A Solução de Black e Scholes e a Extrapolação de Richardson Aplicadas ao Mercado de Opções Americanas

por

José Ferreira Marinho Júnior

IM - NCE - UFRJ

2005

A SOLUÇÃO DE BLACK E SCHOLES E A EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON APLICADAS AO MERCADO DE OPÇÕES AMERICANAS

José Ferreira Marinho Júnior

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática - Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Informática.

Área de Concentração: Métodos Numéricos.

Aprovada por:

Mauro Antonio Rincon - IM-UFRJ - Orientador.

Beatriz Vaz de Melo Mendes - IM-UFRJ.

Cassio Neri Moreira - IM-UFRJ.

Ricardo Eleodoro Fuentes Apolaya - IM-UFF.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Marinho Jr., José Ferreira.

A solução de Black e Scholes e a extrapolação de Richardson

aplicadas ao mercado de opções americanas. / José Ferreira Marinho Júnior.

Rio de Janeiro: IM, NCE, UFRJ, 2005.

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, NCE.

1. Introdução. 2. Comportamento do preço do ativo.

3. O Problema. 4. Resolvendo o problema. 5. Resultados.

(Mestrado-IM/NCE/UFRJ) I. Título.

Dedicatória

A conclusão deste trabalho e de mais esta etapa é dedicada à minha amada madrinha Derli Peçanha Larrat, que está presente em todos os momentos da minha vida, que sempre torce e reza por mim. E tenho certeza que lá de cima, ao lado de Deus, está feliz com este momento. Infelizmente não poderei receber seus abraços e beijos, como no dia em que recebi a notícia que havia passado pro mestrado, mas a sua presença no meu coração me dá a certeza de que nada é capaz de nos afastar.

Saudade

É dor profunda que fica

No fundo do coração.

Saudade é solidão acompanhada,

É quando o amor ainda não foi embora.

Saudade aperta o coração

E faz o choro cair novamente.

Mas as lágrimas passam

E os momentos ficam...

Eu aprendi que o AMOR, e não o TEMPO, é que cura todas as feridas.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta oportunidade, pela família que eu tenho e pelas condições de poder desenvolver este trabalho.

Ao amigo e praticamente o co-autor deste trabalho, Vinicius Pinheiro Israel. Sua colaboração, em todos os sentidos, foram de tamanha importância que não há palavras para descrevê-la.

Ao professor e orientador Mauro Rincon, por confiar na minha capacidade de dar seqüência a um trabalho neste tema e por sua contribuição.

Aos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, principalmente aos professores Ricardo Eleodoro Fuentes Apolaya e Ana Isabel Spíndola por acreditarem na minha capacidade de realizar este trabalho. E aos professores do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Ao professor Eduardo Facó Lemgruber, pela oportunidade de assistir seus cursos de Opções e Derivativos na Coopead.

Aos ex-diretores do Colégio Estadual Antônio Houaiss, professores Marco Antônio e Verônica, pela força no início desta etapa.

Aos meus pais José Ferreira Marinho e Ladir Peçanha Marinho que me dão totais condições de vencer qualquer obstáculo e a quem eu devo minha vida e dedico todas as nossas vitórias.

As minhas irmãs Vanessa, principalmente pela sua ajuda no inglês, e Larissa, pelo carinho e companheirismo. Ao meu cunhado Romer, pelo capricho na minha apresentação.

A minha namorada Jullyana, pelo incentivo e compreensão.

Aos meus familiares pela torcida e por me desculpar das ausências em alguns momentos, principalmente ao meu afilhado Thiago.

A todos os meus amigos, de uma forma geral, tanto os do mestrado quanto aos da graduação e de trabalho.

Ao financiamento da Capes e do Núcleo de Computação Eletrônica.

Resumo

Uma opção é um derivativo que dá ao seu comprador o direito de comprar ou vender um determinado bem ou ativo (dólar, ações, *commodities*...) em (ou até) uma data futura, chamada de vencimento ou data de exercício, por um preço determinado no presente, chamado preço de exercício. Se a opção só puder ser exercida no vencimento, diz-se que é uma opção européia, se for possível exercê-la em qualquer data anterior ou no vencimento, diz-se que é uma opção americana. A partir de 1900, através de Louis Bachelier, iniciam-se as precificações de opções (encontrar o valor da opção). No início da década de 1970, Fischer Black e Myron Scholes [2] desenvolveram uma equação diferencial parcial, cuja solução determina o valor de uma opção européia. A condição de fronteira irá determinar o tipo de opção (compra ou venda). A equação de Black e Scholes é:

$$\frac{\partial P}{\partial S}Sr + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = Pr$$

Neste trabalho é desenvolvido um método para se encontrar o valor de uma opção de venda americana, baseado na solução de Black e Scholes para opções européias e na extrapolação de Richardson, que calcula o limite de uma sequência de opções, cujos intervalos de tempo tendem a zero.

Simulações e comparações com outros métodos são realizadas no final do trabalho.

Abstract

An option is a derivative which entitles its purchaser to acquire or sell a certain property or asset (US Dollars, stocks, commodities...) on (or up to) a future date, named due date or expiration date, for a price established at the present time, called strike price. In the event the option may only be exercised on the expiration date, it is said it is an European option; in the event you can exercise it on any date on or before the expiration date, it is said it is an American option. As of 1900, through Louis Bachelier, there was the beginning of the options pricing (definition of the value of the option). In the beginning of the 70's, Fischer Black and Myron Scholes [2] developed a partial differential equation, whose solution determines the value of an European option. The boundary condition shall determine the kind of option (purshase or sale). Black and Scholes' equation is the following one:

$$\frac{\partial P}{\partial S} Sr + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = Pr$$

This work develops a method to find the value of an American sale option, based on Black and Scholes' solution for the European options and on Richardson's Extrapolation, that calculates the limit of an options sequence, whose time intervals tend to zero.

At the end of the work, there are simulations and comparisons with other methods.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Resumo Histórico

Ao longo da história das civilizações, o fenômeno financeiro esteve associado, e ainda continua, à razão de que os recursos são de natureza escassa enquanto que os usos são múltiplos. Até o século XIX a função financeira restringia-se fundamentalmente aos aspectos com vistas ao controle, tendo recebido uma forte influência dos desenvolvimentos ocorridos no campo da contabilidade, a partir da Idade Média fazendo surgir a bolsa de valores. Com o advento da Revolução Industrial, no século XVIII, novas exigências de capital para investimentos fizeram com que a função financeira passasse a receber uma maior atenção, embora continuasse atrelada às questões de controle. Além da expansão das atividades comerciais, a propensão humana à troca, ao escambo de uma mercadoria ou produto por outro, e a forte tentação de adivinhar o que irá ocorrer no futuro são as raízes mais profundas da atividade que sedimenta um mercado financeiro. Historicamente, os mercados financeiros consistiam de dois tipos de instituições: o mercado de ações (ações, *debêntures* e outros títulos); e os bancos (ou intermediários financeiros semelhantes). Nos últimos anos, os derivativos tornaram-se extremamente importantes para a área financeira. Um derivativo é um instrumento financeiro cujo valor depende (*deriva*) de outras variáveis que o referenciam. Mais recentemente, futuros e opções, tipos de derivativos, cresceram, se juntaram aos mercados de ações e aos bancos e são ativamente negociados em muitas bolsas. O desenvolvimento destes mercados estão associados ao aumento no grau de risco de moedas. Em geral, os derivativos são usados para a proteção contra riscos. As maiores bolsas que negociam contratos futuros são a Chicago Board of Trade-CBOT e a Chicago Mercantile Exchange-CME. Nestas e em outras, uma enorme variedade de *commodities* (soja, boi gordo, açúcar, lã, madeira, cobre, aço e outros) e ativos financeiros (índices de ações, moedas e títulos emitidos pelo Tesouro) compõem os objetos de negociação dos vários contratos.

1.2 Opções

Opções de ações foram primeiramente negociadas em bolsa em 1973. As opções são hoje negociadas em muitas bolsas do mundo e volumes expressivos de opções também são negociadas por bancos e outras instituições financeiras. Os ativos objetos de negociação incluem ações, índicies de ações, moedas, instrumentos de dívida, *commodities* entre outros. A introdução do mercado de opções no Brasil iniciou-se pela Bolsa de Valores do Rio de Janeiro.

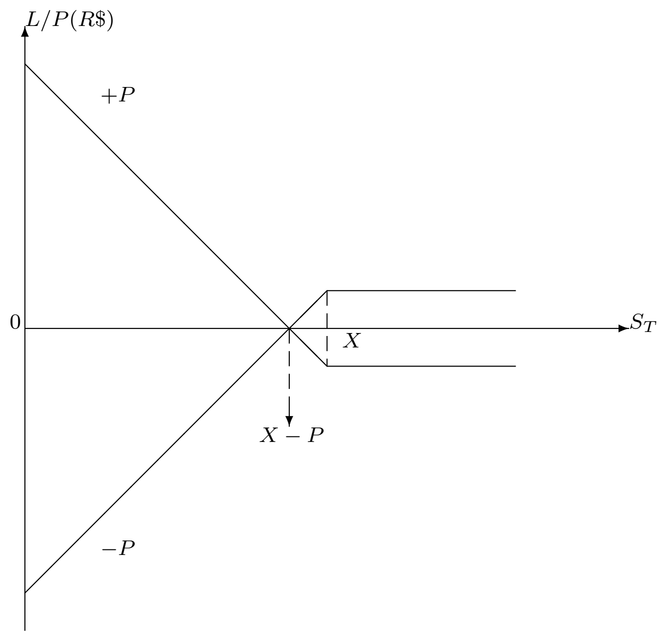
Uma **opção** é um derivativo que dá ao seu comprador (**titular da opção**) o direito (não a obrigação) de comprar ou vender um determinado bem ou ativo (dólar, ações, *commodities*...) em (ou até) uma data futura, chamada de **vencimento** ou **data de exercício**, por um preço determinado no presente, chamado **preço de exercício**. Opções de compra são conhecidas como ***call*** e opções de venda são conhecidas como ***put***. Se a opção só puder ser exercida no vencimento, diz-se que é uma opção **européia**, se for possível exercê-la em qualquer data anterior ou no vencimento, diz-se que é uma opção **americana**. Para ter o direito de exercer a opção, o comprador paga ao vendedor (**lançador**) um **prêmio**. Esse prêmio também é chamado de **valor da opção**. Se a opção for exercida, o lançador tem a obrigação de comprar ou vender, depende do tipo de opção, o ativo pelo preço de exercício.

O valor da opção, que será denotado por P, depende dos seguintes fatores:

- Preço do ativo-objeto (S);
- Volatilidade (σ);
- Taxa de juros (r);
- Tempo para o vencimento (t);
- Preço de exercício (X).

Para ilustrar este conceito, suponha que uma pessoa queira comprar um apartamento daqui a um ano por $R\$70.000,00$. Para isso ela compra uma opção de compra européia deste apartamento, pagando o prêmio ou valor da opção. Suponha que o valor pago pela opção tenha sido de $R\$500,00$. Se no vencimento, o apartamento estiver valendo $R\$80.000,00$ ela exerce a opção e compra pelo preço de exercício ($R\$70.000,00$). Porém, se o apartamento se desvalorizar e estiver valendo $R\$60.000,00$, ela não exerce a opção e compra o apartamento no mercado. Neste caso, o titular terá perdido os $R\$500,00$ pagos pela opção. Por outro lado, suponha agora que a pessoa queira vender um apartamento por $R\$70.000,00$ daqui a um ano. Para isso, ela compra uma opção de venda, suponha européia, pagando o valor da opção, supondo novamente que tenha sido $R\$500,00$. Neste caso, ela irá exercer a opção se o apartamento se desvalorizar, vendendo o apartamento por $R\$70.000,00$. Caso o apartamento tenha se valorizado, ela o vende no mercado pelo preço atualizado, tendo perdido o valor pago pela opção. Portanto, o titular de uma opção terá o prejuízo limitado em no máximo $R\$500,00$, ou seja, o valor da opção. Enquanto que a possibilidade de lucro é ilimitada.

O gráfico a seguir, ilustra a situação do titular $(+P)$ e do lançador $(-P)$ de uma opção de venda em relação ao seu lucro ou prejuízo, na data de vencimento.



Na economia, nas finanças ou nas seguradoras, o imprevisto e o acaso desempenham um papel fundamental. A evolução com o tempo, do preço de um produto, da cotação de uma ação, depende de um grande número de fatores imprevisíveis. Na prática constata-se que o mercado flutua de maneira bastante aleatória. A principal questão então, é saber qual o valor justo da opção, ou seja, quanto deve valer o prêmio pago por uma opção? O valor de $R\$500,00$ do exemplo acima é o ideal?

Encontrar o valor de uma opção, ou precificar opções, inicia-se em 1900, segundo Merton [19], pelo matemático francês Louis Bachelier. Em sua tese de doutorado, Bachelier deduziu a fórmula do preço da opção assumindo que o preço do ativo-objeto segue um movimento browniano. O movimento browniano, ou processo de Wiener, é um tipo de processo estocástico estudado por Einstein no início do século XX e descoberto por Robert Brown em 1827, utilizado pela física para descrever o movimento de uma partícula sujeita a uma grande quantidade de pequenos choques moleculares. A partir daí, diversos métodos foram desenvolvidos e usados para se encontrar o preço de uma opção, tais como: Método Binomial, simulação de Monte Carlo, Método de Diferenças Finitas, Método de Elementos Finitos, Método da Colocação, Método de Penalização, entre outros. Mas sem dúvida, a maior contribuição para precificar opções foi dada por Fischer Black e Myron Scholes[1][2] no início da década de 1970, que será abordada no próximo capítulo.

