FUNÇÕES – DA NOÇÃO DE DEPENDÊNCIA FUNCIONAL AO CONCEITO FORMAL NO SÉCULO XVIII

Isis Coutinho Duboc

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Aprovada por:

Prof. Ricardo Silva Kubrusly, Ph.D.

Prof. Luis Alfredo Vidal de Carvalho, D.Sc.

Rosa Maria Esteves da Costa

Prof. Rosa Maria Esteves Moreira da Costa, D.Sc.

Patricia Furst

Prof. Patrícia Furst, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2005

DUBOC, ISIS COUTINHO

Funções – da Noção de Dependência Funcional ao Conceito Formal no Século XVIII [Rio de Janeiro] 2005

IX, 173 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2005)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Funções.
2. História da Matemática.
3. História da Ciência.
4. Ensino.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais Mário e Julita.

Aos meus inesquecíveis professores

de Matemática Selma e Ademar.

Ao amigo, que já partiu, Neri.

E à Ana Gabriele.

Agradecimentos

À Universidade Federal do Rio de Janeiro, à COPPE e ao programa HCTE pela oportunidade e confiança depositada.

Aos professores Maria Ângela Miorim (UNICAMP/SP), Manoel de Campos Almeida (PUC/PR), Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (UFU/MG) e Wagner Valente (PUC/SP), pela atenção e pelo gentil atendimento às minhas solicitações.

Aos professores e pesquisadores do NUDOM – Núcleo de Documentação e Memória Histórica do Colégio Pedro II, pela calorosa recepção, boa vontade e excepcional simpatia. Às bibliotecárias da BOR – Biblioteca de Obras Raras da UFRJ, pelo carinho e sorriso de sempre. Às secretárias do PESC, em especial à Solange, pela constante simpatia e disposição em ajudar.

Ao Professor Luis Alfredo Vidal, coordenador do programa, pela confiança, incentivo e amizade durante todos esses anos.

Ao Professor Ricardo Kubrusly, meu orientador, pela confiança depositada ao aceitar me orientar neste trabalho, sua autenticidade, franqueza e, na maioria das vezes, bom humor.

À Nair, diretora do Colégio Estadual Nilo Peçanha, onde trabalhei nos últimos sete anos, pela compreensão e apoio durante todos esses anos.

Agradeço aos meus amigos e a todos aqueles que, direta ou indiretamente, estiveram do meu lado e me apoiaram mesmo nos piores momentos. À Madalena, à Izabella e ao Daniel, pelo ombro amigo naquelas horas mais difíceis... e nos intermináveis telefonemas...

À minha família, à Ana Gabriele e aos meus amigos de Valença, pela compreensão da minha longa ausência...

E... a Deus, por ter me dado a força necessária para chegar até aqui...

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

FUNÇÕES – DA NOÇÃO DE DEPENDÊNCIA FUNCIONAL AO CONCEITO FORMAL NO SÉCULO XVIII

Isis Coutinho Duboc

Fevereiro / 2005

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Programa: História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

Pesquisa histórica sobre o conceito de função na Matemática, suas possíveis origens e desenvolvimento. Este trabalho percorre o desenvolvimento deste conceito desde a Antigüidade até o século XIX, fazendo um estudo histórico da noção de dependência funcional na Antiguidade até a formalização do conceito de função no século XVIII, seu desenvolvimento e evolução nos séculos XVIII e XIX. Este estudo é complementado com um breve histórico acerca da introdução do estudo de funções nos programas de ensino das escolas do nível médio brasileiras, após uma análise histórica sobre o ensino de Matemática no Brasil Colônia, Império e República.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

FUNCTIONS – SINCE THE NOTION OF FUNCTIONAL DEPENDENCE UNTIL THE FORMAL CONCEEPT IN 18TH. CENTURY

Isis Coutinho Duboc

February / 2005

Advisor: Ricardo Silva Kubrusly
Department: History of Sciences and Techniques and Epistemology

