

MICHAELLE CRISTINA BARBOSA PINHEIRO

Resolução Numérica de Problemas
de Controle Ótimo por um
Método de Programação Não Linear.

Orientador: João Lauro Dorneles Facó.

Rio de Janeiro
2006

P654 Pinheiro, Michaelle Cristina Barbosa

Resolução de problemas de controle ótimo por um método de programação não linear./ Michaelle Cristina Barbosa. - Rio de Janeiro, 2006. 76f.:il.

Dissertação (Mestrado em Informática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, 2006.

Orientador: João Lauro Dorneles Facó.

1. Otimização Não Linear. - Teses. 2. Modelos de Problemas de Controle Ótimo. - Teses. 3. Controle Ótimo Discreto. - Teses. 4. Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares. - Teses. 5. Diabetes Mellitus. - Teses. 6. Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração. Teses. I. João Lauro Dorneles Facó(Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Núcleo de Computação Eletrônica. III. Título.

CDD

Michaelle Cristina Barbosa Pinheiro.

**Resolução Numérica de Problemas de Controle Ótimo
por um Método de Programação Não Linear.**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática -
Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro,
como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Rio de Janeiro, 31 de agosto de 2006.

Orientador: João Lauro Dorneles Facó, Dr.-Ing., DCC - IM/UFRJ.

Adilson Elias Xavier, D.Sc., COPPE/UFRJ.

Carlos Antônio de Moura, Ph.D., IME/UERJ.

Mauro Antônio Rincon, D. Sc., DCC - IM/UFRJ.

Dedicatória

A Deus, por possibilitar a vitória em mais uma etapa da minha vida.

Por me dar a oportunidade de ampliar o horizonte dos meus conhecimentos, ajudar a superar obstáculos que me fazem crescer e amadurecer.

E por colocar em meu caminho novos e queridos amigos, pessoas muito especiais que jamais esquecerei. Obrigada!

Agradecimentos

Ao meu marido Edson, pela dedicação, paciência e incentivo, por me encorajar em momentos de desânimo e por estar sempre presente quando precisei.

À minha família, em especial meus pais Dirce e Paulo e meus irmãos Marcia e Marcos.

Ao Professor e orientador João Lauro Facó, pelo incentivo, pelos conhecimentos transmitidos sempre direcionando meus estudos e, acima de tudo por sua generosidade. Agradeço sua confiança em mim.

À Florinda por me proporcionar a tranquilidade e o carinho necessários para realização deste trabalho.

Aos professores do mestrado, Mauro Rincon e Maria Luiza pelo apoio.

Aos funcionários do DCC e NCE, em especial Deise, Lina, Adriana e Regina pelo carinho.

Aos amigos do DCC/NCE, pela convivência e experiências trocadas, em especial, Vinícius, Juliana, Fábio, Luiz Antônio, Alessandro, Renata, Enio etc.

Ao Núcleo de Computação Eletrônica e ao DCC - Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro pela bolsa de estudos e pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

Enfim, agradeço à todos aqueles que me ajudaram, direta ou indiretamente.

Resumo

A necessidade de adotar decisões mais ajustadas com o objetivo de melhorar a produtividade, reduzir desperdícios e ociosidade, minimizar custos, dentre outros, tem propiciado um ambiente fértil para aplicações de metodologias qualitativas e quantitativas e para resolução numérica de problemas práticos. Particularmente, no que tange as metodologias quantitativas, verifica-se que técnicas matemáticas provenientes da teoria de controle e da pesquisa operacional passam a ter um espaço importante como ferramentas para solução de problemas da área de produção e atualmente na área biomédica também.

O objetivo desta dissertação é apresentar a resolução numérica de alguns problemas de controle ótimo relacionados à química e à biomédicina utilizando um método de Programação Não Linear. Neste trabalho serão discutidos e resolvidos três problemas de controle ótimo de diferentes áreas do conhecimento, são elas: química - *Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares*, fisiopatologia - *Diabetes Mellitus* e biofísica - *Contração do ventrículo esquerdo do coração*.

As dificuldades na resolução numérica desses problemas de otimização são solucionadas pelo Método de Programação Não Linear - Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) de J. Abadie, e com a utilização do software LSGRG2, uma nova versão do código GRG apresentada por Lasdon e Waren.

Palavras-chave *Controle Ótimo, Otimização, Método de Programação Não Linear, GRG, Diabetes Mellitus, Contração do ventrículo esquerdo do coração, Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares.*

Abstract

Decision making to minimize costs, to improve productivity, to reduce waste and idleness, among other objectives, has generated opportunities for applying qualitative and quantitative methods. Methods based on Control Theory and operations research make up an important toolkit for solving problems in production planning and biomedicine.

The goal of this thesis is to apply Nonlinear Programming to solve Optimal Control problems that arise in chemistry and medicine. Three problems are addressed in this work: The contamination of Xenon in Nuclear Reactors (chemistry); Mellitus Diabetes (physiopathology); and Contraction of the left ventricle of the heart (biophysics).

The numerical difficulties to solve these operations problems are overcome with J. Abadie's Generalized Reduced Gradient (GRG) method implemented in the LSGRG2 package of Lasdon and Waren.

Keywords *Optimal Control, Optimization, Nonlinear Programming Method, GRG, Diabetes Mellitus, Contraction of the left ventricle of the heart, Contamination by Xenon in Nuclear Reactors.*

Lista de Figuras

3.1	Matriz Jacobiana das Restrições de um Problema de Controle Ótimo . . .	18
4.1	Transmutação do Iodo em Xenônio	21
4.2	Núcleo do Reator Nuclear-IPEN	22
4.3	Anatomia do Pâncreas	29
4.4	Categorias de tolerância à glicose	29
4.5	Evolução da secreção de Insulina	30
4.6	Diagrama do sistema Glicose x Insulina	31
4.7	Câmaras do Coração	35
4.8	Grande e pequena Circulação	36
6.1	Trajectoria ótima das variáveis de estado - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares	50
6.2	Trajectoria ótima das variáveis de controle - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares	51
6.3	Trajectoria ótima das variáveis de estado - Diabetes Mellitus	54
6.4	Trajectoria ótima das variáveis de controle - Diabetes Mellitus	55
6.5	Trajectoria ótima das variáveis de estado - volume e fluxo sanguíneo . . .	57
6.6	Trajectoria ótima das variáveis de controle - pressão arterial e ventricular	58

Lista de Tabelas

6.1	Valores das constantes - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares	48
6.2	Limites - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares	48
6.3	Condições iniciais - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares . .	49
6.4	Trajectoria ótima - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares . .	49
6.5	Valores das constantes - Diabetes Mellitus	52
6.6	Condições iniciais - Diabetes Mellitus	52
6.7	Limites - Diabetes Mellitus	53
6.8	Trajectoria ótima - Diabetes Mellitus	53
6.9	Condições iniciais - Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração. . . .	54
6.10	Limites - Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração.	55
6.11	Limites - Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração.	56
6.12	Trajectoria ótima das variáveis de estado e controle - Contração do ventrículo esquerdo do coração	56

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivo do Trabalho	2
1.3	Organização da Dissertação	3
2	Controle Ótimo	4
2.1	Principais Ferramentas de Modelagem Dinâmica	4
2.1.1	Programação Dinâmica	4
2.1.2	Cálculo das Variações.	4
2.1.3	Teoria do Controle Ótimo.	5
2.2	Controle Ótimo	5
2.2.1	Formulação do Problema de Controle Ótimo.	6
2.2.2	Função de Performance	8
2.2.3	Variáveis de Controle e de Estado	8
2.2.4	Equações de Estado	9
2.2.5	Intervalos de Duração Variável	9
2.2.6	Intervalos de Duração Fixa	9
3	Método de Resolução	10
3.1	Método do Gradiente Reduzido Generalizado	12
3.1.1	Princípio do Método do Gradiente Reduzido	12
3.1.2	O Gradiente Reduzido Generalizado	14
3.1.3	Algoritmo Gradiente Reduzido Generalizado	14

3.2	O software LSGRG2	16
3.3	Método do GRG Especializado a Controle Ótimo	17
4	Descrição dos Problemas	20
4.1	Problema Químico	20
4.1.1	Um pouco sobre radioatividade	20
4.1.2	Xenônio	21
4.1.3	Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares	22
4.1.4	Modelagem do problema	23
4.1.5	Problema de Tempo Mínimo	25
4.1.6	Discretização	26
4.2	Problema Fisiopatológico	27
4.2.1	Diabetes Mellitus	27
4.2.2	Pâncreas	28
4.2.3	Secreção de Insulina	29
4.2.4	Modelagem	31
4.2.5	Discretização	33
4.3	Problema Biofísico	33
4.3.1	Coração	33
4.3.2	Circulação	34
4.3.3	Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração	36
4.3.4	Pressão Arterial	36
4.3.5	Pressão Sistólica	37
4.3.6	Pressão Diastólica	38
4.3.7	Modelagem	38
4.3.8	Discretização	41
5	Programação Não Linear	43
5.1	Condições de Otimalidade	43
5.1.1	Condições de Otimalidade para Problemas Irrestritos	43
5.1.2	Condições de Otimalidade para Problemas Restritos	45

6	Resultados Computacionais	47
6.1	Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares	47
6.2	Diabetes Mellitus	52
6.3	Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração	53
7	Conclusão	59
7.1	1º Problema	60
7.1.1	Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares	60
7.2	2º Problema	60
7.2.1	Diabetes Mellitus	60
7.3	3º Problema	60
7.3.1	Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração	60
8	Bibliografia	61

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Um dos objetivos da programação matemática como ramo da ciência é propor algoritmos eficientes para a resolução de problemas de decisão. A modelagem e a resolução numérica de problemas relacionados a sistemas dinâmicos são duas atividades de fundamental importância, podendo entretanto implicar dificuldades numéricas e requerer grande custo computacional [1].

A dinâmica, como afirma Gray e Hotelling, deve estar presente nos modelos e na presença de recursos, o que abre um grande leque para discussões sobre peculiaridades referentes às equações ou à modelagem de problemas de otimização, por isso, a escolha de um método de programação eficiente que permita o uso racional desses recursos é um tema delicado, mas que pode melhorar desempenhos e diminuir o tempo operacional.

Esta dissertação apresentará resoluções numéricas de alguns problemas de controle ótimo utilizando para isso um método de Programação Não Linear. Estes problemas são relacionados a diferentes áreas do conhecimento: Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares relacionado à química; Diabetes Mellitus, um problema fisiológico, e Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração que é um problema relacionado à biofísica.

A motivação real deste trabalho deve-se então, a descrever alguns interessantes fatores destes problemas, e apresentar a sua relação com a programação matemática. Relações estas observadas durante a pesquisa e brevemente citadas aqui:

- Importância de cada problema dentro da sua área.
- Diversidade dos problemas.
- Complexidade das equações envolvidas em cada problema.
- Possibilidade de inovação na abordagem e na modelagem matemática.

1.2 Objetivo do Trabalho

O objetivo desta dissertação de tese de mestrado é apresentar uma modelagem matemática não linear contínua para problemas de controle ótimo relacionados a diversas áreas do conhecimento, bem como sua resolução numérica utilizando um método de programação não linear.

Problemas de Controle Ótimo podem ser resolvidos por Programação Matemática e o software utilizado para resolução computacional dos problemas desta dissertação foi o LSGRG2[15] que utiliza o Método do Gradiente Reduzido Generalizado(GRG)[1] para busca da solução ótima.

Assim, um método eficiente de programação não linear, o Gradiente Reduzido Generalizado(GRG), que obtém a cada iteração um ponto viável, em geral melhor que o ponto anterior, será aplicado para encontrar a trajetória ótima de cada problema.

O GRG é um método bastante empregado na área de Programação Não Linear e obtém bons resultados em termos de eficiência computacional e de estabilidade numérica.