1.3 Objetivo

O objetivo deste trabalho é encontrar o valor da opção de venda americana através da análise de uma solução da equação diferencial que descreve o movimento do ativo, adaptando a fórmula de Black e Scholes[2]. Israel [17] utilizou o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos para resolver o sistema de inequações variacionais cuja solução fornece o valor da opção de venda americana. Neste trabalho, é apresentada uma fórmula que satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira que caracterizam o problema de avaliação da opção americana. A fórmula é derivada usando a técnica de opções compostas e segue Black e Scholes, considerando movimento Browniano geométrico para o preço do ativo. Construindo-se uma carteira protegida, isenta de risco, entre a opção de venda e o ativo, o caminho de equilíbrio do preço da opção de venda pode ser descrito pela equação diferencial parcial de Black e Scholes:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = rP - rS\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \tag{1.1}$$

[1]Myron Scholes: economista canadense prêmio Nobel de Economia em 1997.

Como a opção de venda americana pode ser exercida a qualquer momento e o preço do ativo que desencadeia o exercício não é constante, o problema é considerado de fronteira livre. A condição de fronteira livre que a opção deve satisfazer é:

$$P(S,T) \geq max(0, X - S), \qquad \forall T \geq 0. \tag{1.2}$$

Considera-se que cada decisão de exercício é um evento discreto. A fórmula será uma solução em tempo contínuo para a equação diferencial (1.1) sujeito a condição de fronteira livre (1.2).

Mostra-se que a fórmula:

$$P = Xv_1 - Sv_2 \tag{1.3}$$

é solução da equação (1.1) onde os ”pesos” v_1 e v_2 são a soma de uma série de opções compostas.

O tempo é discretizado e uma equação poliniomial é desenvolvida para calcular o limite da sequência de opções.

1.4 Descrição

No próximo capítulo será demonstrada a equação que descreve o caminho do ativo e a fórmula de Black e Scholes, peças fundamentais na elaboração deste trabalho.

No capítulo 3 são mostradas as características da opção de venda americana, toda a teoria que leva à solução do problema e como se determinar o preço crítico.

No capítulo 4 é apresentada uma forma de resolver o problema de maneira menos trabalhosa e mais rápida computacionalmente.

No capítulo 5 são mostrados os resultados computacionais, através de duas simulações, sendo o barril de petróleo negociado pela Petrobrás e uma ação da Petrobrás como ativo-objeto. Também são realizadas comparações com outros métodos.

Capítulo 2

Comportamento do preço do ativo

2.1 O Movimento Browniano

Qualquer variável cujo valor mude de maneira incerta com o tempo segue um *processo estocástico*, que pode ser em tempo discreto ou em tempo contínuo. Quando um processo estocástico não tem memória, ou seja, quando o passado (ou histórico) da variável é irrelevante, é chamado de *processo de Markov*. Dessa forma, o preço do ativo segue um processo de Markov uma vez que o preço atual de um ativo, encerra todas as informações contidas em seu histórico. Além disso, como as previsões para o futuro são incertas, os preços dos ativos devem ser expressos em termos de distribuição de probabilidade.

Os modelos de comportamento dos preços dos ativos são expressos por *processos de Wiener*, que é um caso particular do processo de Markov. O processo de Wiener, também conhecido como *movimento Browniano*, descreve pequenas mudanças no valor da variável, em pequenos intervalos de tempo. Se uma variável z, segue o processo de Wiener então:

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.1}$$

onde ε é a variável aleatória de uma distribuição normal padrão, ou seja, com média zero e desvio padrão um. Se a variável tem média zero, significa que a taxa de desvio dela é zero, ou seja, que o seu valor esperado em qualquer tempo futuro é igual ao seu preço atual. A taxa de variância 1.0 significa que a variância da mudança na variável, num intervalo de tempo de extensão T, é igual a T. Dessa forma, o *processo generalizado de Wiener* para uma variável x pode ser definido em termos de dz, da seguinte forma:

$$dx = adt + bdz \tag{2.2}$$

onde a e b são constantes. Na equação, adt é a tendência e b é o desvio. Num pequeno intervalo de tempo Δt, a mudança no valor de x, Δx, é:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.3}$$

onde ε é variável aleatória da distribuição normal padrão. Daí, média de Δx é igual a $a\Delta t$, desvio padrão de Δx é igual a $b\sqrt{\Delta t}$ e variância de Δx é igual a $b^2\Delta t$.

2.2 Processo de Itô

O processo de Itô é uma generalização do processo de Wiener onde a e b são funções do ativo S e do tempo t:

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dz. \tag{2.4}$$

Dessa forma, a taxa de desvio esperada e a taxa de variância estão sujeitas a mudança no tempo. O preço do ativo pode ser representado pelo processo de Itô com taxa de desvio esperado μS (μ é constante) e taxa de variância $\sigma^2 S^2$, então

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{2.5}$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \tag{2.6}$$

Esta equação modela o comportamento do preço do ativo, sendo μ a taxa de retorno esperada, σ a volatilidade e dz o processo de Wiener. O termo $\frac{dS}{S}$ é o retorno proporcional fornecido pelo ativo num período de tempo dt. Como $\sigma dz = \sigma\varepsilon\sqrt{dt}$, essa componente da equação é o termo estocástico do retorno. Assim $\frac{dS}{S}$ é distribuído normalmente com média μdt e desvio padrão $\sigma\sqrt{dt}$.

2.3 Lema de Itô

O preço de uma opção é uma função do ativo e do tempo, ou melhor, o valor de qualquer derivativo é uma função das variáveis estocásticas e do tempo. O Lema de Itô diz que se uma variável x segue o processo de Itô, então uma função de x, sob certas condições, também segue o processo de Itô. Formalizando o lema:

Lema 1 (Itô) *Seja $P(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$. Seja x uma variável (ou o ativo) que segue o processo de Itô, ou seja, $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$, onde dz é o processo de Wiener. Então $P = P(x,t)$ também segue o processo de Itô tal que:*

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}b^2(x,t)\right)dt + \frac{\partial P}{\partial x}b(x,t)dz \tag{2.7}$$

onde dz é o mesmo processo de Wiener do processo do ativo.

Demonstração: Como $P = P(x,t)$, então $dP \approx \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial t}dt$. Para maior precisão, expande-se dP pela série de Taylor, resultando em:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}dxdt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}dt^2 + \cdots \tag{2.8}$$

Mas, por hipótese, $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ e $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$. Substituindo na equação (2.8), temos:

$$\begin{aligned} dP \;&=\; \frac{\partial P}{\partial x}(a(x,t)dt + b(x,t)\varepsilon\sqrt{dt}) + \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(a(x,t)^2dt^2 + b(x,t)^2\varepsilon^2 dt) \\ &\quad + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}(a(x,t)dt + b(x,t)\varepsilon\sqrt{dt})dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}dt^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.9}$$

Eliminando os termos de ordem maior que dt, temos:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}\left(a(x,t)dt + b(x,t)\varepsilon\sqrt{dt}\right) + \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}b^2(x,t)\varepsilon^2 dt \tag{2.10}$$

Como $\varepsilon = N(0,1)$ e variância da distribuição normal padrão é igual a 1.0 temos:

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

onde E denota o valor esperado. Como $E(\varepsilon) = 0$ então $E(\varepsilon^2) = 1$. Daí, o valor esperado de $\varepsilon^2 dt$ é igual a dt.

Portanto,

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}a(x,t)dt + \frac{\partial P}{\partial x}b(x,t)\epsilon\sqrt{dt} + \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}b^2(x,t)dt \tag{2.11}$$

ou

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}b^2(x,t)\right)dt + \frac{\partial P}{\partial x}b(x,t)dz \tag{2.12}$$

Pode-se concluir que o derivativo $P(x,t)$ possui taxa de desvio esperada $\frac{\partial P}{\partial x}a(x,t) + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}b^2(x,t)$ e taxa de variância $\frac{\partial P}{\partial x}^2 b^2(x,t)$.

2.4 Black e Scholes

Alguns conceitos são importantes para a compreensão do modelo de Black e Scholes:

- *Arbitragem*: possibilidade de se ganhar dinheiro quando o fluxo de caixa e o risco de mercado são iguais a zero, ou seja, obtém-se lucro independente da posição tomada.
- *Carteira de Investimentos*: Conjunto de títulos ou bens.
- ***Hedge*** *ou Proteção*: Expediente adotado por compradores e vendedores para se resguardarem de flutuações de preços.

- *Neutralidade da risco*: Quando o retorno esperado é a taxa de juros.

- *Venda a descoberto*: Ocorre quando algum investidor vende algo que não possui, no momento do pagamento, para entrega no futuro com a intenção de gerar lucros neste período. Esta estratégia envolve um elevado grau de risco.

Black e Scholes derivaram uma equação diferencial que deve ser satisfeita pelo preço de qualquer derivativo dependente de uma ação sem dividendos[1]. A solução desta equação diferencial fornece o preço de uma opção européia.

Para a derivação da fórmula, deve-se considerar as seguintes hipóteses:

1. O preço do ativo segue o movimento Browniano geométrico, ou seja, $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ com μ e σ constantes;

2. É permitida a venda a descoberta com total utilização dos recursos;

3. Não há custo de transação nem impostos;

4. Não há dividendos durante a validade do derivativo;

5. Não há oportunidade de arbitragem sem risco;

6. O ativo é negociado continuamente;

7. A taxa de juros é constante e igual para todos os vencimentos.

Suponha que $P(S,t)$ seja o preço de uma opção ou outro derivativo qualquer dependente de S. Como a variável S de P segue o movimento Browniano geométrico:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{2.13}$$

[1] Valor distribuído aos acionistas, em dinheiro, na proporção da quantidade de ações possuídas.

Então pelo Lema de Itô, tem-se:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial S}\mu S + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial P}{\partial S}\sigma S dz \tag{2.14}$$

Na versão discreta, tem-se:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \tag{2.15}$$

e

$$\Delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial S}\mu S + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) \Delta t + \frac{\partial P}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{2.16}$$

Os processos de Wiener para P e S são iguais, ou seja, $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ para os dois movimentos. Dessa forma, o preço do ativo e o preço do derivativo são afetados pela mesma fonte de incerteza. Para eliminar esta incerteza, monta-se uma carteira com uma posição vendida no derivativo e uma posição comprada em $\partial P/\partial S$ ativos. Denotando Π o valor da carteira, então tem-se:

$$\Pi = -P + \frac{\partial P}{\partial S} S \tag{2.17}$$

Mudanças no valor da carteira num intervalo de tempo Δt são dadas por:

$$\Delta\Pi = -\Delta P + \frac{\partial P}{\partial S}\Delta S \tag{2.18}$$

Substituindo os valores de ΔS e ΔP, dados nas equações (2.15) e (2.16) respectivamente, na equação (2.18) temos:

$$\Delta\Pi = -\left[\left(\frac{\partial P}{\partial S}\mu S + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial P}{\partial S}\sigma S \Delta z\right] + \frac{\partial P}{\partial S}(\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z) \tag{2.19}$$

Daí,

$$\Delta\Pi = -\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \tag{2.20}$$

Como Π é uma carteira protegida então sua rentabilidade é a taxa de juros livre de risco r , ou seja, $\Delta\Pi = \Pi r \Delta t$.

Logo,

$$\Pi r \Delta t = -\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \tag{2.21}$$

Cancelando Δt nos dois lados da equação e substituindo Π por $-P + \frac{\partial P}{\partial S} S$ chega-se a equação:

$$\frac{\partial P}{\partial S} Sr + \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = Pr \tag{2.22}$$

A equação (2.22) é a equação diferencial de Black e Scholes, cuja solução depende das condições de fronteira utilizadas.

Para uma opção de venda européia, a principal condição de fronteira é:

$$P = max(X - S, 0) \tag{2.23}$$

sendo X, o preço de exercício.

A solução para esta condição, demonstrada por Black e Scholes, é:

$$P = Xe^{-rt} N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{2.24}$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma \sqrt{t}}$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}$$

$N(x)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada para uma variável que é distribuída normalmente, com média zero e desvio padrão um, ou seja, é a probabilidade da variável ser menor que x e dada por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$$

Capítulo 3

O Problema

Como mencionado anteriormente, Black e Scholes desenvolveram uma solução analítica para opções européias (de compra e de venda). Para opções americanas, deduz-se que a opção de compra não vale a pena ser exercida antes do vencimento e segundo Merton, as opções de venda americana são mais difíceis de se calcular o valor pois existe uma probabilidade positiva de ser exercida prematuramente.

3.1 A opção de venda americana

A opção de venda americana é um contrato que dá direito, ao seu titular, de vender em ou até o vencimento, T, um bem (também chamado de ativo-objeto), de valor S, por um preço determinado no ato do contrato, X. O titular de uma opção de venda aposta na baixa do preço do ativo-objeto, pois quanto menor for o seu valor mais chances ele tem de exercer a opção e gerar mais lucros. Isto fica claro, se observarmos a condição $P \geq max(X - S, 0)$. Ou seja, quanto menor o valor de S ou maior o valor de X, maior será o valor da opção P.

O gráfico a seguir ilustra esta situação.

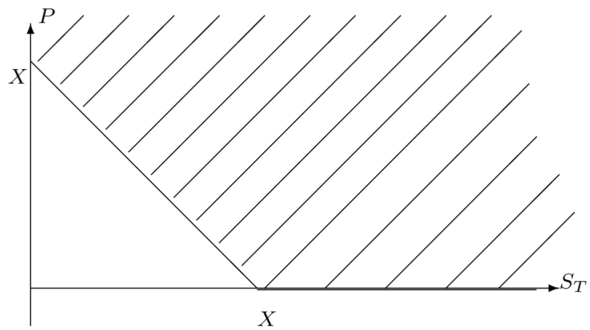


Gráfico de P em função de S, no momento do vencimento.

