

DECOMPOSIÇÃO POR CLIQUES MAXIMAIS E SUBGRAFOS PROIBIDOS
PARA GRAFOS DE CAMINHO

Hugo de Holanda Cunha Nobrega

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Márcia Rosana Cerioli
Jorge Petrucio Viana

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2011

DECOMPOSIÇÃO POR CLIQUES MAXIMAIS E SUBGRAFOS PROIBIDOS
PARA GRAFOS DE CAMINHO

Hugo de Holanda Cunha Nobrega

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof^a. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Prof. Jorge Petrúcio Viana, D.Sc.

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Prof^a. Liliana Graciela Alcón, Dr.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2011

Nobrega, Hugo de Holanda Cunha

Decomposição por Cliques Maximais e Subgrafos Proibidos para Grafos de Caminho/Hugo de Holanda Cunha Nobrega. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

XIV, 92 p. 29,7cm.

Orientadores: Márcia Rosana Cerioli

Jorge Petrúcio Viana

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 90 – 92.

1. grafos de caminho. 2. subgrafo proibido. 3. clique maximal. 4. caracterização de classe de grafos. I. Cerioli, Márcia Rosana *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a meus pais, pois foi por influência direta deles que me apaixonei pelo conhecimento.

Agradeço a meu irmão por sempre ter sido um excelente exemplo a ser seguido, e pela extraordinária amizade que compartilhamos.

Agradeço a meus orientadores, Márcia e Petrucio, pelas ótimas discussões e pelo alto padrão de exigência que sempre me demonstraram. Encaro este nível de exigência como um elogio, e espero que tenha conseguido atender a todas as expectativas. Também agradeço a eles por, em vários anos de convivência, nunca haverem me chamado para uma furada!

Agradeço a meus amigos e companheiros do Laboratório de Algoritmos e Combinatória pelo excelente ambiente de trabalho e pelas estimulantes conversas, tanto acadêmicas quanto pessoais. Tem sido um prazer indizível conviver com todos vocês.

Agradeço aos membros formadores da banca examinadora deste trabalho, Prof. Jayme Szwarcfiter e Prof^a. Liliana Alcón, pelas críticas e sugestões que em muito melhoraram o conteúdo e a apresentação da dissertação.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de mestrado concedida a mim de março de 2009 a fevereiro de 2010, e à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), pela Bolsa Nota 10 concedida a mim de março de 2010 a fevereiro de 2011.

A todos, o meu mais sincero “muito obrigado”.

Since then it's been a book
You read in reverse
So you understand less as the pages
turn.

— The Shins, “Pink Bullets”

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DECOMPOSIÇÃO POR CLIQUES MAXIMAIS E SUBGRAFOS PROIBIDOS
PARA GRAFOS DE CAMINHO

Hugo de Holanda Cunha Nobrega

Fevereiro/2011

Orientadores: Márcia Rosana Cerioli
Jorge Petrucio Viana

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Caracterizações de classes de grafos por subgrafos ou minors proibidos são encontradas em diversas áreas da Teoria dos Grafos. Tais caracterizações implicam em diversas propriedades estruturais da classe em questão e, muitas vezes, dão origem a algoritmos eficientes para problemas que são difíceis em geral. As classes de grafos de caminho, isto é, as classes de grafos de interseção de caminhos em árvores, são passíveis de caracterizações por subgrafos proibidos, mas para muitas delas estas caracterizações ainda não são conhecidas.

Nesta dissertação, estudamos alguns aspectos das caracterizações por proibição. No caso geral, investigamos a existência destas caracterizações em conjuntos quasi-ordenados, quando certas propriedades especiais são exigidas. No caso dos grafos, analisamos uma ferramenta utilizada para encontrar tais caracterizações, chamada *decomposição de grafos*, e elaboramos um algoritmo para decomposição por cliques maximais separadoras, que se aplica na busca de subgrafos proibidos para grafos de caminho. Finalmente, aplicamos técnicas já conhecidas, em conjunto com uma nova ferramenta introduzida neste trabalho, para encontrar algumas famílias infinitas de subgrafos proibidos para as classes de grafos de caminho DE e $UE \cap CORDAL$.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DECOMPOSITION BY MAXIMAL CLIQUES AND FORBIDDEN
SUBGRAPHS FOR PATH GRAPHS

Hugo de Holanda Cunha Nobrega

February/2011

Advisors: Márcia Rosana Cerioli
Jorge Petrucio Viana

Department: Systems Engineering and Computer Science

Characterizations of classes of graphs by forbidden subgraphs or minors are found in many areas of Graph Theory. Such characterizations imply several structural properties of the class under consideration and, in many cases, allow for the development of efficient algorithms for problems which are hard in general. The classes of path graphs, i.e., the classes of intersection graphs of paths in a tree, are eligible for characterizations by forbidden subgraphs, but for many of them these characterizations are not yet known.

In this dissertation, we study some aspects of characterizations by forbiddance. In the general case, we investigate the existence of these characterizations in quasiordered sets, when certain special properties are required. In the case of graphs, we analyze a tool used to find such characterizations, known as *graph decomposition*, and design an algorithm for decomposition by maximal clique separators, which is applicable in the search for forbidden subgraphs for path graphs. Finally, we apply known techniques, as well as a tool which is introduced in this work, to find some infinite families of forbidden subgraphs for the classes of path graphs DE and $UE \cap CHORDAL$.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Definições e Teoremas	xii
1 Introdução	1
2 Proibição em Qosets	5
2.1 Definições e preliminares	5
2.2 Proibidores minimais	9
2.3 Anticadeias	13
2.4 Proibidores finitos	15
2.4.1 Alguns problemas indecidíveis	20
2.4.2 A prova do Teorema 25	23
3 Decomposição por Cliques Maximais Separadoras	25
3.1 Decomposições de grafos	25
3.2 Decomposição por cliques separadoras	29
3.2.1 Definições e preliminares	29
3.2.2 Algoritmo para decomposição por cliques separadoras	33
3.3 Algoritmo para decomposição por maxcliques separadoras	35
3.3.1 Um novo algoritmo	37
4 Grafos de Caminho	45
4.1 Grafos de interseção de caminhos em árvores	45
4.2 O Teorema da Árvore Característica	47
4.3 O Teorema dos Átomos	50
4.4 O Teorema do Separador	51
4.4.1 Construção de pré-imagens antipodais	55
4.5 Caracterizações conhecidas	58
4.5.1 $UEH \cap SPLIT$	58
4.5.2 DV	60
4.5.3 UV	61

4.5.4	Grafos usados nas caracterizações	62
4.6	Novos subgrafos proibidos para DE	69
4.6.1	Abordagem ingênua	69
4.6.2	Átomos proibidos de DE	71
4.7	Novos subgrafos proibidos para $UE \cap \text{CORDAL}$	75
5	Conclusão	88
	Referências Bibliográficas	90

Lista de Figuras

2.1	Grafos $H < G$ com infinitas arestas.	8
2.2	Um qoset bem-fundado nos fechados, mas que não é bem-fundado. . .	12
2.3	Diagrama das caracterizações vistas até agora.	15
3.1	Um grafo G , (a), e uma decomposição estrutural de G , (b).	26
3.2	Um esboço de uma árvore de decomposição.	27
3.3	Exemplos de ordens de eliminação.	31
3.4	Exemplo de execução do Algoritmo DCS.	34
3.5	Exemplo de execução do Algoritmo DMS.	38
3.6	G_1 após um passo de decomposição de tipo (i) e (ii).	43
4.1	Um ciclo e sua representação UEH.	46
4.2	Exemplos da construção $\text{constr}(G)$	56
4.3	Grafos P_1 e P_2	62
4.4	Grafos P_3 e P_4	63
4.5	Grafos P_5 e P_6	63
4.6	Grafo P_7	63
4.7	Grafo P_8	64
4.8	Grafo P_9	64
4.9	Grafo P_{10}	64
4.10	Famílias P_{11} e P_{12}	65
4.11	Família P_{13} ($k \geq 1$).	65
4.12	Família P_{14} ($k \geq 2$).	66
4.13	Família P_{15} ($k \geq 2$).	66
4.14	Família P_{16} ($k \geq 2$).	67
4.15	Família P_{17} ($k \geq 2$).	67
4.16	Família P_{18} ($k \geq 2$).	68
4.17	Família P_{19} ($k \geq 2$).	68
4.18	Prova do Lema 91.	70
4.19	Um átomo perfeito que não é UEH.	71
4.20	Esboço de um átomo não UEH.	72

4.21	Caso 1 para um átomo perfeito não-UEH.	73
4.22	Caso 2 para um átomo perfeito não-UEH.	73
4.23	Caso 3 para um átomo perfeito não-UEH.	74
4.24	Os dois casos possíveis do Lema 93.	74
4.25	Grafos perfeitos com antipodalidade de todos os tipos do Teorema 76.	76
4.26	As diversas possibilidades do Caso 3 do Teorema 96.	80
4.27	Partição dos proibidos de UEC.	81
4.28	O possível grafo dos antipodais de $G \in Y_1$	81
4.29	O grafo de Mycielski M_4 , e o grafo $\text{constr}(M_4)$	83
4.30	Diagrama ilustrando o que se sabe sobre $\text{Proib}^{-1}\text{UEC}$	87

Lista de Definições e Teoremas

1	<i>Relação reflexiva; relação transitiva; quasi-ordem; qoset</i>	5
2	<i>Proibição; proibidor; conjunto definível por proibição</i>	6
3	<i>Conjunto fechado</i>	6
4	Teorema de Greenwell, Hemminger e Klerlein	7
5	<i>Proibidor minimal</i>	7
6	<i>Elemento minimal; conjunto de elementos minimais</i>	10
7	<i>Relação bem-fundada; qoset bem-fundado</i>	10
8	Teorema	10
9	<i>Relação antissimétrica; ordem parcial; poset</i>	11
10	Lema	11
11	Lema	11
12	Teorema	11
13	Corolário	12
14	<i>Relação e qoset bem-fundados nos fechados</i>	12
15	<i>Subqoset induzido</i>	12
16	Teorema	13
17	<i>R-anticadeia; anticadeia</i>	14
18	Teorema	14
19	Teorema	14
20	Teorema de Robertson-Seymour	15
21	<i>Boa-quasiordem; qoset bem-quasiordenado</i>	16
22	Teorema	16
23	Teorema	17
24	<i>Ideal principal; qoset e relação com ideais finitos</i>	17
25	Teorema	18
26	<i>Isomorfismo de qosets</i>	18
27	Lema	18
28	Lema	19
29	Lema	20
30	Teorema	20

31	Teorema da Indecidibilidade de Parada	20
32	Teorema	21
33	<i>Fecho de operações</i>	21
34	<i>Conjunto gerado e relação caracterizada por operações</i>	22
35	Teorema	22
36	Lema	23
37	Lema	23
38	Teorema dos Decomponíveis de CORDAL e PERFEITO	29
39	<i>Separador; grafo separado</i>	29
40	<i>Passeio; comprimento de passeio; concatenação de passeios</i>	29
41	<i>Ordem de eliminação</i>	30
42	<i>Passeio preenchível; preenchimento F_π; arestas de preenchimento</i>	30
43	<i>Ordem de eliminação minimal; mínima; perfeita</i>	30
44	<i>Caminho</i>	31
45	Teorema	31
46	<i>Vértice máximo; mínimo</i>	31
47	Teorema	32
48	<i>Grafo preenchido G_π</i>	32
49	Teorema de Rose, Tarjan e Lueker	32
50	Corolário	32
51	Lema	32
52	<i>Conjunto $C_\pi(v)$</i>	33
53	Teorema	34
54	Teorema	36
55	Teorema	37
56	Corolário	38
57	Lema	39
58	Lema	39
59	Lema	39
60	Lema	41
61	Corretude de DMS, parte 1	41
62	Lema	42
63	Corretude de DMS, parte 2	42
64	Teorema	46
65	Teorema da Árvore Característica	47
66	Lema	47
67	Lema	48
68	Teorema	48

69	Teorema	50
70	Teorema dos Átomos de UEH	50
71	Lema	50
72	<i>Maxclique relevante</i>	51
73	<i>Antipodalidade</i>	51
74	<i>Grafo dos antipodais, grafo vizinho</i>	52
75	Teorema do Separador	52
76	Teorema	53
77	<i>Classificação de antipodalidade</i>	55
78	Teorema	56
79	Corolário	57
80	Teorema	58
81	Corolário	60
82	Lema	60
83	Caracterização de $UEH \cap \text{SPLIT}$ por proibição	60
84	Corolário	60
85	<i>Maxclique principal</i>	60
86	Lema	61
87	Lema	61
88	Caracterização de DV por proibição	61
89	Caracterização de UV por proibição	62
90	<i>Grafo PM-separável</i>	69
91	Lema	69
92	Teorema	70
93	Lema	74
94	Teorema	75
95	Lema	75
96	Lema	76
97	<i>Grafo k-crítico</i>	82
98	Teorema	82
99	Corolário	82
100	Teorema	82
101	Lema	82
102	Lema	83
103	Corolário	84
104	Lema	85
105	Corolário	86

Capítulo 1

Introdução

Um método de caracterização de classes de grafos que é amplamente empregado é o da *definição por proibição*. Este método consiste em caracterizar uma classe de grafos pela especificação do conjunto *mais simples* de grafos cujos elementos não pertencem à classe que se quer caracterizar, e tal que os elementos da classe são exatamente aqueles que não contêm nenhum elemento do conjunto especificado como subgrafo induzido, ou subgrafo, ou minor, etc., de acordo com o caso.

Por exemplo, em 1930, K. Kuratowski provou que um grafo é planar se, e somente se, não contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$, c.f. [2]. Sete anos depois, K. Wagner adaptou este resultado para a relação de minor, provando que um grafo é planar se, e somente se, não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como minor. Um outro exemplo bem conhecido é o *Teorema Forte dos Grafos Perfeitos*, que afirma que a classe dos grafos perfeitos, introduzida por C. Berge em 1960 a partir de uma condição de coloração, é exatamente a classe obtida pela proibição de buracos ímpares e complementos destes como subgrafos induzidos.

Definições por proibição são aplicáveis em diversas áreas da Matemática [12]. Elas são interessantes tanto do ponto de vista teórico quanto do prático, pois condensam muitas informações sobre a estrutura da classe em um enunciado conciso, e estas informações, muitas vezes, dão origem a algoritmos eficientes para a solução de diversos problemas que são difíceis em geral [3].

Em contraste com a elegância dos *enunciados* está a dificuldade, em geral, da obtenção de *provas* para as caracterizações obtidas por aplicação deste método — por exemplo, o Teorema Forte dos Grafos Perfeitos foi finalmente provado em 2002 por M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour e R. Thomas, cf. [5], após 4 décadas de tentativas de diversos especialistas da área. Talvez o melhor exemplo de discrepância entre enunciados e provas, nesta área, seja o *Teorema de Robertson-Seymour*, também chamado *Teorema dos Minors*, cf. [19], que consiste da afirmação concisa de que toda classe de grafos fechada pela relação de minor é definível pela proibição de um conjunto *finito* de grafos como minors, como já se sabia ocorrer com a

classe dos grafos planares, por exemplo. Neste caso, não apenas a busca da prova foi extremamente longa, como a própria publicação desta — uma sequência de 20 artigos em duas décadas! Este teorema estabeleceu positivamente uma conjectura da década de 30 usualmente atribuída a Wagner, c.f. [2].

Estas observações motivam um estudo mais abstrato das definições por proibição. Um dos poucos resultados conhecidos nesta linha de investigação foi obtido por D. Greenwell, R. Hemminger e J. Klerlein [12], que generalizaram as definições por proibição para conjuntos parcialmente ordenados (*posets*) e provaram que um subconjunto de um poset é definível por proibição se, e somente se, ele é fechado para a relação de ordem parcial do poset.

A simplicidade dos conjuntos usados nas caracterizações por proibição das diversas classes de grafos se manifesta de várias maneiras, sendo os exemplos mais representativos os de minimalidade (num sentido fixado mais adiante), ser uma anticadeia (no poset) e finitude. Entretanto, estas noções de simplicidade podem não estar presentes quando posets em geral são considerados. Desta forma, uma continuação natural do estudo iniciado em [12] é investigar propriedades necessárias e suficientes que garantam que em um poset as definições por proibição sejam feitas por conjuntos considerados simples.

Este estudo é o objetivo do Capítulo 2 deste trabalho, onde generalizamos a noção de *proibição* para conjuntos quasiordenados (*qosets*) gerais; revisamos os resultados conhecidos na literatura sobre definições por proibição em qosets; obtivemos uma caracterização dos qosets em que cada conjunto fechado é definível pela proibição de um conjunto *minimal*; avançamos na busca pela caracterização dos qosets em que cada conjunto fechado é definível pela proibição de uma anticadeia; e provamos que não existe nenhuma condição computável que caracteriza os qosets em que cada conjunto fechado é definível pela proibição de um conjunto finito.

As provas de caracterizações por proibição em grafos são, quase sem exceção, baseadas em teoremas estruturais satisfeitos pela classe em questão. Neste contexto, as *classes de interseção* merecem uma atenção especial, pois são detentoras de diversas propriedades estruturais interessantes, herdadas da natureza dos objetos que representam os grafos, em cada caso [29]. Nosso interesse nestas classes é devido ao fato de que todas elas são fechadas para subgrafos induzidos e, portanto, passíveis de caracterizações por proibição, cf. [28].

As classes de *grafos de caminho*, nome genérico dado às diversas classes de grafos definíveis a partir de interseções de caminhos em árvores, merecem destaque especial nesta discussão, pois são dotadas de um arcabouço teórico extenso e uniforme, formado por teoremas estruturais naturalmente aplicáveis às caracterizações por proibição, cf. [24]. Além disso, os grafos de caminho possuem aplicações a fluxos em redes [11], e a conflitos de mensagens em redes [25], dentre outras, motivando o

interesse em um entendimento mais completo destas classes.

Apesar das classes de grafos de caminho possuírem uma teoria apropriada para o desenvolvimento de caracterizações por proibição, o problema de encontrar tais caracterizações para estas classes ainda se mostra desafiador. Este fato é corroborado pelas poucas classes de grafos de caminho que já possuem caracterizações por proibição [4, 17, 22, 35].

A principal ferramenta em caracterizações de classes de grafos de caminho por proibição é, sem dúvida, o *Teorema do Separador*, de C. Monma e V. Wei [21]. Este resultado é baseado na *decomposição por clique maximais separadoras*, uma particularização de um método geral para solução de problemas em grafos, conhecido como *decomposição de grafos*. Até onde sabemos, o único algoritmo para decompor um grafo por suas cliques maximais separadoras é o esboçado por R. Tarjan em [33]. Entretanto, como mostramos no Capítulo 3, este algoritmo não está correto. Naquele capítulo, fazemos uma breve revisão da literatura de decomposições de grafos e como elas se aplicam, no geral, a caracterizações por proibição; descrevemos um algoritmo, também devido a Tarjan, para decompor um grafo por cliques separadoras; e descrevemos a modificação deste algoritmo, esboçada por Tarjan, para realizar decomposições por cliques *maximais* separadoras. Neste contexto, os principais resultados por nós encontrados foram: um contraexemplo minimal para a corretude do algoritmo esboçado por Tarjan; uma modificação deste algoritmo; a prova da corretude do algoritmo modificado; e a prova de que este algoritmo modificado tem a mesma complexidade pretendida pelo algoritmo de Tarjan.

Finalmente, no Capítulo 4, descrevemos como o *Teorema do Separador* já foi utilizado para caracterizar as classes $UEH \cap SPLIT$ e DV por subgrafos induzidos proibidos [4, 22]; discutimos outras ferramentas que são úteis para caracterizações de grafos de caminho, a saber, o *Teorema da Árvore Característica* e o *Teorema dos Átomos*; e mostramos, de maneira sucinta, como o Teorema da Árvore Característica foi aplicado à caracterização da classe UV por subgrafos induzidos proibidos [17, 35]. Neste contexto, os principais resultados por nós encontrados foram: uma apresentação uniforme dos grafos utilizados nas caracterizações por proibição das classes $UEH \cap SPLIT$, DV e UV ; justificativas para a impossibilidade, em alguns sentidos precisos, de se generalizar as provas destas para outras classes de grafos de caminho; a caracterização dos átomos proibidos da classe DE ; a introdução de uma construção de grafos que permite determinar uma parcela significativa dos subgrafos proibidos da classe $UE \cap CORDAL$; e o detalhamento de alguns dos principais obstáculos ainda existentes para a obtenção completa das caracterizações das classes DE e $UE \cap CORDAL$.

Algumas observações quanto a definições e notações

Neste trabalho, a expressão *subgrafos proibidos* denota os subgrafos induzidos proibidos de uma classe. Tal convenção, apesar da ambiguidade, é consagrada na literatura.

Muitas das definições e notações adotadas neste texto são consideradas padrão em Teoria dos Grafos, e serão utilizadas sem nenhuma introdução prévia. Em geral, tais definições podem ser encontradas nos livros de J. Bondy e U. Murty [2] e de T. McKee e F. McMorris [20]. As definições e notações que não são consideradas padrão são introduzidas em cada capítulo. Além disso, cada capítulo também traz uma pequena introdução do assunto específico a ele.

Denotaremos classes de grafos com fonte *versaltes*, como em “EXEMPLO DE CLASSE”, e problemas de decisão com fonte *sem serifa*, como em “Exemplo de Problema”.

Capítulo 2

Proibição em Qosets

Neste capítulo, faremos uma breve discussão de alguns aspectos gerais das caracterizações por proibição. Como sempre estamos interessados em tais caracterizações por conjunto *simples*, investigaremos condições necessárias e suficientes para a existência de tais caracterizações, para as noções de *simplicidade* dadas por conjuntos minimais (num sentido fixado mais adiante), anticadeias, e finitos.

2.1 Definições e preliminares

Definição 1 (Relação reflexiva; relação transitiva; quasi-ordem; qoset). Sejam U um conjunto e R uma relação binária sobre U . Dizemos que R é

- *reflexiva*, quando para todo $x \in U$ temos xRx ;
- *transitiva*, quando para todos $x, y, z \in U$ temos que xRy e yRz implicam em xRz ;
- *quasi-ordem*, quando é reflexiva e transitiva.

Neste caso, dizemos que $\mathcal{Q} = (U, R)$ é um *qoset*.

Como é usual, escrevemos xRy em vez de $(x, y) \in R$. Além disso, quando temos xRy e $x \neq y$, escrevemos $xR\neq y$.

No restante deste capítulo $\mathcal{Q} = (U, R)$ é um qoset arbitrário, exceto nos casos que serão explicitamente mencionados. Qosets são estruturas subjacentes fundamentais em várias áreas do conhecimento, cf. [15].

Em nosso caso, estamos interessados nos qosets de grafos

- $\mathcal{G}_{\leq} = (\mathcal{G}, \leq)$, onde \mathcal{G} é a classe dos grafos finitos e \leq é a relação de subgrafo induzido;
- $\mathcal{G}_{\leq}^{\omega} = (\mathcal{G}^{\omega}, \leq)$, onde \mathcal{G}^{ω} é a classe dos grafos enumeráveis; e

• $\mathcal{G}_{\leq}^{\infty} = (\mathcal{G}^{\infty}, \leq)$, onde \mathcal{G}^{∞} é a classe dos grafos finitos ou infinitos, e \mathcal{G}_{\subseteq} , $\mathcal{G}_{\subseteq}^{\omega}$ e $\mathcal{G}_{\subseteq}^{\infty}$, e \mathcal{G}_{\preceq} , $\mathcal{G}_{\preceq}^{\omega}$ e $\mathcal{G}_{\preceq}^{\infty}$, definidos analogamente para as relações \subseteq de subgrafo e \preceq de menor. Note que temos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^{\omega} \subseteq \mathcal{G}^{\infty}$, e que pela definição das relações \leq , \subseteq e \preceq de grafos, temos que para quaisquer $G, H \in \mathcal{G}^{\infty}$ vale

$$G \leq H \Rightarrow G \subseteq H \Rightarrow G \preceq H.$$

Nosso interesse é estudar o comportamento de algumas propriedades fundamentais destes qosets, quando estas são consideradas no contexto mais amplo da classe de todos os qosets.

Uma característica importante dos qosets de grafos é a utilização de um método de definição ou caracterização de subclasses, que consiste em proibir que certos grafos ocorram como subobjetos dos grafos da classe definida. Nossa investigação se inicia com um resultado geral sobre esse procedimento.

Definição 2 (Proibição; proibidor; conjunto definível por proibição). Dado $X \subseteq U$, o conjunto definido pela proibição de X é

$$\text{Proib}_R X = \{y \in U : \nexists x \in X \text{ t.q. } xRy\}.$$

Dizemos que X é um *proibidor* de $\text{Proib}_R X$.

Dado $Y \subseteq U$, dizemos que Y é *definível por proibição* quando existe $X \subseteq U$ tal que $Y = \text{Proib}_R X$.

Note que, como R é uma relação reflexiva, sempre temos $X \cap \text{Proib}_R X = \emptyset$.

Exemplo 1. Por definição, temos $\text{FLORESTA} = \text{Proib}_{\subseteq} \text{CICLO}$. Além disso, o Teorema Forte dos Grafos Perfeitos cf. [5] afirma que $\text{PERFEITO} = \text{Proib}_{\leq}(\text{BURACO ÍMPAR} \cup \text{COMPLEMENTO DE BURACO ÍMPAR})$.

Definição 3 (Conjunto fechado). Um conjunto não vazio $X \subseteq U$ é *fechado* quando temos que $x \in X$ e yRx implicam em $y \in X$, para todos $x, y \in U$.

Conjuntos fechados também são conhecidos como *ideais*, ou *conjuntos inferiores*, na literatura.

Exemplo 2. Todo subgrafo induzido de um grafo cordal é também cordal, portanto esta classe é um conjunto fechado do qoset \mathcal{G}_{\leq} . Note que o mesmo não ocorre com a classe CICLO , pois o ciclo C_n contém o caminho P_{n-1} como subgrafo induzido, por exemplo.

O seguinte resultado básico, devido a D. Greenwell, R. Hemminger e J. Klerlein em 1973 [12], relaciona os conceitos de conjunto fechado e proibição, para qualquer qoset.

Teorema 4 (Teorema de Greenwell, Hemminger e Klerlein). X é definível por proibição se, e somente se, X é fechado.

Prova. (\Rightarrow) Seja $x \in X = \text{Proib}_R Y$ e suponha que yRx . Suponha, para uma contradição, que $y \notin X$. Assim, por definição, existe $z \in Y$ tal que zRy . Como R é transitiva, temos zRx , contradizendo $x \in \text{Proib}_R Y$.

(\Leftarrow) Seja $Y = \overline{X}$.

Afirmção. $X = \text{Proib}_R Y$.

De fato, suponha que $x \in X$ e, para uma contradição, que $x \notin \text{Proib}_R Y$. Assim, por definição, existe $y \in Y$ tal que yRx . Como X é fechado, isso implica que $y \in X$, contradizendo $Y = \overline{X}$. Portanto temos $X \subseteq \text{Proib}_R Y$.

Suponha agora que $x \in \text{Proib}_R Y$. Portanto, como R é reflexiva, temos $x \notin Y$, i.e., $x \in X$. Logo temos $\text{Proib}_R Y \subseteq X$. \blacksquare

O Teorema de Greenwell, Hemminger e Klerlein é interessante do ponto de vista lógico, pois mostra a equivalência entre um conceito lógico de 2ª ordem (X é definível por proibição) e um de 1ª ordem (X é um conjunto fechado). Por outro lado, a prova deste teorema não apresenta nenhuma propriedade interessante dos proibidores — de fato, o proibidor \overline{X} não é nada útil do ponto de vista prático. Entretanto, em certas condições podemos utilizar propriedades específicas do qoset em questão para obtermos caracterizações de conjuntos fechados por proibidores com mais propriedades. Estamos especialmente interessados em propriedades que intuitivamente dizem que os proibidores são *enxutos* em algum sentido, como acontece nos qosets de grafos, onde os proibidores são, muitas vezes, finitos, ou formados por elementos dois a dois incomparáveis, etc.

Exemplo 3 (Minor). O Teorema de Robertson-Seymour, cf. Seção 2.4, afirma que todo conjunto fechado do qoset \mathcal{G}_{\leq} possui um proibidor finito.

Entretanto, o mesmo não vale para o qoset $\mathcal{G}_{\leq}^{\infty}$, e o problema ainda está em aberto para o qoset $\mathcal{G}_{\leq}^{\omega}$ [14, 34].

Por outro lado, muitas classes fechadas de \mathcal{G}_{\leq} e \mathcal{G}_{\subseteq} não possuem proibidores finitos — por exemplo, CORDAL e FLORESTA, respectivamente. Entretanto, mesmo nestes casos os proibidores não precisam ser tão genéricos quanto o da prova do Teorema de Greenwell, Hemminger e Klerlein.

Definição 5 (Proibidor minimal). Um conjunto $X \subseteq U$ é um proibidor *minimal* quando cada elemento de X é minimal quanto à propriedade de não pertencer a $\text{Proib}_R X$, i.e., quando temos

$$\forall x \in X, \forall y \in U : yR^{\neq}x \Rightarrow y \in \text{Proib}_R X.$$

Os exemplos que vimos mostram que o Esquema 1 é verdadeiro para

$$\varphi_1(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ é (isomorfo a) o qoset } \mathcal{G}_{\leq}$$

$$\varphi_2(Y) : Y \text{ é finito,}$$

e para

$$\varphi_1(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ é (isomorfo a) o qoset } \mathcal{G}_{\leq}$$

$$\varphi_2(Y) : Y \text{ é um proibidor minimal,}$$

mas é fácil vermos que essas condições não são as mais fracas possíveis (i.e., elas não tornam o Esquema 2 verdadeiro).

Um exemplo simples disto, embora um tanto artificial, é o qoset $(\{0, 1\}, \leq)$, onde \leq é a relação de menor-ou-igual usual. Neste qoset os únicos conjuntos fechados são $\{0\}$ e $\{0, 1\}$, e portanto cada um destes possui um proibidor minimal e finito. Entretanto, este qoset claramente não atende a nenhuma das duas condições φ_1 acima.

2.2 Proibidores minimais

O primeiro conceito de *proibidor enxuto* que analisaremos é o de proibidor minimal, cf. Definição 5 (p. 7). Como vimos, existem qosets em que cada conjunto fechado possui um proibidor minimal, e existem qosets em que este não é o caso. Portanto, uma condição φ_1 que garanta os Esquemas 1 e 2 para esta condição φ_2 não será *trivial*, e carrega algum interesse teórico.

Note que, se um conjunto possui um proibidor minimal, então este é único. De fato, suponha que Y e Z são proibidores minimais de X . Para ver que $Y \subseteq Z$, seja $y \in Y$. Como $\text{Proib}_R Y = X = \text{Proib}_R Z$ e $y \notin \text{Proib}_R Y$ pois R é reflexiva, temos $y \notin \text{Proib}_R Z$. Logo existe $z \in Z$ tal que zRy . Se, para uma contradição, tivéssemos $z \neq y$, então como Y é um proibidor minimal teríamos $z \in X$, contradizendo $X = \text{Proib}_R Z$. Portanto temos $y \in Z$, o que prova que $Y \subseteq Z$. A prova de $Z \subseteq Y$ é inteiramente análoga.

Denotamos este único proibidor minimal de X por $\text{Proib}_R^{-1}X$. A justificativa desta notação é dada pela observação simples de que temos $X = \text{Proib}_R^{-1}(\text{Proib}_R X)$, quando X é um proibidor minimal, e $X = \text{Proib}_R(\text{Proib}_R^{-1}X)$, quando X é fechado e possui um proibidor minimal.

Primeiramente, veremos que o qoset ser bem-fundado é uma condição suficiente para garantir caracterizações de conjuntos fechados por proibidores minimais, porém apresentaremos um exemplo mostrando que esta condição é forte demais. Depois,

introduziremos uma noção mais fraca que a de boa-fundação, e que garante os Esquemas 1 e 2 simultaneamente.

Definição 6 (Elemento minimal; conjunto de elementos minimais). Seja $X \subseteq U$. Um elemento $x \in X$ é *minimal* quando não existe $y \in X$ tal que $yR^\neq x$. Denotamos por $\min_R X$ o conjunto de todos os elementos minimais de X .

Definição 7 (Relação bem-fundada; qoset bem-fundado). Sejam U um conjunto e R uma relação binária sobre U . Dizemos que R é *bem-fundada* quando todo subconjunto não vazio X de U possui (pelo menos) um elemento minimal.

Neste caso, se R é uma quasiordem, dizemos que o qoset (U, R) é *bem-fundado*.

O teorema a seguir é uma caracterização alternativa bem conhecida de boa fundação.

Teorema 8. *Um qoset (U, R) é bem-fundado se, e somente se, não existe uma sequência infinita $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ em U tal que $x_{i+1}R^\neq x_i$ para todo $i \geq 1$.*

Prova. (\Rightarrow) Por contrapositiva. Se existe uma sequência infinita $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tal que $x_{i+1}R^\neq x_i$ para todo $i \geq 1$, então $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é um subconjunto não vazio de U que não possui elemento minimal. Logo (U, R) não é bem fundado.

(\Leftarrow) Por contrapositiva. Suponha que (U, R) não seja bem-fundado, e seja X um conjunto não vazio de U que não possui elemento minimal. Seja $x \in X$, e defina uma sequência $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ recursivamente, da seguinte forma.

- $x_1 = x$;
- x_{i+1} é um elemento qualquer de X tal que $x_{i+1}R^\neq x_i$, para $i \geq 1$.