1.3 Organização da Dissertação

Esta dissertação se divide em mais seis capítulos, além desta introdução, conforme a descrição a seguir.

O segundo capítulo dedica-se à apresentação das principais ferramentas para resolução de sistemas dinâmicos e à formulação unificada de problemas de controle ótimo.

O terceiro capítulo apresenta o Método de Programação Não Linear empregado e faz uma breve discussão sobre as vantagens e desvantagens dos vários métodos de otimização que podem ser utilizados para resolver os modelos descritos no capítulo seguinte. Neste capítulo a escolha do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)[1] como método de otimização será justificada.

O quarto capítulo apresenta uma descrição detalhada de cada problema que se quer resolver: *Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares*, *Diabetes Mellitus e Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração*. Nele também é apresentada a modelagem e a discretização no tempo adotada para cada modelo.

O quinto capítulo apresenta as condições de otimalidade para problemas de Programação Não Linear irrestritos e restritos.

O sexto capítulo apresenta os resultados computacionais e a trajetória ótima obtida através da resolução numérica de cada modelo.

O sétimo e último capítulo, apresenta uma conclusão e aponta possíveis temas para uma futura continuidade deste trabalho.

Capítulo 2

Controle Ótimo

2.1 Principais Ferramentas de Modelagem Dinâmica

Existem várias abordagens para a modelagem de problemas de sistemas dinâmicos. Podemos citar como principais: a Programação Dinâmica, o Cálculo das Variações, e a Teoria do Controle Ótimo; estas serão brevemente descritas nas subseções seguintes.

2.1.1 Programação Dinâmica

A programação dinâmica é muito abrangente, porém seu uso mais simples é em problemas discretos. Os princípios da programação foram concebidos pelo matemático americano Richard Bellman nos anos 50. Apesar de ser bastante ampla, a programação dinâmica para problemas de tempo contínuo envolve procedimentos recursivos pelo grande número de variáveis que se torna necessário, sua aplicação pode se tornar uma tarefa árdua.

2.1.2 Cálculo das Variações.

O cálculo das variações nasceu no século *XVII* e teve como um dos seus pioneiros Isaac Newton que resolveu o problema do cálculo das variações e publicou *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*. Os matemáticos Leibnitz, John Bernoulli e James Bernoulli também resolveram problemas similares aos de Newton. O cálculo das

variações ainda é bastante utilizado, porém o estudo continuado de problemas variacionais conduziu ao desenvolvimento de um enfoque mais moderno, baseado na Teoria do Controle Ótimo.

2.1.3 Teoria do Controle Ótimo.

A teoria do controle ótimo é uma generalização moderna do cálculo das variações (Chiang,1992), devido ao trabalho do matemático russo Lev Semenovich Pontryagin que brindou a ciência com o conhecido *The Maximum Principle*, O Princípio do Máximo de Pontryagin. Em 1962 publicou *The Mathematical Theory of Optimal Processes* com outros autores, e seu trabalho é até hoje o mais significativo na Teoria do Controle Ótimo segundo Yanaga e Kawada (1980). Entretanto a presença de restrições de limites nas variáveis e as relações não lineares podem gerar problemas numéricos críticos na resolução de problema de fronteira (Two-Points Boundary-Value Problems).

2.2 Controle Ótimo

Um modelo matemático que representará o sistema será formado pelo conjunto de equações e inequações que quantificam a região de viabilidade da solução. A resolução numérica consiste em buscar uma solução que otimize a função de avaliação sem violar as restrições impostas pelo sistema. Na modelagem de problemas de controle ótimo as variáveis são agrupadas em dois grupos: variáveis de estado e variáveis de controle, podendo ser limitadas inferiormente (*lower bound*) e superiormente (*upper bound*).

O controle ótimo procura obter uma trajetória ótima de um sistema dinâmico segundo uma função de avaliação ou *performance*, onde a trajetória é o conjunto de valores das variáveis ao longo do tempo. As variáveis de estado se relacionam com as de controle por meio de equações de estado, formando um sistema de restrições de igualdade. As equações de estado podem ser não lineares, bem como a função-objetivo.

2.2.1 Formulação do Problema de Controle Ótimo.

A formulação unificada para problemas de controle ótimo é minimizar uma função de *performance* das trajetórias das variáveis de estado e de controle, sujeito a equações de estado e limites nas variáveis de estado e de controle, em cada instante de tempo, conforme apresentado por Tabak and Kuo[30]:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt + G(x(t_f)), \quad g, G \in C^1 \\ \text{sujeito a :} \quad & \begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t), & f \in C^1 \\ x_{min} \leq x_t \leq x_{max} \\ u_{min} \leq u_t \leq u_{max} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

As variáveis de estado geralmente são conhecidas em um tempo inicial (t_0) e em certos casos no tempo final (t_f). É comum definir uma região terminal como $s(x(t_f)) = 0$ e as restrições adicionais podem ser incorporadas ao problema de controle ótimo, sob a forma de sistemas lineares ou não lineares de equações $h(x, u) = 0$, e ou, inequações $r(x, u) \geq 0$ [30].

A partir da forma contínua do problema de controle, pode-se obter a discretização apropriada para a resolução utilizando técnicas de otimização. Segundo Tabak and Kuo[30] pode-se particionar o intervalo de tempo entre o tempo inicial t_0 e o tempo final t_f em n intervalos para se obter uma maior aproximação e assim escrever a seguinte equação:

$$\int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g(x(t'_k), u(t'_k), t'_k) * (t_k - t_{k-1}), \quad (2.2.2)$$

onde $t_{k-1} \leq t'_k \leq t_k$.

Utilizando a mesma partição de intervalos de tempo, pode-se formular para as equações de estado:

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h_k} = f(x(t_k), u(t_k), t_k), \quad (2.2.3)$$

onde $h_k = t_{k+1} - t_k$.

Podemos estender o mesmo critério para as restrições adicionais e limites de variáveis, inferiores (*lower bounds*) e superiores (*upper bounds*), e obter então o problema de otimização descrito a seguir:

Definição 2.2.1 *Define-se por problema de otimização encontrar x tal que:*

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) \\ & \text{Sujeito a : } \begin{cases} g_i(x) \geq 0, & i = 1, \dots, m, \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (2.2.4) \\ & \text{onde } g_i, h_j \text{ são funções de } x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned}$$

Dependendo do modelo adotado para representar o problema, a função objetivo $f(x)$ e as restrições $h_j(x)$, $g_i(x)$ podem ser lineares, não lineares, contínuas, discretas, diferenciáveis ou não diferenciáveis, enquanto as variáveis x_k podem ser contínuas ou discretas [17].

As condições de Karush-Kuhn-Tucker(KKT) podem ser estendidas a espaços de dimensão infinita, mas para obter soluções numéricas é necessário trabalhar em dimensão finita. Para isso, basta aproximar o problema original por um discretizado em um número finito n de intervalos, definido como problema de controle ótimo em tempo discreto. Podemos então reescrever os problemas de controle ótimo para tempo discreto[18]:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize } \sum_{t=0}^{T-1} g_t(x_t, u_t) + G_T(x_T), \quad g_t, G_T \in C^1 \\
& \text{Sujeito a : } \left\{ \begin{array}{l} x_{t+1} = f_t(x_t, u_t), \quad f_t \in C^1 \\ x_{min,t} \leq x_t \leq x_{max,t} \\ u_{min,t} \leq u_t \leq u_{max,t} \\ x_t, u_t \in \mathfrak{R}^m \\ t \in \{0, 1, \dots, T-1\} \end{array} \right. \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Tal formulação, com as variáveis de estado $x_t = x(t)$ e de controle $u_t = u(t)$ contínuas permite que o problema seja modelado naturalmente. O modelo de controle ótimo modifica os valores das variáveis de controle continuamente, procurando otimizar a performance do sistema, calculando o valor de cada variável de estado na busca da trajetória ótima. A presença das desigualdades com os limites das variáveis de estado impossibilita a solução clássica de redução do problema do espaço das variáveis de controle.

2.2.2 Função de Performance

É a função de avaliação do sistema e está de um modo geral ligada a um objetivo que pode ser maximizado ou minimizado, sempre satisfazendo às restrições impostas pela modelagem do problema; estas restrições podem se apresentar como equações e/ ou inequações, e tem por objetivo quantificar a região de viabilidade da solução. Para o caso discretizado, a função-objetivo pode ser representada por:

$$\text{Minimize} = \sum_{t=0}^{T-1} g_t(x_t, u_t) + G_T(x_T), \quad (2.2.6)$$

2.2.3 Variáveis de Controle e de Estado

Para modelar os problemas de controle ótimo é necessário identificar as variáveis de estado (x) e de controle (u). As variáveis de controle são livres para variar dentro de limites estabelecidos, inferior(*lower bound*) e superior(*upper bound*), enquanto as de

estado são necessariamente calculadas segundo as equações de estado, respeitando seus limites.

2.2.4 Equações de Estado

Representam a dinâmica da trajetória do sistema; uma exigência nesse estudo é que as equações que representam os estados sejam funções diferenciáveis. São equações fornecidas pelo sistema;

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) \quad f_t \in C^1 \quad (2.2.7)$$

2.2.5 Intervalos de Duração Variável

Nesta abordagem, adotaremos para cada intervalo de tempo uma duração variável I_t , que é otimizada conjuntamente com o resto do problema. Dentro da nomenclatura do controle ótimo a variável I_t seria uma variável de controle, limitada por um limite mínimo, geralmente 0 (zero), e um limite máximo, determinado de acordo com o horizonte do problema:

$$0 \leq I_{min} \leq I_t \leq I_{max} \quad (2.2.8)$$

A vantagem desta abordagem é que durante a resolução do problema, tarefas que requeiram menor tempo poderão alocar os recursos somente quando for necessário, sem alocação excessiva. A desvantagem dessa abordagem é que pode haver um aumento da dimensão do problema, aumentando o tempo computacional de resolução.

2.2.6 Intervalos de Duração Fixa

Nesta abordagem associa-se a cada intervalo de tempo uma duração constante Δt . A vantagem desta abordagem é que a dimensão do problema não é afetada pela duração dos intervalos de tempo que são considerados, não como variáveis, mas sim como parâmetros de configuração do modelo. Uma desvantagem é que recursos podem permanecer alocados desnecessariamente, se Δt for muito grande para o horizonte de programação[9].

Capítulo 3

Método de Resolução

Os modelos de Controle Ótimo que serão apresentados no capítulo 4 são modelos de Programação Não Linear restrita, por isso, deve-se aplicar um método adequado que reúna características satisfatórias para resolvê-los. Pinto [27] apresenta quatro principais classes de métodos para programação não linear restrita, são elas:

- Métodos de Penalidade: consiste em transformar os problemas com restrições em problemas irrestritos equivalentes, por meio da incorporação das restrições à função-objetivo. São utilizados três formas de incorporação, gerando três tipos desses métodos: Penalidade, Barreira, Lagrangeano aumentado. Essa classe de métodos é uma das mais tradicionais dentro da Programação Não Linear, porém apresenta algumas dificuldades na sua utilização: as penalidades são aumentadas conforme aproxima-se da solução ótima, onde finalmente as restrições penalizadas são zeradas. Dessa forma, a cada iteração a função-objetivo piora, e somente no ótimo alcança um valor adequado, exigindo bastante cuidado na implementação dos parâmetros de penalização, sob a pena de não se obter uma convergência adequada.
- Métodos de Programação Linear Sucessiva: consiste em resolver a cada iteração k um problema de programação linear gerado a partir de aproximações em séries de Taylor de primeira ordem da função-objetivo e das restrições. Baseado na solução do problema de programação linear, é definida a direção de descida e atualizada a

estimativa da solução. A grande vantagem desta classe é que se pode utilizar o Simplex [6] para resolver as aproximações. As desvantagens são que se o ótimo não estiver em um dos vértices a convergência é lenta, e também que durante as iterações as restrições podem estar sendo sempre violadas.

