COPPE/UFRJ

DEFINIÇÃO DAS RESTRIÇÕES AOS PESOS EM ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (AED) POR CORRELAÇÃO CANÔNICA E REGRESSÃO LINEAR

Antonio Carlos Gonçalves

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Biomédica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Biomédica.

Orientadores: Renan Moritz Varnier Rodrigues Almeida
Marcos Pereira Estellita Lins

Rio de Janeiro
Julho de 2010

DEFINIÇÃO DAS RESTRIÇÕES AOS PESOS EM ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (AED) POR CORRELAÇÃO CANÔNICA E REGRESSÃO LINEAR

Antonio Carlos Gonçalves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS – GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA BIOMÉDICA.

Examinada por:

____

Prof. Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida, PhD.

____

Prof. Reinaldo Castro Souza, Ph.D.

____

Prof. Antonio Maurício Ferreira Leite Miranda de Sá, D.Sc.

____

Prof. José Leonardo Ribeiro Macrini, D.Sc.

____

Prof. Wagner de Souza Tassinari, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JULHO DE 2010

Gonçalves, Antonio Carlos

Definição das Restrições aos Pesos em Análise Envoltória de Dados (AED) por Correlação Canônica e Regressão Linear / Antonio Carlos Gonçalves.- Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

VII, 82 p.:il.;29,7cm.

Orientadores: Renan Moritz Varnier Rodrigues de Al-Meida

Marcos Pereira Estellita Lins

Tese (doutotado) – UFRJ/ COPPE/Programa de Engenharia Biomédica, 2010.

Referencias Bibliográficas: p.33 – 38.

1.Análise envoltória de dados. 2. Correlação Canônica. 3. Pesos. I. Almeida, Renan Moritz Varnier, *et al.* II.Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Proma de Engenharia Biomédica. III. Título.

Agradecimentos

Ao Professor Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida, por ter acreditado na ideia inicial deste trabalho e pela orientação brilhante durante todo o tempo.

Ao professor Marcos Pereira Estellita Lins pela oportunidade de poder participar dos primeiros cursos de Análise Envoltória de Dados, objeto desta Tese.

A minha família que tanto insistiu para eu não desistir e aos tantos amigos que sempre acreditaram na minha capacidade, em especial aos amigos Castro e Janaína.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

DEFINIÇÃO DAS RESTRIÇÕES AOS PESOS EM ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS (AED) POR CORRELAÇÃO CANÔNICA E REGRESSÃO LINEAR

Antonio Carlos Gonçalves

Julho/2010

Orientadores: Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida
Marcos Pereira Estellita Lins.

Programa: Engenharia Biomédica

Este trabalho desenvolve dois procedimentos para especificar restrições aos pesos em Análise Envoltória Dados, aplicadas aos métodos de *Wong e Beasley* e *Cone Ratio.* Para os limites de Wong e Beasley são utilizados os coeficientes de uma Análise de Correlação Canônica, e, para as relações do Cone Ratio, são usados os limites dos intervalos de confiança de uma Regressão Linear desenvolvida a partir das variáveis do modelo DEA. É mostrada a aplicabilidade do método na avaliação de hospitais SUS das capitais brasileiras e da cidade do Rio de Janeiro. Para os primeiros, foram estudadas, em suas clínicas médicas, a taxa de mortalidade geral, o tempo médio de permanência, o valor médio pago e o percentual de doenças correspondentes a neoplasias, doenças infecciosas e doenças circulatórias. Para os hospitais do Rio estudaram-se as cirurgias gástricas como função do número de leitos e do tempo de permanência no hospital. Os resultados mostraram a adequação de ambos os procedimentos, com limites coerentes para as restrições desenvolvidas e com a geração de uma base final de pesos mais homogênea.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

DEFINITION OF RESTRICTIONS ON WEIGHTS IN ENVELOPMENT IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (DEA) BY CANONICAL CORRELATION AND LINEAR REGRESSION

Antonio Carlos Gonçalves

July/2010

Advisors: Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida
Marcos Pereira Estellita Lins.

Department: Biomedical Engineering

This work presents two procedures for the specification of weight restrictions in Data Envelopment Analysis (DEA), which were applied to the *Wong and Beasley* and *Cone Ratio* methods. The coefficients of a Canonical Correlation Analysis were used for the Wong and Beasley method, while the Cone Ratio limits were based on the confidence interval limits derived from a Linear Regression developed with the DEA variables. The methods were applied to the evaluation of public hospitals in Brazilian state capitals and in the city of Rio de Janeiro, Brazil. For the medicine clinics of the former, the mortality rates, length of stay, average paid values and percent of neoplasic, infectious and circulatory diseases were studied. For the latter, gastric surgeries were studied as a function of the hospital number of beds and the patient's length of stay. The results showed that the methods were both suitable, with the identification of consistent restriction limits for both procedures and a more homogeneous set of weights.

ÍNDICE

1. Introdução..1

2.Objetivo...................................... 4

3. Revisão da Literatura..5

4. Fundamentos Teóricos...9

4.1 O Modelo "*Constant Returns to Scale*" – CRS…………………….................9

4.2 Análise de Correlação Canônica (ACC)...13

4.3 Regressão Linear Múltipla (RLM)..16

4.4 Obtenção dos Limites das Restrições Adicionais do Método Wong e Beasley.17

4.5 O Método"Cone Ratio" e o Intervalo de Confiança......................20

4.6 Materiais e Métodos...21

5. Resultados..24

6. Discussão..27

7. Conclusões e Futuras direções..31

8. Referências...33

9. Anexos…………………………………………………….....................................39

1. Introdução

A Análise Envoltória de Dados (AED), introduzida por CHARNES *et al.* (1978) e estendida por BANKER *et al*. (1984), é uma metodologia não-paramétrica para estimar a eficiência relativa de unidades observadas (as unidades tomadoras de decisão – *Decision Making Units*- DMUs), com entradas e saídas comuns. Essa eficiência é definida a partir do desempenho observado das DMUs nas variáveis analisadas, sendo uma medida empírica, e, não, uma referência teórica ou conceitual. Isto faz com que seus escores sejam uma medida de comparação mais adequada (incorpora na análise múltiplas entradas e/ou saídas) do que indicadores mais comumente usados (p.ex. número de procedimentos/tempo ou taxas de mortalidade) que podem ser dependentes de características específicas de uma população (LINS e MEZA, 2000, MARINHO, 1998).

O aspecto fundamental do método estabelecer uma "região comum" (restrições) com base nos dados, criando um índice de eficiência (classificação) por meio de vetores de pesos distintos, que refletem a importância de cada variável para cada DMU, e que busca, nessa região, as unidades com um comportamento mais otimizado. O valor máximo deste índice (para cada DMU) é então assumido como um "máximo empírico" de eficiência, a partir do qual uma classificação relativa das unidades torna-se possível (MARINHO, 1998). O método também fornece valores ótimos que as variáveis devem assumir para que as DMUs, possam mudar de "ineficientes" para "eficientes".

Na área da saúde, a AED tem sido utilizada, por exemplo, para estabelecer padrões de referência para hospitais, clínicas, serviços de saúde ou mesmo cirurgiões, em vários países (CHILINGERIAN, 1996, DEXTER, 2004, FELDER, 2004, KIRIGIA, 2004, RETZLAFF – ROBERTS, 2004, VALDMANIS, 2004).

No entanto, a formulação original do modelo AED (CHARNES *et a*l., 1978) permite a variação completa dos pesos (modelo irrestrito), acarretando como problema que valores dos pesos assim obtidos podem apresentar contradições à luz de informações anteriores, e, até mesmo, levar a que variáveis importantes para a análise sejam descartadas (estabelecimento de peso zero). Adicionalmente, a flexibilidade total na seleção dos pesos permite que as DMUs possam representar circunstâncias particulares, o que é contraditório com a suposição de serem elas unidades homogêneas (consistentemente semelhantes). Portanto, o interesse encontra-se em estabelecer limites nos quais esses pesos podem variar, permitindo certa coerência em seus valores, os quais podem, então, ser utilizados na formação dos escores de eficiência. Esses limites representam restrições adicionais na formulação original do modelo.

Embora métodos de restrição aos pesos em AED tenham sido desenvolvidos para lidar com esse problema, nenhum deles aborda a maneira de como especificar os valores para os limites de restrição, propondo, em lugar disso, que um perito ou tomador de decisão diretamente, e subjetivamente, indique os valores vinculados aos intervalos em que os pesos devem variar. Na prática, isto é inviável na maioria dos casos, e pode introduzir um sério viés nos modelos assim estimados.

O desenvolvimento deste trabalho teve como ponto de partida os artigos de SENGUPTA (1990) e FRIEDMAN e SINUANY - STERN (1997), que comparam as classificações obtidas pela AED e pela Análise de Correlação Canônica (ACC) em um estudo de 21 departamentos da Universidade de Ben-Gurion em Israel, mostrando que as duas classificações não diferiam significativamente em relação à ordem dos departamentos. Nesse mesmo trabalho, para evitar pesos de valor zero, os autores sugerem que restrições aos pesos na AED poderiam ser construídas ao redor dos pesos comuns da ACC. É sabido que a Análise de Correlação Canônica é o método de escolha para a identificação da correlação máxima entre combinações lineares dos dois conjuntos de variáveis (SENGUPTA, 1990). Mais especificamente, FRIEDMAN e SINUANY- STERN (1998), considerando o trabalho desenvolvido por SENGUPTA (1990) sobre testes estatísticos para especificar uma estrutura de variáveis para a AED, propôs o uso de variáveis cujos coeficientes das combinações lineares (pesos canônicos) de entradas e saídas fossem estritamente positivos: *Se algum peso é negativo, isso pode indicar que, em média, a variável relevante não contribui positivamente para a entrada ou saída, indicando para o tomador de decisão que a maioria das unidades está mal representada naquela variável, justificando compulsoriamente a sua omissão* (FRIEDMAN e SINUANY- STERN,1998), página 783.

O texto a seguir consiste das seguintes seções: Objetivo; Revisão de literatura abordando o contexto histórico do julgamento das variáveis (restrições aos pesos) e aplicações na área de saúde; Metodologia do desenvolvimento dos fundamentos teóricos para a especificação dos limites de pesos, Resultados, Discussão, Conclusões e Anexos contendo os artigos (publicado e submetidos).

2. Objetivo

O objetivo deste trabalho é apresentar metodologias que permitam corrigir a deficiência empírica (pesos “zeros”) do modelo AED irrestrito, que, como mencionado, pode fazer com que variáveis relevantes para a formação dos escores de eficiência sejam erroneamente descartadas. Para tal, pretende-se que a definição dos intervalos de variação dos pesos seja feita de forma objetiva e estatisticamente coerente com o que preceitua a AED (aumento de *entradas* deve refletir em aumento de *saídas)*.

Para tal, os métodos de restrição de WONG e BEASLEY (1990) e “Cone Ratio” (CHARNES *et al*., 1990) e os modelos de Análise de Correlação Canônica (ACC) e Regressão Linear Múltipla (RLM) foram empregados para avaliar a clínica médica dos hospitais do SUS das capitais brasileiras e a clínica cirúrgica dos mesmos hospitais (SUS) da cidade do Rio de Janeiro, respectivamente. Adicionalmente, buscou-se um procedimento de definição de limites que evitasse a inviabilidade do modelo de programação linear da AED.

3. Revisão da Literatura

A história da AED começa com a dissertação (Ph.D) de Edward Rhodes, tendo como orientador W. W Cooper, publicada em 1978 (CHANES *et al.*, 1978). O problema abordado na tese era o de comparar a eficiência de escolas públicas (Decision Making Units – DMUs), desenvolvendo um modelo para estimar sua eficiência sem recorrer ao arbítrio de pesos para cada variável de entrada ou saída. O método foi baseado em algoritmos de maximização matemática, e, com o empenho de Charnes e Cooper, os modelos AED ganharam maior divulgação. Esses modelos ganharam a denominação de modelo original CCR (sigla para Charnes, Cooper e Rhodes).

No Brasil, um dos primeiros trabalhos na área da saúde é atribuído a MARINHO (1998), em um estudo envolvendo seis variáveis de produção (entradas e saídas) de seis hospitais públicos e privados. Como a AED requer DMUs homogêneas para serem avaliadas, GONÇALVES (2001a) propôs a aplicação não em um hospital como um todo, mais a clínicas (médica e cirúrgica) de hospitais, usando variáveis qualitativas (taxa de mortalidade, tempo médio de permanência, e vários tipos de doenças). O autor também desenvolveu um estudo de eficiência e cobertura das ações básicas do Programa de saúde bucal da prefeitura da cidade do Rio de Janeiro (GONÇALVES, 2001b) usando a Análise de Correlação Canônica (ACC) para a seleção de variáveis. Esse mesmo trabalho foi estendido por LINS *et al.* (2004) usando Análise de Componentes Principais para projetar uma DMU na fronteira eficiente.

Como mencionado, em termos metodológicos, um problema que logo foi identificado diz respeito à variação (flexibilidade) total dos pesos das variáveis utilizadas na AED. Assim, como variáveis (entradas ou saídas) de menor importância podem dominar o estabelecimento da eficiência de uma DMU, isto é, podem ter um alto peso, outras de maior importância podem assumir peso zero (LINS e MEZA, 2000).

THOMPSON *et al.* (1986), foram os primeiros a propor o uso de restrições aos pesos para aumentar a capacidade discriminativa na AED. No caso, o problema referia-se a identificar a localização ideal de um laboratório de alta energia física no Texas e avaliar as vantagens de suas possíveis localizações. Seis locais viáveis foram identificados e uma análise comparativa foi feita através da aplicação da AED, incorporando o custo do projeto, tempo de espera do usuário, e dados de impacto ambiental. Limites aceitáveis foram arbitrados para a razão dos pesos, tendo os autores concluído que Dallas seria a preferida, devido, por exemplo, ao menor impacto ambiental, enquanto o norte de Houston apresentava-se como mais sensível ao meio ambiente.

DYSON e THANASSOULIS (1988) também estavam preocupados em descartar entradas ou saídas com pesos nulos, e sugeriram a imposição de limites (restrições) em multiplicadores (pesos) individuais com base no nível das entradas por unidade de saída para algumas DMUs. CHARNES *et al.* (1990), em outra abordagem para o problema, apresentaram um método de restrição aos pesos chamado *Cone Ratio,* utilizando um exemplo baseado em unidades bancárias. Neste caso, unidades reconhecidas como eficientes foram utilizadas em um modelo irrestrito (primeira etapa) e a razão dos seus pesos gera limites para as restrições dos pesos que são compatíveis com o problema de programação linear da AED da segunda etapa.

Para evitar o problema de restringir diretamente os pesos, que são dependentes das unidades de medidas das entradas e saídas, WONG e BEASLEY (1990) propuseram restringir percentuais de entradas e saídas *virtuais*, isto é, a entrada ou saída multiplicada por um peso e dividida pela soma de todas as entradas/saídas. HALME *et al*. (1999) oferecem, ainda, uma outra alternativa para incorporar as preferências do tomador de decisão para a avaliação das DMUs. Nesse processo, o tomador de decisão aponta uma combinação preferida de entradas e saídas de DMUs eficientes, e, a seguir, a eficiência de cada DMU é determinada em relação a essa solução.

Outra contribuição importante foi a de ROLL e GOANY (1991), que, para evitar a influência das unidades de medida nas restrições dos pesos, propôs a normalização dos dados, já que os pesos acompanham o nível da entrada ou saída de acordo com as unidades de medida empregada, o que não ocorre com os *pesos virtuais*, adimensionais (DYSON e THANASSOULIS, 1988). Uma das desvantagens deste método é que uma vez que os resultados são obtidos, eles devem ser transformados de volta à forma original, a fim de que seja possível sua interpretação.

CHANG e CHEN (2007) apresentam uma abordagem estatística para construir os limites inferiores e superiores dos pesos, de forma a diminuir a variação na ponderação das entradas e saídas. O método consiste em construir intervalos utilizando a média e o desvio padrão dos pesos de DMUs eficientes, estabelecendo em um segundo estágio estes limites. Este procedimento permite incorporar a opinião de especialistas na estrutura que está sendo analisada, por meio da introdução de uma constante que também define a amplitude do intervalo de variação. WANG *et al.* (2009), propõe uma nova metodologia para a classificação de unidades de tomada de decisão. A variação mínima apropriada, na qual os pesos das entradas e saídas devem variar, é arbitrada por um especialista, e esta informação é usada em uma série de Problemas de Programação Linear (PPL) que são construídos especificamente para determinar um peso máximo para cada unidade AED-eficiente. Assim, para cada unidade eficiente é formulado um PPL e um peso máximo para cada entrada e saída é calculado. Em outro estágio, estes limites são utilizados como restrições aos pesos, e, no final do processo, o método permite controlar quantas unidades devem ser mantidas eficientes de acordo com exigências de aplicações reais (ou seja, uma variação mínima é arbitrada).

A crítica geral a essas metodologias é que, embora reconhecendo a importância do problema das restrições, estes métodos não abordam a questão de forma totalmente objetiva, propondo, em vez disso, que um pesquisador deve diretamente, e, subjetivamente, arbitrar como devem se comportar as entradas e saídas e seus respectivos pesos. Portanto, os resultados do modelo original (a classificação) podem ainda ser alvo de críticas por não representarem adequadamente um modelo plausível para as unidades estudadas.

Já os métodos de restrição a seguir foram propostos no sentido de encontrar uma base comum de pesos para todas as DMUs, uma ideia que começou com ROLL *et al.* (1991) e tem sido gradualmente aceita nos últimos anos (MAKUI, 2008). Assim, SAATI (2005), preocupado com o conjunto de pesos que é gerado diferentemente para cada DMU, sugeriu encontrar uma base comum por meio de uma função objetivo construída a partir dos próprios pesos, sob a alegação de que em alguns casos é inaceitável construir a classificação da AED com pesos muito diferentes para uma mesma entrada ou saída. O modelo original, na busca da solução ótima, pode atribuir pesos "excessivos" para entradas ou saídas, ou, como dito, pesos zeros para variáveis importantes, o que prejudica a classificação estabelecida pela AED. MAKUI (2008) argumenta, seguindo SATTI (2005), que a flexibilidade dos pesos do método original da AED impede a comparação entre DMUs em uma mesma base e, portanto, propõe o uso da Programação Linear Multi-objetivo para a geração de um conjunto comum de pesos no âmbito da AED.