Historical research about the conception of function in the Mathematics, its possible origins, and development. This study to search through the development of function concept since antiquity until 19th century, making an historical study about functional dependence in the antiquity until the function's formalization concept in the 18th century, its development and evolution in the 18th and 19th century. This study is complemented with a brief historical about the introduction of the function study in the secondary Brazilian schools teaching programs after an historical analyze about the Mathematics teaching in the historical periods in Brazil.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

Introdução

A matemática é uma grande aventura nas idéias;
a sua história reflete alguns dos mais nobres pensamentos
de inúmeras gerações.
Struik.

O conceito de função é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antigüidade. Desde os tempos mais remotos, tabelas de correspondências obtidas da observação de fenômenos físicos desempenharam um importante papel na evolução do conhecimento intuitivo do que hoje conhecemos por função. As tabelas astronômicas dos babilônios, a escala musical dos Pitagóricos relacionando a altura do som emitido com o comprimento das cordas, as especulações sobre o movimento, a astronomia de Kepler, a dinâmica de Galileu, a teoria gravitacional de Newton são exemplos de iniciativas que, em diferentes épocas, contribuíram de alguma maneira para desenvolver, definir e determinar relações funcionais. A evolução do conhecimento dessas correspondências físicas está intimamente ligada à história das funções, e neste aspecto o progresso feito pelos babilônios na tabulação e interpolação de dados astronômicos é notável.

Relativamente recente, o conceito de função data do final do século XVII e início do século XVIII. De acordo com Caraça (1954), duas razões fundamentais explicam que só tão tarde tivesse aparecido esse conceito: a forma de interpretação da Natureza e a separação dos domínios geométrico e analítico na Matemática.

Da Antigüidade à Idade Moderna – um longo caminho a ser percorrido em busca do conceito de função, desde o desenvolvimento da noção de dependência funcional até o conceito formal no século XVIII. Para Youschkevitch (1976), o desenvolvimento da noção de função pode ser dividido em três períodos principais:

Atigüidade – período no qual se verifica o estudo de casos específicos e isolados de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar as noções de variáveis e de funções.

Idade Média – período em que, na ciência européia do século XIV, surgem as primeiras noções gerais de funções expressas na forma geométrica e mecânica, embora ainda prevalecendo definições através de descrições verbais ou gráficas.

Período Moderno – a partir do fim do século XVI e especialmente durante o século XVII, período no qual começam a prevalecer as expressões analíticas de funções. As funções analíticas expressas por séries infinitas de potências logo se tornaram as mais usadas. O método analítico de introduzir funções revolucionou a Matemática e, pela sua extraordinária eficácia, assegurou um lugar de destaque à noção de função dentro das ciências exatas.

A Antigüidade é o ponto de partida do nosso estudo na busca de como e onde surgiu a noção de dependência funcional. Ocupando uma posição de destaque na procura pelas leis naturais, as correspondências obtidas através da observação das regularidades de fenômenos físicos foram importantes na evolução do que hoje conhecemos por função. Neste aspecto, além do progresso feito pelos babilônios na tabulação e interpolação de dados astronômicos, destacamos a tentativa dos gregos em racionalizar as leis da natureza. Na Antigüidade, essas duas civilizações aparecem como precursoras na utilização da noção de dependência funcional, embora considerassem apenas casos particulares de dependências entre duas quantidades, sem tentativas de generalização. É com eles que iniciamos nosso estudo: os Babilônios e os Gregos.

Da Grécia, partimos com os árabes rumo a Europa medieval, onde se dá a segunda parte do nosso estudo, que vai do nascimento da álgebra moderna ao primeiro gráfico de uma quantidade variável, feito por Oresme em meados do século XIV, quando a noção de uma dependência funcional aparece descrita verbalmente ou por um gráfico. Embora, mesmo que implicitamente, já apareça uma noção de dependência funcional nos estudos medievais, a caminhada seria muito longa até o conceito de função.