- Métodos de Programação Quadrática Sucessiva: consiste em resolver a cada iteração k um problema de programação quadrática gerado a partir da incorporação da hessiana do lagrangeano, estimada por um método Quase-Newton (BFGS ou DFP). Quando a hessiana estimada coincide com a hessiana exata do problema quadrático, o método equivale ao de Newton, de modo que pode-se obter altas taxas de convergência. A desvantagem desse método é que ele pode ser extremamente ineficiente para problemas de grande porte, devido à atualização e ao armazenamento da hessiana a cada iteração. Por outro lado, considera-se que o método é eficiente para problema de pequeno porte ou caixa-preta. Pinto [27] destaca que nas últimas décadas tem havido um esforço para se obter implementações eficientes de Programação Quadrática Sucessiva para problemas de grande porte, mas ainda sem resultados definitivos.
- Métodos de Gradiente Reduzido: consiste em resolver o problema de otimização por meio da resolução de sucessivos problemas com menor número de variáveis. Divide-se as variáveis de otimização em dois grupos, as básicas e as independentes. Efetua-se a otimização em cima do grupos das variáveis independentes, e a cada iteração, pode-se mover variáveis de um grupo para outro. Quando a função-objetivo e as restrições são lineares, o método equivale ao Simplex. Quando somente as restrições são lineares, tem-se o método do Gradiente Reduzido de Wolfe. Quando a função-objetivo e as restrições são não lineares, tem-se o Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), de Abadie e Carpentier[1]. Existem diversas implementações para o GRG, algumas especializadas para problemas de grande escala, como a apresentada por Lasdon et al.[29]. Os métodos de Gradiente Reduzido

possuem muito bom desempenho para problemas que tenham restrições lineares, e em casos onde as derivadas analíticas das não lineares podem ser supridas. Tipicamente, conseguem resolver problemas com várias centenas de variáveis e restrições. Pinto [27] destaca que, comparado com os métodos de Programação Quadrática Sucessiva, os métodos de Gradiente Reduzido requerem um número maior de iterações, porém com um menor tempo computacional por iteração.

3.1 Método do Gradiente Reduzido Generalizado

3.1.1 Princípio do Método do Gradiente Reduzido

Considere o seguinte problema de Programação Matemática:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(x) \\ & \text{Sujeito a:} && \left\{ \begin{array}{l} h(x) = 0 \\ a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad x, a, b \in \mathfrak{R}^n \\ \text{onde} \quad f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}, \quad h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m, \\ f, h \in C^1 \quad m \leq n. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Qualquer problema de otimização pode ser representado na forma acima. Para representar problemas de limites irrestritos, basta considerar os limites inferiores e superiores de cada restrição tendendo a ∞ ou $-\infty$, e para representar restrições de desigualdade, basta adicionar variáveis suplementares; inequações podem ser convertidas em equações utilizando variáveis de folga. Antes de descrever o método do GRG vamos definir as seguintes notações matriciais que serão utilizadas:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial h}{\partial x}, && \text{Matriz Jacobiana } (m \times n) \text{ das derivadas parciais de } h \text{ em relação a } x. \\ B &= \frac{\partial h}{\partial x_B}, && \text{Matriz Jacobiana } (m \times n) \text{ das derivadas parciais de } h \text{ em relação a } x_B. \\ A^k &= \frac{\partial f}{\partial x_k}, && \text{Matriz formada pelas colunas } A^j | j \in K. \\ c^k, &&& \text{vetor formado pelos elementos } c^i | i \in K \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Seja \bar{x} um ponto viável para o problema 3.1.1 que satisfaz $h(x) = 0$ e seja m o número de equações não lineares de $h(x) = 0$, consideremos então uma partição em m variáveis dependentes (x_B básicas) e $(n - m)$ variáveis independentes (x_N não básicas), assim, o vetor $x \in \mathfrak{R}^n$ pode ser escrito em função das componentes básicas e não básicas $x = (x_B, x_N)$, com $x_B \in \mathfrak{R}^m$ e $x_N \in \mathfrak{R}^{(n-m)}$. Podemos escrever então: $x_B = F(x_N)$ que, em geral não é obtida explicitamente. O Teorema da Função Implícita garante a existência da função φ tal que $\bar{x}_B = \varphi(\bar{x}_N)$ e $h(\varphi(\bar{x}_N), \bar{x}_N) = 0$ em uma vizinhança do ponto (\bar{x}_B, \bar{x}_N) .

Vamos supor o afastamento $dx = (dx_B, dx_N)$ e utilizando a regra da cadeia em $h(x_B, x_N) = 0$, obtemos as seguintes equações:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_B} \cdot dx_B + \frac{\partial h}{\partial x_N} \cdot dx_N = 0, \quad (3.1.3)$$

Logo,

$$dx_B = - \left(\frac{\partial h}{\partial x_B} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x_N} \cdot dx_N, \quad (3.1.4)$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_B} \cdot dx_B + \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} \cdot dx_N, \quad (3.1.5)$$

Substituindo dx_B de 3.1.4 em 3.1.5 obtemos:

$$d\varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_N} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_B} \left(\frac{\partial h}{\partial x_B} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x_N} \right] \cdot dx_N \quad (3.1.6)$$

Considerando as definições feitas em 3.1.8 e as equações 3.1.4 e 3.1.5 podemos então escrever o Gradiente Reduzido:

$$d\varphi = [c^N - c^B B^{-1} A^N] dx_N, \quad (3.1.7)$$

Onde:

$$\begin{aligned} c^N &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}, & c^B &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_B}, \\ B^{-1} &= \left(\frac{\partial h}{\partial x_B} \right)^{-1}, & A^N &= \frac{\partial h}{\partial x_N}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

A generalização segundo Abadie [1] da equação 3.1.7 corresponde:

$$g^N = c^N - c^B B^{-1} A^N. \quad (3.1.9)$$

Dessa forma conseguimos colocar algumas variáveis em função de outras e introduzi-las na função-objetivo, o problema de minimização de 3.1.1 é equivalente:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\varphi(x_N), x_N) \\ \text{Sujeito a:} \quad & a_N \leq x_N \leq b_N \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

3.1.2 O Gradiente Reduzido Generalizado

O método do Gradiente Reduzido foi proposto por Wolfe (1963)[31] para problemas de minimização com restrições lineares. Este método foi generalizado por Abadie e Carpentier(1969)[1] para o caso geral de problemas de programação não linear. A idéia é diminuir o valor da função objetivo mantendo a viabilidade em todas as iterações. O Método do Gradiente Reduzido generalizado (GRG) combina as idéias do método do Gradiente Reduzido com as estratégias de métodos de linearização das restrições não lineares. O GRG, portanto, apresenta todas as características necessárias para ser considerado um bom método para o problema de programação matemática.

3.1.3 Algoritmo Gradiente Reduzido Generalizado

Algoritmo 3.1.1 *Utilizando o teorema da função implícita [31] J. Abadie e Carpentier[2] descrevem o algoritmo do Gradiente Reduzido Generalizado:*

1. *Seja \bar{x} uma solução viável e x^k o valor da solução na k -ésima iteração.*
2. *Inicialize $k = 0$ com $h(x^0) = 0$.*
3. *Calcular a Matriz Jacobiana no ponto x^k e separar as variáveis em básicas $x_B^k \in \mathbb{R}^m$ e não básicas $x_N^k \in \mathbb{R}^{n-m}$, satisfazendo às hipóteses de não degenerescência.*
 - (a) $a_i < x_i^k < b_i \quad \forall i \in B$ (folgadas)
 - (b) *A matriz de base $\frac{\partial h}{\partial x_B^k}$ é não singular.*
4. *Cálculo da direção de descida das variáveis independentes:*

(a) Cálculo dos multiplicadores de Lagrange:

$$u = -\frac{\partial f}{\partial x_B^k} \left(\frac{\partial h}{\partial x_B^k} \right)^{-1} = -c^B B^{-1}.$$

(b) Cálculo do gradiente reduzido:

$$g^N = c^N + uA^N;$$

(c) Cálculo do Gradiente Reduzido Projetado:

$$\forall j \in N \quad p_j = \begin{cases} 0, & \text{se } \begin{cases} g^j > 0 \text{ e } x_j^k = a_j \\ g^j < 0 \text{ e } x_j^k = b_j \end{cases} \\ -g^j, & \end{cases}$$

Se $p_j = 0, \forall j$, encontrou um ponto KKT: fim do algoritmo;

5. Cálculo da direção de descida das variáveis básicas:

$$(a) h'.d = 0 \implies \frac{\partial h}{\partial x_B^k}.dx_B + \frac{\partial h}{\partial x_N^k}.dx_N = 0,$$

(b) Temos então d_B da seguinte forma:

$$d_B = -B^{-1}A^N d_N.$$

6. Busca linear inexata para melhorar a solução:

(a) Encontrar θ tal que:

$$f(x^k + \theta d) < f(x^k)$$

(b) Deslocar as variáveis básicas e não básicas:

$$\tilde{x} = \begin{cases} \tilde{x}_N = x_N^k + \theta d_N, \\ \tilde{x}_B = x_B^k + \theta d_B \end{cases}$$

7. Em geral \tilde{x} não é viável; recalculer as variáveis básicas, utilizando um método pseudo-Newton para resolução do sistema das equações não lineares, $h(x_B, \tilde{x}_N) = 0$, mantendo as variáveis independentes fixas.

$$(a) \text{ Fazer } J = \left[\frac{\partial h(\tilde{x}_B)}{\partial x_B} \right]^{-1}$$

(b) Iniciar com $t = 0$ e, calcular iterativamente: $x_B^{t+1} = x_B^t - Jh(x_B^t, \tilde{x}_N)$ até obter a convergência: \bar{x}_B ;

(c) Tomar $x^{k+1} = (\bar{x}_B, \tilde{x}_N)$.

8. Se $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$; voltar ao item 5 b) e utilizar um passo θ maior.

9. Se $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$; voltar ao item 5 b) e utilizar um passo θ menor.

Algumas observações devem ser consideradas para o uso do GRG. Primeiro, deve-se inicializar o método com um ponto inicial viável, o que pode não ser trivial. No caso de não se conhecer um ponto viável, deve-se proceder adicionando variáveis artificiais e realizar um procedimento de Fase 1 por penalidade (semelhante ao Simplex). As variantes mais comuns se referem ao cálculo da direção de descida, que pode ser feito por um método Quase-Newton ou Gradiente Conjugado; resolução do sistema de equações não lineares pode ser feita pelo método de Newton; o cálculo do passo θ , pode ser feito por diferentes métodos de busca linear; a escolha de variáveis para troca de base pode ser feita por regras adaptadas de programação linear.

Deve-se observar também que o GRG encontra um ponto que atende às condições KKT, ou seja, um ótimo local, a partir do ponto inicial fornecido, sem qualquer garantia de otimalidade global, pois não foram feitas hipóteses suplementares para as funções. Técnicas heurísticas do tipo *multistart* podem ser consideradas na busca global, o GRG sendo utilizado na busca local.

3.2 O software LSGRG2

Lasdon e Smith apresentam o LSGRG2 [29], uma versão do GRG2 para problemas de grande porte (*Large Scale GRG2*), que utiliza estruturas de armazenamento esparsas e apresenta métodos de gradiente conjugado e BFGS de memória limitada. Essa versão é utilizada pela empresa Frontline Systems [28] no código da versão *Premium Platform* do *solver* do Microsoft Excel.

Oliveira [25] discute a implementação do LSGRG2 e apresenta o uso de paralelismo com bons resultados. O método do gradiente conjugado para determinar a direção de descida e a fatoração LU para resolver o sistema de equações lineares foram paralelizados com sucesso. Este trabalho é mais um indicativo de que o GRG pode ser aperfeiçoado computacionalmente, permitindo a resolução de problemas mais complexos.