Como X não possui elemento minimal, x_i está bem definido para qualquer $i \geq 1$. Logo esta sequência é infinita e satisfaz $x_{i+1}R^\neq x_i$ para todo $i \geq 1$. ■

Exemplo 5. Os qosets \mathcal{G}_{\leq} , \mathcal{G}_{\subseteq} e \mathcal{G}_{\preceq} são bem-fundados. De fato, para quaisquer $G, H \in \mathcal{G}$, se $G < H$, $G \subset H$ ou $G \prec H$, então temos $|V(G)| + |E(G)| < |V(H)| + |E(H)|$, e portanto qualquer sequência estritamente decrescente nestes qosets é necessariamente finita.

Entretanto, o mesmo não vale para os qosets $\mathcal{G}_{\leq}^\omega$, $\mathcal{G}_{\subseteq}^\omega$ e $\mathcal{G}_{\preceq}^\omega$ (e portanto nem para os qosets $\mathcal{G}_{\leq}^\infty$, $\mathcal{G}_{\subseteq}^\infty$ e $\mathcal{G}_{\preceq}^\infty$). Para ver um exemplo deste fato, considere o Exemplo 4 (p. 8). Ali, damos uma indicação de como construir uma sequência estritamente decrescente infinita de grafos no qoset $\mathcal{G}_{\leq}^\omega$, o que prova que este qoset não é bem-fundado. Como \leq é uma *subrelação* de \subseteq e de \preceq , e como temos $\mathcal{G}^\omega \subseteq \mathcal{G}^\infty$, tal sequência também mostra que nenhum dos outros qosets citados é bem-fundado.

Definição 9 (Relação antissimétrica; ordem parcial; poset). Sejam U um conjunto e R uma relação binária sobre U . Dizemos que R é *antissimétrica* quando para todos $x, y \in U$, temos que xRy e yRx implicam que $x = y$.

Neste caso, se R é um quasiordem, dizemos que R é uma *ordem parcial*, e que $\mathcal{P} = (U, R)$ é um *poset*.

Como é usual em Teoria dos Grafos, trabalhamos “a menos de isomorfismo”. Assim, uma relação binária R entre grafos é antissimétrica quando xRy e yRx implicam que $x \simeq y$.

Exemplo 6. Pela argumentação apresentada no Exemplo 5, temos que as relações \leq , \subseteq e \preceq são ordens parciais de \mathcal{G} , mas que o mesmo não vale para estas relações quanto aos conjuntos \mathcal{G}^ω e \mathcal{G}^∞ .

Lema 10. *Todo qoset bem-fundado é um poset.*

Prova. Por contrapositiva. Suponha que R não seja antissimétrica, e sejam $x, y \in U$ tais que $xR^\neq y$ e $yR^\neq x$. Assim, o conjunto $\{x, y\} \subseteq U$ é não vazio, porém não possui elemento minimal. ■

Lema 11. *Se (U, R) é um poset, então $\min_R X$ é um proibidor minimal para todo $X \subseteq U$.*

Prova. Seja $x \in Y = \min_R X$, e seja $y \in U$ tal que $yR^\neq x$. Suponha, para uma contradição, que $y \notin \text{Proib}_R Y$. Assim, existe $x' \in Y$ tal que $x'Ry$. Logo, por transitividade temos $x'Rx$, donde pela minimalidade de x temos $x' = x$. Portanto, temos $yR^\neq x$ e xRy , contradizendo a antissimetria de R . ■

Teorema 12. *Se $\mathcal{Q} = (U, R)$ é bem-fundado, então todo conjunto fechado de \mathcal{Q} possui um proibidor minimal.*

Prova. Seja $X \subseteq U$ um conjunto fechado.

Se $X = U$, então \emptyset é um proibidor minimal de X por vacuidade.

Caso contrário, se $X \neq U$, então seja $Y = \min_R \overline{X}$. Como (U, R) é bem-fundado, temos $Y \neq \emptyset$. Pelo Lema 10, R é antissimétrica. Assim, pelo Lema 11, Y é um proibidor minimal.

Afirmção. $X = \text{Proib}_R Y$.

De fato, suponha que $x \in X$. Suponha, para uma contradição, que $x \notin \text{Proib}_R Y$. Assim, existe $y \in Y$ tal que yRx , e como X é fechado, temos $y \in X$, contradizendo $y \in \min_R \overline{X}$. Portanto, temos $X \subseteq \text{Proib}_R Y$.

Suponha, agora, que $x \in \text{Proib}_R Y$. Suponha, para uma contradição, que $x \notin X$. Assim, pela definição de Y , temos que $x \in Y$ ou existe $y \in Y$ tal que yRx . Em ambos os casos, temos $x \notin \text{Proib}_R Y$, uma contradição. Portanto $x \in X$, e temos $\text{Proib}_R Y \subseteq X$. ■

O Teorema 12 mostra que o Esquema 1 é verdadeiro para

$\varphi_1(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q}$ é um qoset bem-fundado

$\varphi_2(Y) : Y$ é um proibidor minimal.

Corolário 13. *Todo conjunto fechado de \mathcal{G}_{\leq} , \mathcal{G}_{\subseteq} ou \mathcal{G}_{\succeq} possui um proibidor minimal.*

Por outro lado, estas mesmas condições não tornam o Esquema 2 verdadeiro. Por exemplo, considere o qoset $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \leq)$, onde \mathbb{Z} é o conjunto dos números inteiros e \leq é a relação de menor-ou-igual usual. Neste qoset, todo conjunto fechado diferente de \mathbb{Z} é da forma $\{\dots, z-2, z-1, z\}$ para algum $z \in \mathbb{Z}$, e portanto possui proibidor minimal $\{z+1\}$. Entretanto, \mathcal{Z} não é bem-fundado — por exemplo, o próprio \mathbb{Z} pode ser visto como uma sequência estritamente decrescente infinita de \mathcal{Z} .

Uma condição φ_1 mais fraca do que boa fundação, e que garante os Esquemas 1 e 2 simultaneamente, é dada a partir do seguinte conceito.

Definição 14 (Relação e qoset bem-fundados nos fechados). Uma quasi-ordem R de U é *bem-fundada nos fechados* quando todo subconjunto fechado e não vazio X de U possui (pelo menos) um elemento minimal.

Neste caso, dizemos que o qoset (U, R) é *bem-fundado nos fechados*.

Exemplo 7. Considere o qoset (U, R) representado na Figura 2.2, onde uma seta apontando de a para b indica que $aR \neq b$ (as setas decorrentes da reflexividade e transitividade de R foram omitidas). Claramente, este qoset não é bem-fundado

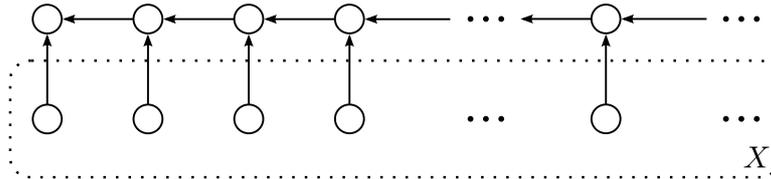


Figura 2.2: Um qoset bem-fundado nos fechados, mas que não é bem-fundado.

pois possui uma sequência estritamente decrescente infinita.

Entretanto, qualquer conjunto fechado e não vazio Y deste qoset deve necessariamente conter algum elemento de X , e portanto tal elemento é minimal em Y . Logo (U, R) é bem-fundado nos fechados.

Estamos prontos para provar o principal resultado desta seção, mostrando que boa fundação nos fechados é, de fato, o conceito que estamos procurando.

Definição 15 (Subqoset induzido). Sejam $\mathcal{Q} = (U, R)$ um qoset e X um subconjunto de U . O *subqoset de \mathcal{Q} induzido por X* , denotado por $\mathcal{Q}[X]$, é o qoset $(X, R \cap X^2)$.

Teorema 16. *Todo conjunto fechado X de \mathcal{Q} é tal que $\mathcal{Q}[\overline{X}]$ é bem fundado nos fechados se, e somente se, todo conjunto fechado de \mathcal{Q} possui um proibidor minimal.*

Prova. (\Rightarrow) Seja X um conjunto fechado de $\mathcal{Q} = (U, R)$. Se $X = U$, então \emptyset é um proibidor minimal de X . Caso contrário, se $X \neq U$, então como $\mathcal{Q}[\overline{X}]$ é bem-fundado nos fechados, temos que $Y = \min_R \overline{X}$ é não vazio.

Afirmção. Y é um proibidor minimal.

De fato, sejam $y \in Y$ e $x \in U$ tais que $xR^{\neq}y$. Como y é um elemento minimal de \overline{X} , temos $x \notin \overline{X}$, i.e., $x \in X$. Assim, suponha para uma contradição que $x \notin \text{Proib}_R Y$. Desta forma, por definição existe $y' \in Y$ tal que $y'Rx$. Como X é fechado, temos $y' \in X$, contradizendo $Y \subseteq \overline{X}$.

Afirmção. $X = \text{Proib}_R Y$.

De fato, suponha que $x \in X$. Como $Y \subseteq \overline{X}$ e X é fechado, não existe $y \in Y$ tal que yRx . Logo $x \in \text{Proib}_R Y$.

Suponha, agora, que $x \in \text{Proib}_R Y$. Suponha, para uma contradição, que $x \notin X$. Assim, pela definição de Y , temos que $x \in Y$ ou existe $y \in Y$ tal que $yR^{\neq}x$. Em ambos os casos, temos $x \notin \text{Proib}_R Y$, uma contradição. Portanto $x \in X$.

(\Leftarrow) Suponha, para uma contradição, que exista um conjunto fechado X de U tal que $\mathcal{Q}[\overline{X}]$ não seja bem fundado nos fechados.

Seja Z um conjunto fechado e não vazio de $\mathcal{Q}[\overline{X}]$ que não possui elemento minimal, e seja $z \in Z$. Por hipótese, X possui um proibidor minimal Y . Logo, como $z \notin X$, existe $y \in Y$ tal que yRz . Assim, como Z é fechado, temos $y \in Z$.

Desta maneira, como Z não possui elemento minimal, existe $y' \in Z$ tal que $y'R^{\neq}y$. Como Y é um proibidor minimal de X , temos $y' \in X$, contradizendo $Z \subseteq \overline{X}$. ■

Logo, os Esquemas 1 e 2 são verdadeiros para

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathcal{Q}) : & \text{ para todo conjunto fechado } X \text{ de } U \text{ temos que} \\ & \mathcal{Q}[\overline{X}] \text{ é bem fundado nos fechados} \\ \varphi_2(Y) : & Y \text{ é um proibidor minimal.} \end{aligned}$$

2.3 Anticadeias

Como vimos, existem qosets em que alguns conjuntos fechados não possuem proibidores minimais (por exemplo, os qosets $\mathcal{G}_{\leq}^{\omega}$ e $\mathcal{G}_{\leq}^{\infty}$). Entretanto, nestes casos ainda é interessante buscarmos caracterizações dos conjuntos fechados por proibidores *enxutos* em algum sentido.

Por exemplo, é fácil vermos que para qualquer conjunto $X \subseteq U$, se existem $x, y \in X$ tais que xRy , então $\text{Proib}_R X = \text{Proib}_R (X \setminus \{y\})$.

Definição 17 (R -anticadeia; anticadeia). Sejam U um conjunto e R uma relação binária sobre U . Dizemos que um subconjunto X de U é uma R -anticadeia quando, para todos $x, y \in X$, temos que xRy implica em $x = y$.

Neste caso, quando não há ambiguidade quanto à relação R , dizemos que X é uma anticadeia.

Exemplo 8. Como vimos no Exemplo 4 (p. 8), o conjunto fechado $X \subseteq \mathcal{G}^\omega$ dos grafos com quantidade finita de arestas não possui proibidor minimal no qoset $\mathcal{G}_{\leq}^\omega$. Entretanto, neste qoset X possui o proibidor anticadeia $\{K_\omega, S_\omega, M_\omega\}$, onde K_ω é o grafo completo infinito enumerável, S_ω é a estrela infinita enumerável, e M_ω é o emparelhamento infinito enumerável (J. Kratochvíl cf. [8]).

Por outro lado, considere o qoset (\mathbb{Z}, P) , onde P é a relação de “ter a mesma paridade e ser menor ou igual a”. O conjunto X dos números pares é fechado neste qoset, mas as anticadeias em \overline{X} são conjuntos unitários, e portanto nenhuma é um proibidor para X .

O seguinte resultado é uma consequência imediata das definições de proibidor minimal e anticadeia.

Teorema 18. *Todo proibidor minimal é uma anticadeia.*

Prova. Seja $X \subseteq U$ um proibidor minimal, e sejam $x, y \in X$ tais que xRy . Se, para um contradição, tivéssemos $x \neq y$, então como X é um proibidor minimal teríamos $y \in \text{Proib}_R X$, contradizendo $X \cap \text{Proib}_R X = \emptyset$. Portanto temos $x = y$. ■

Como consequência, qualquer condição φ_1 que torne verdadeiro o Esquema 1 para a condição φ_2 : “ Y é proibidor minimal” também o faz para a condição φ_2 : “ Y é anticadeia”.

Note que a recíproca do Teorema 18 não é verdadeira. Por exemplo, como vimos, o conjunto $\{K_\omega, S_\omega, M_\omega\}$ é uma anticadeia de $\mathcal{G}_{\leq}^\omega$ que não é um proibidor minimal. Entretanto, temos o seguinte.

Teorema 19. *Toda anticadeia de \mathcal{Q} é um proibidor minimal se, e somente se, R é antissimétrica.*

Prova. (\Rightarrow) Por contrapositiva. Suponha que R não seja antissimétrica, e sejam $x, y \in U$ tais que $xR^{\neq}y$ e $yR^{\neq}x$. Portanto, a anticadeia $\{x\}$ não é um proibidor minimal — de fato, temos $yR^{\neq}x$ mas $y \notin \text{Proib}_R\{x\}$.

(\Leftarrow) Seja X uma anticadeia de \mathcal{Q} , e suponha para uma contradição que X não seja um proibidor minimal. Assim, existem $x \in X$ e $y \in U$ tais que $yR^{\neq}x$ e $y \notin \text{Proib}_R X$. Portanto, por definição, existe $x' \in X$ tal que $x'Ry$. Por transitividade, temos $x'R^{\neq}x$, o que implica em $x' = x$, pois X é uma anticadeia. Logo temos $yR^{\neq}x$ e xRy , contradizendo a antissimetria de R . ■

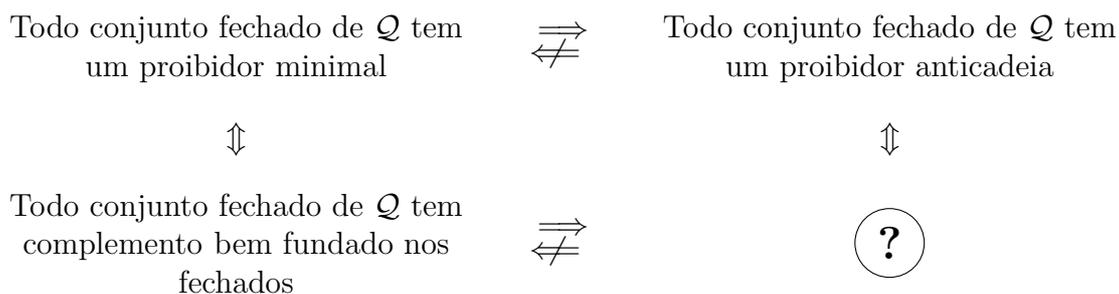


Figura 2.3: Diagrama que resume a situação das caracterizações vistas até agora.

Em resumo, uma condição φ_1 que garanta os Esquemas 1 e 2 simultaneamente para φ_2 : “ Y é anticadeia” deve ser baseada em algum conceito ainda mais fraco do que boa-fundação nos fechados. Entretanto, ainda não fomos capazes de encontrar tal conceito. Esta situação pode ser resumida com o diagrama da Figura 2.3.

2.4 Proibidores finitos

Em 2004, culminando um trabalho de mais de duas décadas e publicado em uma sequência de 20 artigos, N. Robertson e P. Seymour finalizaram a prova do seguinte resultado, cf. [19].

Teorema 20 (Teorema de Robertson-Seymour). *Todo conjunto fechado do qoset \mathcal{G}_{\preceq} possui um proibidor finito.*

É importante observar que a prova do Teorema de Robertson-Seymour não é construtiva — dada uma classe de grafos \mathbb{G} fechada por minors, o algoritmo afirma que \mathbb{G} possui um proibidor finito, mas não dá nenhuma indicação sobre como encontrá-lo.

Por outro lado, um resultado como este ainda possui profundas consequências algorítmicas, pois se um conjunto fechado X de um qoset $\mathcal{Q} = (U, R)$ possui um proibidor finito, então a complexidade de *reconhecimento* de X é, no máximo, a complexidade de se testar se xRy para elementos $x, y \in U$ quaisquer. De fato, decidir se $x \in X$ pode ser feito checando se yRx para cada $y \in Y$, onde Y é um proibidor finito de X . Como Y é finito, isso implica que basta fazermos um número constante destes testes. Logo, se testar se xRy para elementos quaisquer $x, y \in U$ for um problema polinomial, isto implica na *existência* de um algoritmo polinomial para reconhecimento de X , mas não dá nenhuma indicação sobre que algoritmo é este, de fato.

Neste contexto, um outro resultado obtido por Robertson e Seymour foi o desenvolvimento de um algoritmo de complexidade $O(n^3)$ para testar se um grafo G com

n vértices contém um grafo H arbitrário, porém fixo, como minor. Este algoritmo é de importante interesse teórico, pois ele mostra que o reconhecimento de qualquer classe fechada pela relação de minor tem complexidade cúbica. Entretanto, a constante escondida na notação O é exponencial no tamanho de H , e é de fato astronômica para vários grafos H de tamanhos relativamente pequenos, o que torna este algoritmo pouco aplicável, na prática.

Há relatos de um algoritmo recente de complexidade $O(n\alpha(n)\log n)$ para este mesmo problema, onde $\alpha(n)$ é a função inversa de Ackermann¹, o que implica que o reconhecimento de qualquer classe fechada pela relação de minor tem esta mesma complexidade. Entretanto, tal algoritmo ainda não foi publicado (cf. [26]).

A prova do Teorema 20 envolve o seguinte conceito.

Definição 21 (Boa-quasiordem; qoset bem-quasiordenado). Seja $\mathcal{Q} = (U, R)$ um qoset. Dizemos que R é uma *boa-quasiordem* quando

1. R é bem-fundada; e
2. não existe uma anticadeia infinita em \mathcal{Q} .

Neste caso, dizemos que \mathcal{Q} é *bem-quasiordenado*.

O seguinte resultado é uma consequência direta dos resultados que já vimos.

Teorema 22. *Se R é uma boa-quasiordem, então todo conjunto fechado de \mathcal{Q} possui um proibidor finito.*

Prova. Por definição, R é bem-fundada. Assim, pelo Teorema 12 (p. 11), todo conjunto fechado possui um proibidor minimal. Portanto, pelo Teorema 18 (p. 14), tal proibidor é uma anticadeia. Logo, como R é uma boa-quasiordem, tal proibidor é finito. ■

Como vimos no Exemplo 5 (p. 10), o qoset \mathcal{G}_{\leq} é bem fundado. Assim, o real trabalho envolvido na prova do Teorema de Robertson-Seymour é a prova de que todas as anticadeias do qoset \mathcal{G}_{\leq} são finitas.

Note que Teorema 22 afirma que o Esquema 1 é verdadeiro para

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ é bem-quasiordenado} \\ \varphi_2(Y) : Y \text{ é finito,} \end{aligned}$$

mas o qoset $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \leq)$ novamente mostra que estas condições não tornam o Esquema 2 verdadeiro.

¹A função $\alpha(n)$ é crescente, mas pode ser considerada uma constante para qualquer aplicação prática. Por exemplo, temos $\alpha(2^{2^{10^{19729}}}) < 5$.

Como já vimos, não existem teoremas análogos ao Teorema de Robertson-Seymour para os qosets \mathcal{G}_{\leq} e \mathcal{G}_{\subseteq} . Portanto, as seguintes perguntas surgem naturalmente:

1. Qual a condição φ_1 que garante os Esquemas 1 e 2 para a condição $\varphi_2(Y)$: “ Y é finito”?
2. Em um qoset no qual nem todos os conjuntos fechados possuem proibidores finitos, como caracterizar aqueles que os possuem?
3. Especificamente nos qosets \mathcal{G}_{\leq} e \mathcal{G}_{\subseteq} , como caracterizar os conjuntos fechados que possuem proibidores finitos?

Nesta seção, provaremos que não existem propriedades que possam ser checadas por procedimentos automáticos e que respondam a essas perguntas satisfatoriamente.

Assumiremos que o leitor está familiarizado com conceitos e resultados básicos de Teoria da Computabilidade, como as definições de objeto computável e de problema decidível, e a prova da indecidibilidade do Problema da Parada, dentre outros. Todos estes conceitos podem ser encontrados em qualquer livro introdutório sobre o assunto, como por exemplo [18].

O principal resultado desta seção é o seguinte.

Teorema 23. *Seja \mathcal{Q} um qoset. Decidir se um conjunto fechado de \mathcal{Q} possui um proibidor finito é um problema indecidível.*

Logo, em particular, não existe uma condição $\varphi_1(\mathcal{Q})$ computável que torne verdadeiros simultaneamente os Esquemas 1 e 2 para a condição $\varphi_2(Y)$: “ Y é finito”.

Este teorema é uma consequência imediata do Teorema 25, que veremos em breve. Antes, precisamos de algumas definições.

Definição 24 (Ideal principal; qoset e relação com ideais finitos). Seja $\mathcal{Q} = (U, R)$ um qoset, e seja $x \in U$. O *ideal principal de x* é o conjunto

$$I_x = \{y \in U : yRx\}.$$

Dizemos que \mathcal{Q} tem ideais finitos quando I_x é finito para cada $x \in U$.

Neste caso, por conveniência às vezes também dizemos que R tem ideais finitos.

Note que todo qoset que tem ideais finitos é bem-fundado pois, por contrapositiva, se \mathcal{Q} não é bem-fundado, então pelo Teorema 8 (p. 10) \mathcal{Q} possui uma sequência estritamente decrescente infinita s . Logo, para qualquer elemento x de s , o ideal principal de x é infinito.

Entretanto, a recíproca deste resultado não é verdadeira; existem qosets bem-fundados que não possuem ideais finitos. Por exemplo, considere o qoset $(\mathbb{N}, |)$,

onde $|$ é a relação de divisibilidade. Esta relação é bem-fundada, entretanto o ideal principal de 0 é $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, um conjunto infinito.

Exemplo 9. Os qosets \mathcal{G}_{\leq} , \mathcal{G}_{\subseteq} e \mathcal{G}_{\preceq} têm ideais finitos pois, como vimos, se $G < H$, $G \subset H$ ou $G \prec H$, então temos $|V(G)| + |E(G)| < |V(H)| + |E(H)|$, o que implica que I_H é finito em qualquer um destes qosets.

Entretanto, os qosets $\mathcal{G}_{\leq}^{\omega}$, $\mathcal{G}_{\subseteq}^{\omega}$, $\mathcal{G}_{\preceq}^{\omega}$, $\mathcal{G}_{\leq}^{\infty}$, $\mathcal{G}_{\subseteq}^{\infty}$ e $\mathcal{G}_{\preceq}^{\infty}$ não têm ideais finitos pois não são bem-fundados.

Teorema 25. *Seja \mathcal{P} um poset enumerável com ideais finitos. Decidir se um conjunto fechado de \mathcal{P} possui um proibidor finito é um problema indecidível.*

Logo, também não existe uma condição $\varphi'_1(\mathcal{Q})$ computável que torne verdadeiros simultaneamente os Esquemas 1 e 2 para as condições $\varphi_1(\mathcal{Q})$: “ \mathcal{Q} é um poset enumerável com ideais finitos e vale $\varphi'_1(\mathcal{Q})$ ”, e $\varphi_2(Y)$: “ Y é finito”.

As Seções 2.4.1 e 2.4.2 serão dedicadas à prova do Teorema 25. Antes, vejamos algumas consequências deste resultado para os qosets \mathcal{G}_{\leq} e \mathcal{G}_{\subseteq} .

Definição 26 (Isomorfismo de qosets). Dois qosets $\mathcal{Q}_1 = (U_1, R_1)$ e $\mathcal{Q}_2 = (U_2, R_2)$ são *isomorfos*, denotado por $\mathcal{Q}_1 \simeq \mathcal{Q}_2$, quando existe uma função $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ que satisfaz

1. ϕ é uma bijeção; e
2. para todos $x, y \in U_1$, temos xR_1y se, e somente se, temos $\phi(x)R_2\phi(y)$.

Uma função satisfazendo as condições acima é um *isomorfismo* entre \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 .

Lema 27. *Para qualquer poset $\mathcal{P} = (U, R)$ temos*

$$\mathcal{P} \simeq (\mathbb{I}, \subseteq),$$

onde $\mathbb{I} = \{I_x : x \in U\}$ e \subseteq é a relação usual de inclusão de conjuntos.

Prova. Defina $\phi : U \rightarrow \mathbb{I}$ fazendo $\phi(x) = I_x$.

Pela definição de \mathbb{I} , temos imediatamente que ϕ é uma função sobrejetiva.

Para mostrar que ϕ é injetiva, sejam $x, y \in U$ tais que $\phi(x) = \phi(y)$. Como R é reflexiva, temos $x \in I_x = \phi(x) = \phi(y) = I_y$, e portanto temos xRy . Analogamente, temos yRx . Logo, como R é antissimétrica, temos $x = y$.

Portanto ϕ é uma bijeção.

Para mostrar que $xRy \Rightarrow \phi(x) \subseteq \phi(y)$, suponha xRy e seja $u \in \phi(x) = I_x$. Portanto, temos uRx , donde por transitividade temos uRy . Logo $u \in I_y = \phi(y)$.

Para mostrar que $\phi(x) \subseteq \phi(y) \Rightarrow xRy$, suponha que $\phi(x) \subseteq \phi(y)$. Por reflexividade, temos $x \in I_x = \phi(x)$, e portanto temos $x \in \phi(y) = I_y$. Logo temos xRy . ■

Lema 28. *Para qualquer poset enumerável com ideais finitos \mathcal{P} , existe uma família \mathbb{G} de grafos finitos tal que $\mathcal{P} \simeq (\mathbb{G}, \leq) \simeq (\mathbb{G}, \subseteq)$.*

Prova. Faremos a prova para o caso em que \mathcal{P} é infinito; as adaptações necessárias para obtermos uma prova para o caso finito são claras.

Seja $\mathcal{P} = (U, R)$, e seja $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ uma enumeração de U .

Para cada $i \in \mathbb{N}$, faça

$$G_i = \bigcup_{x_j \in I_{x_i}} C_{j+2},$$

onde \cup representa a união disjunta de grafos e C_j é o ciclo com j vértices.

Por exemplo, se $I_{x_1} = \{x_1, x_4, x_7\}$, então G_1 é o grafo composto pela união disjunta de C_3 , C_6 e C_9 .

Como \mathcal{P} tem ideais finitos, cada G_i é um grafo finito.

Faça $\mathbb{G} = \{G_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Afirmção. $\mathcal{P} \simeq (\mathbb{G}, \leq)$.

De fato, seja $\phi : U \rightarrow \mathbb{G}$ definida por $\phi(x_i) = G_i$.

Claramente, ϕ é uma função sobrejetiva.

Para ver que ϕ é injetiva, suponha que $G_i = G_j$. Como CICLO é uma \leq -anticadeia, isto implica que G_i e G_j têm exatamente as mesmas componentes conexas, i.e., são uniões disjuntas de exatamente os mesmos ciclos. Portanto, pela construção de G_i e G_j , temos $I_{x_i} = I_{x_j}$. Logo, pelo Lema 27, temos $x_i R x_j$ e $x_j R x_i$. Logo, por antissimetria temos $x_i = x_j$.

Portanto ϕ é uma bijeção.

Para mostrar que $x_i R x_j \Rightarrow G_i \leq G_j$, suponha que $x_i R x_j$. Logo, pelo Lema 27, isto implica que $I_{x_i} \subseteq I_{x_j}$. Portanto, por construção, cada componente conexa de G_i é uma componente conexa de G_j . Assim, temos $G_i \leq G_j$.

Para mostrar que $G_i \leq G_j \Rightarrow x_i R x_j$, suponha que $G_i \leq G_j$. Logo, novamente como CICLO é uma \leq -anticadeia, isto implica que cada componente conexa de G_i é uma componente conexa de G_j . Assim, pela construção de G_i e G_j , isto implica que $I_{x_i} \subseteq I_{x_j}$. Portanto, pelo Lema 27, temos $x_i R x_j$.

Afirmção. $\mathcal{P} \simeq (\mathbb{G}, \subseteq)$.

Para quaisquer ciclos C e C' , temos $C \subseteq C'$ sse $C \leq C'$, o que implica que, para todos $i, j \in \mathbb{N}$, temos $G_i \subseteq G_j$ sse $G_i \leq G_j$. Portanto, a prova desta afirmação é inteiramente análoga à prova da afirmação anterior, bastando trocarmos \leq por \subseteq . ■

O resultado abaixo é consequência imediata da definição de isomorfismo entre posets.

Lema 29. *Seja ϕ um isomorfismo entre os qosets \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 . Então*

1. *X é um conjunto fechado de \mathcal{Q}_1 sse $\phi(X)$ é um conjunto fechado de \mathcal{Q}_2 ; e*
2. *X tem um proibidor finito em \mathcal{Q}_1 sse $\phi(X)$ tem um proibidor finito em \mathcal{Q}_2 .*

Teorema 30. *Decidir se um conjunto fechado de (\mathcal{G}, \leq) , ou de (\mathcal{G}, \subseteq) , possui um proibidor finito é um problema indecidível.*

Prova. Seja $\mathcal{P} = (U, R)$ um poset enumerável com ideais finitos, e seja $X \subseteq U$ um conjunto fechado.

Seja (\mathbb{G}, \leq) um poset de grafos isomorfo a \mathcal{P} , e seja ϕ um isomorfismo entre estes posets.

Pelo Lema 29, temos que X possui um proibidor finito em \mathcal{P} se, e somente se, $\phi(X)$ possui um proibidor finito em (\mathbb{G}, \leq) .

Portanto, pelo Teorema 25 (p. 18), decidir se um conjunto fechado de (\mathbb{G}, \leq) possui um proibidor finito é um problema indecidível. Logo, como (\mathbb{G}, \leq) é um subqoset (induzido) de (\mathcal{G}, \leq) , obtemos o resultado desejado.

Um raciocínio análogo mostra que o mesmo vale para o poset (\mathcal{G}, \subseteq) . ■

2.4.1 Alguns problemas indecidíveis

Como é usual em Teoria da Computabilidade, a prova do Teorema 25 (p. 18) envolve sucessivas reduções entre problemas de decisão, começando com o problema Parada abaixo, e terminando com o problema do enunciado do Teorema 25. Como Parada é um problema indecidível, também o são todos os problema envolvidos na redução.

Nesta seção, introduziremos os problemas envolvidos, e provaremos que eles são indecidíveis.

Adotaremos a convenção de denotar por P_X um programa que decide o objeto computável X .

Parada	
Instância:	Programa P ; Entrada x para P .
Pergunta:	P para quando executado com entrada x ?

Teorema 31 (Teorema da Indecidibilidade de Parada). *Parada é indecidível.*

Tal resultado, devido a A. Turing em 1936 cf. [18], é muito bem conhecido, e uma prova detalhada e precisa deste resultado envolve muitos conceitos de Teoria da Computabilidade, fugindo do escopo deste trabalho.

O primeiro problema que introduzimos é o de decidir se um conjunto X é finito, de posse apenas de um programa que decide X .

Finitude	
Instância:	Programa P_X que decide um conjunto X .
Pergunta:	X é finito?

Teorema 32. *Finitude é indecidível.*

Prova. Dada uma instância $\langle P, x \rangle$ de **Parada**, seja $X = \{i \in \mathbb{N} : \text{até o } i\text{-ésimo passo, a execução de } P \text{ com entrada } x \text{ não para}\}$.

Claramente, X é um conjunto computável — para decidir se $i \in X$, basta rodar i passos do programa P com entrada x , e verificar se o programa para em algum deles.

Além disso, P para com entrada x se, e somente se, X é finito.

Portanto, $\langle P, x \rangle$ é uma instância “SIM” de **Parada** se, e somente se, P_X é uma instância “SIM” de **Finitude**. ■

Para introduzirmos o próximo problema, precisamos dos seguintes conceitos.

Definição 33 (Fecho de operações). Sejam op_1, \dots, op_n operações sobre U , e seja X um subconjunto de U .

O *fecho de X por op_1, \dots, op_n* , denotado por $(op_1, \dots, op_n)^*(X)$, é o conjunto dos elementos $x \in U$ para os quais existe um sequência $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ de elementos de U tal que $x_k = x$ e, para todo $1 \leq i \leq k$, temos:

1. $x_i \in X$; ou
2. existem $l \in \{1, \dots, n\}$, $m \in \mathbb{N}$, e $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, i-1\}$ tais que
 - (a) A operação op_l é m -ária; e
 - (b) $x_i = op_l(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$.

Uma sequência satisfazendo as condições acima é uma *sequência de geração de x* .

Em outras palavras, o fecho de X pelas operações op_1, \dots, op_n é o conjunto de todos os elementos que podem ser obtidos a partir de elementos de X por uma sequência *finita* de aplicações destas operações.

Definição 34 (Conjunto gerado e relação caracterizada por operações). Sejam op_1, \dots, op_n operações sobre U , sejam X e Y subconjuntos de U , e seja R uma relação binária sobre U .

Dizemos que op_1, \dots, op_n geram X a partir de Y quando

$$X = (op_1, \dots, op_n)^*(Y).$$

Dizemos que R é caracterizada por op_1, \dots, op_n quando, para todos $x, y \in U$, temos

$$xRy \text{ sse } y \in (op_1, \dots, op_n)^*({x}).$$

Exemplo 10. A operação de soma gera \mathbb{N} a partir de $\{0, 1\}$.

