   constituído de um número de placas verticais de comprimento  $2L$ . Inicialmente o sistema possui temperatura uniforme  $T_\infty$ . Assume-se que a energia interna constante  $u'''$    gerada uniformemente nestas placas. O coeficiente de transferência de calor entre as placas e o fluido   dado por  $h$  e considera-se  $h = 0$  nas demais bordas, ou seja, fluxo de calor diferente de zero na borda de contato com o meio e igual a zero nas outras três bordas. A temperatura do fluido permanece constante e a espessura das placas   pequena quando comparada com as outras dimensões.

Assim, se os efeitos de borda são desprezados, a transferência de calor pode ser assumida como unidimensional (TEIXEIRA, 2002).

A soluço deste problema, assumindo-se um coeficiente de transferência de calor elevado ( $h \rightarrow \infty$ ), resulta na seguinte distribui o de calor (ARPACI, 1966):

$$\frac{\theta(x,t)}{u'''L^2/k} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n L^2} e^{-a\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x)$$

onde  $\theta = T - T_\alpha$ ,  $\alpha = \frac{k}{pc}$ , com  $k$ ,  $\rho$  e  $c$  representando, respectivamente, a condutividade térmica, a densidade e a capacidade térmica do material analisado e ainda  $\lambda_n L = (2n + 1)\pi/2, n = 0, 1, 2, \dots$ .

Utilizando-se  $T_\infty = 293,15^\circ K$ ,  $L = 25,0\text{ mm}$ ,  $u''' = 8122,0\text{ W/m}^3$ ,  $c = 460,0\text{ J/Kg}^\circ K$ ,  $\rho = 8618,0\text{ Kg/m}^3$  e  $k = 35,0\text{ W/m}^\circ K$  como dados de entrada e uma malha de elementos finitos com 12 nós, 5 elementos isoparamétricos Q4 (figura 5.10), obtém-se resultados que serão mostrados de forma conveniente nas tabelas e gráficos seguintes.

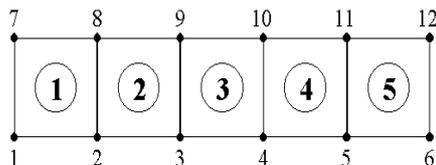


Figura 5.11: Malha de elementos finitos para o exemplo 1.

Primeiramente, acompanha-se as distribuições de temperaturas difusas, ao longo do tempo, para o nó 1 da malha de elementos da figura 5.11.

Tempo decorrido (em segundos)	Temperatura $\alpha = 0.0$	Temperatura $\alpha = 1.0$	Temperatura $\alpha = 0.0$
1	+462.25934	+462.26071	+462.26205
2	+601.12445	+601.13147	+601.13861
3	+696.35114	+696.36682	+696.38281
4	+687.78223	+761.84680	+761.87091
5	+809.09412	+809.12482	+809.15637
6	+841.34216	+841.37946	+841.41724
7	+864.41394	+864.45654	+864.49933
8	+880.41534	+880.46240	+880.50952
9	+891.63281	+891.68353	+891.73389
10	+899.59131	+899.64459	+899.69788

Tempo decorrido (em segundos)	Temperatura $\alpha = 0.0$	Temperatura $\alpha = 1.0$	Temperatura $\alpha = 0.0$
11	+905.03461	+905.08978	+905.14526
12	+908.99762	+909.05444	+909.11127
13	+911.63641	+911.69464	+911.75269
14	+913.60901	+913.66803	+913.72711
15	+914.89050	+914.95020	+915.01001
16	+915.86865	+915.92859	+915.98901
17	+916.49542	+916.55591	+916.61652
18	+916.97485	+917.03583	+917.09650
19	+917.28711	+917.34833	+917.40930
20	+917.51617	+917.57758	+917.63885

Tabela 5.5: Temperaturas calculadas para o nó 1 em cada passo de tempo até 20 segundos de análise.

Pode-se observar que utilizando-se dessa técnica, não há nos resultados, incerteza artificial, ou seja, os resultados correspondem exatamente à incerteza incluída nos dados de entrada.

Na figura seguinte, pode-se ver a temperatura difusa triangular encontrada para o nó 7 na malha da figura 5.11.

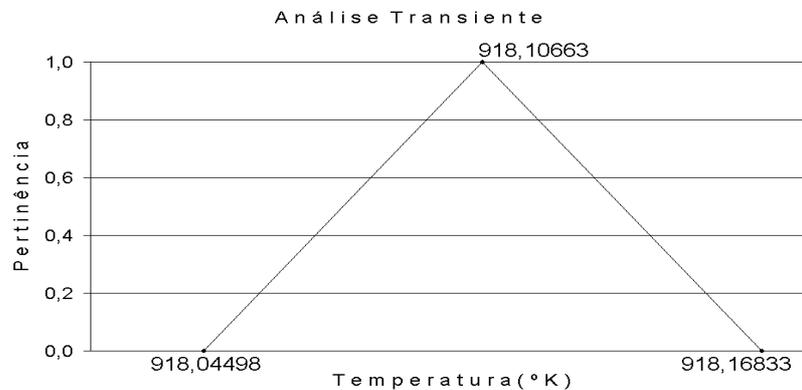


Figura 5.12: Temperatura difusa calculada pela técnica Combinatorial em regime transiente para o nó 7 da malha.