4. Fundamentos Teóricos

4.1 O Modelo "*Constant Returns to Scale*" – CRS (formulação original)

Como mencionado, a AED, por meio de uma comparação entre Unidades Tomadoras de Decisão (DMUs) gera uma classificação a partir de pesos atribuídos para as entradas e saídas do modelo. Assim, a AED examina as quantidades de entradas consumidas e saídas produzidas por um número de unidades homogêneas (as unidades tomadoras de decisão – *decision making units*- DMU_s). A partir do desempenho observado das DMU_s uma fronteira de produção eficiente é então construída, de tal maneira que a eficiência de cada unidade é medida em relação a essa fronteira (Figura 1). No caso de uma unidade com um único par *entrada –saída*, a eficiência da unidade pode ser definida simplesmente como a razão *saída/entrada*. No caso de várias entradas e/ou saídas, a eficiência (ótica da entrada) é a razão entre a soma ponderada das saídas e a soma ponderada das entradas, e uma medida original dessa eficiência é (CHARNES *et al*., 1978):

$$h_0 = Max \frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj_0}}{\sum_{i=i}^{m} V_i x_{ij_0}} \qquad \textbf{(1)}$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}} \leq 1, \text{ j} = 1,...,\text{n} \qquad \textbf{(2)}$$

$U_r, V_i \geq \varepsilon$ (ε é um número positivo infinitesimal), $\forall_r$ e $\forall_i$, são os pesos (multiplicadores) a serem determinados e $y_{rj}, x_{ij} > 0$ são as saídas e entradas conhecidas da j-ésima DMU, $U_r =$ o peso dado à saída r, $V_i =$ o peso dado à entrada i, $n =$ o número de unidades, $s =$ o número de saídas, $m =$ o número de entradas. Para cada DMU, formula-se um problema de otimização com o objetivo de determinar os valores dos multiplicadores (U_r e V_i - importância relativa de cada variável). Essa determinação é feita de modo que a DMU sob análise tenha a maior eficiência possível, ou seja, maximizando a soma ponderada das saídas (saída virtual) dividida pela soma ponderada das entradas (entrada virtual) da DMU em estudo **(1)**, sujeita à restrição **(2)** de que esse quociente seja menor ou igual que 1 (logo, as eficiências variam entre 0 e 1). Este modelo (CRS) exige que crescimentos proporcionais das entradas produzam crescimentos proporcionais das saídas a fim de que uma DMU mantenha sua eficiência atual. A Figura 1 ilustra o quanto as entradas deveriam diminuir para uma DMU tornar-se eficiente.

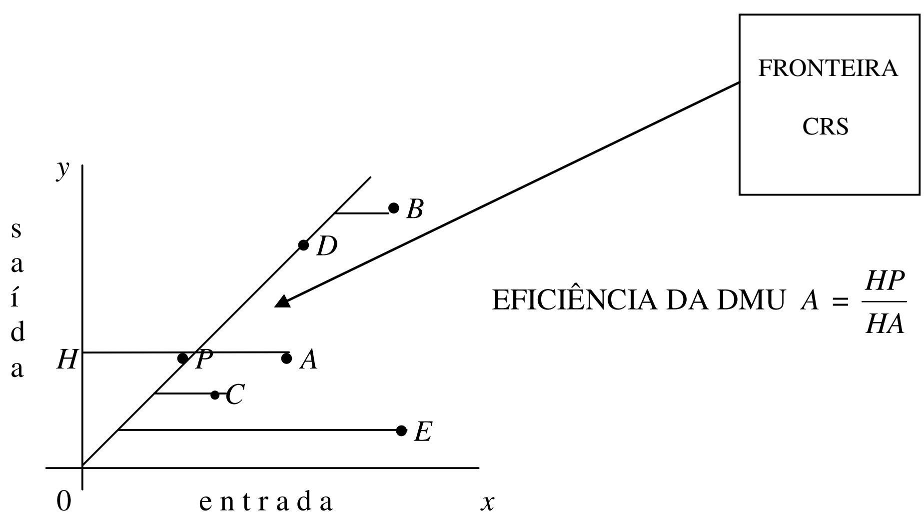


Figura 1 - AED: Fronteira CRS com a unidade D eficiente (LINS E MEZA, 2000)

Neste caso, os pontos A, B, C e E correspondem às unidades ineficientes. O ponto D é a unidade eficiente que está sobre a reta que representa a fronteira eficiente CRS, e o deslocamento de A para a fronteira eficiente (ponto P) implicaria no valor ótimo da entrada (alvo) que tornaria esta unidade eficiente.

Introduzindo as *restrições adicionais proporcionais* (3) pelo método de WONG e BEASLEY (1990), tem-se:

$$h_0 = Max \frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj_0}}{\sum_{i=i}^{m} V_i x_{ij_0}}$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}} \leq 1,\ j = 1,........,n$$

$a_r \leq \dfrac{U_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}} \leq b_r$ e $c_i \leq \dfrac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}} \leq d_i$ (*restrições adicionais proporcionais das saídas e entradas virtuais*) **(3)**

A formulação do modelo dos multiplicadores acima, torna-se:

$$h_0 = Max \sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj_0} \qquad \textbf{(4)}$$

Sujeito a:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{\mathrm{i}=1}^{m} V x_{ij_0} = 1, \\
\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij} \leq 0, j = 1,.....,n \\
i, \\
V_i x_{ij} - c_i \sum_{i=1}^{m} V x_{ij} \geq 0, \forall_{ij} \\
-V_i x_{ij} + d_i \sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij} \geq 0, \forall_{ij} \\
U_r y_{rj} - a_r \sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} \geq 0, \forall_{rj}, \\
-U_r y_{rj} + b_r \sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} \geq 0, \forall_{rj}, \\
U_r \geq \varepsilon, \forall_r, \\
V_i \geq \varepsilon, \forall_i.
\end{array}\right\} \qquad \textbf{(5)}$$

Nas formulações acima **((1), (4) e (5))** é importante lembrar que a contribuição da entrada i à DMU_{j_0} é $V_i x_{ij_0}$ (entrada virtual) e $U_r y_{rj_0}$ a contribuição da saída r (saída virtual). Como será visto, o presente trabalho desenvolverá métodos objetivos para a definição desses pesos, que serão determinados com a ajuda de uma Análise de Correlação Canônica (ACC) no caso de saídas múltiplas ou por uma Regressão Linear Múltipla (RLM) no caso de uma única saída. Assim, os pesos da ACC ou da RLM estabelecem a relevância estatística das entradas e saídas, o que, conseqüentemente, acarreta em incluir entradas e saída(s) que contribuem de maneira significativa para a formação dos escores de eficiência.

É fácil verificar, pelo problema dual do modelo sem restrição (na ausência da restrição **(3)** aos pesos), que a medida ótima de eficiência h_0^* (escore de eficiência **(1)**) representa o fator (1-h_0^*) radial de redução da entrada atual para tornar uma unidade sob análise ineficiente em eficiente (ALLEN *et al.*, 1997). Portanto, o fator (1-h_0^*)

representa a quantidade percentual de redução que deve ser aplicada a todas as entradas de uma DMU sob análise, para torná-la eficiente no novo problema.

4.2 Análise de Correlação Canônica (ACC)

A ACC, desenvolvida por Hotelling em 1936, estuda as relações lineares entre dois grupos (X e Y) de variáveis (entradas e saídas), e sua preocupação fundamental é encontrar o par de combinações lineares de X e Y que possua correlação linear máxima (BOUROCHE E SAPORTA, 1980). Por exemplo, a partir do esquema mostrado na Tabela 1, a combinação linear das variáveis de X e Y é definida como:

$$
\begin{aligned}
& z = V_1 x_{1j} + V_2 x_{2j} + \ldots.. + V_m x_{mj} \\
& \quad j = 1, \ldots.. n \\
& w = U_1 y_{1j} + U_2 y_{2j} + \ldots.. + U_s y_{sj}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(6)}
$$

Tabela 1. Estrutura das unidades e variáveis em uma Análise de Correlação Canônica. Similarmente essas variáveis podem ser consideradas como entradas e saídas em uma AED (X entradas, Y saídas).

Grupos /Unidades	$X\ (x_{1j}, x_{2j}, \ldots\ldots, x_{mj})$	$Y\ (y_{1j}, y_{2j}, \ldots\ldots, y_{sj})$
1	$x_{11}, x_{21}, \ldots\ldots, x_{m1}$	$y_{11}, y_{21}, \ldots\ldots, y_{s1}$
2	$x_{12}, x_{22}, \ldots\ldots, x_{m2}$	$y_{12}, y_{22}, \ldots\ldots, y_{s2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$x_{1n}, x_{2n}, \ldots\ldots, x_{mn}$	$y_{1n}, y_{2n}, \ldots\ldots, y_{sn}$

Os coeficientes V_i, $i = 1,2,......,m$ e $U_r, r = 1,2,......,s$ (pesos canônicos) devem ser obtidos de forma que o quadrado da correlação entre z e w, $r^2(z,w)$, apresente seu valor máximo, o que ocorre quando a projeção do vetor z em W (espaço vetorial das combinações lineares das saídas e w em Z (espaço vetorial das combinações lineares das entradas) são ortogonais. A Figura 2 indica como isto ocorre.

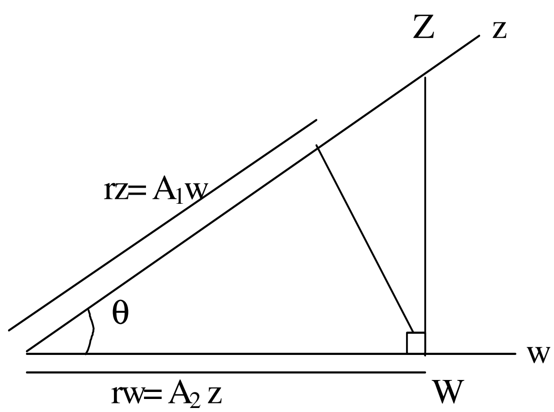


Figura 2. Projeção do vetor z em W (espaço vetorial das combinações lineares das saídas) e w em Z (espaço vetorial das combinações lineares das entradas - projeções formando um ângulo reto).

Suponha-se que as variáveis dos dois grupos sejam linearmente independentes, isto é, *rank* de $X_{mxn} = m$ e *rank* de $Y_{sxn} = s$. A matriz A_{1nxn} é o projetor ortogonal de w_{nx1} e A_{2nxn} o projetor ortogonal de z_{nx1}, isto é, A_1 projeta w no subespaço de Z e vice-versa. O vetor w deve ser colinear com a projeção ortogonal de z em W (vetor que faz um ângulo mínimo com z). Esta condição é expressa como: $A_2 z = rw$, em que $r = \cos(z,w)$ (cosseno de z e w) e A_2 é o operador de projeção ortogonal em W. Tem-se, de maneira similar, que $A_1 w = rz$, e daí, pode-se deduzir que: $A_1 A_2 z = r^2 z$ e $A_2 A_1 w = r^2 w$. Conseqüentemente, z e w são respectivamente autovetores dos operadores $A_1 A_2$ e $A_2 A_1$ associados ao maior autovalor $\lambda_1 = r^2 = \cos^2(z,w)$. Da álgebra vetorial, sabe-se que os vetores encontrados a partir deste critério formam um cosseno máximo, conseqüentemente uma correlação máxima, e z e w são chamadas de variáveis canônicas e $r(z,w)$ de correlação canônica. Essas variáveis canônicas, podem ser escritas segundo as equações $A_2 z = rw$ e $A_1 w = rz$ (Figura 2) da seguinte forma:

$$z = \frac{A_1 w}{\sqrt{\lambda}}$$

Da mesma forma deduz-se:

$$w = \frac{A_2 z}{\sqrt{\lambda}}$$

Como foi dito, as variáveis canônicas são os autovetores de $A_1 A_2 (A_2 A_1)$ associados aos autovalores ordenados em ordem decrescente. A cada etapa, é gerado um par de variáveis associado ao maior autovalor (λ_i). As matrizes A_1 e A_2 e os vetores dos pesos canônicos são obtidos por:

$$A_1 = X^t (XDX^t)^{-1} XD$$

Por analogia:

$$A_2 = Y^t (YDY^t)^{-1} YD$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_{11}^{-1} S_{21} U$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_{22}^{-1} S_{12} V \text{ , onde}$$

$$S_{11} = XDX^t$$

$$S_{22} = YDY^t$$

$$S_{21} = XDY^t$$

Isto é, V_{mx1} e U_{sx1} são deduzidos um do outro por transformação linear, sendo D_{nxn} uma matriz diagonal de ponderação das variáveis e X^t e Y^t as matrizes transpostas de X e Y, respectivamente.

4.3 Regressão Linear Múltipla (RLM)

O conhecido modelo de Regressão Linear Múltipla tenta representar a relação entre duas ou mais variáveis (chamadas preditoras, insumos, independentes ou explicativas) e uma variável dependente (resposta), por uma equação linear de ajuste aos dados. As variáveis independentes são comumente representados como $x_{ij}\,(i = 1,.....,m;\, j = 1,.....,n)$, e a variável dependente como y_j (KRZANOWSKI, 1998, GUJARATI, 2000).

O modelo de regressão da população para m variáveis explanatórias x_{1j}, $x_{2j},\ldots..,x_{mj}$ é $y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + ... + \beta_m x_{mj} + e_j$, e o modelo descreve como a média da variável resposta y_j muda com as variáveis independentes. Assim os valores observados de y variam em torno da média de y_j, cujos desvios-padrão, por hipótese, são iguais. Os valores ajustados $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1,.....,\hat{\beta}_m$ estimam $\beta_0, \beta_1,.....,\beta_m$ por valores amostrais.

Desde que os valores observados de y_j variam em torno de suas médias populacionais μ_j, o modelo de regressão múltipla pode ser expresso como observação **= ajuste + resíduo**, em que “ajuste” representa $\beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + ... + \beta_m x_{mj}$; e “resíduo”, também chamado “erro”, representa os desvios (e_j) dos valores observados y_j das suas médias populacionais μ_j. Os resíduos são por hipótese distribuídos normalmente com média 0 e desvio padrão σ (se estas hipóteses não podem ser satisfeitas, outra estratégia de modelagem deve ser adotada). Os valores ajustados usando as estimativas $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1j} + \hat{\beta}_2 x_{2j} + ... + \hat{\beta}_m$ são representados por $\hat{y}_j$, e as estimativas residuais $\hat{e}_j$ são dadas por $y_j - \hat{y}_j$ (a diferença entre os valores observados e ajustados em uma amostra). O modelo de regressão linear múltipla é usualmente estimado minimizando a soma dos quadrados dos resíduos (método dos mínimos quadrados).

No teste de significância para as variáveis independentes, a hipótese de nulidade é que β_i, é igual a zero; e o teste t é baseado na estatística $\frac{\hat{\beta}_i}{S(\hat{\beta}_i)}$ (o estimador do parâmetro β_i dividido por seu erro-padrão), que segue uma distribuição Student-$t_{(n-m-1)}$ quando o modelo é estimado de uma amostra de tamanho n e tem m variáveis independentes. Um intervalo de confiança para um parâmetro β_i pode ser computado como: $\hat{\beta}_i \pm t^* S(\hat{\beta}_i)$; com t^* o respectivo valor crítico da distribuição t para 95% de grau de confiança (KRZANOWSKI, 1998, GUJARATI, 2000).

4.4. Obtenção dos Limites das Restrições Adicionais do Método Wong e Beasley

As restrições adicionais das saídas/entradas virtuais proporcionais dadas por (3) podem ser introduzidas na AED de maneira a refletir um julgamento da importância relativa das variáveis de acordo com os valores de saídas e entradas da j-ésima DMU, respectivamente. Conceitualmente, a saída virtual r é definida como $U_r y_{rj}$, que representa a contribuição da saída r para a DMU j, e analogamente o mesmo pode ser dito para uma entrada i.

Os limites a_r, b_r, c_i, d_i das restrições adicionais proporcionais das saídas e entradas virtuais **(3)** são obtidos *a priori,* substituindo os pesos das variáveis canônicas da primeira etapa (maior correlação) da ACC, nas proporções $\dfrac{U_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}}$ e $\dfrac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i X_{ij}}$

$\forall_{i,j}$; e geram um valor para cada DMU. Obviamente, tem-se, para cada variável, um conjunto de *n* valores, e o mínimo e o máximo **(7)** de cada conjunto definem os limites e a importância ou julgamento de cada variável na AED, sem a interferência direta de um decisor.

Assim, definindo U_r^1 e V_i^1 os pesos canônicos da primeira etapa, para as respectivas variáveis de entrada e saída, as proporções acima tornam-se:

$$\frac{U_r^1 y_{rj}}{w_r^1 = \sum_{r=1}^{s} U_r^1 y_{rj}} \text{ e } \frac{V_i^1 x_{ij}}{z_i^1 = \sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}}, \text{ sendo:}$$

$$a_r = \min \frac{U_r^1 y_{rj}}{w_r^1} \text{ e } b_r = \max \frac{U_r^{11} y_{rj}}{w_r} \; ; \; c_i = \min \frac{V_i^1 x_{ij}}{z_i^1} \text{ e }$$

$$d_i = \max \frac{V_i^1 x_{ij}}{z_i^1}, \; j = 1 \ldots n \tag{7}$$

Resolvendo, **(3)** para U_r and V_i, obtém-se:

$$\frac{w_r^1 a_r}{y_{rj}} \leq U_r \leq \frac{w_r^1 b_r}{y_{rj}} \text{ e } \frac{z_i^1 c_i}{x_{ij}} \leq V_i \leq \frac{z_i^1 d_i}{x_{ij}}, \tag{8}$$

sendo w_i^1 e z_i^1 as primeiras variáveis canônicas obtidas **(6),** e as desigualdades **(8)** definidas estatisticamente**.** Como os limites são escolhidos pelo mínimo e pelo máximo **(7),** tendem a não ser muito próximos para a maioria dos casos, o que segundo SARRICO (2004) evita a inviabilidade do modelo de programação linear da AED.

Dado que esses pesos, obtidos da correlação máxima entre os conjuntos, indicam a importância de cada variável em um modelo AED (lembrando que crescimentos proporcionais das entradas deverão produzir crescimentos proporcionais das saídas), eles podem ser utilizados para gerar intervalos de restrição das entradas e saídas virtuais proporcionais. Ou seja, o conjunto de pesos das entradas e saídas da ACC pode ser interpretado como o grau de ligação entre estas variáveis, e, conseqüentemente, como a AED exige associações no mesmo sentido, estariam excluídas aquelas que não contribuem, p. ex., no caso das entradas, para um aumento das saídas (SENGUPTA, 1990, FRIEDMAN e SINUANY- STERN, 1998).

Além disso, as variáveis de saída e entrada devem ser padronizadas para evitar influências devido ao grau de "magnitude". No caso particular em que r = 1, tem-se apenas uma variável de saída, cujo valor total de contribuição é 100% para a DMU_j ($U_r = 1$). A equação de regressão para *m* entradas x_{1j}, x_{2j},….., x_{mj} é:

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + ...+ \beta_m x_{mj} + \varepsilon_j \qquad \textbf{(9)}$$

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1,....., \hat{\beta}_m$ são as estimativas dos parâmetros $\beta_0, \beta_1,....., \beta_m$. Os limites c_i e d_i **(7)** são definidos *a priori,* substituindo os coeficientes estimados $\hat{\beta}_i = V_i^1$ das variáveis regressoras (entradas), na proporção $\dfrac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}}$ $\forall_{i,j}$, Daí, tem-se para $j = 1...n$

$$c_i = \min \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}} \quad \text{e} \quad d_i = \max \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}} \qquad \textbf{(10)}$$

Como acima, os limites abaixo tendem a evitar a inviabilidade:

$$\frac{Yc_i}{x_{ij}} \le V_i \le , \frac{Yd_i}{x_{ij}} \qquad \textbf{(11)}$$

com $Y = \sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}$.

Uma vez que os $V_{is}^{1} > 0$ e estatisticamente significativos indicam a importância de cada variável em um modelo AED, como no caso da ACC, eles podem ser utilizados para gerar intervalos de restrição das entradas virtuais proporcionais.