Havia dois grandes obstáculos para serem vencidos. No início do século XVI, Leonardo da Vinci chamaria a atenção sobre a necessidade da *observação* e da *experiência* como método sistemático de aquisição de conhecimento, mas até o final do século XVI o nível das ciências da Natureza não estava suficientemente avançado para impor a idéia de dependência de fenômenos naturais. A outra dificuldade era o fato de tanto a álgebra quanto a geometria serem estudadas isoladamente, uma vez que a idéia dominante era a de uma separação desses dois campos em compartimentos distintos.

Entretanto, no início do século XVII, a criação da Geometria Analítica por obra de Pierre Fermat e, principalmente, René Descartes, significaria o fim dessa separação dos domínios geométrico e analítico e o primeiro grande passo para o surgimento do conceito de função, que pressupõe uma tradução das leis analíticas em leis geométricas. Nessa mesma época, Galileu daria o segundo e decisivo passo - o estabelecimento da noção de leis físicas e de dependência dos fenômenos naturais -, abrindo o caminho para o aparecimento do conceito de função.

A parte final do nosso estudo começa com o século XVII, quando aparecem essas duas condições fundamentais para a eclosão do conceito de função. Descartes, ao introduzir as coordenadas cartesianas, tornou possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudá-los analiticamente. É a partir das expressões algébricas que a noção de função vai se estabelecendo, pouco a pouco, a partir dos fins do século XVII. A partir desse momento, todo o estudo se desenvolve em torno das propriedades das chamadas funções analíticas. Com elas, a Matemática recebe um grande impulso, principalmente devido a sua aplicabilidade a outras ciências - os cientistas passam, a partir de observações ou experiências realizadas, a procurar determinar a fórmula, ou função, que relaciona as variáveis em estudo. Assim, as operações com funções atingem um alto grau de perfeição antes mesmo das primeiras tentativas de formalização.

A palavra *função* aparece pela primeira vez numa carta de Leibniz a Johann Bernoulli, no final do século XVII, entretanto com um significado nitidamente geométrico. Nas correspondências trocadas entre 1694 e 1698, por Leibniz e Johnn Bernoulli, a palavra função figuraria várias vezes e sempre com significado geométrico. Mas a prática que a geometria analítica determinava, chamava cada vez mais a atenção para o aspecto analítico que a função podia apresentar. Seria somente no século XVIII que surgiria o primeiro conceito formal de função, dado por Johann Bernoulli. A partir de então, muitas definições surgiriam na tentativa de precisar o conceito e um longo caminho seria percorrido até o século XX, quando finalmente teve o seu desfecho.

Finalmente, terminamos nosso trabalho com um breve relato sobre a introdução do estudo de funções no ensino secundário brasileiro. Através de um pequeno histórico acerca da evolução do ensino secundário da Matemática em nosso país, mostramos as transformações por ele sofridas quanto à sua concepção, objetivos e organização. Iniciado timidamente nas escolas jesuíticas, o ensino brasileiro de Matemática passa pelas caóticas aulas régias, pelos liceus e pelas escolas militares, percorrendo um longo e tortuoso caminho até chegar ao momento histórico em que o estudo das funções foi introduzido em nossos colégios.

Nesse caminho, a partir do Império, escolhemos acompanhar a trajetória de um estabelecimento oficial padrão, criado a 2 de dezembro de 1837 - o Colégio Pedro II. Esse colégio espelha bem as oscilações, ambigüidades, equívocos e acertos das diretrizes fixadas para o ensino secundário brasileiro ao longo de sua história, na qual o significado de ensino foi mudando em função da evolução sócio-político-econômica do país. Foi esta evolução que possibilitou as mudanças nele ocorridas.

