

RENATA DO VALE SILVA PEREIRA

**Análise Numérica da Equação de
Benjamin - Bona - Mahony**

**orientadores: Mauro Antônio Rincon
Juan B. Límaco Ferrel**

**Rio de Janeiro
2007**

P 436 Pereira, Renata do Vale Silva.

Análise numérica da equação de Benjamin - Bona - Mahony /

Renata do Vale Silva Pereira - Rio de Janeiro, 2007.

102 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Informática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro,

Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica, 2007.

Orientador: Mauro Antônio Rincon

Co-orientador: Juan B. Límaco Ferrel

1. Análise Numérica - Método de Elementos Finitos. - Teses 2. Análise Numérica
- Método das Diferenças Finitas - Teses. 3. Simulações Numéricas - Teses. 4. Equação
de BBM num Domínio Cilíndrico - Teses. I. Mauro Antônio Rincon(Orient.). II. Juan B.
Límaco Ferrel (Co-orient.). III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática,
Núcleo de Computação Eletrônica. IV. Título.

CDD

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração : Algoritmos, Métodos Numéricos e Robótica

Aprovada por:

Mauro Antônio Rincon, UFRJ
(Orientador)

Juan Bautista Límaco Ferrel, UFF
(Co-orientador)

Luiz Adauto da Justa Medeiros, UFRJ

Helvécio Rubens Crippa, UFRJ

Sandra Mara Cardoso Malta, LNCC

Dedicatória

A Deus, por me dar a oportunidade de ampliar e adquirir novos conhecimentos. Por me conceder mais uma vitória em minha vida.

Ao meu esposo Luciano, que soube tão bem me apoiar e não deixar eu desistir nos momentos mais difíceis.

A todos os meus familiares, por sempre estarem presentes e participarem dos meus sonhos, incentivando e confiando.

Agradecimentos

Ao Núcleo de Computação Eletrônica e ao DCC-Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro pelo apoio financeiro e estrutura física.

Aos professores orientadores Mauro Antonio Rincon e Juan B. Límaco Ferrel pelos ensinamentos transmitidos, pela orientação no desenvolvimento deste trabalho e pela confiança em mim depositada.

Aos professores Haroldo Clark e Marcelo Teixeira pelas sugestões, dúvidas sanadas, contribuições e incentivos na realização deste trabalho.

Ao meu amigo e companheiro do Mestrado Alessandro que a todo momento pudemos trocar experiências e dar força um ao outro para não desanimar.

Aos meus amigos do laboratório e de turma Michaelle, Cristina, Glauco, Vinícius, Juliana e Ênio pela convivência, amizade, conselhos e troca de conhecimentos.

Agradeço aos funcionários da UFRJ pela paciência e por me aguentarem na universidade até nos finais de semana e feriados.

Agradeço a todos aqueles que me ajudaram direta ou indiretamente.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é determinar a solução numérica da equação de Benjamin - Bona - Mahony em domínios cilíndricos e não cilíndricos. Também serão apresentados os resultados teóricos de existência e unicidade do problema. Simulações Numéricas e a computação gráfica são apresentados.

Abstract

The main purpose of this work is find the numerical solution of Benjamin - Bona - Mahony equation in cylindrical and non-cylindrical domains. We will also show results of existence and uniqueness for this problem. Numerical Simulations and the graphic computation are presented.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Apresentação do Problema	1
1.2	Descrição dos Capítulos	3
2	Notações e Conceitos Preliminares	4
2.1	Espaço das Distribuições Escalares	4
2.2	Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	4
2.3	Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$	6
2.4	Espaços de Sobolev	6
2.4.1	Convergência em L^p e no dual do L^p	6
2.5	Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	8
2.6	Outros Resultados Úteis	11
3	Existência e Unicidade	14
3.1	Prova do Lema (3.1)	15
3.2	Prova do Teorema (3.1)	31
4	Análise Numérica -	
	Método de Elementos Finitos	32
4.1	Formulação Variacional	32
4.2	O Método de Faedo Galerkin	33
4.3	Problema Aproximado	33
4.4	Função de Interpolação	38

4.5	Cálculo das Matrizes	41
4.5.1	Calculando os elementos da Matriz A	41
4.5.2	Calculando os elementos da Matriz B	44
4.5.3	Calculando os elementos da Matriz C	49
4.5.4	Calculando os elementos da Matriz D	54
4.5.5	Calculando os elementos da Matriz E	57
5	Método das Diferenças Finitas	62
5.1	Notação	62
5.2	Família de Métodos	63
5.3	Linearizando o sistema não linear	64
5.3.1	Calculando os elementos da Matriz \hat{B}	67
6	Simulações Numéricas	73
6.1	Exemplo 1	73
6.1.1	Convergência Numérica	78
6.2	Exemplo 2	79
6.3	Exemplo 3	81
6.3.1	Convergência Numérica	83
7	Equação de BBM num domínio cilíndrico	85
7.1	Problema Aproximado	86
7.2	Simulações Numéricas	89
7.2.1	Convergência Numérica	91
	Bibliografia	93

Capítulo 1

Introdução

A equação de Benjamin – Bona – Mahony (abreviada por BBM) descreve aproximadamente a propagação unidimensional de ondas longas de água em determinados sistemas dispersivos não lineares. Neste trabalho, estamos interessados em obter a existência e unicidade da solução e o estudo numérico da Equação de Benjamin – Bona – Mahony num domínio cilíndrico e não cilíndrico. Resultados de existência e unicidade de solução para a equação de BBM foram estabelecidos em [2]. Resultados numéricos, segundo meu conhecimento, ainda não foram estabelecidos. Para encontrar numericamente uma solução, aplicaremos o método de Elementos Finitos, usando splines cúbicas como função base no espaço e o método de Diferenças Finitas no tempo para obtermos uma solução aproximada.

1.1 Apresentação do Problema

Queremos determinar uma solução $u : \hat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$\begin{cases} u_t + (u + u^2)_x - u_{xxt} = 0 & \text{em } \hat{Q} \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \hat{\Sigma} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [\alpha(0), \beta(0)] \end{cases} \quad (1.1)$$

onde \hat{Q} representa o domínio não cilíndrico definido por:

$$\hat{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t), \quad \forall t \geq 0\}, \quad (1.2)$$

e sua fronteira lateral por:

$$\hat{\Sigma} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\} \quad (1.3)$$

Também definimos as seções $\Omega_t = (\alpha(t), \beta(t))$

sendo $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathbb{R})$, tal que $\alpha(t) < \beta(t), \quad \forall t \geq 0$.

Trabalhar diretamente com o problema (1.1), origina certas dificuldades devido a natureza variável do domínio de integração \hat{Q} , a qual torna o problema (1.1) difícil de ser solucionado diretamente.

Para contornar estas dificuldades, seguindo o trabalho desenvolvido em [2] transformamos o problema (1.1) num problema equivalente em domínio cilíndrico mediante a mudança de variáveis $u(x, t) = v(y, t)$ onde $y = \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}$ sendo $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$.

Considerando as seguintes identidades:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \left(\frac{-\alpha' - \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(y, t)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(y, t)}{\partial y} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{2\gamma'}{\gamma^3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{2\gamma'}{\gamma^3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma^2} \left[\left(\frac{-\alpha' - \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

O problema transformado é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial(v + v^2)}{\partial y} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} - \frac{(\alpha' + \gamma' y)}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2\gamma'}{\gamma^3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{(\alpha' + \gamma' y)}{\gamma^3} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0 \quad \text{em } Q \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ v(y, 0) = v_0(y) \quad \text{em } \Omega = (0, 1) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

onde $Q = (0, 1) \times (0, T)$

1.2 Descrição dos Capítulos

Este trabalho é constituído de sete capítulos.

No capítulo 2 apresentaremos algumas notações e conceitos preliminares que serão utilizados ao longo deste trabalho.

No capítulo 3 estudaremos a existência e unicidade para o problema (1.8).

No capítulo 4 é apresentado o Método de Elementos finitos e as funções base utilizados.

No capítulo 5 é apresentado o Método de Diferenças Finitas .

No capítulo 6 são apresentados algumas simulações numéricas para o problema (1.8)

No capítulo 7 estudaremos a equação de BBM num domínio cilíndrico.Exemplos Numéricos serão apresentados.

Capítulo 2

Notações e Conceitos Preliminares

Neste capítulo apresentamos os pré-requisitos necessários para desenvolver os capítulos subseqüentes, cujos detalhes podem ser encontrados em [10, 11]

2.1 Espaço das Distribuições Escalares

Definição 2.1. *Dada uma função contínua, $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto, denomina-se suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente*

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} .$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω , com suporte compacto em Ω .

2.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima, será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que se uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergir, em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ , então,

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω .

Dado um aberto Ω do \mathbb{R}^N denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de *Lebesgue* em Ω , equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ denota-se por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Neste espaço considera-se a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess } |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, é um espaço de *Banach*. Em particular, quando $p = 2$, tem-se que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* cuja *norma* e *produto interno* serão definidos e denotados, respectivamente por

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Lema 2.2 (Du Bois Reymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $\int_{\Omega} u(x) v(x) dx = 0$ $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .*

Demonstração. Ver [3]. □

2.3 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

A seqüência de distribuições escalares $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < \infty.$$

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2.4 Espaços de Sobolev

2.4.1 Convergência em L^p e no dual do L^p

Diz-se que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será denotado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, é reflexivo. Para demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços $L^p(\Omega)$ consulte Brezis [3].

Teorema 2.3. *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge quase sempre para f em Ω , e existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ quase sempre em Ω .

Demonstração. Ver [3]. □

Definição 2.4. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que*

$$i) \|\omega_n\|_H = 1 \quad \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \quad \forall n, m, m \neq n;$$

ii) O espaço gerado pela $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é denso em H .

Sejam $m > 0$, um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev de ordem m , modelado sobre $L^p(\Omega)$ é por definição o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^p(\Omega)$ para as quais suas derivadas até a ordem m , no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e quando $p = \infty$, define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposição 2.5. *Os espaços lineares $W^{m,p}(\Omega)$ equipados das respectivas normas acima são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver [1, 10]. □

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, que é representado por $H^m(\Omega)$. Simbolicamente

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

cuja norma e produto interno são dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

O espaço $H^m(\Omega)$ com a estrutura topológica acima, é um espaço de Hilbert, continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é o espaço denotado por $H^{-m}(\Omega)$. A caracterização de $W^{-m,p}(\Omega)$ é dada por:

Teorema 2.6. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração. Ver [1]. □

Lema 2.7 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Demonstração. Ver [10, 11]. □

Observação 2.8. *Usando a desigualdade de Poincaré conclui-se que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.*

2.5 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E denotam a função característica do conjunto $E \subset [0, T]$. Uma função vetorial $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$. Define-se a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é Bochner integrável (\mathcal{B} -integrável) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X , q.s. em $(0, T)$;

$$\text{ii) } \lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0.$$

Neste caso, a integral de *Bochner* (Ver [21]) de u , é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t) dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X .

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X . Dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à *Lebesgue*.

Denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lebesgue* em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$. A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável (ver [13]), cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach*

$L^{p'}(0, T; X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, pode-se verificar que para cada $u \in [L^p(0, T; X)]'$, existe $\tilde{u} \in L^{p'}(0, T; X')$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle \tilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$.

Uma demonstração para este resultado encontra-se em [6].

Para uma maior discussão sobre espaços de funções com valores vetoriais consulte [7].

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , o qual será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 2.9. *Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$ representa-se o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da *convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$ denota-se o *espaço das funções $u : [0, T] \rightarrow X$ fracamente contínuas*, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$ para $\forall v \in H$.

Teorema 2.10 (Aubin-Lions). *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1 , $1 < p_0, p_1 < \infty$, e, W o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração. Ver [8]. □

Observação 2.11. *Como consequência do Teorema de Aubin-Lions 2.10, se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W . Daí, segue que existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \rightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$.*

Proposição 2.12. *Sejam V e H espaços de Hilbert, V continuamente imerso em H , $u \in L^p(0, T; V)$ e $u' \in L^p(0, T; H)$, com $1 \leq p < \infty$, então $u \in C^0([0, T]; H) \cap C_w^0([0, T]; V)$.*

2.6 Outros Resultados Úteis

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ e $F : D \rightarrow \mathbb{R}^N$. Diz-se que F satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando

- $F(t, \Upsilon)$ é mensurável em t , para cada Υ fixo;
- $F(t, \Upsilon)$ é contínua em Υ , para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D , existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|F(t, \Upsilon)| \leq m_K(t)$, para todo $(t, \Upsilon) \in D$.

Definição 2.13. *Uma solução no sentido estendido do problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

é uma função $\Phi = \Phi(t)$ absolutamente contínua tal que se tenha, para algum β real,

- i)* $(t, \Phi(t)) \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$;
- ii)* $\Phi'(t) = F(t, \Phi(t))$ para todo $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.

Considere-se o retângulo $R = \{(t, \Upsilon) \in \mathbb{R}^{N+1}; |t - t_0| \leq a, |\Upsilon - \Upsilon_0| \leq b\}$, com $a, b > 0$. Então tem-se

Teorema 2.14 (Carathéodory). *Seja $F : R \rightarrow \mathbb{R}^N$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R , então sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$), existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = \Upsilon_0 \end{cases} .$$

Demonstração. Consulte [5] □

Corolário 2.15 (Prolongamento de solução). *Sejam $D = [0, \omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \{\Upsilon \in \mathbb{R}^N; |\Upsilon| \leq b\}$, $b > 0$ e F nas condições de Carathéodory. Seja $\Phi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(0) = X_0, |X_0| \leq b \end{cases} .$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde $\Phi(t)$ está definida, se tenha, $|\Phi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então Φ tem um prolongamento até $[0, \omega]$.

Demonstração. Consulte [5] □

Lema 2.16 (Lions). *Sejam Q um aberto limitado do $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(Q)$, $1 < q < +\infty$, tal que $\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C$, $g_m \rightarrow g$ quase sempre em Q . Então $g_m \rightharpoonup g$ na topologia fraca de $L^q(Q)$.*

Demonstração. Ver [8]. □

Lema 2.17 (Desigualdade de Gronwall - Forma Integral). *Sejam u, φ, ψ funções reais não negativas em $[0, T]$ satisfazendo*

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(\sigma) u(\sigma) d\sigma \tag{2.1}$$

para todo $t \in [0, T]$. Então para todo $t \in [0, T]$ tem-se

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds.$$

Demonstração. Considerando o funcional auxiliar

$$\eta(t) = \int_0^t \psi(s) u(s) ds.$$

Assim, de (2.1)

$$\eta'(t) = \psi(t) u(t) \leq \psi(t) (\varphi(t) + \eta(t)). \quad (2.2)$$

Definindo

$$F(t) = \eta(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau} \quad (2.3)$$

obtem-se

$$F'(t) = -\psi(t) \eta(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau} + \eta'(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau}$$

portanto usando (2.2)

$$F'(t) \leq \psi(t) \varphi(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau}.$$

Integrando ambos os membros,

$$F(t) \leq \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{-\int_0^s \psi(\tau) d\tau} ds.$$

Invocando (2.3) obtém-se

$$\eta(t) \leq \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds,$$

mas de (2.1) $u(t) - \varphi(t) \leq \eta(t)$ e assim

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds$$

e obtém-se o resultado desejado. □

Desigualdade de Cauchy-Schwartz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de quadrado integrável, então

$$|(f, g)_{L^2}| = \left| \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

Capítulo 3

Existência e Unicidade

Usando o Método de Faedo-Galerkin, estudaremos neste capítulo a existência e unicidade de solução para o Problema (1.1). Assumindo a seguinte hipótese adicional para as funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$:

Hipótese 3.1. $\alpha', \beta' \in L^1(0, \infty)$

$\exists \gamma_0 > 0$ tal que $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) \geq \gamma_0 > 0, \quad \forall t \geq 0.$

A existência e unicidade de soluções do problema (1.1) é dada pelo Teorema 3.1, mas para isto é feita uma mudança de variáveis de modo que o problema (1.1) seja transformado em um domínio cilíndrico.

Com a mudança de variáveis: $u(x, t) = v(y, t)$ onde $y = \left(\frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}\right)$. O problema (1.1) é transformado em (1.8), conforme foi feito na introdução.

Sob essas condições estabeleceremos os seguintes resultados de existência:

Teorema 3.1. *Para cada $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$ existe uma única função $u : \widehat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t))$, $u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t))$ e*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\widehat{Q}} u_t \phi \, dxdt + \int_{\widehat{Q}} (u + u^2)_x \phi \, dxdt + \int_{\widehat{Q}} u_{xt} \phi_x \, dxdt = 0, \quad \forall \phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t)) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in (\alpha(0), \beta(0)). \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Pela equivalência dos problemas (1.1) e (1.8) bastará provar o lema seguinte:

Lema 3.1. *Para cada $v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ existe uma única função $v : Q = (0, 1) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $v_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Q \left(\frac{\partial v}{\partial t} \psi + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (v + v^2) \psi + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \psi \right. \\ \left. + \frac{2\gamma'}{\gamma^3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \psi - \left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma^3} \right) \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy dt = 0, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ v(y, 0) = v_0(y), \forall y \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.2)$$

3.1 Prova do Lema (3.1)

Método de Faedo-Galerkin

A idéia da demonstração consiste em projetar o problema (1.8) em subespaços de dimensão finita, ou seja, aproximá-lo por problemas análogos de dimensão finita. Esse método foi introduzido por Faedo-Galerkin. Faremos a demonstração desse lema utilizando este método.