3.3 Método do GRG Especializado a Controle Ótimo

Abadie [1] mostrou que o GRG pode ser aplicado à resolução de problemas de Controle Ótimo. Conforme descrito nos capítulos anteriores, um problema de controle ótimo divide as variáveis em dois grupos: de controle e de estado. As variáveis de estado de cada intervalo de tempo são calculadas a partir das de controle e de estado do intervalo anterior, baseado em equações de estado: $x_t = f(x_{t-1}, u_{t-1})$.

O GRG adota a divisão em dois grupos de variáveis, as básicas e as independentes, e realiza a otimização baseada em problemas formulados em relação às independentes, limitadas por limites inferior e superior. Este procedimento pode ser diretamente estendido para o controle ótimo, adotando uma base (chamada de *simplest basis* por Abadie) formada pelas variáveis de estado, enquanto as variáveis de controle aparecem como variáveis independentes. Durante as iterações do GRG, uma ou mais variáveis de estado podem violar seus limites, e neste momento devem ser retiradas da base, trocadas por variáveis de controle, escolhidas de acordo com critérios bem definidos. No caso do artigo de Abadie, o critério é escolher variáveis de controle que estejam com folga, ou seja, distante de seus limites.

De posse das variáveis básicas e não básicas, o GRG realiza a etapa de resolução do sistema de equações não lineares que relacionam ambos os grupos de variáveis. Enquanto no GRG geral essa relação era garantida pelo teorema da função implícita, no controle ótimo o sistema é explícito, composto pelas equações de estado. As equações de estado podem ser resolvidas ordenadamente conforme os instantes de tempo t , de

t_0 a t_f . Isso torna o método extremamente eficiente computacionalmente: ao invés de resolver o problema de otimização por inteiro, resolvem-se pequenos sistemas não lineares, um por vez, obtendo economia em processamento e armazenamento. A figura 3.1 mostra a topologia da matriz Jacobiana de restrições para problemas de controle ótimo. Nela pode-se observar que as variáveis de estado e de controle de um instante anterior coincidem.

Figura 3.1: Matriz Jacobiana das Restrições de um Problema de Controle Ótimo

Facó [8], a partir do trabalho de Abadie, criou uma especialização do GRG para controle ótimo, o Gradiente Reduzido Especializado a Controle Ótimo (GRECO), que permite resolver problemas de controle ótimo com (e sem atraso) e com limites nas variáveis. Um problema com atraso é aquele em que uma variável de estado é função das variáveis de estado e de controle de um ou mais instantes de tempo anterior. O GRECO constrói uma base, de modo a só precisar armazenar uma pequena matriz triangular por blocos ao invés da base efetiva. Esta é a chamada base de trabalho formada segundo os seguintes critérios:

1. Adicione à base de trabalho o máximo possível de variáveis de estado de cada intervalo t folgadas;

2. No caso de haver variáveis de estado saturadas (sem folga), variáveis de controle do mesmo período t substituem essas na base;
3. No caso de não haver tais variáveis de controle disponíveis, a variável de estado saturada continua na base de trabalho, e uma variável de controle de um intervalo anterior é adicionada à base do GRG;
4. Em cada matriz triangular inferior por blocos, realizar a fatoração LU, sem alterar outros trechos da matriz.

Apesar das vantagens computacionais do GRECO em relação ao GRG para problemas de controle ótimo, optou-se por utilizar nos casos de teste desta dissertação o LSGRG2. Isso é explicado pelo fato de o LSGRG2 estar disponível sob a forma de um programa comercial estável e bem conceituado, acoplado ao *Software Microsoft Excel* [28]. Além do algoritmo em si, o LSGRG2 do *solver* apresenta outras funcionalidades como derivadas numéricas de equações que utilizam funções do Excel, o que diminuiu em muito o tempo gasto no desenvolvimento dos casos de teste.

Capítulo 4

Descrição dos Problemas

4.1 Problema Químico

4.1.1 Um pouco sobre radioatividade

Na natureza, átomos se formam e se transformam a todo momento. Por exemplo, o carbono-14 se forma continuamente na atmosfera da Terra por interações de raios cósmicos com constituintes do ar. Estes átomos são radioativos, assim como outros que tiveram origem na própria formação da Terra, como o urânio e o tório.

Para que um átomo seja estável é necessário que ele seja formado por um certo número de seus constituintes. Por exemplo, o átomo de oxigênio estável é formado por 8 prótons, 8 nêutrons e 8 elétrons, já o iodo estável possui 53 prótons, 74 nêutrons e 53 elétrons. Se um átomo é formado com excesso de um de seus constituintes, ele será instável e naturalmente buscará uma situação de equilíbrio (energia baixa), emitindo radiação até atingir a condição de átomo estável.

Nestes processos de emissão de radiação, os átomos instáveis podem se transformar em átomos de outros elementos. É o que acontece com o átomo de iodo, que possui 53 prótons, 53 elétrons, porém com 78 nêutrons, será instável e portanto radioativo; pela emissão de uma partícula beta se transmuta em xenônio-131, mais estável, e completa

seu processo de estabilização emitindo raios gama.

Figura 4.1: Transmutação do Iodo em Xenônio

O processo de transmutação do átomo de um elemento para outro é conhecido como *desintegração radioativa* ou *radionuclídeo* e a denominação que se dá normalmente aos átomos instáveis.

4.1.2 Xenônio

O xenônio é um gás incolor e inodoro que pertence ao grupo 18 (gases nobres) da tabela periódica. Ele é usado em lâmpadas fluorescentes, em câmaras de ebulição, etc. Em seu estado líquido num estado supercrítico a temperaturas elevadas é usado como solvente em espectroscopia com infravermelho, em reações químicas em reatores nucleares, entre outros. Ele não é tóxico, porém vários de seus compostos são altamente tóxicos devido às suas fortes propriedades de oxidação; podemos citar os óxidos de xenônio como o trióxido de xenônio, composto altamente explosivo. Se conhece ao menos 80 compostos de xenônio em que este se liga ao oxigênio. Além deste existem também inúmeras transmutações do xenônio em outros componentes químicos através do processo de desintegração radioativa.

4.1.3 Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

Um reator nuclear é um dispositivo que produz energia por fissão nuclear controlada. É constituído por um recipiente no qual o combustível nuclear sofre fissão e libera energia térmica. Os átomos do combustível fissionam-se espontaneamente de tempos em tempos, liberando nêutrons que provocam a fissão de outros átomos, numa reação em cadeia. No núcleo do reator, barras de controle e um moderador mantêm a reação estacionária, para que o calor seja produzido a taxa constante. Um reator nuclear gera uma radiação intensa, e pode ser usado para fazer radioisótopos. Circundam o reator camadas protetoras, ou blindagem, para evitar escape de radiação. A figura 4.2 mostra o núcleo do Reator Nuclear do Instituto de Pesquisas Eneógicas e Nucleares (IPEN).

Figura 4.2: Núcleo do Reator Nuclear-IPEN

Durante a operação de um reator nuclear muitos tipos de nuclídeos(átomos radioativos) com elevada absorção de nêutrons são gerados como fragmentos da fissão nuclear, destes, os mais absorventes são o iodo(I) e o xenônio(Xe), este último é obtido como resultado do decaimento radioativo do iodo(I).

Quando o reator nuclear é desligado e o fluxo de nêutrons é reduzido a praticamente zero, mais xenônio é gerado, pois há a transmutação de iodo em xenônio, assim o

xenônio no interior do reator obtém seu valor máximo. Para que a operação prática do reator seja reestabelecida é necessário que a quantidade de xenônio seja reduzida, porém o tempo de meia vida do decaimento do xenônio dentro do reator é de 9,2 horas, que é um tempo longo, e este é um fator de suma importância quando se trata de reatores nucleares veiculares que dependem de restarts rápidos. Uma solução é limitar a concentração de xenônio a um valor que permita sua operação prática controlando a transmutação do iodo.

A contaminação por xenônio provocado pelo escape desse gás durante o funcionamento do Reator Nuclear será matematicamente descrita nesta seção e também pode ser encontrada em Tabak and Kuo [30].

4.1.4 Modelagem do problema

Um modelo não é igual à realidade mas, suficientemente similar para que conclusões obtidas através de sua análise e/ou operação possam ser estendidas à realidade. Dentro deste contexto, esta seção apresentará uma modelagem para o problema de controle ótimo da *Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares* [30].

Se considerarmos as concentrações de xenônio e de iodo como variáveis de estado que podem ser calculadas a cada iteração e o fluxo de nêutrons como variável de controle que são valores fornecidos pelo sistema, obteremos as seguintes equações básicas [30]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(w + r_0u)x + g_1y + g_2u \\ \dot{y} = -y + u \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Onde:

x = concentração de xenônio.

y = concentração de iodo.

γ_i = iodo produzido pela fissão.

γ_x = xenônio produzido pela fissão.

ϕ = fluxo.

ϕ_0 = fluxo inicial.

λ_1 = decaimento constante de iodo.

λ_2 = decaimento constante de xenônio.

σ = absorção microscópica de nêutrons para transformação em xenônio.

$u = \frac{\phi}{\phi_0}$ *fluxo*.

$w = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

$\gamma_1 = \frac{\gamma_i}{(\gamma_x + \gamma_i)}$ concentração de iodo.

$\gamma_2 = \frac{\gamma_x}{(\gamma_x + \gamma_i)}$ concentração de xenônio.

$r_0 = \frac{(\sigma\phi_0)}{\gamma_1}$

$g_1 = \gamma_1(w + r_0)$

$g_2 = \gamma_2(w + r_0)$

Como podemos observar em (4.1.1) as equações de estado são não lineares por causa do termo ux que aparece na primeira equação. Neste caso usaremos uma escala de tempo de $\lambda_1^{-1} = 9,2$ hs. As condições iniciais para as concentrações de xenônio e de iodo podem ser escritas:

$$\begin{aligned}x(0) &= y(0) = 1 \\ \dot{x}(0) &= \dot{y}(0) = 1\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

No momento em que o fluxo de nêutrons é zero as equações de (4.1.1) se tornam lineares e podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \dot{x} = -wx + g_1y \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (4.1.3)$$

A solução da equação (4.1.3) pode ser facilmente obtida. Se o desligamento total ocorrer em $t = T$, isto é, no tempo final estabelecido quando as concentrações de xenônio e de iodo assumem valores $x(T)$ e $y(T)$, respectivamente, a solução da equação (4.1.3) para $t > T$ deve ser [30]:

$$x(t) = x(T)e^{-w(t-T)} + y(T) \left[\frac{g_1}{1-w} e^{-w(t-T)} - e^{-(t-T)} \right] \quad (4.1.4)$$

Então, por diferenciação da equação (4.1.4) podemos encontrar a equação que define a quantidade de xenônio máxima:

$$x_p = Gy(T) \left[1 + F \frac{x(T)}{y(T)} \right]^{gw} \quad (4.1.5)$$

Onde:

$$G = g_1 w^{\frac{w}{1-w}} \quad (4.1.6)$$

$$F = \frac{1-w}{g_1} \quad (4.1.7)$$

$$g_w = \frac{1}{1-w} \quad (4.1.8)$$

Existem várias formas de fazer a modelagem de um problema de controle, dois exemplos muito utilizados são *Minimax Problem* [19] e o *The Minimum-Time Problem* [14, 13]. Neste problema usaremos a aproximação *The Minimum-Time Problem*.