Analisando a evolução do ensino de Matemática no Brasil por intermédio dos programas de ensino de Matemática do Colégio Pedro II, desde de sua fundação até a Reforma de Ensino empreendida por Francisco Campos em 1931, procuramos proporcionar uma pequena visão da evolução do ensino da Matemática no Brasil a fim de permitir uma maior compreensão da forma e do momento em que o ensino das funções foi introduzido em nosso país.

Capítulo I

O Despertar da Matemática na Antigüidade

Todo o conhecimento humano é incerto, inexato e parcial.
Bertrand Russel

Sem Matemática não podia haver Astronomia,
sem os recursos maravilhosos da Astronomia seria completamente impossível a navegação.
E a navegação foi o fator máximo do progresso da humanidade.
Amoroso Costa

Segundo Struik (1997), foi durante o quinto, quarto e terceiro milênios a.C. que surgiram as formas de sociedade tecnicamente mais evoluídas, provenientes das comunidades neolíticas que se fixaram nas margens dos grandes rios da África e da Ásia, nas regiões subtropicais, ou próximo delas. Primeiro ao longo do Nilo na África, do Tigre e do Eufrates na Ásia Ocidental, do Indo e depois ao longo do Ganges no sul da Ásia Central, do Huang Ho e, finalmente, do Yang-Tse na Ásia Oriental. As terras situadas ao longo desses rios podiam produzir colheitas abundantes desde que as inundações fossem devidamente controladas e os pântanos drenados, problemas que foram resolvidos no decorrer dos séculos com a construção de barragens e diques, de canais e represas. Localizados principalmente em centros urbanos, os órgãos de administração central logo se fizeram necessários para a administração das obras públicas, que eram responsabilidade de um grupo conhecedor do ciclo das estações do ano, do movimento dos astros, da arte de dividir os campos, do armazenamento dos alimentos e do estabelecimento dos impostos.

Almeida (1998) relata que, segundo a hipótese de Van der Waerden-Seidenberg, uma única fonte no Neolítico teria influenciado as correntes principais da matemática da Antigüidade, que teriam se dividido em duas grandes tradições:

- uma **geométrica** ou **construtiva** - que teria influenciado os hindus e os gregos (bem como os construtores megalíticos e os egípcios);

- outra **algébrica** ou **computacional** - que teria sido transmitida aos babilônios e chineses.

Os indo-europeus são apontados, de acordo com essa hipótese, como o vetor de transmissão dos conhecimentos matemáticos da fonte neolítica original aos povos da Antigüidade. De acordo com Almeida (1998), foram os gútios – povo provavelmente indo-europeu – os responsáveis pela transmissão de conhecimentos matemáticos aos babilônios, uma vez que *os gútios* dominaram a Mesopotâmia por aproximadamente 125 anos, começando por volta de 2250 a.C., após a interrupção da dominação da Mesopotâmia pelos Sumérios[1] por um breve interlúdio Semita (c. 2350 – c.2250 a.C.).

Durante muito tempo o nosso campo histórico não ia muito além do Egito. Nas últimas décadas, no entanto, o nosso conhecimento sobre a matemática babilônica foi muito alargado pelas notáveis descobertas de Otto Neugebauer e F. Thureau-Dangin, que decifraram um grande número de placas de argila de escrita cuneiforme encontradas nas escavações de sítios arqueológicos naquela região. É agora notório que a matemática babilônica era de longe mais desenvolvida do que a das outras sociedades orientais. Segundo Struik (1997), este juízo pode considerar-se definitivo, pois existe uma certa consistência nos textos babilônicos e egípcios através dos séculos. Além disso, o desenvolvimento econômico da Mesopotâmia era maior do que de outras sociedades localizadas no chamado 'Crescente Fértil do Próximo Oriente'[2], que se estendia da Mesopotâmia ao Egito. A esse respeito, acrescenta Struik (1997):

---

[1] Por volta de 3.500 a. C., os Sumérios invadiram a parte sul da Mesopotâmia, conquistando essa região aos seus habitantes primitivos. A partir dos últimos séculos do quarto milênio foram, durante aproximadamente 1500 anos, o grupo cultural dominante no Oriente Médio, tendo produzido uma literatura muito rica e deixado como herança um sistema jurídico, comercial, administrativo e religioso vasto e complexo. Durante muito tempo, mesmo após os Sumérios propriamente ditos terem cessado de existir, a sua língua foi empregada como língua erudita no Oriente Médio, como ocorreu com o latim no Ocidente.