Problema Aproximado

Seja $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma base especial de $H_0^1(\Omega)$ solução do Problema Espectral

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_i)_{yy} = \lambda_i w_i \text{ em } \Omega \\ w_i(0) = 0 \quad w_i(1) = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

e V_m o subespaço gerado pelos m primeiros autovetores de $H_0^1(\Omega)$, ou seja, $V_m = [w_1, \dots, w_m]$. Procuramos $v_m \in V_m$ tal que

$$v_m(y, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i(y) \quad (3.4)$$

seja solução do problema aproximado seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, w_j \right) + b_1(t) \left(\frac{\partial}{\partial y} (v_m + v_m^2), w_j \right) - b_2(t) \left(\frac{\partial^3 v_m}{\partial y^2 \partial t}, w_j \right) \\ - \left(a_1(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, w_j \right) + b_3(t) \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, w_j \right) + \left(a_2(y, t) \frac{\partial^3 v_m}{\partial y^3}, w_j \right) = 0, \\ v_m(0) = v_{0m} \rightarrow v_0, \text{ pois } v_{0m} \text{ converge forte para } v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (3.5)$$

onde,

$$a_1(y, t) = \frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}, \quad a_2(y, t) = \frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma^3}, \quad b_1(t) = \frac{1}{\gamma}, \quad b_2(t) = \frac{1}{\gamma^2}, \quad b_3(t) = \frac{2\gamma'}{\gamma^3}. \quad (3.6)$$

Para análise numérica estudaremos no próximo capítulo este problema aproximado considerando a base de $H_0^1(\Omega)$ formada pela função de interpolação (φ_i) (spline cúbica) no lugar da base espectral (w_i) definida em (3.3).

Substituindo (3.4) e analisando cada termo de (3.5), obtemos:

Para o primeiro termo de (3.5)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, w_j \right) &= \left(\sum_{i=1}^m g'_{im}(t) w_i, w_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m g'_{im}(t) (w_i, w_j) = \sum_{i=1}^m g'_{im}(t) A_{ij} = \vec{g}'_m A, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $A = a_{ij} = (w_i, w_j)$ é uma matriz $m \times m$.

Para o segundo termo de (3.5)

$$\begin{aligned} &\left(b_1(t) \frac{\partial}{\partial y} (v_m + v_m^2), w_j \right) \\ &= \left(b_1(t) \sum_{i=1}^m g_{im}(t) (w_i)_y, w_j \right) + \left(b_1(t) \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t) (w_i) \right)_y^2, w_j \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para o termo não linear, temos : utilizando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}
& b_1(t) \left(2 \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \sum_{l=1}^m g_{lm}(t) (w_l)_y, w_j \right) \\
&= 2b_1(t) \left(\sum_{i,l=1}^m g_{im}(t) g_{lm}(t) w_i (w_l)_y, w_j \right) \\
&= 2b_1(t) \sum_{i,l=1}^m g_{im}(t) g_{lm}(t) (w_i (w_l)_y, w_j) = \vec{F}_1(t, \vec{g}_m(t)).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Para o terceiro termo de (3.5) podemos escrever:

$$\begin{aligned}
-b_2(t) \left(\frac{\partial^3 v_m}{\partial y^2 \partial t}, w_j \right) &= -b_2(t) \left(\sum_{i=1}^m g'_{im}(t) \lambda_i w_i, w_j \right) \\
&= -b_2(t) \sum_{i=1}^m g'_{im}(t) (\lambda_i w_i, w_j) = \vec{g}'_m(t) B,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $B = -b_2(t)(\lambda_i w_i, w_j)$ é uma matriz $m \times m$.

Para o quarto termo de (3.5) temos:

$$\begin{aligned}
\left(-a_1(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, w_j \right) &= \left(-a_1(y, t) \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right)_y, w_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \left(-a_1(y, t) (w_i)_y, w_j \right) = \vec{g}_m(t) E,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $E = (-a_1(y, t)(w_i)_y, w_j)$ é uma matriz $m \times m$.

Para o quinto termo de (3.5)

$$\begin{aligned}
b_3(t) \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, w_j \right) &= b_3(t) \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t) (\lambda_i w_i), w_j \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t) b_3(t) (\lambda_i w_i), w_j \right) = \vec{g}'_m(t) C,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $C = c_{ij} = b_3(t)(\lambda_i w_i, w_j)$ é uma matriz $m \times m$.

E concluindo o sexto termo fica:

$$\begin{aligned}
\left(a_2(y, t) \frac{\partial^3 v_m}{\partial y^3}, w_j \right) &= \left(a_2(y, t) \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \lambda_i (w_i)_y, w_j \right) \\
&= \vec{g}'_m(t) D.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

De (3.7),(3.8),(3.9),(3.10),(3.11),(3.12) e (3.13)

Daí resulta o sistema:

$$\begin{cases} \tilde{A} \vec{g}'_m(t) + \tilde{F}(t, \vec{g}_m(t)) = 0, \\ \vec{g}_m(0) = \vec{g}_{0m}, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde

$$\tilde{A} = A + B, \quad \tilde{F}(t) = F + C + D + E$$

sendo A, B, C, D, E e F matrizes $m \times m$.

De (3.3) observamos que \tilde{A} é uma matriz invertível.

Multiplicando (3.14) por \tilde{A}^{-1} encontramos um sistema de equações diferenciais ordinárias dado por:

$$\begin{cases} \vec{g}'_m(t) + \vec{G}(t, \vec{g}_m(t)) = 0 \\ \vec{g}_m(0) = \vec{g}_{0m} \end{cases} \quad (3.15)$$

Onde

$$\vec{G} = \tilde{A}^{-1} \tilde{F}, \quad (\vec{g}'_m(t))^t = (g'_{1m}, \dots, g'_{mm})$$

$$\text{e } (\vec{g}_{0m})^t = ((v_0, w_1), \dots, (v_0, w_m))$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (3.15) tem solução local no intervalo $(0, T_m)$. Essas soluções são obtidas por meio do Teorema de Carathéodory (2.14). Para a análise numérica dada no capítulo 5 resolveremos o sistema de equações diferenciais ordinárias (3.15) pelo método das Diferenças Finitas. O próximo passo é demonstrar que as soluções são limitadas independentemente de m , permitindo estender a solução em todo intervalo $(0, T)$ e obter a convergência da sequência v_m para v , solução do problema (3.2). Para isso são necessárias algumas estimativas as quais serão desenvolvidas a seguir.

ESTIMATIVA 1

Considerando $w_j = v_m(t)$ no problema aproximado (3.5), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m \right) + b_1(t) \left(\frac{\partial}{\partial y} (v_m + v_m^2), v_m \right) - b_2(t) \left(\frac{\partial^3 v_m}{\partial y^2 \partial t}, v_m \right) \\ - \left(a_1(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, v_m \right) + b_3(t) \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, v_m \right) + \left(a_2(y, t) \frac{\partial^3 v_m}{\partial y^3}, v_m \right) = 0 \\ v_m(0) = v_{0m} \rightarrow v_0, \text{ pois } v_{0m} \text{ converge forte para } v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Observe que , $\frac{d}{dt}(v_m, v_m) = \frac{\partial v_m}{\partial t} v_m + v_m \frac{\partial v_m}{\partial t} = 2v_m \frac{\partial v_m}{\partial t} = 2 \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m \right)$.

Observando as identidades e considerando a definição(3.6),para o primeiro termo de (3.16), temos

$$\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m \right) = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v_m^2 dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| v_m \|^2 . \quad (3.17)$$

Do segundo termo de (3.16)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\gamma} (v_m + v_m^2)_y, v_m \right) &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma} (v_m)_y v_m dy + \int_0^1 \frac{1}{\gamma} (v_m^2)_y v_m dy \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{d}{dy} v_m^2 + 2 \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{d}{dy} v_m^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Do terceiro termo de (3.16)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma^2} \left(\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_{yy}, v_m \right) &= - \int_0^1 \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_{yy} v_m dy \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_m^2)_y dy = \frac{1}{2\gamma^2} \frac{d}{dt} \| (v_m)_y \|^2 . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Do quarto termo de (3.16)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} (v_m)_y, v_m \right) &= - \int_0^1 \frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma} (v_m)_y v_m dy \\ &= \frac{\gamma'}{2\gamma} \| v_m \|^2 . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Do quinto termo de (3.16),

$$\begin{aligned}
\frac{2\gamma'}{\gamma^3} ((v_m)_{yy}, v_m) &= \frac{2\gamma'}{\gamma^3} \int_0^1 (v_m)_{yy} v_m dy \\
&= -\frac{2\gamma'}{\gamma^3} \int_0^1 (v_m)_y^2 dy = -\frac{2\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_y \|^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Do último termo de (3.16), usamos integração por partes, o fato que $\frac{1}{2} \frac{d}{dy} [(v_m^2)_y] = (v_m)_{yy} (v_m)_y$ e $\alpha'(t) + \gamma'(t) = \beta'(t)$, para obter

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma^3} (v_m)_{yyy}, v_m \right) &= \int_0^1 \frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma^3} (v_m)_{yyy} v_m dy \\
&= \frac{\gamma'}{\gamma^3} \int_0^1 (v_m)_{yy} v_m dy + \int_0^1 \frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma^3} (v_m)_{yy} (v_m)_y dy \\
&= \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_y \|^2 - \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\gamma^3} (v_m^2)_y(1) + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\gamma^3} (v_m^2)_y(0) + \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_y \|^2 \\
&= \frac{3}{2} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_y \|^2 - \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\gamma^3} (v_m^2)_y(1) + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\gamma^3} (v_m^2)_y(0).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Substituindo as identidades (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) em (3.16), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| v_m(t) \|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{d}{dt} \| (v_m)_y(t) \|^2 - \frac{2\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_y(t) \|^2 + \frac{3\gamma'}{2\gamma^3} \| (v_m)_y(t) \|^2 \\
- \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\gamma^3} (v_m^2)_y(1) + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\gamma^3} (v_m^2)_y(0) + \frac{\gamma'}{2\gamma} \| v_m(t) \|^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Multiplicando a equação (3.23) por 2, encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\| v_m(t) \|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_y(t) \|^2 \right) - \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_y(t) \|^2 + \frac{\gamma'}{\gamma} \| (v_m)_y(t) \|^2 \\
- \frac{\beta'}{\gamma^3} (v_m^2)_y(1) + \frac{\alpha'}{\gamma^3} (v_m^2)_y(0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Pela Hipótese (3.1) e integrando de 0 a t a equação (3.23), temos:

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left(\| v_m(s) \|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_y(s) \|^2 \right) ds \leq \int_0^t \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_y(s) \|^2 ds - \int_0^t \frac{\gamma'}{\gamma} \| (v_m)_y(s) \|^2 ds. \tag{3.25}$$

Denotando $\gamma_2 = \max_{0 \leq t \leq T} |\gamma'(t)|$ e lembrando que $\gamma(t) \geq \gamma_0, \forall t \geq 0$ por hipótese concluimos que $-\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \leq \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma^3(t)} \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_0 \gamma^2(t)}$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo concluimos de (3.25) que:

$$\begin{aligned} \|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{\gamma^2(t)} \|(v_m)_y(t)\|^2 &\leq \|v_m(0)\|^2 + \frac{1}{\gamma^2(0)} \|(v_m)_y(0)\|^2 \\ + \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \int_0^t \left(\frac{1}{\gamma^2} \|(v_m)_y(s)\|^2 - \|v_m(s)\|^2 \right) ds, \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como $v_m(0) \rightarrow v_0$ em $H_0^1(\Omega)$, existe uma constante C_0 , independente de m tal que

$$\|v_m(0)\|^2 + \frac{1}{\gamma^2(0)} \|(v_m)_y(0)\|^2 \leq C_0. \quad (3.27)$$

Portanto de (3.26) obtemos

$$\|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{\gamma^2(t)} \|(v_m)_y(t)\|^2 \leq C_0 + C_1 \int_0^t \left(\frac{1}{\gamma^2} \|(v_m)_y(s)\|^2 - \|v_m(s)\|^2 \right) ds \quad (3.28)$$

onde $C_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0}$

Aplicando a desigualdade de Gronwall na equação (3.28) obtemos que

$$\|v_m(t)\|^2 + \frac{1}{\gamma^2(t)} \|(v_m)_y(t)\|^2 \leq C_0 \cdot e^{C_1 T} = C_2.$$

Assim, concluimos a estimativa

$$\begin{aligned} v_m &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ (v_m)_y &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

ESTIMATIVA 2: Tomando $w_j = -(v_m)_{yy}$ no problema aproximado (3.5) obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, -(v_m)_{yy} \right) + b_1(t) \left(\frac{\partial}{\partial y}(v_m + v_m^2), -(v_m)_{yy} \right) - b_2(t) \left(\frac{\partial^3 v_m}{\partial y^2 \partial t}, -(v_m)_{yy} \right) \\ - \left(a_1(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, -(v_m)_{yy} \right) + b_3(t) \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, -(v_m)_{yy} \right) + \left(a_2(y, t) \frac{\partial^3 v_m}{\partial y^3}, -(v_m)_{yy} \right) = 0 \\ v_m(0) = v_{0m} \rightarrow v_0, \text{ pois } v_{0m} \text{ converge forte para } v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Analisaremos a seguir, separadamente, cada termo da identidade acima.

Do primeiro termo temos:

$$\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, -(v_m)_{yy} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (v_m)_y \|^2 \quad (3.31)$$

Do segundo termo de (3.30), usando a definição $b_1(t)$ de (3.6) temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\gamma}(v_m + v_m^2)_y, -(v_m)_{yy} \right) \\ & \leq \frac{1}{\gamma} \left| \int_0^1 -(v_m)_y (v_m)_{yy} dy - 2v_m (v_m)_y (v_m)_{yy} dy \right| \\ & \leq \frac{1}{\gamma} \left| \int_0^1 (v_m)_y (v_m)_{yy} dy \right| + \frac{1}{\gamma} \left| \int_0^1 2v_m (v_m)_y (v_m)_{yy} dy \right| \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\gamma}(v_m + v_m^2)_y, -(v_m)_{yy} \right) \\ & \leq \frac{1}{\gamma} \| (v_m)_y \| \| (v_m)_{yy} \| + 2 \frac{1}{\gamma} \int_0^1 |v_m (v_m)_y (v_m)_{yy}| dy \\ & = \frac{1}{\gamma} \| (v_m)_y \| \| (v_m)_{yy} \| + 2 \frac{1}{\gamma} |v_m|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 |(v_m)_y| |(v_m)_{yy}| dy \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz e Poincaré

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\gamma}(v_m + v_m^2)_y, -(v_m)_{yy} \right) \\ & \leq \frac{1}{\gamma} \| (v_m)_y \| \| (v_m)_{yy} \| + \frac{2}{\gamma} C_1 \| (v_m)_y \| \| (v_m)_{yy} \| \end{aligned} \quad (3.32)$$

Do terceiro termo de (3.30) e usando a definição $b_2(t)$ de (3.6)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\gamma^2} \left(\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_{yy}, -(v_m)_{yy} \right) &= \frac{1}{\gamma^2} \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((v_m)_{yy})^2 dy = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (v_m)_{yy} \|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 \right] + \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_{yy} \|^2
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Do quarto termo de (3.30) e usando a definição $a_1(y, t)$ de (3.6)

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} (v_m)_y, -(v_m)_{yy} \right) &\leq \int_0^1 \left| \frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right| \left| (v_m)_y (v_m)_{yy} \right| dy \\
&\leq \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma} \| (v_m)_y \| \| (v_m)_{yy} \|
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Do quinto termo de (3.30) e usando a definição de $b_3(t)$ de (3.6)

$$\frac{2\gamma'}{\gamma^3} ((v_m)_{yy}, -(v_m)_{yy}) = -\frac{2\gamma'}{\gamma^3} \int_0^1 ((v_m)_{yy})^2 dy = -\frac{2\gamma'}{\gamma^3} \| ((v_m)_{yy}) \|^2 \tag{3.35}$$