4.5 O Método "Cone Ratio" e o Intervalo de Confiança

O método "Cone Ratio" (CHARNES *et al.*,1990) considera o conceito de regiões de segurança (RS) desenvolvido por Thompson *et al.* (1990), e permite especificar restrições (relação entre os pesos) do tipo:

$$k_{iw} \leq \frac{V_i}{V_g} \leq k_{it}\,(i \neq g) \text{ e/ou } k_{rw} \leq \frac{U_r}{U_o} \leq k_{rt}\,(r \neq o) \qquad \textbf{(12)}$$

em que V_i e V_g representa os pesos das entradas e U_r e U_o o das saídas no modelo AED, respectivamente. Os valores k_{iw}, k_{it}, k_{rw} e k_{rt}, são tais que podem incorporar a opinião do decisor ou outra informação disponível. O nome (RS) vem destas restrições, que limitam a região dos pesos para uma área especial (compatibilidade). Como será visto abaixo (no caso em que $r = 1$), no método aqui proposto os pesos das entradas são determinados de forma objetiva, usando-se os limites dos intervalos de confiança em um modelo de Regressão Linear Múltipla.

Assim, para estabelecer restrições do tipo "Cone Ratio" **(12)** a partir dos intervalos de confiança da regressão linear múltipla no caso em que $r = 1$, consideram-se as relações entre os limites inferiores e superiores, respectivamente, dos intervalos de confiança de todas as entradas. No caso de m entradas teremos $2C_m^2$ relações da forma $(\hat{\beta}_i - t^{\bullet} S(\hat{\beta}_i)/(\beta_g - t^{\bullet} S(\hat{\beta}_g)$ e $(\hat{\beta}_i + t^{\bullet} S(\hat{\beta}_i)/(\beta_g + t^{\bullet} S(\hat{\beta}_g)$, considerando cada par de limites. Denominando por k_{iw} e k_{it} os valores mínimos e máximos encontrados, pode-se estabelecer, para os pesos correspondentes, razões do tipo $k_{iw} \leq \frac{V_i}{V_g} \leq k_{it}$, onde k_{iw}=

min(LL_1/LL_2; UL_1/UL_2); k_{it}=max(LL_1/LL_2; UL_1/UL_2) (LL e UL os limites inferior e superior dos intervalos de confiança de cada variável no modelo de regressão. Cada razão pode ser transformada em duas restrições, gerando um total de $2C_m^2$ desigualdades do tipo:

$$V_i - k_{iw}V_g \geq 0\,;\; -V_i + k_{it+}V_g \geq 0\,. \qquad \textbf{(13)}$$

Pode-se assim especificar as restrições dos pesos da forma $W(v,u) \geq 0$, em que $W(v,u) \geq 0$ é o vetor de pesos das entradas e $u = (U)$ o vetor de um elemento representando a saída do modelo. Assim, W é formada com linhas (1 -k_{iw} 0), (-1 k_{it} 0) e (0 0 1), correspondentes nas restrições aos pesos e o vetor unitário acima.

4.6 Materiais e Métodos

A partir dos trabalhos de SENGUPTA (1990) e FRIEDMAN e SINUANY-STERN (1997), citados na introdução, foi desenvolvido um procedimento para especificar os limites do método de WONG E BEASLEY (1990) usando pesos canônicos (item **4.4**) e intervalos de confiança (item **4.5**) para as restrições do método "Cone Ratio". Uma aplicação e o procedimento de obtenção dos limites de Wong e Beasley são apresentados nos artigos anexos (1) e (2), respectivamente. A comparação entre os dois métodos foi discutida no artigo anexo (3) em uma aplicação a uma amostra de hospitais, em que a regressão linear foi o modelo utilizado.

A base de dados necessária para a aplicação (Artigo 1 e 2-anexos) foi formada a partir das internações realizadas pelos hospitais do SUS das capitais do país em 2000, obtidas do Sistema de Informações Hospitalares do SUS, Datasus/MS (Tabela 1 - Artigo 1). A AED foi realizada no programa *Frontier Analyst Professional* (BANXIA, 1988). Os valores dos pesos canônicos, a correlação canônica, os intervalos de restrição dos pesos e os demais procedimentos estatísticos foram gerados no programa *Statistica* (STATSOFT INC, 2001) e no Microsoft Excel.

Para avaliar comparativamente a eficiência dos hospitais do SUS nas capitais brasileiras, foram analisadas as suas internações na categoria "clínica médica", que incluem, além das internações na clínica médica propriamente dita, as de outras sub-especialidades clínicas como: *cardiologia, endocrinologia, oncologia clínica, infectologia* e *pneumologia*. As seguintes variáveis foram utilizadas:

— Entradas: taxa de mortalidade (*mortalidade*); tempo médio de permanência no hospital (*média de permanência*);

— Saídas: percentuais de internação relativos aos três capítulos CID com maior percentual de mortalidade, respectivamente: *neoplasias*; doenças infecciosas e parasitárias (*DIP*) e doenças do aparelho circulatório (*circulatório*); valor médio pago pela Autorização de Internação Hospitalar (*AIH médio).*

A base de dados para a segunda aplicação (Artigo 3 - anexo) foi formada a partir das internações na clínica cirúrgica de 20 hospitais públicos da cidade do Rio de Janeiro em 2005. Naquele ano, esses hospitais foram responsáveis por 14.593 internações referentes a doenças de média e baixa complexidade da sub-especialidade "cirurgia gastrointestinal e de órgãos anexos". Aqui também a AED foi realizada nos programas *Frontier Analyst Professional* (BANXIA, 1988) e EMS (HOLGER SCHEEL, 2000) para os limites de restrição dos pesos do método desenvolvido por WONG e BEASLEY (1990) e o método "Cone Ratio" (CHARNES *et al,* 1990), respectivamente. Os valores das estimativas dos coeficientes das variáveis (entradas), o coeficiente de correlação, os intervalos de restrição dos coeficientes das variáveis e os demais procedimentos estatísticos também foram gerados pelo S*tatistica,* utilizando os dados da Tabela 1 desse artigo.

O modelo utilizou como entradas as variáveis: número de leitos cirúrgicos, (*número de leitos*) e dias de permanência no hospital (*permanência*) e, como saída, o número de internações de doenças de média e baixa complexidade (*internações*) da sub especialidade cirurgia gastrointestinal e de órgãos anexos. Primeiramente, uma análise de regressão foi usada e as estimativas dos coeficientes foram usadas para identificar os intervalos de restrição dos pesos dessas variáveis (entradas), necessários para a primeira AED. Uma vez especificados os limites c_i, d_i, o modelo CRS foi construído, introduzindo-se a restrição dos pesos usando a proporção virtual. A seguir, as restrições dos pesos pelo "Cone Ratio" foram geradas a partir dos intervalos de confiança das estimativas padronizadas dos coeficientes das entradas, e uma nova AED foi obtida. Isto permitiu a construção de escores de eficiência para cada método, tendo sido os hospitais, então, classificados e analisados em função desse escore.

5. Resultados

Os resultados estão detalhados em três artigos científicos anexos:

(1) DATA ENVELOPMENT ANALYSIS FOR EVALUATING PUBLIC HOSPITALS IN BRASILIAN STATE CAPITALS (Revista de Saúde Pública, v.41, n.3 (Jun), 2007 - Finalista do Prêmio de Incentivo em CIÊNCIA E TECNOLOGIA para o *SUS - 2008*)

(2) CANONICAL CORRELATION FOR THE DEFINITION OF WEIGHT RESTRICTIONS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (submetido ao Annals of Operations Research em 02/10/2009)

(3) DEFINING WEIGHT RESTRICTION LIMITS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS THROUGH LINEAR REGRESSION WITH AN APPLICATION IN HOSPITAL EVALUATION (submetido ao Central European Journal of Operations Research em 28/12/2009)

Como mencionado, o objetivo do primeiro desses (GONÇALVES, *et al*., 2007) foi aplicar a técnica de Análise Envoltória de Dados na avaliação de hospitais do SUS das capitais brasileiras e usar na definição dos limites dos intervalos de WONG E BEASLEY (1990), para todas as DMUs, os pesos canônicos. Aqui, os pesos canônicos, coerentes com os preceitos da AED (aumento de *entradas* devem refletir em aumento de *saídas* (Artigo 1 - Tabela 2), forneceram, com os intervalos considerados, uma classificação em que as grandes capitais aparecem fora da fronteira de eficiência (artigo 1 - Tabela 3). Destacaram-se as doenças do aparelho circulatório, com 23,6% das internações nos hospitais estudados. Das 27 capitais, quatro alcançaram 100% de eficiência (Palmas, Macapá, Teresina e Goiânia).

No segundo trabalho, o propósito foi desenvolver os fundamentos teóricos para especificar os limites dos intervalos de WONG E BEASLEY (1990) para todas as DMUs (item **4.4**). Nesse trabalho também foi observado que a variabilidade dos pesos virtuais proporcionais, após a aplicação da AED no modelo restrito é bem menor que aquelas do modelo irrestrito (Artigo 2 - Figura 1). Por exemplo, no modelo irrestrito a variação dos pesos da taxa de mortalidade e o tempo médio de permanência foi de 0 - 100%, enquanto no modelo restrito as variações situaram-se na faixa de 16-26% e 72 – 84%. Adicionalmente, foram construídos intervalos de confiança para os escores de eficiência seguindo-se a metodologia proposta por SIMAR e WILSON (1998) (Tabela 2).

No terceiro, a idéia foi desenvolver outro procedimento de restrição aos pesos e realizar uma comparação com o procedimento inicial aplicado ao método Wong e Beasley. Como discutido, utilizou-se o método do "Cone Ratio" (CHARNES, *et al.*, 1990) e os dados de internações na clínica cirúrgica de 20 hospitais públicos da cidade do Rio de Janeiro em 2005. Os resultados estão na tabela 3 desse artigo e indicam que houve pouca diferença na classificação dos hospitais, considerando-se os dois procedimentos de restrição aos pesos.

Adicionalmente, outros artigos envolvendo a AED foram produzidos no decorrer da tese:

1. Avaliação de Desempenho de um Programa de Saúde Bucal por meio da Análise Envoltória de Dados, publicado nos *Anais do XX Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica e II Congresso Brasileiro de Engenharia Clínica* (Outubro/2006).
2. Limites de Restrição dos Pesos do Método de Wong e Beasley em Análise Envoltória de Dados, publicado nos *Anais do XXI Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, IV Congresso de Engenharia Clínica e VI Fórum de Tecnologia Aplicada à Saúde* (Novembro/2008).

No primeiro (GONÇALVES *et al.*, 2006) o objetivo principal foi avaliar a eficiência e a cobertura das Regiões Administrativas (RAs) do Município do Rio de Janeiro com respeito às ações básicas em Odontologia, usando a Análise Envoltória de Dados. Conseguiu-se mostrar, por meio dos resultados de eficiência e cobertura das unidades (RAs), que embora algumas ultrapassem a meta de produção, a maioria não aproveita bem os seus recursos. Esse artigo introduz, ainda, um novo conceito de cobertura, o qual leva em conta também a renda da população alvo, o que permite uma melhor explicação da demanda por serviços públicos de saúde em determinada região. Entretanto, a maior inovação consistiu em integrar dois indicadores, normalmente utilizados separadamente por órgãos como o Ministério da Saúde o Secretarias Municipais de Saúde: cobertura e produtividade. Os resultados desta avaliação serviram como apoio aos gestores do Programa de Saúde Bucal da Secretaria Municipal de Saúde do Rio de Janeiro, auxiliando nas decisões de economia de recursos, remanejamento de mão-de-obra e cobertura da população alvo nos padrões exigidos.

O segundo desses artigos adicionais (GONÇALVES *et al.*, 2008) teve como objetivo explorar introdutoriamente o uso dos coeficientes padronizados da Regressão Linear Múltipla na especificação dos limites do método de restrição aos pesos em AED, estabelecidos por WONG e BEASLEY (1990). Esses coeficientes foram usados para identificar os intervalos de restrição dos pesos das entradas para a AED. Assim, os intervalos de restrição foram obtidos a partir das próprias características (valores) das variáveis.

6. Discussão

Neste trabalho, buscou-se uma forma objetiva para especificar limites de restrição aos pesos na AED que levasse em conta a informação estatística das variáveis em estudo, e, ao mesmo tempo, tentar obter desigualdades compatíveis para a aplicação destas restrições a todas as DMUs **(8)**. Para isto, foram utilizados os modelos de Análise de Correlação Canônica e Regressão Linear Múltipla.

O uso da ACC para introduzir restrições aos pesos na AED para o método de Wong e Beasley e da RLM (intervalo de confiança) para o "Cone Ratio", até onde pôde ser constatado é um procedimento original. Verificou-se que esta estratégia de restrição construída conforme **(7)**, evita a inviabilidade para a AED. Assim, SARRICO (2004) propõe, para o uso de restrição proporcional virtual para todas as unidades, que os limites sejam cuidadosamente escolhidos para evitar a inviabilidade (limites não muito próximos), mostrando que, se os limites forem arbitrados sem critério, incoerências matemáticas podem surgir nas restrições, tornando o problema inviável (Artigo 2). Os testes para de viabilidade dos pesos aplicados ao modelo AED já são conhecidos (LINS, 2007b).

Comparando-se os procedimentos descritos em **4.4** e **4.5** para a especificação dos limites dos pesos, verificou-se que, relativamente à ACC, os limites são escolhidos por **(7)**, usando o método de restrição de Wong e Beasley, enquanto, no "Cone Ratio" obtém-se as restrições, dividindo-se os limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança para obter k_{iw} e k_{it} de **(12)**, valor mínimo e valor máximo, respectivamente.

Também foi mostrado que os pesos da AED obtidos com estas restrições variam menos do que aqueles do modelo original da Análise Envoltória de Dados (Artigo 2). O procedimento foi utilizado para múltiplas entradas e saídas e para o caso particular de apenas uma saída (Artigo 3), sendo comparados os métodos de Wong e Beasley e

"Cone Ratio", com resultados similares. No caso em que a ACC é utilizada para a definição dos pesos, deve ser lembrado que ela determina um conjunto de pesos para todas as unidades, enquanto a AED estabelece vetores de pesos diferentes para cada unidade. Como discutido, a solução do problema original (que permite a total flexibilidade dos pesos) pode gerar pesos muito diferentes para uma mesma entrada ou saída, prejudicando a formação dos escores de eficiência (SAATI, 2005). Essa flexibilidade também torna problemática a comparação entre DMUs em uma base comum (MAKUI, 2008). Também como visto (Artigo 2), a variação dos pesos virtuais proporcionais apresenta uma variabilidade menor entre as unidades, e, conseqüentemente, também entre os vetores de pesos obtidos a partir de restrições desenvolvidas em **4.4**. Assim, uma das vantagens do procedimento proposto é estabelecer *uma base mais próxima de pesos, sem descaracterizar a AED*. É importante também ressaltar que os pesos obtidos desta forma levam em conta a importância estatística, para a AED, de cada variável, isto é, as entradas e saídas consideradas são aquelas estatisticamente significantes e importantes na formação dos escores de eficiência.

A escolha da ACC (correlação linear entre as variáveis canônicas) para selecionar as variáveis para a AED e como procedimento para especificar os limites de WONG e BEASLEY (1990) justifica-se na medida em que o modelo CRS é de "retorno constante", isto é, aumentos proporcionais das entradas devem refletir-se em aumentos proporcionais para as saídas para que cada DMU mantenha sua eficiência. Já relativamente ao segundo método estudado (Artigo 3) a especificação da relação dos pesos do método "Cone Ratio" justifica-se pela sua própria característica de construção, que incorpora o conceito de Região de Segurança (RS) desenvolvido por THOMPSON (1990) para evitar a inviabilidade **(12)** (KORNBLUTH, 1991). O conceito de RS, aqui, vem da restrição $k_{iw} \leq \frac{V_i}{V_g} \leq k_{it}$ (item **4.5**) que utiliza as relações ordenadas entre os limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança. Nesta situação, a razão dos pesos da AED é construída a partir de ICs que não contém zero, pois, pela lógica discutida anteriormente, variáveis com coeficientes "zero" seriam eliminadas da análise, uma conclusão que também é válida para o método de Wong e Beasley.

Na comparação entre os dois métodos, observaram-se resultados similares (Artigo 3 - Tabela 3), notando-se que estes guardam uma relação de equivalência (GONÇALVES, 2001b). Isto é, resolvendo-se diretamente as desigualdades de Wong e Beasley **(3)** com os limites obtidos por **(10)** para todas as entradas, chega-se às desigualdades **(13)** do "Cone Ratio".

A avaliação dos hospitais baseada nos modelos desenvolvidos forneceu resultados interessantes sobre o sistema de saúde estudado. No Artigo 3, observou-se que as unidades que apresentaram um bom desempenho, em geral, foram os hospitais com cirurgia eletiva e clientela adscrita bem delimitada (como os três primeiros na Tabela 3 desse artigo). Por exemplo, o hospital classificado em primeiro lugar (com 100% de eficiência tanto na classificação Wong e Beasley quanto na escala "Cone Ratio") tem sido tradicionalmente considerado como um hospital cirúrgico de referência na cidade. Por outro lado, os hospitais com maior número de cirurgias de emergência localizaram-se na parte inferior da escala de classificação, o que é coerente com a maior complexidade desses pacientes. Também se pode notar nesta tabela que a maiores diferenças na pontuação entre Wong e Beasley e "Cone Ratio" surgiram para os hospitais no topo da classificação (2ª, 3ª e 5ª - 8ª posições). No entanto, a razão para essas discrepâncias não é totalmente clara e deve ser mais investigada. Nos artigos 1 e 2, que avaliaram as capitais brasileiras em relação à clínica médica dos hospitais do SUS, foi possível constatar que 16 capitais operavam com menos de 75% de eficiência relativa. As quatro cidades identificadas como “100% de eficiência” (Palmas, Macapá, Teresina, e Goiânia) não se encontram entre os estados de maior Produto Interno Bruto (PIB) per capita ou nos quais se localizam os grandes centros tecnológicos e educacionais do País. Isso indica que, para os municípios estudados, ganhos de desempenhos expressivos são ainda possíveis com os insumos existentes.

Os vários tipos de restrições de peso propostos na literatura AED podem ser classificados em três (Allen *et al.*, 1997), quais sejam: regiões de segurança tipo I (proposta por Thompson *et al*. (1986), do tipo Wong e Beasley e “Cone Ratio”), regiões de segurança tipo II (proposta por Thompson *et al.* (1990) e chamada freqüentemente *regiões de segurança do cone*) e restrições de peso absoluto (primeiro proposto por Dyson e Thanassoulis (1988)), na qual impõem-se limites numéricos nos pesos diretamente). No entanto, em todos esses casos, os alvos estimados pelo modelo na ótica das entradas podem não conduzir uma DMU_{j_0} ineficiente para exatamente 100% de eficiência. Apesar disso, esses valores são próximos ao alvo, o que, assim, não prejudica o desenvolvimento de modelos coerentes (ALLEN *et al*., 1997, LINS *et al*., 2007a).

7. Conclusões e futuras direções

Como visto ao longo do texto, os procedimentos discutidos apresentam vantagens que podem ser sintetizadas como:

(a) os parâmetros que determinam as restrições nos dois procedimentos são escolhidos de forma coerente para a AED (aumento das entradas devem refletir aumento de saídas);

(b) esses parâmetros são escolhidos estatisticamente e não de forma subjetiva, o que poderia gerar equações inconsistentes para o modelo de Wong e Beasley;

(c) uma vez estabelecidas as restrições e os novos pesos obtidos para a AED, estes estabelecem uma base mais uniforme para a formação dos escores (gerados a partir de intervalos mais homogêneos – Artigo 2);

(d) o modelo AED tende a ser viável conforme os limites **(7)** nas desigualdades **(8)** e escolhidos como no item **4.5** para as razões $k_{iw} \leq \frac{V_i}{V_g} \leq k_{it}$.