Pouco antes de 3000 a.C., os Sumérios começaram a usar uma escrita que posteriormente ficou conhecida como cuneiforme. Ao que parece, foi a necessidade de registrar os primeiros algarismos que deu origem à escrita. Assim, os algarismos são historicamente anteriores às letras. Cf ALMEIDA, 1998, p.104.

[2] O Crescente Fértil corresponde a todas as regiões atravessadas pelos grandes rios do Oriente – o Nilo, o Tigre, o Eufrates – que levam abundância e riqueza para o meio dos desertos. Cf SIMAAN e FONTAINE, 2003, p.17.

"a Mesopotâmia era uma encruzilhada para um grande número de rotas de caravanas, enquanto o Egito permaneceu comparativamente isolado. Por outro lado, o aproveitamento dos erráticos Tigre e Eufrates requeria mais perícia técnica e administração que o Nilo, 'o mais cavalheiro de todos os rios', citando Sir Willian Willcocks[3]".

Assim, os mesopotâmios se destacaram pela superioridade tanto de sua aritmética quanto de sua álgebra, enquanto os egípcios se dedicaram àquela que seria considerada 'um presente do Nilo' - a geometria. Como não possuíam métodos convenientes para o trato com os números, em particular as frações, conseqüentemente foram impedidos de ir mais longe no campo da álgebra, então, ao invés disso, enfatizaram a geometria.

Tanto egípcios quanto babilônios desenvolveram numerosas aplicações práticas de sua matemática. Ambos foram construtores infatigáveis. Ainda hoje, apesar de nossos arranha-céus, os templos e as pirâmides do Egito ainda são admirados pela sua surpreendente obra de engenharia. Os babilônios foram hábeis engenheiros da irrigação. Através de canais cavados com grande inteligência e habilidade, os rios Tigre e Eufrates - 'sangue da vida daquele povo'[4], fertilizavam a terra possibilitando, num clima seco e quente, a manutenção de cidades prósperas e populosas como Ur e a Babilônia. Embora freqüentemente repetido por diversos autores, a matemática desses povos não estava reduzida apenas à solução de problemas práticos, como nos mostra este trecho de Kline:

> But it is a mistake – no matter how often it is repeated – to believe that mathematics in Egypt and Babylonia was confined just to the solution of practical problems. This belief is as false for those times as it is for our own. Instead we find, upon closer investigation, that the exact expression of man's thoughts and emotions, whether artistic, religious, scientific, or philosophical, involved then, as today, some aspect of mathematics. In Babylonia and Egypt the association of mathematics with painting, architecture, religion, and the investigation of nature was no less intimate and vital than its use in commerce, agriculture, and construction.
>
> Preceding the use of astronomy and of mathematics for navigation and calendar reckoning there must have been centuries

---

3 Willian Willcocks, *Irrigation of Mesopotâmia*, 2ª. edição , Londres, 1917, p. XI – Cf Struik, 1997.

4 *"The life's blood of these people"* - KLINE, 1980, p. 17

> during with irrepressible philosophical drives, patiently observed the movement of the sun, moon, and stars. These seers, obsessed by the mystery of nature, overcame the handicaps of lack of instruments and woefully inadequate mathematics to distill from their observations the patterns the heavenly bodies describe. These are the men who very early in the Egyptian civilization learned that the solar year, the year of seasons, consists of about 365 days. (KLINE, 1980, p.17)

Para Youschkevith (1976), o primeiro estágio para o conceito de função está na Antigüidade, onde os **babilônios** e os **gregos** aparecem como as duas civilizações precursoras na utilização da noção de dependência funcional. Embora nenhuma tentativa de generalização da noção de função apareça nesta fase, casos particulares de dependência funcional entre quantidades já eram considerados por esses povos. Por isso, é com esses povos que se inicia o nosso estudo na busca de 'sementes' desse primeiro estágio para o conceito de função.