Do sexto termo de (3.30) e usando a definição de $a_2(y, t)$ de (3.6)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma^3} (v_m)_{yyy}, -(v_m)_{yy} \right) &= \int_0^1 \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma^3} \right) \frac{1}{2} \frac{d}{dy} ((v_m)_{yy})^2 dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\gamma'}{\gamma^3} ((v_m)_{yy})^2 dy = -\frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_{yy} \|^2
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Substituindo as identidades (3.31), (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) e (3.36) em (3.16) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (v_m)_y \|^2 + \frac{1}{\gamma} \| (v_m)_y \| \| (v_m)_{yy} \| + \frac{2C_1}{\gamma} \| (v_m)_y \|^2 \| (v_m)_{yy} \| \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 \right] + \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_{yy} \|^2 - \frac{2\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_{yy} \|^2 \\
&- \frac{1}{2} \frac{\gamma'}{\gamma^3} \| (v_m)_{yy} \|^2 - \frac{|\alpha'| + |\gamma'|}{\gamma} \| (v_m)_y \| \| (v_m)_{yy} \| = 0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\| (v_m)_y \|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 \right) \\
& \leq \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 + (1 + \alpha_2 + \gamma_2) \gamma \| (v_m)_y \| \frac{\| (v_m)_{yy} \|}{\gamma^2} \\
& \quad + \frac{2}{\gamma_0} \| (v_m)_y \|^2 \| (v_m)_{yy} \|
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Usando o fato de que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\| (v_m)_y \|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 \right) \\
& \leq \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 + (1 + \alpha_2 + \gamma_2) \gamma \left[\frac{1}{2} \| (v_m)_y \|^2 + \frac{\| (v_m)_{yy} \|^2}{2\gamma^2} \right] \\
& \quad + \frac{2}{\gamma_0} \| (v_m)_y \|^2 \| (v_m)_{yy} \|
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Por estimativa 1 e Poincaré em (3.40) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\| (v_m)_y \|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 \right) \\
& \leq \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 + C_3 + \frac{1}{2\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 + C_4 \| (v_m)_{yy} \|
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Isso implica que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\| (v_m)_y \|^2 + \frac{\| (v_m)_{yy} \|^2}{\gamma^2} \right) \leq C_6 + C_7 \left(\frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 + \| (v_m)_y \|^2 \right) \tag{3.41}$$

Integrando de 0 a t e aplicando a desigualdade de Grownvall temos:

$$\frac{1}{2} \left(\| (v_m)_y \|^2 + \frac{\| (v_m)_{yy} \|^2}{\gamma^2} \right) \leq C_8 + C_7 \int_0^t \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 + \| (v_m)_y \|^2, \tag{3.42}$$

com $\varphi(t) = \| (v_m)_y(t) \|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy}(t) \|^2$

$$\varphi(t) \leq C_8 + C_7 \int_0^t \varphi(t) dt = C_8 e^{c_7 T} = C_9.$$

Portanto

$$\| (v_m)_y \|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \| (v_m)_{yy} \|^2 \leq C_9.$$

Assim ,

$$\begin{aligned} (v_m)_y &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ (v_m)_{yy} &\text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (3.43)$$

ESTIMATIVA 3: Tome $w_j = \frac{\partial v_m}{\partial t}(t)$ no problema aproximado obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) + b_1(t) \left(\frac{\partial}{\partial y}(v_m + v_m^2), \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) - b_2(t) \left(\frac{\partial^3 v_m}{\partial y^2 \partial t}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \\ - \left(a_1(y, t) \frac{\partial v_m}{\partial y}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) + b_3(t) \left(\frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) + \left(a_2(y, t) \frac{\partial^3 v_m}{\partial y^3}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) = 0 \\ v_m(0) = v_{0m} \rightarrow v_0, \text{ pois } v_{0m} \text{ converge forte para } v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Observando as identidades

Para o primeiro termo de (3.44)

$$\left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) = \int_0^1 \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)^2 = \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2 \quad (3.45)$$

Para o terceiro termo de (3.44) e usando a definição $b_2(t)$ de (3.6)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma^2} \left(\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_{yy}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) &= - \int_0^1 \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_{yy} \frac{\partial v_m}{\partial t} dy \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right)^2 dy = \frac{1}{\gamma^2} \left\| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right\|^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Para o último termo de (3.44) e usando a definição $a_2(y, t)$ de (3.6)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma^3} (v_m)_{yyy}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) &= \int_0^1 \frac{\gamma'}{\gamma^3} \frac{\partial v_m}{\partial t} (v_m)_{yy} dy + \int_0^1 \frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma^3} (v_m)_{yy} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y dy \\
&= \frac{\gamma'}{\gamma^3} \left((v_m)_{yy}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) + \left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma^3} (v_m)_{yy}, \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Substituindo as identidades (3.45) , (3.46) e (3.47) em (3.44) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right\|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left\| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right\|^2 \\
&= - \left(\frac{1}{\gamma} (v_m + v_m^2)_y, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) - \frac{3\gamma'}{\gamma^3} \left((v_m)_{yy}, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \\
&\quad - \left(\left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma^3} \right) (v_m)_{yy}, \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right) + \left(\left(\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma} \right) (v_m)_y, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

E ainda , aplicando a desigualdade triangular e de Schwartz no segundo termo de (3.44) e usando a definição $b_1(t)$ de (3.6), temos

$$\begin{aligned}
&\left| - \left(\frac{1}{\gamma} (v_m + v_m^2)_y, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{\gamma_0} \left\| (v_m)_y \right\| \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\| + \frac{2}{\gamma_0} \int_0^1 \sup_{|v_m|} |(v_m)_y| \left| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right| \\
&\leq \frac{1}{\gamma_0^2} \left\| (v_m)_y \right\|^2 + \frac{\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2}{4} + \frac{2}{\gamma_0} \|v_m\|_{L^\infty(0,1)} \left\| (v_m)_y \right\| \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned}
&\left| - \left(\frac{1}{\gamma} (v_m + v_m^2)_y, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right| \\
&\leq \frac{2}{\gamma_0^2} \left\| (v_m)_{yy} \right\|^2 + \frac{\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2}{8} + C \left\| (v_m)_y \right\| \left\| (v_m)_y \right\| \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas 1 e 2, temos:

$$\left| - \left(\frac{1}{\gamma} (v_m + v_m^2)_y, \frac{\partial v_m}{\partial t} \right) \right| \leq C \frac{\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2}{8} + 2C_{11}^2 + \frac{\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2}{8} \tag{3.49}$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz e a Estimativa 2 para

$$-\frac{3\gamma'}{\gamma^3}((v_m)_{yy}, \frac{\partial v_m}{\partial t}), \text{ termo de (3.48), temos}$$

$$\left| -\frac{3\gamma'}{\gamma^3}((v_m)_{yy}, \frac{\partial v_m}{\partial t}) \right| \leq C_{10} \| (v_m)_{yy} \| \| \frac{\partial v_m}{\partial t} \|$$

Usando a desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ temos

$$\left| -\frac{3\gamma'}{\gamma^3}((v_m)_{yy}, \frac{\partial v_m}{\partial t}) \right| \leq 2(C_{10})^2 + \frac{1}{8} \| \frac{\partial v_m}{\partial t} \|^2 \quad (3.50)$$

Note que na equação (3.48) podemos escrever

$$\left| -\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma^3}((v_m)_{yy}, \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y) \right| \leq C \left| \int_0^1 (v_m)_{yy} \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y dy \right| \quad (3.51)$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz e pelo fato de $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ ficamos com

$$\left| -\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma^3}((v_m)_{yy}, \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y) \right| \leq \frac{1}{2}(C_{12})^2 \| (v_m)_{yy} \|^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \|^2 \quad (3.52)$$

Tome $\frac{1}{2}(C_{12})^2 \| (v_m)_{yy} \|^2 = C_{13}$

Para o último termo de (3.48)

$$\left| -\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma}((v_m)_y, \frac{\partial v_m}{\partial t}) \right| \leq C \int_0^1 |(v_m)_y \frac{\partial v_m}{\partial t}| dy$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz temos

$$\begin{aligned} \left| -\frac{\alpha' + \gamma'y}{\gamma}((v_m)_y, \frac{\partial v_m}{\partial t}) \right| &\leq C \| (v_m)_y \| \| \frac{\partial v_m}{\partial t} \| \leq 2(C \| (v_m)_y \|^2 + \frac{1}{8} \| \frac{\partial v_m}{\partial t} \|^2) \\ &\leq 2(C_{14})^2 + \frac{1}{8} \| \frac{\partial v_m}{\partial t} \|^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Assim , de (3.49), (3.50) (3.51), (3.52) e (3.53) temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2 + \frac{\left\| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right\|^2}{\gamma^2} &\leq C + \frac{\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2}{8} + 2C_{11}^2 + \frac{\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2}{8} + 2(C_{10})^2 + \frac{\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2}{8} \\
&+ C_{13} + \frac{1}{2\gamma^2} \left\| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right\|^2 + 2C_{14}^2 + \frac{1}{8} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Implica em

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2 - \frac{4}{8} \left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left\| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right\|^2 - \frac{1}{2\gamma^2} \left\| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right\|^2 \\
\leq 2C_{10}^2 + C + 2C_{11}^2 + 2C_{14}^2 + C_{13} = C_{15}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Assim

$$\left\| \frac{\partial v_m}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left\| \left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \right\|^2 \leq 2C_{15} = C_{16} \tag{3.56}$$

Daí ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_m}{\partial t} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\
\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Essas três estimativas (3.29), (3.43) e (3.57) permitem passar o limite na equação aproximada (3.5). Obtemos uma solução fraca v no sentido do lema (3.1)

Das estimativas 1 , 2 e 3 anteriores concluímos, respectivamente, que existe uma subsequência de (v_m) , ainda denominada por v_m , tal que:

$$\begin{aligned}
v_m &\longrightarrow v \text{ fraco em } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \\
\frac{\partial v_m}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \text{ fraco em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)),
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
(v_m)_{yy} &\longrightarrow v_{yy} \text{ fraco em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \\
\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y &\longrightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_y \text{ fraco em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Pelo Teorema de Aubin - Lions podemos obter uma subsequência de v_m , ainda denotada por v_m tal que

$$v_m \longrightarrow v \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad (3.60)$$

e quase sempre em $\Omega \times (0, T)$.

$$(v_m)_y \longrightarrow v_y \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad (3.61)$$

e quase sempre em $\Omega \times (0, T)$.

Logo como $(v_m^2)_y = 2v_m(v_m)_y$ temos que

$$(v_m^2)_y \longrightarrow v_y^2 \quad (3.62)$$

quase sempre em $\Omega \times (0, T)$.

Também verificamos que $\int ((v_m^2)_y)^2 dy = \int (2v_m(v_m)_y)^2 dy \leq c \| (v_m)_y \| \| (v_m)_{yy} \| \leq \bar{c}$.

Assim pelo lema de Lions temos

$$(v_m^2)_y \longrightarrow v_y^2 \text{ fraco em } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad (3.63)$$

Convergência do Sistema Aproximado

Para concluir o lema (3.1), resta mostrar que v é a solução da equação (3.2).

De fato :

Multiplicando a equação (3.5) por $\psi(y, t) = w(y)\theta(t)$, $w(y) \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, $\theta(t) \in \mathcal{D}(0, T) \subset L^2(0, T)$ e integrando em y e t ,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, w \right) \theta dt + \int_0^T \left(\frac{1}{\gamma} (v_m)_y + \frac{1}{\gamma} (v_m^2)_y, w \right) \theta dt + \int_0^T \frac{1}{\gamma^2} \left(\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y, w_y \right) \theta dt \\ & + \int_0^T \frac{2\gamma'}{\gamma^3} ((v_m)_{yy}, w) \theta dt - \int_0^T \left(\frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma^3} (v_m)_{yy}, w_y \right) \theta dt - \int_0^T \left(\frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma} (v_m)_y, w \right) \theta dt \\ & \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, usando a hipótese (3.1) e os resultados de convergência (3.58)-(3.59) temos:

De (3.58)

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v_m}{\partial t}, w \right) \theta dt \longrightarrow \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, w \right) \theta dt, \quad \forall w \in H_0^1 \text{ e } \forall \theta \in L^2(0, T) \quad (3.65)$$

De (3.61) e (3.63)

$$\int_0^T \frac{1}{\gamma} ((v_m)_y + (v_m^2)_y, w) \theta dt \longrightarrow \int_0^T (v_y + (v^2)_y, \frac{1}{\gamma} w) \theta dt, \quad \forall w \in H_0^1 \text{ e } \forall \theta \in L^2(0, T) \quad (3.66)$$

De (3.59)

$$\int_0^T \frac{1}{\gamma^2} \left(\left(\frac{\partial v_m}{\partial t} \right)_y, w_y \right) \theta dt \longrightarrow \int_0^T \left(\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_y, \frac{1}{\gamma^2} w_y \right) \theta dt \quad \forall w \in H_0^1 \text{ e } \forall \theta \in L^2(0, T) \quad (3.67)$$

De (3.59)

$$\int_0^T \frac{2\gamma'}{\gamma^3} ((v_m)_{yy}, w) \theta dt \longrightarrow \int_0^T \left(v_{yy}, \frac{2\gamma'}{\gamma^3} w \right) \theta dt \quad \forall w \in H_0^1 \text{ e } \forall \theta \in L^2(0, T) \quad (3.68)$$

De (3.59)

$$\int_0^T \left(\frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma^3} (v_m)_{yy}, w_y \right) \theta dt \longrightarrow \int_0^T \left(v_{yy}, \frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma^3} w_y \right) \theta dt \quad \forall w \in H_0^1 \text{ e } \forall \theta \in L^2(0, T) \quad (3.69)$$

De (3.61)

$$- \int_0^T \left(\frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma} (v_m)_y, w \right) \theta dt \longrightarrow - \int_0^T \left(v_y, \frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma} w \right) \theta dt \quad \forall w \in H_0^1 \text{ e } \forall \theta \in L^2(0, T) \quad (3.70)$$

De (3.65) - (3.70) encontramos que (3.2) é válida pra funções $\psi(y, t) = w(y)\theta(t)$ com $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in L^2(0, T)$. Assim a igualdade (3.2) para funções $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ é consequência da densidade do conjunto $\{v \theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) | v \in H_0^1, \theta \in L^2(0, T)\}$ em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

A unicidade da solução e a verificação dos dados iniciais são mostrados por argumentos padrões.

que pode ser visto em [2].

3.2 Prova do Teorema (3.1)

Seja v a solução do problema (1.8) com dado inicial $v(y, 0) = v_0(y)$. A qual é garantida a existência pelo lema (3.1).

Considere a função $u(x, t) = v(y, t)$, onde $x = \alpha(t) + \gamma(t)y$. Sendo $v_0(y) = u_0(\alpha(0) + \gamma(0)y)$. Das identidades (1.4) - (1.7) e o Teorema de mudança de variáveis, temos que a igualdade (3.2) implica a igualdade (3.1). Também da regularidade de v dada pelo lema (3.1), do difeomorfismo $(x, t) \longrightarrow \left(\frac{(x - \alpha)}{\gamma}, t\right)$ e da mudança $u(x, t) = v(y, t)$ temos que $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t))$, $u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t))$, provando assim o Teorema (3.1).

Capítulo 4

Análise Numérica -

Método de Elementos Finitos

Vamos desenvolver um estudo numérico, considerando o Método de Elementos Finitos na variável espacial e o Método das Diferenças Finitas na variável tempo.

4.1 Formulação Variacional

Passamos a considerar o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial(v + v^2)}{\partial y} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} - \frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2\gamma'}{\gamma^3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{(\alpha' + \gamma'y)}{\gamma^3} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = f(y, t) \quad \text{em } Q \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ v(y, 0) = v_0(y) \quad \text{em } \Omega = (0, 1) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Para o problema (1.8) estudado, $f(y, t) \equiv 0$, aqui por conveniência numérica consideraremos uma $f(y, t)$ não identicamente nula, mas suficientemente regular para os próximos capítulos.

Multiplicando a primeira equação do Problema (4.1) por w e integrando em $\Omega = (0, 1)$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} w dy + b_1(t) \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial y} w dy + 2b_1(t) \int_0^1 v \frac{\partial v}{\partial y} w dy - b_2(t) \int_0^1 \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} w dy \\ & - \int_0^1 a_1(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} w dy + b_3(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w dy + \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} w dy = \int_0^1 f(y, t) w dy \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Por conveniência numérica, utilizaremos o termo $2v \frac{\partial v}{\partial y}$ que é equivalente a $\frac{\partial v^2}{\partial y}$. E $a_1(y, t)$, $a_2(y, t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ e $b_3(t)$ estão definidos em (3.6).

4.2 O Método de Faedo Galerkin

Neste capítulo, denotamos por $\varphi_i, i \in \mathbb{N}$ uma base de $H_0^1(\Omega)$ formada pelas funções de interpolação definidas pelas splines cúbicas na seção (4.4) e seja $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$. Assim com esta base consideramos o problema aproximado dado na seção (3.1), isto é, substituindo w_i por φ_i em (3.4) e (3.5).

Logo procuramos uma solução aproximada do problema (1.8), dado por:

$$v_h(y, t) = v_m(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y) \in V_m \quad (4.3)$$

4.3 Problema Aproximado

Para comprovar nossas soluções aproximadas obtidas pelo Método de Elementos Finitos precisamos considerar o problema (1.8) com uma função f no lado direito da igualdade. Assim temos o problema aproximado seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial v_h}{\partial t}, w \right) + b_1(t) \left(\frac{\partial v_h}{\partial y}, w \right) + 2b_1(t) \left(v_h \frac{\partial v_h}{\partial y}, w \right) - b_2(t) \left(\frac{\partial^3 v_h}{\partial y^2 \partial t}, w \right) \\ - \left(a_1(y, t) \frac{\partial v_h}{\partial y}, w \right) + b_3(t) \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}, w \right) + \left(a_2(y, t) \frac{\partial^3 v_h}{\partial y^3}, w \right) = (f(y, t), w), \quad \forall w \in V_m \\ v_h(0, t) = v_h(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ v_h(y, 0) = v_{h0}(y), \quad \text{em } \Omega = (0, 1). \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Análise dos termos em (4.4).