4.1.5 Problema de Tempo Mínimo

Neste caso o estado final ocorre em $t = T$, assim a trajetória x de concentração de xenônio atinge o seu pico, isto é, a quantidade de xenônio assume o valor máximo, $x_p = x_{max}$. O conjunto de pontos possíveis quando $t = T$ pertence ao lugar geométrico dos pontos do plano yx e pode ser obtido pela equação:

$$x = g(y) = \left[\frac{x_{max}}{(x_{max}w)^w} + \frac{(x_{max}w)^{1-w}}{w-1} \right] y^w - \frac{y}{1-w} \quad (4.1.9)$$

O problema então é encontrar a curva designada $g(y)$ em um tempo mínimo. Uma aproximação clássica, através da discretização utilizando um método de 1^a ordem, o *Método de Euler* [30]; tem como objetivo minimizar o valor máximo de xenônio x_p . Deve-se então avaliar as variáveis que dependem dele; como podemos observar em (4.1.5), as variáveis envolvidas são $x(T)$ e $y(T)$, isto é, só depende das quantidades de xenônio e de iodo nos seus estados finais. Teoricamente existe uma infinidade de formas de apresentar as trajetórias ótimas para as variáveis de controle, entretanto o valor de concentração x_p deve ser o mesmo em todas elas. Antes de determinar uma trajetória ótima para o problema devemos verificar para quais valores finais de $x(T)$ e $y(T)$ teremos a concentração fornecida pela equação 4.1.5 minimizada e a curva da equação 4.1.9 alcançada em um tempo mínimo.

Então por diferenciação direta da equação 4.1.5 e para algum valor $x(T)$, o valor de x_p deve satisfazer a seguinte igualdade:

$$\frac{x(T)}{y(T)} = \frac{1}{F(g_w - 1)} \quad (4.1.10)$$

Considerando a equação (4.1.10) e como alvo a curva $g(y)$ no plano yx podemos assegurar o valor mínimo de xenônio x_p não importando qual é o valor final da concentração de xenônio que seja alcançada.

Temos então um problema de programação não linear restrito, que podemos modelar com os valores obtidos para $x(t)$ e $y(t)$ que são as variáveis de estado e os valores de $u(t)$ e t obtidos a cada iteração são as variáveis de controle. A seguir será apresentada a discretização para o problema [30].

4.1.6 Discretização

Dados os valores de concentração inicial de xenônio e de iodo $\dot{x}(0)$ e $\dot{y}(0)$, nossa função de avaliação será encontrar a lei de controle $u(t)$ que satisfaça à equação (4.1.10) em um tempo mínimo. Usando a formulação proposta por [30] as equações de estado

(2.2.7) podem ser reescritas na forma de tempo discreto, assim o problema de programação não linear será:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{i=1}^N T_i \\ & \text{sujeito a :} && \begin{cases} x_{i+1} = x_i - (w + r_0 u_i) x_i T_{i+1} + g_1 y_i T_{i+1} + g_2 u_i T_{i+1} \\ y_{i+1} = y_i - y_i T_{i+1} + u_i T_{i+1}, & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 \leq x_i \leq x_{max}, & i = 1, \dots, N \\ 0 \leq u_i \leq u_{max}, & i = 0, \dots, N-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

4.2 Problema Fisiopatológico

4.2.1 Diabetes Mellitus

O *Diabetes Mellitus* é um defeito que ocorre num dos processos mais vitais do ser humano, o metabolismo da glicose. Combustível para as mais de 100 trilhões de células do organismo, a glicose é obtida a partir dos alimentos, especialmente os carboidratos. Depois de digeridos, pães, massas e doces são transformados basicamente em glicose. Pela corrente sanguínea ela chega às células, e para entrar em cada uma delas e fornecer a energia necessária para o funcionamento do corpo humano, a glicose precisa de uma espécie de chave, o hormônio insulina.

Produzida pelo pâncreas, numa pessoa sadia, a insulina acompanha as altas e baixas concentrações de glicose a que o organismo está sujeito durante o dia e a noite. A harmonia precisa ser perfeita e quando ela não existe, ocorre a hiperglicemia crônica com distúrbios no metabolismo dos carboidratos, proteínas e lipídios caracterizando o Diabetes. Por falta completa ou parcial de insulina, a glicose não tem como entrar nas células e fica concentrada no sangue ou depositada no fígado e em outros tecidos.

Existem dois tipos principais de *Diabetes Mellitus*. O diabetes mellitus do tipo 1 resultante da destruição, auto-imune ou idiopática, das células beta produtoras de

insulina acometendo 5 a 10% por cento dos diabéticos. Já o diabetes mellitus do tipo 2 ocorre em graus variáveis de resistência à ação insulínica e de deficiência na secreção de insulina, envolvendo 90% dos casos de Diabetes Mellitus[3]. Na subseção 4.2.4 será introduzida a formulação por controle ótimo do problema do Diabetes Mellitus, as considerações médicas necessárias e a apresentação do sistema, bem como suas equações diferenciais serão detalhadamente descritas. Antes vamos discorrer um pouco sobre o órgão responsável pela produção de insulina.

4.2.2 Pâncreas

É o órgão responsável pela produção do hormônio insulina, este hormônio é responsável pela regulação da glicemia (nível de glicose no sangue). Para que as células das diversas partes do corpo humano possam realizar o processo de respiração aeróbica que utiliza a glicose como fonte de energia, é necessário que esta molécula esteja presente na célula. Portanto, as células possuem receptores de insulina que, quando acionados, "abrem" a membrana celular para a entrada da glicose presente na circulação sanguínea. Uma falha na produção de insulina resulta em altos níveis de glicose no sangue, já que esta última não é devidamente dirigida ao interior das células.

Visando manter a glicemia constante, o pâncreas também produz outro hormônio antagônico à insulina denominado glucagon. Este hormônio é secretado quando a glicemia diminui, promovendo a mobilização da glicose a partir do fígado, dos músculos e do tecido adiposo. Constitui-se portanto um sistema natural do organismo visando reestabelecer o nível de glicose na circulação.

A seguir podemos visualizar a anatomia do pâncreas, o órgão do corpo humano regulador natural da glicemia.

Figura 4.3: Anatomia do Pâncreas

A tabela a seguir apresenta as categorias de tolerância à glicose:

Figura 4.4: Categorias de tolerância à glicose

4.2.3 Secreção de Insulina

O pâncreas humano secreta cerca de 40 a 50 unidades de insulina por dia. A concentração sanguínea basal de insulina é de aproximadamente $10\mu U/mL$. Os níveis de insulina podem aumentar para até $100\mu U/mL$ após uma refeição. A secreção basal de insulina representa a quantidade do hormônio secretado no estado de jejum. A secreção estimulada de insulina envolve a ação de vários agentes após a refeição, sendo a glicose o

mais potente deles. Esta secreção é bifásica, apresentando uma fase rápida de aumento na insulinemia, seguida de queda gradual, e outra fase tardia de máxima secreção, conforme demonstrado na figura 4.5.

Figura 4.5: Evolução da secreção de Insulina

A principal ação da insulina é promover o estoque dos nutrientes ingeridos. Isto culmina no estímulo do crescimento celular. Dessa forma, o principal hormônio envolvido no anabolismo (conjunto de reações de síntese) é a insulina. Apesar de todas as células do organismo sofrerem influência direta ou indireta da insulina, os três principais tecidos-alvo desse hormônio são o hepático, o adiposo e o muscular. O aumento da captação de glicose pelo tecido adiposo e dos músculos, promove o estoque de carboidratos na forma de glicogênio no fígado e nos músculos, induz à síntese de lipídios a partir dos substratos absorvidos na alimentação, e estimula a síntese de proteínas. Tudo isso faz com que os nutrientes sejam incorporados às células ou estocados, fazendo com que as concentrações de glicose se reduzam no sangue. O contrário irá ocorrer no período de jejum, no qual os baixos níveis de insulina promovem o aumento dos hormônios contra-reguladores da insulina, onde o principal é o glucagon que provoca quebra dos nutrientes estocados, menor captação de glicose pelo adipócito e pelos músculos, e aumento na produção hepática de glicose. Estas ações ocorrem para manter um nível adequado de glicose ao sistema nervoso central, o qual só utiliza como substrato energético a glicose.

4.2.4 Modelagem

Vamos considerar que as quantidades de glicose e de insulina presentes no sangue no instante t são denotadas por $G(t)$ e $H(t)$ respectivamente. Podemos então, equacionar as taxas de concentrações da seguinte forma:

$$\dot{G}(t) = F_1(G, H) + P(t), \quad (4.2.12)$$

$$\dot{H}(t) = F_2(G, H) + U(t) \quad (4.2.13)$$

onde:

$P(t)$ é a taxa de acréscimo de glicose no sangue proveniente de alimentos

$U(t)$ é o acréscimo de insulina administrada

O diagrama abaixo apresenta o sistema Glicose x Insulina:

Figura 4.6: Diagrama do sistema Glicose x Insulina

Vamos supor que na situação de equilíbrio hormonal seja G_0 e H_0 para glicose e insulina respectivamente. Consideremos pequenas quantidades de cada hormônio $g(t)$ e $h(t)$. Podemos então definir:

$$g(t) = G(t) - G_0, \quad (4.2.14)$$

$$h(t) = H(t) - H_0 \quad (4.2.15)$$

As equações de estado podem ser reescritas na forma linearizada:

$$\begin{cases} \dot{g} &= -c_1 - c_2h + p \\ \dot{h} &= -c_3h + c_4g + u \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Onde: $c_i, i = 1, 2, 3, 4$ são constantes que podem ser encontradas das derivadas parciais de $F(t)$ e $G(t)$.

A função-objetivo deste sistema procura reduzir o excesso na concentração de glicose do sangue, possibilitando ao indivíduo portador da Diabetes Mellitus um valor satisfatório de concentração de glicose no sangue através da administração de insulina, é também desejado que a quantidade insulina administrada seja minimizada. Este modelo matemático será então representado por:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \int_0^T \frac{1}{2} (g^2 + k^2 u^2) dt \\ \text{sujeito a:} = & \begin{cases} \dot{g} = -c_1 - c_2h + p \\ \dot{h} = -c_3h + c_4g + u \\ g(0) = g_0; \quad g(T) = 0; \\ h(0) = h_0; \quad h(T) = 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

4.2.5 Discretização

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{i=0}^N \frac{1}{2}(g_i^2 + k^2 u^2)T_i \\ & \text{sujeito a :} && \begin{cases} g_{i+1} = g_i - (c_1 g_i - c_2 h_i + p_i)\Delta t \\ h_{i+1} = h_i - (c_3 h_i + c_4 g_i + u_i)\Delta t \\ g(0) = g_0 \quad g(T) = 0 \\ h(0) = h_0 \quad h(T) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Onde: c_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ são constantes que podem ser encontradas das derivadas parciais de F e G; N é o número de intervalos; e k é o fator de proporção entre as componentes; $T_i = \frac{T}{N}$.

4.3 Problema Biofísico

4.3.1 Coração

Um meio ambiente ótimo para a atividade celular somente pode ser mantido por um fluxo sangüíneo ininterrupto para os tecidos função primordial do sistema circulatório, no qual o coração serve como única fonte de energia para impulsionar o sangue. O organismo humano é percorrido pela corrente sangüínea com a finalidade de nutrir os seus diversos tecidos. Essa tarefa é executada pelo conjunto de elementos que constituem o sistema cardiovascular: coração, artérias, arteríolas, capilares, vênulas, veias e vasos linfáticos. A energia utilizada para a circulação do sangue é fornecida pela contração da massa muscular do coração.

O coração adulto se contrai e relaxa aproximadamente 115 mil vezes por dia, impulsionando 7 mil e 500 litros de sangue pelo corpo. O coração é a "bomba" propulsora ideal do organismo. É ôca, pulsátil, dividida em quatro câmaras que serão descritas a seguir:

- Os átrios, de paredes mais finas, recebem o sangue que flui das veias; são chamadas

câmaras receptoras ou câmaras de acesso aos ventrículos. Também bombeiam fracamente o sangue para auxiliar o enchimento ventricular.