Outro fator que afeta o valor da opção de venda americana é o tempo para o vencimento. Uma opção de longa duração tem as mesmas possibilidades de exercício que uma opção de curta duração. Logo quanto maior o tempo para o vencimento, maior deverá ser o valor da opção.

Um dos fatores mais importantes que influenciam no valor da opção é a volatilidade, pois é o único parâmetro que não pode ser observado diretamente, apenas estimada a partir de dados históricos sobre a variação do preço do ativo-objeto. A opção vale mais se a volatilidade aumentar, porque se o preço do ativo-objeto tiver uma queda muito grande, maior será o lucro do titular. Mas se o preço do ativo-objeto subir rapidamente, seu prejuízo é limitado pelo prêmio pago pela opção. Já a taxa de juros afeta o preço da opção de maneira inversa, ou seja, conforme aumenta a taxa de juros diminui o valor da opção uma vez que a taxa de juros faz aumentar a taxa de crescimento esperado para o preço do ativo e diminui o fluxo de caixa a ser recebido pelo titular no futuro.

Nos instantes em que o valor do ativo estiver menor que o preço de exercício ($S < X$), diz-se que a opção de venda americana está *dentro-do-dinheiro*, pois teríamos $P > 0$. Quando $S > X$, diz-se que a opção está *fora-do-dinheiro*, pois neste caso $P = 0$. Portanto quanto menor o valor de S, mais *dentro-do-dinheiro* estará a opção. Desse modo o titular da opção de venda americana busca o menor valor possível de S para exercer a opção. Como a opção de venda americana pode ser exercida a qualquer instante até o vencimento, o titular sempre irá se perguntar se um determinado instante é ótimo. Num primeiro instante ele verifica o valor do ativo-objeto e busca no futuro um valor menor. Caso encontre, não irá exercer a opção e continuará verificando até o vencimento.

Pode-se dizer que esta situação é equivalente a uma sequência infinita de opções sobre opções, ou opções compostas.

3.2 Opções Compostas

As opções citadas até aqui (opções européias ou americanas de compra e de venda) são conhecidas como opções tradicionais. As opções que variam destas e têm retornos mais complexos são chamadas de ***opções exóticas***. As opções exóticas não são negociadas nas bolsas, em geral, o negócio é realizado diretamente entre os bancos e as corretoras e seus clientes. Algumas opções exóticas têm soluções analíticas mas a maioria utiliza métodos numéricos para o cálculo do preço da opção.

As ***opções compostas*** ou opções sobre opções são um tipo de opções exóticas que foram avaliadas, originalmente, por Geske [13]. Existem quatro tipos de opções compostas: uma opção de compra sobre uma opção de compra, uma opção de compra sobre uma opção de venda, uma opção de venda sobre uma opção de compra e uma opção de venda sobre uma opção de venda. As opções compostas possuem dois preços de exercício e duas datas de exercício (ou dois tempos para o vencimento). Consideremos uma opção de compra sobre uma opção de compra. Na primeira data de exercício, o titular da opção composta tem o direito de pagar o primeiro preço de exercício e receber uma outra opção de compra que lhe dará o direito de comprar o ativo-objeto pelo segundo preço de exercício, na segunda data de vencimento. A opção será exercida na primeira data se naquele dia, o seu valor for maior que o primeiro preço de exercício. Considerando o movimento browniano geométrico para o preço do ativo, o valor de uma opção de compra sobre uma opção de compra é avaliado analiticamente em termos da distribuição normal bivariada. O valor desta opção composta, sem dividendos, é dado por:

$$SN_2(d_1, -k_1; -\sqrt{T_1/T_2}) - X_2 e^{-rT_2} N_2(d_2, -k_2; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} X_1 N(d_2), \tag{3.1}$$

onde,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/\overline{S}) + (r + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \\ k_1 &= \frac{\ln(S/X_2) + (r + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T_1}, \\ k_2 &= k_1 - \sigma\sqrt{T_2}. \end{aligned}$$

Sendo N_2 a função de distribuição normal bivariada acumulada. A variável $\overline{S}$ é o preço do ativo no instante T_1, pelo qual o preço da opção se iguala X. Se o preço do ativo estiver abaixo de $\overline{S}$ em T_1, a opção será exercida nesse instante. $N_2(d_1, -k_1; -\sqrt{T_1/T_2})$ representa a probabilidade acumulada de uma distribuição normal bivariada padronizada do preço do ativo-objeto, no primeiro instante, estar acima de $\overline{S}$ e, no segundo instante, ser menor que o preço de exercício, X, quando o coeficiente de correlação entre as variáveis é $-\sqrt{T_1/T_2}$.

3.3 A fórmula

Como a opção de venda americana pode ser exercida a qualquer instante até o vencimento, ela é equivalente a uma sequência infinita de opções compostas. Para solucionar o problema de avaliação da opção de venda americana, seja $P(S_0, \sigma^2, r, T, X)$ o preço da opção de venda americana onde:

- S_0 é o preço atual do ativo-objeto;
- σ^2 é a volatilidade;
- r é a taxa de juros livre de risco;
- T é o tempo para o vencimento;
- X é o preço de exercício.

Segue-se as hipóteses utilizadas por Black e Scholes, considerando o mercado perfeito, r e σ constantes e movimento browniano geométrico para o ativo-objeto. O tempo atual é definido como zero e o processo estocástico para as mudanças no preço do ativo-objeto é:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \tag{3.2}$$

onde μ é o retorno esperado do ativo-objeto e dz é o processo de Wiener. Como apenas o preço do ativo e o tempo são considerados variáveis e o preço do ativo é estocástico, então as mudanças no preço da opção de venda americana podem ser caracterizadas pelo Lema de Itô. Do mesmo modo utilizado por Black e Scholes, constrói-se uma carteira protegida com uma posição vendida no derivativo e outra comprada em $\partial P/\partial S$ ativos.

Seguindo todo o processo utilizado em Black e Scholes, o preço da opção de venda americana é descrito pela equação diferencial parcial do tipo parabólico:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = rP - rS\frac{\partial P}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \tag{3.3}$$

Sob a seguinte condição final:

$$P(S,T) \geq max(X - S, 0), \qquad \forall T \geq 0 \tag{3.4}$$

Para encontrar a solução do problema considera-se que cada decisão de exercício é um evento discreto. Então a fórmula deverá ser uma solução em tempo contínuo para a equação (3.3) sujeita a condição de fronteira (3.4) aplicada a um número infinito de eventos discretos.

Em cada instante, a opção será exercida se:

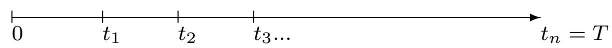
- não foi exercida anteriormente;
- o pagamento pelo exercício for maior ou igual a opção caso ela não seja exercida.

Portanto, em cada instante discreto, no qual há possibilidade de exercício (chamado de ponto de exercício), é calculado um valor para o ativo. Este valor será chamado de preço crítico ($\overline{S}$) e determinará se haverá ou não exercício naquele instante. A opção será exercida se num determinado instante, o preço do ativo for menor que o preço crítico deste instante, dado que o preço do ativo sempre foi maior que o preço crítico nos instantes anteriores, pois não houve exercício. O preço crítico do ativo é independente do preço atual do ativo e é determinado a partir da fronteira livre, dada pela equação (3.4), sempre que

$$X - \overline{S} = P(\overline{S}, T)$$

para algum $S = \overline{S}$ e qualquer T.

Esquematicamente, tem-se:



Em t_i observa-se o seguinte:

S_{t_i} =valor do ativo em t_i

$\overline{S}_{t_i}$ =preço crítico em t_i; $\overline{S}_{t_i} \in (t_i, T]$

A opção será exercida no instante t_i, se $S_{t_i} < \overline{S}_{t_i}$ e $S_{t_j} > \overline{S}_{t_j}, \forall j < i$.

Seja P_1 a opção que só tenha um ponto de exercício e suponha que este ponto seja no vencimento. Nesse caso, P_1 é equivalente a opção européia e o preço crítico para o instante T é o próprio preço de exercício.

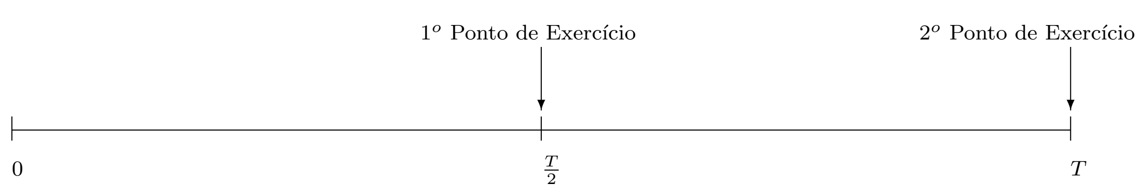
Portanto, por Black e Scholes:

$$P_1 = Xe^{-rT} N\left(-d_2\left(S_0, X, T\right)\right) - S_0\, N\left(-d_1\left(S_0, X, T\right)\right) \tag{3.5}$$

onde:

$$\begin{aligned} d_1(S, \overline{S_t}, t) &= \frac{\ln\left(S/\overline{S_t}\right) + \left(r + (1/2)\sigma^2\right) t}{\sigma\sqrt{t}} \\ d_2(S, \overline{S_t}, t) &= d_1 - \sigma\sqrt{t} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Seja, agora, P_2 a opção que só tenha dois pontos de exercício e suponha que estes pontos sejam no vencimento e na metade do tempo para o vencimento.



No instante $T/2$ não existe a probabilidade da opção já ter sido exercida anteriormente então calcula-se a probabilidade da opção ser exercida neste instante. No vencimento, 2^o ponto de exercício, deve-se calcular a probabilidade da opção ser exercida neste ponto, dado que para chegar até este instante ela não foi exercida no ponto de exercício anterior. Para isso, calcula-se a normal bivariada que determina a probabilidade do preço do ativo no primeiro instante $(T/2)$ estar acima do preço crítico deste mesmo instante $(\overline{S}_{T/2})$ e de no segundo instante (T) ser menor que o segundo preço crítico, que neste caso é próprio preço de exercício X. Usando a avaliação de opções compostas chega-se a conclusão que:

$$\begin{aligned} P_2 &= \widehat{P}_1 + Xe^{-rT} N_2 \left(d_2 \left(S_0, \overline{S}_{T/2}, T/2 \right), -d_2 \left(S_0, X, T \right); -1/\sqrt{2} \right) \\ &\quad - S_0 N_2 \left(d_1 \left(S_0, \overline{S}_{T/2}, T/2 \right), -d_1 \left(S_0, X, T \right); -1/\sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

Onde $\widehat{P}_1$ é a probabilidade da opção ser exercida no primeiro ponto de exercício, ou seja, em $t = T/2$, calculada por Black e Scholes, para um intervalo de tempo $\Delta t = T/2$ com o preço de crítico deste instante denotado por $\overline{S}_{T/2}$. Ou seja,

$$\widehat{P}_1 = Xe^{-rT/2} N_1 \left(-d_2 \left(S_0, \overline{S}_{T/2}, T/2 \right) \right) - S_0 N_1 \left(-d_1 \left(S_0, \overline{S}_{T/2}, T/2 \right) \right)$$

O restante da fórmula calcula a probabilidade da opção ser exercida no 2^o ponto de exercício, ou seja, no vencimento. A função N_2 é a função de distribuição de probabilidade acumulada bivariada com coeficiente de correlação igual a $-1/\sqrt{2}$, dada por:

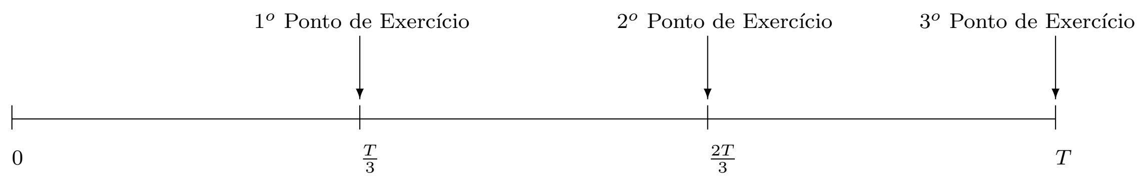
$$N_2(i, j) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{i} \int_{-\infty}^{j} e^{-x^2 - \sqrt{2}xy - y^2} dx dy \tag{3.7}$$

O coeficiente de correlação entre os incrementos brownianos sobrepostos nos tempos t_1 e t_2 $(t_2 > t_1)$ é dado por:

$$\rho_{12} = \frac{cov(\Delta z_1, \Delta z_2)}{[var(\Delta z_1) var(\Delta z_2)]^{1/2}} = (t_1/t_2)^{1/2} \tag{3.8}$$

onde $\Delta z_1 = z(t_1) - z(0)$, $\Delta z_2 = z(t_2) - z(0)$, $cov(x, y) = E[(x - E(x))(y - E(y))]$ e $var(x) = E(x - E(x))^2$. O coeficiente de correlação será sempre negativo entre os argumentos para o último instante e qualquer outro instante.

Considerando que a opção tenha 3 pontos de exercício divididos igualmente no tempo e sendo P_3 o valor desta opção, então os pontos de exercício seriam $T/3$, $2T/3$ e T.