Usando a definição de $b_1(t)$ de (3.6) no segundo termo, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(b_1(t) \frac{\partial}{\partial y} v_h, w \right) &= \int_0^1 b_1(t) \frac{\partial}{\partial y} v_h w \, dy \\ &= -b_1(t) \int_0^1 v_h \frac{\partial w}{\partial y} \, dy = -b_1(t) \left(v_h, \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \forall w \in V_m. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para o quarto termo de (4.4), temos

$$\begin{aligned} -b_2(t) \left(\frac{\partial^3 v_h}{\partial y^2 \partial t}, w \right) &= -b_2(t) \int_0^1 \frac{\partial^3 v_h}{\partial y^2 \partial t} w \, dy = -b_2(t) \left(\frac{w \partial^2 v_h}{\partial y \partial t} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t} \frac{\partial w}{\partial y} \, dy \right) \\ &= -b_2(t) \left(\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t} w \right) (1) - \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t} w \right) (0) - \int_0^1 \frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t} \frac{\partial w}{\partial y} \, dy \right) \\ &= b_2(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t} \frac{\partial w}{\partial y} \, dy = b_2(t) \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \forall w \in V_m \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para o quinto termo de (4.4) e usando a definição $a_1(y, t)$ de (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned}
-\left(a_1(y, t) \frac{\partial v_h}{\partial y}, w\right) &= -\int_0^1 a_1(y, t) \frac{\partial v_h}{\partial y} w dy \\
&= -\int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} a_1(y, t) v_h w - a_1(y, t) v_h \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} v_h w \right\} dy \\
&= -\left(a_1(y, t) v_h w\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left\{ a_1(y, t) v_h \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} v_h w \right\} dy \\
&= \int_0^1 a_1(y, t) v_h \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} \int_0^1 v_h w dy \\
&= \left(a_1(y, t) v_h, \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} (v_h, w) \quad \forall w \in V_m
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $\frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} = \frac{\gamma'}{\gamma}$

Usando a definição de $b_3(t)$ para o sexto termo de (4.4), podemos escrever

$$\begin{aligned}
b_3(t) \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}, w \right) &= b_3(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} w dy \\
&= b_3(t) \left(w \frac{\partial v_h}{\partial y} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial v_h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) \\
&= -b_3(t) \int_0^1 \frac{\partial v_h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy = -b_3(t) \left(\frac{\partial v_h}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \forall w \in V_m
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando a definição de $a_2(y, t)$ para o sétimo termo de (4.4), temos

$$\begin{aligned}
\left(a_2(y, t) \frac{\partial^3 v_h}{\partial y^3}, w\right) &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^3 v_h}{\partial y^3} w dy \\
&= \frac{\alpha'(t)}{\gamma^3(t)} \int_0^1 \frac{\partial^3 v_h}{\partial y^3} w dy + \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} y \frac{\partial^3 v_h}{\partial y^3} w dy \\
&= -\frac{\alpha'(t)}{\gamma^3(t)} \int_0^1 \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \int_0^1 y \frac{\partial^3 v_h}{\partial y^3} w dy
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Para o segundo termo de (4.9), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \int_0^1 y \frac{\partial^3 v_h}{\partial y^3} w dy &= \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \left(y \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} w \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \left(w + y \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \right) \\
&= -\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} w dy + \int_0^1 y \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) \\
&= \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \left(\int_0^1 \frac{\partial v_h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy - \int_0^1 y \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) \\
&= \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \left(\frac{\partial v_h}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \left(y \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}, \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

De (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10), temos a seguinte formulação variacional:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial v_h}{\partial t}, w \right) - b_1(t) \left(v_h, \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2b_1(t) \left(v_h \frac{\partial v_h}{\partial y}, w \right) + b_2(t) \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
+ &\left(a_1(y, t) v_h, \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} (v_h, w) - b_3(t) \left(\frac{\partial v_h}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\alpha'}{\gamma^3} \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
&+ \frac{\gamma'}{\gamma^3} \left(\frac{\partial v_h}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\gamma'}{\gamma^3} \left(y \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = (f, w), \quad \forall w \in V_m
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Agrupando os termos semelhantes, temos:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial v_h}{\partial t}, w \right) - b_1(t) \left(v_h, \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2b_1(t) \left(v_h \frac{\partial v_h}{\partial y}, w \right) \\
+ &b_2(t) \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(a_1(y, t) v_h, \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} (v_h, w) \\
&- \frac{\partial a_2(y, t)}{\partial y} \left(\frac{\partial v_h}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left(a_2(y, t) \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = (f, w)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Como,

$$v_h(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y) \in V_m, \tag{4.13}$$

para obtermos a solução aproximada $v_h(y, t) \in V_m$ é necessário determinar os coeficientes

$d_i(t)$. De (4.13) deduzimos:

$$\frac{\partial v_h}{\partial t}(y, t) = \sum_{i=1}^m d'_i(t) \varphi_i(y), \quad \frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial t}(y, t) = \sum_{i=1}^m d'_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial v_h}{\partial y}(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y), \quad \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \quad (4.15)$$

Substituindo (4.13), (4.14) e (4.15) no problema aproximado (4.12) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^m d'_i(t) \varphi_i(y), w \right) - b_1(t) \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y), \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & + 2b_1(t) \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y) \sum_{j=1}^m d_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y), w \right) + b_2(t) \left(\sum_{i=1}^m d'_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y), \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & + \left(a_1(y, t) \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y), \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y), w \right) \\ & - \frac{\partial a_2(y, t)}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y), \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left(a_2(y, t) \sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y), \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left(f(y, t), w \right), \quad \forall w \in V_m \end{aligned} \quad (4.16)$$

Tomando em particular $w = \varphi_k \in V_m$ em (4.16):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m d'_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_k(y) dy - b_1(t) \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} dy \\ & + 2b_1(t) \sum_{i,j=1}^m d_i(t) d_j(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_k(y) dy + b_2(t) \sum_{i=1}^m d'_i(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} dy \\ & + \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} dy + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_k dy \\ & - \frac{\partial a_2(y, t)}{\partial y} \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} dy - \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} dy \\ & = \int_0^1 f(y, t) \varphi_k(y) dy, \quad \forall k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.17)$$

Reagrupando os termos e definindo as matrizes A, B, C, D e E por:

$$A = a_{ik} = \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_k(y) dy,$$

$$B = b_{ik} = \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) dy,$$

$$C = \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) dy,$$

$$D = \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) dy,$$

$$E = e_{ik}(t) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) dy \quad \text{e definindo o Tensor de } 3^{\text{a}} \text{ ordem}$$

$$B_{ijk} = \left(\varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y), \varphi_k \right), \text{ temos de (4.17)}$$

E assim obtemos o seguinte sistema não linear de equações diferenciais ordinárias na variável $d(t) = (d_1(t), \dots, d_m(t))$.

$$\begin{cases} \left(A + b_2(t)E \right) d'(t) + \left(-b_1(t)B + D + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2(y, t)}{\partial y} E - C \right) d(t) + 2b_1(t)B_{ijk} d^2(t) = F \\ d(0) = d_0 \end{cases} \quad (4.18)$$

As matrizes A, B, C, D e E são quadradas de ordem m e $d = [d_1, d_2, \dots, d_m]^t$ é o vetor incógnita. $F = [F_i]$ é o vetor de ordem $m \times 1$, denominado vetor força global, com

$$F_k = \int_0^1 f \varphi_k dy$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (4.18) será resolvido pelo Método das Diferenças Finitas.

4.4 Função de Interpolação

Para o cálculo da matriz global, precisamos definir explicitamente as funções φ_i , base do subespaço V_m do espaço $H_0^1(0, 1)$. A escolha de φ_i é essencial para a otimização do sistema não linear.

Para se trabalhar com o ajustamento e interpolação de funções, a aproximação por polinômios é muito conveniente, uma vez que os polinômios têm várias propriedades interessantes, dentre estas a de função analítica, que torna possível calcular as derivadas, de qualquer ordem, dos polinômios.

Em geral, as funções spline são polinômios de grau k com continuidade de derivada de ordem $k - 1$ nos nós comuns entre segmentos.

Uma Spline Cúbica, é uma função polinomial por partes, contínua, onde cada parte

é um polinômio de grau 3 no intervalo $[y_{i-1}, y_i], i = 2, 3, \dots, m - 1$, que tem a primeira e segunda derivadas contínuas, o que faz com que a curva não tenha picos e nem troque abruptamente de curvatura nos nós.

Em razão da formulação variacional possuir um termo de grau 3, as funções base φ_i que serão tomadas nesse problema são polinômios cúbicos por partes, também conhecidos como B-spline definidas a seguir:

$$B_i(y) = \begin{cases} \frac{(y - y_{i-2})^3}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i-2}, y_{i-1}] \\ \frac{1}{4} + \frac{3(y - y_{i-1})}{4h} + \frac{3(y - y_{i-1})^2}{4h^2} - \frac{3(y - y_{i-1})^3}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i-1}, y_i] \\ \frac{1}{4} + \frac{3(y_{i+1} - y)}{4h} + \frac{3(y_{i+1} - y)^2}{4h^2} - \frac{3(y_{i+1} - y)^3}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_i, y_{i+1}] \\ \frac{(y_{i+2} - y)^3}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i+1}, y_{i+2}] \\ 0 & \text{se } y \notin [y_{i-2}, y_{i+2}] \end{cases}$$

onde estamos assumindo que os pontos discretos do intervalo $[0,1]$ estão igualmente espaçados, isto é, temos uma malha uniforme de comprimento $h = y_{i+1} - y_i$, $y_1 = 0$ e $y_m = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$ cuja derivada :

$$\frac{\partial B_i}{\partial y}(y) = \begin{cases} \frac{3(y - y_{i-2})^2}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i-2}, y_{i-1}] \\ \frac{3}{4h} + \frac{3(y - y_{i-1})}{2h^2} - \frac{9(y - y_{i-1})^2}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i-1}, y_i] \\ -\frac{3}{4h} - \frac{3(y_{i+1} - y)}{2h^2} + \frac{9(y_{i+1} - y)^2}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_i, y_{i+1}] \\ -\frac{3(y_{i+2} - y)^2}{4h^3}, & \text{se } y \in [y_{i+1}, y_{i+2}] \\ 0 & \text{se } y \notin [y_{i-2}, y_{i+2}] \end{cases}$$

Podemos mostrar que $B_i(y)$ de fato é uma base para os splines cúbicos, ou seja, toda spline cúbica pode ser escrita como combinação linear das B-Splines.

Note que para as funções B_0, B_1, B_m e B_{m+1} , precisamos introduzir os pontos nodais auxiliares: $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_{m+1}, y_{m+2}$ e y_{m+3} , que dependem dos valores de fronteira. Consideremos como anteriormente, o intervalo $\Omega = (0, 1)$ com $y_1 = 0$ e $y_m = 1$ e os valores de fronteira nulos. As funções $B_3 \dots B_{m-2}$ se anulam nas fronteiras de cada intervalo que as define, mas as funções B_1, B_2, B_{m-1} e B_m não satisfazem. Com esse objetivo considere:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_i(y) = B_i(y) & i = 3, \dots, m-2 \\ \varphi_1(y) = B_1(y) - 4B_0(y), & \varphi_2(y) = B_2(y) - B_0(y) \\ \varphi_{m-1}(y) = B_{m-1}(y) - B_{m+1}(y) & \varphi_m(y) = B_m(y) - 4B_{m+1}(y) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Temos que $B_i(y_i) = 1$ e $B_i(y_{i-1}) = B_i(y_{i+1}) = \frac{1}{4}$, então é fácil de verificar que $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_{m-1}(1) = \varphi_m(1) = 0$ e portanto satisfazem os valores de fronteira. Dessa forma a solução aproximada é um polinômio cúbico tal que $v_m(0) = v_m(1) = 0$ onde V_m é o subespaço gerado por $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$, dada por :

$$v_m = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y) \quad \varphi_i \in V_m$$

As funções B_i podem ser representadas geometricamente como mostrado na figura

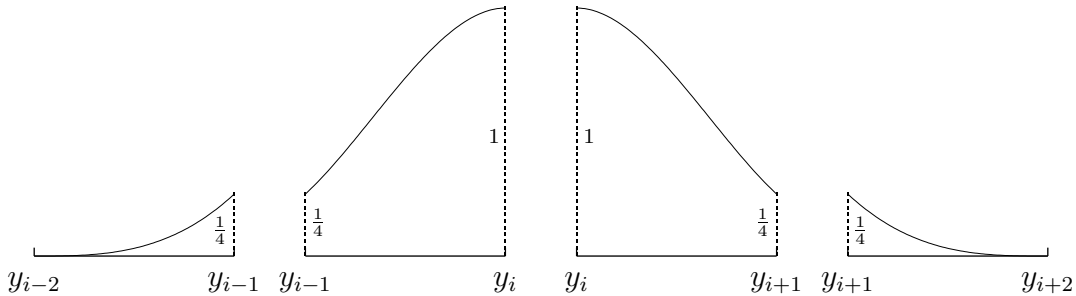


Figura 4.1: Função spline cúbico

4.5 Cálculo das Matrizes

Vamos agora calcular as matrizes A, B, C, D e E usando as funções base, splines cúbicas, já definidas. Cada matriz do sistema é uma matriz heptagonal e portanto temos que calcular genericamente todos os elementos para todas as matrizes a_{ij} com $|i - j| \leq 3$ e $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > 3$.

4.5.1 Calculando os elementos da Matriz A

$$A = a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_j(y)dy.$$

A matriz A é simétrica, logo $a_{i,i+1} = a_{i+1,i}$, $a_{i,i+2} = a_{i+2,i}$ e $a_{i,i+3} = a_{i+3,i}$. Assim, para $i = 3, \dots, m - 2$, temos:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_i(y)dy = \int_0^1 \varphi_i(y)^2 dy = \int_{y_{i-2}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)^2 dy \\ &= \int_{y_{i-2}}^{y_{i-1}} \varphi_i(y)^2 dy + \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_i(y)^2 dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y)^2 dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)^2 dy \\ &= \frac{h}{112} + \frac{297h}{560} + \frac{297h}{560} + \frac{h}{112h} = \frac{151h}{140}. \end{aligned}$$

Para o elemento $a_{i,i+1}$ $i = 3, \dots, m - 2$, temos:

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} = a_{i+1,i} &= \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy \\ &= \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+1}(y)dy \\ &= \frac{129h}{2240} + \frac{933h}{2240} + \frac{129h}{2240} = \frac{1191h}{2240}. \end{aligned}$$

Para o elemento $a_{i,i+2}$, temos:

$$\begin{aligned}
a_{i,i+2} = a_{i+2,i} &= \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_{i+2}(y)dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+2}(y)dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y)\varphi_{i+2}(y)dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+2}(y)dy \\
&= \frac{3h}{112} + \frac{3h}{112} = \frac{3h}{56}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $a_{i,i+3}$, temos:

$$\begin{aligned}
a_{i,i+3} = a_{i+3,i} &= \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_{i+3}(y)dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+3}(y)dy \\
&= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y)\varphi_{i+3}(y)dy = \frac{h}{2240}.
\end{aligned}$$

Os elementos da matriz A próximos das fronteiras $y = 0$ e $y = 1$ são calculados da seguinte forma:

Para o elemento a_{11} , temos:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \int_0^1 \varphi_1(y)\varphi_1(y)dy = \int_0^1 \varphi_1(y)^2 dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y)^2 dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y)^2 dy \\
&= \frac{17h}{80} + \frac{h}{112} = \frac{31h}{140}.
\end{aligned}$$

Para o elemento a_{12} , temos:

$$\begin{aligned}
a_{12} = a_{21} &= \int_0^1 \varphi_1(y)\varphi_2(y)dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y)\varphi_2(y)dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y)\varphi_2(y)dy \\
&= \frac{23h}{80} + \frac{129h}{2240} = \frac{773h}{2240}.
\end{aligned}$$

Para o elemento a_{13} , temos:

$$\begin{aligned}
a_{13} = a_{31} &= \int_0^1 \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy \\
&= \frac{h}{40} + \frac{3h}{112} = \frac{29h}{560}.
\end{aligned}$$

Para o elemento a_{22} , temos:

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \int_0^1 \varphi_2(y)\varphi_2(y)dy = \int_0^1 \varphi_2(y)^2dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_2(y)^2dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_2(y)^2dy + \int_{y_3}^{y_4} \varphi_2(y)^2dy \\
&= \frac{17h}{15} + \frac{297h}{560} + \frac{h}{112} = \frac{41h}{40}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $a_{m-1,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
a_{m-1,m-1} &= \int_0^1 \varphi_{m-1}(y)\varphi_{m-1}(y)dy = \int_0^1 \varphi_{m-1}(y)^2dy \\
&= \int_{y_{m-3}}^{y_{m-2}} \varphi_{m-1}(y)^2dy + \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_{m-1}(y)^2dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_{m-1}(y)^2dy \\
&= \frac{h}{112} + \frac{297h}{560} + \frac{17h}{15} = \frac{41h}{40}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $a_{m,m}$, temos:

$$\begin{aligned}
a_{m,m} &= \int_0^1 \varphi_m(y)\varphi_m(y)dy = \int_0^1 \varphi_m(y)^2dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y)^2dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y)^2dy \\
&= \frac{h}{112} + \frac{17h}{80} = \frac{31h}{140}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $a_{m,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
a_{m,m-1} = a_{m-1,m} &= \int_0^1 \varphi_m(y)\varphi_{m-1}(y)dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y)\varphi_{m-1}(y)dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y)\varphi_{m-1}(y)dy \\
&= \frac{23h}{80} + \frac{129h}{2240} = \frac{773h}{2240}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $a_{m,m-2}$, temos:

$$\begin{aligned}
 a_{m,m-2} = a_{m-2,m} &= \int_0^1 \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy \\
 &= \frac{h}{40} + \frac{h}{112} = \frac{29h}{560}.
 \end{aligned}$$