1. O átrio direito recebe as veias cava superior e inferior que trazem o sangue venoso ao coração.
 2. O átrio esquerdo recebe as veias pulmonares, que trazem o sangue oxigenado dos pulmões, para distribuição ao organismo.
- Os ventrículos são câmaras expulsoras, com paredes espessas que, ao se contrair fornecem a principal força que impulsiona o sangue através dos pulmões e do sistema circulatório periférico.
 1. O ventrículo direito bombeia o sangue para os pulmões.
 2. O ventrículo esquerdo, com grande força de contração, bombeia o sangue na circulação periférica.

Na figura abaixo podemos observar as quatro câmaras do coração.

4.3.2 Circulação

No momento da *Sístole ventricular* o sangue "rico" em oxigênio é ejetado do ventrículo esquerdo para a aorta por onde será distribuído por toda circulação sistêmica. Após deixar uma boa quantidade de oxigênio nos tecidos, o sangue retorna mais "pobre" de oxigênio dos mesmos, em seguida segue pelas veias cavas por onde retorna ao coração no átrio direito. Do átrio direito o sangue rapidamente passa ao ventrículo direito. Cerca de 70% do enchimento ventricular ocorre durante a contração atrial.

Logo em seguida com uma nova sístole ventricular o sangue venoso do ventrículo

Figura 4.7: Câmaras do Coração

direito é ejetado para a artéria pulmonar, desta o sangue segue para a rede dos capilares pulmonares. Ao passar através da rede dos capilares pulmonares, as moléculas de hemoglobina presentes no interior das hemácias vão recebendo moléculas de oxigênio que se difundem do interior dos alvéolos, através da membrana respiratória, para o interior dos capilares pulmonares. O gás carbônico se difunde em direção contrária, isto é, do interior dos capilares para o interior dos alvéolos. Desta maneira, o sangue se torna mais enriquecido de oxigênio e menos saturado de gás carbônico.

Através das veias pulmonares este sangue atinge o átrio esquerdo e vai rapidamente passando para o ventrículo esquerdo. Com a sístole atrial uma quantidade adicional passa do átrio esquerdo para o ventrículo esquerdo, finalizando um ciclo.

Contrações e dilatações ocorrem simultaneamente em todas as partes do coração como observamos nesta seção, além da contração do ventrículo existe também a contração do átrio a *sístole atrial* que retorna o sangue para o ventrículo. Na figura 4.8 podemos visualizar a grande e a pequena circulação no corpo humano:

Figura 4.8: Grande e pequena Circulação

4.3.3 Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração

Quando os ventrículos se contraem, o ventrículo esquerdo ejeta sangue para a aorta. Esta contração recebe o nome de sístole. Neste momento a pressão nas artérias se torna máxima e elas se distendem um pouco, esta pressão é chamada *pressão sistólica*. O relaxamento dos ventrículos é denominado diástole, nesta fase da circulação o sangue que está na aorta tenta refluir, mas é contido pelo fechamento da válvula aórtica, que evita que ele retorne ao ventrículo. A pressão nas artérias baixa para um valor mínimo, chamado pressão diastólica. Veremos nas sessões 4.3.5 e 4.3.6 estas fases da circulação com mais detalhe.

4.3.4 Pressão Arterial

A pressão arterial corresponde à força com que o sangue é bombeado pelo coração e que exerce sobre a parede dos vasos sanguíneos. A circulação do sangue é fundamental para o transporte do oxigênio e dos nutrientes por todo o corpo, sendo pro-

movida pela pressão arterial.

Produzida durante o bombeamento do sangue pelo coração, a pressão arterial é também mantida pela contração das paredes das artérias. O sistema circulatório é formado pelo coração e pelos vasos sanguíneos, e trabalha em harmonia para garantir um fornecimento de sangue adequado para todas as partes do corpo. Em algumas situações, como no caso de exercícios físicos vigorosos, isso exige mudanças na pressão arterial. Por isso, a medição da pressão deve sempre ser precedida de um repouso.

São registrados dois valores numa unidade de pressão, sendo sempre a unidade padrão milímetros de mercúrio (mmHg). O primeiro e mais alto valor é o que corresponde ao momento em que o coração se contrai (*sístole*), empurrando um grande volume de sangue para dentro da aorta, sendo por isso chamado de *pressão sistólica*. O segundo valor, mais baixo, é resultado da retração das paredes da aorta. Esta segunda medida é chamada de *pressão diastólica*, pois se refere ao intervalo entre as contrações cardíacas (*diástole*).

Na prática clínica, a pressão arterial é avaliada através de um aparelho chamado esfigmomanômetro que, originalmente, se utilizava de uma coluna de mercúrio para a medição. Por isso, os valores são apresentados em milímetros de mercúrio (mmHg). Por isso, quando dizemos que a pressão se apresenta em 120 por 70, significa que a pressão sistólica corresponde a 120mmHg e a diastólica a 75 mmHg.

4.3.5 Pressão Sistólica

Em repouso, a pressão mais alta gerada pelo coração costuma ser de aproximadamente 120 mmHg durante a contração, ou sístole do ventrículo esquerdo. O ponto de referência para essa mensuração costuma ser a artéria braquial com o manguito do aparelho dois centímetros acima do nível do cotovelo. O sangue que chega aos átrios é levado aos ventrículos durante uma sístole atrial que ocorre em um décimo de segundo. Após sua passagem pela valva mitral, o sangue proveniente do átrio esquerdo promove

o fechamento dessa valva e, em seguida, é ejetado para a aorta durante a contração do ventrículo esquerdo (VE). Sendo assim, a *pressão sistólica* permite fazer uma estimativa do trabalho do coração e da tensão que agem nas paredes arteriais durante a contração ventricular.

Uma vez na aorta, o sangue ejetado do ventrículo esquerdo fecha a valva aórtica e a retração elástica natural do sistema proporciona uma pressão contínua capaz de manter um fluxo constante de sangue para a periferia, até a próxima "onda" de sangue.

4.3.6 Pressão Diastólica

Durante a diástole, ou fase de relaxamento do ciclo cardíaco, a pressão arterial cai para 70 ou 80 mm Hg. A pressão diastólica proporciona uma indicação de resistência periférica e da facilidade com que o sangue flui das artérias para dentro dos capilares. Quando a resistência é alta, a pressão dentro das artérias após a sístole não é dissipada e continua elevada durante grande parte do ciclo cardíaco.

4.3.7 Modelagem

Nesta subseção vamos apresentar a modelagem por Controle Ótimo do problema de ação de contração do ventrículo esquerdo do coração, onde sangue oxigenado entra no ventrículo esquerdo e é expelido para dentro da aorta através da válvula aorta e, em seguida, segue para a circulação.

O coração é um músculo de natureza involuntária, por isso, para que o problema seja matematicamente formulado e alguma solução possa ser encontrada, é necessário considerar sua contração voluntária, assim, a pressão a cada instante podendo ser considerada uma variável de controle do sistema, o problema poderá ser formulado e a solução ótima encontrada para a função de *performance* estudada.

Representaremos por $v(t)$ o volume de sangue no instante t para o volume nos

instantes inicial e final; é dada a seguinte notação: v_0 para $t = 0$, e v_f para $t = T$. A taxa de fluxo de sangue, a pressão na aorta e a pressão no ventrículo esquerdo serão denotados respectivamente por: $q(t)$, $a(t)$, $p(t)$.

A relação entre o volume de sangue do ventrículo esquerdo e a taxa de fluxo sanguíneo fornece a primeira equação de estado deste sistema [12]:

$$\dot{v}(t) = -q(t). \quad (4.3.19)$$

A diferença de pressão entre o ventrículo e a aorta produz a força necessária para acelerar o fluxo de sangue e superar a resistência da válvula aorta. Esta diferença de pressão pode ser expressa pela equação a seguir:

$$\dot{q}(t) = c_2(p(t) - a(t)) - c_1q(t), \quad (4.3.20)$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas.

Neste caso é muito importante que nós tenhamos uma adequada pressão arterial pois, se esta for muito baixa, o fluxo será insuficiente para nutrir todos os tecidos; por outro lado, uma pressão excessivamente elevada pode, além de sobrecarregar o coração, acelerar o processo de envelhecimento das artérias e aumentar o risco de um evento fatal [4].

O fluxo de sangue que sai do ventrículo esquerdo, entra na aorta, aumenta o volume já existente no interior desta cavidade, e é proporcional à pressão existente e à taxa de aumento da pressão da própria aorta. Esta taxa, por sua vez, é também proporcional ao fluxo sanguíneo no interior das artérias periféricas. Podemos então escrever a terceira equação de estado:

$$\dot{a}(t) = c_3q(t) - c_4a(t), \quad (4.3.21)$$

onde c_3 e c_4 são constantes positivas.

Nas equações descritas acima as variáveis v, q e a são variáveis de estado e p , variável de controle. O início e o final da circulação de uma contração sistólica é marcado por fluxo zero, logo tem-se a condição inicial e a final:

$$q(0) = q(t_f) = 0. \quad (4.3.22)$$

Já a condição inicial e final para a pressão na aorta não é tão fácil assim, uma vez que o valor de $a(0)$ não é fixado e $a(t_f)$ é livre. Uma possibilidade é considerar a soma das pressões no tempo inicial e final e assumir que este valor seja constante; para efeitos computacionais atribuiremos a esta soma o valor de 200mmHg, valor proveniente de resultados empíricos, considerando o intervalo de valores de pressão aceitáveis para o corpo humano [12, 23]:

$$a(0) + a(t_f) = A, \quad (4.3.23)$$

onde A é uma constante positiva. Este é um problema de tempo livre.

Para completar a descrição deste problema, a função de *performance* é definida pela minimização do trabalho realizado pelo coração durante uma sístole ventricular proveniente do ventrículo esquerdo:

$$J = \int_0^{t_f} \left[\frac{1}{2} p^2(t) + c_5 p(t) q(t) \right] dt, \quad (4.3.24)$$

onde c_5 é uma constante de peso entre as duas componentes da função de avaliação.

Matematicamente todo o problema de *Contração do ventrículo esquerdo do*

coração pode ser escrito por:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimize} &= \int_0^{t_f} \left[\frac{1}{2} p^2(t) + c_5 p(t) q(t) \right] dt \\
 \text{sujeito a:} & \begin{cases} \dot{v} = -q \\ \dot{q} = c_2(p - a) - c_1 q \\ \dot{a} = c_3 q - c_4 a \\ v(0) = v_0, \quad v(t_f) = V_T \\ q(0) = q(t_f) = 0 \\ a(0) + a(t_f) = A. \end{cases} \quad (4.3.25)
 \end{aligned}$$

Vamos considerar também como valores padrão de volumes de sangue em cada câmara do coração, os valores apresentados por um jovem saudável em repouso. Vejamos:

Volume Diastólico Final : Volume de sangue que se encontra em cada câmara ventricular ao final de uma diástole; aproximadamente 120 a 130 mL.

Volume Sistólico Final : Volume de sangue que se encontra em cada câmara ventricular ao final de uma sístole; aproximadamente 50 a 60 mL.

Débito Sistólico : Volume de sangue ejetado por cada câmara ventricular durante uma sístole; 70 mL.

Assim, durante um minuto um adulto normal em repouso que apresenta aproximadamente 70 ciclos cardíacos, a cada ciclo o coração ejeta cerca de 70 mL de sangue numa sístole, pode-se concluir então que durante um minuto são lançados 5 litros de sangue ($70 \times 70 \text{ mL}$). Na subseção seguinte é apresentada a discretização para o problema formulado em 4.3.25.

4.3.8 Discretização

Temos então especificado um problema linear a tempo livre, com função de avaliação quadrática sujeito a condições de fronteira para as variáveis de estado e de

controle. A discretização para o problema da Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração será:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad \sum_{i=0}^N \left[\frac{1}{2} p_i^2 + c_5 p_i q_i \right] T_i \\
 & \text{sujeito a:} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 v_{i+1} = -q_i T_i + v_i \\
 q_{i+1} = c_2 (p_i - a_i) T_i - c_1 q_i T_i + q_i \\
 a_{i+1} = c_3 q_i T_i - c_4 a_i T_i + a_i \\
 v(0) = v_0, \quad v_f = v(N) \\
 q(0) = q(T) = 0 \\
 a(0) + a(T) = A.
 \end{array} \right. \quad (4.3.26)
 \end{aligned}$$

onde: c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 são constantes; N é o número de iterações; q é o fluxo sanguíneo; p é a pressão no ventrículo; a é pressão auricular; $T_i = \frac{T}{N}$.