A relação de subgrafo em \mathcal{G} é caracterizada pelas operações (unárias) de adição de novo vértice, e adição de nova aresta entre vértices (já existentes, ou novos). Já a relação de subgrafo induzido em \mathcal{G} é caracterizada pela operação (unária) de adição de um novo vértice com arestas para vértices já existentes.

O próximo problema que introduzimos é o de decidir, dado um conjunto X que pode ser gerado a partir de algum conjunto, se X também pode ser gerado a partir de um conjunto finito.

Geração Finita com Restrições

Instância: Programa P_U que decide o universo U ,
 Programa P_X que decide $X \subseteq U$,
 Programa P_Y que decide $Y \subseteq U$,
 $n \in \mathbb{N}$,
 Programas $P_{op_1}, \dots, P_{op_n}$ tais que

1. op_1, \dots, op_n são operações unárias que geram X a partir de Y ; e
2. op_1, \dots, op_n caracterizam uma ordem parcial recursiva de U que tem ideais finitos.

Pergunta: Existe $Y' \subseteq U$ finito tal que op_1, \dots, op_n geram X a partir de Y' ?

Teorema 35. Geração Finita com Restrições é *indecidível*.

Prova. Dada uma instância P_X de Finitude, construa a instância $\langle P_X, P_X, P_X, 1, id \rangle$ de Geração Finita com Restrições, onde id é a operação (unária) identidade em X .

A operação id caracteriza a relação de igualdade, que claramente é um ordem parcial recursiva de X que tem ideais finitos — para cada $x \in X$, temos $I_x = \{x\}$.

Além disso, para quaisquer conjuntos A e B , temos que id gera A a partir de B se, e somente se, $A = B$.

Logo, P_X é uma instância “SIM” de Finitude se, e somente se, $\langle P_X, P_X, P_X, 1, \text{id} \rangle$ é uma instância “SIM” de Geração Finita com Restrições. ■

Note que a indecidibilidade de Geração Finita com Restrições implica que também é indecidível o problema Geração Finita mais geral, que é o de decidir se para um dado subconjunto X de U existe um subconjunto finito Y de U que gera X utilizando operações $\text{op}_1, \dots, \text{op}_n$, sem nenhuma exigência quanto a essas operações.

2.4.2 A prova do Teorema 25

Já estamos quase prontos para provar o principal resultado desta seção. Antes, precisamos de um resultado que relaciona os conceitos de geração e proibição.

Lema 36. *Se $\text{op}_1, \dots, \text{op}_n$ são operações unárias, então*

$$(\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*(X) = \bigcup_{x \in X} (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*({x}).$$

Prova. É imediato ver que $(\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*(X) \supseteq \bigcup_{x \in X} (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*({x})$.

Para mostrar a inclusão na direção contrária, seja $x \in (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*(X)$. A prova é por indução no tamanho k das menores sequências de geração de x a partir de X .

Se $k = 1$, então $x \in X$, e o resultado segue imediatamente.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para todo $k' < k$, e seja x tal que x_1, \dots, x_k seja uma menor sequência de geração de x a partir de X . Por definição, temos que $x = \text{op}_l(x_m)$ para algum $l \in \{1, \dots, n\}$ e $m \in \{1, \dots, k-1\}$. Se, para uma contradição, tivéssemos $m \neq k-1$, então x_1, \dots, x_m, x seria uma sequência de geração de x de comprimento menor do que k , uma contradição. Portanto temos $x = \text{op}_l(x_{k-1})$.

Além disso, temos que x_1, \dots, x_{k-1} é uma menor sequência de geração de x_{k-1} a partir de X . Portanto, pela H.I., temos que $x_{k-1} \in (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*({y})$ para algum $y \in X$. Assim, seja y_1, \dots, y_{k-1} uma sequência de geração de x_{k-1} a partir de $\{y\}$. Logo, y_1, \dots, y_{k-1}, x_k é uma sequência de geração de x_k a partir de $\{y\}$.

Portanto temos $x \in \bigcup_{y \in X} (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*({y})$, o que conclui a prova. ■

Lema 37. *Seja $\mathcal{Q} = (U, R)$ um qoset tal que R é caracterizada pelas operações unárias $\text{op}_1, \dots, \text{op}_n$, e sejam X e Y subconjuntos de U . Então temos*

$$\begin{aligned} X &= \text{Proib}_R Y \\ &\text{sse} \\ \text{op}_1, \dots, \text{op}_n &\text{ geram } \overline{X} \text{ a partir de } Y. \end{aligned}$$

Prova. (\Rightarrow) Suponha que $X = \text{Proib}_R Y$. Assim, temos

$$\begin{aligned} x \in \overline{X} &\Leftrightarrow x \notin X \\ &\Leftrightarrow \exists y \in Y \text{ t.q. } yRx \\ &\Leftrightarrow \exists y \in Y \text{ t.q. } x \in (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*(\{y\}) \\ &\Leftrightarrow x \in (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*(Y), \end{aligned}$$

i.e., $\text{op}_1, \dots, \text{op}_n$ geram \overline{X} a partir de Y .

(\Leftarrow) Suponha que $\text{op}_1, \dots, \text{op}_n$ geram \overline{X} a partir de Y . Assim, temos

$$\begin{aligned} x \in X &\Leftrightarrow x \notin \overline{X} \\ &\Leftrightarrow x \notin (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*(Y) \\ &\Leftrightarrow \nexists y \in Y \text{ t.q. } x \in (\text{op}_1, \dots, \text{op}_n)^*(\{y\}) \\ &\Leftrightarrow \nexists y \in Y \text{ t.q. } yRx \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Proib}_R Y, \end{aligned}$$

i.e., $X = \text{Proib}_R Y$. Isto conclui a prova. ■

Estamos prontos para provar o Teorema 25 (p. 18).

Prova do Teorema 25. Seja $I = \langle P_U, P_X, P_Y, n, P_{\text{op}_1}, \dots, P_{\text{op}_n} \rangle$ uma instância de Geração Finita. Por hipótese, a relação R caracterizada por $\text{op}_1, \dots, \text{op}_n$ é uma ordem parcial recursiva de U que tem ideais finitos. Assim, como Y gera X , pelo Lema 37 temos que

$$\overline{X} = \text{Proib}_R Y.$$

Logo, novamente pelo Lema 37, temos que \overline{X} tem um proibidor finito Y' se, e somente se, I é uma instância “SIM” de Geração Finita.

Isto conclui a prova. ■

Capítulo 3

Decomposição por Cliques Maximais Separadoras

Neste capítulo, apresentaremos um algoritmo para decompor um grafo por suas cliques maximais separadoras. Esta é uma particularização de um método geral, chamado *decomposição de grafos*. Como nosso interesse principal é algorítmico, no restante deste capítulo apenas trataremos de grafos finitos. Um tratamento abrangente de decomposições de grafos infinitos pode ser encontrado em [7].

3.1 Decomposições de grafos

Decomposições de grafos desempenham um papel central em muitas áreas da teoria do grafos, tanto em situações concretas, como a elaboração e análise de algoritmos [6, 7, 33], quanto abstratas, como nas provas do Teorema de Robertson-Seymour cf. [19] e do Teorema Forte dos Grafos Perfeitos cf. [5]. Como veremos, esta é uma ferramenta que tem uma aplicação direta a caracterizações de classes de grafos por proibição.

De uma maneira geral, podemos classificar as decomposições de grafos em dois tipos: as *estruturais* e as *atômicas*.

Decomposições estruturais de grafos

Em uma decomposição deste tipo, procedemos da seguinte forma:

1. selecionamos uma família \mathcal{F} de subgrafos de G , chamados *partes da decomposição*; e
2. estabelecemos um critério que determina quando dois membros de \mathcal{F} estão *relacionados*. Isto define um “meta-grafo” H , que tem \mathcal{F} como conjunto de vértices, e arestas ligando os vértices relacionados pelo critério definido (em

certos casos, trabalhamos na ordem contrária; primeiro definimos o meta-grafo H , e assim estabelecemos o critério implicitamente).

Uma decomposição deste tipo é denotada por (H, \mathcal{F}) .

Agora, utilizamos propriedades estruturais de H e \mathcal{F} para resolvermos um problema em G . Na maioria das vezes em que este tipo de decomposição é aplicada, procuram-se uma família \mathcal{F} e um critério de decomposição que garantam que H seja uma árvore, mas este nem sempre é o caso.

A Figura 3.1 traz um exemplo de uma decomposição estrutural.

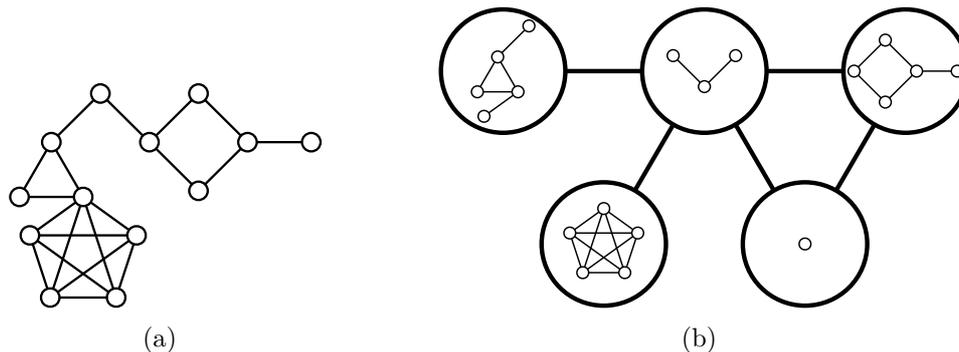


Figura 3.1: Um grafo G , (a), e uma decomposição estrutural de G , (b).

As decomposições estruturais de grafos têm se mostrado essenciais em grande parte dos principais desenvolvimentos recentes da Teoria dos Grafos. Um exemplo disto pode ser visto a seguir.

Exemplo 11 (Robertson e Seymour, 1990 cf. [19]). Uma decomposição estrutural que tem sido bastante aplicada é chamada *decomposição árvore* (do inglês “tree decomposition”). Esta é uma decomposição (T, \mathcal{F}) de G , onde:

1. T é uma árvore;
2. G é a união dos elementos de \mathcal{F} ; e
3. Para quaisquer $G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{F}$, se G_2 está entre G_1 e G_3 em T , então $V(G_2) \supseteq V(G_1) \cap V(G_3)$.

O menor número k tal que G possui uma decomposição árvore com a maior parte tendo no máximo $k + 1$ vértices é chamado *largura de árvore de G* (do inglês “tree-width”).

Um importante passo na prova do Teorema de Robertson-Seymour, que vimos na Seção 2.4, consiste em mostrar que qualquer anticadeia de $\mathcal{G}_{\leq k}$ em que todos os grafos possuem largura de árvore limitada por algum k é finita.

Um tratamento mais completo de decomposições estruturais está fora do escopo deste trabalho, e pode ser encontrado em [7].

Decomposições atômicas de grafos

Em linhas gerais, esta técnica para resolver problemas em grafos consiste em:

1. decompor um dado grafo G em diversos grafos mais simples, de acordo com um critério pré-estabelecido;
2. iteradamente repetir o processo para cada grafo obtido, até que todos os grafos resultantes sejam *átomos*, i.e., grafos que não podem mais ser decompostos por este critério. O resultado deste processo pode ser visto como uma árvore enraizada que tem G como raiz e os átomos como folhas. Esta árvore é chamada *árvore de decomposição*; veja a Figura 3.2;

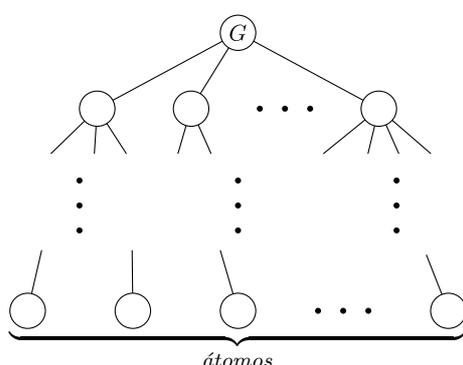


Figura 3.2: Um esboço de uma árvore de decomposição.

3. resolver o problema nas folhas da árvore de decomposição; e
4. iteradamente compor as soluções obtidas para os filhos de um nó v da árvore de decomposição para obter uma solução para v , até que se obtenha uma solução para G .

O primeiro exemplo de que se tem notícia de uma aplicação de decomposições atômicas de grafos é o seguinte.

Exemplo 12 (K. Wagner, 1937 cf. [7]). O Teorema de Kuratowski, em seu enunciado com a relação de minor, afirma que um grafo é PLANAR se, e somente se, ele não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como minor. Assim, um grafo que não contém K_5 pode não ser PLANAR, mas K. Wagner mostrou que sua “não-planaridade” está, de certa forma, confinada em algumas partes do grafo, com o restante deste sendo planar.

Não é difícil ver que, se um grafo G é separado por uma clique C em G_1, \dots, G_k , então $K_5 \preceq G$ se, e somente se, $K_5 \preceq G_i$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$.

Portanto, considerando uma árvore de decomposição de G , temos que G contém K_5 como minor se, e somente se, alguma folha da árvore contém K_5 como minor.

Desta forma, para caracterizarmos os grafos que não contêm K_5 como menor, basta caracterizarmos os *átomos* que não contêm K_5 como menor.

Em um artigo de 1937, K. Wagner mostrou que, exceto por um grafo W específico, todos os átomos sem K_5 como menor são grafos planares. Daí, ele concluiu que se G não contém K_5 como menor, então $G \notin \text{PLANAR}$ somente se existe alguma folha H de uma árvore de decomposição de G que é um subgrafo de W , ou que é obtida de pelo menos três grafos planares por uma operação de *colagem* específica.

Note que se existe uma decomposição atômica de G para a qual algoritmos polinomiais existem para (a) resolver o problema nas folhas da árvore de decomposição, e (b) combinar soluções obtidas, e se além disso a árvore de decomposição tem tamanho polinomial no tamanho de G , então temos um algoritmo polinomial para resolver o problema neste grafo.

No restante deste capítulo, apenas trataremos de alguns aspectos das decomposições atômicas de grafos que as tornam aplicáveis a caracterizações por proibição. Maiores detalhes sobre decomposições atômicas e suas aplicações podem ser encontrados em [1, 13, 32, 33].

Para aplicarmos esta ferramenta à busca da caracterização de uma classe \mathbb{G} por subgrafos induzidos proibidos, estamos interessados em critérios de decomposição que satisfaçam as seguintes propriedades:

1. em qualquer árvore de decomposição, os filhos de um nó interno são subgrafos induzidos próprios do nó (por exemplo, isto ocorre sempre que o critério é baseado em *separações*);
2. existe uma propriedade estrutural de grafos Φ_d que garante o *Teorema dos Decomponíveis de \mathbb{G}* : “Se G é decomposto em G_1, \dots, G_k , então $G \in \mathbb{G}$ se, e somente se, temos $G_1, \dots, G_k \in \mathbb{G}$ e vale $\Phi_d(G, G_1, \dots, G_k)$ ”;
3. existe uma propriedade estrutural de grafos Φ_a que garante o *Teorema dos Átomos de \mathbb{G}* : “Se G é um átomo, então $G \in \mathbb{G}$ se, e somente se, vale $\Phi_a(G)$ ”.

Neste caso temos que se $G \in \text{Proib}_{\leq}^{-1}\mathbb{G}$, então

- se G pode ser decomposto em G_1, \dots, G_k , então como $\text{Proib}_{\leq}^{-1}\mathbb{G}$ é um proibidor minimal, temos $G_1, \dots, G_k \in \mathbb{G}$. Portanto, pelo Teorema dos Decomponíveis de \mathbb{G} , como $G \notin \mathbb{G}$, temos que não vale $\Phi_d(G, G_1, \dots, G_k)$. Assim, utilizamos o conteúdo estrutural de Φ_d para determinar G ;
- se G é um átomo, então pelo Teorema dos Átomos de \mathbb{G} , temos que não vale $\Phi_a(G)$. Assim, utilizamos o conteúdo estrutural de Φ_a para determinar G .

No Capítulo 4 veremos alguns exemplos onde esta abordagem é aplicada.

3.2 Decomposição por cliques separadoras

Observamos que, ao longo deste trabalho, *clique* denota um conjunto de vértices dois-a-dois adjacentes, e que cliques maximais, i.e., aquelas que não estão propriamente contidas em nenhuma outra, serão denotadas por *maxcliques*.

Um critério especialmente interessante para caracterizações por proibição é o de decomposição por *cliques separadoras*. Em parte, isto se deve ao fato de que, em tais decomposições, os grafos decompostos *herdam* muito da estrutura do grafo original. Por exemplo, se G é separado por uma clique em G_1, \dots, G_k , então G contém um caminho induzido de tamanho l sse algum G_i contém um caminho induzido de tamanho pelo menos $l/2$.

Além disso, não é difícil ver que várias classes de grafos, como CICLO e COMPLEMENTO DE CICLO, dentre outras, são compostas exclusivamente por grafos que não possuem cliques separadoras, i.e., átomos. Daí, pela definição de CORDAL e pelo Teorema Forte dos Grafos Perfeitos, imediatamente temos o seguinte.

Teorema 38 (Teorema dos Decomponíveis de CORDAL e PERFEITO). *Se G é separado por uma clique em G_1, \dots, G_k , então*

1. $G \in \text{CORDAL}$ se, e somente se, $G_1, \dots, G_k \in \text{CORDAL}$;
2. $G \in \text{PERFEITO}$ se, e somente se, $G_1, \dots, G_k \in \text{PERFEITO}$.

No restante deste capítulo, descrevemos os algoritmos elaborados por R. Tarjan [33] para decompor um grafo por cliques separadoras e por maxcliques separadoras. Apresentamos um contraexemplo minimal para a corretude do algoritmo de decomposição por maxcliques separadoras, e descrevemos um algoritmo correto para este fim.

Para evitarmos lidar com casos degenerados, assumiremos que todos os grafos com os quais lidamos são conexos.

3.2.1 Definições e preliminares

Definição 39 (Separador; grafo separado). Um *separador* de um grafo conexo é um subconjunto X de seus vértices tal que $G \setminus X$ é um grafo desconexo.

Neste caso, dizemos que X *separa* G em $G_1 = G[V_1 \cup X], \dots, G_k = G[V_k \cup X]$, onde V_1, \dots, V_k são as componentes conexas de $G \setminus X$, e que cada G_i é um *grafo separado* de G por X .

Definição 40 (Passeio; comprimento de passeio; concatenação de passeios). Um *passeio* em G é uma seqüência $P = v_1, \dots, v_k$ de vértices tais que $v_i v_{i+1} \in E$ para todo $i \in 1, \dots, k-1$. Os vértices v_1 e v_k são os *extremos*, e v_2, \dots, v_{k-1} são os *vértices internos* de P . Também dizemos que P é um $v_1 v_k$ -*passeio*.

O *comprimento* do passeio $P = v_1, \dots, v_k$ é $k - 1$, i.e., é o número de arestas que o grafo induzido por ele contém.

Dados dois passeios $P_1 = v_1, \dots, v_k$ e $P_2 = u_1, \dots, u_l$ tais que $v_k u_1 \in E$, a *concatenação* de P_1 e P_2 , denotada por $P_1 P_2$, é o passeio $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l$. Por conveniência, também permitimos o caso em que $v_k = u_1$, e neste caso a concatenação $P_1 P_2$ é o passeio $v_1, \dots, v_k, u_2, \dots, u_l$.

Definição 41 (Ordem de eliminação). Uma *ordem de eliminação* de G é uma ordem total sobre $V(G)$.

Note que, por esta definição, se π é uma ordem de eliminação de G e H é um subgrafo de G , então a restrição de π aos vértices de H é uma ordem de eliminação de H .

Quando for conveniente, trataremos uma ordem de eliminação de G também como uma bijeção entre $V(G)$ e $\{1, \dots, n\}$, de maneira a denotar a *posição* que cada vértice ocupa na ordem.

No restante deste capítulo assumiremos que π é uma ordem de eliminação de G .

Definição 42 (Passeio preenchível; preenchimento F_π ; arestas de preenchimento). Um passeio P em G é *preenchível* quando todo vértice interno de P é menor do que os extremos de P em π . O *preenchimento causado por π* é o conjunto

$$F_\pi = \{uv \notin E : u \neq v \text{ e existe um } uv\text{-passeio preenchível em } G\}.$$

Os elementos de F_π são chamados *arestas de preenchimento*.

Note que a definição acima implica que se P é um uv -caminho preenchível, então u e v aparecem exatamente uma vez em P , pois em caso contrário uma das ocorrências de u ou de v seria como um vértice interno de P , e teríamos $\pi(u) < \pi(u)$ ou $\pi(v) < \pi(v)$.

Definição 43 (Ordem de eliminação minimal; mínima; perfeita).

1. π é *minimal* (“*o.e.m.*”) quando não existe π' tal que $F_{\pi'} \subset F_\pi$;
2. π é *mínima* quando não existe π' tal que $|F_{\pi'}| < |F_\pi|$;
3. π é *perfeita* quando $F_\pi = \emptyset$.

Na Figura 3.3 temos exemplos de três ordens de eliminação, e as arestas de preenchimento causadas por cada uma. Note que o preenchimento causado pela ordem em (a) é um subconjunto próprio do preenchimento causado pela ordem em (b); assim, esta última não é minimal. Como consequência do Teorema 47 que veremos mais adiante, a ordem dada em (a) é minimal.

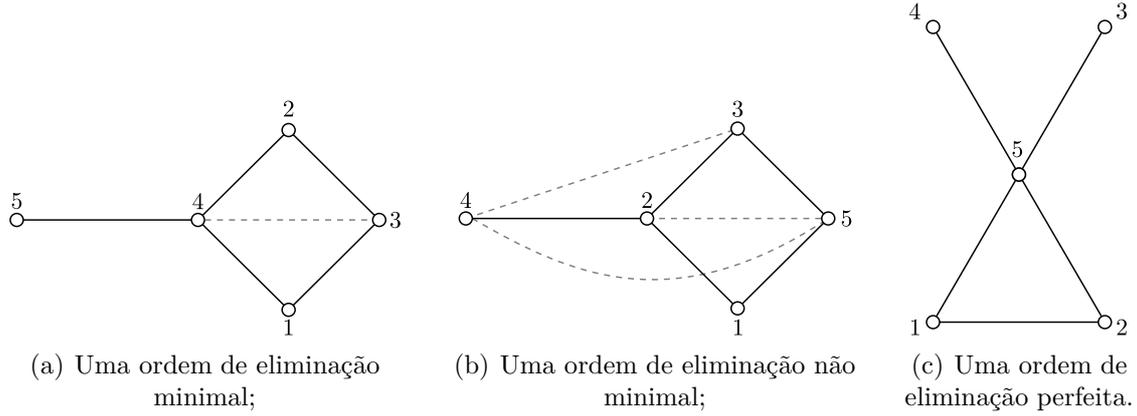


Figura 3.3: Exemplos de ordens de eliminação. As arestas de preenchimento são representadas por linhas tracejadas.

Definição 44 (Caminho). Um *caminho* é um passeio no qual cada vértice de G aparece no máximo uma vez.

O teorema a seguir mostra que a Definição 42 poderia ter sido feita utilizando-se caminhos, em vez de passeios. Entretanto, em várias provas de resultados mais adiante utilizamos o conceito de concatenação de passeios, e um conceito análogo para caminhos tornaria tais provas consideravelmente mais difíceis. Assim, alternaremos entre utilizar a Definição 42 e o Teorema 45, conforme a conveniência.

Teorema 45. $F_\pi = \{uv \notin E : u \neq v \text{ e existe um } uv\text{-caminho preenchível em } G\}$.

Prova. (\subseteq) Se $uv \in F_\pi$, então por definição existe um uv -passeio preenchível $P = x_1, x_2, \dots, x_k$ em G , onde $x_1 = u$ e $x_k = v$. Se este não é um caminho, então seja i o menor índice tal que x_i aparece mais de uma vez em P , e seja j o maior índice tal que $x_i = x_j$. Portanto, x_i aparece exatamente uma vez no passeio $P' = x_1, \dots, x_i, x_{j+1}, \dots, x_k$, que é preenchível.

Podemos repetir o procedimento acima até que não haja mais nenhuma repetição de vértices no passeio preenchível P'' resultante. Logo P'' é um uv -caminho preenchível.

(\supseteq) Imediato, pois todo caminho é um passeio por definição. ■

Definição 46 (Vértice máximo; mínimo). Seja $X \subseteq V$. Dizemos que $v \in X$ é *máximo* de X quando

$$\pi(v) = \max\{\pi(u) : u \in X\}.$$

A definição de vértice *mínimo* de X é inteiramente análoga.

O próximo resultado justifica a nomenclatura usada para ordens de eliminação perfeitas, mostrando que este conceito coincide com os *esquemas de eliminação perfeitos* dos grafos cordais, devidos a D. Fulkerson e O. Gross em 1965 cf. [33], e consagrados na literatura.

Teorema 47. G é cordal se, e somente se, existe uma ordem de eliminação perfeita de G .

Prova. (\Rightarrow) É um resultado bem conhecido que todo grafo cordal possui um esquema de eliminação perfeito, que é uma ordenação v_1, \dots, v_n de seus vértices tal que

$$N_G(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\} \quad (3.1)$$

é uma clique, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Portanto, tomemos a ordem de eliminação definida por $\pi(v_i) = i$.

Afirmção. π é uma ordem de eliminação perfeita de G .

De fato, suponha para uma contradição que $F_\pi \neq \emptyset$, e sejam $u, v \in G$ tais que $uv \in F_\pi$. Seja $P = u, x_1, \dots, x_k, v$ um uv -caminho preenchível em G de comprimento mínimo, e seja x_i o vértice mínimo de $\{x_1, \dots, x_k\}$. Portanto, temos $x_{i-1}, x_{i+1} \in N_G(x_i)$, e pela definição de x_i temos $\pi(x_i) < \pi(x_{i-1})$ e $\pi(x_i) < \pi(x_{i+1})$. Assim, por 3.1 temos $x_{i-1}x_{i+1} \in E$, o que contradiz a definição de P pois neste caso $u, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k, v$ é um uv -caminho preenchível de comprimento menor que o de P .

(\Leftarrow) Seja π uma ordem de eliminação perfeita de G . Seja $C = v_1, \dots, v_k, v_1$ um ciclo de G , e seja v_i o vértice mínimo de C . Portanto, se para uma contradição tivéssemos $v_{i-1}v_{i+1} \notin E$, então o caminho v_{i-1}, v_i, v_{i+1} seria preenchível, contradizendo $F_\pi = \emptyset$. Logo $v_{i-1}v_{i+1}$ é uma corda de C .

Portanto G é cordal. ■

Definição 48 (Grafo preenchido G_π). O grafo preenchido de G por π é o grafo

$$G_\pi = (V, E \cup F_\pi).$$

O seguinte resultado, devido a D. Rose, R. Tarjan e G. Lueker em 1976 [27], mostra que uma ordem de eliminação de um grafo não acarreta nenhuma aresta de preenchimento no grafo preenchido.

Teorema 49 (Teorema de Rose, Tarjan e Lueker). π é uma ordem de eliminação perfeita de G_π .

Corolário 50. Para qualquer π , temos $G_\pi \in \text{CORDAL}$.

Lema 51. Se F é um conjunto minimal de arestas tal que $G' = (V, E \cup F) \in \text{CORDAL}$, então existe π tal que $F = F_\pi$.

Prova. Como $G' \in \text{CORDAL}$, pelo Teorema 47, existe uma ordem de eliminação π de G' que cria nele um preenchimento vazio. Como G e G' possuem os mesmos vértices, π também é uma ordem de eliminação de G .

Afirmação. $F_\pi = F$.

De fato, suponha que $uv \in F_\pi$. Assim, pela definição de F_π temos que $uv \notin E$, mas existe um xy -passeio em G com cada vértice interno x satisfazendo $\pi(x) < \min(\pi(u), \pi(v))$. Como π não cria arestas de preenchimento em G' , temos então que $uv \in F$. Portanto temos $F_\pi \subseteq F$. Suponha, para uma contradição, que $F \not\subseteq F_\pi$. Assim, temos $F_\pi \subset F$, contradizendo a minimalidade de G já que $G_\pi \in \text{CORDAL}$, pelo Teorema de Rose, Tarjan e Lueker. ■

Assim, dos resultados acima podemos concluir que se $G \notin \text{CORDAL}$, então o preenchimento de cada ordem de eliminação de G representa um conjunto de arestas adicionais que o tornam cordal. Ademais, o preenchimento de uma ordem de eliminação *mínima* de G representa um conjunto *mínimo* de arestas adicionais que tornam G cordal, e analogamente para ordens de eliminação minimais. Portanto, encontrar uma ordem de eliminação mínima de G é um problema NP-difícil, já que Preenchimento Mínimo o é (Yannakakis, 1981 cf. [33]). Entretanto, uma ordem de eliminação minimal de G pode ser encontrada em tempo $O(nm)$ utilizando-se uma variação de busca em largura lexicográfica devida a Rose, Tarjan e Lueker [27]. Além disso, neste mesmo artigo, Rose, Tarjan e Lueker apresentam um algoritmo que calcula o preenchimento F_π de uma ordem de eliminação π qualquer de G em tempo $O(m + |F_\pi|) = O(n^2)$.

3.2.2 Algoritmo para decomposição por cliques separadoras

O primeiro algoritmo para encontrar uma clique separadora de um grafo foi publicado em 1981 e é devido a S. Whitesides cf. [33]. Tal algoritmo tem complexidade $O(nm)$, e pode portanto ser utilizado para decompor completamente um grafo em tempo $O(n^3m)$, já que um grafo contém no máximo $\binom{n}{2} - m = O(n^2)$ átomos (Gavril, 1977 cf. [33]).

Em 1985 [33], R. Tarjan desenvolveu um algoritmo mais eficiente para decompor um grafo por cliques separadoras. Este e os outros algoritmos que descreveremos utilizam o seguinte conceito auxiliar.

Definição 52 (Conjunto $C_\pi(v)$). Seja $v \in V$. Definimos

$$C_\pi(v) = \{u \in V : \pi(u) > \pi(v) \text{ e } uv \in E \cup F_\pi\}.$$

Note que, de posse de uma ordem de eliminação π de G e de seu preenchimento F_π , calcular os conjuntos $C_\pi(v)$ de todos os vértices $v \in V$ pode ser feito em tempo $O(m + |F_\pi|)$, bastando percorrer as arestas do grafo preenchido G_π — para cada $uv \in E(G_\pi)$, exatamente um dos casos $u \in C_\pi(v)$ ou $v \in C_\pi(u)$ ocorre.

O algoritmo de Tarjan decompõe G usando os conjuntos $C_\pi(v)$ que são cliques para separá-lo em cada passo. Observe que, neste trabalho, sempre tratamos componentes conexas como conjuntos de vértices.

Algoritmo 1: Decomposição por Cliques Separadoras, DCS

Entrada: Um grafo G .

Saída: Uma decomposição de G por cliques separadoras, se alguma existir.

Compute uma o.e.m. π de G ;

para cada $v \in V$ compute $C_\pi(v)$;

para cada $v \in V$ em ordem crescente

<p>se $C_\pi(v)$ é uma clique separadora de G</p>	<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;"> <table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $A(v) \leftarrow$ a componente conexa de $G \setminus C_\pi(v)$ que contém v;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G_1 \leftarrow G[A(v) \cup C_\pi(v)]$;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G_2 \leftarrow G \setminus A(v)$;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G \leftarrow G_2$;</td> </tr> </table> </td> <td style="padding: 0 10px;"> </td> </tr> </table>	<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $A(v) \leftarrow$ a componente conexa de $G \setminus C_\pi(v)$ que contém v;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G_1 \leftarrow G[A(v) \cup C_\pi(v)]$;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G_2 \leftarrow G \setminus A(v)$;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G \leftarrow G_2$;</td> </tr> </table>	$A(v) \leftarrow$ a componente conexa de $G \setminus C_\pi(v)$ que contém v ;	$G_1 \leftarrow G[A(v) \cup C_\pi(v)]$;	$G_2 \leftarrow G \setminus A(v)$;	$G \leftarrow G_2$;		
<table border="0" style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $A(v) \leftarrow$ a componente conexa de $G \setminus C_\pi(v)$ que contém v;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G_1 \leftarrow G[A(v) \cup C_\pi(v)]$;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G_2 \leftarrow G \setminus A(v)$;</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $G \leftarrow G_2$;</td> </tr> </table>	$A(v) \leftarrow$ a componente conexa de $G \setminus C_\pi(v)$ que contém v ;	$G_1 \leftarrow G[A(v) \cup C_\pi(v)]$;	$G_2 \leftarrow G \setminus A(v)$;	$G \leftarrow G_2$;				
$A(v) \leftarrow$ a componente conexa de $G \setminus C_\pi(v)$ que contém v ;								
$G_1 \leftarrow G[A(v) \cup C_\pi(v)]$;								
$G_2 \leftarrow G \setminus A(v)$;								
$G \leftarrow G_2$;								

“passo de decomposição”

Exemplo 13. Considere o grafo da Figura 3.3(a) (p. 31). Temos $C_\pi(1) = C_\pi(2) = \{3, 4\}$, que não é uma clique de G . Entretanto, temos $C_\pi(3) = \{4\}$, que é uma clique separadora de G . Portanto, o Algoritmo DCS separa G em $G_1 = G[\{1, 2, 3, 4\}]$ e $G_2 = G[\{4, 5\}]$ (veja a Figura 3.4). Como G_2 é um átomo, a execução de DCS em

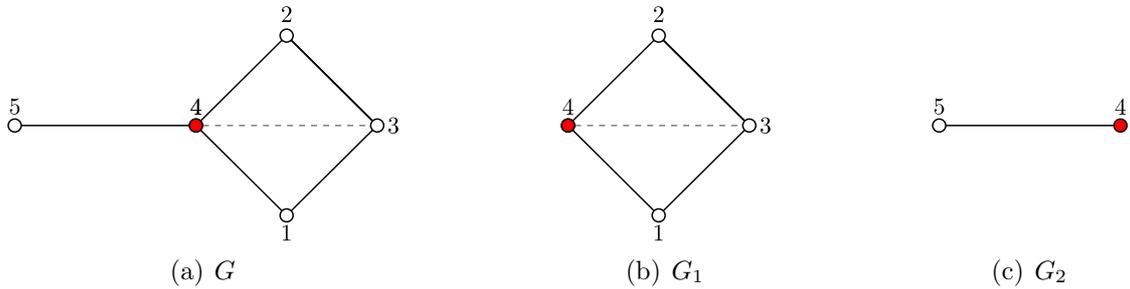


Figura 3.4: Exemplo de execução do Algoritmo DCS.