Assim na forma matricial a matriz $A_{m \times m}$ será:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{31h}{140} & \frac{773h}{2240} & \frac{29h}{560} & \frac{h}{2240} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{773h}{2240} & \frac{41h}{40} & \frac{1191h}{2240} & \frac{3h}{56} & \frac{h}{2240} & \ddots & \vdots \\ \frac{29h}{560} & \frac{1191h}{2240} & \frac{151h}{140} & \frac{1191h}{2240} & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{h}{2240} & \frac{3h}{56} & \frac{1191h}{2240} & \ddots & \ddots & \frac{3h}{56} & \frac{h}{2240} \\ 0 & \frac{h}{2240} & \ddots & \ddots & \frac{151h}{140} & \frac{1191h}{2240} & \frac{29h}{560} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{3h}{56} & \frac{1191h}{2240} & \frac{41h}{140} & \frac{773h}{2240} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h}{2240} & \frac{29h}{560} & \frac{773h}{2240} & \frac{31h}{140} \end{bmatrix}$$

4.5.2 Calculando os elementos da Matriz B

Consideremos a Matriz B

$$B = b_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy.$$

Assim

$$\begin{aligned}
b_{ii} &= \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-2}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-2}}^{y_{i-1}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\
&\quad + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i,i+1}$, temos:

$$\begin{aligned}
b_{i,i+1} &= \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{49}{64}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i+1,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
b_{i+1,i} &= \int_0^1 \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{49}{64}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i,i+2}$, temos:

$$\begin{aligned}
b_{i,i+2} &= \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{7}{40}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i+2,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
b_{i+2,i} &= \int_0^1 \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{7}{40}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i,i+3}$, temos:

$$\begin{aligned} b_{i,i+3} &= \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy \\ &= -\frac{1}{320}. \end{aligned}$$

Para o elemento $b_{i+3,i}$, temos:

$$\begin{aligned} b_{i+3,i} &= \int_0^1 \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\ &= \frac{1}{320}. \end{aligned}$$

Para o elemento b_{11} , temos:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy = \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para o elemento b_{12} , temos:

$$\begin{aligned} b_{12} &= \int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\ &= -\frac{133}{320}. \end{aligned}$$

Para o elemento b_{21} , temos:

$$\begin{aligned} b_{21} &= \int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} a(y, t) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \\ &= \frac{133}{320}. \end{aligned}$$

Para o elemento b_{22} , temos:

$$\begin{aligned} b_{22} &= \int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_3}^{y_4} \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para o elemento b_{13} , temos:

$$\begin{aligned}
 b_{13} &= \int_0^1 \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_1(y)\varphi_3(y)dy \\
 &= -\frac{13}{80}.
 \end{aligned}$$

Para o elemento b_{31} , temos:

$$\begin{aligned}
 b_{31} &= \int_0^1 \varphi_3(y)\varphi_1(y)dy \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} \varphi_3(y)\varphi_1(y)dy + \int_{y_2}^{y_3} \varphi_3(y)\varphi_1(y)dy \\
 &= \frac{13}{80}.
 \end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m,m-2}$, temos:

$$\begin{aligned}
 b_{m,m-2} &= \int_0^1 \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y)\varphi_{m-2}(y)dy \\
 &= \frac{13}{80}.
 \end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m-2,m}$, temos:

$$\begin{aligned}
 b_{m-2,m} &= \int_0^1 \varphi_{m-2}(y)\varphi_m(y)dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_{m-2}(y)\varphi_m(y)dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_{m-2}(y)\varphi_m(y)dy \\
 &= -\frac{13}{80}.
 \end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m-1,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
 b_{m-1,m-1} &= \int_0^1 \varphi_{m-1}(y)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y}(y)dy \\
 &= \int_{y_{m-3}}^{y_{m-2}} \varphi_{m-1}(y)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y}(y)dy + \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_{m-1}(y)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y}(y)dy \\
 &\quad + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_{m-1}(y)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y}(y)dy \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m,m}$, temos:

$$\begin{aligned}
 b_{m,m} &= \int_0^1 a(y,t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
 b_{m,m-1} &= \int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
 &= \frac{133}{320}.
 \end{aligned}$$

Para o elemento $b_{m-1,m}$, temos:

$$\begin{aligned}
 b_{m-1,m} &= \int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
 &= -\frac{133}{320}.
 \end{aligned}$$

Assim na forma matricial a matriz $B_{m \times m}$ será:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{133}{320} & -\frac{13}{80} & -\frac{1}{320} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{133}{320} & \ddots & -\frac{61}{80} & -\frac{7}{40} & -\frac{1}{320} & \ddots & \vdots \\ \frac{13}{80} & \frac{61}{80} & \ddots & -\frac{49}{64} & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{320} & \frac{7}{40} & \frac{49}{64} & \ddots & \ddots & -\frac{7}{40} & -\frac{1}{320} \\ 0 & \frac{1}{320} & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{49}{64} & -\frac{13}{80} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{7}{40} & \frac{49}{64} & \ddots & -\frac{133}{320} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{320} & \frac{13}{80} & \frac{133}{320} & 0 \end{bmatrix}$$

4.5.3 Calculando os elementos da Matriz C

A função $a_2(y, t)$ definida em (3.6) é contínua na variável y e t . Estamos interessados em calcular $\int_r^s a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy$, o que computacionalmente é um tanto quanto custoso devido ao termo $a_2(y, t)$. Para resolver este problema e usando o fato de que a função $a_2(y, t)$ é contínua em $y \in [0, 1]$, faremos a seguinte aproximação

$$\int_r^s a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \simeq \tilde{a}_{r,s}(t) \int_r^s \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy$$

onde $\tilde{a}_{r,s}(t) = a\left(\frac{r+s}{2}, t\right)$, o que não provocará grandes alterações em seu resultado, pois estamos considerando o intervalo (r, s) pequeno, ou seja, $s = r + h$, $h \ll 1$.

Vamos usar a aproximação acima para calcular os elementos da matriz C definida por:

$$C = c_{ij} = \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy.$$

Podemos calcular cada termo de C. Assim,

$$\begin{aligned}
c_{ii} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-2}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-2}}^{y_{i-1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i-1}}^{y_i} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&+ \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i-2}, y_{i-1}}(t) - \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) + \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) - \frac{9}{h^2} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{i,i+1}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{i,i+1} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-1}}^{y_i} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&+ \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{15}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) - \frac{27}{32h^2} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) - \frac{15}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{i+1,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{i+1,i} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+1}}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+1}}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-1}}^{y_i} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+1}}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+1}}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&+ \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+1}}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{15}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) + \frac{27}{32h^2} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) + \frac{15}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{i,i+2}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{i,i+2} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{i+2}(y)}{\partial y} dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{i+2}(y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{i+2}(y)}{\partial y} dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{i+2}(y)}{\partial y} dy \\
&= \frac{3}{32h^2} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) + \frac{21}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{i+2,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{i+2,i} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+2}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+2}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+2}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+2}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy \\
&= -\frac{21}{32h^2} \tilde{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) + -\frac{3}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{i,i+3}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{i,i+3} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{i+3}(y)}{\partial y} dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{i+3}(y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_i(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{i+3}(y)}{\partial y} dy \\
&= \frac{3}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{i+3,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{i+3,i} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+3}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+3}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{i+3}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy \\
&= -\frac{3}{32h^2} \tilde{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento c_{11} , temos:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{135}{32h^2} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_2, y_3}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento c_{12} , temos:

$$\begin{aligned}
c_{12} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{81}{16h^2} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{15}{32h^2} \tilde{a}_{y_2, y_3}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento c_{21} , temos:

$$\begin{aligned}
c_{21} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{9}{16h^2} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) + \frac{15}{32h^2} \tilde{a}_{y_2, y_3}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento c_{22} , temos:

$$\begin{aligned}
c_{22} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_3}^{y_4} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= -\frac{9}{8h^2} \tilde{a}_{y_1, y_2}(t) + \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_2, y_3}(t) - \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_3, y_4}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{m-1,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{m-1,m-1} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{m-1}(y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{y_{m-3}}^{y_{m-2}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{m-1}(y)}{\partial y} dy + \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{m-1}(y)}{\partial y} dy \\
&\quad + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_{m-1}(y)}{\partial y} dy = \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_{m-3}, y_{m-2}}(t) - \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) + \frac{9}{8h^2} \tilde{a}_{y_{m-1}, y_m}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento c_{mm} , temos:

$$\begin{aligned}
c_{mm} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi_m(y)}{\partial y} dy \\
&= \frac{9}{32h^2} \tilde{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) + \frac{135}{32h^2} \tilde{a}_{y_{m-1}, y_m}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{m,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{m,m-1} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \varphi_{m-1}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \varphi_{m-1}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_m(y)}{\partial y^2} \varphi_{m-1}(y) dy \\
&= \frac{15}{32h^2} \tilde{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) + \frac{81}{16h^2} \tilde{a}_{y_{m-1}, y_m}(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento $c_{m-1,m}$, temos:

$$\begin{aligned}
c_{m-1,m} &= \int_0^1 a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}(y)}{\partial y^2} \varphi_m(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}(y)}{\partial y^2} \varphi_m(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a_2(y, t) \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}(y)}{\partial y^2} \varphi_m(y) dy \\
&= -\frac{15}{32h^2} \tilde{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) - \frac{9}{16h^2} \tilde{a}_{y_{m-1}, y_m}(t).
\end{aligned}$$

4.5.4 Calculando os elementos da Matriz D

Para o cálculo dos elementos desta matriz vamos seguir a mesma aproximação que foi feita para a matriz anterior, desde que $a_1(y, t)$ definida em (3.6) é contínua em y .

$$D = d_{ij} = \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy.$$

Assim

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-2}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_{i-2}}^{y_{i-1}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i-1}}^{y_i} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\ &+ \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy \\ &= \frac{1}{32} \hat{a}_{y_{i-2}, y_{i-1}}(t) + \frac{15}{32} \hat{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) - \frac{1}{32} \hat{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) - \frac{15}{32} \hat{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t). \end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i,i+1}$, temos:

$$\begin{aligned} d_{i,i+1} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_{i-1}}^{y_i} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\ &+ \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\ &= \frac{71}{320} \hat{a}_{y_{i-2}, y_{i-1}}(t) + \frac{183}{320} \hat{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) - \frac{9}{320} \hat{a}_{y_i, y_{i+1}}(t). \end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i+1,i}$, temos:

$$\begin{aligned} d_{i+1,i} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_{i-1}}^{y_i} a_1(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_1(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\ &+ \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_{i+1}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\ &= \frac{9}{320} \hat{a}_{y_{i-2}, y_{i-1}}(t) + \frac{183}{320} \hat{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) - \frac{71}{320} \hat{a}_{y_i, y_{i+1}}(t). \end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i,i+2}$, temos:

$$\begin{aligned}
d_{i,i+2} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}(y)}{\partial y} dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}(y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}(y)}{\partial y} dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}(y)}{\partial y} dy \\
&= \frac{19}{160} \widehat{a}_{y_{i-1}, y_i}(t) + \frac{9}{160} \widehat{a}_{y_i, y_{i+1}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i+2,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
d_{i+2,i} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_{i+2}(y) a_1(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_{i+2}(y) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy \\
&= -\frac{9}{160} \widehat{a}_{y_i, y_{i+1}}(t) - \frac{19}{160} \widehat{a}_{y_{i+1}, y_{i+2}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i,i+3}$, temos:

$$\begin{aligned}
d_{i,i+3} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}(y)}{\partial y} dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}(y)}{\partial y} dy = \\
&= \frac{1}{320} \widehat{a}_{y_i, y_{i+1}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{i+3,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
d_{i+3,i} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}(y)}{\partial y} \varphi_i(y) dy \\
&= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} a_1(y, t) \varphi_{i+3}(y) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} dy \\
&= -\frac{1}{320} \widehat{a}_{y_i, y_{i+1}}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento d_{11} , temos:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a_1(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a_1(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{32} \widehat{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{1}{32} \widehat{a}_{y_2, y_3}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento d_{12} , temos:

$$\begin{aligned}
d_{12} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a_1(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a_1(y, t) \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{71}{160} \widehat{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{9}{320} \widehat{a}_{y_2, y_3}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento d_{21} , temos:

$$\begin{aligned}
d_{21} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a_1(y, t) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a_1(y, t) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \\
&= -\frac{9}{320} \widehat{a}_{y_1, y_2}(t) + \frac{71}{160} \widehat{a}_{y_2, y_3}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento d_{22} , temos:

$$\begin{aligned}
d_{22} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} a_1(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} a_1(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_3}^{y_4} a_1(y, t) \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{2} \widehat{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{15}{32} \widehat{a}_{y_2, y_3}(t) - \frac{1}{32} \widehat{a}_{y_3, y_4}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{m-1,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
d_{m-1,m-1} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-3}}^{y_{m-2}} a_1(y, t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a_1(y, t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&\quad + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a_1(y, t) \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{2} \hat{a}_{y_1, y_2}(t) - \frac{15}{32} \hat{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) - \frac{1}{32} \hat{a}_{y_{m-1}, y_m}(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento $d_{m,m}$, temos:

$$\begin{aligned}
d_{m,m} &= \int_0^1 a_1(y, t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} a_3(y, t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} a_1(y, t) \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{1}{32} \hat{a}_{y_{m-2}, y_{m-1}}(t) - \frac{1}{32} \hat{a}_{y_{m-1}, y_m}(t).
\end{aligned}$$

4.5.5 Calculando os elementos da Matriz E

$$E = E_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) dy.$$

Observe que a matriz é simétrica, ou seja, $E_{ij} = E_{ji}$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
e_{ii} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-2}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{i-2}}^{y_{i-1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&\quad + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{9}{80h} + \frac{51}{80h} + \frac{51}{80h} + \frac{9}{80h} = \frac{3}{2h}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $e_{i,i+1} = e_{i+1,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
 e_{i,i+1} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) dy \\
 &= \frac{21}{160h} - \frac{87}{160h} + \frac{21}{160h} = -\frac{9}{32h}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$e_{i,i+1} = e_{i+1,i} = -\frac{9}{32h}.$$

Para o elemento $e_{i,i+2} = e_{i+2,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
 e_{i,i+2} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_i}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) dy \\
 &= -\frac{9}{40h} - \frac{9}{40h} = -\frac{9}{20h}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$e_{i,i+2} = e_{i+2,i} = -\frac{9}{20h}.$$

Para o elemento $e_{i,i+3} = e_{i+3,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
 e_{i,i+3} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy = \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy \\
 &= \int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) dy = -\frac{3}{160h}.
 \end{aligned}$$

Portanto ,

$$e_{i,i+3} = e_{i+3,i} = -\frac{3}{160h}.$$

$$\begin{aligned} e_{11} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) dy \\ &= \frac{111}{80h} + \frac{9}{80h} = \frac{3}{2h}. \end{aligned}$$

Para o elemento $e_{12} = e_{21}$, temos:

$$\begin{aligned} e_{12} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\ &= \frac{21}{16h} + \frac{33}{80h} = \frac{69}{40h}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$e_{12} = e_{21} = \frac{69}{40h}.$$

Para o elemento $e_{13} = e_{31}$, temos:

$$\begin{aligned} e_{13} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) dy \\ &= -\frac{3}{20h} - \frac{40}{9h} = -\frac{3}{8h}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$e_{31} = e_{13} = -\frac{3}{8h}.$$

Para o elemento e_{22} , temos:

$$\begin{aligned}
e_{22} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_2}^{y_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy + \int_{y_3}^{y_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{243}{16h} + \frac{741}{80h} + \frac{9}{5h} = \frac{105}{4h}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $e_{m-1,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
e_{m-1,m-1} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-3}}^{y_{m-2}} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy \\
&\quad + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) dy = \frac{9}{5h} + \frac{741}{80h} + \frac{243}{16h} = \frac{105}{4h}.
\end{aligned}$$

Para o elemento e_{mm} , temos:

$$\begin{aligned}
e_{mm} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) dy \\
&= \frac{9}{80h} + \frac{111}{80h} = \frac{3}{2h}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $e_{m,m-1} = e_{m-1,m}$, temos:

$$\begin{aligned}
e_{m,m-1} &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \\
&= \int_{y_{m-2}}^{y_{m-1}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy + \int_{y_{m-1}}^{y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \\
&= \frac{33}{80h} + \frac{21}{16h} = \frac{69}{40h}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$e_{m,m-1} = e_{m-1,m} = \frac{69}{40h}.$$

Assim, na forma matricial a matriz $E_{m \times m}$ será:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{3}{2h} & \frac{69}{40h} & -\frac{3}{8h} & -\frac{3}{160h} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{69}{40h} & \frac{41h}{40} & -\frac{9}{32h} & -\frac{9}{20h} & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{3}{8h} & -\frac{9}{32h} & \frac{3}{2h} & -\frac{9}{32h} & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{3}{160h} & -\frac{9}{20h} & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{9}{20h} & -\frac{3}{160h} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{9}{32h} & -\frac{3}{8h} \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{9}{20h} & -\frac{9}{32h} & \ddots & \frac{69}{40h} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{3}{160h} & -\frac{3}{8h} & \frac{69}{40h} & \frac{3}{2h} \end{bmatrix}$$

Capítulo 5

Método das Diferenças Finitas

Seja $f(t) \in C^{n+1}(0, T)$. Do teorema de Taylor podemos expandir a função $f(t)$ da forma:

$$f(t + \Delta(t)) = f(t) + \Delta(t)f'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!}f''(t) + \frac{\Delta(t)^3}{3!}f'''(t) + \dots \quad (5.1)$$

Desprezando os termos com potência 2 ou superior de Δt em (5.1) temos a seguinte aproximação para a primeira derivada:

$$f'(t) \simeq \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (5.2)$$

A aproximação (5.2) é conhecida como diferença adiantada e possui erro de aproximação de ordem $\mathcal{O}(\Delta t)$

5.1 Notação

Suponhamos que d é uma função da variável independente $t \in (0, T)$ e seja a seguinte discretização uniforme: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, onde $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ é denominado passo de tempo. Assim $\Delta t = \frac{T}{N}$ e cada elemento discreto pode ser obtido por,

$$t_n = t_o + n\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Vamos denotar a função d nos pontos discretos t_n da seguinte forma:

$$d(t_n) = d(n\Delta t) = d^n$$

Com essa notação a diferença adiantada (5.2) é dada por:

$$\left(\frac{\partial d(t)}{\partial t_n}\right) \simeq \frac{1}{\Delta t} (d^{n+1} - d^n) = \left(\frac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t}\right) \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta t). \quad (5.3)$$

Assim

$$d'(t_n) = \left(\frac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t}\right) \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta t). \quad (5.4)$$

Por abuso de notação, usaremos de agora em diante o símbolo $=$ em lugar de \simeq .