Para esta análise utilizou-se a implementação da forma-V (HUGHES, 1987) do método trapezoidal generalizado, com parâmetro de colocação  $\alpha = 0,5$  como forma de garantir a estabilidade do algoritmo de integração no tempo, visto na subseção 3.2.2. O incremento de tempo  $\Delta t = 1s$  foi escolhido de modo a atender os requisitos de convergência do método.

Exemplo 2:

O segundo exemplo trata da temperatura de um cilindro de aço SCM-3, de  $20mm$  de diâmetro, resfriado em água a  $20^{\circ}C$  por  $10s$ , cuja temperatura inicial é de  $850^{\circ}C$ . A condutividade térmica é representada por um número fuzzy triangular dado por  $(6.5 \times 10^{-3}, 7.06 \times 10^{-3}, 7.5 \times 10^{-3}) cal/mm.s.^{\circ}C$ .

Utilizou-se  $T_{\infty} = 20^{\circ}C$ ,  $L = 10,0 mm$ ,  $c = 0,15 cal/g.^{\circ}C$ ,  $\rho = 8,16 \times 10^{-3} g/mm^3$  e  $M_S = 460^{\circ}C$ . A inclusão de incerteza no modelo numérico foi realizada utilizando-se o método combinatorial. A Fig. 5.12 e a Fig. 5.13 apresentam, respectivamente, a evolução da temperatura no centro e na borda do cilindro, considerando os  $\alpha$ -cortes 0 e 1, ao longo de  $10s$  de análise. A Fig. 5.14 apresenta a concentração de martensita transformada após  $10s$  de análise na superfície de contato com a água.

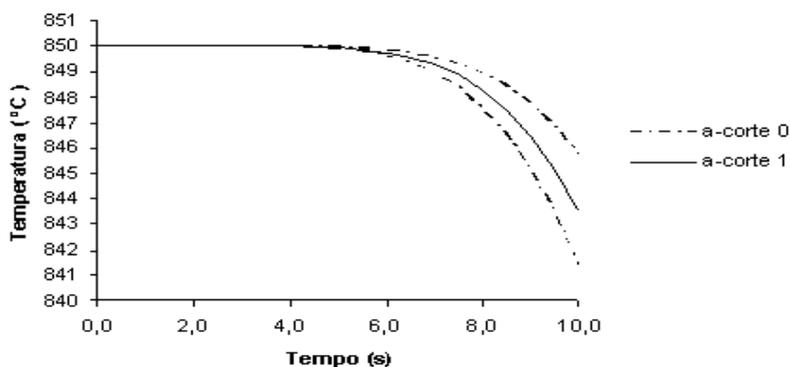


Figura 5.13: Resultado fuzzy com o método combinatorial no centro do cilindro,  $\alpha$ -cortes 0 e 1.

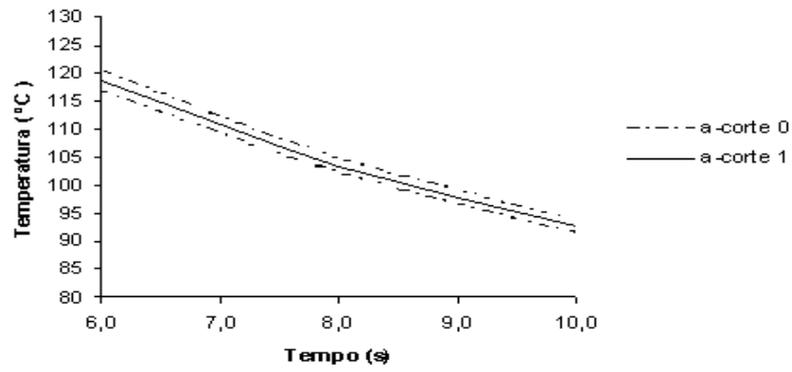


Figura 5.14: Resultado fuzzy com o método combinatorial na borda do cilindro,  $\alpha$ -cortes 0 e 1.

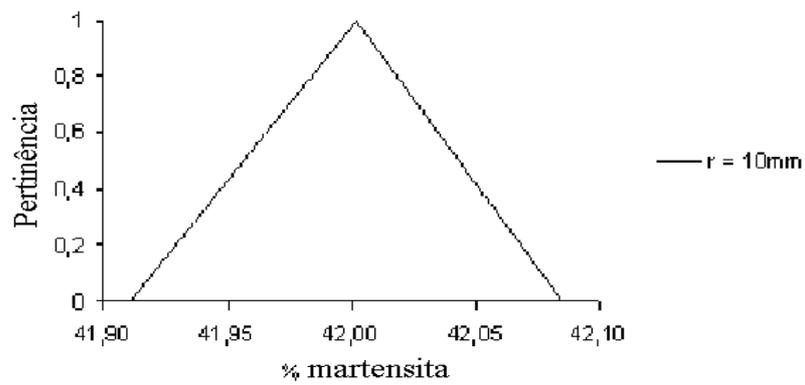


Figura 5.15: Concentração de martensita após 10s de análise, resultado fuzzy com o método combinatorial na borda do cilindro,  $\alpha$ -cortes 0 e 1.