G não encontra mais nenhuma clique separadora.

Teorema 53. A complexidade de tempo de pior caso do Algoritmo DCS é $O(nm)$.

Prova. Como vimos, encontrar uma o.e.m. π de G , computar seu preenchimento e computar todos os conjuntos $C_\pi(v)$ pode ser feito em tempo $O(nm)$.

Além disso, para cada $v \in V$, testar se $C_\pi(v)$ é uma clique pode ser feito em tempo $O(m)$, percorrendo as listas de adjacências dos vértices em $C_\pi(v)$ e checando se cada um dos outros membros está presente; ao final deste processo, cada aresta do vértice foi percorrida no máximo duas vezes.

Feito isto, testar se $C_\pi(v)$ separa G pode ser feito em tempo $O(m)$ através de uma busca.

Como estes testes são feitos $O(n)$ vezes, isto conclui a prova. ■

O Algoritmo DCS tem a propriedade de que a árvore de decomposição gerada é estritamente binária e o mais desbalanceada possível, pois após cada passo de decomposição do algoritmo uma folha desta árvore é criada. Esse fato torna o algoritmo especialmente útil para aplicação a problemas como **Coloração de Vértices** e **Conjunto Independente Máximo**, dentre outros, conforme detalhado em [33].

A corretude do Algoritmo DCS é amplamente baseada no fato de que, se C é uma clique separadora *minimal* de G , então $C = C_\pi(v)$ para pelo menos um vértice v de G , de maneira que no mais tardar um passo de decomposição ocorre em v .

Observe que esta propriedade também implica que o algoritmo pode encontrar uma decomposição de G por cliques separadoras minimais, bastando checar a cada passo se $C_\pi(v)$ é uma clique separadora minimal de G . Entretanto, não parece ser possível realizar este teste em tempo $O(m)$, e portanto este algoritmo modificado parece ter complexidade de tempo pior do que algumas alternativas conhecidas (e.g., [16]).

Não apresentaremos aqui as provas dos fatos acima, pois provas similares podem ser encontradas na Seção 3.3.

3.3 Algoritmo para decomposição por maxcliques separadoras

Para obter um algoritmo que realizasse decomposições por maxcliques separadoras, em uma nota ao final de [33] Tarjan propôs as seguintes modificações ao Algoritmo DCS.

Primeiro, tente encontrar uma clique separadora do grafo utilizando os conjuntos $C_\pi(v)$, como antes. Para cada clique encontrada, tente *umentá-la* até que se torne uma maxclique separadora, de uma das duas formas a seguir:

1. Se $A(v) \neq \{v\}$ e $S = C_\pi(v) \cup \{v\}$ é uma maxclique, separe o grafo usando S .
2. Se o teste anterior falhar, então busque um conjunto X de vértices contido em alguma outra componente conexa de G tal que $S = C_\pi(v) \cup X$ seja uma maxclique, e separe o grafo usando S .

O resultado é o Algoritmo 2 abaixo. Este algoritmo já foi aplicado no reconhecimento de algumas classes de grafos de caminho [21, 29].

Entretanto, este algoritmo não está correto. Considere o exemplo apresentado na Figura 3.3(a), que possui duas maxcliques separadoras, $\{1, 4\}$ e $\{2, 4\}$. Temos

1. $C_\pi(1) = C_\pi(2) = \{3, 4\}$, que não é uma clique de G ;

Algoritmo 2: Decomposição por maxcliques separadoras (Tarjan)

Entrada: Um grafo G .

Saída: Uma decomposição de G por maxcliques separadoras, se alguma existir.

Compute uma o.e.m. π de G ;

para cada $v \in V$ compute $C_\pi(v)$;

para cada $v \in V$ em ordem crescente

se $C_\pi(v)$ é uma clique separadora de G

$A(v) \leftarrow$ a componente conexa de $G \setminus C_\pi(v)$ que contém v ;

$B(v) \leftarrow V \setminus (A(v) \cup C_\pi(v))$;

se $S = C_\pi(v) \cup \{v\}$ é uma maxclique de G e $A(v) \neq \{v\}$, ou

$\exists B' \subset B(v)$ t.q. $S = C_\pi(v) \cup B'$ é uma maxclique de G

$G_1 \leftarrow G[A(v) \cup S]$;

$G_2 \leftarrow G[B(v) \cup S]$;

$G \leftarrow G_2$;

 } “passo de decomposição”

2. $C_\pi(3) = \{4\}$, que é uma clique separadora de G . Entretanto, nem $\{4\} \cup \{3\}$ é uma maxclique separadora de G , nem existe $B' \subset B = \{5\}$ tal que $\{4\} \cup B'$ seja uma maxclique separadora de G ;
3. $C_\pi(4) = \{5\}$ não separa G ; e
4. $C_\pi(5) = \emptyset$ não separa G .

Portanto, nenhuma maxclique separadora é encontrada pelo Algoritmo 2.

Além disso, este contraexemplo é minimal, como veremos a seguir.

Teorema 54. *Se $G \in \text{CORDAL}$ e possui uma maxclique separadora, então algum passo de decomposição do Algoritmo 2 com G como entrada encontra uma maxclique separadora.*

Prova. Se $G \in \text{CORDAL}$, então toda ordem de eliminação minimal π de G é perfeita. Suponha que G possua uma maxclique separadora M , e seja x o vértice mínimo de M .

Afirmção. $C_\pi(x) = M \setminus \{x\}$.

De fato, seja $y \in C_\pi(x)$, e suponha para uma contradição que $y \notin M$. Assim, existe $z \in M$ tal que $yz \notin E$. Defina

$$P_y = \begin{cases} y, x & \text{se } yx \in E \\ \text{um } yx\text{-passeio preenchível} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, o passeio $P_y z$ é preenchível. Logo temos $yz \in F_\pi$, contradizendo o fato de π ser uma ordem de eliminação perfeita.

Assim, temos $y \in M \setminus \{x\}$.

Suponha agora que $y \in M \setminus \{x\}$. Logo, pela definição de M e x , temos $xy \in E$ e $\pi(x) < \pi(y)$. Portanto $y \in C_\pi(x)$, o que conclui a prova da afirmação.

Logo, no mais tardar um passo de decomposição do Algoritmo 2 ocorre em x . ■

Assim, o Algoritmo 2 somente pode falhar em um grafo $G \notin \text{CORDAL}$. Além disso, como ciclos não possuem maxclique separadora, temos que G contém pelo menos um vértice que não está em seu ciclo induzido. Portanto, como estamos considerando apenas grafos conexos, o contraexemplo dado é minimal, pois ele é o menor grafo que não é CORDAL e que possui pelo menos 1 vértice fora de seu ciclo induzido.

3.3.1 Um novo algoritmo

Nossa contribuição é uma correção do Algoritmo 2 que tem a mesma boa propriedade do Algoritmo DCS de gerar um átomo a cada passo de decomposição, e que também tem complexidade de tempo $O(nm)$. A correção é bem simples e se baseia no fato de que, como o contraexemplo apresentado acima indica, há casos em que a única maneira de aumentar $C_\pi(v)$ para obter uma maxclique separadora é adicionando a ele um subconjunto de $A(v)$ que é diferente de $\{v\}$. O resultado é o Algoritmo 4, que pode ser encontrado na página 38. Este algoritmo utiliza o Algoritmo ACG abaixo como sub-rotina.

Algoritmo 3: Clique Gulosa, ACG

Entrada: Uma ordem de eliminação π , uma clique C e um conjunto X de vértices de G .

Saída: Um conjunto maximal $M \subseteq X$ tal que $M \cup C$ é uma clique de G .

$M \leftarrow \emptyset$;

para cada $v \in X$ *em ordem crescente*

 ┌ se $M \cup C \subseteq N(v)$
 └ $M \leftarrow M \cup \{v\}$;

Teorema 55. *O Algoritmo ACG tem complexidade de tempo de pior caso $O(m)$.*

Prova. Para cada $v \in X$, testar se $M \cup C$ é um subconjunto de $N(v)$ pode ser feito percorrendo-se a lista de adjacência de v e verificando se todos os vértices de $M \cup C$ estão presentes. Portanto, no pior caso fazer isso para todos os vértices de X pode ser feito varrendo as arestas de G no máximo duas vezes cada, no total. ■

Exemplo 14. Considere o grafo da Figura 3.3(a) (p. 31). Novamente, temos $C_\pi(1) = C_\pi(2) = \{3, 4\}$, que não é uma clique de G . Entretanto, temos $C_\pi(3) = \{4\}$,

Algoritmo 4: Decomposição por Maxcliques Separadoras, DMS

Entrada: Um grafo G .

Saída: Uma decomposição de G por maxcliques separadoras, se alguma existir.

Compute uma o.e.m. π de G ;

para cada $v \in V$ compute $C_\pi(v)$;

para cada $v \in V$ em ordem crescente

se $C_\pi(v)$ é uma clique separadora de G

$A(v) \leftarrow$ a componente conexa de $G \setminus C_\pi(v)$ que contém v ;

$B(v) \leftarrow V \setminus (A(v) \cup C_\pi(v))$;

$A' \leftarrow$ a saída do ACG com π , $C_\pi(v)$ e $A(v)$ como entrada ;

$B' \leftarrow$ a saída do ACG com π , $C_\pi(v)$ e $B(v)$ como entrada ;

se $\emptyset \neq A' \neq A(v)$

$G_1 \leftarrow G[A(v) \cup (C_\pi(v) \cup A')]$;

$G_2 \leftarrow G[B(v) \cup (C_\pi(v) \cup A')]$;

$G \leftarrow G_2$;

 } “passo de decomposição tipo (i)”

senão se $B' \neq B(v)$

$G_1 \leftarrow G[A(v) \cup (C_\pi(v) \cup B')]$;

$G_2 \leftarrow G[B(v) \cup (C_\pi(v) \cup B')]$;

$G \leftarrow G_2$;

 } “passo de decomposição tipo (ii)”

que é uma clique separadora de G . O Algoritmo ACG com π , $C_\pi(3) = \{4\}$ e $A(3) = \{1, 2, 3\}$ como entrada tem como saída o conjunto $\{1\}$. Portanto, o Algoritmo DMS separa G em $G_1 = G[\{1, 2, 3, 4\}]$ e $G_2 = G[\{1, 4, 5\}]$ (veja a Figura 3.5). Como G_2 é um átomo, a execução de DMS em G não encontra mais nenhuma

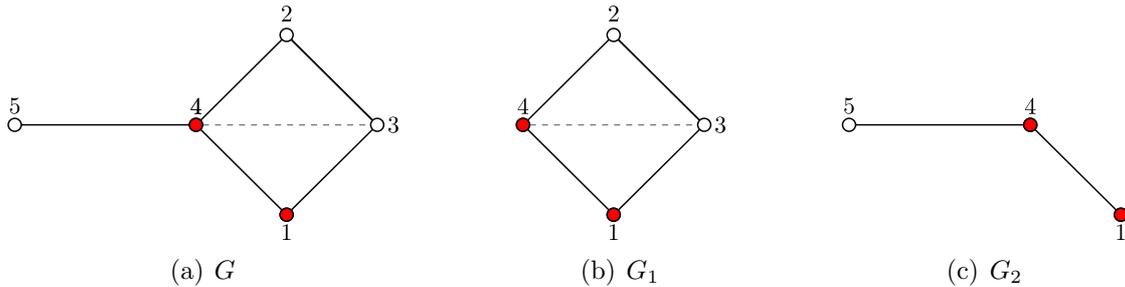


Figura 3.5: Exemplo de execução do Algoritmo DMS.

maxclique separadora.

Corolário 56. O Algoritmo DMS tem complexidade de tempo de pior caso $O(nm)$.

Prova. Para cada $v \in V$, testar se $C_\pi(v)$ é uma clique separadora de G pode ser feito em tempo $O(m)$ com uma busca. Pelo Teorema 55, computar A' e B' leva tempo $O(m)$. Como este passo é feito $O(n)$ vezes, isto conclui a prova. ■

A prova de corretude do Algoritmo DMS é baseada em diversas propriedades de ordens de eliminação minimais e cliques separadoras.

Lema 57. *Se π é o.e.m. de G e C é uma clique separadora minimal de G , então nenhuma aresta de preenchimento liga vértices em componentes conexas diferentes de $G \setminus C$.*

Prova. Sejam V_1, \dots, V_k as componentes conexas de $G \setminus C$. Seja F' o subconjunto de F_π formado pelas arestas de preenchimento que têm ambos os extremos em $V_i \cup C$ para algum i . Vamos provar que $F' = F_\pi$.

Afirmção. $G' = (V, E \cup F') \in \text{CORDAL}$.

De fato, considere um ciclo de G' de comprimento pelo menos 4. Vamos mostrar que este possui uma corda. Se o ciclo está contido em $V_i \cup C$ para algum i , então como $G_\pi[V_i \cup C] \in \text{CORDAL}$, temos que alguma aresta do grafo ou de preenchimento é uma corda deste ciclo. Como esta corda possui ambos os extremos em $V_i \cup C$, ela está em $E \cup F$. Caso contrário, se o ciclo possui vértices em V_i e V_j para algum par i, j , então ele contém dois vértices de C que são não consecutivos no ciclo. Portanto, estes vértices formam uma corda do ciclo que é uma aresta de G . Isto conclui a prova da Afirmção.

Seja agora $F'' \subseteq F'$ um conjunto minimal de arestas tal que $G'' = (V, E \cup F'') \in \text{CORDAL}$. Pelo Lema 51 (p. 32), temos que existe uma o.e.m. π'' de G tal que

$$F_{\pi''} = F'' \subseteq F' \subseteq F_\pi.$$

Portanto, como π é minimal, temos $F_{\pi''} = F_\pi$, o que implica $F' = F_\pi$. ■

Lema 58. *Seja S um separador de G . Então S é um separador minimal de G se, e somente se, cada vértice de S possui pelo menos um vizinho em cada componente conexa de $G \setminus S$.*

Prova. Suponha que S é um separador minimal de G , e seja $x \in S$. Suponha, para uma contradição, que a componente conexa V_i de G não contenha vizinhos de x . Assim, V_i é separada das outras componentes conexas de $G \setminus S$ por $S \setminus \{x\}$, uma contradição com a minimalidade de S .

Suponha agora que cada vértice de S possui pelo menos um vizinho em cada componente conexa de $G \setminus S$, e seja $x \in S$. Claramente, o grafo $G \setminus (S \setminus \{x\})$ é conexo. Logo S é separador minimal. ■

Por conveniência, às vezes diremos que um vértice é máximo ou mínimo de um grafo quando ele é máximo ou mínimo do conjunto de vértices do grafo.

Lema 59. *Sejam C uma clique separadora minimal de G e V_i uma componente conexa de $G \setminus C$. Se π é uma o.e.m. de G , e o vértice máximo v_i de V_i não é o*

vértice máximo de $G \setminus C$, então

$$C_\pi(v_i) = C.$$

Prova. Sejam V_1, \dots, V_k as componentes conexas de $G \setminus C$, e v_1, \dots, v_k os vértices máximos de cada uma. Suponha que v_i não seja o vértice máximo de $G \setminus C$. Seja c o vértice mínimo de C .

Afirmção. $\pi(c) > \pi(v_i)$.

De fato, suponha para uma contradição que $\pi(c) < \pi(v_i)$. Seja $H = G_\pi[V_i \cup \{c\}]$. Como C é separador minimal, temos que c possui algum vizinho em V_i . Portanto, H é conexo.

Vamos provar que, para cada $x \in V_i \cup \{c\}$, existe um caminho mínimo entre v_i e x em H que é decrescente (com relação a π). A prova é por indução em $d_H(v_i, x)$. Se $d_H(v_i, x) = 1$, então como v_i é máximo de V_i e $\pi(c) < \pi(v_i)$ por hipótese, o resultado é imediato. Suponha que, para algum $d > 1$, o resultado é verdadeiro para qualquer vértice v tal que $d_H(v_i, v) < d$. Seja x um vértice tal que $d_H(v_i, x) = d$. Como $d > 1$, algum vizinho y de x em H tem distância $d - 1$ para v_i . Logo, pela H.I., existe um caminho mínimo decrescente P entre v_i e y em H . Considere o caminho P' , obtido adicionando-se x ao final de P . Como P tem tamanho d , ele é mínimo. Além disso, P é decrescente, pois em caso contrário como $\pi(v_i) > \pi(x)$, e como π é ordem de eliminação perfeita de G_π pelo Teorema 49 (p. 32), se tivéssemos $\pi(x) > \pi(v)$ então alguma aresta de F_π existiria entre x e um vértice interno do caminho diferente de y , o que contradiz a minimalidade de P' . Isto conclui a prova por indução.

Assim, em particular existe um caminho decrescente

$$P_i : v_i, u_1, \dots, u_l, c$$

em $G_\pi[V_i \cup \{c\}]$.

Como v_i não é o vértice máximo de $G \setminus C$, existe v_j tal que $\pi(c) < \pi(v_i) < \pi(v_j)$. Portanto, analogamente existe um caminho decrescente

$$P_j : v_j, w_1, \dots, w_r, c$$

em $G_\pi[V_j \cup \{c\}]$.

Mas então, novamente como π é ordem de eliminação perfeita de G_π , temos $u_l w_r \in F_\pi$, contradizendo o Lema 57. Isto conclui a prova da afirmação.

Afirmção. $C_\pi(v_i) = C$.

De fato, suponha que $x \in C_\pi(v_i)$. Então $\pi(x) > \pi(v_i)$, e portanto $x \notin V_i$ pois v_i

é o máximo de V_i . Pelo Lema 57, como $v_i x \in E \cup F_\pi$, temos também que

$$x \notin V_j, \forall j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}.$$

Portanto $x \in C$. Logo $C_\pi(v_i) \subseteq C$.

Suponha agora que $x \in C$. Então pela afirmação anterior temos $\pi(x) > \pi(v_i)$. Se $v_i x \in E$, então $x \in C_\pi(v_i)$. Em caso contrário, x tem um vizinho em V_i (pois C é separador minimal), existe um caminho em G que liga x a v_i , e temos que cada vértice interno v deste caminho satisfaz

$$\pi(v) < \min(\pi(x), \pi(v_i)).$$

Logo $v_i x \in F_\pi$, e portanto $x \in C_\pi(v_i)$. ■

Lema 60. *Seja C uma clique separadora de G , seja X a união de algumas, mas não todas, componentes conexas de $G \setminus C$, e seja M a saída de ACG com π , C , X como entrada. Se $M \neq \emptyset$, então $M \cup C$ é uma maxclique de G . Além disso, se $M \neq X$ então $M \cup C$ separa G .*

Prova. Suponha que $M \neq \emptyset$. Pela construção feita pelo algoritmo, é imediato que $M \cup C$ é uma clique de G . Para mostrar que ela é maximal, seja x um vértice de G que não está em $M \cup C$. Denote por A a componente conexa de $G \setminus C$ que contém M . Se $x \in A$, então existe $y \in M \cup C$ tal que $xy \notin E$, pois em caso contrário o algoritmo teria adicionado x a M . Por outro lado, se $x \notin A$, então como $M \neq \emptyset$, qualquer vértice de M é não adjacente a x .

Além disso, se $M \neq X$, então todos os vértices de $X \setminus M$ são separados de todos os vértices de $V \setminus X$ por $M \cup C$. ■

A primeira parte da corretude de DMS garante que se nenhuma maxclique separadora é encontrada pelo algoritmo, então G é um átomo.

Teorema 61 (Corretude de DMS, parte 1). *Se G possui uma maxclique separadora, então algum passo de decomposição do Algoritmo DMS com G como entrada encontra uma maxclique separadora.*

Prova. Seja S uma maxclique separadora de G , e seja $S' \subseteq S$ uma clique separadora minimal. Pelo Lema 59 (p. 39), existe $v \in V$ tal que $C_\pi(v) = S'$. Utilizando a notação do Algoritmo DMS, se $S \setminus S' \subset A(v)$, então pelo Lema 60, no mais tardar um passo de decomposição tipo (i) ocorre em v . Se $S \setminus S' = A(v)$, então $G \setminus S'$ tem ao menos três componentes conexas já que S separa G . Portanto, novamente pelo Lema 59 (p. 39), existe $u \in B(v)$ tal que $C_\pi(u) = S'$, e portanto pelo Lema 60 no mais tardar um passo de decomposição tipo (ii) ocorre em u . Finalmente, se

$S \setminus S' \subset B(v)$, então uma vez mais pelo Lema 60, no mais tardar um passo de decomposição tipo (ii) ocorre em v . ■

Note que o Algoritmo DMS funciona, a cada passo de decomposição, separando G em duas partes, e descartando uma delas. Assim, a segunda parte da corretude de DMS garante que a parte descartada é um átomo.

Lema 62. *Se $C_\pi(v)$ separa G , então v é o vértice máximo de $A(v)$.*

Prova. Por indução na distância d entre x e v , mostraremos que $\pi(x) < \pi(v)$ para todo $x \in A(v) \setminus \{v\}$.

Se $d = 1$, então $xv \in E$. Logo, $\pi(x) > \pi(v)$ implicaria $x \in C_\pi(v)$, uma contradição. Portanto $\pi(x) < \pi(v)$.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para qualquer vértice de $A(v) \setminus \{v\}$ a uma distância menor do que d de v , e seja x um vértice de $A(v) \setminus \{v\}$ a distância d de v . Suponha, para uma contradição, que $\pi(x) > \pi(v)$. Em qualquer xv -caminho mínimo P , todos os vértices internos estão a distância menor do que d de v . Assim, pela H.I., todos vêm antes de v em π . Portanto o caminho P é preenchível, e temos $x \in C_\pi(v)$, uma contradição pois $x \in A(v)$. Logo $\pi(x) < \pi(v)$.

Isto conclui a prova. ■

Teorema 63 (Corretude de DMS, parte 2). *Cada passo de decomposição de DMS cria pelo menos um átomo.*

Prova. Por indução em k , mostraremos que se uma execução do Algoritmo DMS em um grafo G com o.e.m. π tem k passos de decomposição, então cada um dos passos cria um átomo.

Se $k = 0$ então o resultado segue por vacuidade.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para qualquer execução com menos do que k passos de decomposição, e sejam G e π tais que uma execução de DMS em G com o.e.m. π tem k passos de decomposição. Como $k > 0$, algum passo de decomposição ocorreu. Seja p o primeiro destes passos, que ocorreu no vértice v e separou G em G_1 e G_2 .

Após p , a execução de DMS em G prosseguiu exatamente como se fosse uma nova execução de DMS sobre G_2 com a restrição de π aos vértices de G_2 como ordem de eliminação. Portanto, pela H.I. cada um dos passos de decomposição após p criou um átomo.

Assim, basta mostrarmos que p criou um átomo.

Seja M a maxclique encontrada por DMS no passo p (i.e., $M = C_\pi(v) \cup A'$ se p foi tipo (i), e $M = C_\pi(v) \cup B'$ se p foi tipo (ii); veja a Figura 3.6).

Suponha para uma contradição que G_1 tenha uma maxclique separadora S , e seja $S' \subseteq S$ uma clique separadora minimal. Note que tanto S quanto S' também separam G .

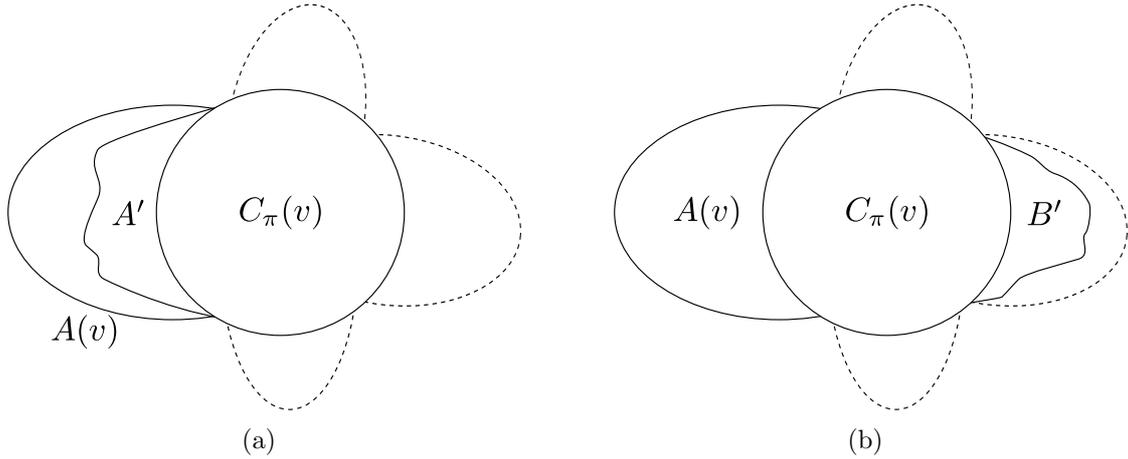


Figura 3.6: Em traços sólidos, o grafo G_1 após um passo de decomposição de tipo (i), (a), e após um passo de decomposição de tipo (ii), (b).

Afirmção. $C_\pi(v) \neq S'$.

De fato, se p foi tipo (i), então $V(G_1) \setminus C_\pi(v) = A(v)$, que é conexo por definição. Por outro lado, se p foi tipo (ii), então $C_\pi(v)$ separa $A(v)$ de B' em G_1 . Entretanto, neste caso não existe $A' \subseteq A(v)$ tal que $C_\pi(v) \cup A'$ separe G_1 (pois p foi tipo (ii)), e a maxclique $C_\pi(v) \cup B'$ também não separa G_1 . Não existe nenhuma outra maxclique de G_1 que contenha $C_\pi(v)$. Portanto, como S' está contida em uma maxclique separadora S , temos $C_\pi(v) \neq S'$. Isto conclui a prova da afirmação.

Afirmção. Existe uma componente conexa $X \subseteq A(v)$ de $G_1 \setminus S'$ cujo vértice máximo não é o vértice máximo de $G_1 \setminus S'$.

De fato, se alguma componente V' de $G_1 \setminus S'$ contém vértices de $C_\pi(v)$, então pela definição de $C_\pi(v)$ e pelo Lema 62, temos que V' contém o vértice máximo de $G_1 \setminus S'$. Além disso, como $C_\pi(v)$ é uma clique, temos $C_\pi(v) \subseteq V'$. Logo, qualquer outra componente de $G_1 \setminus S'$ satisfaz as condições da afirmação.

Por outro lado, se nenhuma componente de $G_1 \setminus S'$ contém vértices de $C_\pi(v)$, então pela afirmação anterior temos $C_\pi(v) \subset S'$. Note que isto implica que p foi tipo (i). De fato, suponha para uma contradição que este passo tenha sido tipo (ii). Como B' é clique, no máximo uma componente conexa de $G_1 \setminus S'$ pode conter vértices de B' . Logo, todas as outras componentes conexas de $G_1 \setminus S'$ contêm apenas vértices de $A(v)$. Assim, se $S' \setminus C_\pi(v)$ contém algum vértice $b \in B'$, então pelo Lema 58 (p. 39), temos que b é vizinho de algum vértice de $A(v)$, uma contradição. Caso contrário, temos $S' \setminus C_\pi(v) \subset A(v)$. Assim, B' forma uma componente conexa de $G_1 \setminus S'$, donde novamente pelo Lema 58 (p. 39) algum vértice $a \in S' \setminus C_\pi(v)$ é vizinho de algum vértice de B' , uma contradição.

Portanto, todas as componentes de $G_1 \setminus S'$ estão contidas em $A(v)$, e portanto alguma satisfaz as condições da afirmação.

Isto conclui a prova da afirmação.

Portanto, pelo Lema 59 (p. 39), temos que o vértice máximo x de X é tal que $C_{\pi_1}(x) = S'$. Logo temos $x \neq v$, donde pelo Lema 62 (p. 42) temos $\pi(x) < \pi(v)$.

Daí, como pelo Lema 57 (p. 39) temos $C_{\pi_1}(x) = C_\pi(x)$, temos uma contradição pois neste caso algum passo de decomposição de DMS em G teria ocorrido em x , contradizendo a definição de p . ■

Capítulo 4

Grafos de Caminho

Neste capítulo, discutiremos caracterizações de algumas classes de grafos de caminho por subgrafos induzidos proibidos. Para simplificar a redação, utilizaremos a expressão “caracterização por proibição” no lugar de “caracterização por subgrafos induzidos proibidos”, e omitiremos o símbolo \leq sempre que isto não criar nenhuma ambiguidade.

4.1 Grafos de interseção de caminhos em árvores

Grafos de caminho é o nome genérico dado às diversas classes de grafos de interseção de famílias de caminhos em árvores. As alternativas geradas por exigirmos que tais árvores sejam não-direcionadas (U) ou direcionadas (D), que tais caminhos sejam considerados como conjuntos de vértices (V) ou de arestas (E), e que tais famílias satisfaçam a propriedade Helly (H) ou não, dão origem às diversas classes UV, DV, UE, DE e UEH, dentre outras, assim nomeadas e estudadas por C. Monma e V. Wei em [21].

A classe UV foi introduzida por P. Renz em 1970, cf. [10], e estudada também por F. Gavril, A. Schäffer, C. Monma, V. Wei, M. Gutierrez e J. Szwarcfiter, dentre outros, cf. [10, 17, 21]. Já a classe UE foi introduzida de maneira independente por M. Sysło em 1978 [30] e por M. Golubic e R. Jamison em 1985 [11]. Sysło estava interessado na classe denominada por ele CICLO FUNDAMENTAL, e a sua conexão com os grafos UE só foi percebida após a publicação do artigo de Golubic e Jamison, onde a classe aparece sob o nome EPT. As outras classes de grafos de caminho foram introduzidas por Monma e Wei em [21].

Como em [20], dada uma família de conjuntos \mathcal{S} , denotamos por $\Omega(\mathcal{S})$ o seu grafo de interseção.

Assim, temos $G \in UV$ (resp. $G \in DV$) quando existem uma árvore não-direcionada (resp. direcionada) T , e uma família \mathcal{P}_v de caminhos (resp. caminhos direcionados) em T , cada um dado como um conjunto de vértices, tais que

$G \simeq \Omega(\mathcal{P}_v)$. Definições análogas se aplicam às classes UE e DE, bastando-se trocar “vértices” por “arestas”. Além disso, temos $G \in \text{UEH}$ quando G possui uma representação UE dada por $\langle T, \mathcal{P}_e \rangle$, tal que a família \mathcal{P}_e satisfaz a propriedade Helly. Em qualquer um destes casos, dizemos que $\langle T, \mathcal{P}_v \rangle$ é uma *representação* de G , que T é a *base* de $\langle T, \mathcal{P}_v \rangle$, e que G é *representado* por $\langle T, \mathcal{P}_v \rangle$.

Como consequência direta da definição de UV, é fácil vermos que temos $\text{UV} \subseteq \text{CORDAL}$ [9]. Entretanto, nem todo grafo UE ou UEH é cordal — por exemplo, a Figura 4.1 mostra uma representação UEH de um ciclo, chamada *torta*.

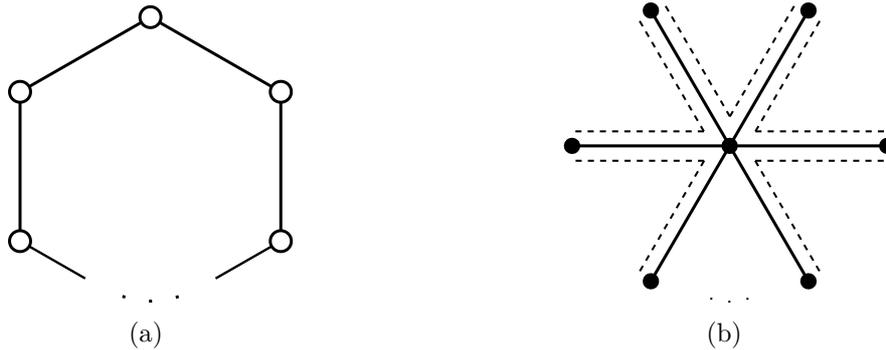


Figura 4.1: Um ciclo, (a), e uma representação UEH dele, (b), onde linhas sólidas denotam a árvore base T , e linhas tracejadas a família de caminhos \mathcal{P}_e em T .

Além disso, essa é a *menor* representação UEH deste ciclo — qualquer representação UEH de C_n contém uma torta com n fatias [11].

As diversas classes de caminho estão relacionadas entre si, e com algumas classes consagradas de grafos, conforme detalha o seguinte resultado, devido a Monma e Wei [21].

Teorema 64. *Temos as seguintes relações.*

1. $\text{DV} \subset \text{UV} \subset \text{CORDAL}$;
2. $\text{DV} \subset \text{DE} \subset \text{UEH} \subset \text{UE}$;
3. $\text{DV} = \text{UEH} \cap \text{CORDAL}$;
4. $\text{DE} = \text{UEH} \cap \text{PERFEITO}$; *e*
5. $\text{UE} \cap \text{CORDAL} = \text{UE} \cap \text{UV}$.