O raciocínio neste caso é análogo ao da opção com 2 pontos de exercício. Porém, no 3^o Ponto de Exercício, deve-se considerar que a opção não foi exercida em dois instantes anteriores. Para isso é necessário o uso da normal trivariada que irá calcular a probabilidade do preço do ativo, no primeiro instante $(\frac{T}{3})$, estar acima do preço crítico deste instante, $(\overline{S}_{T/3})$, no segundo instante $(\frac{2T}{3})$ estar acima do preço critico deste instante, $(\overline{S}_{2T/3})$ e no vencimento, 3^o Ponto de Exercício, estar abaixo de X. No 2^o Ponto de Exercício, deve-se usar a normal bivariada para calcular a probabilidade do preço do ativo no primeiro instante $(\frac{T}{3})$, estar acima do preço crítico deste mesmo ponto $(\overline{S}_{T/3})$ e de estar abaixo do preço crítico no instante $(\frac{2T}{3})$. Seguindo a avaliação de opções compostas conclui-se que:

$$P_3 = \widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2 + \widetilde{P}_3 \tag{3.9}$$

Onde $\widetilde{P}_1$ é a probabilidade da opção ser exercida no 1^o ponto de exercício, $\widetilde{P}_2$ é a probabilidade da opção ser exercida no 2^o ponto de exercício dado que não foi exercida no instante anterior, $\widetilde{P}_3$ é a probabilidade da opção ser exercida no 3^o ponto de exercício dado que não foi exercida nem em $T/3$ e nem em $2T/3$ e são calculados por:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}_1 &= Xe^{-rT/3}N_1\left(-d_2\left(S_0,\overline{S}_{T/3},T/3\right)\right)-S_0N_1\left(-d1\left(S_0,\overline{S}_{T/3}T/3\right)\right)\\
\widetilde{P}_2 &= Xe^{-2rT/3}N_2\left(d_2\left(S_0,\overline{S}_{T/3},T/3\right),-d_2\left(S_0,\overline{S}_{2T/3},2T/3\right);-\rho_{12}\right)\\
&\quad -S_0N_2\left(d_1\left(S_0,\overline{S}_{T/3},T/3\right),-d_1\left(S_0,\overline{S}_{2T/3},2T/3\right);-\rho_{12}\right)\\
\widetilde{P}_3 &= Xe^{-rT}N_3\left(d_2\left(S_0,\overline{S}_{T/3},T/3\right),d_1\left(S_0,\overline{S}_{2T/3},2T/3\right),-d_2\left(S_0,X,T\right);\rho_{12},-\rho_{13},-\rho_{23}\right)\\
&\quad -S_0N_3\left(d_2\left(S_0,\overline{S}_{T/3},T/3\right),d_1\left(S_0,\overline{S}_{2T/3},2T/3\right),-d_2\left(S_0,X,T\right);\rho_{12},-\rho_{13},-\rho_{23}\right)
\end{aligned}
$$

Os coeficientes de correlação ρ_{12}, ρ_{13} e ρ_{23} seguem a fórmula (3.8) e N_3 é a função de distribuição de probabilidade acumulada trivariada, dada por:

$$
N_3(i,j,k)=\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{4\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{i}\int_{-\infty}^{j}\int_{-\infty}^{k}e^{\left(-x^2+\sqrt{2}xy-2y^2-\sqrt{6}yz-\frac{3}{2}z^2\right)}dxdydz \tag{3.10}
$$

Seguindo este raciocínio, pode-se concluir que o valor de uma opção com infinitos pontos exercício no tempo é:

$$
P = Xv_1 - Sv_2 \tag{3.11}
$$

onde os "pesos" v_1 e v_2 são:

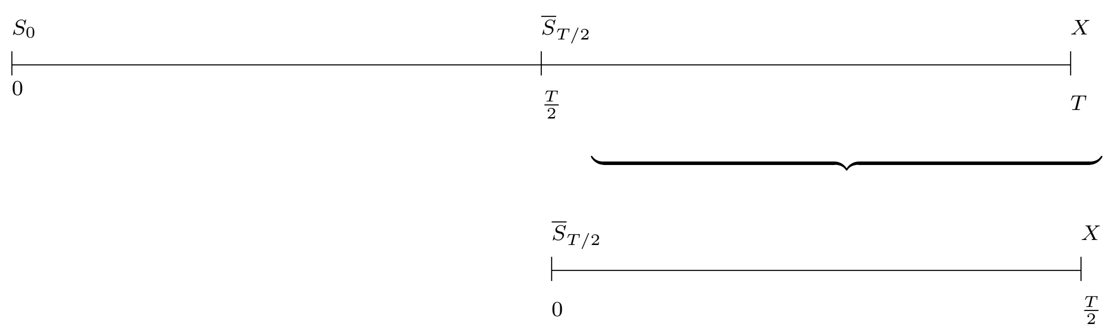
$$
\begin{aligned}
v_1 &= \{N_1(-d_1(S_0,\overline{S}_{dt},dt))\\
&\quad +N_2(d_1(S_0,\overline{S}_{dt},dt),-d_1(S_0,\overline{S}_{2dt},2dt);-\rho_{12})\\
&\quad +N_3(d_1(S_0,\overline{S}_{dt},dt),d_1(S_0,\overline{S}_{2dt},2dt),-d_1(S_0,\overline{S}_{3dt},3dt);\\
&\quad \rho_{12},-\rho_{13},-\rho_{23})+\cdots\}\\
v_2 &= \{e^{-rdt}N_1(-d_1(S_0,\overline{S}_{dt},dt))\\
&\quad +e^{-2rdt}N_2(d_1(S_0,\overline{S}_{dt},dt),-d_1(S_0,\overline{S}_{2dt},2dt);-\rho_{12})\\
&\quad +e^{-3rdt}N_3(d_1(S_0,\overline{S}_{dt},dt),d_1(S_0,\overline{S}_{2dt},2dt),-d_1(S_0,\overline{S}_{3dt},3dt);\\
&\quad \rho_{12},-\rho_{13},-\rho_{23})+\cdots\}
\end{aligned}
$$

Embora esta equação contenha uma série infinita de termos, ela é uma solução exata da equação diferencial parcial (3.3), sujeita a um número infinito de fronteiras de exercícios discretos. Ver Geske [13]

3.4 O preço crítico

Na equação apresentada na seção anterior como solução do problema, somente os preços críticos de cada instante são desconhecidos. Porém, um preço crítico pode ser determinado em qualquer instante para toda data futura antes do vencimento.

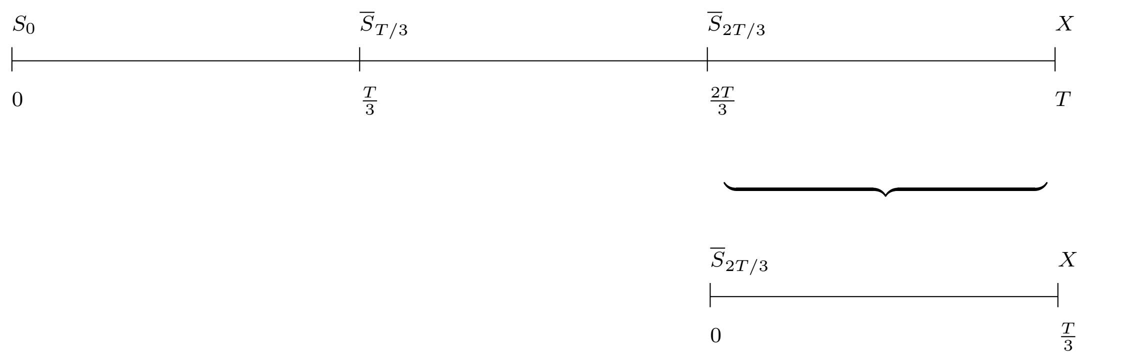
No vencimento o preço crítico é o próprio preço de exercício, pois é o último instante em que pode haver exercício. Portanto para calcular a função P_1 (que só tem um ponto de exercício), basta usar diretamente a fórmula de Black e Scholes. Na função P_2 é necessário calcular o preço critico do instante $T/2$ e isto é feito utilizando-se a função P_1 seguindo a seguinte idéia:

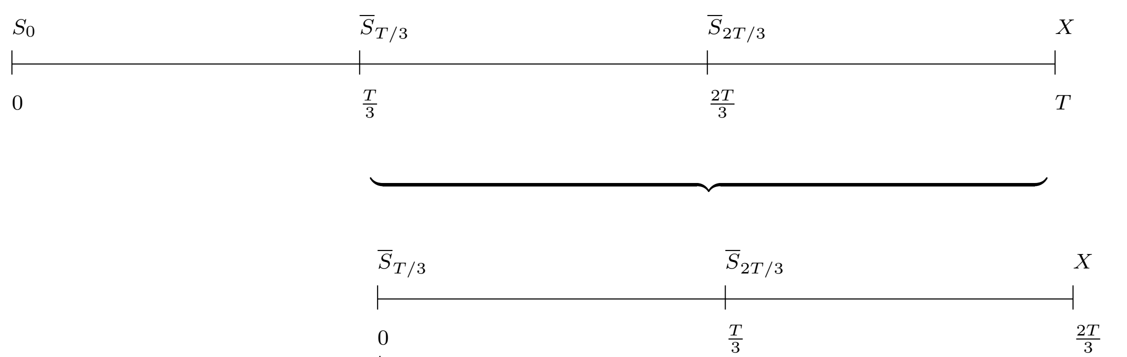


Ou seja, $\overline{S}_{T/2}$ seria o S_0 da função P_1 com intervalo de tempo $\Delta t = T/2$. Assim, $\overline{S}_{T/2}$ é solução da equação:

$$P_1\left(S, X, T/2\right) = X - S \tag{3.12}$$

Para calcular o valor de P_3 é necessário conhecer dois preços críticos, $\overline{S}_{T/3}$ e $\overline{S}_{2T/3}$. A idéia é semelhante ao caso anterior para se conhecer o valor de $\overline{S}_{2T/3}$. A partir daí utiliza-se a função P_2 e o preço critico do instante $2T/3$, conhecido anteriormente, para descobrir o valor de $\overline{S}_{T/3}$, seguindo os seguintes esquemas:





O preço crítico do tempo $T/3$ será o S_0 da função P_2 para um intervalo de tempo $\Delta t = 2T/3$. O valor de $\overline{S}_{2T/3}$, calculado anteriormente para a função P_1 com intervalo de tempo $\Delta t = T/3$, representará o preço critico do tempo $T/2$ em $P_2(S, 2T/3)$. Dessa forma, $\overline{S}_{2T/3}$ é solução da equação:

$$P_1(S, X, T/3) = X - S. \tag{3.13}$$

E $\overline{S}_{T/3}$ resolve a equação:

$$P_2(S, X, 2T/3) = X - S. \tag{3.14}$$

Capítulo 4

Resolvendo o Problema

Para encontrar o primeiro preço crítico ($\overline{S}_{T/2}$) deve-se resolver a equação (3.12) que é equivalente, a determinar o zero da função $f(S) = X - S - P_1(S, X, T/2)$. Do mesmo modo, resolve-se as equações (3.13) e (3.14) calculando o zero das funções
$f(S) = X - S - P_1(S, X, T/3)$ e $f(S) = X - S - P_2(S, X, 2T/3)$ respectivamente. Existem vários métodos para se calcular zero de função. Neste trabalho, o método utilizado é o método de Newton-Raphson, em razão de sua convergência quadrática.

4.1 O Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é usado para calcular raízes ou zeros de função baseando-se no polinômio de Taylor. Sejam $f \in C^2[a, b]$ e $\overline{x} \in [a, b]$ uma aproximação de p, onde $f(p) = 0$, $f^{'}(\overline{x}) \neq 0$ e $\|p - \overline{x}\| < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

O polinômio de Taylor de 1º grau para $f(x)$ em torno de $\overline{x}$ é:

$$f(x) = f(\overline{x}) + (x - \overline{x})f'(x) + \frac{(x - \overline{x})^2}{2} f''(\xi(x)), \qquad x < \xi(x) < \overline{x}$$

Fazendo $x = p$ então

$$0 = f(\overline{x}) + (p - \overline{x})f'(x) + \frac{(p - \overline{x})^2}{2} f''(\xi(p))$$

Como $|p - \overline{x}| < \varepsilon$ é muito pequeno então $|p - \overline{x}|^2 < \varepsilon^2$ será menor ainda.

Daí,

$$\begin{aligned}
0 &\approx f(\overline{x}) + (p - \overline{x})f'(x) \\
0 &\approx f(\overline{x}) + pf'(x) - \overline{x}f'(x) \\
pf'(x) &\approx \overline{x}f'(x) - f(\overline{x}) \\
p &\approx \frac{\overline{x}f'(x) - f(\overline{x})}{f'(x)} \\
p &\approx \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(x)}
\end{aligned}$$

Assim, pode-se definir a seguinte recorrência para determinação da raiz aproximada:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

onde p_0 é a aproximação inicial e $\varphi(p_n) = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$ é denominada função de iteração.

Então para encontrar os preços críticos utiliza-se o método de Newton-Raphson onde $f(S) = X - S - P$ de tal forma que:

$$S_{i+1} = S_i - \frac{f(S_i)}{f'(S_i)}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots$$

e a aproximação inicial S_0 será o valor de S_0, ou seja, o preço inicial do ativo.

Conhecidos os preços críticos, o objetivo agora é encontrar o valor de P. O valor da opção de venda americana será o limite da sequência $\{P_n, n \in \mathbf{N}\}$. Existem várias técnicas para calcular este tipo de limite. A técnica aqui utilizada será a extrapolação de Richardson.