Outra vantagem dos métodos apresentados é que as formas propostas de especificação de limites de pesos, e conseqüentemente a escolha de variáveis para a AED, permitem a um tomador de decisão selecionar variáveis mais adequadas para problema, tendo em vista que estas também serão submetidas a um procedimento de verificação estatística. Isto é, o tomador de decisão é auxiliado pelo conhecimento agregado a partir dos estudos necessários para gerar os limites, e o julgamento sobre o peso das entradas - saídas é feito de forma mais objetiva. Por outro lado, talvez uma desvantagem, seria, em determinadas situações, a impossibilidade de encontrar variáveis estatisticamente coerentes para a AED.

A AED é uma metodologia direcionada para fronteiras (ajuste pelo topo), isto é, escolhe o conjunto de pesos que atribui o mais alto escore de eficiência possível para cada unidade que está sendo avaliada, o que a diferencia da ACC e da RLM, que geram estimativas baseadas nos valores médios das variáveis, de acordo com uma função especificada. Assim, estudos futuros seriam necessários para especificar outras relações do método estatístico e o modelo AED. Enfim, pode ser afirmado que os pesos assim obtidos são tecnicamente mais corretos para a AED, e que, conseqüentemente, produzirão escores de eficiência melhores.

8. Referências Bibliográficas

ALLEN, R., ATHANASSOPOULOS, A.D., DYSON, R.G., *et al.*, 1997, "Weights restrictions and value judgments in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions", *Annals of Operations Research,* v. 73, n.0 (Out), pp. 13-34.

BANKER, R.D., CHARNES, A., COOPER W.W., 1984, "Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis", *Management Science,* v. 30, n.9 (Set), pp.1078-1092.

BANXIA HOLDINGS. Frontier Analyst Professional, 1988. Disponível em: <http://www.banxia.com/frontier/index.html>. Accesso em: 27 out. 2009

BOUROUCHE, J.M., SAPORTA G., 1980, *L'Analyse des Données.* France-Paris, Presses Universitaires de France.

CHANG, S.Y., CHEN, T.H., 2007, "A simple approach to adjust factor weights in Data Envelopment Analysis", *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers* ,v.24, n.2, pp. 120-127.

CHARNES, A., COOPER, W.W RHODES, E., 1978, "Measuring the efficiency of decision-making units", *European Journal of Operational Research,* v.2, n.6 (Nov), pp. 429-444.

CHARNES, A., COOPER, W.W., HUANG Z.M, *et al.*, 1990. "Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks", *Journal of Econometrics,* v.46, n.1(Fev), pp. 73-91.

CHILINGERIAN, J.A.,1996, "Exploring why some physicians\` hospital pratices are more efficient: taking DEA inside the hospital". In: Charnes, A., Cooper, W., Lewin, A.Y., Seiford, L.M. (eds), *Data Envelopment Analysis:Theory,* *Methodology and Applications*, 2 ed., chapter 9, Norwell, Massachusetts 02061, USA, Kluwer Academia Publishers.

DEXTER, F., O` NEILL., 2004, "Data Envelopment Analysis to determine by how much hospitals can increase elective inpatient surgical workload for each specialty", *Anesthesia & Analgesia,* v.99, n.5 (Nov), pp. 1492-1500.

DYSON, R.G., THANASSOULIS, E., 1988, "Reducing weight flexibility in data envelopment analysis", *Jounal of the Operational Research Society,* v.39, n.6 (Jun), pp. 563-576.

FELDER, S., SCHMITT, H., 2004. "Data Envelopment Analysis based bonus payments", *The European Journal of Health Economics,* v. 5, n.4 (Dez), pp. 357-363.

FRIEDMAN, L., SINUANY-STERN, Z., 1997, "Scaling units via the canonical correlation analysis in the AED context", *European Journal of Operational Research*, v. 100, n.3 (Ago), pp. 629-637.

FRIEDMAN, L., SINUANY-STERN, Z., 1998, "Combining ranking scales and selecting variables in the DEA context: The case of Industrial Branches", *Computers and Operations Resesearch,* v.25, n.9, pp. 781 – 791.

GONÇALVES, A.C., NORONHA, C.P., 2001a, "Avaliando a eficiência dos hospitais gerais do SUS através da metodologia da análise envoltória de dados – DEA", *Revista Saúde em Foco/ Informe Epidemiológico em Saúde Coletiva*, n. 22 (Dez), pp. 93 – 105.

GONÇALVES, A.C., 2001b, *Um Estudo de Eficiência e Cobertura das Ações Básicas do Programa de Saúde Bucal da Prefeitura da cidade do Rio de Janeiro*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro,RJ, Brasil.

GONÇALVES, A.C., ALMEIDA, R.M.V.R., GOMES, E.G., 2006., "Avaliação de desempenho de um programa de saúde bucal por meio da análise envoltória de dados". In: Anais do XX Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, pp. 495 - 498 , São Pedro- São Paulo, Out.

GONÇALVES, A.C., NORONHA, C.P., LINS, M.P.E., *et al.,* 2007, "Data envelopment analysis for evaluating public hospitals in Brasilian state capitals", *Revista de Saúde Pública*, v.41, n.3 (Jun), pp. 427-435.

GONÇALVES, A.C., ALMEIDA, R.M.V.R., SAMANEZ, C.P., 2008, "Limites de Restrição dos pesos do método de Wong e Beasley em Análise Envoltória de dados" In: Anais do XXI Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica, pp. 597 - 600 , Salvador- Bahia, Nov.

GUJARATI DN, *Econometria Básica*. 3ª ed. São Paulo, Pearson Education do Brasil, 2000.

HALME, M, JORO T, KORHONEN P., et al., 1999, "A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis", *Management Science,* v.45, n.1 (Jan), pp. 103-115.

HOLGER SCHEEL. Ems: Efficiency Measurement System User`s Manual, Versão 1.3, 2000. Disponível em: <http:// www.wiso.uni-dortmund.de/lsfg/or/scheel/ems/> Acesso em: 12 mar. 2009.

KIRIGIA, J.M., EMROUZNEJAD, A., SAMBO, L.G., *et al.*, 2004, "Using Data Envelopment Analysis to measure the technical efficiency of public health centers in Kenya", *Journal of Medical System,* v.28, n.2 (Abr), pp. 155-166.

KORNBLUTH, J.S.H., 1991, Analysing policy effectiveness using cone restricted data envelopment analysis, *Journal of the Operational Research Society*, v. 42, n.12, pp. 1097-1104.

KRZANOWSKI W J, *An Introduction to Statistical Modelling.* 1ª ed. London, Hodder Arnold, 1988.

LINS, M.P.E, L ÂNGULO, MEZA., 2000, *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de apoio à decisão*. 1 ed. Rio de Janeiro, Editora COPPE/UFRJ.

LINS, M.P.E., GONÇALVES, A.C., GOMES E.G., *et al.,* 2004, "Performance assessment of dental clinics though PC-oriented Data Envelopment Analysis ", In: Oliveira, M.J.F. (ed), *Accessibility and Quality of Health Services,* 28 ed., chapter 8, Frankfurt am Main, Berlin, Bern, Bruxelles, New York, Oxford, Wien, Peter Lang Frankfurt.

LINS, M.P.E, SOLLERO, M.K.V., CALÔBA, G..M., *et al.*, 2007a, "Integrating the regulatory and utility firm perspectives, when measuring the efficiency of electricity distribution", *European Journal of Operational Research,* v.181, n.3 (Set), pp. 1413-1424.

LINS, M.P.E., SILVA, ACM., LOVELL, C.A.K., 2007b, "Avoiding infeasibility in DEA models with weight restrictions", *European Jornal of Operational Research,* v.181, n.2 (Set), pp. 956-966.

MAKUI, A., ALINEZHAD, A., MAVI, R.K., *et al*., 2008, "A Goal Programming Method for Finding Common Weights in DEA with an Improved Discriminating Power for Efficiency", *Journal of Industrial and Systems Engineering*, v.1, n.4, pp. 293-303.

MARINHO, A., 1998, " Estudo de eficiência em hospitais públicos e privados com a geração de rankings", *Revista de Administração Pública*, v.32, n.6 (Nov/Dez), pp.145-158.

RETZLAFF-ROBERTS, D., CHANG, C.F., RUBIN, R.M., 2004, "Technical efficiency in the use of health care resources: a comparison of OECD countries", *Health Policy,* v. 69, n.1(Jul), pp. 55-72.

ROLL. Y., COOK, W.D., GOLANY, B., 1991, "Controlling factor weights in data envelopment analysis", *IIE Transactions,* v.23, n.1, pp. 2-9.

SAATI, S., MEMARIANI, A., 2005, "Reducing weight flexibility in fuzzy DEA", *Applied Mathematics and Computation,* v.161, n.2 (Fev), pp. 611-622.

SARRICO, C.S; DYSON, R.G., 2004, "Restricting virtual weights in Data Envelopment Analysis", *European Jornal of Operational Research,* v.159, n.1 (Nov), pp.17-34.

SENGUPTA, J.K; 1990, "Tests of efficiency in Data Envelopment Analysis", Computers *and Operations Resesearch,* v.17, n.2, pp, 123-132.

SIMAR, L., WILSON P.W., 1998, "Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to bootstrap in Noparametric frontier Models", *Management Science*,v.44, n.1 (Jan), pp.49-61.

STATSOFT INC. Statistica Manual version 6. Oklahoma USA, 2001. Disponível em: <http://www. statsoft.com > Acesso em: 12 jun. 2009.

THOMPSON, R.G., SINGLETON, F.D.,THRALL RM., *et al.*, 1986, "Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas", *Interfaces*, v.16, n.6 (Nov-Dez), pp. 35-49.

THOMPSON, R.G.,LANGEMEIER, L.N.,LEE., *et al.,* 1990,"The Role of Multiplier Bouds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming", *Jounal of Econometrics*, v.46, pp.93-108.

VALDMANIS, V., KUMANARAYAKE, L., LERTIENDUMRONG, J., 2004, "Capacity in Thai public hospitals and the production of care for poor and nonpoor patients", *Health Services Research",*v. 39, n.6pt2, pp.2117-2134.

WANG, Y.M., LUO, Y., LIANG, L., 2009, "Ranking decision making units by imposing a minimum weight restriction in the data envelopment analysis", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v.223, n.1 (Jan), pp. 469-484.

WONG, Y.H.B; BEASLEY, T.E., 1990, "Restricting weight flexibility in DEA", *Journal of the Opeational Reserarch Society,v.41*, n.9, pp. 829-835.

9. Anexos

Glossário

Artigo (1) DATA ENVELOPMENT ANALYSIS FOR EVALUATING PUBLIC HOSPITALS IN BRASILIAN STATE CAPITALS (Journal of Public Health, v.41, n.3 (Jun), São Paulo - 2007 - Finalista do Prêmio de Incentivo em CIÊNCIA E TECNOLOGIA para o *SUS - 2008*)

Artigo (2) CANONICAL CORRELATION ANALYSIS IN THE DEFINITION OF WEIGHT RESTRICTION LIMITS FOR DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (submetido ao Annals of Operations Research em 02/10/2009)

Artigo (3) DEFINING WEIGHT RESTRICTION LIMITS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS THROUGH LINEAR REGRESSION WITH AN APPLICATION IN HOSPITAL EVALUATION (submetido ao Central European Journal of Operational Research em 28/12/2009)

Glossário

Análise de Componentes Principais – Método estatístico multivariado que **e**studa a relação de um conjunto de variáveis através de combinações lineares que sejam não correlacionadas na ordem de sua importância, e que descreva a variação nos dados.

Análise de Correlação Canônica (ACC) – Método estatístico multivariado que estuda a associação entre dois grupos de variáveis (entradas e saídas) através de combinações lineares destes conjuntos.

Análise Envoltória de Dados (AED) – A AED é uma técnica multivariada para monitoramento de produtividade de unidades tomadoras de decisão (DMUs), que fornece dados quantitativos sobre possíveis direções para a melhoria do "status quo" das unidades, quando ineficientes. Em particular, a AED é uma técnica não - paramétrica que permite comparar dados de entrada e saída sem suposições de ordem estatística.

Deficiência empírica – "Deficiência" do problema da AED, que na busca da solução ótima pode atribuir peso "zero" para alguma(s) variáveis de entradas e/ou saídas.

Entradas e saídas – Conjunto de variáveis associadas a cada DMU.

Estimador de um parâmetro – é toda função de elementos de amostra oriunda dessa população, que mantém para com o parâmetro uma certa relação.

Estimativa – Valor que o estimador assume para dada amostra.

Estrutura de variáveis – Conjunto de entradas e saídas.

Flexibilidade total dos pesos – pesos sem restrição.

Fronteira CRS (Fronteira eficiente) – formada pelo conjunto de todas as unidades (DMUs) eficientes (escore de eficiência igual a 100%).

Intervalo de confiança – Intervalo aleatório que contém a quantidade de interesse com probabilidade fixada.

Intervalo de variação dos pesos – Quando se atribui limites inferiores e superiores onde os mesmos devem variar ou suas proporções em cada conjunto de entradas e saídas.

Máximo empírico de eficiência (solução ótima – escore de eficiência - eficiência) – Melhor escore de eficiência encontrado, para uma DMU, em um problema de AED.

Medida empírica – baseada nas observações (entradas e saídas).

Medida não – paramétrica- Aquela que não obedece a um modelo estatístico pré especificado.

Método de restrições aos pesos de Wong e Beasley e Cone Ratio – Formas de limitar a variação dos pesos na AED.

Modelo irrestrito (sem restrição aos pesos) – Problema de AED onde os pesos de cada variável não são limitados para encontrar a solução ótima de cada DMU.

Ótica da entrada – Busca da solução ótima de um problema de AED pela minimização das entradas.

Perito ou tomador de decisão – Aquele que é expertise em determinado assunto que esta sendo alvo da aplicação da AED.

Pesos – Importância (quantidade) relativa das entradas e saídas, que é estimada na AED pela busca da solução ótima, que formam os escores de eficiência de cada DMU.

Pesos canônicos – Coeficientes estimados pela ACC (importância estatística das entradas e saídas pela ACC).

Problema Dual – É um outro PPL associado a um PPL de modo que o par de problemas podem ser atribuídas várias características e propriedades notáveis.

Problema de Otimização – É um PPL que busca a melhor solução (minimizando entradas) para que uma determinada DMU atinja o máximo de eficiência.

Problema de Programação Linear (PPL) – Problema de otimização para calcular o escore de eficiência máximo possível de cada DMU em um problema de AED.

Programação Linear Multi – Objetivo – È um problema de otimização que envolve a maximização/minimização de várias funções ao mesmo tempo.

Referência teórica ou conceitual – O que se baseia em algum conceito pre-estabelecido (modelo estatístico).

Região comum – Conjunto de restrições comum a todas as DMUs de um problema de AED.

Regressão Linear Múltipla – Um caso particular da ACC quando se trata de apenas uma saída.

Restrições aos pesos – Conjunto de desigualdades/ igualdades de um problema de AED.

Unidades ineficientes – Aquelas que não atingiram a eficiência de 100%.

Unidades tomadoras de decisão (DMUs) – Unidades que realizam tarefas semelhantes (DMUs homogêneas).

Rev Saúde Pública 2007;41(3)

Antonio C Gonçalves[I]

Cláudio P Noronha[I]

Marcos PE Lins[II]

Renan MVR Almeida[II]

Data envelopment analysis for evaluating public hospitals in Brazilian state capitals

ABSTRACT

OBJECTIVE: To apply the Data Envelopment Analysis (DEA) methodology for evaluating the performance of public hospitals, in terms of clinical medical admissions.

METHODS: The efficiency of the hospitals was measured according to the performance of decision-making units in relation to the variables studied for each hospital, in the year 2000. Data relating to clinical medical admissions in hospitals within the public system in Brazilian state capitals and Federal District (mortality rate, mean length of stay, mean cost of stay and disease profile) were analyzed. The canonical correlation analysis technique was introduced to restrict the variation range of the variables used. The constant returns to scale model was used to generate scores that would enable assessment of the efficiency of the units. From the scores obtained, these cities were classified according to their relative performance in the variables analyzed. It was sought to correlate between the classification scores and the exogenous variables of the expenditure on primary care programs per inhabitant and the human development index for each state capital.

RESULTS: In the hospitals studied, circulatory diseases were the most prevalent (23.6% of admissions), and the mortality rate was 10.3% of admissions. Among the 27 state capitals, four reached 100% efficiency (Palmas, Macapá, Teresina and Goiânia), seven were between 85 and 100%, ten were between 70 and 85% and ten had efficiency of less than 70%.

CONCLUSIONS: The tool utilized was shown to be applicable for evaluating the performance of public hospitals. It revealed large variations among the Brazilian state capitals in relation to clinical medical admissions.

KEYWORDS: National Health System (BR). Health services evaluation. Hospital services. Efficiency, organizational. Information systems. Data analysis.

[I] Coordenação de Indicadores Gerenciais. Secretaria Municipal da Saúde. Rio de Janeiro, RJ, Brasil

[II] Programa de Engenharia da Produção. Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia (COPPE). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Correspondence:
Renan M V R Almeida
Programa de Engenharia Biomédica
Coppe – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68510 Cidade Universitária
21941-972 Rio de Janeiro, RJ, Brasil
E-mail: renan@peb.ufrj.br

Received: 9/8/2005
Reviewed: 8/1/2006
Approved: 2/7/2007

INTRODUCTION

Data envelopment analysis (DEA), which was introduced by Charnes et al[3] in 1978 and extended by Banker et al[1] (1984), provides a representation of the structure formed by decision-making units (DMUs), with inputs and outputs that are defined in such a way as to be able to assess the relative efficiency of these DMUs. This efficiency is defined from the observed performance of the DMUs in relation to the variables analyzed. It is an empirical measurement and not a theoretical or conceptual reference.[10,11] This means that its scores are a comparison measurement that is more appropriate than the more commonly used indicators (e.g. number of procedures per time period or mortality rates), which may be highly dependent on the specific characteristics of a population.

This method establishes a "common region" on the basis of the data (variables) of the DMUs, thereby creating an efficiency index that reflects the importance of each variable for each DMU. Thus, in the common region, units with behavioral patterns that are most optimized for these variables are sought. The maximum value for this index (in each DMU) is then assumed to be an "empirical maximum" efficiency, from which a relative classification of the units becomes possible.[10] From this, the method also provides "excellent" values that the variables should attain, for the DMU to be able to move from "inefficient" to "efficient". DEA has recently been used in the health sector for establishing reference standards for hospitals, clinics or health services, particularly in developing countries.[3,4,7,9,12,13] In Brazil, one of the rare studies using this methodology was carried out in 2001, to compare university and general hospitals in the municipality of Rio de Janeiro.[11]

In December 2000, there were 913 hospitals available to the Brazilian national health system (*Sistema Único de Saúde* – SUS) in the country's state capitals (public, university and philanthropic hospitals and those available through access agreements). During that year, these hospitals were responsible for 742,833 admissions relating to clinical medicine. Methodologies that allow assessment of these hospitals' performance urgently need to be developed, both because of the scarcity of resources in the health sector and because users demand and have a right to a system with quality services.[14]

The objective of the present study was to apply DEA in studying the efficiency of the a hospital network, using the SUS hospitals in Brazilian state capitals as an example.