# Capítulo 6

## Conclusão

Estudos que envolvam números fuzzy e resolução numérica de equações diferenciais tiveram início na década de 90, e ainda são um tema promissor e com muitas questões em aberto, principalmente no que diz respeito à resolução de sistemas lineares. O desenvolvimento de métodos que evitam a propagação da incerteza ao longo dos cálculos permitiriam efetuar análises transientes e não-lineares, criando ferramentas poderosas na análise de problemas reais da indústria, notadamente aqueles cujos parâmetros do material não são conhecidos de forma exata.

Neste trabalho foram apresentadas algumas abordagens de incerteza, modelada por meio de números fuzzy, na resolução do problema do calor. Como citado na literatura e confirmado nos resultados apresentados na subseção 5.1.3, a simples inclusão das operações aritméticas fuzzy no modelo numérico insere incertezas artificiais, inviabilizando sua utilização, apesar da facilidade de implementação.

O pré-condicionamento da matriz do sistema linear obtido na formulação matricial fornece resultados aceitáveis para o problema estacionário, subseção 5.1.5. Porém não tem a mesma eficiência para o problema transiente, reduzindo a incerteza artificial apenas nos três primeiros passos de tempo, como visto na seção 5.2. Além disso, uma outra desvantagem reside no fato de ser apropriado apenas para sistemas pequenos, quando comparados com aqueles necessários para se obter bons resultados numéricos na simulação da têmpera de peças de aço.

Para o exemplo do cálculo da distribuição de temperatura no regime estacionário (exemplo do reator da subseção 5.1.1), a manipulação algébrica do sistema, levando a variável fuzzy para o lado direito da equação, subseção

5.1.4, foi a que melhor resultado forneceu quando comparado com o método combinatorial, subseção 5.1.2. Este último, apesar de fornecer o considerado resultado exato fuzzy, trás a desvantagem de, caso haja muitos parâmetros representados por números fuzzy, aumentar o custo computacional da simulação numérica.

Ficam como sugestões para trabalhos e pesquisas futuras efetuar um estudo sobre a montagem da matriz de condutividade do sistema segundo a filosofia Element By Element (EBE), permitindo uma maior liberdade na manipulação dos parâmetros fuzzy no sistema de equações algébricas e a implementação da incerteza fuzzy no cálculo de deslocamentos e tensões de peças de aço submetidas a variações de temperatura, visando calcular as tensões residuais geradas durante a têmpera de peças de aço.

# Bibliografia

- ARPACI, V. S., 1966 - Conduction Heat Transfer. Wesley Publ. Co.
- AYDEMIR, A., GÜNAY, D., 2004 - The fuzzy finite element stress analysis of adhesive-bonded single lap joints. Turkish J. Eng. Env. Sci. 28, pp 121 - 127.
- BIAZUTTI, A. C., 2001 - Uma introdução ao Latex - IM/UFRJ.
- COOK, R. D., MALKUS, D. S. e PLESHA, M. E., 1989 - Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley e Sons, 630 p.
- HANSEN, E. R., 2000 - The hull of preconditioned interval linear equations Reliable Computing, vol 6, pp 95-103.
- HANSS, M., WILLNER, K., 1999 - On using fuzzy arithmetic to solve problems with uncertain model parameters - International Colloquium on Numerical Modelling of Uncertainties, pp 85-92.
- HUGHES, T. J. R., 1987 - The Finite Element Method: linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall International Editions
- HUGHES, T. J. R., 1977 - Unconditionally Stable Algorithms for Non-linear Heat Conduction. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 10, pp 135-139.
- MUHANNA, R. L., MULLEN, R. L., 1999. Formulation of fuzzy finite-element methods for solid mechanics problems. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, vol 14, pp 107-117.

- PEREIRA, S. C. A., 2002 - Tratamento de incertezas em modelagens de bacias. Tese de doutorado. COPPE/UFRJ.
- RINCON, M. A., LIU, I-SHIH, 2003 - Introdução ao Método de Elementos Finitos - Análise e Aplicação - IM/UFRJ, .
- TAWAB, K. A., NOOR, A. K., 1999 - Uncertainty analysis of welding residual stress fields. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol 179, pp 327-244.
- TEIXEIRA, M. G., 2002 - Análise numérica por elementos finitos de tensões residuais geradas por mudança de fase em aços tratados termicamente. Tese de doutorado. DEC/PUC-Rio, 78 p.
- VAN VLACK, L. H., 1970 - Princípios de Ciências dos Materiais. Editora Edgard Blücher LTDA, 427 p.