4.2 Extrapolação de Richardson

A extrapolação de Richardson permite a determinação do valor limitante de alguma sequência conforme o "comprimento do passo" h se aproxima de zero. Neste problema, o comprimento do passo é o intervalo de tempo entre os pontos de exercício. Esta extrapolação leva a uma equação polinomial que pode ser usada para determinar os valores da opção de venda americana.

O raciocínio utilizado na extrapolação de Richardson é o seguinte:

Seja M o valor desconhecido e $N(h)$ uma aproximação de M com $h \neq 0$. Daí, tem-se que $M - N(h) = k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \ldots$, onde k_i são constantes desconhecidas. De modo geral $M - N(h) \approx k_1 h$ com erro de truncamento $O(h)$.

Então tem-se a seguinte equação:

$$M = N(h) + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \ldots \tag{4.1}$$

ou

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + k_1 \frac{h}{2} + k_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + k_3 \left(\frac{h}{2}\right)^3 + \ldots \tag{4.2}$$

Multiplicando a equação (4.2) por 2 tem-se:

$$2M = 2N\left(\frac{h}{2}\right) + k_1 h + k_2 \frac{h^2}{2} + k_3 \frac{h^3}{4} + \ldots \tag{4.3}$$

Subtraindo a equação (4.1) da equação (4.3) chega-se a:

$$M = 2N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h) + k_2 \left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + k_3 \left(\frac{h^3}{4} - h^3\right) + \ldots \tag{4.4}$$

ou

$$M = N\left(\frac{h}{2}\right) + N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h) + k_2 \left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + k_3 \left(\frac{h^3}{4} - h^3\right) + \ldots \tag{4.5}$$

Seja $N_1(h) = N(h)$ e $N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right)$

Logo,

$$M = N_2(h) - k_2\frac{h^2}{2} - 3k_3\frac{h^3}{4} - \dots \tag{4.6}$$

A equação (4.6) é de ordem h^2.

Substituindo h por $\frac{h}{2}$:

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - k_2\frac{h^2}{8} - 3k_3\frac{h^3}{32} - \dots \tag{4.7}$$

Multiplicando a equação (4.7) por 4 tem-se:

$$4M = 4N_2\left(\frac{h}{2}\right) - k_2\frac{h^2}{2} - 3k_3\frac{h^3}{8} - \dots \tag{4.8}$$

Subtraindo a equação (4.6) da equação (4.8) chega-se a:

$$3M = 4N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h) + 3k_3\frac{h^3}{8} + \dots \tag{4.9}$$

Daí,

$$M = \frac{4}{3}N_2\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{N_2(h)}{3} + k_3\frac{h^3}{8} + \dots \tag{4.10}$$

ou

$$M = \left[N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)}{3}\right] + k_3\frac{h^3}{8} + \dots \tag{4.11}$$

A equação (4.11) é de ordem h^3.

Continuando o raciocínio tem-se uma aproximação de $O(h^j)$ da forma:

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1}$$

Para aplicar esta extrapolação no problema de precificação da opção de venda americana, considera-se $P_1 = F(h)$ a função com passo de tamanho h com a seguinte forma:

$$F(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + O(h^3) \tag{4.12}$$

O objetivo é determinar o valor de a_0, pois $\lim\limits_{h\to 0} F(h) = a_0$.

Desta forma, pode-se escrever $P_2 = F\left(\frac{h}{2}\right)$ tal que:

$$F\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + O(h^3) \tag{4.13}$$

E também $P_3 = F\left(\frac{h}{3}\right)$ da seguinte forma:

$$F\left(\frac{h}{3}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{h}{3}\right) + a_2\left(\frac{h}{3}\right)^2 + O(h^3) \tag{4.14}$$

Resolvendo as equações (4.12), (4.13) e (4.14) simultaneamente e eliminando os termos de terceira ordem ou mais, chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} P_1 = & a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \\ P_2 = & a_0 + a_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\left(\frac{h^2}{4}\right) \\ P_3 = & a_0 + a_1\left(\frac{h}{3}\right) + a_2\left(\frac{h^2}{9}\right) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para encontrar o valor de a_0 e fazendo $P = a_0$, chega-se a seguinte equação polinomial:

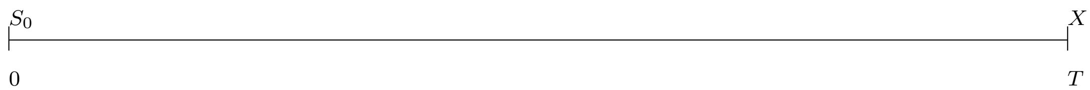
$$P = \frac{9}{2}P_3 - 4P_2 + \frac{1}{2}P_1 \tag{4.15}$$

Onde P é o valor da opção de venda americana procurado. Entretanto, Chang, Chung e Stapleton [8] encontraram casos em que as seguintes condições acontecem: $P_1 < P_2$ e $P_2 > P_3$. Causando, assim, problemas de convergência, uma vez que o valor da opção aumenta quando o passo é alterado de 1 para 2 mas diminui quando alterado de 2 para 3. Portanto, para evitar este tipo de problema, utiliza-se uma sequência em que cada conjunto de oportunidade inclui o anterior. Ou seja, a oportunidade da opção com 1 ponto de exercício deve estar contida na opção com 2 pontos de exercício, cujas oportunidades devem estar contidas na opção seguinte. A próxima opção que irá conter todas as oportunidades da opção com 2 pontos de exercício é a opção com 4 pontos de exercício. Portanto, deve-se utilizar passos geométricos no tempo.

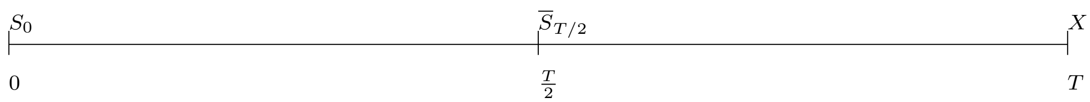
4.3 Passos Geométricos

Utilizar passos geométricos significa discretizar o tempo em 1, 2, 4, 8,... intervalos de tempo iguais. Ou seja, deve-se encontrar:

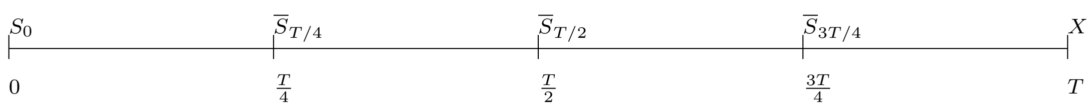
P_1: 1 ponto de exercício



P_2: 2 pontos de exercício



P_4: 4 pontos de exercício



Utilizando a extrapolação de Richardson com passos geométricos tem-se $F(h)$ como descrito na equação (4.12) com $\lim_{h \to 0} F(h) = a_0$.

Deste modo,

$P_1 = F(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + O(h^3)$,

$P_2 = F\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + a_1 \frac{h}{2} + a_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + O(h^3)$ e

$P_4 = F\left(\frac{h}{4}\right) = a_0 + a_1 \frac{h}{4} + a_2 \left(\frac{h}{4}\right)^2 + O(h^3)$.

Eliminando os termos de ordem superior a dois, chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} P_1 = & a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \\ P_2 = & a_0 + a_1 \frac{h}{2} + a_2 \frac{h^2}{4} \\ P_4 = & a_0 + a_1 \frac{h}{4} + a_2 \frac{h^2}{16} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para encontrar o valor de a_0 e fazendo $P = a_0$, chega-se a seguinte equação polinomial :

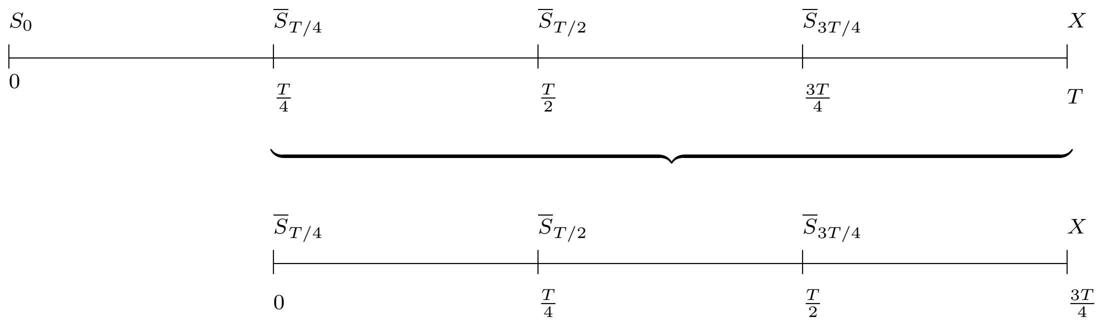
$$P = \frac{8}{3} P_4 - 2P_2 + \frac{1}{3} P_1 \tag{4.16}$$

Desta forma, fica assegurado que não haverá problemas de convergência pois todos os pontos de exercício de P_1 estão incluídos em P_2, que por sua vez estão incluídos em P_4. Logo, garante-se que $P_1 \leq P_2 \leq P_4$.

Mas para calcular P_4, seguindo a fórmula (3.11), deve-se usar a normal multivariada de ordem igual a 4, dada por:

$$N_4(i,j,k,u) = \frac{\sqrt{6}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{i} \int_{-\infty}^{j} \int_{-\infty}^{k} \int_{-\infty}^{u} e^{\left(-x^2 + \sqrt{2}xy - 2y^2 + \sqrt{6}yz - 3z^2 - 2\sqrt{3}zw - 2w^2\right)} dxdydzdw \tag{4.17}$$

E o preço crítico do instante $T/4$, $\overline{S}_{T/4}$ é a solução da equação $P_3(S, X, 3T/4) = X - S$ seguindo o esquema:



Portanto, para se calcular o valor da opção americana, será necessário o cálculo de duas integrais simples para P_1, duas integrais simples e duas integrais duplas para P_2 e duas integrais simples, duas integrais duplas, duas integrais triplas e duas integrais quádruplas para P_4. Além disso, os preços críticos são raízes de equações que envolvem integrais múltiplas. Isto torna o cálculo do valor da opção muito dispendioso. Geske [12] mostra como reduzir estas integrais. Porém, uma interpretação do problema através dos preços críticos, fornece um cálculo mais simples e mais rápido computacionalmente.

4.4 Simplificando a fórmula

As interpretações econômicas são utilizadas para tentar simplificar a solução de problemas matemáticos, aplicados ao mercado financeiro. Acompanhando-se o que acontece na prática, os economistas evitam transformações complexas, geralmente necessárias para soluções de equações matemáticas. Nesta seção, uma interpretação será utilizada com a intenção de simplificar os cálculos do problema apresentado.

Seja $\overline{S} \equiv \{\overline{S}_t, \overline{S}_t \geq 0, t \in [0, T]\}$ o conjunto dos preços críticos que denota uma fronteira onde o exercício antecipado, ou seja, antes do vencimento é ótimo. A função

$P(S_t,t) \in C^{1,1}$ em $[\overline{S},\infty] \times [0,T]$ e é de classe $C^{2,1}$ em $(\overline{S},\infty] \times [0,T]$. Como a condição de fronteira da opção de venda americana no vencimento é $P(S_T,T) = max(X - S, 0)$ então:

$$\lim_{S_t \to \infty} P(S_t,t) = 0 \tag{4.18}$$

$$\lim_{S_t \to \overline{S}_t} P(S_t,t) = X - \overline{S}_t \tag{4.19}$$

$$\lim_{S_t \to \overline{S}_t} \frac{\partial P(S_t,t)}{\partial S_t} = -1 \tag{4.20}$$

Seguindo a direção dada por Carr, Jarrow e Mynemi [7], considerando $\phi(S_t, S_0)$ a função de risco neutro transicional do preço do título básico, então a expressão para a opção de venda americana sem dividendos é:

$$P = p_0 + rX \int_0^T e^{-rt} \int_0^{\overline{S}_t} \phi(S_t, S_0) dS_t dt \tag{4.21}$$

onde p_0 é o valor da opção de venda européia.

Esta equação pode ser interpretada da seguinte maneira:

I - A primeira parcela, valor da opção européia, é o valor do pagamento garantido da opção de venda, ou seja, no mínimo a opção de venda americana vale o mesmo que a européia no caso do vencimento ter sido o momento ótimo para o exercício;

II - A segunda parcela é o valor presente dos benefícios do exercício antecipado da opção, ganhos através dos juros recebidos com o exercício.

Pode-se juntar estes valores, seguindo a estratégia sugerida por Carr, Jarrow e Mynemi [7] que converte uma opção de venda americana em uma opção de venda européia. Assumindo o processo (2.13) para o preço do ativo, a equação (4.21) torna-se:

$$P = p_0 + \int_0^T \left[rXe^{-rt} N_1(-d_2(S_0, \overline{S}_t, t)) \right] dt \tag{4.22}$$

onde p_0 é o valor da opção de venda européia dado por Black e Scholes, d_2 é a mesma função dada em (3.6) e N_1 é a normal padrão univariada.