Retornando ao sistema de equações diferenciais ordinárias (4.18). Ao aplicar o método de Elementos Finitos no espaço obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias cuja variável é o tempo t . Esse sistema então será resolvido pelo método de Diferenças Finitas no tempo. Considere então o sistema de m equações diferenciais ordinárias nos tempos discretos t_n , onde $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \left((A + b_2(t)E)d'(t) + \left(-b_1(t)B + D + \frac{\partial a_1(y, t)}{\partial y}A - \frac{\partial a_2(y, t)}{\partial y}E - C \right)d(t) + 2b_1(t)B_{ijk}d^2(t) = F \right. \\ \left. d(0) = d_0 \right. \end{cases} \quad (5.5)$$

5.2 Família de Métodos

Considere a seguinte aproximação d^n dada por :

$$d(t) = d(t_n) = d^n, \text{ onde } d^n = \theta d^{n+1} + (1 - \theta)d^n, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Em particular, neste trabalho usaremos $\theta = \frac{1}{2}$, e esse método é conhecido como Método de Crank - Nicolson.

5.3 Linearizando o sistema não linear

Sistemas não lineares do ponto de vista numérico não apresentam bons resultados e são de difícil resolução. Objetivando solucionar esse problema, adotamos os seguintes procedimentos possíveis, visando a linearização do último termo do sistema não - linear (5.5)

Procedimento 1: Linearizando o termo v do produto vv_y

No termo não linear podemos fazer a seguinte linearização no tempo $t = t_n$

$$\overline{B}_{kj}^n \frac{1}{2} (d_j^n + d_j^{n+1}) = \frac{1}{2} \overline{B}_{kj}^n(t) d_j^n + \frac{1}{2} \overline{B}_{kj}^n(t) d_j^{n+1} \quad (5.6)$$

onde $\overline{B}_{kj}^n = (B_{ijk} d_i^n)$ é uma matriz de ordem $m \times m$.

Por outro lado $d_j'(t) = \frac{(d_j^{n+1} - d_j^n)}{\Delta t}$, para o tempo $t = t_n$.

Substituindo as duas aproximações no sistema não linear (5.5), obtemos

$$\begin{cases} \left(A + b_2^n E \right) \frac{(d_j^{n+1} - d_j^n)}{\Delta t} + \left(-b_1^n B + 2b_1^n \overline{B}_{kj} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A \right. \\ \left. - \frac{\partial a_2(y, t)}{\partial y} E - C \right) \left(\frac{d_j^{n+1} + d_j^n}{2} \right) = F \\ d(0) = d_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Como a solução é conhecida no tempo t_n os termos d^n são conhecidos e dessa forma multiplicando a equação por Δt obtemos

$$\begin{aligned} & \left(A + b_2^n E \right) (d_j^{n+1} - d_j^n) + \left(-b_1^n B + 2b_1^n \bar{B}_{kj} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A \right. \\ & \left. - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \left(\frac{d_j^{n+1} + d_j^n}{2} \right) \Delta t = \Delta t F, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5.8)$$

Portanto temos o seguinte sistema linear com relação ao vetor incógnita d :

$$\begin{aligned} & \left((A + b_2^n E) + \left(-b_1^n B + 2b_1^n \bar{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^{n+1} = \\ & \Delta t F + \left((A + b_2^n E) - \left(-b_1(t) B + 2b_1^n \bar{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^n, \end{aligned} \quad (5.9)$$

denotando a matriz \bar{B}_{kj} por \bar{B}

Procedimento 2: Linearizando o termo v_y do produto vv_y

Considere agora, a matriz $\hat{B}_{ki}(t) = (B_{ijk} d_j(t))$ de ordem $m \times m$.

Do termo não linear podemos fazer a seguinte linearização no tempo $t = t_n$

$$\hat{B}_{ki}^n \frac{1}{2} (d_i^n + d_i^{n+1}) = \frac{1}{2} \hat{B}_{ki}^n d_i^n + \frac{1}{2} \hat{B}_{ki}^n d_i^{n+1} \quad (5.10)$$

onde $\hat{B}_{ki}^n = (B_{ijk} d_j^n)$ é uma matriz de ordem $m \times m$.

Por outro lado $d'_i(t) = \frac{1}{\Delta t} (d_i^{n+1} - d_i^n)$, para o tempo $t = t_n$.

Substituindo as duas aproximações no sistema não linear (5.5), obtemos

$$\begin{cases} \left((A + b_2^n E) \frac{(d_i^{n+1} - d_i^n)}{\Delta t} + \left(-b_1^n B + 2b_1^n \widehat{B}_{ki} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \left(\frac{d_i^{n+1} + d_i^n}{2} \right) = F \\ d(0) = d_0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Organizando os termos, teremos o seguinte sistema linear com relação ao vetor incógnita d :

$$\begin{aligned} & \left((A + b_2^n E) + \left(-b_1^n B + 2b_1^n \widehat{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^{n+1} = \\ \Delta t F + & \left((A + b_2^n E) - \left(-b_1^n B + 2b_1^n \widehat{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^n \end{aligned} \quad (5.12)$$

denotando $\widehat{B}_{ki} = \widehat{B}$

Observação: Note que as matrizes \widehat{B}_{ki}^n e \overline{B}_{kj}^n são, em geral, diferentes.

Procedimento 3: Tornando o Tensor Simétrico

Podemos simetrizar o termo da seguinte forma

$$B_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\left(\varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y}, \varphi_k \right) + \left(\varphi_j(y) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}, \varphi_k \right) \right) = B_{jik} \quad (5.13)$$

Note que agora

$$\overline{B}_{jk} = B_{ijk} d_i = B_{ijk} d_j = \widehat{B}_{ki}$$

De forma análoga ao procedimento 1, podemos definir $\overline{B}_{jk}^n = B_{ijk} d_i^n$. Substituindo no sistema não linear (5.5), obtemos o seguinte sistema linear :

$$\begin{aligned} & \left((A + b_2^n E) + \left(-b_1^n B + 2b_1^n \bar{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^{n+1} = \\ \Delta t F + & \left((A + b_2^n E) - \left(-b_1^n B + 2b_1^n \bar{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^n \end{aligned} \quad (5.14)$$

Será usado o Procedimento 2, pois o mesmo apresentou melhor resultado computacional . Resolveremos então o seguinte sistema linear pelo método de Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned} & \left((A + b_2^n E) + \left(-b_1^n B + 2b_1^n \hat{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^{n+1} = \\ \Delta t F + & \left((A + b_2^n E) - \left(-b_1^n B + 2b_1^n \hat{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^n \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para inicialização do método iterativo, fazemos $n = 0$ em (5.15), e obtemos:

$$\begin{aligned} & \left((A + b_2^n E) + \left(-b_1^n B + 2b_1^n \hat{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^1 = \\ \Delta t F + & \left((A + b_2^n E) - \left(-b_1^n B + 2b_1^n \hat{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C \right) \frac{\Delta t}{2} \right) d^0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

As matrizes A , B , C , D , E e \hat{B} são conhecidas, o passo de tempo Δt é dado e d^0 é dado pela posição inicial da onda.

Como as matrizes são não-singulares então o sistema linear de m equações tem uma única solução $d^1 = (d_1^1, d_2^1, \dots, d_m^1)$. Para calcular as soluções nos tempos $n = 0, 1, \dots, N-1$, basta resolver o sistema (5.15) para cada n .

5.3.1 Calculando os elementos da Matriz \hat{B}

Considere o Tensor de 3ª ordem $B_{ijk} = \left(\varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial x}, \varphi_k \right)$. Definimos $\hat{B} = B_{ijk} d_j(t)$.

A matriz \widehat{B} é quadrada, heptagonal e de ordem m . Os elementos da matriz são da seguinte forma:

$$\widehat{b}_{i,i} = \sum_{j=1}^m b_{ij} d_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \text{ fixo,}$$

$$\widehat{b}_{i,i+1} = \sum_{j=1}^m b_{ij+1} d_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1 \text{ fixo,}$$

$$\widehat{b}_{i,i+2} = \sum_{j=1}^m b_{ij+2} d_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-2 \text{ fixo,}$$

$$\widehat{b}_{i,i+3} = \sum_{j=1}^m b_{ij+3} d_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-3 \text{ fixo,}$$

$$\widehat{b}_{i+1,i} = \sum_{j=1}^m b_{i+1j} d_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1 \text{ fixo,}$$

$$\widehat{b}_{i+2,i} = \sum_{j=1}^m b_{i+2j} d_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-2 \text{ fixo e}$$

$$\widehat{b}_{i+3,i} = \sum_{j=1}^m b_{i+3j} d_j, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-3 \text{ fixo.}$$

Da definição acima podemos calcular cada termo de \widehat{B} . Para o elemento $\widehat{b}_{i,i}$, temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{i,i} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_j = \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-3}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i-3} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-2}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i-2} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i-1} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i+1} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i+2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) \varphi_i(y) dy \right) d_{i+3} \\
&= -\frac{1}{5376} d_{i-3} - \frac{81}{1120} d_{i-2} - \frac{5947}{8960} d_{i-1} + \frac{5947}{8960} d_{i+1} + \frac{81}{1120} d_{i+2} + \frac{1}{5376} d_{i+3}.
\end{aligned}$$

para $i = 4, 5, \dots, m-3$

Para o elemento $\widehat{b}_{i,i+1}$, temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{i,i+1} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_j = \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-2}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i-2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i-1} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_i \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i+1} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i+2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) \varphi_{i+1}(y) dy \right) d_{i+3} = \\
&+ -\frac{43}{17920} d_{i-2} - \frac{271}{1792} d_{i-1} - \frac{5947}{17920} d_i + \frac{5947}{17920} d_{i+1} + \frac{271}{1792} d_{i+2} + \frac{43}{17920} d_{i+3}.
\end{aligned}$$

para $i = 3, 5, \dots, m-3$

Como \widehat{B} é simétrica, $\widehat{b}_{i+1,i} = \widehat{b}_{i,i+1}$.

Para o elemento $\widehat{b}_{i,i+2}$, temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{i,i+2} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_j = \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_{i-1} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_i + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_{i+2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) \varphi_{i+2}(y) dy \right) d_{i+3} \\
&= -\frac{9}{4480} d_{i-1} - \frac{81}{2240} d_i + \frac{81}{2240} d_{i+2} - \frac{9}{4480} d_{i+3}.
\end{aligned}$$

para $i = 2, 5, \dots, m-3$

Como \widehat{B} é simétrica, $\widehat{b}_{i+2,i} = \widehat{b}_{i,i+2}$.

Para o elemento $\widehat{b}_{i,i+3}$, temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{i,i+3} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_j = \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_i \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_{i+1} + \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+2}}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_{i+2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial y}(y) \varphi_{i+3}(y) dy \right) d_{i+3} \\
&= -\frac{1}{10752} d_i - \frac{1}{2560} d_{i+1} + \frac{1}{2560} d_{i+2} + \frac{1}{10752} d_{i+3}.
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$

Como \widehat{B} é simétrica, $\widehat{b}_{i+3,i} = \widehat{b}_{i,i+3}$

Para o elemento \widehat{b}_{11} , temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{11} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_j = \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_2 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_3 + \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_4 \\
&= \frac{5897}{26880} d_2 + \frac{377}{6720} d_3 - \frac{37}{1792} d_4.
\end{aligned}$$

Para o elemento \widehat{b}_{12} , temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{12} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_j = \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_1 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_2 + \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_3 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_4 \\
&= -\frac{5897}{53760} d_1 + \frac{12223}{53760} d_2 + \frac{1087}{7680} d_3 + \frac{43}{17920} d_4.
\end{aligned}$$

Como \widehat{B} é simétrica, $\widehat{b}_{21} = \widehat{b}_{12}$.

Para o elemento \widehat{b}_{22} , temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{22} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_1(y) dy \right) d_j = \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_1 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_3 + \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_4}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_4 \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_2(y) \frac{\partial \varphi_5}{\partial y}(y) \varphi_2(y) dy \right) d_5 \\
&= -\frac{12223}{26880} d_1 + \frac{1267}{1920} d_3 - \frac{81}{1120} d_4 + \frac{1}{5376} d_5.
\end{aligned}$$

Para o elemento $\widehat{b}_{m-1, m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{m-1,m-1} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_j \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-4}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-4} \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-3} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_{m-1}(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_m \\
&= \frac{1}{5376} d_{m-4} + \frac{81}{1120} d_{m-3} - \frac{1267}{1920} d_{m-2} - \frac{12223}{26880} d_m.
\end{aligned}$$

Para o elemento \widehat{b}_{mm} , temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{mm} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_m(y) dy \right) d_j \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial y}(y) \varphi_m(y) dy \right) d_{m-3} + \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial y}(y) \varphi_m(y) dy \right) d_{m-2} \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \varphi_m(y) dy \right) d_{m-1} = \frac{37}{1792} d_{m-3} - \frac{377}{6720} d_{m-2} - \frac{5897}{26880} d_{m-1}.
\end{aligned}$$

Para o elemento $\widehat{b}_{m,m-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{b}_{m,m-1} &= \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_j \\
&= \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-3}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-3} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-2}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-2} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_{m-1} \\
&+ \left(\int_0^1 \varphi_m(y) \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}(y) \varphi_{m-1}(y) dy \right) d_m \\
&= \frac{43}{17920} d_{m-3} + \frac{1087}{7680} d_{m-2} + \frac{12223}{53760} d_{m-1} - \frac{5897}{53760} d_4.
\end{aligned}$$

Como \widehat{B} é simétrica, $\widehat{b}_{m-1,m} = \widehat{b}_{m,m-1}$.

Capítulo 6

Simulações Numéricas

Neste capítulo serão mostrados exemplos numéricos para ilustrar algumas características do problema associado a equação de Benjamin - Bona - Mahony. Vimos que resolver o problema (1.8), ou seja, encontrar uma solução aproximada $v_h(y, t)$ implica em resolver o problema (1.1), ou seja, encontrar $u(x, t)$ já que os dois problemas são equivalentes.

Para os exemplos a seguir, consideraremos a condição inicial $v_h(y, 0)$ diferente de zero. Se $v_h(y, 0) = 0$ para o problema original, isto é, $f \equiv 0$ então é fácil verificar pelo sistema linear (5.15) que só teremos como solução do sistema a solução trivial, já que as matrizes são não-singulares. O que não é interessante.

A maior dificuldade em encontrar a solução numérica é o termo $\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$. Para controlar esse termo, o coeficiente $a_2(y, t)$ deve ser tomado suficientemente pequeno, isto significa que $\gamma(t)$ deve crescer muito vagarosamente quando t cresce.