Capítulo 5

Programação Não Linear

A Programação Não Linear caracteriza-se por não possuir um método geral para a resolução de problemas não lineares de otimização restrita e irrestrita. Os algoritmos de otimização que utilizam o máximo declive e a métrica variável tornaram-se muito significativos para a área, onde há um grande número de métodos eficientes que são iterativos, inicializados em uma primeira estimativa, e a cada iteração, tentam melhorar o valor da função objetivo do problema, não violando possíveis restrições presentes.

5.1 Condições de Otimalidade

5.1.1 Condições de Otimalidade para Problemas Irrestritos

Para a determinação do ponto de mínimo da função objetivo, uma série de condições necessárias e suficientes devem ser satisfeitas. Apresentaremos estas condições na forma de teoremas que estão demonstrados em [17, 21].

Teorema 5.1.1 *Seja $S \subseteq \mathfrak{R}^n$ e f uma função sobre S de classe C^1 . Se x^* é um ponto de mínimo local de f sobre S , então para qualquer $h \in \mathfrak{R}^n$, direção viável em x^* , temos que: $\nabla f(x^*) \cdot h \geq 0$*

Teorema 5.1.2 *Seja $S \subseteq \mathfrak{R}^n$ e f uma função sobre S de classe C^2 . Se x^* é um ponto de mínimo local de f sobre S , então para qualquer $h \in \mathfrak{R}^n$, direção viável em x^* , temos que:*

- $\nabla f(x^*).h \geq 0$;
- Se $\nabla f(x^*).h = 0$, então $h^t \nabla^2 f(x^*).h \geq 0$.

Teorema 5.1.3 *Seja x^* ponto interior ao conjunto S e f uma função sobre S de classe C^2 . Se x^* é um ponto de mínimo local de f sobre S , então para qualquer $h \in \mathbb{R}^n$, direção viável em x^* , temos que:*

- $\nabla f(x^*).h = 0$;
- \forall direção $h \in \mathbb{R}^n, h^t \nabla^2 f(x^*).h \geq 0$

Teorema 5.1.4 *Seja f uma função sobre S de classe C^2 tal que $x^* \in S$ e x^* é interior. Suponha que :*

- $\nabla f(x^*).h = 0$;
- $H(x^*)$ é definida positiva.

Então x^ é um mínimo local restrito de f*

Teorema 5.1.5 *Seja f uma função convexa definida sobre um conjunto convexo S , então o conjunto R de pontos, onde f atinge o seu mínimo é convexo, e qualquer mínimo local é um mínimo global.*

Teorema 5.1.6 *Seja f uma função de classe C^1 convexa sobre o conjunto convexo S . Se existe um ponto $x^* \in S$ tal que para todo $y \in S$, $\nabla^t f(x^*)(y - x^*) \geq 0$., então x^* é um ponto de mínimo global de f sobre S .*

Os teoremas 5.1.1 e 5.1.2 garantem respectivamente as condições de necessidade de primeira e segunda ordem para a existência de um mínimo local ou global. Já os teoremas 5.1.3 e 5.1.4 asseguram respectivamente as condições de necessidade e de suficiência para a existência de um ponto interior a S que seja um mínimo local, situação que engloba o caso particular dos problemas irrestritos, em que $S = \mathbb{R}^n$.

O teorema 5.1.5 garante que com a convexidade de $f(x)$ o mínimo local é um mínimo global de f em S , e finalmente o teorema 5.1.6 assegura que com convexidade a condição de necessidade de primeira ordem é também condição de suficiência para a existência de um mínimo global de f .

5.1.2 Condições de Otimalidade para Problemas Restritos

Apresentaremos as condições de otimalidade para o seguinte problema de Programação Não Linear (PNL) com restrições:

Definição 5.1.1 *Define-se por problema de Programação Não Linear com restrições:*

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x) \\ \text{Sujeito a :} & \begin{cases} h_j(x) = 0, & 1 \leq j \leq p, & \lambda_j \text{ multiplicadores de Lagrange} \\ g_i(x) \leq 0, & 1 \leq i \leq m, & \mu_i \geq 0 \text{ multiplicadores KKT} \end{cases} \end{array} \quad (5.1.1)$$

As condições de necessidade neste caso se tornam as condições de KKT (Karush-Kuhn-Tucker). Para isto a caracterização das direções viáveis $d \in \mathfrak{R}^n$ é feita em função dos gradientes $\nabla g_i(x)$, dos multiplicadores de KKT $\mu_i \geq 0$ associados às restrições de desigualdade $g_i(x)$, dos gradientes $\nabla h_j(x)$ e dos multiplicadores de Lagrange λ_j associados às restrições de igualdade h_j . Estes multiplicadores chamados também de variáveis duais têm papel importante na formulação de condições de suficiência que não fazem uso direto nem do conceito de direções viáveis, nem de convexidade e de diferenciabilidade [21, 25].

Estes resultados teóricos têm grande importância na prática. Podemos repartir as restrições em fáceis e difíceis, deixando as restrições fáceis implícitas no conjunto S e as difíceis explícitas nas funções $g_i(x)$ e $h_j(x)$. No problema PNL as restrições $g_i(x) \leq 0$ podem se referir à disponibilidade do recurso escasso i , numa situação em que a função objetivo $f(x)$ contabiliza o custo total de outros recursos livres necessários para a operação das atividades ao nível x . Nesse contexto uma abordagem intuitiva para evitar as dificuldades impostas pelas restrições $g_i(x) \leq 0$ consiste em associar penalidades

$\mu_i \geq 0$ à não satisfação dessas restrições, adicionando à função objetivo os termos $\mu g(x)$, onde μ é um vetor-linha de variáveis duais de dimensão m . Essa idéia está presente na função Lagrangeana, definida para $x \in S$, $\mu \geq 0$ e λ por:

$$L(x, u, \lambda) = f(x) + \mu g(x) + \lambda h(x) \quad (5.1.2)$$

Definição 5.1.2 *Seja $x \in S$ uma solução obtida na avaliação da função para um vetor específico $\mu \geq 0$. As chamadas condições de KKT, que para (x, μ, λ) com $\mu \geq 0$ e $x \in S$ são definidas por:*

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \mu \nabla g(x) + \lambda \nabla h(x) &= 0, \\ \mu g(x) &= 0; \\ h(x) &= 0; \\ g(x) &\leq 0. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Capítulo 6

Resultados Computacionais

Para validar a modelagem por Controle Ótimo os três problemas descritos no capítulo 4 foram testados e resolvidos com a utilização da versão 6.0 do *Solver* do software comercial Microsoft Excel [11] que implementa o GRG. Todos os casos foram executados em um desktop AMD XP 2.8 GHz, com 512MB de memória RAM.

Os problemas apresentaram dificuldades diferentes na sua resolução, em consequência de restrições nas variáveis de controle e de estado, bem como na manipulação das funções de *performance* que neste trabalho se apresentaram em forma de funções lineares, quadráticas e não lineares.

6.1 Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

O modelo para o problema 4.1.11 apresenta:

- Função de performance linear;
- Equações de estado não lineares;
- Limites inferiores (*lower bound*) e superiores (*upper bound*) para as variáveis de

controle e de estado, permitindo que a trajetória ótima se aproxime das condições reais de trabalho.

As tabelas a seguir apresentam os valores utilizados como parâmetros na otimização do processo, as condições iniciais, os limites de cada variável do problema e a trajetória ótima:

constantes	valor
w	0.724
r_0	9.47
g_1	9.870
g_2	0.324
g_w	3.625
F	0.02795
G	4.21

Tabela 6.1: Valores das constantes - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

nome	variável	valor máximo	valor mínimo
<i>Tempo</i>	T (<i>min</i>)	120	0.2
<i>fluxo</i>	u (átomos/min)	1.0	1.10^{-5}
<i>xenônio</i>	x (átomos/ cm^3)	5.0	1.0
<i>iodo</i>	y (átomos/ cm^3)	1.0	1×10^{-5}

Tabela 6.2: Limites - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

condições iniciais	variável	valor
<i>Xenônio</i>	$x(0)$	1.0 (átomos/ cm^3)
<i>Iodo</i>	$y(0)$	1.0 (átomos/ cm^3)

Tabela 6.3: Condições iniciais - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

A tabela a seguir representa a trajetória ótima para o modelo de Controle Ótimo do problema de Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares.

iteração	T (min)	$u \times 10^{(-1)}$ (átomos/min)	x (átomos/ cm^3)	y (átomos/ cm^3)	$\frac{x(t)}{u(t)}$
0	0	10.000	1.000	1.000	1.000
1	117	9.7990	1.017	0.998	1.019
2	0.2	9.7620	1.016	0.995	1.022
3	0.2	9.7630	1.017	0.991	1.026
4	0.2	0.0005	1.009	0.988	1.021
5	0.2	0.0005	2.813	0.790	2.000
6	0.2	4.8260	3.965	0.632	1.000
7	0.2	5.5650	1.046	0.602	3.000
8	0.2	5.4650	1.017	0.593	5.000
9	0.2	0.0005	1.023	0.584	4.000
10	0.2	4.2430	2.028	0.467	2.000
11	0.2	0.0005	1.054	0.459	2.298
12	0.2	5.2030	5.000	0.367	13.630

Tabela 6.4: Trajetória ótima - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

Figura 6.1: Trajetória ótima das variáveis de estado - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

Figura 6.2: Trajetória ótima das variáveis de controle - Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

6.2 Diabetes Mellitus

O modelo para o problema 4.2.18 apresenta:

- Função de performance quadrática;
- Equações de estado não lineares;
- Limites inferiores (*lower bound*) e superiores (*upper bound*) para as variáveis de controle e de estado que levam o modelo a obter resultados aproximados aos do corpo humano.

As tabelas a seguir apresentam os valores utilizados como parâmetros na otimização do processo, as condições iniciais, os limites de cada variável do problema e a trajetória ótima:

constantes	valor
c_1	0.6
c_2	1.0
c_3	0.5
c_4	0.05
k	18.18

Tabela 6.5: Valores das constantes - Diabetes Mellitus

condições iniciais	variável	valor
<i>glicose</i>	g (mg/dL)	130
<i>insulina natural</i>	i (μ U/mL)	60
<i>glicose administrada</i>	p (mg/dL)	89
<i>insulina injetável</i>	u (μ U/mL)	60

Tabela 6.6: Condições iniciais - Diabetes Mellitus

A tabela a seguir representa a trajetória ótima para o modelo de Controle Ótimo do problema de Diabetes Mellitus:

nome	variável	valor máximo	valor mínimo
<i>glicose</i>	g (mg/dL)	130	125
<i>insulina natural</i>	i (μ U/mL)	60	10
<i>glicose administrada</i>	p (mg/dL)	100	0.0
<i>insulina injetável</i>	u (μ U/mL)	60	0.0

Tabela 6.7: Limites - Diabetes Mellitus

iteração	T (horas)	g (mg/dL)	p (mg/dL)	i (μ U/mL)	u (μ U/mL)
0	0	130.00	102.61	60.00	4.93
1	0.5	112.30	136.99	50.71	6.64
2	1	121.75	153.58	44.12	8.92
3	1.5	139.93	94.72	40.63	12.05
4	2.0	125.00	0.20	40.00	0.0

Tabela 6.8: Trajetória ótima - Diabetes Mellitus

6.3 Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração

O modelo 4.3.26 para o problema da coração apresenta:

- Função de *performance* quadrática;
- Equações de estado não lineares;
- Limites nas variáveis de controle e estado, permitindo que a trajetória ótima se aproxime das condições reais do corpo humano.