Seguindo a equação (4.22), os valores de P_1, P_2 e P_4 são:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= Xe^{-rT}N_1(-d_2(S_0,X,T)) - S_0N_1(-d_2(S_0,X,T)) \qquad (4.23)\\
P_2 &= P_1 + \frac{rXT}{2}e^{-rT/2}N_1(-d_2(S_0,\overline{S}_{T/2},T/2))\\
P_4 &= P_1 + \frac{rXT}{4}[e^{-rT/4}N_1(-d_2(S_0,\overline{S}_{T/4},T/4)) + e^{-rT/2}N_1(-d_2(S_0,\overline{S}_{T/2},T/2)) +\\
&\quad e^{-r3T/4}N_1(-d_2(S_0,\overline{S}_{3T/4},3T/4))]
\end{aligned}
$$

Os preços críticos são calculados seguindo os esquemas apresentados anteriormente e utilizando o método de Newton. É utilizada a extrapolação de Richardson com passos geométricos no tempo e a equação polinomial (4.16) calcula o valor da opção de venda para os valores encontrados pelas equações dadas em (4.23). Estes valores são obtidos utilizando-se somente a normal univariada. Para achar o valor da opção de venda americana será necessário calcular apenas 4 preços críticos.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo serão realizadas simulações para calcular o valor de uma opção de venda americana, utilizando para isto, o barril de petróleo e uma ação da Petrobrás como sendo o ativo-objeto. No apêndice se encontram o histórico dos preços destes ativos no período de um ano. As informações foram obtidas no site da Petrobrás (www.petrobras.com.br), sendo que DU significa dias úteis (ou dias em que o ativo foi negociado).

5.1 Simulações

Para determinar o valor da opção de venda americana é necessário conhecer o valor do ativo na data da compra da opção, o tempo para o vencimento, o preço de exercício, a taxa de juros e a volatilidade.

O valor do ativo é dado pela tabela que se encontra no apêndice, na data que for escolhida para a compra da opção. O tempo para o vencimento será de 6 meses e o preço de exercício é definido no contrato. Nestas simulações cada ativo terá o seu respectivo preço de exercício. A taxa de juros considerada para as simulações será a taxa ***SELIC*** (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) do período correspondente. Para se determinar a volatilidade é necessária uma análise dos valores passados dos ativos.

5.1.1 Volatilidade

Para estimar a volatilidade dos preços do ativo-objeto, precisa-se estipular de que modo serão observados (por exemplo, diariamente, semanalmente ou mensalmente). Como $S_i = S_{i-1}e^{u_i}$, u_i é a taxa de retorno dada por:

$$u_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \tag{5.1}$$

A volatilidade é obtida pela fórmula do desvio padrão, dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(u_i - \mu)^2} \tag{5.2}$$

onde μ é a média dos retornos dada por:

$$\mu = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} u_i \tag{5.3}$$

Se os preços do ativo são observados diariamente e ano tem 250 dias úteis, então a volatilidade histórica anual é dada pela seguinte fórmula:

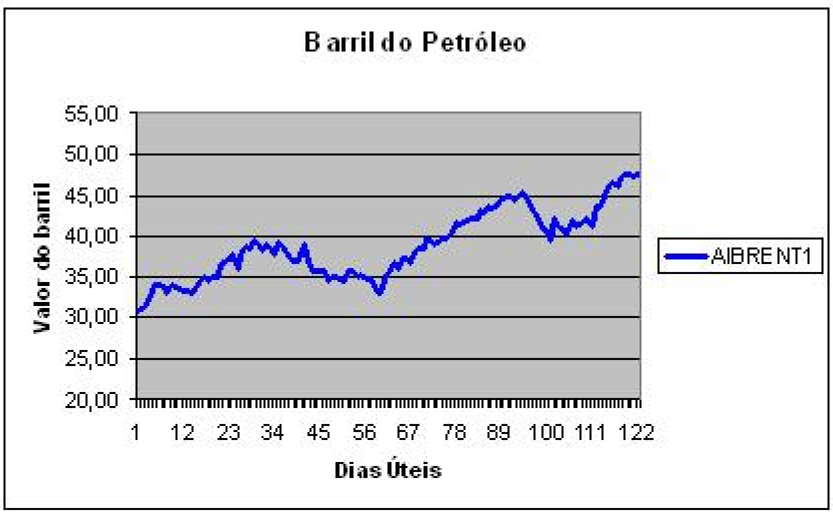
$$\sigma_{anual} = \sqrt{250}\ \sigma_{dia} \tag{5.4}$$

5.1.2 Simulação 1

Na tabela 1 estão os valores do barril de petróleo no período de 1 ano compreendido entre 01/04/2004 e 31/03/2005. Para esta simulação suponha que a opção será comprada no dia 01/10/04, ou seja, na metade do tempo no qual os valores foram colhidos. Nesta data, o valor do ativo foi de $US\$\ 47,35$. A data de vencimento será o dia 31/03/2005, ou seja, o tempo para o vencimento será de 6 meses. Suponha que o preço de exercício seja $X = US\$ \, 50,00$ e a taxa SELIC anual neste período era de $16,12\%$, segundo informações obtidas no site do Banco Central (www.bcb.gov.br). A taxa de juros transformada para taxa de juros contínua livre de risco será:

$$r = ln(1 + 0,1612) = 0,1495 = 14,95\%.$$

O gráfico a seguir, mostra o caminho dos preços do barril do petróleo no período analisado.



Para determinar a volatilidade, utiliza-se os valores encontrados nos 6 primeiros meses colhidos, ou seja, nos primeiros 122 dias úteis. A primeira etapa é determinar a média dos retornos, fazendo:

$$\mu = \frac{1}{122}\sum_{i=1}^{122} ln(S_{i+1}/S_i) = 0,0032.$$

Daí, a volatilidade diária será:

$$\sigma_{dia} = \sqrt{\frac{1}{122}\sum_{i=1}^{122}(ln(S_{i+1}/S_i) - 0,0032)^2} = 0,0216.$$

E a volatilidade histórica anual será de:

$$\sigma_{anual} = \sqrt{250}\sigma_{dia} = 0,3427.$$

Portanto, para esta simulação, tem-se:

- $S_0 = 47,35$
- $T = 6$ meses $= 1/2$ ano
- $X = 50,00$
- $r = 14,95\%$
- $\sigma = 0,3427$

Usando a equação (4.16) para encontrar o valor da opção de venda americana no dia 01/10/2004, conclui-se que:

$$P \cong US\$\ 4,66.$$

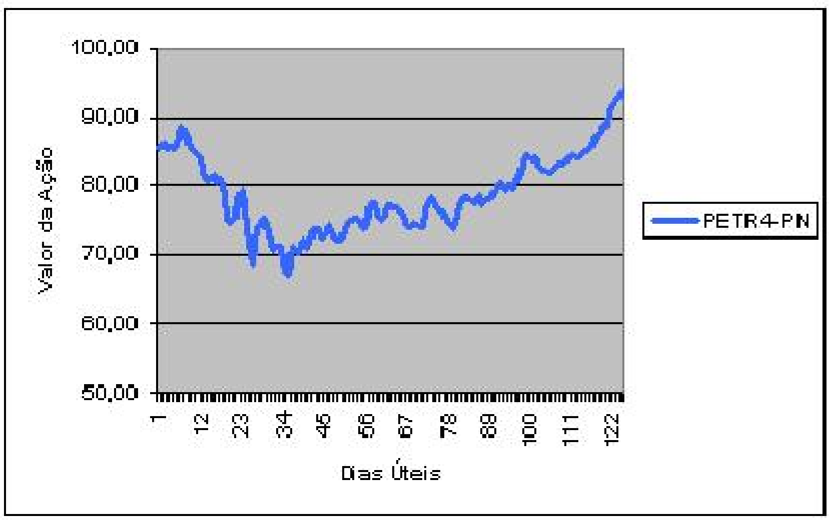
Alterando o preço de exercício com o intuito de analisar o que ocorre com o valor da opção chega-se aos seguintes resultados:

X	P (em $US\$$)
40,00	0,92
45,00	2,27
47,35	3,25
60,00	12,80
70,00	22,73

Pode-se concluir que quanto maior o preço de exercício maior será o valor da opção de venda americana.

5.1.3 Simulação 2

Na tabela 2, do apêndice, encontram-se os valores da ação da Petrobás, PETR4-PN no período de 01/01/2004 a 31/03/2005. Esta simulação será realizada do mesmo modo que a anterior, ou seja, considerando a metade do tempo como sendo a data de compra da opção de venda. Como foram observados valores em 247 dias úteis, a data de compra da opção será o dia 28/09/2004. Neste dia a ação fechou com o preço de $R\$ \ 93,84$. O preço de exercício será de $R\$ \ 100,00$ e a taxa de juros é a mesma, que passada para taxa contínua será $14,95\%$. O gráfico a seguir. mostra o caminho percorrido pelo valor do ativo.



A volatilidade será calculada pela análise dos valores da ação nos primeiros 124 dias úteis. Daí, a média dos retornos é:

$$\mu = \frac{1}{124}\sum_{i=1}^{124} ln(S_{i+1}/S_i) = 0,0007.$$

E a volatilidade diária será:

$$\sigma_{dia} = \sqrt{\frac{1}{124}\sum_{i=1}^{124}(ln(S_{i+1}/S_i) - 0,0007)^2} = 0,0192.$$

A volatilidade histórica anual será de:

$$\sigma_{anual} = \sqrt{250}\sigma_{dia} = 0,3037.$$

Para esta simulação os valores iniciais são:

- $S_0 = 93,84$
- $T = 6$ meses $= 1/2$ ano
- $X = 100,00$
- $r = 14,95\%$
- $\sigma = 0,3037$

Pela equação (4.16), o valor da opção de venda americana no dia 01/10/2004, da ação PETR4-PN é:

$$P \cong R\$ \ 8,89.$$

Fazendo alterações no preço de exercício para uma análise do valor da opção, chega-se aos seguintes resultados:

X	P (em $R\$$)
80,00	1,39
90,00	3,94
93,84	5,50
95,00	6,06
110,00	16,71

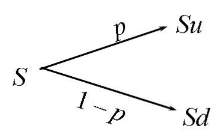
Novamente pode-se observar que quanto maior o preço de exercício maior será o valor da opção de venda americana.

5.2 Comparações

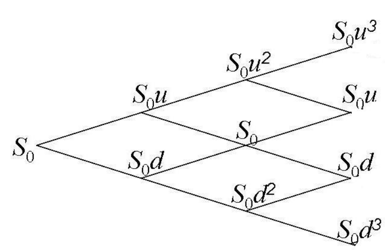
Nesta seção serão feitas algumas comparações, com métodos já existentes para calcular o valor de uma opção de venda americana, com a finalidade de testar a qualidade do modelo baseado na extrapolação de Richardson.

5.2.1 Modelo Binomial

Em 1979, Cox, Ross e Rubinstein [9] desenvolveram o modelo binomial. Este modelo considera a vida da opção dividida em pequenos intervalos de tempo de extensão Δt. Em cada intervalo de tempo, o valor do ativo pode aumentar u vezes, com probabilidade p ou diminuir d vezes com probabilidade $1-p$, onde u e v estão relacionados com a variância. A figura a seguir, mostra uma árvore binomial de um passo.



Cox, Ross e Rubinstein utilizaram a condição $u = 1/d$ para tornar a árvore recombinante, no sentido de que um movimento ascendente, seguido por um movimento descendente, conduz ao mesmo preço que um movimento descendente, seguido por um movimento ascendente. Isto reduz o número de nós da árvore.



As opções são avaliadas do fim ao começo da árvore. Para opções americanas é necessário verificar em cada nó da árvore, se o exercício antecipado será melhor que manter a opção por um mais um período de tempo Δt. Isto significa que para um intervalo de tempo muito pequeno, o número de análises será muito grande.

Aplicando o modelo binomial aos valores da simulação 1, cujo ativo-objeto é o barril de petróleo negociado pela Petrobrás, o valor encontrado para a opção de venda americana foi:

$$P \cong US\$\ 4,70.$$

Para a ação da Petrobrás, considerada na simulação 2, o modelo binomial chegou ao seguinte valor para a opção de venda americana:

$$P \cong R\$\ 8,86.$$

A tabela a seguir mostra a comparação entre os resultados do método da extrapolação de Richardson e o modelo binomial para as simulações anteriores.

Ativo	extrapolação	Binomial
barril de petróleo	$US\$\ 4,66$	$US\$\ 4,70$
ação da Petrobrás	$R\$\ 8,89$	$R\$\ 8,86$

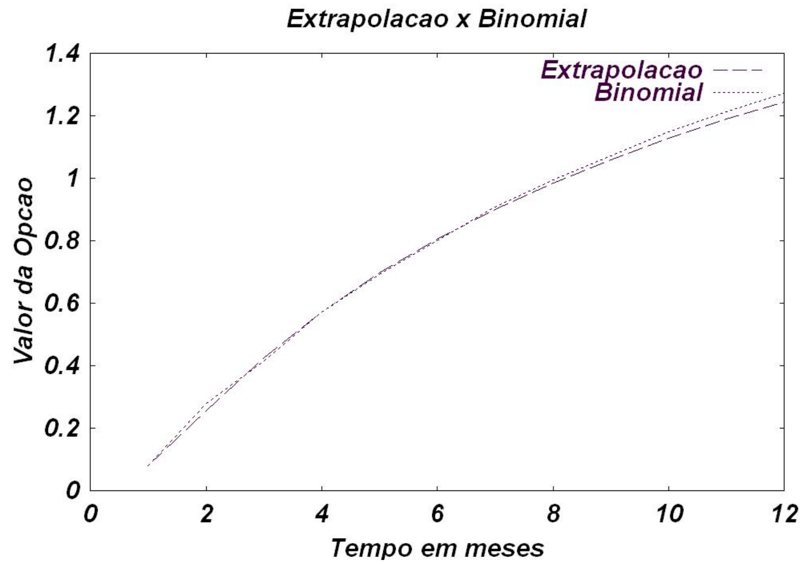
Agora, serão feitas comparações utilizando valores diversos para o valor inicial do ativo, preço de exercício, taxa de juros, volatilidade e tempo para o vencimento.