Em [21], grande ênfase é dada aos Teoremas dos Átomos e Teoremas dos Decomponíveis destas classes, que são baseados nas decomposições por maxcliques separadoras que vimos no Capítulo 3, o que justifica chamarmos apenas de *separável* um grafo que possui uma maxclique separadora, e de *átomo* um que não possui, ao longo do capítulo. Portanto, grande parte das definições e resultados deste capítulo são provenientes do trabalho de Monma e Wei, e muitos deles serão citados

aqui sem prova. Estes podem ser encontrados em detalhes no artigo original, ou no survey dado em [24], e esta mesma observação se aplica a resultados citados de outros artigos.

4.2 O Teorema da Árvore Característica

O seguinte resultado, bem conhecido especialmente em seu enunciado para grafos cordais, tem profundas consequências estruturais e algorítmicas. Em particular, como veremos, ele tem consequências importantes para as maxcliques separadoras de um grafo de caminho. Denotamos por $\mathcal{C}(G)$ o conjunto de maxcliques de G , e por \mathcal{C}_v o conjunto de maxcliques de G que contêm um dado vértice v .

Teorema 65 (Teorema da Árvore Característica).

1. $G \in \text{CORDAL}$ se, e somente se, existe uma árvore T tal que $V(T) = \mathcal{C}(G)$ e, para todo $v \in V(G)$, temos que $T[\mathcal{C}_v]$ é uma subárvore de T ;
2. $G \in \text{UV}$ se, e somente se, existe uma árvore T tal que $V(T) = \mathcal{C}(G)$ e, para todo $v \in V(G)$, temos que $T[\mathcal{C}_v]$ é um caminho em T ;
3. $G \in \text{DV}$ se, e somente se, existe uma árvore direcionada T tal que $V(T) = \mathcal{C}(G)$ e, para todo $v \in V(G)$, temos que $T[\mathcal{C}_v]$ é um caminho direcionado em T ;
4. $G \in \text{UEH}$ se, e somente se, existe uma árvore T tal que $E(T) = \mathcal{C}(G)$ e, para todo $v \in V(G)$, temos que $T[\mathcal{C}_v]$ é um caminho em T ; e
5. $G \in \text{DE}$ se, e somente se, existe uma árvore direcionada T tal que $E(T) = \mathcal{C}(G)$ e, para todo $v \in V(G)$, temos que $T[\mathcal{C}_v]$ é um caminho direcionado em T .

Para CORDAL e UV, o Teorema da Árvore Característica é devido a Gavril em 1978 cf. [21]. Já para DV, UEH e DE, ele é devido a Monma e Wei.

Este resultado já foi usado, por exemplo, para reconhecer eficientemente os grafos UV (Gavril, 1978 cf. [21]).

O Teorema da Árvore Característica tem a seguinte consequência simples.

Lema 66. *Se $G \in \text{CORDAL} \cup \text{UV} \cup \text{DV}$ (resp. $G \in \text{UEH} \cup \text{DE}$), então para toda árvore característica T de G , e para todos vértices (resp. arestas) distintos M_1 e M_2 de T , existe um vértice u de G tal que $T[\mathcal{C}_u]$ contém M_1 , mas não M_2 .*

Prova. Seja $G \in \text{CORDAL} \cup \text{UV} \cup \text{DV}$, e sejam T uma árvore característica de G e M_1 e M_2 vértices de T . Suponha, para uma contradição, que não exista $u \in V(G)$ tal que $T[\mathcal{C}_u]$ contém M_1 , mas não M_2 . Neste caso, para todo $x \in V(G)$, temos

$$\begin{aligned} x \in M_1 &\Rightarrow M_1 \in \mathcal{C}_x \\ &\Rightarrow M_2 \in \mathcal{C}_x \\ &\Rightarrow x \in M_2, \end{aligned}$$

i.e., temos $M_1 \subset M_2$, contradizendo o fato de M_1 ser uma maxclique. Logo, existe $u \in V(G)$ tal que $T[\mathcal{C}_u]$ contém M_1 , mas não M_2 .

A prova para o caso $G \in \text{UEH} \cup \text{DE}$ é inteiramente análoga. ■

O seguinte resultado auxiliar, que será utilizado mais adiante para relacionar os vértices de uma árvore característica com maxcliques separadoras do grafo G representado, mostra que, se G é um grafo conexo UV ou DV, então toda aresta desta árvore está *coberta* por \mathcal{C}_v , para algum $v \in V(G)$.

Lema 67. *Se $G \in \text{CORDAL} \cup \text{UV} \cup \text{DV}$ é conexo, então para cada aresta M_1M_2 de uma árvore característica T de G , existe $v \in V(G)$ tal que $M_1, M_2 \in \mathcal{C}_v$.*

Prova. Por contrapositiva, suponha que para a aresta M_1M_2 de T não exista $v \in V(G)$ tal que $M_1, M_2 \in \mathcal{C}_v$. A aresta M_1M_2 separa T em T_1 e T_2 , e para cada $x \in V(G)$, temos $\mathcal{C}_x \subseteq V(T_1)$ ou $\mathcal{C}_x \subseteq V(T_2)$. Portanto, fazendo

$$V_i = \bigcup_{M \in V(T_i)} M$$

para $i \in \{1, 2\}$, temos que (V_1, V_2) é uma partição de $V(G)$ tal que nenhum vértice de V_1 é adjacente a nenhum vértice de V_2 , i.e., G é desconexo. ■

Dizemos que uma aresta e de uma árvore T *separa T não trivialmente* quando cada componente de $T \setminus e$ contém pelo menos uma aresta.

Teorema 68. *Seja $G \in \text{CORDAL} \cup \text{UV} \cup \text{DV} \cup \text{UEH} \cup \text{DE}$ um grafo conexo, e sejam T uma árvore característica de G e M uma maxclique de G . Então M separa T (não trivialmente) se, e somente se, M separa G .*

Prova. Primeiro, faremos o caso $G \in \text{CORDAL} \cup \text{UV} \cup \text{DV}$.

(\Rightarrow) Se M separa T , então M é um vértice interno de T . Assim, sejam M_1 e M_2 vizinhos de M em T , de maneira que M_1 e M_2 estejam em componentes distintas de $T \setminus M$. Pelo Lema 66, existem $u, v \in V(G)$ tais que $T[\mathcal{C}_u]$ contém M_1 mas não M , e $T[\mathcal{C}_v]$ contém M_2 mas não M .

Afirmção. M separa u de v em G .

De fato, seja $P = u, x_1, \dots, x_k, v$ um caminho induzido em G . Vamos provar que este caminho passa por M . Como T é uma árvore característica de G e P é um caminho induzido, temos $\mathcal{C}_{x_i} \cap \mathcal{C}_{x_j} \neq \emptyset$ sse $j \in \{i-1, i, i+1\}$ (com a óbvia exceção de \mathcal{C}_{x_1} e \mathcal{C}_{x_k} , que intersectam apenas \mathcal{C}_{x_2} e $\mathcal{C}_{x_{k-1}}$, respectivamente). Portanto, como M_1 e M_2 estão em componentes distintas de $T \setminus M$, temos necessariamente $M \in \mathcal{C}_{x_i}$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Logo temos $x_i \in M$.

(\Leftarrow) Sejam u e v vértices separados por M em G .

Afirmção. \mathcal{C}_u e \mathcal{C}_v estão contidos em componentes distintas de $T \setminus M$.

De fato, suponha para uma contradição que ambos estivessem numa mesma componente X de $T \setminus M$. Seja $P = M_1, \dots, M_k$ um caminho contido em X , com $M_1 \in \mathcal{C}_u$ e $M_k \in \mathcal{C}_v$. Neste caso, pelo Lema 67, existem y_1, \dots, y_{k-1} tais que $M_i M_{i+1} \in \mathcal{C}_{y_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Assim, $P = u, y_1, \dots, y_{k-1}, v$ é um caminho em G que não passa por M , contradizendo o fato de M separar u de v em G .

Suponha agora que $G \in \text{UEH} \cup \text{DE}$.

(\Rightarrow) Se M separa T não trivialmente, então M é um aresta de T cujos extremos não são folhas. Assim, sejam M_1 e M_2 arestas adjacentes a M em T , de maneira que M_1 e M_2 estejam em componentes distintas de $T \setminus M$. Pelo Lema 66 (p. 47), existem $u, v \in V(G)$ tais que $T[\mathcal{C}_u]$ contém M_1 mas não M , e $T[\mathcal{C}_v]$ contém M_2 mas não M .

Afirmção. M separa u de v em G .

De fato, seja $P = u, x_1, \dots, x_k, v$ um caminho induzido em G . Vamos provar que este caminho passa por M . Como T é uma árvore característica de G e P é um caminho induzido, temos $\mathcal{C}_{x_i} \cap \mathcal{C}_{x_j} \neq \emptyset$ sse $j \in \{i-1, i, i+1\}$ (com a mesma exceção do caso anterior). Portanto, como M_1 e M_2 estão em componentes distintas de $T \setminus M$, temos necessariamente $M \in \mathcal{C}_{x_i}$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Logo temos $x_i \in M$.

(\Leftarrow) Sejam u e v vértices separados por M em G .

Afirmção. \mathcal{C}_u e \mathcal{C}_v estão contidos em componentes distintas de $T \setminus M$.

De fato, suponha para uma contradição que ambos estivessem numa mesma componente X de $T \setminus M$. Seja $P = M_1, \dots, M_k$ um caminho (composto de arestas) contido em X , com $M_1 \in \mathcal{C}_u$ e $M_k \in \mathcal{C}_v$. Neste caso, como para cada aresta M' de T existe $x \in V(G)$ tal que $M' \in \mathcal{C}_x$, segue-se que existem y_1, \dots, y_k tais que $M_i \in \mathcal{C}_{y_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Portanto, $P = u, y_1, \dots, y_k, v$ é um caminho em G que não passa por M , contradizendo o fato de M separar u de v em G . ■

4.3 O Teorema dos Átomos

O seguinte resultado, consequência imediata do Teorema 68, é parte do que é chamado *Teorema dos Átomos* em [21].

Teorema 69. 1. *Todo átomo CORDAL, UV ou DV possui uma árvore característica com no máximo dois vértices;*
 2. *Todo átomo UEH ou DE possui uma árvore característica que é uma estrela.*

Entretanto, o Teorema 69 não é o resultado que vai nos auxiliar a determinar grafos proibidos para algumas classes de caminho, mais adiante. Como veremos, precisamos do próximo resultado, que é uma consequência simples do Teorema 69.

Teorema 70 (Teorema dos Átomos de UEH). *Se G é um átomo, então $G \in \text{UEH}$ se, e somente se, cada vértice de G pertence a no máximo duas maxcliques.*

Prova. (\Rightarrow) Se G é um átomo UEH, então pelo Teorema 69 temos que G possui uma árvore característica que é uma estrela. Portanto, como caminhos em estrelas têm comprimento no máximo 2, cada vértice de G pertence a no máximo duas maxcliques.

(\Leftarrow) Sejam M_1, \dots, M_k as maxcliques de G , e seja S uma estrela com arestas e_1, \dots, e_k . Agora, para cada $v \in V(G)$, seja

$$P_v = \begin{cases} \{e_i\}, & \text{se } v \text{ pertence exclusivamente à maxclique } M_i; \\ \{e_i, e_j\}, & \text{se } v \in M_i \cap M_j. \end{cases}$$

Como cada vértice de G pertence a no máximo duas maxcliques, temos que para cada $v \in V(G)$ o conjunto P_v é um caminho em S . Além disso, é fácil verificarmos que $\mathcal{P}_e = \{P_v : v \in V\}$ é uma família Helly, e que $G \simeq \Omega(\mathcal{P}_e)$.

Logo $G \in \text{UEH}$. ■

Note que os Teoremas 69 e 70 têm a seguinte consequência, que também será bastante útil nas seções que seguem.

Lema 71. *Todo átomo cordal é um grafo UEH.*

Prova. Se G é um átomo cordal, então pelo Teorema 69, G tem no máximo duas maxcliques. Assim, trivialmente, cada vértice de G está em no máximo duas maxcliques, donde $G \in \text{UEH}$ pelo Teorema dos Átomos de UEH. ■

4.4 O Teorema do Separador

Nesta seção, descreveremos de maneira sucinta os Teoremas dos Decomponíveis de diversas classes de grafos de caminho, que foram dados por Monma e Wei em [21], de maneira unificada, sob o nome *Teorema do Separador*.

Ao longo desta e das próximas seções, os conceitos e resultados apresentados dizem respeito a grafos separados de um dado grafo por uma maxclique, e como suas maxcliques se intersectam. Neste contexto, apenas algumas maxcliques são consideradas *relevantes* para a discussão, cf. a próxima definição.

Definição 72 (Maxclique relevante). Seja G' um grafo separado de G por uma maxclique C . Dizemos que uma maxclique C' de G' , distinta de C , é *relevante* quando $C' \cap C \neq \emptyset$.

No restante deste capítulo, a palavra “relevante” será omitida. Em outras palavras, chamaremos as *maxcliques relevantes* de grafos separados apenas de *maxcliques*, já que as outras maxcliques destes grafos não serão importantes para nós.

Sejam G_i e G_j grafos separados de G por uma maxclique C , e sejam C_i uma maxclique de G_i e C_j uma maxclique de G_j . Por conveniência, introduzimos as seguintes abreviações, cf. Monma e Wei:

- $C_i \geq C_j$, para $C_i \cap C \supseteq C_j \cap C$;
- $C_i > C_j$, para $C_i \cap C \supset C_j \cap C$;
- $C_i \sim C_j$, para $C_i \cap C = C_j \cap C$; e
- $C_i \leftrightarrow C_j$, para $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, $C_i \not\geq C_j$ e $C_j \not\geq C_i$.

Note que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ implica, necessariamente, em exatamente um dos casos (a) $C_i > C_j$; (b) $C_i < C_j$; (c) $C_i \sim C_j$; ou (d) $C_i \leftrightarrow C_j$.

O Teorema do Separador é baseado no seguinte conceito.

Definição 73 (Antipodalidade). Sejam G_i e G_j grafos separados de G por uma maxclique C . Dizemos que G_i e G_j são *antipodais*, denotado por $G_i \leftrightarrow G_j$, quando existem maxcliques C_i de G_i e C_j de G_j , tais que:

1. existem maxcliques C'_j e C''_j de G_j tais que $C_i \cap C'_j \neq \emptyset$ e $C_i \not\geq C''_j$; e
2. existem maxcliques C'_i e C''_i de G_i tais que $C_j \cap C'_i \neq \emptyset$ e $C_j \not\geq C''_i$.

Neste caso, dizemos que a sêxtupla ordenada $\langle C_i, C'_i, C''_i, C_j, C'_j, C''_j \rangle$ é uma *testemunha* de $G_i \leftrightarrow G_j$.

Note que, para verificar que $G_i \leftrightarrow G_j$, nunca são realmente *necessárias* 6 testemunhas distintas de $G_i \leftrightarrow G_j$. De fato, suponha que $G_i \leftrightarrow G_j$, e seja $\langle C_i, C'_i, C''_i, C_j, C'_j, C''_j \rangle$ uma testemunha desta antipodalidade. Se $C_i \cap C_j = \emptyset$, então $\langle C_i, C'_i, C_i, C_j, C'_j, C_j \rangle$ também é uma testemunha. Por outro lado, se $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, então $\langle C_i, C_i, C''_i, C_j, C_j, C''_j \rangle$ também é uma testemunha.

Observamos também que esta definição de antipodalidade se encontra exatamente nos mesmos moldes da definição original dada por Monma e Wei. Entretanto, é fácil concluir que a definição apresentada aqui é uma mera reformulação da definição original. Apresentamos esta definição alternativa pois a consideramos mais sucinta, envolvendo menos conceitos auxiliares.

Definição 74 (Grafo dos antipodais, grafo vizinho). Seja G um grafo separado por uma maxclique C em G_1, \dots, G_k . O *grafo dos antipodais de G por C* , denotado por $\mathcal{A}(G, C)$, é o grafo que tem G_1, \dots, G_k como vértices, e arestas ligando dois grafos se, e somente se, eles são antipodais.

Dado $v \in C$, dizemos que G_i é um *grafo vizinho de v* quando existe $w \in V(G_i) \setminus C$ tal que $vw \in E(G)$.

Estamos prontos para enunciar o Teorema do Separador, sem dúvida a ferramenta mais importante para caracterizações de classes de grafos de caminho por proibição.

Teorema 75 (Teorema do Separador). *Seja G um grafo separado por uma maxclique C em G_1, \dots, G_k . Então, temos*

1. $G \in \text{UEH}$ sse $G_1, \dots, G_k \in \text{UEH}$, e $\mathcal{A}(G, C)$ é 2-colorível;
2. $G \in \text{DV}$ sse $G_1, \dots, G_k \in \text{DV}$, e $\mathcal{A}(G, C)$ é 2-colorível;
3. $G \in \text{DE}$ sse $G_1, \dots, G_k \in \text{DE}$, e $\mathcal{A}(G, C)$ é 2-colorível;
4. $G \in \text{UV}$ sse $G_1, \dots, G_k \in \text{UV}$, e $\mathcal{A}(G, C)$ possui uma coloração na qual, para cada $v \in C$, os grafos vizinhos de v estão 2-coloridos; e
5. $G \in \text{UE} \cap \text{CORDAL}$ sse $G_1, \dots, G_k \in \text{UE} \cap \text{CORDAL}$, e $\mathcal{A}(G, C)$ possui uma 3-coloração na qual, para cada $v \in C$, os grafos vizinhos de v estão 2-coloridos.

Nas próximas seções descreveremos como o Teorema do Separador já foi aplicado a caracterizações por proibição de algumas classes de grafos de caminho, e também o aplicaremos para avançar na busca por tais caracterizações das classes DE e $\text{UE} \cap \text{CORDAL}$, que ainda não as possuem.

Como vimos na Seção 3.1, de uma maneira geral, estas aplicações se dão da seguinte forma.

Seja \mathbb{G} uma das classes caracterizadas no Teorema do Separador, e seja $G \in \text{Proib}^{-1}\mathbb{G}$ um grafo separável por uma maxclique C nos grafos G_1, \dots, G_k . Note que a minimalidade de G implica que $\mathcal{A}(G, C)$ é um grafo minimal que não atende à propriedade dada no Teorema do Separador — de fato, se $\mathcal{A}' < \mathcal{A}(G, C)$ também não atendesse a tal propriedade, então o grafo $G' < G$ dado pela união dos grafos em $V(\mathcal{A}')$ também não pertenceria a \mathbb{G} , contradizendo a minimalidade de G .

Nos casos das classes UEH, DV e DE, isto implica que $\mathcal{A}(G, C)$ é um ciclo ímpar. Entretanto, a consequência deste fato para as classes UV e $\text{UE} \cap \text{CORDAL}$ não pode ser formulada de maneira tão sucinta.

Agora, buscamos determinar de que maneiras os grafos separados de G por C podem estar configurados para que $\mathcal{A}(G, C)$ possua a estrutura dada, de maneira minimal. Fazer isto utilizando apenas a definição de antipodalidade se mostra impraticável — a princípio, são muitas as configurações possíveis de G_i e G_j que implicam em $G_i \leftrightarrow G_j$. Neste contexto, o seguinte resultado, devido a Monma e Wei [21], mostra que existem apenas quatro *tipos* de antipodalidade, de um certo ponto de vista.

Teorema 76. *Sejam G_i e G_j grafos separados de G por uma maxclique. Então temos $G_i \leftrightarrow G_j$ se, e somente se, vale um dos seguintes casos.*

1. $C_i \leftrightarrow C_j$;
2. $C_i > C'_j$ e $C_j > C'_i$;
3. $C_i \geq C'_j$, $C_i \cap C''_j = \emptyset$, e $C'_i > C_j$
(ou $C_j \geq C'_i$, $C_j \cap C''_i = \emptyset$, e $C'_j > C_i$); ou
4. $C_i \sim C'_j$, $C_i \cap C''_j = \emptyset$, $C_j \sim C'_i$, e $C_j \cap C''_i = \emptyset$,

para maxcliques C_i, C'_i e C''_i de G_i , e C_j, C'_j e C''_j de G_j .

Prova. (\Rightarrow) Por conveniência, sempre indicaremos com índice i uma maxclique de G_i , e com índice j uma maxclique de G_j . Suponha que $G_i \leftrightarrow G_j$, e que não existam maxcliques que satisfaçam os itens 1, 2 ou 3 do enunciado. Mostraremos que, neste caso, existem maxcliques que satisfazem o item 4 do enunciado.

Afirmção. Não existem maxcliques C_i e C_j tais que $C_i > C_j$.

De fato, suponha para uma contradição que existam maxcliques C'_i e C_j tais que $C'_i > C_j$. Portanto, $G_i \leftrightarrow G_j$ possui uma testemunha do tipo $\langle C_i, C'_i, C'_i, C_j, C'_j, C''_j \rangle$.

Note que, neste caso, não existem maxcliques C_i^* e C_j^* tais que $C_j^* > C_i^*$ (pois neste caso teríamos maxcliques satisfazendo o item 2 do enunciado). Portanto, como também não existem maxcliques satisfazendo o item 1 do enunciado, segue-se que

para quaisquer maxcliques C_i^* e C_j^* , temos que $C_i^* \cap C_j^* \neq \emptyset$ implica em $C_i^* > C_j^*$, ou $C_i^* \sim C_j^*$, e portanto implica em $C_i^* \geq C_j^*$.

Assim, como por definição temos $C_i \cap C_j' \neq \emptyset$, segue-se que temos $C_i \geq C_j'$.

Além disso, por definição, temos que $C_i \not\geq C_j''$, o que por contrapositiva implica em $C_i \cap C_j'' = \emptyset$.

Portanto, C_i, C_i', C_j, C_j' e C_j'' satisfazem o item 3 do enunciado, uma contradição. Isto conclui a prova da afirmação.

Analogamente, não existem maxcliques C_i e C_j tais que $C_j > C_i$.

Logo, para quaisquer maxcliques C_i^* e C_j^* , temos que $C_i^* \cap C_j^* \neq \emptyset$ implica em $C_i^* \sim C_j^*$.

Assim, seja $\langle C_i, C_i', C_i'', C_j, C_j', C_j'' \rangle$ uma testemunha de $G_i \leftrightarrow G_j$. Por definição, temos $C_i \cap C_j' \neq \emptyset$ e $C_j \cap C_i' \neq \emptyset$, e portanto temos $C_i \sim C_j'$ e $C_j \sim C_i'$. Além disso, por definição, temos $C_i \not\geq C_j''$ e $C_j \not\geq C_i''$, que implicam em $C_i \cap C_j'' = \emptyset$ e $C_j \cap C_i'' = \emptyset$. Portanto, $C_i, C_i', C_i'', C_j, C_j'$ e C_j'' satisfazem o item 4 do enunciado.

(\Leftarrow) Temos 4 casos.

- Se existem maxcliques C_i de G_i e C_j de G_j satisfazendo o item 1 do enunciado, então $\langle C_i, C_i, C_i, C_j, C_j, C_j \rangle$ é uma testemunha de $G_i \leftrightarrow G_j$.
- Se existem maxcliques C_i e C_i' de G_i , e C_j e C_j' de G_j satisfazendo o item 2 do enunciado, então $\langle C_i', C_i, C_i, C_j', C_j, C_j \rangle$ é uma testemunha de $G_i \leftrightarrow G_j$.
- Se existem maxcliques C_i e C_i' de G_i , e C_j, C_j' e C_j'' de G_j satisfazendo o item 3 do enunciado, então $\langle C_i, C_i', C_i', C_j, C_j', C_j'' \rangle$ é uma testemunha de $G_i \leftrightarrow G_j$ (analogamente para a condição alternativa do item 3).
- Se existem maxcliques C_i, C_i' e C_i'' de G_i , e C_j, C_j' e C_j'' de G_j satisfazendo o item 4 do enunciado, então $\langle C_i, C_i', C_i'', C_j, C_j', C_j'' \rangle$ é uma testemunha de $G_i \leftrightarrow G_j$. ■

Entretanto, mesmo com o auxílio do Teorema 76, determinar as configurações possíveis de G_1, \dots, G_k que acarretam $\mathcal{A}(G, C)$ com a estrutura especificada é um problema muito difícil de ser tratado, já que para cada aresta $G_i \leftrightarrow G_j$ de $\mathcal{A}(G, C)$, temos 4 possibilidades de configurações possíveis.

Portanto, a determinação de $\mathbf{Proib}^{-1}\mathbb{G}$ geralmente envolve a prova de que a antipodalidade de grafos separados de $G \in \mathbf{Proib}^{-1}\mathbb{G}$ é caracterizada de maneira ainda mais restrita. Por exemplo, como veremos na Seção 4.5.1, grafos separados de $G \in \mathbf{Proib}^{-1}(\mathbf{UEH} \cap \mathbf{SPLIT})$ são antipodais se, e somente se, possuem maxcliques satisfazendo o item 1 do Teorema 76.

Motivados pelo Teorema 76, podemos *classificar* a antipodalidade de G_i e G_j da seguinte forma.

Definição 77 (Classificação de antipodalidade). Sejam G_i e G_j grafos separados de G por uma maxclique tais que $G_i \leftrightarrow G_j$. Dizemos que esta antipodalidade é

1. *tipo 1*, quando existem maxcliques de G_i e G_j que satisfazem o item 1 do Teorema 76;
2. *tipo 2*, quando não é tipo 1, e existem maxcliques de G_i e G_j que satisfazem o item 2 do Teorema 76;
3. *tipo 3*, quando não é tipo 1, nem 2, e existem maxcliques G_i e G_j que satisfazem o item 3 do Teorema 76; e
4. *tipo 4*, quando não é tipo 1, 2, nem 3.

4.4.1 Construção de pré-imagens antipodais

Podemos encarar \mathcal{A} como um *operador*, que associa cada par (G, C) ao grafo $\mathcal{A}(G, C)$, onde C é uma maxclique separadora de G . Neste contexto, uma pergunta bastante natural é: qual é a imagem do operador \mathcal{A} em \mathcal{G} ? Em outras palavras: *dado um grafo G , sempre existe um grafo H tal que $G \simeq \mathcal{A}(H, C)$, para alguma maxclique separadora C de H ?*

Nesta seção, apresentaremos uma construção que mostra que a resposta a essa pergunta é positiva, para qualquer que seja o grafo não trivial¹ G dado (obviamente, o grafo trivial não é o grafo dos antipodais de nenhum grafo). Além disso, tal construção será utilizada de maneira essencial na busca de subgrafos induzidos proibidos de $\text{UE} \cap \text{CORDAL}$, mais adiante.

A construção é a seguinte.

1. Subdivida cada aresta $e = uv$ de G usando um vértice novo denotado por e ;
2. Adicione arestas entre os vértices criados no item (1), até que estes formem uma clique C ;
3. Para cada $v \in V(G)$ de grau 0 ou 1, adicione um vértice v' à clique C , e crie uma aresta entre v e v' .

Denotamos o grafo H assim obtido por $\text{constr}(G)$. Como é usual, dado um conjunto \mathbb{G} de grafos, denotamos por $\text{constr}(\mathbb{G})$ o conjunto $\{\text{constr}(G) : G \in \mathbb{G}\}$.

Exemplos desta construção são dados na Figura 4.2.

O seguinte resultado mostra que, de fato, esta construção cumpre o prometido.

¹Dizemos que um grafo é *trivial* quando possui apenas um vértice.

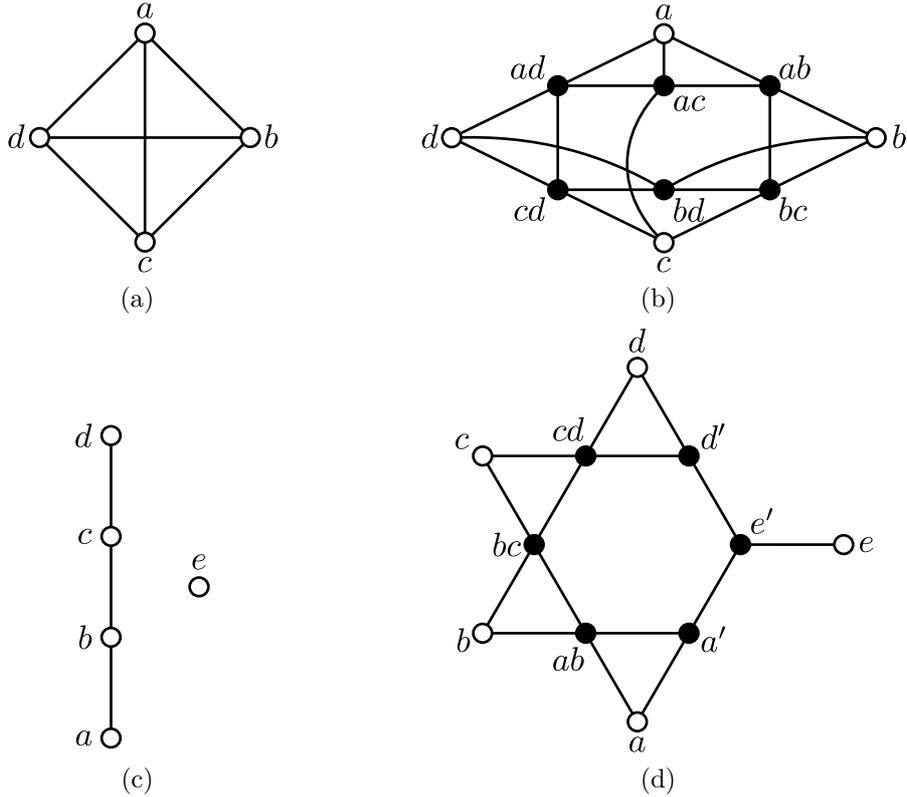


Figura 4.2: Exemplos de grafos, (a) e (c), e os respectivos grafos obtidos pela construção, (b) e (d), onde os vértices pretos formam cliques (algumas arestas foram omitidas para facilitar a visualização).

Teorema 78. *Seja $H = \text{constr}(G)$, onde G é um grafo não trivial, e seja $C = \{e \in V(H) : e \in E(G)\} \cup \{v' \in V(H) : v \in V(G) \text{ e } d_G(v) \leq 1\}$ a clique de H formada pelos vértices provenientes de arestas e de vértices de grau 0 ou 1 de G na construção. Então C é a única maxclique separadora de H , e temos*

$$G \simeq \mathcal{A}(H, C).$$

Prova. Primeiramente, assumiremos que G não possui vértices de grau 0 ou 1. Note que, neste caso, para cada $v \in V(G)$ existe uma aresta de G que não é incidente a v , e para cada par v_1, v_2 de vértices de G , existe uma aresta de G que é incidente a v_1 , mas não a v_2 .

Para ver que C é uma maxclique de H , seja $v \in V(H) \setminus C$. Vamos mostrar que existe $e \in C$ tal que $ve \notin E(H)$. Pela construção, v é também um vértice de G . Como vimos, existe uma aresta $e \in E(G)$ que não é incidente a v . Portanto, novamente pela construção, temos $ve \notin E(H)$.

Para ver que C separa G , basta notar que, como estamos assumindo que G não é trivial, G deve possuir ao menos 2 vértices. Portanto, como pela construção os vértices de H provenientes de vértices de G são adjacentes apenas a vértices

provenientes de arestas ou vértices de grau 0 ou 1 de G (i.e., vértices da clique C de H), temos que C separa H .

Para ver que C é a única maxclique separadora de H , basta notar que as outras maxcliques de H são do tipo $C' = N_H[v]$, para algum $v \notin C$. Se, para uma contradição, tivéssemos que C' também separasse H , então teríamos $u \notin C$ tal que $N_H(u) \subseteq N_H(v)$. Por construção, isto significa que, em G , toda aresta incidente a u também é incidente a v , i.e., u tem grau 0 ou 1, contradizendo a hipótese contrária.

Desta forma, temos que C separa H em $G_v = G[\{v\} \cup C]$, para $v \in V(H) \setminus C$. Assim, como cada G_v só tem uma maxclique relevante $C_v = N_H[v]$, e como para cada par $u, v \in V(H) \setminus C$ existem $e_1, e_2 \in C$ tais que $ue_1, ve_2 \in E(H)$ e $ue_2, ve_1 \notin E(H)$, temos que C_u e C_v são incomparáveis para quaisquer $u, v \in V(H) \setminus C$.

Logo, temos

$$\begin{aligned} G_u \leftrightarrow G_v &\Leftrightarrow C_u \leftrightarrow C_v \\ &\Leftrightarrow \exists e \in C \text{ t.q. } ue, ve \in E(H) \\ &\Leftrightarrow \exists e \in C \text{ t.q. } e = uv \in E(G) \\ &\Leftrightarrow uv \in E(G), \end{aligned}$$

i.e., temos $G \simeq \mathcal{A}(H, C)$.

Se G possui vértices de grau 0 ou 1, então existem vértices em C que são adjacentes a nenhum ou a apenas um vértice em $V(H) \setminus C$, e portanto é fácil concluirmos que C é uma maxclique separadora de H . Além disso, as outras maxcliques de H são da forma $C' = N_H[v]$ para algum $v \notin C$, como no caso acima. Como vimos, estas maxcliques não separam vértices de grau maior do que 1, e vértices de grau 0 ou 1 têm vizinhança contida em $C \setminus C'$, logo também não são separados por C' . Portanto C é a única maxclique separadora de H .