METHODS

The database was formed by admissions to SUS hospitals in the country's state capitals in 2000, and the data were obtained from the SUS hospital information system (Datasus).* The DEA was performed using the Frontier Analyst Professional software. ** The canonical weights, canonical correlation, restriction intervals for the weights of the variables and the other statistical procedures were generated in the Statistica software.

To comparatively assess the efficiency of the SUS hospitals in the Brazilian state capitals, their admissions in the clinical medical category were analyzed. In addition to clinical medical admissions in the strict sense, admissions in other clinical sub-specialties were also included, such as: cardiology, endocrinology, clinical oncology, infectology and pneumology. The following variables were used:

Inputs: mortality rate (mortality) and mean length of stay in hospital (mean length of stay).

Outputs: percentages of admissions relating to the three chapters of the International Classification of Diseases (ICD) with the greatest mortality percentages, respectively: neoplasias; infectious and parasitic diseases (IPD) and diseases of the circulatory system (circulatory); and mean value paid through the Hospital Admission Authorization (mean HAA).

The DEA used the Constant Returns to Scale (CRS) model, in which efficiency was defined as the ratio of the weighted sum of inputs and outputs, and the objective of the method was to maximize this ratio for each DMU. A unit (capital) that obtained the maximum value for this maximization (1, by definition) was considered to be "efficient" and if not, it was said to be "inefficient" "inefficient" (Annex).

Firstly, a canonical correlation analysis between the input and output variables was used to identify restriction intervals for the weights of these variables that were needed for DEA (Annex).[2,8,***] Next, the scores thus obtained were correlated (Pearson's coefficient) with the exogenous variables "per capita expense of primary healthcare programs" and "human development index (HDI) for the cities studied", for the year 2000.****

RESULTS

Diseases of the circulatory system were prominent, accounting for 23.6% of the admissions in the hospitals studied, with a range from 28.7% in Cuiabá to 8.9% in Macapá. The infectious and parasitic diseases group, which included AIDS and tuberculosis, corresponded to 9.9% of the admissions (maximum of 18.7% in Manaus and minimum of 5.9% in Brasília). The neoplasia group represented 7.5% (maximum of 19.3% in Belo Horizonte and minimum of 0.3% in Aracaju) (Table 1). These three groups totaled 41% of all the admissions within the system.

The mortality rate was 10.3% of the admissions (maximum of 17.6% in Natal and minimum of 4.1% in Macapá). The mean length of stay was 8.8 days (maxi-

* Database of the Brazilian national health system [homepage on the Internet]. Brasília; 2005. Available at: http://tabnet.datasus.gov.br/ tabnet/tabnet.htm#AssistSaude [Accessed on March 3, 2005]

** Banxia Frontier Analyst Professional. Glasgow: Banxia Holdings Limited; 1998.

*** Lins MPE, Gonçalves AC, Gomes EG, Silva ACM. Performance assessment of dental clinics through PC-oriented Data Envelopment Analysis. Accessibility and quality of health services. In: Proceedings of the 28th Meeting of the EURO Working Group Operational Research Applied to Health Services; 2004; Frankfurt, Germany. Frankfurt: Peter Lang Publishing Group; 2004. v. p. 95-109.

**** Fundação Nacional de Saúde. Consulta de pagamentos. Brasília; 2005. Available at: http://www.fns.saude.gov.br/consultafundoafundo.asp [Accessed on March 3, 2005]

Table 1. Input and output variables for the data envelopment analysis model for SUS hospitals. Brazil, 2000.

Capital	Mortality (%)	Mean length of stay (days)	Mean HAA (R$)	Circulatory (%)	IPD (%)	Neoplasia (%)
Porto Velho	8.3	9.4	303.36	16.9	13.2	7.0
Rio Branco	6.0	7.9	256.01	11.7	12.6	1.6
Manaus	9.5	8.7	335.78	17.0	18.7	4.2
Boa Vista	7.7	10.4	277.39	22.1	16.1	0.6
Belém	11.0	7.9	341.66	14.2	17.2	0.8
Macapá	4.1	5.4	207.90	8.9	16.1	1.3
Palmas	5.9	4.7	323.91	19.3	8.0	0.9
São Luís	7.2	8.9	302.59	18.8	13.1	8.1
Teresina	5.3	6.5	267.43	16.0	14.8	8.6
Fortaleza	8.3	8.9	380.39	22.1	12.1	2.4
Natal	17.6	11.5	416.69	23.0	12.2	10.5
João Pessoa	10.2	9.8	398.74	25.4	9.4	8.8
Recife	14.1	9.6	403.59	23.0	9.8	8.7
Maceió	13.1	7.5	386.16	19.5	10.9	2.0
Aracaju	9.9	7.0	346.84	23.8	10.3	0.3
Salvador	17.4	11.8	449.27	24.6	12.2	7.9
Belo Horizonte	7.3	8.0	388.54	25.9	6.0	7.6
Vitória	12.9	10.5	385.23	23.2	7.9	19.3
Rio Janeiro	16.0	12.6	446.84	27.7	12.5	12.4
São Paulo	12.4	8.0	485.10	25.8	7.9	9.4
Curitiba	6.1	6.2	374.56	22.3	6.0	8.0
Florianópolis	9.9	12.6	408.81	10.3	10.6	14.8
Porto Alegre	8.5	9.8	505.70	23.6	9.7	8.3
Campo Grande	10.3	10.0	542.23	23.4	18.6	4.8
Cuiabá	12.6	8.1	442.76	28.7	6.7	3.6
Goiânia	5.7	5.8	337.97	27.9	7.3	5.4
Brasília	5.8	8.3	316.35	25.9	5.9	3.7

SUS - *Sistema Único de Saúde* (Brazilian national health system)
HAA: hospital admission authorization
IPD: infectious and parasitic diseases

Table 2. Restriction interval for the weights of the variables, from canonical correlation analysis. Brazil, 2000.

Variable	Restriction interval	Canonical weights
Inputs		
Mean length of stay	[68 – 84]	-0,72
Mortality	[16 – 32]	-0,36
Outputs		
Mean HAA	[27 – 47]	-0,46
Circulatory	[7 – 27]	-0,25
IPD	[17 – 58]	-0,58
Neoplasias	[1 – 37]	-0,66

mum of 12.6 in Rio de Janeiro and Florianópolis, and minimum of 4.7 in Palmas). The mean amount for admission reimbursements via HAAs was R$ 405.34 for all the admissions (maximum of R$ 542.23 in Campo Grande and minimum of R$ 207.90 in Macapá).

Table 2 summarizes the results from the canonical correlation analysis (canonical weights, canonical correlation coefficients and restriction intervals for the weights of the variables). Table 3 shows the classification of the state capitals according to the efficiency attained using DEA, the observed values and the estimated values for minimization of the inputs. Among the 27 state capitals, four achieved 100% efficiency (Palmas, Macapá, Teresina and Goiânia), seven were between 85% and 100%, ten were between 70% and 85% and ten presented less than 70%. Table 3 shows the estimated

Table 3. Efficiency scores and observed and estimated values for mortality rate and mean length of stay. Brazil, 2000.

Capital	Score	Mortality (%)		Mean length of stay (dias)	
		Observed	Expected	Observed	Expected
Palmas	100.00	5.93	5.93	4.70	4.70
Macapá	100.00	4.13	4.13	5.40	5.40
Teresina	100.00	5.26	5.26	6.50	6.50
Goiânia	100.00	5.74	5.74	5.80	5.80
Curitiba	95.05	6.07	5.24	6.20	6.00
Campo Grande	91.24	10.27	8.91	10.0	9.21
São Paulo	85.69	12.36	6.57	8.00	6.54
Manaus	82.42	9.53	6.41	8.70	7.42
Porto Alegre	79.77	8.47	6.83	9.80	7.79
Belém	79.52	10.99	6.35	7.90	6.69
Belo Horizonte	77.12	7.27	56.1	8.00	6.17
São Luís	74.59	7.16	5.56	8.90	6.55
Fortaleza	74.09	8.34	6.71	8.90	6.37
Vitória	72.64	12.9	6.56	10.50	8.11
Maceió	72.25	13.13	6.65	7.50	5.90
João Pessoa	71.80	10.25	6.74	9.80	7.15
Cuiabá	70.91	12.57	5.47	8.10	6.33
Aracaju	69.94	9.91	4.82	7.00	5.26
Recife	68.93	14.12	6.60	9.60	7.15
Rio Branco	67.75	6.00	4.42	7.90	5.20
Brasília	67.43	5.84	4.68	8.30	5.28
Porto Velho	67.17	8.26	5.55	9.40	6.31
Rio Janeiro	66.51	16.03	7.63	12.60	8.90
Florianópolis	63.63	9.93	6.44	12.60	7.96
Natal	63.43	17.56	7.20	11.50	7.97
Boa Vista	63.01	7.68	5.34	10.40	6.34
Salvador	60.69	17.36	6.97	11.80	7.77

values for the inputs needed for each capital to achieve 100% efficiency. For example, Rio de Janeiro (66.5% efficiency) has observed values for mortality and mean length of stay of 16.0% and 12.6 days, respectively. In this case, for the city to achieve 100% efficiency, it would be necessary to reduce these rates to the levels of 7.6% and 8.9 days, respectively.

No linear correlation was found between the classification scores and the municipal HDI values ($r=0.03$; $p>0.05$), or between the classification scores and expenses per capita ($r=0.03$; $p>0.05$).

DISCUSSION

Contrary to other studies that utilized the DEA methodology in the field of health sector assessment in Brazil, the present study was restricted to one specific specialty (clinical medicine) and did not cover hospitals as a whole. It was thus sought to ensure that comparisons were made between entities with intrinsically greater homogeneity. For this, classical indicators were used, such as length of stay and mortality rate, and the admissions relating to the three chapters of the ICD with greatest weight in the system.

In the Brazilian public health system, admissions to hospitals in the system are paid for through HAAs. The amounts of these payments depend on the services provided, the technological backup and the materials used, excluding salaries and infrastructure expenditure. In defining the DEA model, the disease profile and the mean amount of the HAA payments were taken to be “fixed”, since they represent real demands from affections that are prevalent among the population and the hospital resources at a given time.

Contrary to what is commonly done in developing causal models, in the present study the mortality variable was used as an input to the system, because of the differentiated characteristics of the methodology used. In DEA, the groups of variables called "inputs" and "outputs" are used to generate the factor that is the great differential of the method, i.e. the classification scores resulting from the minimization of the inputs or the maximization of the outputs. In the present study, the form that is considered most natural was used, i.e. minimizing the inputs "mortality rate" and "length of stay". Nonetheless, no methodological or interpretative difference would arise if these were used as outputs. Thus, if the inputs had been considered to be outputs, and vice versa, and the analysis had been undertaken such that outputs were maximized, the same hierarchical classification (the scores) would have been obtained, without introducing any alterations of logic in the results obtained.

The mathematical structure of DEA models often means that a DMU is considered to be efficient because zero weight is attributed to variables that are then disregarded in evaluating the unit. Defining restrictions from the canonical weights,[8] as introduced in the present study not only allows the importance of the variables for DEA to be evaluated, but also minimizes the quantity of variables with zero weight. This is an important methodological step, because it avoids rejecting variables that may be relevant in the process of forming the efficiency scores. In the original concept for DEA models (in economics) only "desirable" outputs were considered, i.e. those for which maximization is of interest (for example, maximizing production while considering fixed supplies).[6] In the present study, the percentages of admissions relating to the three ICD chapters of greatest weight and the mean amounts of HAA payments were considered to be outputs, and the inputs (to be minimized) were the mortality rate and mean length of stay. The mean amount of HAA payments was used as a "proxy" for the complexity of the procedures carried out, and this made it possible to reject the hypothesis that the results had been influenced by the differentiated levels of complexity of these procedures.

Some studies[9] have used DEA to perform economic assessments on health care units. The present study, however, was not concerned with economic performance, which in any case depends on parameters that are difficult to measure in developing countries.[13] Thus, the central idea in applying it was to classify the performance of the state capitals in relation to the mortality rate and the mean length of stay, from fixed values for the input variables. From this, the model described was applied, in which the aim was to minimize inputs, i.e. to answer the question of what proportional reduction in the inputs (mortality rate and mean length of stay) it was possible to achieve for a set of hospitals in one state capital while still maintaining the observed disease profile and the mean amounts of HAA reimbursements. The units (capitals) for which it was not possible to reduce the variables were considered to be efficient in comparison with the others, thus generating efficiency scores.

The canonical correlation indicated that there was greater dependence between the variables "mean length of stay" (-0.724) and "neoplasia" (-0.656), which had the highest canonical coefficients among the variables analyzed (Table 2). Thus, it is inferred that, among the population studied, this was the group of diseases with the greatest impact on the patients' length of stay. This corroborates the hypothesis that neoplasias generally require greater length of stay, particularly regarding surgical conditions, and moreover, it shows that the same HAA procedure requires a longer stay if associated with a neoplasia group.

Using the scores generated by DEA, it could be seen that 16 state capitals were operating at less than 75% relative efficiency. The four cities identified as "100% efficiency" (Palmas, Macapá, Teresina and Goiânia) were not among the states with greatest per capita gross domestic product (GDP) or in which the country's major technological and educational centers are located. This indicates that, for the municipalities studied, significant performance gains are still possible with the existing supplies. This observation is reinforced by the independence between the classification scores and the variables "per capita expense on primary healthcare programs" and "HDI of the capitals". For example, the city of Macapá has one of the worst HDI and per capita expenses among the set of municipalities studied, but was classified as an "efficient unit". The HDI combines schooling, income and longevity data and is widely used as a quality-of-life indicator.

The capitals identified as having the worst performance had the most complex characteristics, and they included cities with a tradition of training healthcare human resources and other cities that, similar to the ones with the best performance, were distant from the country's main technological and educational centers.

One of the most important features of the methodology presented is it compares efficiencies while taking real functional conditions into consideration. Moreover, one original characteristic of the present study is the definition of weight limits for the variables, without the need for a decision-maker to intervene, since the restriction intervals were obtained from characteristics of the classification variables themselves (the inputs and outputs). The estimates for the mortality rate and mean length of stay may help health administrators by being a comparative reference point for clinical medicine indicators.

On the other hand, the work to improve these indicators does not dispense with identifying the intrinsic features of the units studied or other evaluations. For example, qualitative satisfaction surveys on the population attended may serve as parameters for demarcating the results. It is unlikely that any single reason for the relative positions of the state capitals will be identified, but the tool presented is a powerful and simple method for ranking performance, thereby opening the doors to more particular studies. Thus, the approach presented in this study is important and independent, and it provides managers with relevant information for wide-ranging evaluations of the system.

REFERENCES

1. Banker RD, Charnes A, Cooper WW. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*.1984;30(9):1078-92.
2. Bouroche JM, Saporta G. Análise de Dados. Rio de Janeiro: Zahar Editores; 1982.
3. Charnes A, Cooper WW, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision-making units. *Eur J Oper Res*. 1978;2(6):429-444.
4. Chilingerian JA. Data Envelopment Analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers; 1996.
5. Dexter F, O'Neill L. Data Envelopment Analysis to determine by how much hospitals can increase elective inpatient surgical workload for each specialty. *Anesth Analg*. 2004; 99(5):1492-500.
6. Färe R, Grosskopf S. New directions: efficiency and productivity. Boston: Kulwer Academy Publishers; 2004.
7. Felder S, Schmitt H. Data Envelopment Analysis based bonus payments. Theory and application to inpatient care in the German state of Saxony-Anhalt. *Eur J Health Econ*.2004;5(4):357-63.
8. Friedman L, Sinuany-Stern Z. Scaling units via the canonical correlation analysis in the DEA context. *European J Operational Res*. 1997;100(3):629–37.
9. Kirigia JM, Emrouznejad A, Sambo LG, Munguti N, Liambila W. Using Data Envelopment Analysis to measure the technical efficiency of public health centers in Kenya. *J Med Syst*. 2004;28(2):155-66.
10. Lins MPE, Meza LA. Análise Envoltória de Dados e Perspectivas de Integração no Ambiente de Apoio à Decisão. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ; 2000.
11. Marinho A. Estudo de eficiência em hospitais públicos e privados com a geração de rankings. *Rev Adm Publica*.1998;32(6):145-158.
12. Retzlaff-Roberts D, Chang CF, Rubin RM. Technical efficiency in the use of health care resources: a comparison of OECD countries. *Health Policy* 2004;69(1):55-72.
13. Valdmanis V, Kumanarayake L, Lertiendumrong J. Capacity in Thai public hospitals and the production of care for poor and nonpoor patients. *Health Serv Res*. 2004;39(6Pt 2):2117-34.
14. Viacava F, Almeida C, Caetano R Fausto M, Macinko J, Martins M, et al. Uma metodologia de avaliação do desempenho do sistema de saúde brasileiro. *Cienc Saude Coletiva*. 2004;9(3):711-724.

ANNEX

Canonical correlation analysis and CRS model

I - Canonical correlation analysis (CCA)

CCA was developed by Hotelling in 1936. It studies linear relationships between two groups of variables (*a* and *b*), and its fundamental concern is to find the pair of linear combinations of *a* and *b* that has the maximum linear correlation.[3,11] From the scheme shown in the Table, the linear combination of the variables *a* and *b* is defined as:

$Z_J = V_1\, x_{1J} + V_2 x_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_m x_m j$

$j = 1, \ldots, n$

$W_J = U_1 y_{1j} + U_2 y_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_s y_{sj}$

The coefficients V_i, i=1,....,m and U_r, r=1,....,s must be such that the square of the correlation between z and w, r^2 (z,w), presents its maximum value. It is assumed that the variables of the two groups are linearly independent, i.e. the rank X_{mxn}=m and the rank Y_{sxn}=s.A_{1nxn} are the orthogonal projectors of w_{nx1} and A_{2nxn} is the orthogonal projector of z_{nx1}, i.e. A_1 projects w in the subspace Z and vice versa. The vector w must be collinear with the orthogonal projection of z in W (the vector that makes a minimum angle with z).

This condition is expressed as:

$A_2 z = rw$

In which r = cos(z,w) and A_2 is the orthogonal projection operator in W.

Likewise:

$A_1\, w = rz$

From this, the following can be deduced:

$A_1 A_2 z = r^2\, z$ and $A_2 A_1 w = r^2 w$

In which $\lambda_1 = r^2 = \cos^2(z,w)$

Consequently, **z** and **w** are respectively eigenvectors of the operators A_1A_2 and A_2A_1 that are associated with the greatest eigenvalue λ_1 which is equal to its cosine squared (its squared correlation).