6.1 Exemplo 1

Neste exemplo consideraremos a solução exata $v(y, t)$ para (1.8) dada por:

$$v(y, t) = \text{sen}(\pi y) \cos(\pi t) \tag{6.1}$$

com posição inicial da onda dada por:

$$v(y, 0) = \text{sen}(\pi y) \quad (6.2)$$

e os valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0 \quad (6.3)$$

Para determinar uma solução numérica aproximada precisamos definir as funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ que caracterizam os valores de fronteira do problema. Assim definimos:

$$\alpha(t) = -1 + 0.01e^{-(t+1)} \quad (6.4)$$

e

$$\beta(t) = 1 - 0.01e^{-(t+1)} \quad (6.5)$$

Assim,

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - 0.02e^{-(t+1)} \quad (6.6)$$

E ainda

$$\gamma(0) = 1,9926$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 2$$

Note que essas particulares funções permitem obter o coeficiente $a_2(y, t)$ (definido por (3.6)) do termo $\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$.

As Figuras 6.1 e 6.2 representam o movimento dos extremos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$

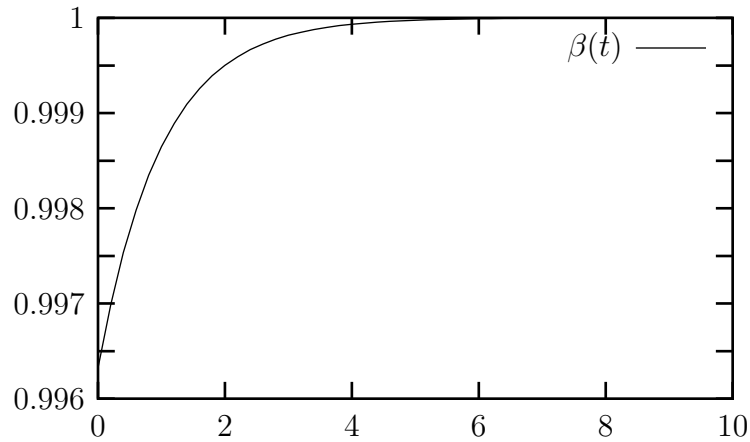


Figura 6.1 : fronteira $\beta(t)$

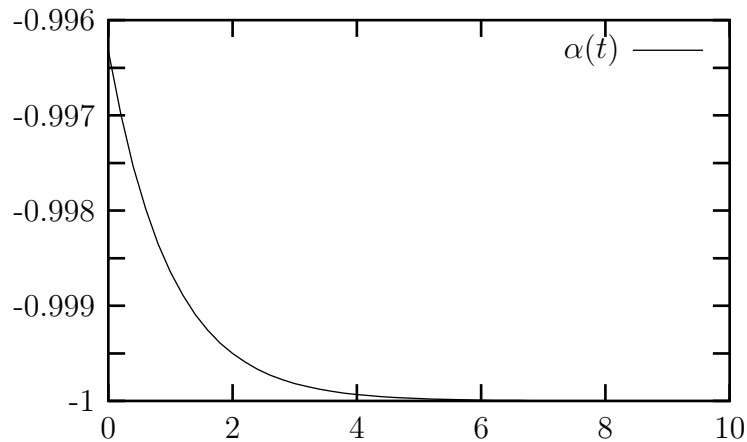


Figura 6.2 : fronteira $\alpha(t)$

No problema (1.8) estudado nessa tese $f \equiv 0$, mas por razões numéricas vamos considerar inicialmente uma força não - nula, obtida a partir da construção de uma solução exata do problema , objetivando uma comparação entre a solução exata construída e a solução aproximada obtida pelo método aplicado.

Observemos que a solução exata (6.1) satisfaz a condição inicial de (4.1). Para construirmos a força externa $f(y, t)$, basta substituímos (6.1) em (4.1)

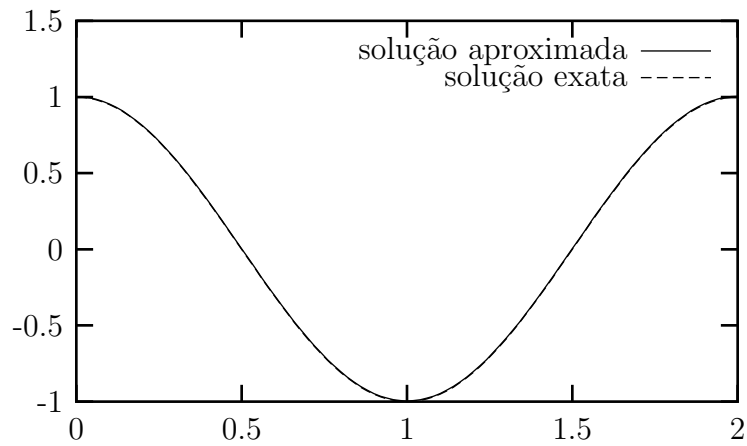


Figura 6.3: $v_h(0.5, t)$ e a solução exata

A solução aproximada $v_h(y, t)$ foi encontrada através da resolução do sistema algébrico (5.15). Para isto, foi implementado um programa computacional em linguagem C. A transformação $x = y\gamma(t) + \alpha(t)$ permite encontrar uma solução aproximada $v_h(y, t)$ em um domínio não - cilíndrico.

A Figura 6.3 representa as soluções exata e aproximada no ponto $y = 0.5$, para $\Delta t = 0.01$, $h = 0.002$. Assim, temos que a solução aproximada encontrada para o problema (1.8) está bem próxima da solução exata conhecida, conforme constatamos na Figura 6.3. A partir desse resultado temos a segurança que a solução do problema (1.8) está sendo obtida corretamente. Assim passamos a estudar o problema quando a força externa é nula.

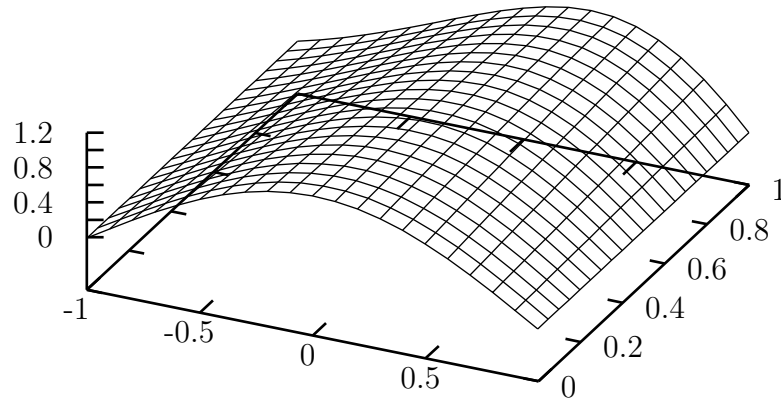


Figura 6.4: $u(x, t)$ solução aproximada para (1.1)

Considerando, agora, a força externa nula, podemos encontrar uma solução aproximada para o problema (1.1). A Figura 6.4 representa esta solução, isto é, o deslocamento da onda em um domínio com fronteira móvel ao longo do tempo $t \in [0, 1]$, com $\Delta t = 0.05$ e $h = 0.05$.

A Figura a seguir representa uma solução aproximada de (1.1) para um $x = 0.5$ fixo .

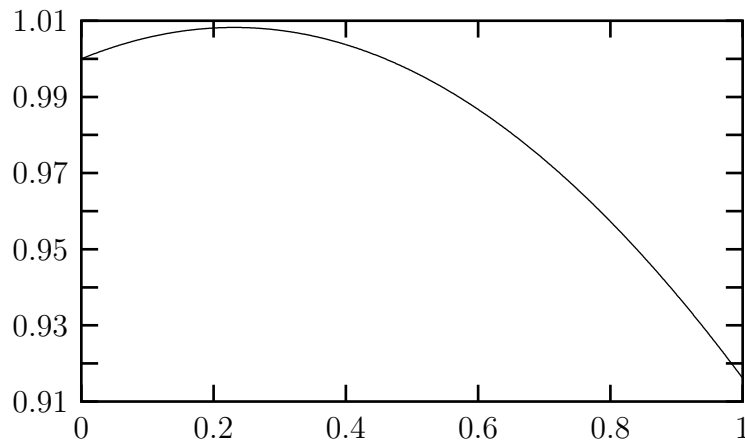


Figura 6.5: $u(0.5, t)$

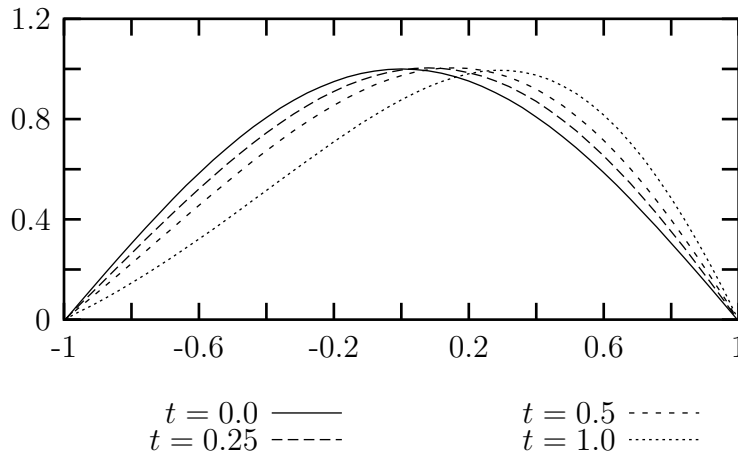


Figura 6.6: solução aproximada $u(x, t)$ para $t = 0.0, 0.25, 0.5$ e 1.0

A Figura 6.6 mostra a solução aproximada para (1.1) fixado os tempos $t = 0.0; 0.25; 0.5$ e 1.0

6.1.1 Convergência Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (4.1). As tabelas a seguir mostra o erro, para $\theta = 0.5$, isto é, o Método de Crank - Nicolson.

Fixamos os passos de tempo $\Delta t = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$ respectivamente. Variamos o espaçamento $h = \frac{1}{m-1}$, para $m = 11, 21, 51, 101, 501$ e 1001 onde m é o número de nós do intervalo $[0, 1]$. $h = 0, 1; 0, 05; 0, 01; 0, 005; 0, 001$.

O erro na norma $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$ é definido por :

$$\begin{aligned}
 E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))} &= \max_{t_n \in [0,1]} (\| v(y_i, t_n) - v_h(y_i, t_n) \|_{L^2(\Omega_t)}) \\
 &= \max_{t_n \in [0,1]} \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |v(y_i, t_n) - v_h(y_i, t_n)|^2 dx \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $n = 1, \dots, N$, onde $v_h(y, t)$ representa a solução aproximada.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.01	0.1	0.007648
0.01	0.05	0.007495
0.01	0.02	0.005016
0.01	0.01	0.003383
0.01	0.002	0.001888
0.01	0.001	0.001768

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.001	0.1	0.006902
0.001	0.05	0.006780
0.001	0.02	0.004274
0.001	0.01	0.002586
0.001	0.002	0.001282
0.001	0.001	0.001198

Note que quanto maior for a divisão da malha , menor é o erro. Com este resultado podemos ter segurança de que a solução aproximada para o problema (4.1) está sendo calculada corretamente, o que comprova a eficácia do método numérico empregado.

6.2 Exemplo 2

Neste exemplo consideraremos a mesma solução exata $v(y, t)$, condição inicial e valores de fronteira do exemplo anterior.

Mas , consideraremos o movimento dos extremos agora dados por:

$$\alpha(t) = -1 + 0.1e^{-(t+1)} \tag{6.7}$$

e

$$\beta(t) = 1 - 0.1e^{-(t+1)} \tag{6.8}$$

Assim

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - 0.2e^{-(t+1)} \tag{6.9}$$

E ainda

$$\gamma(0) = 1,9632$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 2$$

Novamente analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada para o problema (4.1) com $\Delta t = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$ respectivamente:

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.01	0.1	0.012427
0.01	0.05	0.012529
0.01	0.02	0.012996
0.01	0.01	0.016860
0.01	0.002	0.706521
0.01	0.001	diverge

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.001	0.1	0.011827
0.001	0.05	0.012136
0.001	0.02	0.012500
0.001	0.01	0.016420
0.001	0.002	0.696256
0.001	0.001	diverge

Observe que para o exemplo 1 temos que $\gamma(t) \in [1.9926, 2]$ e para este exemplo $\gamma(t) \in [1.9632, 2]$. Esta variação de intervalos acontece devido a mudança de fronteiras, interferindo assim os resultados numéricos.

Ao compararmos os resultados obtidos nos exemplos 1 e 2, concluímos que, o exemplo 1 apresenta bons resultados. Porém para o exemplo 2 implica numa divergência nos resultados da solução aproximada .

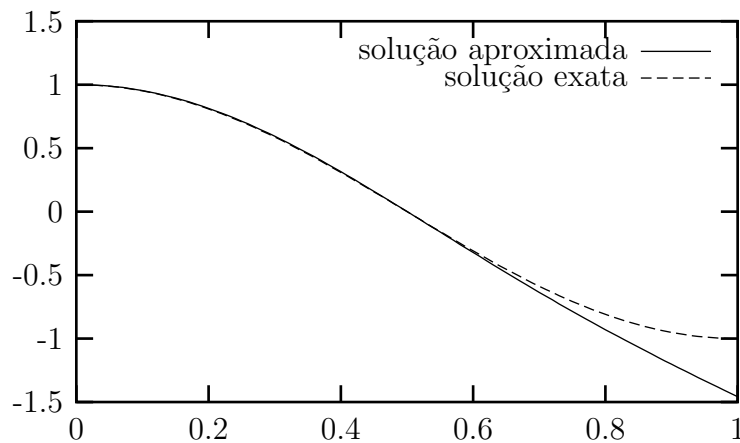


Figura 6.7: $v_h(0.5, t)$ e a solução exata

A Figura 6.7 mostra as soluções exata e aproximada para um $x = 0.5$ fixo, com $x = y\gamma(t) + \alpha(t)$, $\Delta t = 0.01$ e $h = 0.002$.

Observe que para essa fronteira a solução aproximada já não está tão boa quanto antes. A partir de um certo momento a solução diverge.

6.3 Exemplo 3

Para este exemplo consideraremos a mesma condição inicial dos exemplos anteriores

$$v(y, 0) = \text{sen}(\pi y)$$

com valores de fronteira

$$v(0, t) = v(1, t) = 0$$

e a solução exata agora é dada por:

$$v(y, t) = \text{sen}(\pi y)(\cos(\pi t) + \text{sen}(\pi t))$$

com

$$\alpha(t) = -1 + 0.01e^{-(t+1)} \quad (6.10)$$

e

$$\beta(t) = 1 - 0.01e^{-(t+1)} \quad (6.11)$$

Logo

$$\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t) = 2 - 0.02e^{-(t+1)} \quad (6.12)$$

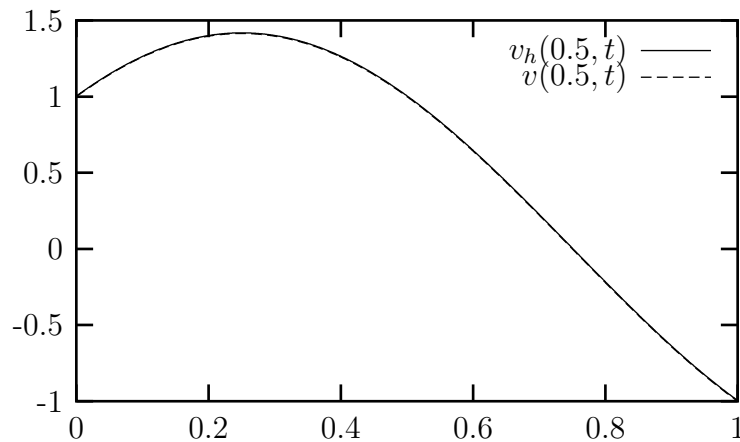


Figura 6.8

A Figura 6.8 representa as soluções exata e aproximada no ponto $x = 0.5$, com $x = y\gamma(t) + \alpha(t)$. Consideramos $\Delta t = 0.001$ e $h = 0.001$. Podemos observar, através da Figura 6.11, que a solução exata e aproximada estão bem próximas.

6.3.1 Convergência Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada obtida no exemplo 3. A tabela a seguir mostra o erro, fixando o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variamos o espaçamento $h = \frac{1}{m-1}$, para $m = 11, 21, 51, 101, 501$ e 1001 onde m é o número de nós do intervalo $[0,1]$. Onde o erro está calculado como anteriormente.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.01	0.1	0.064613
0.01	0.05	0.045585
0.01	0.02	0.032971
0.01	0.01	0.028599
0.01	0.002	0.025042
0.01	0.001	0.024595

Note que quanto maior for a divisão da malha, menor é o erro. O erro é inversamente proporcional ao tamanho da malha.

Observe o erro da solução aproximada , agora para $\Delta t = 0.001$,

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.001	0.1	0.042186
0.001	0.05	0.024177
0.001	0.02	0.012306
0.001	0.01	0.008242
0.001	0.002	0.004976
0.001	0.001	0.004591

Podemos observar que para $\Delta t = 0.001$, a medida que refinamos a malha as soluções exata e aproximada estão cada vez mais próximas. Além disso, podemos notar que o erro é menor do que o erro obtido da tabela anterior quando foi usado $\Delta t = 0.01$. Isso mostra que o erro depende da escolha do passo de tempo Δt .