Finalmente, se v tem grau 0 ou 1 em G , então para qualquer $u \in V(H) \setminus C$, as maxcliques relevantes C_u e C_v (definidas como acima) são incomparáveis. Logo, temos $G \simeq \mathcal{A}(H, C)$ pelo mesmo raciocínio apresentado acima. ■

Note que, pela construção, é fácil perceber que $H = \text{constr}(G) \in \text{SPLIT}$, qualquer que seja o grafo G . Além disso, a maxclique central C de H , formada pelos vértices provenientes das arestas e dos vértices de grau 0 ou 1 de G , é a única maxclique que separa H , como vimos no Teorema 78. Como cada vértice $v \in C$ é vizinho a no máximo 2 subgrafos separados de H por C , é trivial concluir que em qualquer coloração de $\mathcal{A}(H, C)$, tais subgrafos vizinhos de v estão 2-coloridos. Como também é fácil concluir que todo subgrafo separado de H por C é um grafo UV, então pelo Teorema do Separador temos $H \in \text{UV}$.

Acabamos de provar o seguinte.

Corolário 79. *Para qualquer grafo G , temos $\text{constr}(G) \in \text{SPLIT} \cap \text{UV}$.*

Além disso, esta construção é injetiva, como afirma o próximo resultado. Este fato será usado mais adiante.

Teorema 80. $\text{constr}(G) \simeq \text{constr}(H) \Rightarrow G \simeq H$.

Prova. Seja ϕ' um isomorfismo entre $\text{constr}(G)$ e $\text{constr}(H)$, e seja ϕ a restrição de ϕ' a $V(G)$. Portanto ϕ é uma função injetiva.

Para ver que ϕ é uma bijeção entre $V(G)$ e $V(H)$, note que pelo Teorema 78, temos que $\text{constr}(G)$ e $\text{constr}(H)$ só possuem uma maxclique separadora cada, digamos C_G e C_H respectivamente. Portanto, como ϕ' é um isomorfismo, devemos necessariamente ter $\phi'(C_G) = C_H$, o que implica em $\phi'(\overline{C_G}) = \overline{C_H}$, pois ϕ' é uma bijeção. Assim, como temos $\overline{C_G} = V(G)$, $\phi(V(G)) = \phi'(V(G))$ e $\overline{C_H} = V(H)$, temos $\phi(V(G)) = V(H)$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} e = uv \in E(G) &\Leftrightarrow ue, ve \in E(\text{constr}(G)) \\ &\Leftrightarrow \phi'(u)\phi'(e), \phi'(v)\phi'(e) \in E(\text{constr}(H)) \\ &\Leftrightarrow \phi'(u)\phi'(v) \in E(H) \\ &\Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E(H), \end{aligned}$$

i.e., ϕ é um isomorfismo entre G e H . ■

4.5 Caracterizações conhecidas

Nesta seção, descreveremos brevemente as caracterizações das classes de caminho $\text{UEH} \cap \text{SPLIT}$, que foi dada por M. Cerioli e P. Petitto [4]; DV , que foi dada por B. Panda [22]; e UV , que foi obtida parcialmente por S. Tondato, M. Gutierrez e J. Szwarcfiter [35] e, finalmente, dada por B. Lévêque, F. Maffray e M. Preissmann [17]. Até o momento, estas são as únicas caracterizações conhecidas de classes de grafos de caminho por proibição. Como a nomenclatura adotada varia de artigo para artigo, elaboramos o *glossário* dado na Tabela 4.1. Os grafos e famílias de grafos listados neste glossário, e que serão utilizados nas caracterizações que descreveremos, podem ser encontrados nas Figuras 4.3 a 4.17, ao final da seção.

4.5.1 $\text{UEH} \cap \text{SPLIT}$

A caracterização de $\text{UEH} \cap \text{SPLIT}$ por proibição foi dada por M. Cerioli e P. Petitto em 2005 [4].

A primeira observação que fazemos a respeito desta classe é a seguinte. Seja $G \in \text{Proib}^{-1}(\text{UEH} \cap \text{SPLIT})$. Se $G \notin \text{SPLIT}$, então da minimalidade de G temos que $G \in \text{Proib}^{-1}\text{SPLIT}$, o que implica que todos os grafos em $\text{Proib}^{-1}(\text{UEH} \cap \text{SPLIT}) \setminus \text{Proib}^{-1}\text{SPLIT}$

este trabalho	Panda [22]	Cerioli & Petito [4]	Lévêque, Maffray & Preissmann [17]
P ₁	A ₈	H	F_5 ($n = 7$)
P ₂	A ₉	H'	F_3
P ₃	A ₇	Hajós	—
P ₄	—	—	F_2
P ₅	A ₁	—	F_1
P ₆	A ₂	—	F_6
P ₇	A ₃	—	F_7
P ₈	A ₄	—	F_9
P ₉	—	—	F_8
P ₁₀	A ₁₀	—	F_4
P ₁₁	A ₅	—	F_5 ($n > 7$)
P ₁₂	A ₆	—	F_{10}
P ₁₃	A ₁₂	Odd complete sun	—
P ₁₄	—	—	F_{14}
P ₁₅	A ₁₁	—	F_{16}
P ₁₆	—	—	F_{11}
P ₁₇	—	—	F_{12}
P ₁₈	A ₁₃	Clown with 1 boss	F_{15}
P ₁₉	A ₁₄	Clown with 2 bosses	F_{13}

Tabela 4.1: Glossário de nomes dados na literatura para os grafos e famílias de grafos usados neste trabalho.

são SPLIT. Desta forma, como átomos cordais são UEH pelo Lema 71 (p. 50), e como todo grafo SPLIT é cordal, temos o seguinte.

Corolário 81. *Os grafos em $\text{Proib}^{-1}(\text{UEH} \cap \text{SPLIT}) \setminus \text{Proib}^{-1}\text{SPLIT}$ são grafos SPLIT e separáveis.*

Logo, pode-se utilizar o Teorema do Separador para tentar encontrar todos os grafos em $\text{Proib}^{-1}(\text{UEH} \cap \text{SPLIT}) \setminus \text{Proib}^{-1}\text{SPLIT}$, utilizando-se também o seguinte resultado.

Lema 82. *A antipodalidade de grafos separados de $G \in \text{SPLIT}$ por sua maxclique central é tipo 1.*

Prova. Seja $G \in \text{SPLIT}$ particionado na maxclique central C e um conjunto independente I , e sejam G_i e G_j grafos separados de G por C . Assim, é fácil vermos que G_i e G_j só possuem uma maxclique relevante cada, digamos C_i e C_j . Portanto, a testemunha de $G_i \leftrightarrow G_j$ é necessariamente $\langle C_i, C_i, C_i, C_j, C_j, C_j \rangle$, o que implica em $C_i \leftrightarrow C_j$. ■

Baseadas nestes resultados, Cerioli e Petito provaram a seguinte caracterização de $\text{UEH} \cap \text{SPLIT}$ por proibição.

Teorema 83 (Caracterização de $\text{UEH} \cap \text{SPLIT}$ por proibição). *$\text{Proib}^{-1}(\text{UEH} \cap \text{SPLIT})$ é formado por $\text{Proib}^{-1}\text{SPLIT}$, mais os grafos $P_1 - P_3$, e os grafos pertencentes às famílias P_{13} , P_{18} e P_{19} .*

4.5.2 DV

A caracterização de DV por proibição foi dada por B. Panda em 1999 [22].

Como vimos na Seção 4.1, temos $\text{DV} = \text{UEH} \cap \text{CORDAL}$. Portanto, por um raciocínio análogo ao feito para $\text{Proib}^{-1}(\text{UEH} \cap \text{SPLIT})$, temos o seguinte.

Corolário 84. *Os grafos em $\text{Proib}^{-1}\text{DV} \setminus \text{Proib}^{-1}\text{CORDAL}$ são grafos cordais e separáveis.*

A prova da caracterização de DV por proibição utiliza também o seguinte conceito adicional.

Definição 85 (Maxclique principal). Seja $G' = G[X \cup C]$ um grafo separado de G pela maxclique C . Uma maxclique relevante C' de G' é *principal* quando contém todos os vértices de C que são vizinhos de X , i.e., quando temos

$$N_G(X) \subseteq C'.$$

Geralmente, denotamos $N_G(X)$ por $W_G(G')$, ou por $W(G')$ quando não há ambiguidade quanto ao grafo em questão.

O seguinte resultado é devido a Panda e S. Mohanty [23]

Lema 86. *Se G é um grafo cordal que não é um átomo, então todo grafo separado de G por uma maxclique possui uma maxclique principal.*

Prova. Por indução em $|X|$, vamos mostrar que, para todo grafo cordal G que não é átomo, toda maxclique separadora C de G , e todo grafo $G' = G[X \cup C]$ separado de G por C , temos que G' possui uma maxclique principal.

Se $|X| = 1$, então o resultado vale pois $X \cup N_G(X)$ é uma maxclique principal de G' .

Suponha que o resultado seja verdadeiro sempre que $|X| < k$, e seja $G' = G[X \cup C]$ um grafo separado de um grafo cordal G por uma maxclique C tal que $|X| = k$.

Como C é uma maxclique de G , temos que G' é um grafo cordal que não é completo. Portanto, G' possui dois vértices simpliciais não adjacentes, e portanto pelo menos um vértice simplicial $v \notin C$.

Assim, $G' \setminus v$ é um grafo separado do grafo cordal $G^* = G \setminus v$ pela maxclique C , e temos $|X \setminus \{v\}| < k$. Logo, pela H.I., $G' \setminus v$ possui uma maxclique principal C' .

Além disso, como v é simplicial e $v \notin C$, temos $W_G(G') = W_{G^*}(G' \setminus v)$. Portanto, se $C' \cup \{v\}$ é uma maxclique de G' , então essa é uma maxclique principal de G' ; caso contrário, C' é uma maxclique principal de G' . ■

O Lema 86 é utilizado de maneira fundamental por Panda em sua caracterização de DV por proibição. Em grande parte, isto se dá porque este lema acarreta o seguinte resultado.

Lema 87. *A antipodalidade de grafos separados de $G \in \text{CORDAL}$ por uma maxclique é tipo 1 ou 2. Além disso, sempre existe uma testemunha desta antipodalidade que contém uma maxclique principal de cada grafo.*

Como já vimos, um resultado deste tipo é importante em caracterizações por proibição de classes de grafos de caminho. Baseado nele, Panda provou a seguinte caracterização de DV por proibição.

Teorema 88 (Caracterização de DV por proibição). *Proib⁻¹DV é formado por Proib⁻¹CORDAL, mais os grafos $P_1 - P_3, P_5 - P_8$ e P_{10} , e os grafos pertencentes às famílias $P_{11} - P_{13}, P_{15}, P_{18}$ e P_{19} .*

4.5.3 UV

A caracterização de UV por proibição foi obtida parcialmente por S. Tondato, M. Gutierrez e J. Szwarcfiter em 2005 [35] e dada de maneira completa por B. Lévêque,

F. Maffray e M. Preissman Pelo menos em parte, isso pode ser explicado pelo fato de que a condição dada naquele teorema não parece ser útil num sentido prático, já que são muitas as possíveis configurações de G e C que acarretam $\mathcal{A}(G, C)$ deixar de atender à condição do Teorema do Separador desta classe.

A prova de caracterização de UV por proibição dada em [17] é fortemente baseada no Teorema da Árvore Característica, e em propriedades especiais dessas árvores para grafos UV. Entretanto, como essa prova é muito específica a UV, e como ela é feita com uma abordagem muito distinta daquela adotada para outras classes, não entraremos em maiores detalhes quanto a ela.

Teorema 89 (Caracterização de UV por proibição). *Proib⁻¹UV é formado por Proib⁻¹CORDAL, mais os grafos P_1, P_2 e $P_4 - P_{10}$, e os grafos pertencentes às famílias P_{11}, P_{12} e $P_{14} - P_{19}$.*

4.5.4 Grafos usados nas caracterizações

Nas figuras a seguir, vértices pretos sempre formam uma clique, mesmo que algumas arestas estejam omitidas. Tal artifício, bem como os diferentes estilos de traços que aparecem nas figuras, são utilizado apenas para facilitar a visualização.

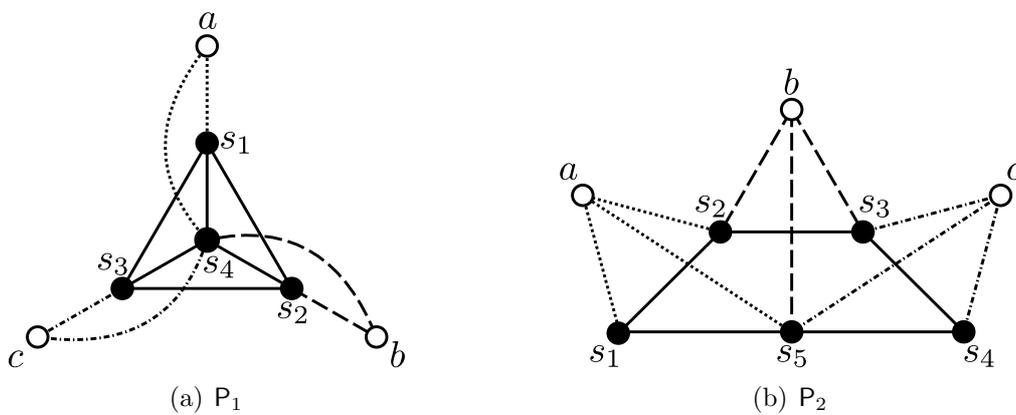


Figura 4.3: Grafos P_1 e P_2 .

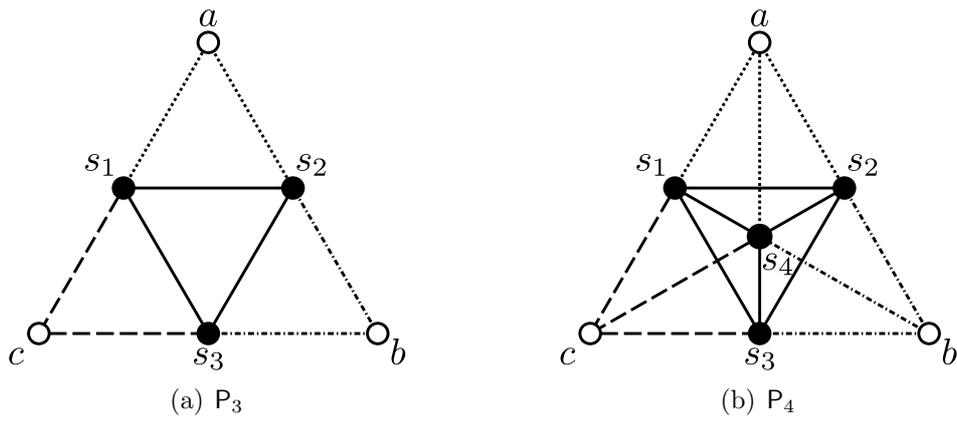


Figura 4.4: Grafos P_3 e P_4 .

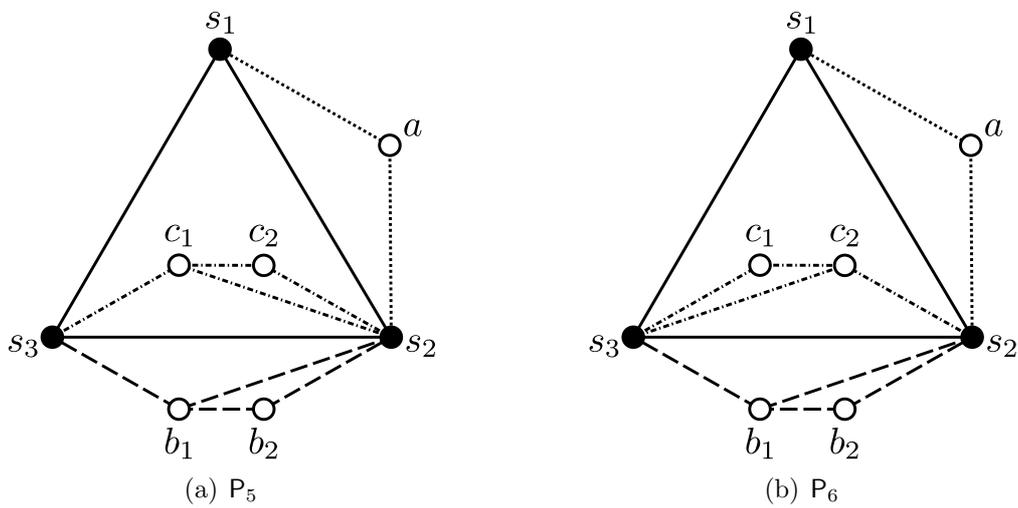


Figura 4.5: Grafos P_5 e P_6 .

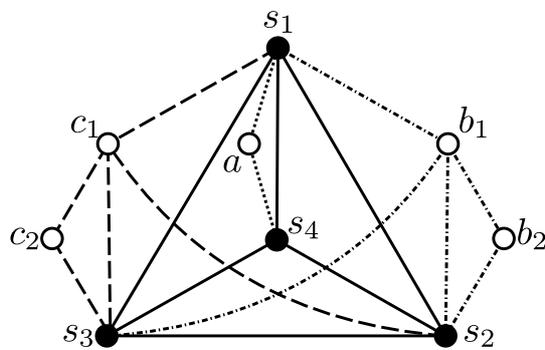


Figura 4.6: Grafo P_7 .

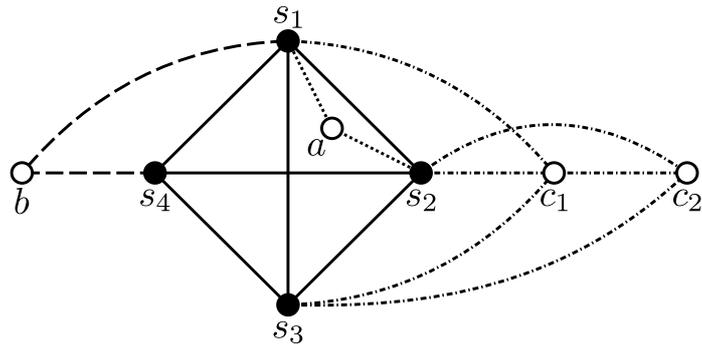


Figura 4.7: Grafo P_8 .

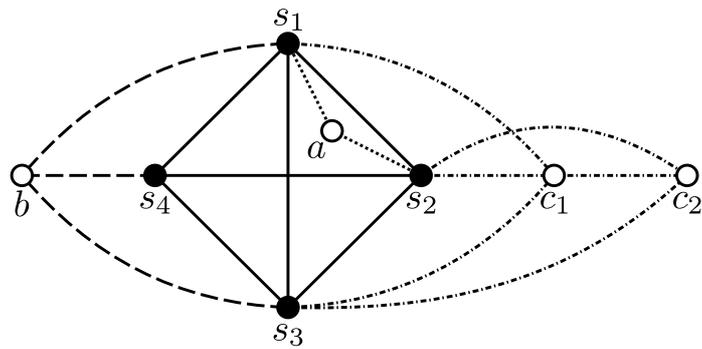


Figura 4.8: Grafo P_9 .

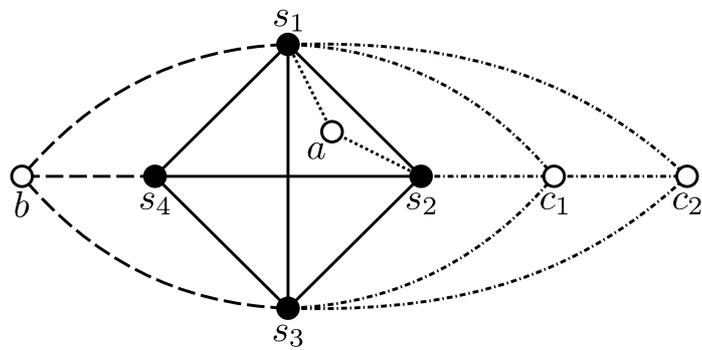


Figura 4.9: Grafo P_{10} .

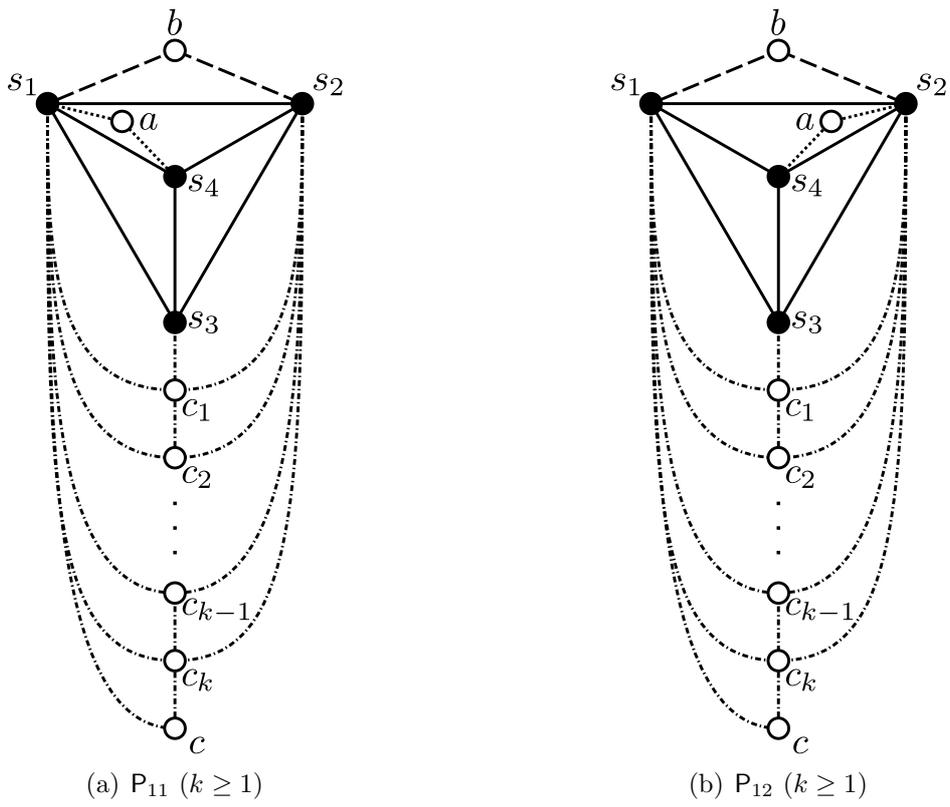


Figura 4.10: Famílias P_{11} e P_{12} .

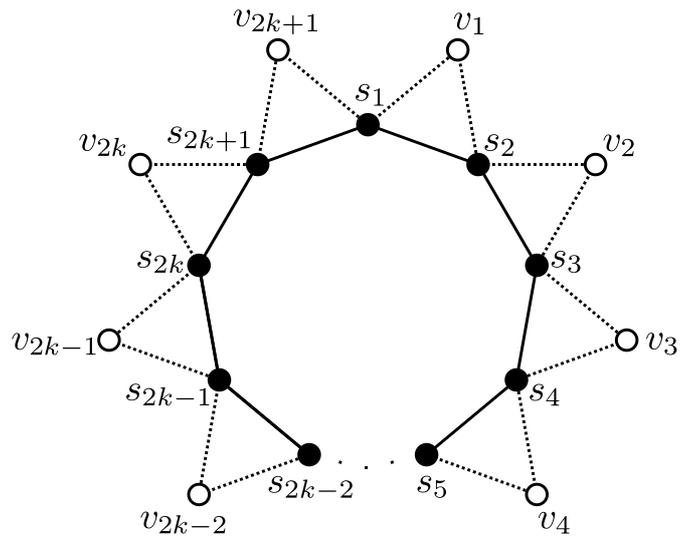


Figura 4.11: Família P_{13} ($k \geq 1$).

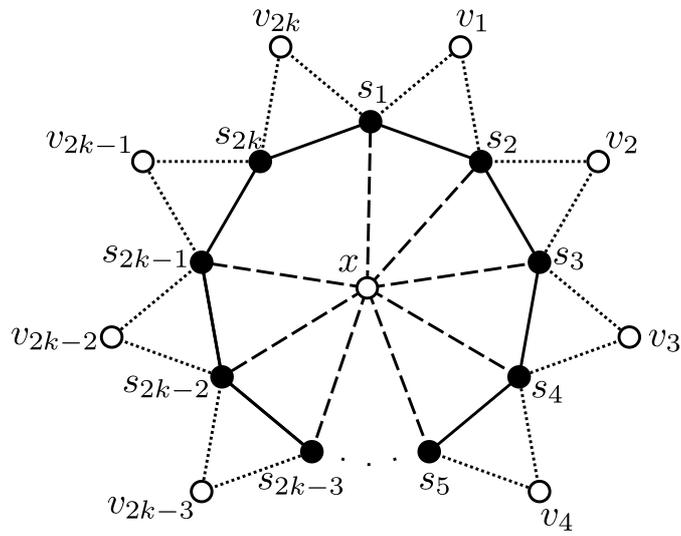


Figura 4.12: Família P_{14} ($k \geq 2$).

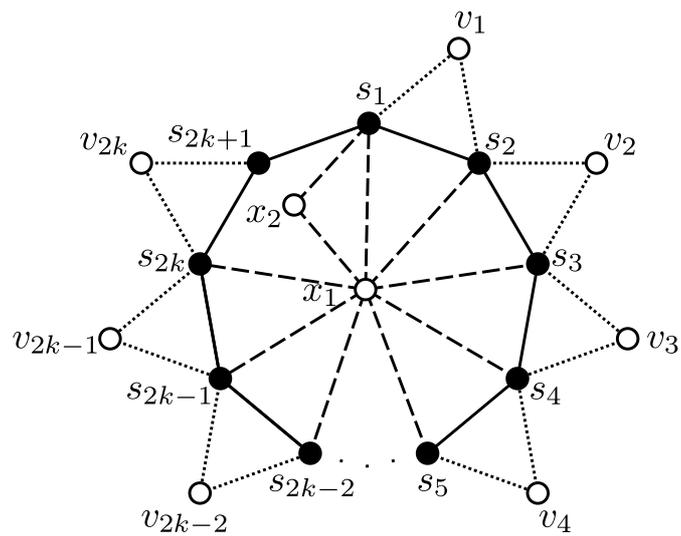


Figura 4.13: Família P_{15} ($k \geq 2$).

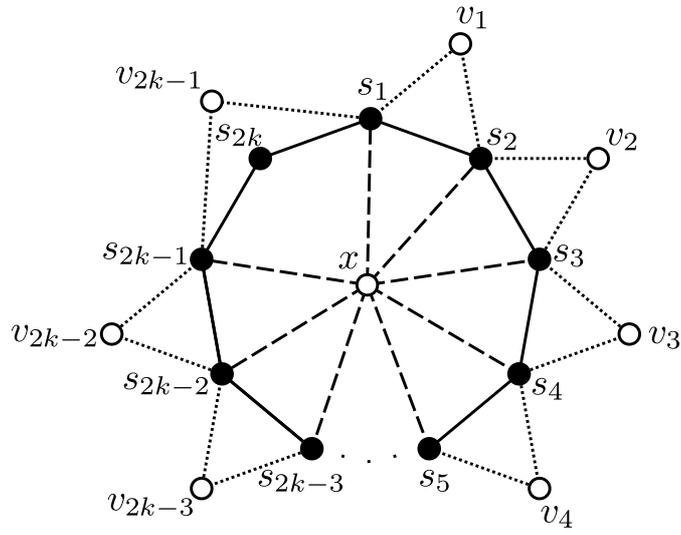


Figura 4.14: Família P_{16} ($k \geq 2$).

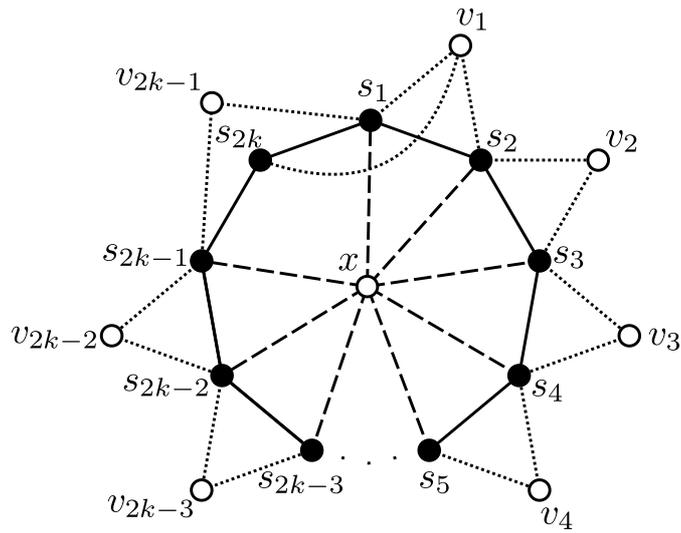


Figura 4.15: Família P_{17} ($k \geq 2$).

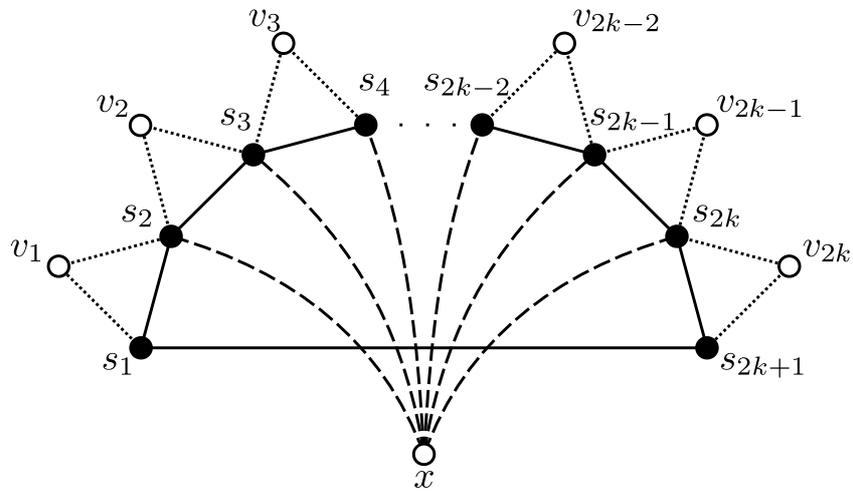


Figura 4.16: Família P_{18} ($k \geq 2$).

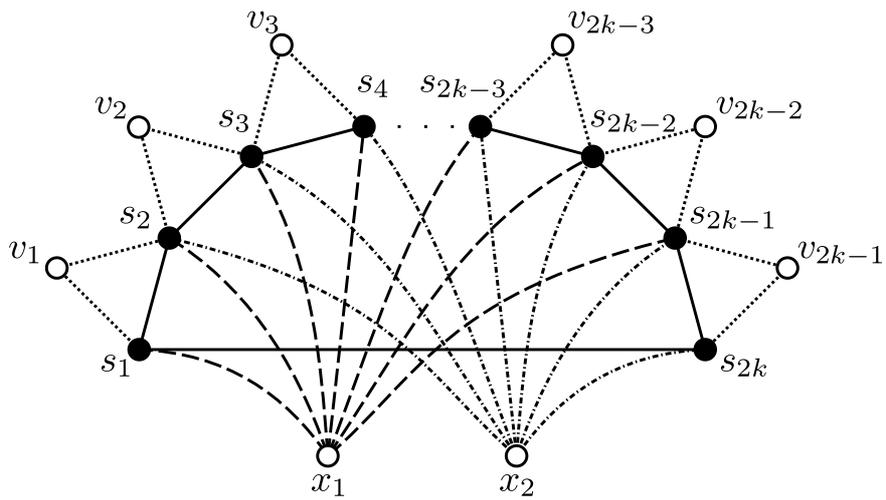


Figura 4.17: Família P_{19} ($k \geq 2$).

4.6 Novos subgrafos proibidos para DE

4.6.1 Abordagem ingênua

Como vimos na Seção 4.1, temos $DV = UEH \cap \text{CORDAL}$ e $DE = UEH \cap \text{PERFEITO}$. Assim, uma primeira abordagem natural para tentarmos determinar $\text{Proib}^{-1}DE$ poderia ser: *adaptar* a lista $\text{Proib}^{-1}DV$ de maneira direta (por exemplo, substituir $\text{Proib}^{-1}\text{CORDAL}$ por $\text{Proib}^{-1}\text{PERFEITO}$, em $\text{Proib}^{-1}DV$), e *modificar* a prova do Teorema 88 (p. 61) de acordo.

Entretanto, como veremos em mais detalhes no restante desta seção, há dois obstáculos principais para esta abordagem. O primeiro é a impossibilidade, em um sentido preciso, de se modificar a prova do Teorema 88 de maneira direta para se obter uma prova de caracterização de $UEH \cap \mathbb{G}$ por proibição, para qualquer classe $\mathbb{G} \supset \text{CORDAL}$. O segundo diz respeito a uma diferença fundamental entre $\text{Proib}^{-1}DV$ e $\text{Proib}^{-1}DE$ que impossibilita que qualquer mudança *simples* de $\text{Proib}^{-1}DV$ seja suficiente para que se obtenha $\text{Proib}^{-1}DE$.

O primeiro obstáculo

Como vimos na Seção 4.5.2, na prova da caracterização de DV por proibição, B. Panda usou de maneira fundamental o Lema 86 (p. 61). A princípio, a sua prova poderia ser generalizada (de maneira relativamente direta) a uma prova de caracterização de $UEH \cap \mathbb{G}$ por proibição, para qualquer superclasse própria \mathbb{G} de CORDAL que satisfizesse um resultado análogo ao Lema 86. Se PERFEITO fosse uma tal classe, então esta seria uma caracterização de DE por proibição, como desejamos.

Entretanto, não existe uma classe com tais propriedades — a condição apresentada no Lema 86 é, na verdade, uma caracterização de CORDAL , como veremos a seguir.

Por conveniência, introduzimos a seguinte notação, que tem sua inspiração nos nomes Panda e Mohanty.

Definição 90 (Grafo PM-separável). Dizemos que G é *PM-separável* quando, para toda maxclique separadora C de G , temos que todos os grafos separados de G por C possuem uma maxclique principal.