After appropriate algebraic operations, and assuming that A_2 can be inverted, the canonical variables **z** and **w** can be written in the following form:

$$z = \frac{A_2^{-1} A_2 A_1 w}{\sqrt{\lambda}} = \frac{A_1 w}{\sqrt{\lambda}}$$

Table. Structure of the units and variables in a canonical correlation analysis.

	a	b
Units\Groups	X	Y
	$x_{1j}, x_{2j} \ldots x_{mj}$	$y_{ij}, y_{2j} \ldots y_{sj}$
1	$x_{11}, x_{21} \ldots x_{m1}$	$y_{11}, y_{21} \ldots y_{s1}$
2	$x_{12}, x_{22} \ldots x_{m2}$	$y_{12}, y_{22} \ldots y_{s2}$
N	X_{1n} x_{2n} x_{mn}	Y_{1n}, y_{2n} y_{sn}

Likewise it can be deduced that:

$$w = \frac{A_2 z}{\sqrt{\lambda}}$$

The canonical variables are the eigenvectors of A_1A_2 (A_2A_1) , which are associated with the eigenvalues ranked in decreasing order. At each stage, a pair of variables associated with the greatest eigenvalue (λ_i) is generated. The interest is in the canonical weights of the variables from the first stage (greatest correlation), which are used in the proportions:

$$\Phi_r \leq \frac{U_r Y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r Y_{rj}} \leq \Psi_r \quad \text{and} \quad \Phi_i \leq \frac{V_i X_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i X_{ij}} \leq \Psi_i$$

The values of these weights indicate the importance of each variable in obtaining the maximum correlation between the combinations, and can thus be utilized to generate restriction intervals for the inputs and outputs in a DEA model. The matrixes A_1 and A_2 and the canonical weights are obtained by:

$A_1 = {}^tX(XD^tX)^{-1}\, XD.$

By analogy:

$A_2 = {}^tY(YD^tY)^{-1}\, YD$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S^{-1}_{11} S_{21} U$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S^{-1}_{22} S_{12} V, \text{ where}$$

$S_{11} = XD^tX$

$S_{22} = YD^tY$

$S_{21} = XD^tY = {}^tS_{12}$

That is, V(m x 1) and U(s x 1) are deduced from each other by linear transformation, such that D(n x n) is a diagonal weighting matrix of the variables.

II - Constant Returns to Scale (CRS) model

In the case of a unit with a single input-output pair, the efficiency of the unit can be defined simply as the output/input ratio. In the case of several inputs and/or outputs, the efficiency is the ratio between the weighted sum of the outputs and the weighted sum of the inputs, and the following is a measurement of this efficiency:[15]

$$\text{MAX } h_0 = \frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{r0}}{\sum_{i=i}^{m} V_i x_{i0}}$$

Subject to:

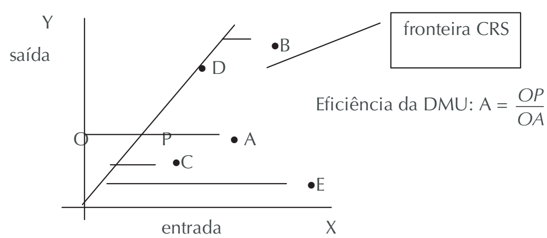
$$\frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}} \leq 1, \ j = 1,...,n$$

$$\Phi_r \leq \frac{U_r Y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r Y_{rj}} \leq \Psi_r \quad \text{and} \quad \Phi_i \leq \frac{V_i X_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i X_{ij}} \leq \Psi_i$$

(additional restrictions for the weights, in accordance with the output and input levels of the j[th] DMU, respectively).

U_r, V_i >= 0, r=1, ... s and i=1, ... m are the weights (multipliers) to be determined and e y_{rj}, x_{ij} >=0 are the outputs and inputs known from the j[th] DMU. The limits Φ, Ψ are obtained a *priori*, by substituting the canonical weights of the inputs and outputs in the above proportions, and they generate a value for each DMU. Consequently, there is a set of *n* values for each variable, and the minimum and maximum for each set define the limits and importance of each variable in the DEA, without direct interference from a decision-maker.

The Figure illustrates the optimum input values that would turn an inefficient unit into an efficient one, according to this definition. In this particular case, points A, B, C and E correspond to inefficient units. Point D is an efficient unit, situated on the straight line that represents the efficient CRS frontier. The displacement of A to the efficient frontier (point P) implies the optimum input value that would make this unit efficient.



DMU - Decision Making Units
CRS - Constant Returns to Scale

Figure. Data envelopment analysis methodology: CRS frontier with efficient.

Editorial Manager(tm) for Annals of Operations Research
Manuscript Draft

Manuscript Number: ANOR-1114

Title: Canonical Correlation for the definition of weight restrictions in Data Envelopment Analysis

Article Type: Original Research

Keywords: Data Envelopment Analysis; Canonical Correlation; Efficiency

Corresponding Author: renan almeida,

Corresponding Author's Institution:

First Author: Antonio C Gonçalves

Order of Authors: Antonio C Gonçalves; Renan M Almeida, PhD; Marcos P LIns, PhD

Canonical Correlation for the definition of weight restrictions in Data Envelopment Analysis

Antonio Carlos Gonçalves. Renan Moritz Varnier Rodrigues de Almeida. Marcos Pereira Estellita Lins.

Abstract: This work investigates the use of Canonical Correlation Analysis (CCA) in the definition of weight restrictions for Data Envelopment Analysis (DEA). With this aim, the CCA limits are introduced for the Wong and Beasley DEA model. In addition, bootstrap confidence intervals for the DEA scores are estimated. An application of the method is made on data from hospitals of 27 Brazilian cities, with outputs *average admission values* and *proportion of hospital admissions* according to disease groups (International Classification of Diseases, 9th Edition), and inputs *mortality rates* and *admission length of stay* (days). In this application, performance scores were calculated for both the (CCA) restricted and unrestricted DEA models. It can be concluded that the use of CCA-based weight limits for DEA models introduces more consistency in the estimated DEA scores, while, at the same time, eliminating the need for subjectively restricting weight variation in DEA.

Key words: Data Envelopment Analysis; Canonical Correlation; Efficiency

---

R.M.V.R. Almeida

Federal University of Rio de Janeiro (Ufrj)-Coppe, Biomedical Engineering Program, Caixa Postal 68510, Cidade Universitária, 21941-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

A.C.Gonçalves

Federal Rural University of Rio de Janeiro (Ufrrj), Department of Mathematics, Rodovia BR 465 Km 7,23890-000, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

M. P. E. Lins

Federal University of Rio de Janeiro (Ufrj)-Coppe, Program of Production Engineering, Centro de Tecnologia, Bloco F, sala 105,Cidade Universitária, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Corresponding author: R.M.V.R. Rodrigues de Almeida

e-mail: renan@peb.ufrj.br

Tel: +552125628583

1 Introduction

Data Envelopment Analysis (DEA) is a methodology for estimating the relative efficiency of observation units, called the Decision Making Units - DMUs (Charnes et al. 1978; Banker et al. 1984). In this methodology, DMUs use the same type of inputs and produce the same type of outputs, differing, however, in the number of inputs required to produce a certain number of outputs. It is possible to define a DMU as efficient if it produces the maximum number of outputs for a given number of inputs; and the efficient DMUs define a line, called the efficiency frontier. The distance from this frontier to the actual production of a DMU is the DMU inefficiency, that is, by how much the production of a DMU could be improved so as to result in the same efficiency of the optimum DMUs, and a ranking of the DMUs can thus be constructed (Cooper et al. 2006).

The first application of DEA was in the assessment of public schools in the United States (Charnes et al. 1978) , and the methodology was first introduced in the health area in 1983 (Nunamaker 1983). By now, it has been used in hundreds of studies in this area, for instance concerning the relative efficiency of hospitals, nursing homes, hospices, dental services, specialized health centers or HMOs (Cooper et al. 2006). One of its main attractiveness is the capacity of performing an assessment without the need for an external “gold standard”, using, instead, the available data in order to identify units with an optimum behavior, from which meaningful standards of evaluation are developed.

However, the traditional DEA formulation allows for unrestricted (free to vary) model weights, which may result in inadequate weight values (for instance, zero, implying that a variable with no model relevance would still be used for parameter estimation). This article proposes the use of a weight restriction technique based on the Canonical Correlation Analysis (CCA) (Bouroche 1982; Friendman and Sinuany-Stern 1997), in order to define variation limits for the DEA model parameters. Model restriction limits (yielding the model virtual weights) were defined by the Wong and Beasley method (Wong and Beasley 1990). In addition, Confidence Intervals for DEA scores were obtained by the “smoothed bootstrap” bias-correction approximation, proposed by Simar and Wilson (1998). The methodology is illustrated by a comparative study of hospital performance in 27 Brazilian major cities, for which the DEA/Constant Returns to Scale (CRS) with CCA-restricted and unrestricted weights were used to generate the performance ranking scores.

2 The Constant Returns to Scale (CRS) model

One of the most used models for DEA coefficient estimation is the CRS (Constant Returns to Scale). Wong and Beasley (1990) proposed the use of *proportions* for introducing restrictions in the virtual inputs and outputs (the input/output values multiplied by the DEA model coefficients), so as to make the quantification of value judgments easier for decision-makers. In this way, decision makers could define weights as varying, e.g., between 10 and 90% of the total contribution of inputs and outputs. If we define h_0 as the model efficiency score for each DMU, $y_{rj}, x_{ij} > 0$ as the values of outputs and inputs, U_r , $V_i \geq \varepsilon$, $\forall_r$ and i as the weights given to output r and input i ; the CRS model with the additional restrictions becomes (Wong and Beasley 1990):

$$h_0 = Max \frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj_0}}{\sum_{i=i}^{m} V_i x_{ij_0}} \qquad \textbf{(1)}$$

Subject to:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}} \leq 1, \text{ j = 1,...,n, with:} \qquad \textbf{(2a)}$$

$$a_r \leq \frac{U_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}} \leq b_r \quad \text{and} \quad c_i \leq \frac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}} \leq d_i \quad \text{the model restrictions} \qquad \textbf{(2b)}$$

Above, n is the number of DMUs, s the number of outputs, m the number of inputs and ε is a positive non-Archimedean infinitesimal; and these expressions may also be converted into:

$$h_0 = Max \frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij_0}} \qquad \textbf{(3a)}$$

Subject to:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij_0} = 1, \\
\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij} \leq 0, \forall_j, \\
V_i x_{ij_0} \geq c_i, \forall_i, \\
-V_i x_{ij_0} \geq d_i, \forall_i, \\
V_i x_{ij} - c_i \sum_{i=1}^{m} V x_{ij} \geq 0, \forall_{ij \neq 0}, \\
-V_i x_{ij} + c_i \sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij} \geq 0, \forall_{ij \neq j_0} \\
U_r y_{rj} - a_r \sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} \geq 0, \forall_{rj}, \\
-U_r y_{rj} + b_r \sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj} \geq 0, \forall_{rj}, \\
U_r \geq \varepsilon, \forall_r, \\
V_i \geq \varepsilon, \forall_i.
\end{array}\right\} \qquad \textbf{(3b)}$$

3 Using CCA for calculating the bounds to the DEA weight restrictions

The CCA estimates the linear relation between two groups of (standardized) variables by finding the pair of their linear combinations with the maximum linear correlation (Bouroche and Saporta 1982). In the present case, the pair of variables are the DEA model *inputs* and *outputs.* Mathematically, these pair are defined as:

$$Z_j = V_1 x_{1j} + V_2 x_{2j} + ... + V_m x_{mj}$$

$$j = 1,.....n \tag{4}$$

$$W_j = U_1 y_{1j} + U_2 y_{2j} + ... + U_s y_{sj}$$

Where *x* and *y* are the original variables and $V_i, i = 1,....,m$; $U_r, r = 1,.....,s$ yield the maximum correlation between the new canonical variables.

The additional restrictions introduced for the proportional virtual inputs and outputs **(2b)** reflect a judgment of the value of each variable in the DEA model. The virtual output r (that is, $U_r y_{rj}$) represents the contribution of the DMU j to the model output, and the limits a_r, b_r, c_i, d_i are obtained by substituting the respective canonical weights into $\frac{U_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}}$ and $\frac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}}$ thus generating values for each DMU.

Therefore, defining U_r^1 and V_i^1 (the standardized positive canonical weights), for respectively the standardized outputs and inputs, the above proportions convert to:

$$\frac{U_r^1 y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r^1 y_{rj}} \text{ and } \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}}, \text{ with:}$$

$$a_r = \min \frac{U_r^1 y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r^1 y_{rj}}, b_r = \max \frac{U_r^1 y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r^1 y_{rj}}; \; c_i = \min \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}}, \; d_i = \max \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}}, \; j = 1...n \tag{5}$$

In addition, solving **(2b)** for U_r and V_i, one obtains:

$$\frac{W_j^1 a_r}{y_{rj}} \le U_r \le \frac{W_j^1 b_r}{y_{rj}} \text{ and } \frac{Z_i^1 c_i}{x_{ij}} \le V_i \le \frac{Z_i^1 d_i}{x_{ij}}, \tag{6}$$

with W_i^1 and Z_i^1 the first canonical variables obtained from **(4).**

Thus, a set of n values is generated, and the minimum and maximum of each set define the limits and the importance of each variable in the DEA, *without the direct interference of a decision-maker*. In addition, these limits are coherent, in the sense that the inequalities $\frac{W_j^1 a_r}{y_{rj}} \leq \frac{W_j^1 b_r}{y_{rj}}$ and $\frac{Z_i^1 c_i}{x_{ij}} \leq \frac{Z_i^1 d_i}{x_{ij}}$ will be valid for all the analyzed DMUs (following **5** and **6** above). Therefore, they may be used to generate restriction intervals for the virtual proportional outputs and inputs, since they represent the degree of connection between input and output variables.

4 Confidence intervals

Confidence intervals (CIs) for DEA efficiency scores can be estimated from an approximation proposed by Simar and Wilson (1998). In the bootstrap method, a series of random samples with replacement are obtained (resampled) from an original sample, with the idea that the distribution of an estimator in the bootstrap samples will, asymptotically, replicate the estimator true distribution. A variation of this method (the “input bootstrap”) can then be used to generate the usual percentile Confidence Interval for the DEA efficiency scores (Silverman 1986; Simar and Wilson 1998):

a) First, the original linear programming DEA problem is solved, yielding the estimates of h_i^* for the n studied DMUs.

b) Secondly, **n** random samples with replacement are selected from the set of h_i^* estimates, and these estimates are smoothed in order to obtain ($h_i^{\#}$) (Silverman, 1986).

c) Thirdly, the values of the inputs of the original sample (the “bootstrap inputs“) are adjusted using h_i^* / $h_i^{\#}$;

d) Now, using the adjusted inputs, the estimates $\tilde{\tilde{h}}_k^*$ are computed from the original model.

Steps *b)-d)* above are repeated **B** times, defining **B** sets of estimates; i.e. each DMU will have B estimates (from the B samples) of its scores. Once the number of desired samples is generated, the “bias” of the original scores is calculated as the mean of the bootstrap estimates minus the mean of the original DEA estimates. Then, a new bias-corrected estimate is defined as ($\tilde{\tilde{h}}_k^*$ - 2bias), and the usual 95% CI of each score is calculated from the obtained empirical distribution. If the empirical distribution is highly skewed, it may be preferable to use the *median* in the calculations above (Simar and Wilson 1998).

5 Application:

5.1 Material and Methods

The database used in this application was obtained from the public health system of the 27 major cities of Brazil in 2000 (see Gonçalves et al. 2007 for details on data processing and acquisition). The model used as inputs the variables: *mortality rate* (in-hospital mortality) and average length of stay in the hospital (*average stay*); and as outputs the average paid values linked to each admission (*average paid values)*; percents of admissions according to the International Classification of Diseases 9th Edition (ICD-9) chapters corresponding to *neoplasies, infectious diseases* and diseases of the *circulatory system*. The "paid values" represent payments made by the government to the public hospitals according to the procedures performed during the patient hospital stay.

The first step in the approach introduced here is to perform a canonical correlation analysis on the data, so that its results could be used for identifying the DEA model restriction intervals. Once the limits a_r, b_r, c_i, d_i were specified, two CRS models were developed for the analyzed DMUs (*without* and *with* restriction intervals). The scores thus obtained were used to rank the DMUs in a 0-100% efficiency scale, and 95% CIs were estimated, as detailed above, for the restricted model scores.

The Frontier Analyst Professional program (Banxia 1998) was used for the DEA model estimation, and the Statsoft (2001) was used for obtaining the canonical weights, canonical correlations, restriction intervals and further statistical procedures.

6 Results

Table 1 summarizes the results of the Canonical Correlation Analysis (its canonical weights and restriction intervals). Table 2 presents the DMU ranking according to the DEA-generated efficiency scores for the restricted and unrestricted models, together with the 95% CIs for the restricted case. Out of the 27 analyzed cities, four reached 100% of efficiency in the restricted model, seven achieved between 85 and 100% and 10 obtained less than 70% of efficiency. In the unrestricted model, these numbers are 6, 14 and 3, respectively.

Figure 1 compares the variation of the proportional virtual inputs obtained using the weights of the DEA model without and with restrictions (Wong and Beasley proportions method). Thus, in the DEA model without restrictions, the inputs *mortality* and *average stay* were free to vary in the range 0 - 100%, while, in the restricted model, the corresponding ranges of variation were 16 - 26% and 72 - 84%.

[Tables 1 and 2 and Figure 1 enter here]

7 Discussion

This study introduced a novel method, using Canonical Correlation Analysis, for weight restriction in DEA models. Although no study has investigated the approach proposed here, the literature already has a number of studies on the *DEA weight restrictions* topic. Thompson et al. (1986) were the first to propose the use of DEA weight restrictions to increase the discriminative ability of DEA, and the use of *virtual weights*, as mentioned, was first proposed by Wong and Beasley (1990).

Currently, one of most accepted DEA (subjective) limit restriction methods is based on percentages, which are, supposedly, easily understandable by policy decision-makers (Wong and Beasley 1990). As mentioned, in this method limits are attributed as percents of the total possible variation of a virtual input (for instance, [10 – 90%]). More recently, some approached have been proposed for the specification of DEA weights lower and upper bounds. Chang and Chen (2007) introduced a simple statistical approach for defining the lower and upper bounds of DEA weights, in order to reduce their variation across DMUs. In this approach, restrictions are subjectively introduced taking into account the mean and standard deviation of a set of weights first generated by a DEA model. Also Wang et al. (2009) proposed a methodology for defining a lower bound for weight restrictions, using the opinion of a decision maker who defines how many DMUs are to be defined as “efficient”. Other interesting contributions to this subject concerned the suggestion of not including inputs which would result in weights of value zero and the use of input and output data from pre-selected “efficient” DMUs, in order to simulate DEA restrictions (Charnes et al. 1990; Dyson and Thanassoulis 1988).

The CRS-DEA model demands a direct association between inputs and outputs, that is, an increase in an input should result in a proportional increase in the output. However, CCA can yield negative weights (an inverse input-output association). If this were the case, one would have to conclude that the set of chosen inputs would not be adequate for the analysis (Sengupta 1990). Therefore, only positive CCA weights can be incorporated in the model, and offending variables would have to be discarded from the study. In this way, the input variables are consistent with the basis of DEA theory, and the efficiency scores are contingent on the statistical importance of the chosen variables.

Although not involving the specification of weight limits, Canonical Correlation Analysis has been used in conjunction with DEA by, e.g., Friedman and Sinuany-Stern (1997). In their method, Canonical Correlation Analysis was used to provide a full rank scaling for all DMUs, rather than a categorical classification (efficient and inefficient units), as done in DEA.

As discussed, the mathematical structure of the traditional DEA models frequently defines a DMU as efficient although some of its inputs are, in fact, not relevant for the model, due to their null weights. The use of weights from a Canonical Correlation Analysis, in conjunction with the Wong and Beasley proportions, eliminates this possibility, while, at the same time, guaranteeing that the impact of the inputs is more objectively assessed, since the degree of canonical correlation indicates the relevance of the selected variables for the DEA model (Sengupta 1990; Friedman and Sinuany-Stern 1997).