1.1 – A Matemática Babilônica

Falar da matemática babilônica significa, na realidade, falar da matemática praticada em toda a antiga Mesopotâmia, região entre os rios Tigre e Eufrates. Embora tal designação não seja inteiramente correta, segundo nos informa Boyer (1993), as civilizações antigas da Mesopotâmia são freqüentemente chamadas babilônicas, uma vez que a 'Terra dos Dois Rios' estava aberta a invasões de várias direções, o que fazia do 'Crescente Fértil' um campo de batalha, com freqüente mudança de hegemonia. Com a invasão Semita iniciou-se uma gradual absorção da cultura suméria - embora tivessem assumido o poder, os invasores foram 'conquistados' por seus súditos – e deles absorvendo inclusive a sua escrita cuneiforme. Invasões e revoltas posteriores "trouxeram estirpes de várias raças – amoritas, cassitas, elamitas, hititas, assírios, medos, persas, e outros – ao poder político em épocas diversas, mas permaneceu um grau suficiente alto de unidade cultural na área para que se possa chamar simplesmente de mesopotâmica essa civilização" (Boyer, 1993).

Foi somente no fim do século XIX que arqueólogos começaram a escavar as colinas da Mesopotâmia. Entre 1889 e 1900 uma expedição americana escavou Nippur, um dos sítios arqueológicos mais importantes da Mesopotâmia. Por volta de 1906, Herman V. Hilprecht, da Universidade da Pensilvânia, publicou um volume em que incluía reproduções de importantes textos matemáticos e metrológicos babilônicos antigos. Desde então, um número significativo de textos foi descoberto. O número total de tabletes é estimado por Neugebauer em no mínimo 500 000, observando que este número representa apenas uma pequena fração do que permanece enterrado nas cidades babilônicas. Destes, apenas uns 400 tabletes ou fragmentos de conteúdo matemático foram copiados, transcritos, traduzidos e explicados em trabalhos abrangentes e definitivos.

1.1.1 – As Primeiras Tábuas de Funções

Os textos matemáticos babilônios encontrados podem ser divididos em dois grandes grupos: os **textos tabelas** (tábuas) e os **textos problemas**. Os textos tabelas - constituídos principalmente por tabelas como as tábuas de multiplicação, de recíprocos, de potências sucessivas, entre outras - corresponde a mais que o dobro do número de textos problemas conhecidos. Os textos problemas correspondem a uma grande variedade de textos que podem ser divididos em duas grandes classes, como nos informa Neugebauer (1957): na primeira classe, os problemas são formulados e, então, passam a ser solucionados, passo a passo, usando os números dados inicialmente no problema e terminando sempre com as palavras "este é o procedimento"; na segunda classe, apenas coleções de problemas cuidadosamente arranjados, começando por casos muito simples e expandindo, pouco a pouco, a problemas com relações mais complexas, mas sempre com a possibilidade de serem reduzidos aos casos mais simples.

Os textos cuneiformes percorrem muitos períodos históricos daquela região e, de acordo com Eves (1997) e Struik (1997), podem ser divididos em três grupos que abrangem grandes períodos da história babilônica:

- Primeiro Período - c. 2100 a.C - c. 1750 a.C.

Conhecido por 'Período Babilônico Antigo', contém os textos mais antigos encontrados - datados do terceiro milênio do último período Sumério, a 3ª. dinastia de Ur, que data de cerca de 2100 a.C. - nos quais revelam uma grande habilidade para calcular. Os textos deste período contêm tábuas de multiplicação nas quais um sistema sexagesimal bem desenvolvido se sobrepõe a um sistema decimal. Os Sumérios já adotavam o sistema posicional, ou seja, a posição de um símbolo determinava seu valor e não era necessário um símbolo diferente para cada novo valor. Ainda não havia sido 'inventado' um símbolo para o 'zero', que era representado por um espaço vazio.