Assim, o Lema 86 afirma que todo grafo cordal que não é átomo é PM-separável. A seguir, provaremos a recíproca deste resultado.

Lema 91. *Se G é PM-separável, então qualquer grafo separado de G por uma maxclique é PM-separável.*

Prova. Seja G' um grafo separado de G por C . Se G' é um átomo, então G' é PM-separável por vacuidade. Caso contrário, seja C' uma maxclique separadora de

G' , e seja G'' um grafo separado de G' por C' . Vamos mostrar que G'' possui uma maxclique principal.

Note que C' também é uma maxclique separadora de G . Portanto, se G'' é um grafo separado de G por C' , então como G é PM-separável por hipótese, temos que G'' possui uma maxclique principal. Caso contrário, existe um grafo separado H de G por C' tal que $G'' \subset H$. Note que, neste caso, G'' necessariamente contém vértices de C , e portanto a diferença entre G'' e H são exatamente as outras componentes conexas de $G \setminus C$ (veja a Figura 4.18). Novamente, como G é PM-separável, H possui uma maxclique principal C_H . Além disso, é fácil vermos que temos $W_G(H) \supseteq W_{G'}(G'')$.

Portanto, a clique $C_{G''} = C_H \cap V(G')$ de G'' contém $W_{G'}(G'')$. Logo qualquer maxclique relevante de G'' que contenha $C_{G''}$ é principal. ■

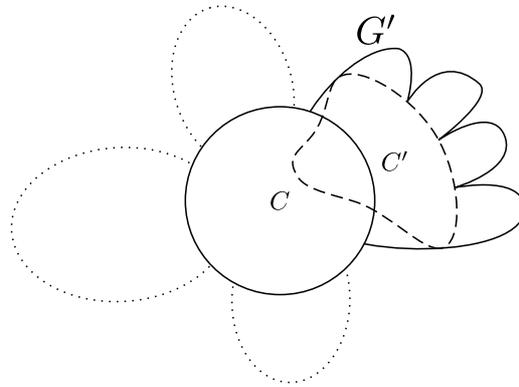


Figura 4.18: Prova do Lema 91. Linhas sólidas representam o grafo G' , e linhas pontilhadas representam componentes conexas de $G \setminus C$.

Teorema 92. *Se G é PM-separável e não é um átomo, então G é cordal.*

Prova. A prova é por indução em n .

Se $n = 1$, então o resultado vale por vacuidade. Suponha que o resultado seja verdadeiro para grafos com menos do que n vértices, e seja G um grafo com n vértices que é PM-separável e que não é um átomo. Seja C uma maxclique separadora de G . Pelo Lema 91, cada grafo separado de G por C é PM-separável, e portanto pela H.I. cada um é cordal. Assim, pelo Teorema dos Decomponíveis de CORDAL (p. 29), temos que $G \in \text{CORDAL}$. ■

Portanto, a prova da caracterização de DV por proibição apresentada em [22] se aplica exclusivamente a grafos cordais.

O segundo obstáculo

Como vimos na Seção 4.5.2, todos os átomos cordais são grafos UEH, o que implica que os grafos em $\text{Proib}^{-1}\text{DV} \setminus \text{Proib}^{-1}\text{CORDAL}$ são grafos cordais e separáveis.

Entretanto, o mesmo não vale em relação a DE e PERFEITO. Por exemplo, considere o grafo G da Figura 4.19. É fácil vermos que $G \in \text{PERFEITO}$, pois G não possui

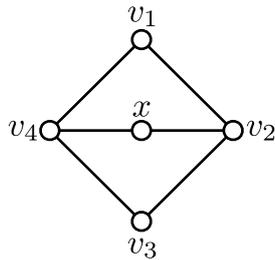


Figura 4.19: Um átomo perfeito que não é UEH.

buracos ímpares nem complementos destes, e que G é um átomo.

Por outro lado, como vimos na Seção 4.1, o ciclo C_4 possui uma representação UEH única, dada por uma torta como a da Figura 4.1. Assim, não existe uma representação UEH para G , pois não há como o caminho de x intersectar somente os caminhos de v_2 e v_4 na torta. Além disso, é fácil ver que qualquer subgrafo induzido próprio de G é um grafo UEH — temos $G \setminus v \simeq C_4$, para $v \in \{v_1, v_3, x\}$, e $G \setminus v \simeq K_{1,3} \in \text{UEH}$, para $v \in \{v_2, v_4\}$.

Logo, temos $G \in \text{Proib}^{-1}\text{DE} \setminus \text{Proib}^{-1}\text{PERFEITO}$, o que implica que não podemos utilizar o Teorema do Separador para encontrar todos os proibidos de DE — também precisamos utilizar o Teorema dos Átomos, como veremos na próxima seção.

4.6.2 Átomos proibidos de DE

Como vimos, os Teoremas dos Átomos de diversas classes de grafos de caminho também foram dados por Monma e Wei em [21].

Utilizamos o Teorema dos Átomos de UEH (p. 50) para determinar os átomos proibidos de DE da seguinte forma.

Seja $G \in \text{Proib}^{-1}\text{DE} \setminus \text{Proib}^{-1}\text{PERFEITO}$ um átomo. Logo, temos $G \in \text{PERFEITO}$, o que implica em $G \notin \text{UEH}$. Assim, pelo Teorema dos Átomos de UEH, G possui um vértice v que pertence a pelo menos três maxcliques, digamos A , B e C . Como estas maxcliques são distintas, existem $ab \in A$ e $ba \in B$ que não são adjacentes, e analogamente existem $ac \in A$ e $ca \in C$, além de $bc \in B$ e $cb \in C$, que não são adjacentes (dizemos que estes vértices são *testemunhas* de que estas maxcliques são distintas). Entretanto, como G é um átomo, nenhuma das maxcliques A , B , C é separadora — entre cada par de testemunhas que estão em maxcliques diferentes, existe um caminho disjunto da terceira maxclique.

Esta situação pode ser esboçada como na Figura 4.20.

Como G é um grafo *minimal* não UEH, estamos interessados em tomar o menor número possível de vértices em A , B e C que testemunhem que estas maxcliques

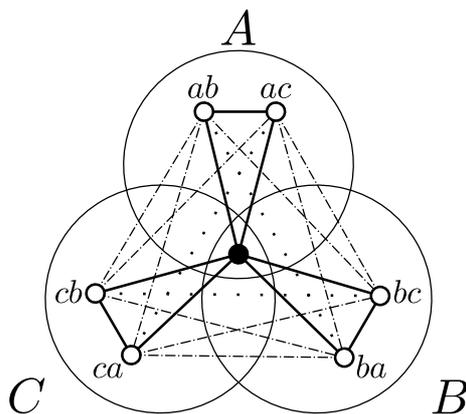


Figura 4.20: Esboço de um átomo não UEH. Linhas pontilhadas indicam ausências de arestas, enquanto linhas tracejadas-e-pontilhadas indicam a existências de caminhos (não necessariamente disjuntos entre si).

são distintas. Em outras palavras, se ab também não é vizinho de ca , por exemplo, então podemos tomar $ac = ab$.

Assim, podemos fazer uma análise de casos para determinar as maneiras possíveis em que isso pode ocorrer, como a seguir.

Caso 1. $ab = ac$, $ba = bc$ e $ca = cb$.

Neste caso, existem vértices $x_1, \dots, x_i \notin C$, $y_1, \dots, y_j \notin A$ e $z_1, \dots, z_k \notin B$, com $i, j, k \geq 1$, tais que

- $P_1 = ab, x_1, \dots, x_i, ba$, $P_2 = bc, y_1, \dots, y_j, cb$ e $P_3 = ca, z_1, \dots, z_k, ac$ são caminhos induzidos em G ;
- os vértices x_1, \dots, x_i podem ou não ser vizinhos de ca e/ou de $y_1, \dots, y_j, z_1, \dots, z_k$, desde que isto não crie um buraco ímpar, nem um complemento de buraco ímpar, em G (analogamente para y_1, \dots, y_j em relação a ab e/ou z_1, \dots, z_k , e para z_1, \dots, z_k em relação a bc); e
- os vértices $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j, z_1, \dots, z_k$ podem ou não ser vizinhos de v , desde que isto não crie um buraco ímpar, nem um complemento de buraco ímpar, em G .

Um esboço desta situação pode ser visto na Figura 4.21.

Observe que, fazendo $i = j = k = 1$, $v = v_2$, $ab = ac = v_1$, $ba = bc = v_3$, $ca = cb = x$ e $x_1 = y_1 = z_1 = v_4$, temos o grafo da Figura 4.19, que já sabíamos ser um átomo de $\text{Proib}^{-1}\text{DE} \setminus \text{Proib}^{-1}\text{PERFEITO}$.

Chamamos de *Família* P_{20} os grafos que atendem às condições deste caso.

Caso 2. $ab \neq ac$, $ba = bc$ e $ca = cb$.

Neste caso, como $ab \neq ac$, temos que ac e ba , e ab e ca , são adjacentes. Além disso, existem vértices $y_1, \dots, y_j \notin A$, com $j \geq 1$, tais que

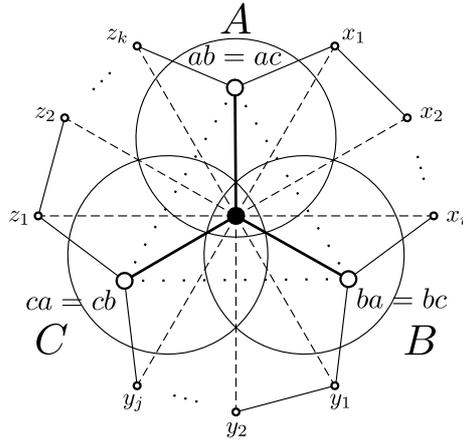


Figura 4.21: Caso 1. Linhas pontilhadas indicam ausências de arestas, enquanto linhas tracejadas indicam arestas opcionais (para permitir uma melhor visualização, não representamos todas estas).

- $P = bc, y_1, \dots, y_j, cb$ é um caminho induzido em G ; e
- os vértices y_1, \dots, y_j podem ou não ser vizinhos de v , ab e/ou ac , desde que isto não crie um buraco ímpar, nem um complemento de buraco ímpar, em G .

Um esboço desta situação pode ser visto na Figura 4.22.

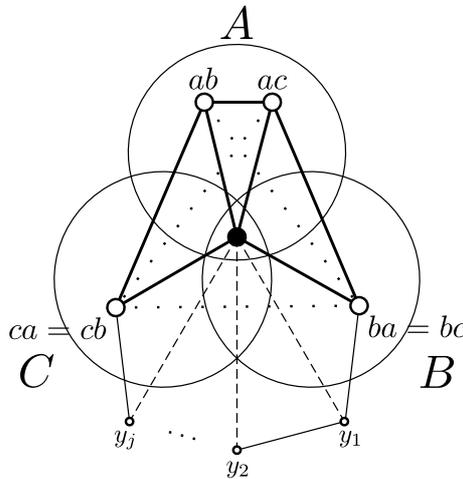


Figura 4.22: Caso 2. Linhas pontilhadas indicam ausências de arestas, enquanto linhas tracejadas indicam arestas opcionais (para permitir uma melhor visualização, não representamos todas estas).

Chamamos de *Família* P_{21} os grafos que atendem às condições deste caso.

Caso 3. $ab \neq ac$, $ba \neq bc$, $ac = bc$ e $ca = cb$.

Neste caso, como $ab \neq ac$ e $ba \neq bc$, temos que ab e ca , e ba e cb , são adjacentes. Além disso, como $ac = bc$, então este vértice está em ambas as maxcliques A e B .

Portanto, neste caso G é a roda W_4 , como podemos ver na Figura 4.23.

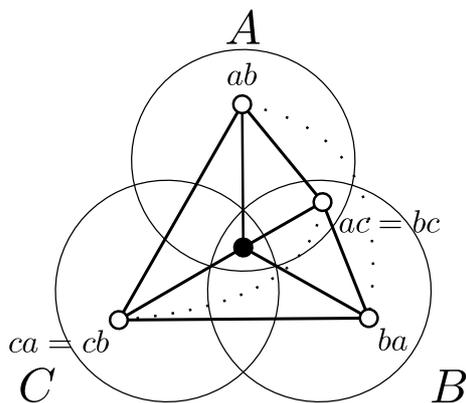


Figura 4.23: Caso 3. Linhas pontilhadas indicam ausências de arestas.

Lema 93. *Qualquer átomo não UEH que tenha testemunhas em configuração diferente das dadas nos casos 1, 2 e 3 contém a roda W_4 .*

Prova. Primeiro provaremos que se dentre os pares ab e ac , ba e bc , e ca e cb , existe mais de um que é formado por elementos distintos, então G contém a roda W_4 .

De fato, sem perda de generalidade suponha que dois de tais pares sejam $ab \neq ac$ e $ba \neq bc$ (não afirmamos nada quanto a igualdade entre ca e cb). Note que isto implica que ab é adjacente a ca , que ca é adjacente a ba , e que ba é adjacente a ac . Além disso, por definição, temos que ab não é adjacente a ba , nem ac a ca . Assim, em ambos os casos $ca = cb$ e $ca \neq cb$, temos que $\{ab, ca, ba, ac, v\}$ induz a roda W_4 em G (veja a Figura 4.24)

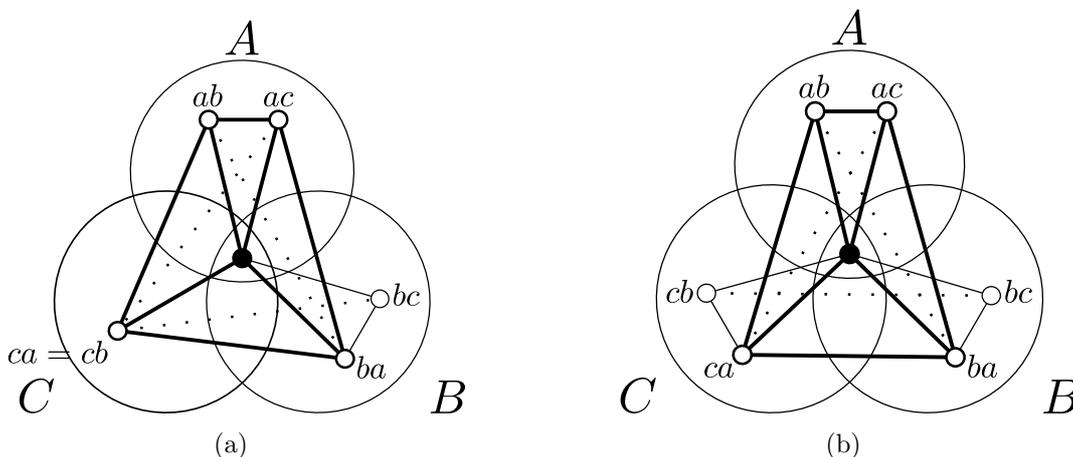


Figura 4.24: Os dois casos possíveis do Lema 93.

Agora, note que as outras configurações concebíveis seriam aquelas em que mais de uma testemunha estaria nas interseções entre as maxcliques. Entretanto, uma testemunha estar na interseção de A e B implica em $ac = bc$ (como no caso 3, acima). Assim, uma outra testemunha estar na interseção de A e C implica que

$ab = cb$, donde bc e cb estão ambos na maxclique A , contradizendo a definição de tais testemunhas (analogamente para uma testemunha na interseção de B e C). ■

Acabamos de provar o seguinte resultado.

Teorema 94. *Os átomos em $\text{Proib}^{-1}\text{DE} \setminus \text{Proib}^{-1}\text{PERFEITO}$ são W_4 mais os grafos pertencentes às famílias P_{20} e P_{21} .*

Um comentário sobre os grafos separáveis proibidos de DE

Como vimos na Seção 4.4, para utilizarmos o Teorema do Separador na determinação dos subgrafos proibidos de uma classe de grafos de caminho, precisamos — pelo menos de um ponto de vista prático — primeiramente obter uma boa caracterização da antipodalidade de subgrafos separados de um grafo proibido desta classe. Para tal, geralmente utilizamos a classificação dada na Definição 77 (p. 55), e tentamos limitar os tipos possíveis que tais antipodalidades devem satisfazer.

Entretanto, para a classe DE, os tipos de antipodalidade dados na Definição 77 não se mostram úteis neste sentido — os grafos separáveis em $\text{Proib}^{-1}\text{DE}$ são grafos perfeitos, e grafos separados de um grafo perfeito podem ter antipodalidade de cada um dos tipos dados naquela definição (veja a Figura 4.25).

Desta forma, precisamos encontrar uma caracterização melhor para a antipodalidade de grafos separados de um grafo perfeito, o que não fomos capazes de fazer até o momento.

4.7 Novos subgrafos proibidos para $\text{UE} \cap \text{CORDAL}$

Por conveniência, daqui em diante denotaremos a classe $\text{UE} \cap \text{CORDAL}$ por UEC.

Como vimos no Lema 71 (p. 50), todo átomo cordal é um grafo UEH, e portanto também é um grafo UE. Assim, pelo mesmo raciocínio já usado outras vezes, temos o seguinte.

Lema 95. *Os grafos em $\text{Proib}^{-1}\text{UEC} \setminus \text{Proib}^{-1}\text{CORDAL}$ são grafos cordais e separáveis.*

A classe UEC é um dos poucos exemplos conhecidos em Teoria dos Grafos de classes que possuem reconhecimento NP-difícil [3, 31] (como consequência, UE é outro destes exemplos). Assim, é intuitivo esperar-se que o conjunto $\text{Proib}^{-1}\text{UEC}$ seja *intrinsecamente complexo* de alguma forma, já que não pode existir nenhuma maneira eficiente de se concluir que $H \not\leq G$ para todo $H \in \text{Proib}^{-1}\text{UEC}$, a não ser que $P = NP$.

Note que este fato não tem a ver simplesmente com o tamanho do conjunto $\text{Proib}^{-1}\text{UEC}$, pois (por exemplo) o conjunto $\text{Proib}^{-1}\text{CORDAL}$ é infinito, mas o reconhecimento de CORDAL é linear [27]. Entretanto, como são poucos os exemplos de

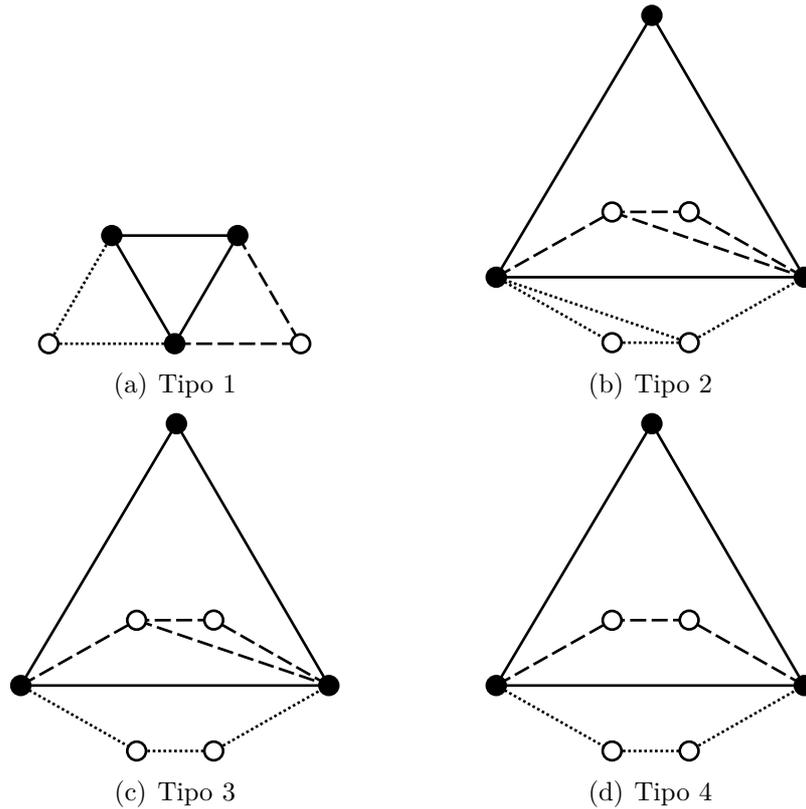


Figura 4.25: Grafos perfeitos cujos grafos separados têm antipodalidade de cada um dos tipos dados no Teorema 76. A maxclique separadora em questão é sempre representada por vértices pretos, e estilos diferentes de traço são usados apenas para facilitar a visualização.

classes de grafos com reconhecimento NP-difícil, e como (até onde sabemos) nenhuma destas possui uma caracterização por proibição conhecida, nós não temos nenhuma pista de qual é a complexidade intrínseca que tais conjuntos proibidores devem possuir.

Nosso primeiro resultado a respeito de $\text{Proib}^{-1}\text{UEC}$ é que a lista de proibidos de UEC *engloba* toda a lista de proibidos de UV.

Lema 96. $\text{Proib}^{-1}\text{UV} \subset \text{Proib}^{-1}\text{UEC}$.

Prova. Como vimos na Seção 4.1, temos $\text{UEC} = \text{UE} \cap \text{UV}$. Portanto, imediatamente temos $\text{Proib}^{-1}\text{UV} \subset \overline{\text{UEC}}$. Precisamos agora mostrar que cada $G \in \text{Proib}^{-1}\text{UV}$ é um grafo *minimal* não UEC.

Assim, seja $G' = G \setminus v$ para algum $v \in V(G)$. Vamos mostrar que $G' \in \text{UEC}$.

Se G é um dos grafos $P_1, P_2, P_5 - P_8$ ou P_{10} , ou se pertence a alguma das famílias $P_{11} - P_{13}, P_{15}, P_{18}$ ou P_{19} , então pela caracterização de DV por proibição, temos que $G' \in \text{DV} = \text{UEH} \cap \text{CORDAL} \subseteq \text{UEC}$.

Desta forma, restam ser provados os casos em que G é um dos grafos P_4 ou P_9 , ou pertence a alguma das famílias P_{14}, P_{16} ou P_{17} . Como alguns destes casos são

bastante semelhantes, faremos apenas alguns mais representativos.

Seja C a maxclique separadora de G denotada pelos vértices pretos da figura correspondente, dentre as Figuras 4.3 (p. 62) a 4.17 (p. 68).

Caso 1. G é o grafo P_4 .

1. Se $v \in \{a, b, c\}$, então C separa G' em dois subgrafos que são UEC pois são átomos cordais. Além disso, $\mathcal{A}(G', C)$ atende à condição do Teorema do Separador, pois só possui 2 vértices. Portanto $G' \in \text{UEC}$.
2. Se $v \in \{s_1, s_2, s_3\}$, então G' possui uma única maxclique separadora $C' = C \cup \{u\}$, para algum $u \in \{a, b, c\}$. Neste caso C' separa G' em dois subgrafos que são átomos cordais, logo analogamente ao caso acima temos $G' \in \text{UEC}$.
3. Finalmente, se $v = s_4$, então G' é o grafo de Hajós. Neste caso, C separa G' em 3 subgrafos UEC, pois são átomos cordais. Além disso, $\mathcal{A}(G', C)$ é 3-colorível trivialmente, e cada $v \in C$ é vizinho a exatamente dois subgrafos separados de G' por C . Portanto, pelo Teorema do Separador, temos $G' \in \text{UEC}$.

Caso 2. G é o grafo P_9 .

1. Se $v = a$ (resp. $v = b$), então $\mathcal{A}(G', C)$ possui apenas dois vértices, e portanto cumpre a condição do Teorema do Separador. Além disso o subgrafo separado G_1 de G' por C que contém b (resp. a) é UEC pois é um átomo cordal. Já o subgrafo G_2 que contém c não é um átomo cordal, pois pode ser separado pela maxclique $\{c_1, s_1, s_3, s_4\}$, resultando em dois átomos cordais, donde $G_2 \in \text{UEC}$ pelo mesmo raciocínio usado no Caso 1, item 1, acima. Portanto $G' \in \text{UEC}$.
2. Se $v \in \{c_1, c_2\}$, então C separa G' em 3 subgrafos UEC, pois são átomos cordais. Além disso, não é difícil vermos que $\mathcal{A}(G', C) \simeq P_3$, que satisfaz a condição do Teorema do Separador pois é 2-colorível. Portanto $G' \in \text{UEC}$.
3. Se $v = s_1$, então sendo $C' = C \setminus v$, temos que $\mathcal{A}(G, C')$ é formado por 3 vértices e apenas 1 aresta, já que o subgrafo separado G_a que contém a não é antipodal a nenhum outro, e portanto $\mathcal{A}(G, C')$ atende à condição do Teorema do Separador. Além disso, os subgrafos separados de G' por C' são UEC pois são átomos cordais. Portanto $G' \in \text{UEC}$.
4. Se $v = s_2$, então $C \setminus v$ deixa de ser uma maxclique separadora de G' . A maxclique $C' = \{c_1, s_1, s_3, s_4\}$ separa G' em 3 subgrafos que são UEC pois são átomos cordais. Além disso, temos que $\mathcal{A}(G', C') \simeq K_3$ é 3-colorível, e que cada vértice de C' é vizinho a exatamente 2 subgrafos separados de G' por C' . Portanto $G' \in \text{UEC}$.
5. Se $v = s_3$, então $C \setminus v$ deixa de ser uma maxclique separadora de G' . A maxclique $C' = \{b, s_1, s_2, s_4\}$ separa G' em dois subgrafos, logo $\mathcal{A}(G', C')$

atende à condição do Teorema do Separador. O subgrafo separado que contém a é UEC pois é um átomo cordal. Já o subgrafo G_c que contém c_2 não é um átomo cordal, pois pode ser separado pela maxclique $\{c_1, s, s_4\}$, resultando em dois átomos cordais, donde $G_c \in \text{UEC}$ pelo mesmo raciocínio usado no Caso 1, item 1, acima. Portanto $G' \in \text{UEC}$.

6. Finalmente, se $v = s_4$, então não é difícil vermos que $\mathcal{A}(G', C) \simeq P_3$, e portanto satisfaz a condição do Teorema do Separador. Além disso, os subgrafos separados G_a e G_b que contêm a e b , respectivamente, são UEC pois são átomos cordais. Já o subgrafo G_c que contém c_1 e c_2 não é um átomo cordal, pois pode ser separado pela maxclique $\{c_1, s, s_3\}$, resultando em dois átomos cordais, donde $G_c \in \text{UEC}$ pelo mesmo raciocínio usado no Caso 1, item 1, acima. Portanto $G' \in \text{UEC}$.

Caso 3. G pertence a alguma das famílias P_{14} , P_{16} ou P_{17} .

Faremos o caso $G \in P_{14}$. O grafo $\mathcal{A}(G, C)$ pode ser visto na Figura 4.26(a).

1. Se $v = x$, então cada grafo separado de G' por C é UEC pois é um átomo cordal. Além disso, $\mathcal{A}(G', C)$ é um ciclo par, que claramente atende à condição do Teorema do Separador pois é 2-colorível. Portanto $G' \in \text{UEC}$.
2. Se $v = v_i \in \{v_1, \dots, v_{2k-2}\}$, então cada grafo separado de G' por C é UEC pois é um átomo cordal. Além disso, $\mathcal{A}(G', C)$ é obtido de $\mathcal{A}(G, C)$ pela remoção do vértice G_{v_i} , como pode ser visto na Figura 4.26(b).

Considere a seguinte 3-coloração de $\mathcal{A}(G', C)$: primeiramente, dê a cor 1 a G_x , a cor 2 a $G_{v_{2k}}$, e a cor 3 a $G_{v_{2k-1}}$. Agora, dê as cores 1 e 2, alternadamente, para os vértices do caminho

$$P_1 = G_x, G_{v_{2k}}, G_{v_1}, \dots, G_{v_{i-1}},$$

e as cores 1 e 3, alternadamente, para os vértices do caminho

$$P_2 = G_x, G_{v_{2k-1}}, G_{v_{2k-2}}, \dots, G_{v_{i+1}}.$$

Nesta 3-coloração, os subgrafos vizinhos de cada $u \in C$ estão 2-coloridos, pois cada um destes conjuntos de subgrafos vizinhos induz um subgrafo de P_1 ou de P_2 .

Portanto $G' \in \text{UEC}$.

3. Se $v \in \{v_{2k-1}, v_{2k}\}$, então cada grafo separado de G' por C é UEC pois é um átomo cordal. Além disso, neste caso $\mathcal{A}(G', C)$ é um caminho, como pode ser visto na Figura 4.26(c), logo é 2-colorível. Portanto $G \in \text{UEC}$.

4. Se $v \in \{s_1, s_{2k-1}\}$, então cada grafo separado de G' por C é UEC pois é um átomo cordal. Com a retirada de s_1 , G_{v_1} deixa de ser antipodal a G_{v_2} e também a $G_{v_{2k}}$, e $G_{v_{2k}}$ deixa de ser antipodal a $G_{v_{2k-1}}$. Com isso, $\mathcal{A}(G', C)$ é o grafo 2-colorível da Figura 4.26(d). Portanto $G \in \text{UEC}$.
5. Se $v \in \{s_2, \dots, s_{2k-2}\}$, então cada grafo separado de G' por C é UEC pois é um átomo cordal. Neste caso $\mathcal{A}(G', C)$ é o grafo da Figura 4.26(e). Por um raciocínio inteiramente análogo ao feito no item 2 acima, temos $G \in \text{UEC}$.
6. Finalmente, se $v = s_{2k}$, $C \setminus v$ não é uma maxclique de G' . Neste caso, a maxclique $C' = \{x, s_1, \dots, s_{2k-1}\}$ separa G' em subgrafos que são UEC, pois são átomos cordais. Além disso, neste caso $\mathcal{A}(G', C)$ é o grafo 2-colorível da Figura 4.26(f). Portanto $G \in \text{UEC}$. ■

Assim, podemos particionar $\text{Proib}^{-1}\text{UEC}$, de maneira a melhor isolar quais são as *partes* que ainda precisam ser determinadas, como fazemos na Figura 4.27.

Assim, temos

$$\begin{aligned} X_1 &= (\text{Proib}^{-1}\text{UEC}) \cap \text{UV}, \text{ e} \\ X_2 &= (\text{Proib}^{-1}\text{UEC}) \cap \overline{\text{UV}}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 96 (p. 76), temos imediatamente $X_2 = \text{Proib}^{-1}\text{UV}$.

Para auxiliar a determinação de X_1 , podemos particioná-lo em

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{G \in X_1 : \exists C \in \mathcal{C}(G) \text{ tal que } \mathcal{A}(G, C) \text{ é 3-colorível}\}, \text{ e} \\ Y_2 &= X_1 \setminus Y_1. \end{aligned}$$

Por definição, temos $G \in Y_1$ se, e somente se:

1. G é separável por uma maxclique C , de maneira que $\mathcal{A}(G, C)$ é 3-colorível;
2. $G \in \text{Proib}^{-1}\text{UEC}$, i.e., para toda 3-coloração de $\mathcal{A}(G, C)$, os subgrafos vizinhos de algum $v \in C$ não estão 2-coloridos; e
3. $G \in \text{UV}$, i.e., existe uma k -coloração de $\mathcal{A}(G, C)$ na qual os subgrafos vizinhos de cada $v \in C$ estão 2-coloridos.

Entretanto, ainda não encontramos nenhum grafo que satisfaça a todas essas condições.

Sabemos que um dos exemplos que buscamos é um grafo G , separado por uma maxclique C , que possua o grafo dos antipodais dado na Figura 4.28(a), de maneira que apenas um vértice $v \in C$ seja vizinho a mais de dois subgrafos separados (os subgrafos vizinhos de v são indicados por uma linha pontilhada na figura) — de fato, $\mathcal{A}(G, C)$ possui uma *única* 3-coloração (a menos de renomeamentos das cores),

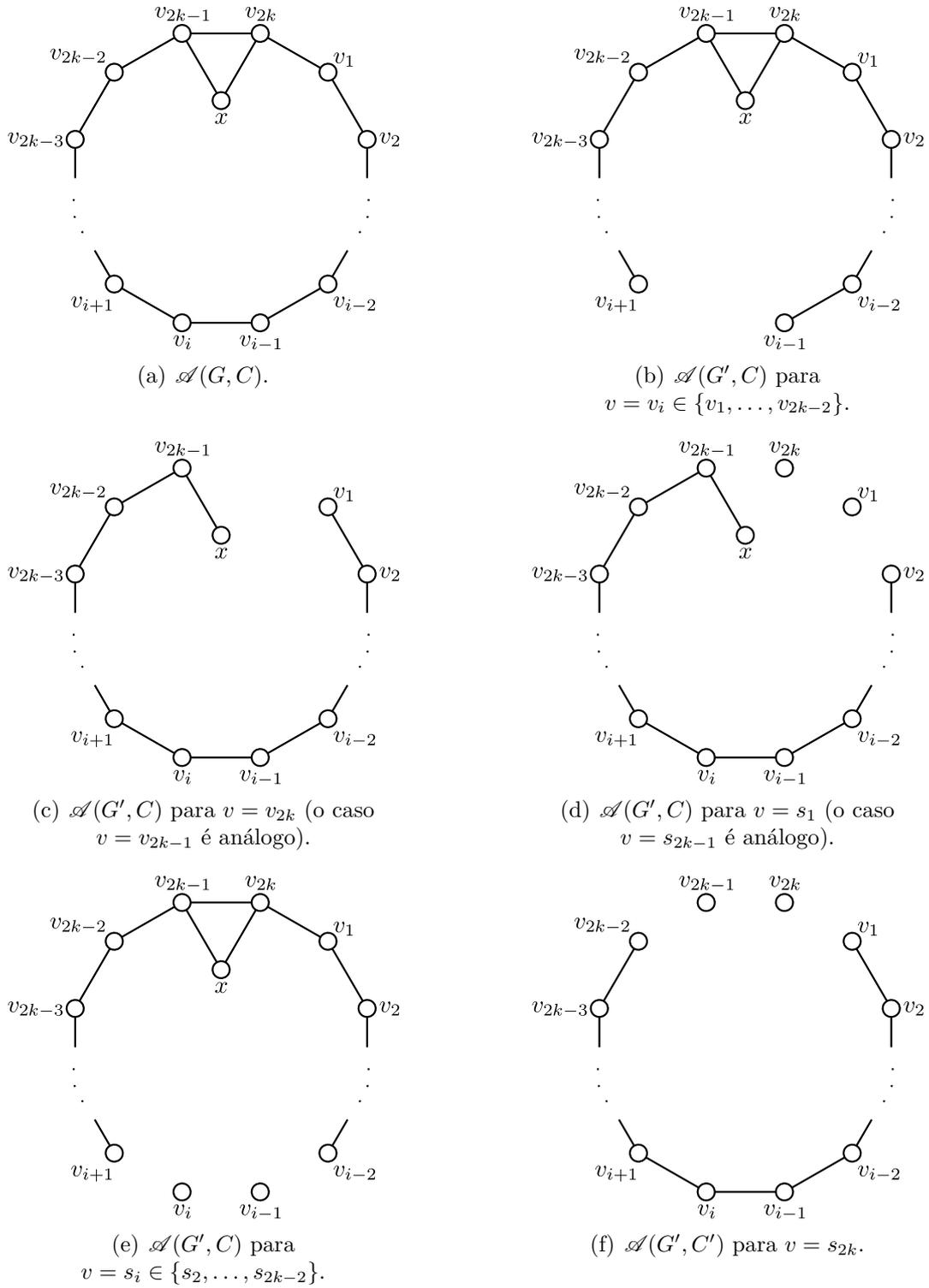


Figura 4.26: As diversas possibilidades do Caso 3. Cada subgrafo separado G_u é identificado com u para facilitar a visualização.