Figure 1 shows the difference of variation between the DEA unrestricted and restricted models, indicating that much less dispersion is to be obtained by the CCA approach, since model weights tend to “follow” the (less dispersed) CCA weights. It also can be seen that the DEA model without restrictions could result in “zero values”, which, as discussed, could not be justifiably accepted in the model.

In the present work the developed methodology was illustrated with an application to data concerning hospital performance (mortality rates and patient length of stay – *inputs*; paid values and percent of admissions – *outputs*). These variables were standardized and treated as dimensionless for obtaining the weight restrictions in Equations (2). Table 2 presents the results of the DEA scores estimation, and it may be noted (Allen et al. 1997) that the scores of the restricted model are, at most, equal to those of the unrestricted case. Although no variation is seen at the top (four of the most efficient cities) or at the very bottom (the least efficient city) of the analyzed DMUs, substantial disagreement arose for the remaining DMUs. For instance, the cities that are ranked 10th and 11th in the unrestricted model are ranked respectively 24th and 21th in the restricted analysis. Similarly, the use of confidence intervals reduces the need of subjectively grouping DMUs according to their scores, since the CI overlapping can be used to this end. This reduction in subjectivity (were possible) is a desirable goal for scientific analysis, since it allows for discussions to proceed in a more formal, structured manner. Given that the theoretical distribution of the DEA scores is unknown, computer-intensive approaches become the method of choice for the definition of confidence intervals in DEA problems (Simar and Wilson 2000).

A limitation of the use of Wong and Beasley restriction intervals for DEA weights is that **(2b)** may imply in linear problems that are not solvable (Allen et al. 1997). For instance (following an example of Sarrico and Dyson 2003), consider a variable with a defined importance between 5% and 15%. If the maximum and minimum values for this variable are 100 and 1, one obtains (according to **2**): $5\% \leq U_r y_{rj} \leq 15\% \forall_j$; and then $\frac{0.05}{\min(y_{rj})} \leq U_r \leq \frac{0.15}{\max(y_{rj})} \Leftrightarrow 0.05 \leq U_r \leq 0.0015$; what is clearly impossible. In the approach presented here, however, these limits are chosen (see Equations **5** and **6**) so that one would always arrive at consistent inequalities for all DMUs.

8 Conclusion

The aim of the present study was to introduce the use of the canonic weights, obtained from a Canonical Correlation Analysis, for the definition of weight restriction in a Wong and Beasley Data Envelopment Analysis. One of the methodological advantages of this approach is that a Canonical Correlation Analysis is performed on data with the same structure that is needed for a DEA analysis (that is, a set of inputs and outputs that are linearly related). This makes CCA a natural option for weight limit estimation, eliminating the need for the introduction of DEA subjective restrictions.

References

Allen, R., Athanassopoulos, A.D., Dyson, R.G., Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgments in Data Envelopment Analysis: evolution, development and future directions**.** *Annals of Operations Research*, 73**,**13-34.

Banker, R.D., Charnes, A., Coope,r W.W. (1984). Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science* ,30(9),1078-92.

Banxia. (1998). Frontier Analyst Professional. Banxia Holdings Limited. Glasgow, Scotland.

Bouroche, J.M., Saporta, G. (1982). L'Analyse des Données*,* Presses Universitaires de France, Paris.

Chang, S.Y., Chen, T.H. (2007). A Simple Approach to Adjust Factor Weights in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 24 (2), 120-127.

Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.

Charnes, A., Cooper, W.W., Huang, Z.M., Sun, D.B. (1990). Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks. *Journal of Econometrics*, 46**,** 73-91.

Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K. (2006). Introduction to Data Envelopment Analysis and its uses. New York: Springer.

Davison, A.C., Hinkley, D.V. (2003). Bootstrap methods and their application. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge, UK.

Dyson, R.G., Thanassoulis, E. (1988). Reducing weight flexibility in data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 39**,** 563-576.

Friedman, L., Sinuany-Stern, Z. (1997). Scaling units via the canonical correlation analysis in the AED context. *European Journal of Operational Research*, 100**,** 629-637.

Gonçalves, A.C., Noronha, C.P., Lins, M.P.E., Almeida, R.M.V.R. (2007). Data envelopmente analysis for evaluating public hospitals in Brasilian state capitals. *Revista de Saúde Pública/Journal of Public Health*, 41(3), 427-435.

Nunamaker, T.R. (1983). Measuring routine nursing service efficiency: a comparison of cost per patient day and Data Envelopment Analysis models. *Health Services Research*, 18(2), 183-208.

Sarrico, C.S., Dyson, R.G. (2003). Restricting virtual weights in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 159**,**17-34.

Sengupta, J.K. (1990). Tests of efficiency in Data Envelopment Analysis. *Computers & Operations Research*, 17(2),123-132.

Silverman, B.W. (1986). Density estimation for statistics and data analysis*.* Chapman and Hall, London UK.

Simar, L., Wilson, P.W. (1998). Sensitivity analysis of efficiency scores: how to bootstrap in nonparametric frontier models. *Management Science*, 44(1), 49-61.

Simar, L., Wilson, P.W. (2000). Statistical inference in nonparametric frontier models: the state of the art. *Jounal of Productivity Analysis*, 13**,** 49-78.

Thompson, R.G., Singleton, F.D., Thrall, R.M., Smith, B.A. (1986). Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas. *Interfaces*,16, 35-49.

Statsoft Inc. (2001). Statistica Manual version 6. Statsoft Inc, Tulsa, Oklahoma USA.

Wang, Y.M., Luo, Y., Liang, L. (2009). Ranking decision-making units by imposing a minimum weight restriction in the data envelopment analysis**.** *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223(1), 469-484,

Wong, Y.H.B., Beasley, T.E. (1990). Restricting weight flexibility in DEA. *Journal of the Operational Research Society*, 41**,** 829-835.

Table 1. Canonical Correlation-derived weight restriction intervals for DEA variables (a_r, b_r, c_i and d_i: see Equation **(2b)**, U^1, V^1: see Equation **(5)**; *input x output* correlation coefficient $R = 0.78$, $p = 0.001$).

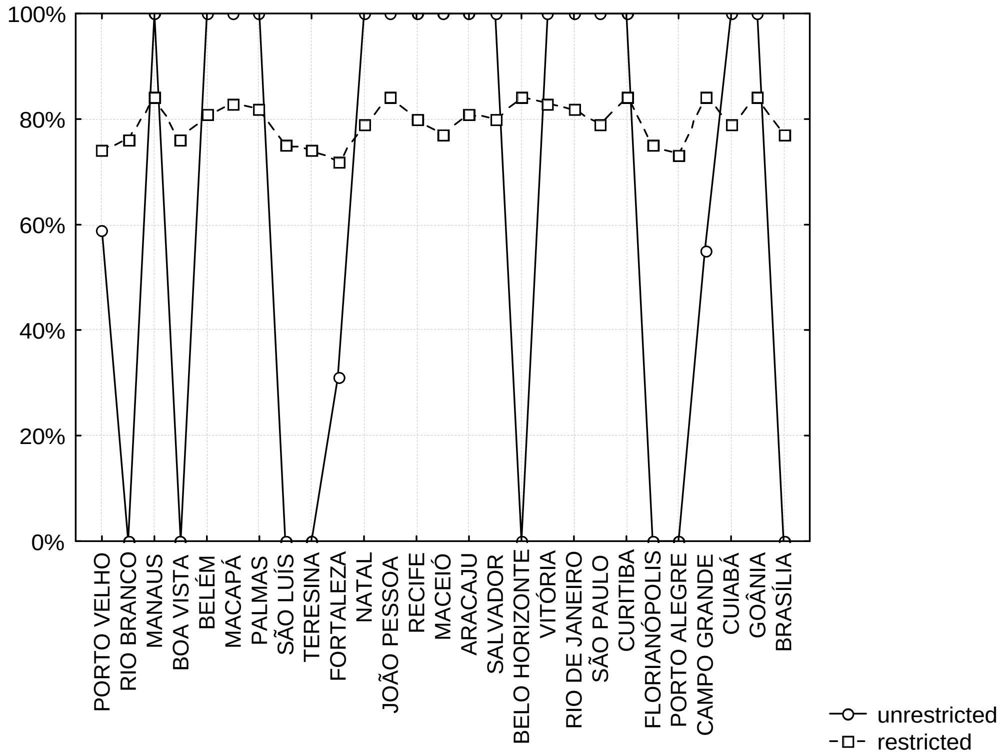
Variables	**Restriction intervals (%)**	**Canonical weights**
Inputs	$c_i - d_i$	V_i^1
Average stay	[0.68 – 0.84]	0.72
Mortality	[0.16 – 0.32]	0.36
Outputs	$a_r - b_r$	U_r^1
Average paid values	[0.27 – 0.47]	0.46
Circulatory	[0.07 – 0.27]	0.25
Infectious diseases	[0.17 – 0.58]	0.58
Neoplasies	[0.01 – 0.37]	0.66

Table 2. Efficiency scores (unrestricted and restricted models) and Confidence Intervals (CI) ("smoothed bootstrap", B=40). DMUs ranked in descending order.

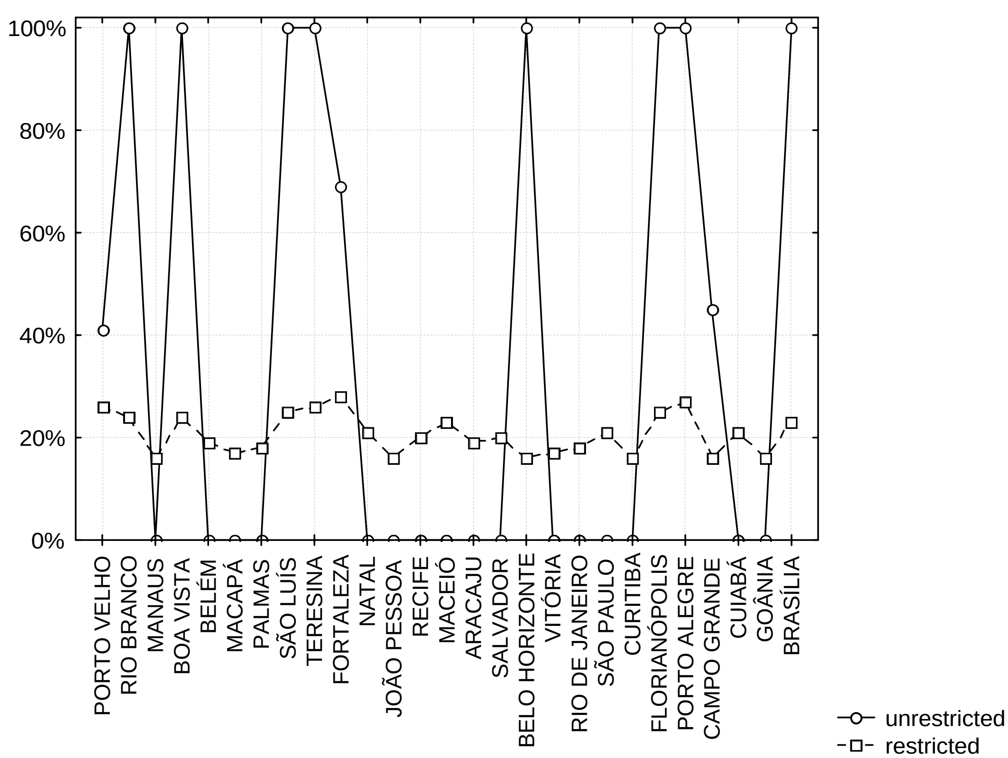
DMUs	Unrestricted model	*DMUs*	Restricted model	95% CI (restricted model)
Teresina	100	*Teresina*	100	96 –102
Palmas	100	*Palmas*	100	97 –101
Macapá	100	*Macapá*	100	94 –104
Goiânia	100	*Goiânia*	100	94 –106
Vitória	100	*Curitiba*	95	86 –105
Curitiba	100	*Campo Grande*	91	82 –102
São Paulo	99	*São Paulo*	86	78 – 98
Porto Alegre	98	*Manaus*	82	73 – 87
Campo Grande	96	*Porto Alegre*	80	69 – 87
Florianópolis	92	*Belém*	80	71 – 91
Brasília	92	*Belo Horizonte*	77	67 – 89
Belo Horizonte	88	*São Luís*	75	64 – 83
Belém	87	*Fortaleza*	74	64 – 82
Manaus	85	*Vitória*	73	64 – 77
Aracaju	84	*Maceió*	72	62 – 79
Cuiabá	84	*João Pessoa*	72	62 – 78
Boa Vista	81	*Cuiabá*	71	65 – 76
Maceió	80	*Aracaju*	70	62 – 75
Fortaleza	80	*Recife*	69	60 – 74
São Luís	78	*Rio Branco*	68	59 – 72
Rio Branco	77	*Brasília*	67	60 – 71
Recife	75	*Porto Velho*	67	59 – 76
João Pessoa	73	*Rio de Janeiro*	67	59 – 75
Rio Janeiro	72	*Florianópolis*	64	54 – 68
Natal	70	*Natal*	63	53 – 72
Porto Velho	68	*Boa Vista*	63	57 – 69
Salvador	67	*Salvador*	61	51 – 65

Fig. 1. Total weight input comparison, (CCA)-restricted and unrestricted DEA models with inputs *average stay* **(a)** and *mortality* **(b)**.

a)



b)



Editorial Manager(tm) for Central European Journal of Operations Research
Manuscript Draft

Manuscript Number: CJOR-D-09-00187

Title: Defining weight restriction limits in Data Envelopment Analysis through linear regression with an application in hospital evaluation

Article Type: Original Paper

Corresponding Author: Mr. Antonio Carlos Gonçalves, Jr.

Corresponding Author's Institution: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

First Author: Antonio Carlos Gonçalves, Jr.

Order of Authors: Antonio Carlos Gonçalves, Jr.; Chaves E M.M; Almeida R M.R; Samanez C P; Lins MPE

Abstract: Abstract This study presents a new approach for the definition of weight restrictions in Data Envelopment Analysis (DEA), by using the results of a linear regression model (LRM) with the same DEA variables. Methods: A LRM was developed for 20 public hospitals using as output the number of hospital admissions for low-complexity gastric surgeries; and as inputs the number of surgery beds and the patients total length of stay. Weight restrictions for a DEA model were then obtained by the Wong-Beasley (using the values of the regression coefficients to assign ranges of variation for the weights) and Cone Ratio methods (using the upper and lower values of the regression confidence intervals to assign restrictions to the ratio of the weights). Results: The regression coefficients were 0.61; 95%CI [0.34-0.88] (length of stay) and 0.41; [0.14-0.69] (number of beds); R2=0.77. The hospital rankings indicated as the most efficient unit a well-established reference hospital for surgeries. Conclusions: Both rankings were consistent and interpretable, and the approach circumvents the need of the subjective intervention of a decision-maker when defining weight restrictions in DEA.

Key words: Data Envelopment Analysis, Regression, OR in health services, weight restrictions

Suggested Reviewers:

Defining weight restriction limits in Data Envelopment Analysis through linear regression with an application in hospital evaluation

A.C Gonçalves. E M.M Chaves. R M.R.Almeida. C P.Samanez. MPE Lins

A.C Gonçalves
Mathematics Department, Rural Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

E M.M Chaves
Health Secretariat, Rio de Janeiro City, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

R M.R.Almeida
Program of Biomedical Engineering, COPPE, Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brazil
e-mail:renan@peb.ufrj.br

C P.Samanez
Industrial Engineering Department, PUC, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

MPE Lins
Production Engineering Program - Coppe – Federal University of Rio de Janeiro

Address of corresponding author:

Prof r. Antonio C Gonçalves

Rua General Roca 559 Ap 601

Tijuca- Rio de Janeiro

20521-070 Rio de Janeiro

Tel: +552122344533

e-mail: antoniogon@ufrrj.br

Defining weight restriction limits in Data Envelopment Analysis through linear regression with an application in hospital evaluation

Abstract This study presents a new approach for the definition of weight restrictions in Data Envelopment Analysis (DEA), by using the results of a linear regression model (LRM) with the same DEA variables. **Methods**: A LRM was developed for 20 public hospitals using as output the number of hospital admissions for low-complexity gastric surgeries; and as inputs the number of surgery beds and the patients total length of stay. Weight restrictions for a DEA model were then obtained by the Wong-Beasley (using the values of the regression coefficients to assign ranges of variation for the weights) and Cone Ratio methods (using the upper and lower values of the regression confidence intervals to assign restrictions to the ratio of the weights). **Results:** The regression coefficients were 0.61; 95%CI [0.34-0.88] (length of stay) and 0.41; [0.14-0.69] (number of beds); R^2=0.77. The hospital rankings indicated as the most efficient unit a well-established reference hospital for surgeries. **Conclusions:** Both rankings were consistent and interpretable, and the approach circumvents the need of the subjective intervention of a decision-maker when defining weight restrictions in DEA.

Key words: Data Envelopment Analysis, Regression, OR in health services, weight restrictions

1 Introduction

Data Envelopment Analysis (DEA) is a methodology widely used for the performance evaluation of Decision Making Units (DMUs), with many applications in the health area, for instance, pertaining to the comparative evaluation of hospitals, clinics or other health units (Gonçalves et al. 2007; Kirigia et al. 2008; Nayar and Ozecan 2008; Kontodimopoulos et al. 2009). Its main advantage is the use of actual data for the definition of evaluation standards, so that no extraneous “gold standard” is needed for their comparison. Thus, (e.g.) health units are compared against the best units among those analyzed, according to pre-defined, relevant variables.

A problem sometimes faced by DEA is that it depends on an input/output optimization procedure in order to develop its main comparison parameters (the *efficiency scores*), but the original DEA formulation (Charnes et al. 1978) allows for a complete variation of the weights used in this procedure. Thus, null weights may be obtained, indicating that a variable should, in fact, be discarded (the DEA *weight restriction problem*). While some methodologies have been proposed to deal with this problem (e.g. the introduction of arbitrary variation limits by a decision maker), generally these approaches have the disadvantage of being dependent on the subjective interference of analysts.

The present paper proposes a new approach: the use of Linear Regression models to allow for the definition of the weight variation limits without the interference of a decision maker. Two classical methods of weight restriction are used in conjunction with the technique proposed here: the Wong and Beasley (W-B) and the Cone Ratio (Wong and Beasley 1990; Charnes et al. 1990). The methodology is applied to data referring to surgery admission in public hospitals of Rio de Janeiro city, Brazil.

2 Materials and methods

The Constant Returns to Scale(CRS) model

The aim of a DEA model is to compare the relative performance of similar Decision Making Units (DMUs), taking into account defined inputs and outputs. In the case of multiple inputs and/or outputs, the original DEA formulation by Charnes et al. (1978) below, efficiency is defined as the ratio between a weighted sum of outputs and a weighted sum of inputs, which assumes constant returns to scale and that all input and output levels for all DMUs are strictly positive.