Muita da aritmética computacional babilônica era feita com tabelas que iam de simples tábuas de multiplicação a listas de recíprocos e de raízes quadradas e cúbicas. Os textos mostram que em torno de 2000 a.C., os matemáticos babilônios já usavam largamente tábuas sexagesimais de multiplicações e de recíprocos, quadrados e raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas assim como outras tábuas. Como a base 60 requer uma enorme tábua de multiplicação – isso sem mencionar o fato de que um sistema completo de tábuas de multiplicação sexagesimal deveria ser constituído de 58 tábuas, cada uma contendo todos os produtos de 1 a 59, para cada número do 2 ao 59, o que justifica o grande número de tábuas de multiplicação descobertas. Outras tábuas babilônicas desse período tratam da divisão. Para dividir M por N, os babilônios multiplicavam M por N' = 1/N, fato que justifica o grande número de tábuas de inversos multiplicativos encontradas. Existem centenas de tabletes que guardam tabelas de inversos.

Perto de 2000 a.C., a aritmética babilônica havia evoluído para uma álgebra retórica, ou seja, uma álgebra sem símbolos para representar operações e termos desconhecidos, e que consistia em uma 'receita' com a seqüência das operações necessárias à solução de cada tipo de problema. Como ressalta Waerden (1954), o que os babilônios faziam, passo a passo, em números, equivale certamente à aplicação de uma fórmula. Mas eles não usavam fórmulas; o que faziam era meramente dar um exemplo após o outro, cada qual ilustrando o mesmo método de calcular. Assim, nas tábuas babilônicas, para cada problema proposto é fornecida uma 'receita' para resolvê-lo.

Segundo Bashmakova & Smirnova (2000), o mais surpreendente nesse período é o fato de que muitos dos textos problemas encontrados contêm problemas cujas resoluções eram reduzidas à solução de equações quadráticas. Assim, de acordo com as informações encontradas em Eves (1997) e em Bashmakova & Smirnova (2000), em torno de 2000 a.C., os babilônios podiam resolver, através de sua álgebra retórica, equações quadráticas – quer por um método equivalente ao da substituição numa fórmula geral, quer pelo método de completar quadrados – como também discutiam algumas cúbicas e algumas biquadradas, e ainda realizavam transformações algébricas – uma descoberta extraordinária que puxa o surgimento da álgebra para treze séculos atrás – do século V a.C., para o século XVIII a.C.!

- ## Segundo Período - c. 1750 a.C. – c. 600 a.C.

Período que se inicia na primeira dinastia babilônica do rei Hammurabi, por volta de 1750 a.C.. No período do reinado de Hammurabi foi encontrado um grupo bastante grande de textos nos quais encontramos a aritmética transformada numa álgebra retórica já bem estabelecida. Os babilônios da época de Hammurabi estavam na posse completa da técnica de manipular as equações quadráticas, resolviam equações lineares e quadráticas com duas variáveis e, até mesmo, problemas que envolviam equações cúbicas e biquadradas, embora os egípcios deste período fossem somente capazes de resolver equações lineares simples.

O forte caráter aritmético-algébrico da matemática babilônica transparece, segundo Struik (1997), também na sua geometria. Os textos mostram que a geometria babilônica do período semita possuía fórmulas para áreas de figuras retilíneas simples e para volumes de sólidos simples. O chamado "Teorema de Pitágoras" era conhecido, não apenas para casos especiais, mas com toda a generalidade, como uma relação numérica entre os lados de um triângulo retângulo, fato que conduziu à descoberta de 'triplos pitagóricos'.