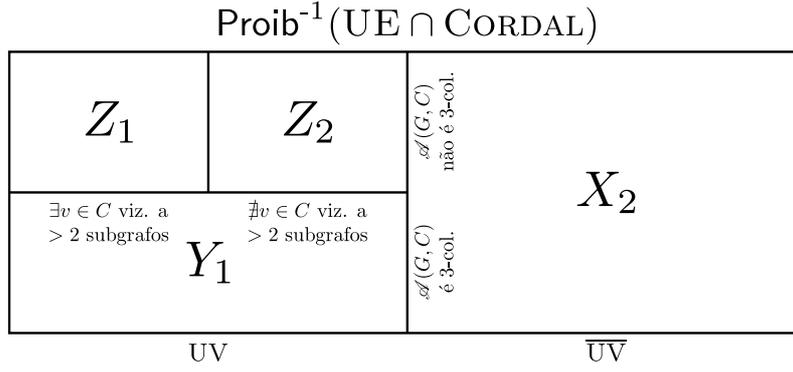


Figura 4.27: Partição dos proibidos de UEC.

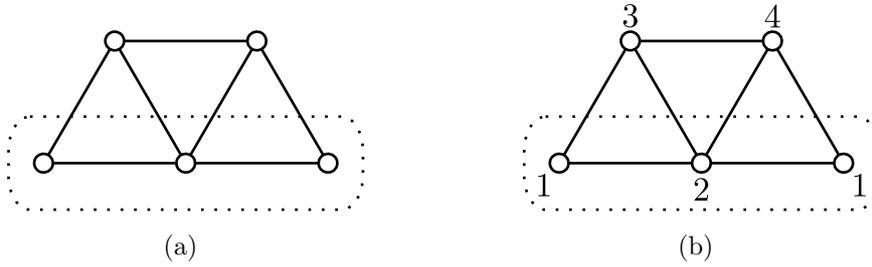


Figura 4.28: Um exemplo do grafo dos antipodais de um grafo $G \in Y_1$, (a), e uma 4-coloração deste que respeita a condição do Teorema do Separador de UV, (b).

na qual o conjunto indicado utiliza 3 cores, como é imediato verificar, mas na 4-coloração dada na Figura 4.28(b), o conjunto indicado está 2-colorido.

Todavia, também não encontramos tal grafo G , nem conseguimos provar a sua inexistência.

Por sua vez, Y_2 pode ser particionado em

$$Z_1 = \{G \in Y_2 : \exists C \in \mathcal{C}(G) \text{ e } \exists v \in C \text{ tais que } v \text{ é vizinho a mais de 2 subgrafos separados de } G \text{ por } C\}, \text{ e}$$

$$Z_2 = Y_2 \setminus Z_1.$$

Por definição, temos $G \in Z_1$ se, e somente se:

1. G é separável por uma maxclique C , de maneira que $\mathcal{A}(G, C)$ não é 3-colorível;
2. $G \in \text{Proib}^{-1}\text{UEC}$, i.e., G não atende à propriedade do Teorema do Separador para UEC (consequência imediata de (1) acima), mas qualquer subgrafo induzido próprio de G o faz;
3. $G \in UV$, i.e., existe uma k -coloração de $\mathcal{A}(G, C)$ na qual os subgrafos vizinhos de cada $v \in C$ estão 2-coloridos.

Também neste caso, ainda não fomos capazes de encontrar nenhum grafo que satisfaça a todas essas condições.

Para os resultados relativos a Z_2 , precisamos do seguinte conceito.

Definição 97 (Grafo k -crítico). Um grafo G é k -crítico quando

1. $\chi(G) = k$; e
2. Se $H \subset G$, então $\chi(H) < k$.

Denotamos por k -CRÍTICO a classe de todos os grafos que são k -críticos.

O seguinte resultado é uma consequência direta da definição de grafo k -crítico, e sua prova pode ser encontrada em qualquer livro introdutório de Teoria dos Grafos (por exemplo, [2]).

Teorema 98. *Todo grafo k -crítico tem grau mínimo maior ou igual a $k - 1$. Além disso, todo grafo que não é k -colorível contém um subgrafo $(k + 1)$ -crítico.*

Note que este teorema tem a seguinte consequência simples, porém interessante do ponto de vista das caracterizações por proibição.

Corolário 99. k -COLORÍVEL = $\text{Proib}_{\subseteq}[(k + 1)\text{-CRÍTICO}]$.

Prova. (\subseteq) Se G é k -colorível, então todo subgrafo de G também o é. Portanto G não contém nenhum subgrafo $(k + 1)$ -cromático, donde $G \in \text{Proib}_{\subseteq}[(k + 1)\text{-CRÍTICO}]$. (\supseteq) Se $G \in \text{Proib}_{\subseteq}[(k + 1)\text{-CRÍTICO}]$, então G não possui nenhum subgrafo $(k + 1)$ -crítico. Portanto, pela contrapositiva do Teorema 98, temos $G \in k$ -COLORÍVEL. ■

O próximo resultado é a *raison d'être* da construção apresentada na Seção 4.4.1.

Teorema 100. $Z_2 = \text{constr}(4\text{-CRÍTICO})$.

Como consequência, como sabemos que $K_4 \in 4\text{-CRÍTICO}$, temos que o grafo $\text{constr}(K_4)$ dado na Figura 4.2 (p. 56) é um grafo proibido de UEC, por exemplo. Um outro exemplo de grafo proibido é $\text{constr}(M_4)$, ilustrado na Figura 4.29, onde M_4 é o grafo 4-crítico dado pela construção de Mycielski [2].

O restante desta seção será dedicado à prova do Teorema 100.

Lema 101. *Os grafos em Z_2 são SPLIT.*

Prova. Por definição, um grafo $G \in Z_2$ é um grafo UV (e portanto também COR-DAL), e tal que (dentre outras propriedades) $\mathcal{A}(G, C)$ não é 3-colorível, e cada $v \in C$ é vizinho a no máximo 2 subgrafos separados de G por C . Note que, neste caso, em qualquer coloração de $\mathcal{A}(G, C)$ os subgrafos vizinhos de cada $v \in C$ estão 2-coloridos trivialmente (pois cada uma destas vizinhanças tem tamanho máximo 2). Portanto, como G é um proibido de UEC, temos que $\mathcal{A}(G, C)$ é um grafo *minimal*

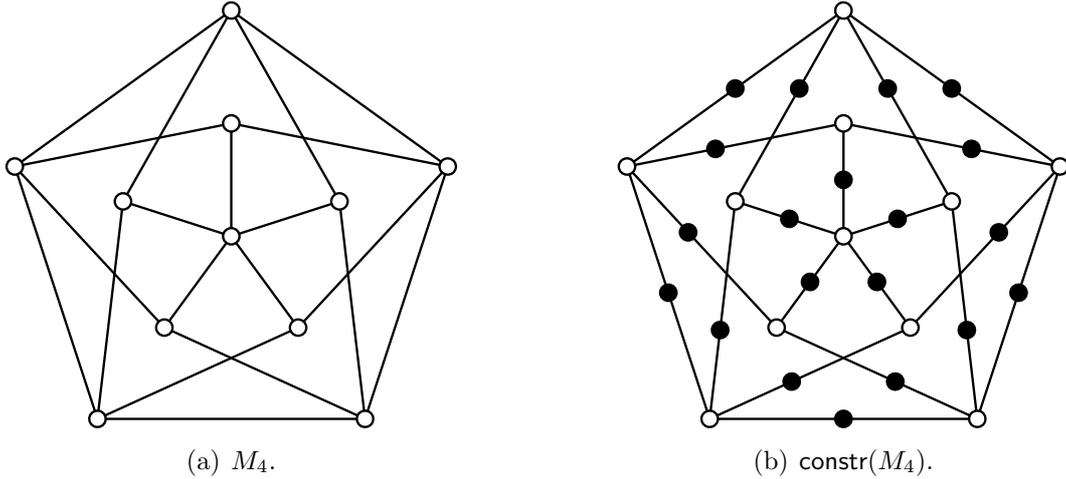


Figura 4.29: Novamente, os vértices pretos formam uma clique, com arestas omitidas para facilitar a visualização.

(no sentido de subgrafo induzido) não 3-colorível, o que implica que cada vértice de $\mathcal{A}(G, C)$ possui grau pelo menos 3.

Como $G \in \text{CORDAL}$, pelo Lema 86 (p. 61) temos que cada grafo separado G_i de G por C possui uma maxclique principal C_i . Observe que $G_i \leftrightarrow G_j$ implica em $W(G_i) \cap W(G_j) \neq \emptyset$ (lembramos que $W(G_i)$ e $W(G_j)$ foram definidos na Seção 4.5.2).

Afirmção. $G_i \leftrightarrow G_j$ implica que $C_i \leftrightarrow C_j$.

De fato, como cada $v \in C$ é vizinho a no máximo 2 subgrafos separados de G por C , temos que $G_i \leftrightarrow G_j$ implica que $W(G_i)$ e $W(G_j)$ possuem interseção não vazia, mas são incomparáveis — em caso contrário, se tivéssemos $W(G_i) \subseteq W(G_j)$, como o grau mínimo de $\mathcal{A}(G, C)$ é pelo menos 3, isto significa que existe G_k tal que $G_i \leftrightarrow G_k$, e portanto $W(G_i) \cap W(G_j) \cap W(G_k) \neq \emptyset$, uma contradição pois qualquer vértice nesta interseção é vizinho a pelo menos G_i, G_j e G_k .

Portanto temos que $W(G_i)$ e $W(G_j)$ são incomparáveis, o que implica em $C_i \leftrightarrow C_j$.

Assim, como G é um grafo *minimal* não UEC, cada conjunto $V(G_i) \setminus C$ possui exatamente um vértice (pois qualquer outro vértice neste conjunto seria *supérfluo*), i.e., $G \in \text{SPLIT}$. ■

Lema 102. *Seja $G \in \text{SPLIT}$ um grafo separável por sua maxclique central C , e tal que cada $v \in C$ é vizinho a no máximo 2 subgrafos separados de G por C . Então, se o grau mínimo de $\mathcal{A}(G, C)$ é pelo menos 3, temos que para qualquer $H \subset \mathcal{A}(G, C)$, existem $G' < G$ e uma maxclique separadora C' de G' , tais que*

$$\mathcal{A}(G', C') = H.$$

Prova. Vamos provar que para todo $x \in V(\mathcal{A}(G, C)) \cup E(\mathcal{A}(G, C))$, existem $G' < G$ e uma maxclique separadora C' de G' tais que $\mathcal{A}(G', C') = \mathcal{A}(G, C) \setminus x$. Como qualquer $H \subset \mathcal{A}(G, C)$ pode ser obtido de $\mathcal{A}(G, C)$ por uma seqüência de remoções deste tipo, isto basta.

Como $G \in \text{SPLIT}$, podemos assumir que

$$V(\mathcal{A}(G, C)) = \{G_v : v \in V(G) \setminus C\}.$$

Assim, se $x = G_v \in V(\mathcal{A}(G, C))$, então seja $G' = G \setminus (V(G_v) \setminus C)$. Como $\mathcal{A}(G, C)$ possui pelo menos 4 vértices (pois tem grau mínimo pelo menos 3), claramente C' separa G' . Além disso, é imediato vermos que $\mathcal{A}(G', C') = \mathcal{A}(G, C) \setminus x$.

Por outro lado, se $x = G_u G_v \in E(\mathcal{A}(G, C))$, então sejam $X = \{c \in C : uc, vc \in E(G)\}$, $G' = G \setminus X$ e $C' = C \setminus X$. Observe que, como cada $v \in C$ é vizinho a no máximo 2 subgrafos separados de G por C , temos que os elementos de X não possuem outros vizinhos fora de C .

Afirmção. C' é uma maxclique separadora de G' .

Novamente, como $\mathcal{A}(G, C)$ possui pelo menos 4 vértices, temos imediatamente que C' separa G' . Para ver que C' é uma maxclique de G' , seja $w \in V(G') \setminus C'$. Vamos mostrar que existe $c \in C'$ tal que $wc \notin E(G')$.

Como o grau mínimo de $\mathcal{A}(G, C)$ é pelo menos 3, existem $w', w'' \in V(G') \setminus C'$ tais que $G_w \leftrightarrow G_{w'}$ e $G_{w'} \leftrightarrow G_{w''}$, com $w'' \neq w$. Portanto, existe $c \in C'$ tal que $w'c, w''c \in E(G)$, e como c só tem vizinho em no máximo dois subgrafos separados de G' por C' , temos $wc \notin E(G')$.

Além disso, para vértices $w_1, w_2 \in V(G') \setminus C'$, distintos de u e v , temos $N_G(w_1) = N_{G'}(w_1)$ e $N_G(w_2) = N_{G'}(w_2)$, o que implica que $G_{w_1} G_{w_2} \in E(\mathcal{A}(G', C'))$ sse $G_{w_1} G_{w_2} \in E(\mathcal{A}(G, C) \setminus x)$. Como os subgrafos separados G_u e G_v de G' por C' não são antipodais, isto conclui a prova. ■

Corolário 103. Se $G \in Z_2$, então $\mathcal{A}(G, C) \in 4\text{-CRÍTICO}$.

Prova. Se $G \in Z_2$, então pelo Lema 101 temos $G \in \text{SPLIT}$. Portanto, como G é separável, temos que a maxclique central C de G é separadora, e pela definição de Z_2 , cada $v \in C$ é vizinho a no máximo 2 subgrafos separados de G por C .

Desta forma, como $G \in \text{Proib}^1\text{UEC}$, pelo Teorema do Separador temos que $\mathcal{A}(G, C)$ é um grafo minimal (no sentido de subgrafo induzido) não 3-colorível. Note que isto implica que o grau mínimo de $\mathcal{A}(G, C)$ é pelo menos 3. Logo, pelo Teorema 98 (p. 82), existe $H \subseteq \mathcal{A}(G, C)$ tal que $H \in 4\text{-CRÍTICO}$.

Assim, suponha, para uma contradição, que $H \neq \mathcal{A}(G, C)$. Pelo Lema 102, existem $G' \subset G$ e uma maxclique separadora C' de G' tais que $\mathcal{A}(G', C') = H$. Portanto $G' \notin \text{UEC}$, contradizendo a minimalidade de G .

Logo temos $\mathcal{A}(G, C) = H$, o que completa a prova. ■

Lema 104. *Seja $G \in \text{SPLIT}$ um grafo separável por sua maxclique central C , tal que cada $v \in C$ é vizinho a 1 ou 2 subgrafos separados de G por C , e tal que $\mathcal{A}(G, C)$ é conexo. Então*

$$G \simeq \text{constr}(\mathcal{A}(G, C)).$$

Prova. Por conveniência, seja $H = \mathcal{A}(G, C)$.

Como $G \in \text{SPLIT}$, podemos assumir que

$$V(H) = \{G_v : v \in V(G) \setminus C\}.$$

Seja $\phi : V(G) \rightarrow V(\text{constr}(H))$ dada por

$$\phi(v) = \begin{cases} G_v, & \text{se } v \notin C \\ G_u G_w, & \text{se } v \in C, \text{ e } u, w \notin C \text{ são vizinhos de } v \\ G'_u, & \text{se } v \in C, \text{ e } u \text{ é o único vizinho de } v \text{ fora de } C. \end{cases}$$

Não é difícil vermos que ϕ é uma bijeção.

Suponha que $uv \in E(G)$. Claramente, se $u, v \in C$, então pela definição de ϕ , e pela construção, temos $\phi(u)\phi(v) \in E(\text{constr}(H))$. Portanto, suponha que este não seja o caso. Sem perda de generalidade, isto implica em $u \notin C$ e $v \in C$.

Se u é o único vizinho de v fora de C , então temos $\phi(v) = G'_u$, que é adjacente a $\phi(u) = G_u$ em $\text{constr}(H)$, por construção.

Por outro lado, se v possui um outro vizinho w fora de C , então consideramos dois casos. Se $G_u \leftrightarrow G_w$, então $\phi(v) = G_u G_w$ é adjacente a $\phi(u) = G_u$ em $\text{constr}(H)$, por construção. Caso contrário, se $G_u \not\leftrightarrow G_w$, então v é o único vizinho de u em G . Assim, G_u é um vértice isolado de H , contradizendo a conexidade deste grafo.

Desta forma, mostramos que $uv \in E(G) \Rightarrow \phi(u)\phi(v) \in E(\text{constr}(H))$.

Suponha agora que $\phi(u)\phi(v) \in E(\text{constr}(H))$, e seja C_H a maxclique de $\text{constr}(H)$ formada pelos vértices provenientes de arestas e vértices de grau menor ou igual a 1 de H , na construção. Claramente, se $\phi(u), \phi(v) \in C_H$, então pela definição de ϕ temos $u, v \in C$, o que implica em $uv \in E(G)$. Portanto, suponha que este não seja o caso. Novamente, sem perda de generalidade, isto implica em $\phi(u) \notin C_H$ e $\phi(v) \in C_H$, onde C_H é a maxclique central de $\text{constr}(H)$.

Se G_u tem grau menor ou igual a 1 em H , então por construção temos $\phi(v) = G'_u$, donde pela definição de ϕ temos que $v \in C$, e que u é o único vizinho de v fora de C . Em particular, neste caso temos $uv \in E(G)$.

Caso contrário, se G_u tem grau maior que 1 em H , então temos que $\phi(v) = G_u G_w$ para algum $G_w \in V(H)$. Logo, pela definição de ϕ , temos que $v \in C$, e que v é vizinho a $u, w \notin C$. Em particular, temos $uv \in E(G)$. ■

Estamos prontos para a principal prova desta seção.

Prova do Teorema 100. (\subseteq) Seja $G \in Z_2$.

Pelo Lema 101 (p. 82) temos $G \in \text{SPLIT}$. Além disso, pela minimalidade de G , temos que todo vértice da maxclique central C de G possui algum vizinho fora de C , e que $\mathcal{A}(G, C)$ é conexo. Portanto, pelo Lema 104, temos $G \simeq \text{constr}(\mathcal{A}(G, C))$. Assim, pelo Corolário 103 (p. 84), temos $G \in \text{constr}(4\text{-CRÍTICO})$.

(\supseteq) Seja $G \in \text{constr}(4\text{-CRÍTICO})$.

É imediato vermos que $G \notin \text{UEC}$, pois $\mathcal{A}(G, C)$ não é 3-colorível.

Afirmção. $G \in \text{Proib}^1\text{UEC}$.

De fato, sejam $v \in V(G)$ e $G' = G \setminus v$.

Se $v \notin C$, onde C é a maxclique central de G , então $\mathcal{A}(G', C) = \mathcal{A}(G, C) \setminus G_v$. Portanto, como $\mathcal{A}(G, C)$ é 4-crítico, temos que $\mathcal{A}(G', C)$ é 3-colorível. Além disso, cada grafo separado de G' por C é UEC pois é um átomo cordal. Assim, como cada $v \in C$ é vizinho a no máximo 2 subgrafos separados de G' por C , temos $G \in \text{UEC}$ pelo Teorema do Separador.

Se $v \in C$, então como $G = \text{constr}(H)$ para algum $H \in 4\text{-CRÍTICO}$, e como o grau mínimo de um grafo 4-crítico é pelo menos 3, então por construção v é o único vizinho comum de algum par $u, w \notin C$, tal que $G_u \leftrightarrow G_w$. Desta forma, em G' temos que u e w não possuem nenhum vizinho em comum, o que implica $G_u \not\leftrightarrow G_w$. Além disso, $C \setminus v$ é uma maxclique separadora de G' . Logo $\mathcal{A}(G', C)$ é obtido de $\mathcal{A}(G, C)$ pela remoção de uma aresta, e portanto $\mathcal{A}(G', C)$ é 3-colorível. Assim, por um raciocínio análogo ao feito no parágrafo acima, temos $G \in \text{UEC}$.

Portanto, por construção, temos:

- $G \in \text{UV}$;
- $\mathcal{A}(G, C)$ não é 3-colorível; e
- Cada $v \in C$ é vizinho a no máximo 2 subgrafos separados de G por C .

Logo $G \in Z_2$. ■

Note que o Teorema 100 acarreta a seguinte caracterização da classe 4-CRÍTICO.

Corolário 105. $G \in 4\text{-CRÍTICO}$ se, e somente se, $\text{constr}(G) \in Z_2$.

Prova. De fato, se $G \in 4\text{-CRÍTICO}$, então pelo Teorema 100 temos $\text{constr}(G) \in Z_2$.

Por outro lado, se $\text{constr}(G) \in Z_2$, então novamente pelo Teorema 100, existe $H \in 4\text{-CRÍTICO}$ tal que $\text{constr}(G) \simeq \text{constr}(H)$. Portanto, pelo Teorema 80 (p. 58), temos $G \simeq H$. ■

Podemos resumir os resultados apresentados nesta seção com o diagrama da Figura 4.30.

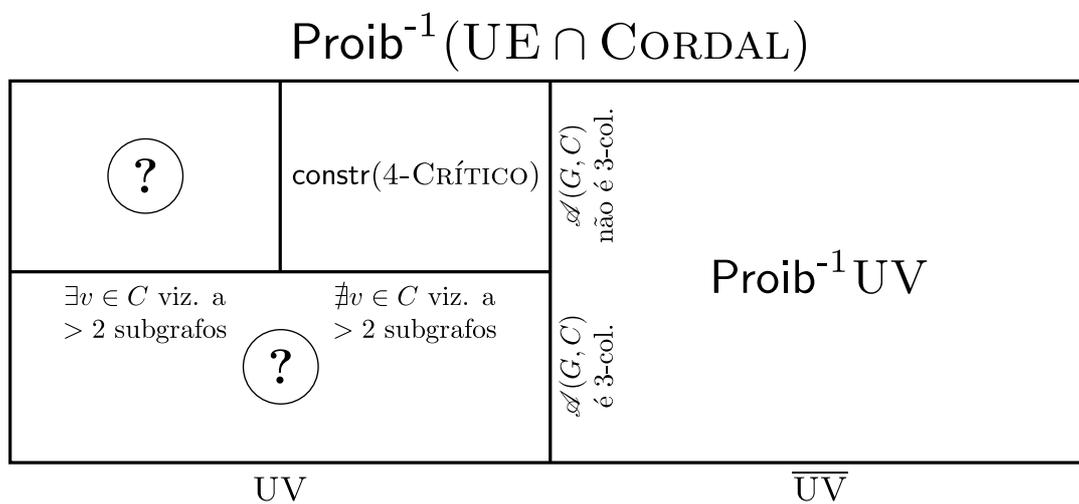


Figura 4.30: Diagrama ilustrando o que se sabe sobre $\text{Proib}^{-1}UEC$.

Capítulo 5

Conclusão

Faremos agora uma breve revisão dos objetivos iniciais desta dissertação, e discutiremos quais destes foram atingidos completamente. Nos casos negativos, detalharemos qual parcela do trabalho ainda falta ser realizada. Uma lista de trabalhos futuros é sugerida ao final.

No Capítulo 2, buscamos caracterizações dos qosets em que cada conjunto fechado possui proibidores considerados simples, de acordo com certos critérios de interesse.

Para proibidores *minimais*, encontramos tal caracterização de maneira completa.

Para os proibidores *anticadeia*, o problema ainda não foi resolvido. Conjeturamos que uma propriedade que caracterize os qosets para os quais todo conjunto fechado tem um proibidor anticadeia não será computável. Por outro lado, acreditamos que esta propriedade poderá ser descrita em moldes semelhantes ao utilizado no caso dos proibidores minimais.

Já para proibidores *finitos*, provamos que nenhuma propriedade computável pode ser usada para caracterizar os qosets nos quais todos os conjuntos fechados possuem proibidores finitos. Mostramos também como esse resultado acarreta a indecidibilidade do problema de determinar se uma dada classe de grafos é caracterizável pela proibição de um conjunto finito, para as relações de subgrafo e subgrafo induzido.

No Capítulo 3, apresentamos um contraexemplo minimal para o algoritmo esboçado por R. Tarjan em 1985 para decompor um grafo por maxcliques separadoras. Além disso, elaboramos uma modificação para esse algoritmo que o torna correto, e provamos que o algoritmo modificado possui a mesma complexidade do algoritmo original.

Finalmente, no Capítulo 4, mostramos como as decomposições por maxcliques separadoras já foram aplicadas às caracterizações por subgrafos induzidos proibidos das classes de grafos de caminho $UEH \cap SPLIT$ e DV . Mostramos como tais caracterizações podem auxiliar na busca de subgrafos proibidos para outras classes de grafos de caminho, e discutimos algumas limitações das técnicas já empregadas.

Também no Capítulo 4, utilizando os teoremas do Átomo e do Separador, avançamos na busca das caracterizações das classes DE e $UE \cap \text{CORDAL}$ por subgrafos induzidos proibidos. Não encontramos as caracterizações completas, mas apresentamos algumas famílias infinitas de grafos proibidos para estas classes. Para a classe DE , uma dificuldade em concluir o trabalho aqui iniciado se deve, principalmente, ao fato de que não temos uma boa caracterização para a antipodalidade de grafos perfeitos. Já para a classe $UE \cap \text{CORDAL}$, uma dificuldade é que ainda sabemos muito pouco a respeito dos grafos dos antipodais de grafos proibidos para esta classe, exceto pela condição dada no Teorema do Separador.

Como trabalhos futuros imediatos, podemos citar:

- Encontrar a caracterização dos qosets em que cada conjunto fechado possui um proibidor anticadeia (cf. Seção 2.3).
- Investigar a relação entre a complexidade de reconhecimento de um conjunto definível por proibição, e as propriedades satisfeitas por seus proibidores (cf. Seção 4.7).
- Aplicar as decomposições por maxcliques separadoras a caracterizações de outras classes de grafos de interseção por proibição, e aplicá-las também à solução de outros problemas em grafos.
- Desenvolver ferramentas que possibilitem ultrapassar os obstáculos existentes para as caracterizações completas das diversas classes de grafos de caminho por proibição. Em particular,
 - encontrar uma boa caracterização da antipodalidade de grafos perfeitos, nos moldes das que existem para as classes SPLIT e CORDAL (cf. Seção 4.6); e
 - encontrar propriedades dos grafos dos antipodais de grafos proibidos de $UE \cap \text{CORDAL}$ que permitam encontrar mais grafos proibidos nas partes das quais pouco sabemos, de acordo com a partição dos proibidos dada no Capítulo 4.

Referências Bibliográficas

- [1] A. BERRY, R. POGORELCNIK e G. SIMONET. “An introduction to clique minimal separator decomposition”, *Algorithms*, v. 3, n. 2, pp. 197 – 215, 2010.
- [2] J. A. BONDY e U. S. R. MURTY. *Graph Theory*. Springer, Nova York, NY, EUA, 2007.
- [3] A. BRANDSTÄDT, V. LE e J. SPINRAD. *Graph Classes: a survey*. SIAM, Philadelphia, PA, EUA, 1999.
- [4] M. R. CERIOLO e P. PETITO. “Forbidden subgraph characterization of split graphs that are UEH”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 19, pp. 305 – 311, 2005. Proceedings of GRACO 2005.
- [5] G. CORNUÉJOLS. “The strong perfect graph theorem”, *Optima*, v. 70, pp. 2 – 6, 2003.
- [6] R. DIESTEL. “Simplicial decompositions of graphs: a survey of applications”, *Discrete Mathematics*, v. 75, pp. 121 – 144, 1989.
- [7] —————. *Graph Decompositions: a study in infinite graph theory*. Oxford University Press, Oxford, Reino Unido, 1990.
- [8] A. FARRUGIA, P. MIHÓK, R. RICHTER e G. SEMANIVŠIN. “Factorizations and characterizations of induced-hereditary and compositive properties”, *Journal of Graph Theory*, v. 49, n. 1, pp. 11 – 27, 2005.
- [9] F. GAVRIL. “The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 16, n. 1, pp. 47 – 56, 1974.
- [10] M. GOLUBIC. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, Nova York, NY, EUA, 1980.
- [11] M. GOLUBIC e R. E. JAMISON. “The edge intersection graphs of paths in a tree”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 38, pp. 8 – 22, 1985.

- [12] D. L. GREENWELL, R. L. HEMMINGER e J. B. KLERLEIN. “Forbidden subgraphs”, In: F. Hoffman, R. Lavow e R. Thomas (Eds.), *Proceedings of the Fourth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, pp. 389 – 394. Utilitas Mathematica, 1973.
- [13] M. HABIB e C. PAUL. “A survey of the algorithmic aspects of modular decomposition”, *Computer Science Review*, v. 4, n. 1, pp. 41 – 59, 2010.
- [14] P. KOMJÁTH. “A note on minors of uncountable graphs”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 117, n. 1, pp. 7 – 9, 1995.
- [15] D. H. KRANTZ, R. D. LUCE, A. TVERSKY e P. SUPPES. *Foundations of Measurement Volume I: Additive and Polynomial Representations*. Academic Press, Nova York, EUA, e Londres, Reino Unido, 1971.
- [16] H.-G. LEIMER. “Optimal decomposition by clique separators”, *Discrete Mathematics*, v. 113, n. 1 – 3, pp. 99 – 123, 1993.
- [17] B. LÉVÊQUE, F. MAFFRAY e M. PREISSMANN. “Characterizing path graphs by forbidden induced subgraphs”, *Journal of Graph Theory*, v. 62, pp. 369 – 384, 2009.
- [18] H. LEWIS e C. PAPADIMITRIOU. *Elements of the Theory of Computation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, EUA, 1997.
- [19] L. LOVÁSZ. “Graph minor theory”, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, v. 43, n. 1, pp. 75 – 86, 2006.
- [20] T. MCKEE e F. MCMORRIS. *Topics in Intersection Graph Theory*. SIAM, Philadelphia, PA, EUA, 1999.
- [21] C. L. MONMA e V. K. WEI. “Intersection graphs of paths in a tree”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 41, n. 2, pp. 141 – 181, 1986.
- [22] B. S. PANDA. “The forbidden subgraph characterization of directed vertex graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 196, n. 1, pp. 239 – 256, 1999.
- [23] B. S. PANDA e S. P. MOHANTY. “Intersection graphs of vertex disjoint paths in a tree”, *Discrete Mathematics*, v. 146, n. 1 – 3, pp. 179 – 209, 1995.
- [24] P. C. PETITO. *Grafos de Interseção em Arestas de Caminhos em uma Árvore*. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.

- [25] ————. *Sobre Grafos UEH*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.
- [26] B. REED e Z. LI. “Optimization and recognition for K_5 -minor free graphs in linear time”, *Lecture Notes in Computer Science*, v. 4957, pp. 206 – 215, 2008. Proceedings of LATIN 2008.
- [27] D. J. ROSE, R. E. TARJAN e G. S. LUEKER. “Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs”, *SIAM Journal on Computing*, v. 5, n. 2, pp. 266–283, 1976.
- [28] E. SCHEINERMAN. “Characterizing intersection classes of graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 55, n. 2, pp. 185 – 193, 1985.
- [29] J. P. SPINRAD. *Efficient Graph Representations*. American Mathematical Society, Providence, RI, EUA, 2003.
- [30] M. M. SYSŁO. *On Characterizations of Cycle Graphs and on Other Families of Intersection Graphs*. Relatório Técnico N-40, Institute of Computer Science, University of Wrocław – Poland, 1978.
- [31] ————. “Triangulated edge intersection graphs of paths in a tree”, *Discrete Mathematics*, v. 55, n. 2, pp. 217 – 220, 1985.
- [32] R. E. TARJAN. “Complexity of combinatorial algorithms”, *SIAM Review*, v. 20, n. 3, pp. 457 – 491, 1978.
- [33] ————. “Decomposition by clique separators”, *Discrete Mathematics*, v. 55, n. 2, pp. 221 – 232, 1985.
- [34] R. THOMAS. “A counter-example to Wagner’s conjecture for infinite graphs”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 103, n. 01, pp. 55 – 57, 1988.
- [35] S. B. TONDATO, M. GUTIERREZ e J. L. SZWARCFITER. “A forbidden subgraph characterization of path graphs”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 19, pp. 281 – 287, 2005. Proceedings of GRACO 2005.