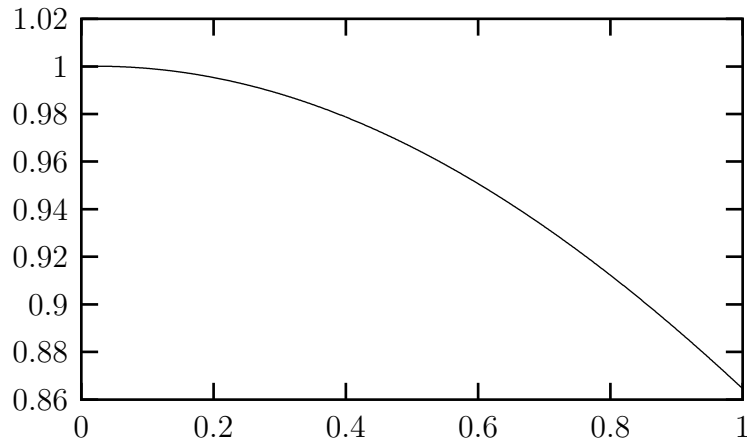


Figura 6.9

Considerando agora, a força externa nula, podemos encontrar uma solução aproximada para o problema (1.1). A Figura 6.9 mostra a solução aproximada $u(x, t)$ para $x = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ e $h = 0.001$.

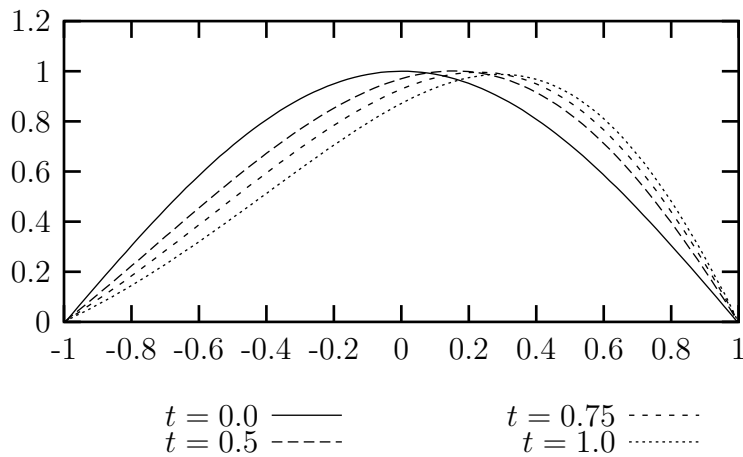


Figura 6.10 solução aproximada $u(x, t)$ para alguns tempos fixos

A Figura 6.10 mostra a solução aproximada $u(x, t)$ fixado os tempos $t = 0.0, 0.5, 0.75$ e 1.0 , com $\Delta t = 0.01$ e $h = 0.1$.

Capítulo 7

Equação de BBM num domínio cilíndrico

O objetivo deste capítulo é estudar o Problema associado a BBM, como visto anteriormente, mas agora num domínio cilíndrico.

Consideraremos o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad \text{em } Q \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{em } \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega = (0, 1) \end{array} \right. \quad (7.1)$$

onde $\Omega = (0, 1)$ e Q representa o cilindro $\Omega \times (0, 1)$. Por conveniência numérica utilizaremos a equação

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad \text{em } Q \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{em } \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega = (0, 1) \end{array} \right. \quad (7.2)$$

que é equivalente a (7.1).

O problema (7.2) está definido no domínio cilíndrico Q . Assim, pode-se estabelecer a existência de soluções pelo método de Faedo-Galerkin.

Portanto, denotamos por $\varphi_i, i \in \mathbb{N}$ uma base de $H_0^1(\Omega)$ e seja $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$ um subespaço de $H_0^1(\Omega)$ formado pelos m primeiros vetores base do espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Procura-se uma solução aproximada do problema (7.2), dado por:

$$u_h(x, t) = u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x) \in V_m \quad (7.3)$$

7.1 Problema Aproximado

Aproximamos o Problema (7.2) pelo problema de determinar, no espaço das soluções V_m , uma função $u_h = u_h(x, t)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, w \right) + \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}, w \right) + 2 \left(u_h \frac{\partial u_h}{\partial x}, w \right) - \left(\frac{\partial^3 u_h}{\partial x^2 \partial t}, w \right) = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{em } \forall t \geq 0 \\ u_h(y, 0) = v_{h0}(x) \quad \text{em } \Omega = (0, 1) \end{array} \right. \quad (7.4)$$

para todo $w \in V_m$.

Integrando por partes temos:

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, w \right) - \left(u_h, \frac{\partial w}{\partial x} \right) + 2 \left(u_h \frac{\partial u_h}{\partial x}, w \right) + \left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial t}, \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (7.5)$$

Procuramos uma solução aproximada do problema (7.5) dada por:

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y) \in V_m, \quad (7.6)$$

Para obtermos a solução aproximada $u_h(x, t) \in V_m$ é necessário determinar os coeficientes $d_i(t)$. De (7.6) deduzimos:

$$\frac{\partial u_h}{\partial t}(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i'(t) \varphi_i(x), \quad \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2 \partial t}(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i'(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial v_h}{\partial x}(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \quad (7.8)$$

Substituindo (7.6), (7.7) e (7.8) no problema aproximado (7.5) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^m d'_i(t) \varphi_i(x), w \right) - \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x), \frac{\partial w}{\partial x} \right) + 2 \left(\sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(x) \sum_{j=1}^m d_j(t) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x}, w \right) \\ & + \left(\sum_{i=1}^m d'_i(t) \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad \forall w \in V_m \end{aligned} \quad (7.9)$$

Tomando em particular $w = \varphi_k \in V_m$ em (7.9):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m d'_i(t) \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx - \sum_{i=1}^m d_i(t) \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} dx \\ & + 2 \sum_{i,j=1}^m d_i(t) d_j(t) \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} \varphi_k(x) dx + \sum_{i=1}^m d'_i(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} dx = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (7.10)$$

Reagrupando os termos e definindo as matrizes A, B e E, temos:

$$A = a_{ik} = \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx$$

$$B = b_{ik} = \int_0^1 \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(x) dx$$

$$E = e_{ij}(t) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x) dx$$

Definimos, ainda, o Tensor de 3ª ordem $B_{ijk} = \left(\varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x}, \varphi_k \right)$, que já foram calculados anteriormente.

Assim,

$$(A + E) d'(t) - B d(t) + 2B_{ijk} d^2(t) = 0 \quad (7.11)$$

As matrizes A, B, e E são quadradas de ordem m e $d = [d_1, d_2, \dots, d_m]^t$ é o vetor incógnita.

O sistema de equações diferenciais ordinárias a seguir, após o processo de linearização, será resolvido pelo Método das Diferenças Finitas.

Consideremos então o sistema de m equações diferenciais ordinárias nos tempos discretos t_n , onde $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$

$$\begin{cases} (A + E) d'(t) + (-B + 2\widehat{B}_{ki})d(t) = 0 \\ d(0) = d_0, \end{cases} \quad (7.12)$$

onde $\widehat{B}_{ki}(t) = (B_{ijk}d_i(t))$

Usando diferença adiantada (5.4) no sistema de equações diferenciais (7.12), temos:

$$\begin{cases} (A + E) \left(\frac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t} \right) + (-B + 2\widehat{B}_{ki})(\theta d^{n+1} + (1 - \theta)d^n) = 0 \\ d(0) = d_0 \end{cases} \quad (7.13)$$

Multiplicando por Δt e tomando $\theta = \frac{1}{2}$, temos o esquema de Crank-Nicolson:

$$\begin{cases} \left((A + E) + (-B + 2\widehat{B}_{ki})\frac{\Delta t}{2} \right) d^{n+1} = \left((A + E) - (-B + 2\widehat{B}_{ki})\frac{\Delta t}{2} \right) d^n \\ d(0) = d_0 \end{cases} \quad (7.14)$$

7.2 Simulações Numéricas

Nesta seção encontraremos uma solução para o problema (7.2). Esta solução aproximada depende da condição inicial e de fronteira que são estabelecidas para o problema.

Como a priori não conhecemos essa solução aproximada, precisamos de um parâmetro para verificarmos que a solução aproximada que encontramos é válida. Para isso consideremos o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = g(x, t) & \text{em } Q \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{em } \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega = (0, 1) \end{cases} \quad (7.15)$$

nas mesmas condições de (7.2), onde teremos a função força $g(x, t)$ que funcionará como esse parâmetro. Essa força faz com que haja um equilíbrio no problema, e assim podemos obter uma solução aproximada e comparar com a solução exata $u(x, t)$ que será conhecida.

Exemplo 1

Consideraremos a solução exata do problema (7.15) como sendo:

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x) \cos(\pi t) \quad (7.16)$$

com condição inicial dada por:

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \quad (7.17)$$

e os valores de fronteira

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (7.18)$$

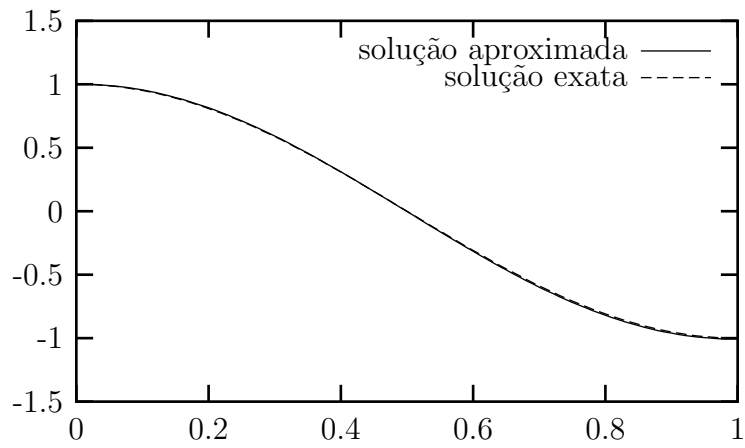


Figura 7.1: $u_h(0.5, t)$ e a solução exata

Assim, temos que a solução aproximada encontrada para o problema (7.15) está bem próxima da solução exata conhecida. Com isso temos a certeza que o método empregado e a implementação numérica aplicados estão corretos.

Agora passaremos a estudar o problema (7.2), onde a força externa é nula.

O gráfico apresentado a seguir representa o deslocamento da onda quando a força externa é nula com $\Delta t = 0.05$ e $h = 0.05$.

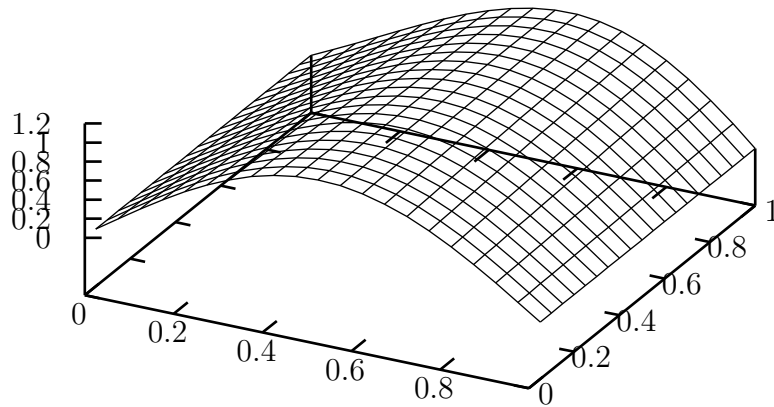


Figura 7.2

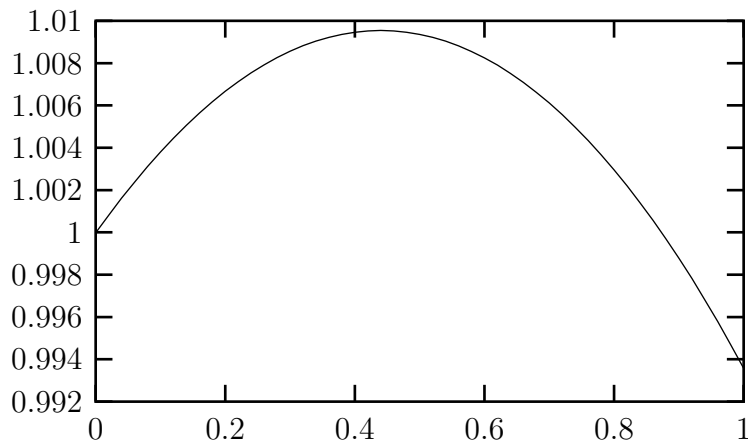


Figura 7.3

Esta figura representa o gráfico de $u_h(0.5, t)$ quando a força externa é nula.

A figura a seguir mostra a posição da onda para os tempos $t = 0, 0.5, 0.75$ e 1.0

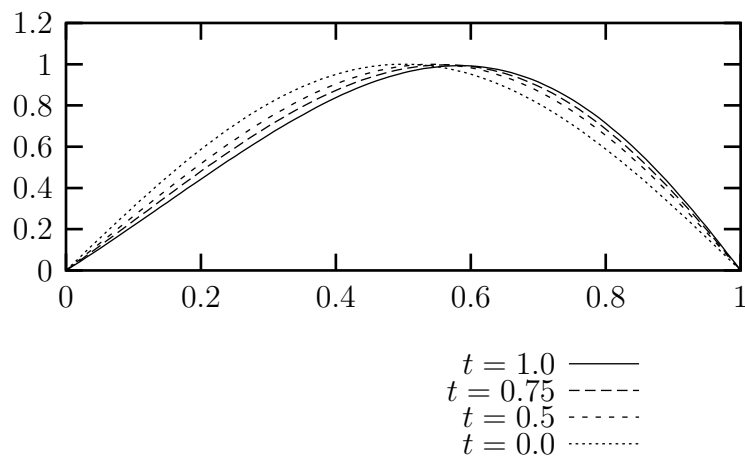


Figura 7.4

7.2.1 Convergência Numérica

Analisaremos o comportamento do erro da solução aproximada. A tabela a seguir mostra o erro, para $\theta = 0.5$, isto é, o Método de Crank-Nicolson. Fixamos o passo de tempo $\Delta t = 0.01$ e variamos o espaçamento $h = \frac{1}{m-1}$, para $m = 11, 21, 51, 101$ e 1001 onde m é o número de nós do intervalo $[0, 1]$.

Δt	h	$E_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t))}$
0.01	0.1	0.007553
0.01	0.05	0.002876
0.01	0.02	0.002766
0.01	0.01	0.001934
0.01	0.002	0.001010
0.01	0.001	0.001001

Fazendo uma comparação entre a equação de BBM em um domínio cilíndrico e não cilíndrico, observamos que para a equação de BBM num domínio cilíndrico temos melhores resultados numéricos, já que estamos trabalhando com fronteira fixa.

Bibliografia

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*. Pure and applied mathematics; a series of monographs and textbooks v.65. Academic Press (1975)
- [2] BARRETO, R.K., Caldas, C. S. Q., Gamboa, R e Limaco, J., *On the Rosenau and Benjamin – Bona – Mahony equations in domains with moving Boundary* Eletronic J.of Differential Equations, n°35, (2004), 12
- [3] BRÉZIS, Haïm. *Analise Fonctionnelle. Théorie et applications*. DUNOD, Paris (1999).
- [4] CAVALCANTI, Cleber Araujo *Sobre as equações de Benjamin - Bona - Mahony e Burguers com viscosidade / Tese de Mestrado : UFRJ/IM, 2003*
- [5] CODDINGTON, E. A. & LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*. Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., Bombay - New Delhi (1955)
- [6] DIEUDONNÉ, J., *Sur le Théorème de Lebesgue-Nikodym*, J. Indian Math. Soc. Vol. 15 pp 77 - 86(1951)
- [7] HILLE, E., PHILLIPS, R. S., *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXXI (1957)
- [8] LIONS, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [9] MEDEIROS,L.A, LIMACO J. and BEZERRA S. *Vibrations of Elastic Strings* J. of Computacional Analysis and Application 4(2002), n°2, 91 – 127, n°3, pp211 – 263

- [10] MEDEIROS, L.A *Equações Diferenciais Parciais*IM/UFRJ (1981)
- [11] MEDEIROS, L.A;Milla Miranda, M. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não homogêneo)*IM/UFRJ (2000)
- [12] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos, N° 25 IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1993).
- [13] PHILLIPS, R. S., *On Weakly Compact Subsets of a Banach Space*, American Journal of Mathematics, Vol. 65 pp 108 - 136 (1943)
- [14] BURDEN,R.L.,FAIRES,J.D. *Análise Numérica*;Editora Thompsom.
- [15] RODRIGUES, R.D *Análise Numérica do Modelo de Kirchhoff – Carrier com fronteira móvel* / Tese de Mestrado: UFRJ/IM – NCE, 2001
- [16] Rodrigues R.D, Rincon,M.A *Numerical Solution for the Model of Vibrating Elastic Membrane with Moving Boundary* ;Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation .Vol 12 - n°6, 1089-1100 (2007).
- [17] RINCON, M.A, Liu, I.S. *Introdução ao Método de Elementos finitos: Análise e Aplicação* IM / UFRJ – 2ª edição (2001)
- [18] SCARDUA, Aline *Análise e Simulação Numérica de um problema parabólico com fronteira móvel* / Tese de Mestrado : UFRJ/IM – NCE, 2002
- [19] SOUZA, B.S; Rincon M.A; Limaco J *Numerical Method , Existence and Uniqueness for Thermoelasticity System with moving boundary* Computational & Applied Mathematics, vol 24 , 439 – 460 (2005)
- [20] HUGHES,T.J.R *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*;Dover Publications(2000).
- [21] WLOKA, J. T., *Partial Differential Equations*, Cambridge University (1987)