As tabelas a seguir apresentam os valores utilizados como parâmetros na otimização do processo, as condições iniciais, os limites de cada variável do problema e a trajetória ótima:

Figura 6.3: Trajetória ótima das variáveis de estado - Diabetes Mellitus

condições iniciais	variável	valor
<i>fluxo de sangue</i>	$q(0)$	0
<i>volume de sangue</i>	$v(0)$	0 mL
<i>pressão arterial</i>	$a(0)$	100 mmHg
<i>pressão no ventrículo</i>	$p(0)$	130 mmHg
<i>tempo</i>	$t(0)$	0

Tabela 6.9: Condições iniciais - Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração.

Figura 6.4: Trajetória ótima das variáveis de controle - Diabetes Mellitus

nome	variável	valor máximo	valor mínimo
<i>fluxo de sangue</i>	q mL/s	60	0
<i>volume de sangue</i>	v mL	0	-70
<i>pressão arterial</i>	a mmHg	120	70
<i>pressão no ventrículo</i>	p mmHg	130	30

Tabela 6.10: Limites - Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração.

nome	variável	valor máximo	valor mínimo
<i>tempo</i>	t	2,0s	0s
<i>volume</i>	$v(t)$	0ml	-70ml
<i>fluxo</i>	$q(t)$	600	0
<i>pressão aórtica</i>	$a(t)$	120mmHg	80mmHg
<i>pressão ventricular</i>	$p(t)$	130mmHg	5mmHg

Tabela 6.11: Limites - Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração.

iteração	Tempo	pressão $p(t)$	pressão arterial $a(t)$	volume $v(t)$	fluxo $q(t)$
0	0.00	119.40	86.90	0.00	0.00
1	0.18	119.31	86.17	0.00	17.88
2	0.36	119.26	87.01	-3.324	35.44
3	0.54	111.19	89.42	-9.678	50.36
4	0.73	99.25	93.25	-18.86	60.00
5	0.91	103.89	97.89	-29.97	60.00
6	1.09	108.49	102.49	-40.95	60.00
7	1.28	74.14	111.56	-51.41	60.00
8	1.46	45.08	108.49	-62.26	38.00
9	1.64	45.00	114.07	-69.99	4.00
10	1.83	30.00	113.03	-70.00	0.05

Tabela 6.12: Trajetória ótima das variáveis de estado e controle - Contração do ventrículo esquerdo do coração

Figura 6.5: Trajetória ótima das variáveis de estado - volume e fluxo sanguíneo

Figura 6.6: Trajetória ótima das variáveis de controle - pressão arterial e ventricular

Capítulo 7

Conclusão

A apresentação da modelagem de diferentes problemas pela Teoria de Controle Ótimo e sua resolução numérica utilizando o método Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) foi o principal objetivo desta dissertação. Os modelos apresentados se mostraram capazes de representar cada problema utilizando um número pequeno de variáveis e de restrições.

Os resultados computacionais de um modelo resolvido por programação matemática devem ser suficientemente similares aos obtidos na realidade para que as conclusões obtidas através de sua análise e/ou operação possam ser estendidas e validadas.

O processo de otimização ocorreu rapidamente para todos os modelos, a partir de um ponto inicial viável, obtido pela simples inspeção de cada problema com valores aproximados aos da realidade, porém algumas concessões foram feitas para que a descrição de cada problema pudesse ser formulada e o problema resolvido computacionalmente.

7.1 1º Problema

7.1.1 Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares

Para o caso da Contaminação por Xenônio em Reatores Nucleares a resolução numérica da modelagem apresentada em 4.1.11 para o problema obteve resultados satisfatórios reduzindo o tempo de operação do reator de 462,7 minutos para aproximadamente 119,2 minutos em poucas iterações, além disso as restrições apresentadas anteriormente por Tabak and Kuo[30] foram atendidas.

7.2 2º Problema

7.2.1 Diabetes Mellitus

Neste problema foi considerado um indivíduo portador da Diabetes Mellitus com concentração de glicose no sangue de aproximadamente 130 mg/dL e quantidade de insulina basal de 60μ U/mL. O indivíduo foi submetido à ingestão de 75g de glicose anidra. Como o objetivo do problema era minimizar o excesso de glicose e insulina administrada, supomos para valores finais uma concentração de glicose no sangue de 125 mg/dL e de 40μ U/mL de insulina administrada. Assim foi possível reduzir o excesso dessas concentrações mantendo o indivíduo em uma situação de tolerância à glicose alterada. Os resultados foram satisfatórios comparados aos da realidade do corpo humano em curto tempo operacional.

7.3 3º Problema

7.3.1 Contração do Ventrículo Esquerdo do Coração

Neste problema, a modelagem exigiu que o coração fosse considerado um músculo de movimento voluntário, isto ocorre porque estamos avaliando o trabalho realizado pelo coração durante uma sístole ventricular, desta maneira o movimento sistólico pôde

ser observado. Sobre a pressão empregada durante a contração foi considerado o valor de 120mmHg para pressão inicial do ventrículo esquerdo, este valor refere-se à pressão sistólica(contração) máxima, equivalente a de um indivíduo jovem em repouso, e para valor mínimo 70mmHg referente à pressão diastólica(relaxamento). Devo ressaltar aqui que o valor aproximado para volume sistólico final(volume de sangue que se encontra em cada câmara ventricular ao final de uma sístole) em condições normais do ser humano é de aproximadamente 50 a 60mL, isso justifica o valor final para pressão no ventrículo esquerdo ser 30 mmHg. Nesta resolução o trabalho realizado pelo coração foi minimizado atendendo a todas as condições e obtendo valores dentro das condições normais de um ser humano.

É importante ressaltar que não foram feitas comparações com outras modelagens ou métodos que pudessem afirmar que a convergência obtida com o uso do método GRG é mais rápida do que outros métodos, porém pode-se afirmar que a utilização do GRG para os problemas de controle ótimo apresentados nesta dissertação obteve resultados computacionais satisfatórios em curto tempo operacional. Foi possível observar também que o algoritmo converge para um ótimo local e deve ser iniciado com um ponto viável. Caso contrário é recomendado o uso de heurísticas ou de penalização para obter o primeiro ponto viável.

Em uma linha de pesquisa futura a aplicação de um algoritmo especializado para Controle Ótimo como o GRECO [8] poderá apresentar resultados mais satisfatórios quando combinado a métodos eficientes de Programação Não Linear, pois aproveita a estrutura particular da matriz jacobiana das restrições, na resolução numérica dos diversos sistemas de equações lineares presentes no método GRG.

Referências Bibliográficas

- [1] Abadie, J.; Carpentier; *Generalization of the Reduced Gradient Method to the case of Nonlinear constraints* in Fletcher, R. (ed.) Optimization, Academic P J.(1969).
- [2] Abadie, J.; *Application of the GRG algorithm to Optimal Control problems* in Abadie, J. (ed.), Integer and Nonlinear Programming, pp.191-212, North-Holland, Amsterdam (1970).
- [3] Autenticmed, Curso Preparatório para Residência Médica; *Endocrinologia 2004* volume II Diabetes Mellitus,(2004).
- [4] Autenticmed, Curso Preparatório para Residência Médica; *Cardiologia 2005* volume II Pressão Arterial,(2005).
- [5] Canon, M.D., Cullum Jr., C.D., Polak, E.; *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*. McGraw-Hill, Nova York(1970).
- [6] Dantzig, G.B.; *Linear Programming and Extensions*. Princeton, Nova Jersey (1963).
- [7] Ehrlich, P.J.; *Pesquisa Operacional: Curso Introdotório 5ª ed.* Atlas Editora, São Paulo (1985).
- [8] Facó, J.L.D.; *A Generalized Reduced Gradient Algorithm for Solving Large-scale Discrete-time Nonlinear Optimal Control Problems*, in Siguerdidjane, H.B., Bernhard, P. (eds.), Control Applications of Nonlinear programming and Optimization 1989, IFAC Workshop Series #2, pp.45-50, Pergamon Press, Oxford (1990).
- [9] Fagundez, F.D.; *Modelos de Controle Ótimo do Scheduling de Petróleo e Derivados em Portos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro(2005).
- [10] Floudas, C.A.; *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization: Fundamentals and Applications*. Oxford, Nova York (1995).
- [11] D., Lasdon, L., Watson, J., Waren, D.; *Design and Use of the Microsoft Excel Solver*. Interfaces 28:5, pp.29-55, Institute for Operations Research and the Management Sciences(1998).
- [12] Hocking, Leslie M.; *Optimal Control: An introduction to the Theory with Application* Oxford Applied Mathematics and Computing Science series(1997).
- [13] J. J. Roberts and H.P. Smith; *Equivalence to the Time Optimal and Minimax Solutions to the Xenon Shutdown Problem*. Nucl. Sci. Eng., 22, pp. 470-478.(1965)

- [14] J. J. Roberts and H.P. Smith; *Time Optimal Solution to the Reactivity-Xenon Shutdown Problem*. Nucl. Sci. Eng., 22, pp. 470-478.(1965)
- [15] Lasdon, L.S., Waren, A.D., Jain, A., Ratner, M.; *Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming*. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 4, No. 1, pp.34-50 (1978).
- [16] Lasdon, L.S., Waren, A.D.; *GRG2 User's Guide*. Department of Computer and Information Science. Cleveland State University, Cleveland, Ohio (1986).
- [17] Luemberguer, G. D. (1984); *Linear and nonlinear programming*, Addison- Wesley, 490p.
- [18] Kirk, D.E.; *Optimal Control Theory: An Introduction*. Prentice-Hall, Nova York (1970).
- [19] M. Ash; *Optimal Shutdown Control of Nuclear Reactors*. Academic Press Nova York(1966)
- [20] Martínez, J.M. e Santos, S.A.; *Métodos Computacionais de Otimização*. Departamento de Matemática Aplicada. Unicamp, Campinas(1998).
- [21] Mateus, G; *Programação Não Linear*, Belo Horizonte : UFMG,R. (1986), 289p.
- [22] MEDCURSO, "Do internato à Residência Médica"; *Endocrinologia 2005* volume III Diabetes Mellitus, Obesidade Distúrbios Nutricionais (2006).
- [23] MEDCURSO, "Do internato à Residência Médica"; *Cardiologia 2005* volume III Cardiologia, Medicina Preventiva (2006).
- [24] Nocedal, J., Wright, S.J.; *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, Nova York (1999).
- [25] Oliveira, L.A.; *Aplicação do Paralelismo à Resolução Numérica de Problemas de Otimização Não Linear*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro(2002).
- [26] Papadimitriou, C.H., Steiglitz, K.; *Combinatorial Optimization Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, Nova Jersey (1982).
- [27] Pinto, J.M.; *Otimização de Processo Químicos - Aplicações em Planejamento e Scheduling. Notas de Aula. Laboratório de Simulação e Controle de Processos, Universidade de São Paulo (2002)*.
- [28] *Premium Solver Platform Solver DLL Platform Field-Installable Solver Engines User Guide. Version 6.0*. Frontline Systems, Inc., NV. www.solver.com(2004).
- [29] Smith, S. e Lasdon, L.S.; *Solve Large-Sparse Nonlinear Programs using GRG*. ORSA Journal of Computing, 4, pp.1-15(1992).
- [30] Tabak, D., Kuo, B.C.; *Optimal Control by Mathematical Programming*. Prentice-Hall, Nova Jersey (1971).

- [31] Wolfe, P.; *Convergence Theory in Nonlinear Programming*. in Abadie, J. (ed.), *Integer and Nonlinear Programming*, pp.1-36, North-Holland, Amsterdam (1970).
- [32] Zaccarelli, S.B.; *Programação e Contrôles de Produção*, Coleção de Engenharia de Produção e Administração Industrial. Livraria Pioneira Editora, São Paulo (1973).