The CRS model measures the efficiency for the DMU $_{j_0}$ is calculated as:

$$h_0 = Max \frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj_0}}{\sum_{i=i}^{m} V_i x_{ij_0}} \text{ ; subjected to:} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}} \le 1, \; j = 1...n \; ; \qquad \textbf{(2)}$$

W-B restrictions are then defined as:

$$a_r \le \frac{U_r y_{rj}}{\sum_{r=1}^{s} U_r y_{rj}} \le b_r \qquad \textbf{(3)}$$

$$c_i \le \frac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}} \le d_i \qquad \textbf{(4)}$$

$$U_r, V_i \ge \varepsilon \,, \; \forall_r \text{ e } i \,,$$

where $y_{rj}, x_{ij} > 0$ are the amouts e output r and input i of DMU$_j$, U_r = the weight given to output r, V_i = the weight given to input i, $n =$ the number of units, $s =$ the number of outputs, $m =$ the number of inputs, $\varepsilon =$ a positive non-Archimedean infinitesimal.

The Cone Ratio method (Charnes et al. 1990; Thompson et al. 1990) provides the formulation of homogenous linear restrictions in the DEA model as:

$$\sum_{i=1}^{m} k_{iw} V_i \geq 0 \text{ and/or } \sum_{r=1}^{s} l_{rz} U_r \geq 0 \; (w = 1, \ldots.., p \text{ and } z = 1, \ldots.., q) \quad \textbf{(5)}$$

Above, k and l are weights that allow for the inclusion, in the model, of the opinion of a decision-maker, and w and z represent the number of weight restrictions pertaining respectively to the inputs and outputs.

In the non-restricted case, the efficiency measure h_0^* represents the radial factor that determines by how much an input should be changed in order to turn a DMU from inefficient into efficient. In the CRS model with additional input/output restrictions, it is not necessary for h_0^* to actually approach this factor, that is, the input targets may or may not lead a DMU to efficiency (Allen et al. 1997; Lins et al. 2007). However these may still be considered as targets for DMU performance improvement (Allen et al. 1997).

Multiple linear regression

The well known Multiple Linear Regression model tries to represent the relationship between two or more variables (called predictors, inputs, independent or explanatory variables) and a dependent (response) variable by fitting a linear equation to data. The independent variables are commonly represented as $x_{ij} (i = 1, \ldots.., m; \; j = 1, \ldots.., n)$, and the dependent variable as y_j (Krzanowski 1998).

The population regression model for the m explanatory variables $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}$ is $y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_m x_{mj} + e_j$, and this model describes how the mean response y_j changes with the independent variables. The observed values of y vary about their means and are assumed to have the same standard deviation for any level of the independent variables. The sample-fitted values $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots.., \hat{\beta}_m$ estimate $\beta_0, \beta_1, \ldots.., \beta_m$.

Since the observed values for y_j vary about their population means μ_j, the multiple regression model can be expressed as **observations = fit + residual**, where "fit" represents $\beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_m x_{mj}$; and "residual", also called "error", represents the deviations (e_j) of the observed values y_j from their population means μ_j. The residuals are supposed to be Normally distributed with mean 0 and variance σ (if these assumptions cannot be satisfied, another modeling strategy should be adopted). The values fit by the equation $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1j} + \hat{\beta}_2 x_{2j} + \ldots.. + \hat{\beta}_m x_{mj}$ are written as $\hat{y}_j$, and the estimated residuals $\hat{e}_j$ are given by $y_j - \hat{y}_j$ (the difference between observed and fitted values in a sample). The multiple linear regression model is usually estimated by minimizing the sum of the squares of the residuals (the least squares method).

In the significance tests for the independent variables of the multiple regression model, the null hypothesis is that the coefficient β_i is equal to 0; and the test statistic t is based on the parameter estimate ($\hat{\beta}_i$) divided by its standard deviation ($S(\hat{\beta}_i)$), that follows a Student-$t_{(n-m-1)}$ distribution when the model is estimated in a sample of size *n* and has m independent variables. A confidence interval for the parameter β_i may then be computed from $\hat{\beta}_i$ as $\hat{\beta}_i \pm t^* S(\hat{\beta}_i)$; with t^* the respective critical value of the t-distribution for, e.g., 95% confidence (Krzanowski 1998).

Additional restrictions through the CRS model

Additional restrictions to the inputs and outputs given in **(3)** and **(4)** may be introduced, reflecting a judgment of the relative importance of the model variables, with the *virtual input* j ($V_i x_{ij}$) representing the contribution of input i to DMU_j. In the special case where $r = 1$(one output variable), the contribution of output to DMU_j is 100% ($U_r = 1$). The regression equation for the inputs x_{1j}, $x_{2j}, \ldots, x_{mj}$ is given by $y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_m x_{mj} + e_j$ ($e_j \geq 0$); and $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_m$ are the mentioned sample estimates of the population parameters $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$. Then, the c_i and d_i limits are initially defined by substituting the coefficients of the standardized regression variables, $\hat{\beta}_i = V_i^1$ in: $\dfrac{V_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i X_{ij}} \ \forall_{i,j}$.

Thus, n values are obtained for each variable, and the minimum and maximum of these values determine the limits that can be assumed for each variable in the DEA model. For $j = 1, \ldots$n:

$$c_i = \min \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}} \qquad \textbf{(6)}$$

$$d_i = \max \frac{V_i^1 x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}} \qquad \textbf{(7)}$$

Solving **(4)** for V_i and introducing V_i^1 in $\sum_{i=1}^{m} V_i x_{ij}$ one gets:

$$\frac{Yc_i}{x_{ij}} \leq V_i \leq, \frac{Yd_i}{x_{ij}} \ , \qquad \textbf{(8)}$$

with $Y = \sum_{i=1}^{m} V_i^1 x_{ij}$.

Thus, ($\dfrac{Yc_i}{x_{ij}} \leq, \dfrac{Yd_i}{x_{ij}}$) are consistent limits for all DMUs**.**

Given that the statistically significant $V_{i_s}^1 > 0$ indicate the importance of variables in the DEA model, these estimates may be used in order to generate restriction intervals for the virtual input proportions. Thus, the proportion of increase in an output that can be attributed to an increase in an input is used to determine the importance of the input, and the confidence interval limits for the input are the restriction limits of its weights in the DEA model (Sengupta 1990).

Confidence Intervals for the Cone Ratio method

The upper and lower bounds of the (95%) regression Confidence Intervals may be used so as to define weight restrictions through the Cone Ratio method when $r = 1$. If k_{iw} and k_{it} are the minimum and maximum of these weight values, a relationship of the type $k_{iw} \le \frac{V_i}{V_g} \le k_{it}$ (i ≠ g; $t \ne w$) may be defined, where V_i and V_g represent the input weights in the DEA model. In this case, k_{iw} and k_{it} are respectively the minimum and the maximum values in the set generated by all pairs of lower confidence limit ratios and of upper confidence limit ratios. For instance, if two variables were available, one would have: k_{iw}= min(LL_1/LL_2; UL_1/UL_2); k_{it} =max(LL_1/LL_2; UL_1/UL_2) (LL and UL respectively the lower and upper confidence limits in the regression model). For the general case of m inputs, $2C_m^2$ relations of the type $(\hat{\beta}_i \pm t^{\bullet} S(\hat{\beta}_i)) / (\hat{\beta}_g \pm t^{\bullet} S(\hat{\beta}_g))$ are available, and, consequently, $2C_m^2$ inequalities (restrictions of type **(5)** for inputs) are generated as:

$$V_i - k_{iw} V_g \ge 0 \text{ and } -V_i + k_{it} V_g \ge 0 \qquad \textbf{(9)}$$

It is possible, then, to specify the weight restrictions as a matrix $W(v,u) \ge 0$, in which $v = (V_i, V_g)$ is the input vector of weights and $u = (U)$ is the single element vector representing the model output. Thus, W is formed with rows (1 -k_{iw} 0), (-1 k_{it} 0) and (0 0 1), corresponding to the weight restrictions and to the single value vector above.

Application

The database used in the present application was obtained from hospital admissions in 20 public hospitals in the city of Rio de Janeiro, Brazil, 2005. That year, these hospitals had 14593 admissions for low complexity procedures in the sub-specialty "gastric surgery". The *Frontier Analyst Professional program* (Banxia Frontier Analyst Professional 1988) was used for the DEA model estimation, and the Statsoft Inc (2001) program was used for other statistical calculations. The model inputs were the number of *surgical beds* and the patients total *length of stay*, and the model output was the number of low-complexity *admissions* for gastric surgeries.

The results of the linear regression model were used in order to identify the restriction intervals for the input variables of the DEA model. Once the c_i, d_i limits explained above were defined, a CRS model was built, providing the W-B weight limits for the DEA variables (Wong and Beasley 1990). Following that, weight limits were also obtained by the Cone Ratio method (Charnes et al. 1990), using the confidence intervals of the linear regression parameters, as previously described. Thus, two classification results were obtained, one using the Wong and Beasley and the other the Cone Ratio methods.

3 Results

The analyzed hospitals data may be seen in Table 1, and Table 2 presents the restriction intervals together with the linear regression results. The percent of explained variation in the linear regression model was $R^2 = 0.77$. Normality and homoscedasticity regression assumptions were visually inspected and considered acceptable. The residual independence hypothesis was checked by the Durbin-Watson statistics and also accepted (*d* statistics = 1.85).

Table 3 presents the DMUs ranking according to the two methods (W-B and Cone Ratio), with the limit restrictions previously discussed. The W-B relationships are obtained from equations **(6)** and **(7)**, substituting Vi respectively by 0.61 and 0.41 (the linear regression model coefficients – Table 2); what results in the restriction intervals [0.39 – 0.83] (for the input *length of stay*) and [0.17 – 0.61] (for *number of beds*) The rows of the matrix W, which represent the relation between the weights for the Cone Ratio method, is derived from **(9)** as:

$$k_{iw} = \frac{0.885}{0.686} \leq \frac{V_1}{V_2} \leq \frac{0.340}{0.141};$$

where V_1 and V_2 represent the weights of *length of stay* and *surgical beds*, respectively. Solving the inequalities above for V_1 and V_2, one obtains: $V_1 - 1.29V_2 \geq 0$ and $-V_1 + 2.41V_2 \geq 0$, in which the coefficients are the rows of the matrix W.

[Tables 1, 2 and 3 enter around here]

4 Discussion and conclusions

Few studies have discussed techniques dealing with the problem of specifying limit restrictions in DEA models. Thompson *et a*l. (1986) were the first to propose the use of such restrictions in order to improve DEA classification metrics, and other interesting studies on this subject (Dyson and Thanassoulis 1988; Charnes et al. 1990; Halme et al. 1999) tried to use pre-defined DMUs as gold standards or looked into ways to incorporate decision-maker subjective experiences into the DEA model.

The present paper used two weight restriction methods widely found in the DEA literature: the Wong-Beasley and the Cone Ratio. The first proposes that the decision maker or analyst should set an upper and a lower bound, [c_i; d_i], so as to define suitable limits for the importance of input i to DMU j. The second (Charnes et al.1990; Khalili et al. 2009) uses the concept of *assurance regions* (ARs) to impose constraints on the relative magnitude of the weights (in the present case as defined by **(9)**). As mentioned, the main difference between the ARs and the W-B methods is that, instead of defining absolute weight ranges, the ARs define ranges for the *ratio* of the weights (Khalili et al. 2009).

It should be noticed, however, that both methods still demand the subjective input of a decision-maker in order to allow for weight bound to be set, and an important characteristic of approach introduced here is that restrictions are not dependent on such opinions. Thus, the proposed restriction intervals are obtained directly from the available variables. It is known that the Wong and Beasley approach can yield non solvable linear problems (Sarrico and Dyson 2004), a limitation that is avoided in the Cone Ratio method (Charnes et al. 1990) and by the limits proposed here, as indicated by Equations **6-8**.

As said, the mathematical structure of the DEA models allows for the fact that a DMU may be considered as efficient because some of the model input variables are assigned null weights. These null weights, however, imply that the offending variable is actually not relevant for the model, and should have been excluded from the analysis. The use of the LRM coefficients, together with the Cone Ratio method precludes this possibility, yielding a more meaningful and interpretable model. The Wong and Beasley estimation (Equation **4**) is based on the values of the regression coefficients, while the Cone Ratio method uses the inferior and superior confidence interval limits of these coefficients. Although the intervals thus obtained were similar, they are not mathematically equivalent, that is, it is not possible to directly arrive at one of them starting from the other.

Regarding the hospital rankings obtained in the present study, those units that displayed a good performance were, in general, "elective surgery" hospitals (such as the first three on Table 3). This is the mirror image of the "emergency surgery" hospitals at the bottom of this table, which deal with a larger proportion of higher-complexity patients. The first ranked hospital (with 100% efficiency in both the Wong and Beasley and the Cone Ratio scales) has been traditionally considered as a surgical reference hospital in the city. This hospital has a closed, well-defined reference population (basically fire-fighter personnel and their families) and a clear "elective surgery" profile, what differentiates it from the remaining analyzed hospitals. It also may be noted in this table that the largest *W-B - Cone Ratio* score differences were obtained for the hospitals at the top of the score ranks (on the 2nd, 3rd and 5th - 8th positions). These hospitals represent three large city hospitals, a large Federal general hospital, a university-affiliated hospital and the largest charity hospital in the city (the fourth ranked hospital, with similar scores in both scales, is a smaller-sized university-affiliated Federal hospital). However, the reason for these discrepancies is not completely clear and should be further investigated.

In conclusion, the present paper introduced a novel methodology for defining weight restrictions in DEA models, taking into account the information obtained from a linear regression developed from the DEA inputs and output. This procedure was used in conjunction with the DEA Wong and Beasley and Cone Ratio methods, and allowed for a consistent and interpretable ranking of 20 public hospitals. The problem of the subjective introduction of restrictions by a decision-maker can thus be circumvented.

Acknowledgements: This work was partially financed by a grant of the Brazilian Council for Research (CNPq) No. 307498/2007-7.

References

Allen R, Athanassopoulos A, Dyson RG, Thanassoulis E (1997) Weights restrictions and value judgments in Data Envelopment Analysis: evolution, development and future direction. Ann Oper Res 73: 13-34

Banxia Frontier Analyst Professional (1988) Banxia Holdings Limited.http://www.banxia.com/frontier/index.html. Accessed 27 octuber 2009

Charnes A, Cooper WW, Rhodes E (1978) Measuring the efficiency of decision-making units. Eur J Oper Res 2(6): 429-444

Charnes A, Cooper WW, Huang ZM, Sun DB (1990) Polyhedral cone-ratio DEA models with an illustrative application to large commercial banks. J Econometrics 46: 73-91

Dyson RG, Thanassoulis E. Reducing weight flexibility in Data Envelopment Analysis (1988) J Oper Res Soc 39 (6): 563-576

Gonçalves C, Lins MPE, Almeida RMVR (2007) Data Envelopment Analysis for evaluating public hospitals in Brasilian state capitals. Rev Saúde Púb 41(3): 427-435

Halme M, Joro T, Korhonen P, Salo WJ (1999) A value efficiency approach to incorporating preference information in Data Envelopment Analysis. Manag Sci 45: 103-115

Khalili M, Camanho AS, Portela MCAS, Alirezaee MR (2009) The measurement of relative efficiency using Data Envelopment Analysis with assurance regions that link inputs and outputs. Eur J Oper Res. doi: 10.1016/j.ejor.2009.09.002

Kirigia JM, Emrouznejad A, Cassoma B, Asbu EZ, Barry SA (2009) Performance assessment method for hospitals: the case of municipal hospitals in Angola. J Med Syst 32(6): 509–519

Kontodimopoulos N, Papathanasiou ND, Tountas Y, Niakas D (2009) Separating managerial inefficiency from influences of the operating environment: An application in dialysis. J Med Syst 10.1007/s.10916-009-9252-2 Article by DOI

Krzanowski W J (1998) An Introduction to Statistical Modelling. Edward Arnold, London

Lins MPE, Sollero MKV, Calôba GM, Silva ACM (2007) Integrating the regulatory and utility firm perspectives, when measuring the efficiency of electricity distribution. Eur J Oper Res 181(3): 1412-1424

Nayar P, Ozcan YA (2008) Data envelopment analysis comparison of hospital efficiency and quality (2008) J Med Syst 32 (3): 193–199.

Sarrico CS, Dyson RG (2004) Restricting virtual weights in Data Envelopment Analysis. Eur J Oper Res 159: 17-34.

Sengupta JK (1990) Tests of efficiency in Data Envelopment Analysis. Computers Ops Res 17(2): 123-132

Statsoft Inc (2001) Statistica Manual version 6. http://www.statsoft.com. Accessed 12 June 2009

Thompson RG, Singleton FD, Thrall RM, Smith BA (1986) Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas. Interfaces 16: 35-49.

Thompson RG, Langemeier LN, Lee CT, Lee F, Thrall RM (1990) The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. J Econometrics 46: 93-108

Wong YHB, Beasley JE (1990) Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis. J Oper Res Soc 41: 829-835.

Table 1 Input and output variables for a DEA study, 20 public hospitals in Rio de Janeiro, Brazil, 2005. Output: number of hospital *admissions* for low-complexity gastric surgeries. Inputs: number of *surgery beds* and patients total l*ength of stay* (days).

	Output	*Inputs*	
Hospital	*Admissions*	*Surgery beds*	*Length of stay*
Albert Schweitzer	169	13	1274
Andaraí	564	52	7195
Aristarcho Pessoa	251	10	957
Cardoso Fontes	328	34	3122
Carlos Chagas	598	38	7630
Clementino Filho	1136	62	8565
Gafreè Guinle	840	36	3759
Getúlio Vargas	971	62	7771
Lagoa	238	26	1434
Lourenço Jorge	788	33	5250
Miguel Couto	1262	71	11503
Pedro II	387	22	2677
Pedro Ernesto	1056	44	6867
Piedade	619	19	2788
Polícia Militar	320	33	1954
Rocha Faria	494	30	4647
Salgado Filho	1264	37	7948
Servidores	1500	39	8686
Souza Aguiar	1129	102	8837
Sta Casa	1679	212	6348

Table 2 Results of a linear regression model based on a DEA inputs (*length of stay, number of beds*) and output (*number of low-complexity gastric surgeries*), 20 public hospitals, Rio de Janeiro, Brazil, 2005. Model $R^2 = 0.77$ ($p = 0.000003$)

Inputs	*standardized coefficients*	*p-values*	*95% CIs*
Length of stay	0.61	(0.0002)	[0.34 – 0.88]
Number of beds	0.41	(0.0051)	[0.14 – 0.69]

Table 3 DEA efficiency scores for 20 public hospitals developed with the help of the W-B and Cone Ratio weight restriction methods. In lieu of a subjective restriction introduced by a decision-maker, the values of the *inputs x output* linear regression coefficients (with the W-B method) or of the linear regression CIs (with the Cone Ratio) were used for defining weight variation.

Hospital	*W-B*	*Cone Ratio*
Aristarcho Pessoa	100.00	100.00
Piedade	100.00	85.38
Servidores	95.51	66.78
Gafreè Guinle	88.46	85.38
Salgado Filho	86.56	61.47
Pedro Ernesto	71.59	59.19
Sta. Casa	70.79	97.98
Lourenço Jorge	70.59	57.79
Pedro II	60.85	55.41
Clementino Filho	58.50	50.95
Polícia Militar	55.79	61.93
Lagoa	55.40	62.67
Getúlio Vargas	53.19	47.92
Miguel Couto	52.09	42.25
Albert Schweitzer	51.11	50.61
Rocha Faria	49.29	40.92
Souza Aguiar	47.75	48.64
Carlos Chagas	41.36	30.27
Cardoso Fontes	39.73	40.73
Andaraí	34.59	30.12