Nesta comparação, a opção será calculada no período de um ano, mensalmente. E considera-se para as demais componentes, os seguintes valores: $S_0 = 50$, $X = 45$, $r = 13\%$ e $\sigma = 25\%$.

A tabela a seguir, mostra os valores aproximados encontrados e o erro entre os dois modelos:

Tempo em Meses	extrapolação	Binomial	Erro
1	0,079	0,078	0,0015
2	0,257	0,257	0,0001
3	0,425	0,422	0,0034
4	0,571	0,583	0,0121
5	0,697	0,710	0,0130
6	0,806	0,816	0,0105
7	0,901	0,906	0,0053
8	0,985	0,988	0,0026
9	1,060	1,061	0,0002
10	1,128	1,133	0,0051
11	1,189	1,199	0,0106
12	1,244	1,265	0,0213

O gráfico abaixo mostra o caminho do valor da opção, para os dois modelos.



5.2.2 Inequações Variacionais

Em 2004, Israel [17] calculou o preço da opção de venda americana, mostrando que o sistema de inequações variacionais

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + AU - rU \leq 0 \;\; e \;\; U \geq \psi, & em \;\; \mathbb{R}^n \times [0,T] \\ (\frac{\partial U}{\partial t} + AU - rU)(\psi - U) = 0, & em \;\; \mathbb{R}^n \times [0,T] \\ U(X,T) = \psi(X,T), & em \;\; \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

possui solução única. E utilizou o método de elementos finitos e o método de diferenças finitas para resolver a inequação variacional

$$\frac{\partial U}{\partial t}(X,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(X,t) + rX\frac{\partial U}{\partial X}(X,t) - rU(X,t) \leq 0$$

com obstáculo ψ tal que $U(X,t) \geq \psi(X,t)$, onde $(X,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Calculando o valor da opção de venda americana, cujo ativo-objeto é o barril de petróleo da simulação 1, pelo modelo de inequação variacional, chega-se ao seguinte resultado:

$$P \cong US\$\ 4,67.$$

E para o ativo-objeto da simulação 2, ou seja, a ação da Petrobrás PETR4-PN, o valor encontrado para a opção de venda americana foi de:

$$P \cong R\$\ 8,87.$$

A tabela a seguir mostra a comparação entre o método da extrapolação de Richardson e o método da inequação variacional para as simulações realizadas.

Ativo	extrapolação	Inequação
barril de petróleo	$US\$\ 4,66$	$US\$\ 4,67$
ação da Petrobrás	$R\$\ 8,89$	$R\$\ 8,87$

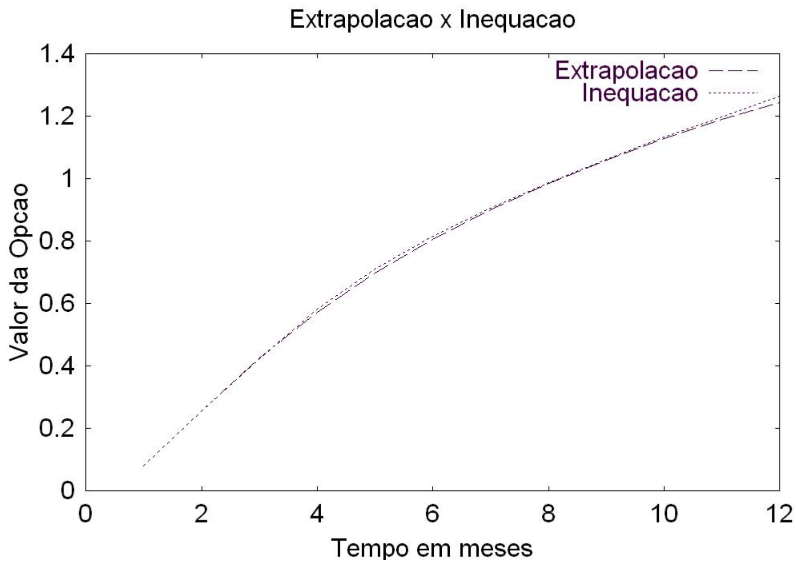
Agora, serão feitas comparações utilizando os mesmos valores aleatórios da comparação com o modelo binomial para o valor inicial do ativo, preço de exercício, taxa de juros, volatilidade e tempo para o vencimento.

Novamente, a opção será calculada no período de um ano, mensalmente. E os valores para as demais componentes, são os seguintes : $S_0 = 50$, $X = 45$, $r = 13\%$ e $\sigma = 25\%$.

A tabela a seguir, mostra os valores aproximados encontrados e o erro entre os dois modelos:

Tempo em Meses	extrapolação	Inequações	Erro
1	0,079	0,079	0,00003
2	0,257	0,259	0,00203
3	0,425	0,415	0,01006
4	0,571	0,571	0,00004
5	0,697	0,693	0,00367
6	0,806	0,801	0,00457
7	0,901	0,908	0,00694
8	0,985	0,994	0,00869
9	1,060	1,071	0,01064
10	1,128	1,150	0,02226
11	1,189	1,213	0,02434
12	1,244	1,272	0,02792

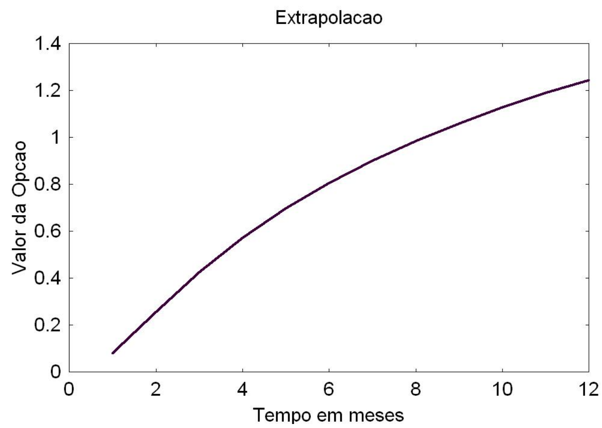
O gráfico abaixo mostra o caminho do valor da opção, para os dois modelos.

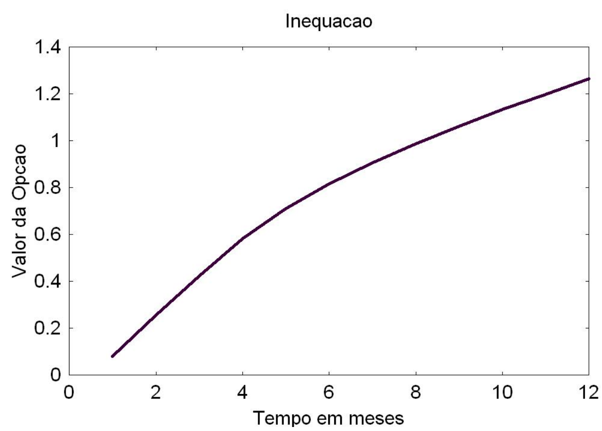


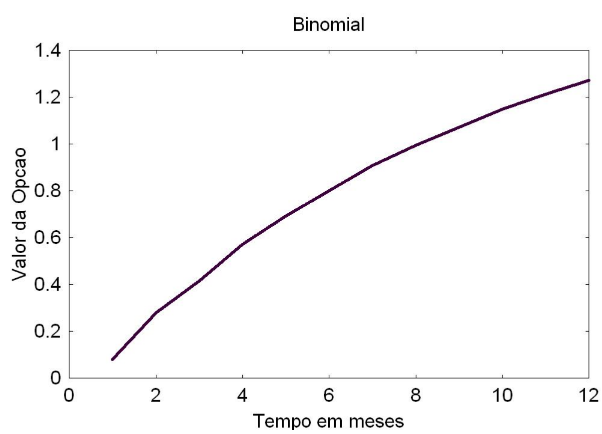
A tabela a seguir compara os resultados dos três métodos simultaneamente.

extrapolação	Inequações	Binomial
0,079	0,079	0,078
0,257	0,259	0,257
0,425	0,415	0,422
0,571	0,571	0,583
0,697	0,693	0,710
0,806	0,801	0,816
0,901	0,908	0,906
0,985	0,994	0,988
1,060	1,071	1,061
1,128	1,150	1,133
1,189	1,213	1,199
1,244	1,272	1,265

A seguir, os gráficos são apresentados separadamente.







Pode-se concluir, através das simulações realizadas e das comparações com o outros métodos já desenvolvidos que, apesar de não termos uma solução analítica, o modelo baseado na solução dada por Black e Scholes e na extrapolação de Richardson oferece uma boa aproximação dos valores reais, de uma maneira prática e computacionalmente rápido, sem a necessidade de uma matemática mais complexa.

Apêndice A

Tabela 1

DU	DATA	S (US$)	DU	DATA	S (US$)	DU	DATA	S (US$)
1	01/04/04	31,98	16	26/04/04	33,85	31	17/05/04	38,97
2	02/04/04	30,90	17	27/04/04	34,40	32	18/05/04	38,19
3	05/04/04	31,21	18	28/04/04	34,94	33	19/05/04	38,92
4	06/04/04	31,56	19	29/04/04	34,37	34	20/05/04	38,55
5	07/04/04	33,40	20	30/04/04	35,12	35	21/05/04	37,61
6	08/04/04	33,92	21	03/05/04	35,12	36	24/05/04	39,10
7	12/04/04	33,96	22	04/05/04	36,39	37	25/05/04	38,29
8	13/04/04	33,79	23	05/05/04	37,08	38	26/05/04	37,90
9	14/04/04	33,04	24	06/05/04	37,25	39	27/05/04	37,06
10	15/04/04	33,99	25	07/05/04	37,65	40	28/05/04	36,98
11	16/04/04	33,85	26	10/05/04	36,02	41	31/05/04	36,98
12	19/04/04	33,65	27	11/05/04	37,68	42	01/06/04	38,98
13	20/04/04	33,46	28	12/05/04	38,74	43	02/06/04	37,64
14	22/04/04	33,42	29	13/05/04	38,63	44	03/06/04	35,94
15	23/04/04	33,21	30	14/05/04	39,40	45	04/06/04	35,91

DU	DATA	S (US$)	DU	DATA	S (US$)	DU	DATA	S (US$)
46	07/06/04	35,81	70	15/07/04	38,43	94	18/08/04	44,65
47	08/06/04	35,67	71	16/07/04	38,49	95	19/08/04	45,42
48	09/06/04	34,63	72	19/07/04	39,51	96	20/08/04	44,85
49	11/06/04	35,13	73	20/07/04	39,12	97	23/08/04	43,93
50	14/06/04	35,02	74	21/07/04	38,94	98	24/08/04	42,76
51	15/06/04	34,75	75	22/07/04	39,43	99	25/08/04	42,30
52	16/06/04	34,57	76	23/07/04	39,59	100	26/08/04	41,03
53	17/06/04	35,63	77	26/07/04	39,85	101	27/08/04	40,58
54	18/06/04	35,72	78	27/07/04	40,32	102	31/08/04	39,33
55	21/06/04	34,94	79	28/07/04	41,55	103	02/09/04	42,03
56	22/06/04	35,28	80	29/07/04	41,33	104	03/09/04	41,12
57	23/06/04	34,78	81	30/07/04	41,60	105	06/09/04	40,60
58	24/06/04	34,83	82	02/08/04	41,92	106	08/09/04	40,11
59	25/06/04	34,43	83	03/08/04	42,10	107	09/09/04	41,88
60	28/06/04	33,17	84	04/08/04	42,14	108	10/09/04	41,21
61	29/06/04	33,02	85	05/08/04	43,13	109	13/09/04	41,34
62	02/07/04	35,18	86	06/08/04	42,78	110	14/09/04	41,84
63	05/07/04	35,92	87	09/08/04	43,58	111	15/09/04	42,18
64	06/07/04	36,76	88	10/08/04	43,31	112	16/09/04	41,21
65	07/07/04	35,97	89	11/08/04	43,91	113	17/09/04	43,38
66	09/07/04	37,38	90	12/08/04	44,27	114	20/09/04	43,66
67	12/07/04	37,28	91	13/08/04	44,88	115	21/09/04	44,61
68	13/07/04	36,70	92	16/08/04	44,96	116	22/09/04	46,00
69	14/07/04	37,95	93	17/08/04	44,31	117	23/09/04	46,61

DU	DATA	S (US$)	DU	DATA	S (US$)	DU	DATA	S (US$)
118	24/09/04	46,18	138	25/10/04	51,37	158	24/11/04	42,65
119	27/09/04	46,99	139	26/10/04	52,00	159	25/11/04	42,97
120	28/09/04	47,50	140	27/10/04	49,70	160	26/11/04	42,90
121	29/09/04	47,32	141	28/10/04	48,47	161	29/11/04	43,98
122	30/09/04	47,08	142	29/10/04	48,78	162	30/11/04	44,14
123	01/10/04	47,35	143	01/11/04	46,73	163	01/12/04	41,37
124	04/10/04	46,66	144	03/11/04	46,18	164	02/12/04	38,97
125	05/10/04	47,01	145	04/11/04	44,73	165	03/12/04	38,31
126	06/10/04	47,85	146	05/11/04	45,17	166	06/12/04	38,37
127	07/10/04	48,78	147	08/11/04	44,13	167	07/12/04	36,90
128	08/10/04	49,68	148	09/11/04	42,10	168	08/12/04	37,06
129	11/10/04	50,95	149	10/11/04	42,91	169	09/12/04	38,33
130	13/10/04	50,84	150	11/11/04	41,76	170	10/12/04	36,84
131	14/10/04	51,20	151	12/11/04	41,31	171	13/12/04	37,13
132	15/10/04	51,13	152	16/11/04	40,42	172	14/12/04	38,00
133	18/10/04	50,17	153	17/11/04	40,52	173	15/12/04	40,85
134	19/10/04	48,76	154	18/11/04	40,77	174	16/12/04	41,09
135	20/10/04	50,63	155	19/11/04	43,25	175	17/12/04	42,60
136	21/10/04	51,15	156	22/11/04	42,40	176	20/12/04	42,88
137	22/10/04	51,92	157	23/11/04	42,34	177	21/12/04	42,72

DU	DATA	S (US$)	DU	DATA	S (US$)	DU	DATA	S (US$)
178	22/12/04	40,89	200	26/01/05	46,18	222	01/03/05	50,34
179	24/12/04	40,53	201	27/01/05	46,24	223	02/03/05	51,50
180	27/12/04	40,53	202	28/01/05	44,85	224	03/03/05	52,36
181	28/12/04	40,53	203	31/01/05	45,85	225	04/03/05	52,25
182	29/12/04	38,92	204	01/02/05	44,58	226	07/03/05	52,31
183	31/12/04	40,33	205	02/02/05	43,64	227	08/03/05	52,82
184	03/01/05	40,36	206	03/02/05	43,47	228	09/03/05	53,51
185	04/01/05	38,89	207	04/02/05	43,69	229	10/03/05	52,64
186	05/01/05	40,88	208	09/02/05	42,91	230	11/03/05	53,22
187	06/01/05	40,44	209	10/02/05	44,47	231	14/03/05	53,81
188	07/01/05	43,26	210	11/02/05	44,64	232	15/03/05	53,72
189	10/01/05	43,37	211	14/02/05	44,84	233	16/03/05	55,07
190	11/01/05	43,58	212	15/02/05	44,72	234	17/03/05	55,23
191	12/01/05	44,21	213	16/02/05	45,66	235	18/03/05	55,76
192	13/01/05	45,74	214	17/02/05	45,33	236	21/03/05	55,63
193	14/01/05	45,51	215	18/02/05	46,00	237	22/03/05	54,45
194	17/01/05	45,13	216	21/02/05	46,16	238	23/03/05	51,89
195	18/01/05	45,53	217	22/02/05	48,15	239	24/03/05	52,74
196	19/01/05	44,74	218	23/02/05	47,81	240	28/03/05	52,78
197	20/01/05	44,39	219	24/02/05	49,19	241	29/03/05	52,08
198	21/01/05	45,74	220	25/02/05	49,40	242	30/03/05	50,22
199	25/01/05	46,78	221	28/02/05	50,14	243	31/03/05	53,05

Apêndice B

Tabela 2

DU	DATA	S (R$)	DU	DATA	S (R$)	DU	DATA	S (R$)
1	01/04/04	85,24	16	26/04/04	80,20	31	17/05/04	70,65
2	02/04/04	86,50	17	27/04/04	81,20	32	18/05/04	71,20
3	05/04/04	85,39	18	28/04/04	79,04	33	19/05/04	71,27
4	06/04/04	85,80	19	29/04/04	75,00	34	20/05/04	69,10
5	07/04/04	85,40	20	30/04/04	74,70	35	21/05/04	67,21
6	08/04/04	86,99	21	03/05/04	75,40	36	24/05/04	71,40
7	12/04/04	88,50	22	04/05/04	78,10	37	25/05/04	70,50
8	13/04/04	87,49	23	05/05/04	79,50	38	26/05/04	70,34
9	14/04/04	85,96	24	06/05/04	74,21	39	27/05/04	72,19
10	15/04/04	85,00	25	07/05/04	71,60	40	28/05/04	71,00
11	16/04/04	84,65	26	10/05/04	68,90	41	31/05/04	71,78
12	19/04/04	83,90	27	11/05/04	74,31	42	01/06/04	73,80
13	20/04/04	81,20	28	12/05/04	74,11	43	02/06/04	73,70
14	22/04/04	80,90	29	13/05/04	75,20	44	03/06/04	72,70
15	23/04/04	81,78	30	14/05/04	73,20	45	04/06/04	72,79

DU	DATA	S (R$)	DU	DATA	S (R$)	DU	DATA	S (R$)
46	07/06/04	74,46	70	13/07/04	74,30	94	16/08/04	79,95
47	08/06/04	73,30	71	14/07/04	74,15	95	17/08/04	79,90
48	09/06/04	72,40	72	15/07/04	76,60	96	18/08/04	80,75
49	11/06/04	72,40	73	16/07/04	78,38	97	19/08/04	82,00
50	14/06/04	72,60	74	19/07/04	77,39	98	20/08/04	84,65
51	15/06/04	74,65	75	20/07/04	76,80	99	23/08/04	83,92
52	16/06/04	74,95	76	21/07/04	76,35	100	24/08/04	83,65
53	17/06/04	75,29	77	22/07/04	75,01	101	25/08/04	84,25
54	18/06/04	74,90	78	23/07/04	74,80	102	26/08/04	82,62
55	21/06/04	73,95	79	26/07/04	74,00	103	27/08/04	82,73
56	22/06/04	74,79	80	27/07/04	75,70	104	30/08/04	82,00
57	23/06/04	77,70	81	28/07/04	77,10	105	31/08/04	82,00
58	24/06/04	77,60	82	29/07/04	78,43	106	01/09/04	82,08
59	25/06/04	76,10	83	30/07/04	78,10	107	02/09/04	83,30
60	26/06/04	75,00	84	02/08/04	77,94	108	03/09/04	83,20
61	29/06/04	75,65	85	03/08/04	77,70	109	06/09/04	83,27
62	30/06/04	77,31	86	04/08/04	78,60	110	08/09/04	84,25
63	01/07/04	76,90	87	05/08/04	77,14	111	09/09/04	84,57
64	02/07/04	76,80	88	06/08/04	78,20	112	10/09/04	84,01
65	05/07/04	76,36	89	09/08/04	78,10	113	13/09/04	84,00
66	06/07/04	75,44	90	10/08/04	79,60	114	14/09/04	85,20
67	07/07/04	74,30	91	11/08/04	79,75	115	15/09/04	85,17
68	08/07/04	74,10	92	12/08/04	80,39	116	16/09/04	86,20
69	12/07/04	74,70	93	13/08/04	79,50	117	17/09/04	87,28

DU	DATA	S (R$)	DU	DATA	S (R$)	DU	DATA	S (R$)
118	20/09/04	87,62	139	20/10/04	92,89	160	22/11/04	91,69
119	21/09/04	88,95	140	21/10/04	94,31	161	23/11/04	90,10
120	22/09/04	88,47	141	22/10/04	94,80	162	24/11/04	89,60
121	23/09/04	90,98	142	25/10/04	94,91	163	25/11/04	94,40
122	24/09/04	92,14	143	26/10/04	93,65	164	26/11/04	93,82
123	27/09/04	92,95	144	27/10/04	94,29	165	29/11/04	92,25
124	28/09/04	93,84	145	28/10/04	92,99	166	30/11/04	92,90
125	29/09/04	93,66	146	29/10/04	93,45	167	01/12/04	95,70
126	30/09/04	90,84	147	01/11/04	93,88	168	02/12/04	93,90
127	01/10/04	94,00	148	03/11/04	93,65	169	03/12/04	93,31
128	04/10/04	94,50	149	04/11/04	94,20	170	06/12/04	94,15
129	05/10/04	96,40	150	05/11/04	95,80	171	07/12/04	92,90
130	06/10/04	96,56	151	08/11/04	94,60	172	08/12/04	92,94
131	07/10/04	97,15	152	09/11/04	93,85	173	09/12/04	90,41
132	08/10/04	96,80	153	10/11/04	95,20	174	10/12/04	91,90
133	11/10/04	95,65	154	11/11/04	95,55	175	13/12/04	92,50
134	13/10/04	91,90	155	12/11/04	95,80	176	14/12/04	93,29
135	14/10/04	91,25	156	16/11/04	91,30	177	15/12/04	93,80
136	15/10/04	93,02	157	17/11/04	92,04	178	16/12/04	95,60
137	18/10/04	94,90	158	18/11/04	90,90	179	17/12/04	94,72
138	19/10/04	92,50	159	19/11/04	90,50	180	20/12/04	94,60

DU	DATA	S (R$)	DU	DATA	S (R$)	DU	DATA	S (R$)
181	21/12/04	96,75	204	26/01/05	94,20	226	01/03/05	106,66
182	22/12/04	95,30	205	27/01/05	94,00	227	02/03/05	109,70
183	23/12/04	96,65	206	28/01/05	92,80	228	03/03/05	113,50
184	27/12/04	96,76	207	31/01/05	94,30	229	04/03/05	115,30
185	28/12/04	96,90	208	01/02/05	93,80	230	07/03/05	115,75
186	29/12/04	97,88	209	02/02/05	95,20	231	08/03/05	114,40
187	30/12/04	97,15	210	03/02/05	96,20	232	09/03/05	112,40
188	03/01/05	94,20	211	04/02/05	97,30	233	10/03/05	109,40
189	04/01/05	93,08	212	09/02/05	101,61	234	11/03/05	107,60
190	05/01/05	92,72	213	10/02/05	101,15	235	14/03/05	106,80
191	06/01/05	93,00	214	11/02/05	102,79	236	15/03/05	104,00
192	07/01/05	93,41	215	14/02/05	101,85	237	16/03/05	106,20
193	10/01/05	92,20	216	15/02/05	101,05	238	17/03/05	107,29
194	11/01/05	93,20	217	16/02/05	102,50	239	18/03/05	106,00
195	12/01/05	92,70	218	17/02/05	102,70	240	21/03/05	105,70
196	13/01/05	93,61	219	18/02/05	102,70	241	22/03/05	102,81
197	14/01/05	94,10	220	21/02/05	104,00	242	23/03/05	101,30
198	17/01/05	93,50	221	22/02/05	104,80	243	24/03/05	102,60
199	18/01/05	92,50	222	23/02/05	107,00	244	28/03/05	100,75
200	19/01/05	93,05	223	24/02/05	110,60	245	29/03/05	99,20
201	20/01/05	90,95	224	25/02/05	113,05	246	30/03/05	101,40
202	21/01/05	91,10	225	28/02/05	111,23	247	31/03/05	101,48
203	24/01/05	92,29						

Referências Bibliográficas

[1] BARBACHAN, José F., **Probabilidade para Finanças**, IBMEC Business School, 2003.

[2] BLACK, F., SCHOLES M., **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**, Journal of Political Economy, 81 (1973), pp. 637-59.

[3] BRENNAN, M., SCHWARTZ E., **The Valuation of American Put Options**, Journal of Finance, 32 (1977), pp. 449-62.

[4] BUNCH, David S., JOHNSON, H., **A Simple and Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach**, Journal of Finance, 47 (1992).

[5] BUNCH, David S., JOHNSON, H., **The American Put Option and Its Critical Stock Price**, Journal of Finance, 1999.

[6] BURDEN, Richard. L., FAIRES, J. D., **Análise Numérica**, Thomson, 2003.

[7] CARR, P., JARROW, R., MYNENI, R. **Alternative Characterizations of American Put Options**, Mathematical Finance, 2 (1992), pp. 87-106.

[8] CHANG, C. C., CHUNG, S., STAPLETON, R. C., **Richardson Extrapolation Techniques for Pricing American-style Options**, Department of Finance - The Management School - National Central University - Taiwan, 2001.

[9] COX, J., ROSS S., **The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes**, Journal of Financial Economics, 3 (1976), pp. 145-66.

[10] DUNNET, C. W., CURNOW, R. N., **The Numerical Evaluation of Certain Multivariate Normal Integrals**, The Annals of Mathematical Statistics, 33 (1962), pp. 571-579.

[11] DUTT, John E., **A Representation of Multivariate Normal Probability Integrals by Integral Transforms**, Biometrika, 60 (1973), pp. 637-645.

[12] GESKE, R., **The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options**, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 12 (1977), pp. 541-552.

[13] GESKE, R., **The Valuation of Compound Options**, Journal of Financial Economics, 7 (1979), pp. 63-81.

[14] GESKE, R., JOHNSON, H. E., **The American Put Option Valued Analytically**, Journal of Finance, 39 (1984), 1511-1524.

[15] HUANG, J., SUBRAHMANYAM, M. G., YU, G. G., **Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method**, The Review of Financial Studies , 9 (1996), pp. 277-300.

[16] HULL, John C., **Opções, Futuros e Outros Derivativos**, 3ª ed. Bolsa de Mercadorias e Futuros, 1998.

[17] ISRAEL, Vinicius P., **Inequações Variacionais Aplicadas ao Problema do Mercado de Opções**, Dissertação de Mestrado - IM - NCE - UFRJ, 2004.

[18] KOEHLER, M., **Regras do Imprevisível - Sobre Leis de Potência e Cotações**, Scientific American Brasil, 27 (2003), pp. 75-81.

[19] MERTON, Robert. C., **Theory of Rational Option Pricing**, The Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1973), pp. 141-183.

[20] ROCHMAN, Ricardo R., **Análise de Métodos Numéricos para Precificação de Opções**, Dissertação de Mestrado - FGV-EAESP, São Paulo, 1998.

[21] SANTOS, E. M., PAMPLONA, E. O., **Opções Reais: Um Caso Prático em Pesquisa e Desenvolvimento**, XXIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 2003.

[22] SILVA NETO, Lauro de A., **Opções: do Tradicional ao Exótico**, 2ª ed., Atlas, São Paulo, 1996.

[23] SOARES, Gustavo B., **Precificação de Opções de Telebrás: Uma comparação entre os modelos Black-Scholes e Hull-White**, Monografia, Universidade de São Paulo, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, 1999.