Pertence a este período o texto cuneiforme provavelmente mais conhecido, o tablete Plimpton 322 (Figura 1), que recebeu esse nome por ser o 322º tablete da coleção Plimpton, da Universidade de Columbia, em Nova Iorque.

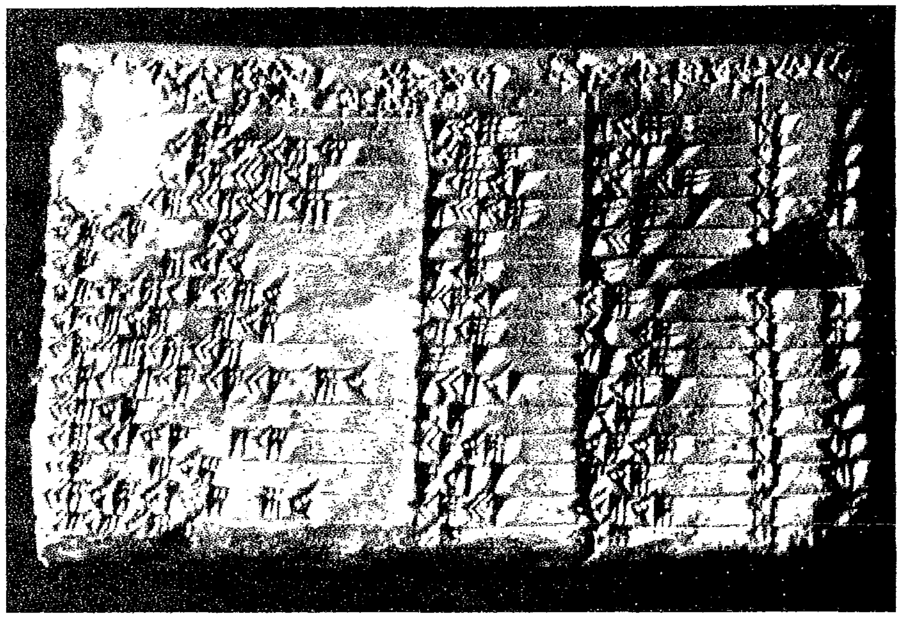

Figura 1: Plimpton 322

A tabela seguinte (Figura 2) reproduz as colunas do tablete Plimpton 322 utilizando nosso moderno sistema numérico para exprimir os números do sistema babilônico sexagesimal.

Coluna I	II	III	IV
[1,59,0,]15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

NOTE: The numbers in brackets are reconstructed.

Figura 2: Transcrição do tablete Plimpton 322

Os números entre colchetes foram restaurados por Neugebauer. Que relações existem entre esses números? Fazendo os números da coluna I iguais a **x**, os da coluna II iguais a y, e os da coluna III iguais a z, encontraremos... o teorema de Pitágoras! Isso mesmo, a relação entre os números das colunas I, II e III é exatamente esta:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Assim, as quinze linhas dessa tabela nada mais são do que triplas pitagóricas. A última coluna, coluna IV, contém os números de 1 a 15, que apenas enumeram as linhas da tabela.

Segundo Almeida (1998), a Álgebra babilônica se caracteriza como uma Álgebra mista, uma vez que segmentos e áreas podiam ser adicionados e igualados a números. Para Bashmakova & Smirnova (2000), entretanto, a Álgebra babilônica pode ser caracterizada como Álgebra numérica, visto que não faziam uso de nenhum símbolo: ao invés de símbolos, os babilônios empregavam termos especiais para denotar as incógnitas. Assim, usavam "comprimento" - para o nosso x; "largura" – para o nosso y (invariavelmente, x > y) e "área" – para xy. Se necessário, uma terceira incógnita, "profundidade" – ou o nosso z, era introduzida, e o produto xyz era chamado de "volume". Não hesitavam em adicionar comprimentos com áreas ou volumes, mas se ocupavam de problemas mais abstratos também: foi encontrada uma série de problemas que envolvem um 'fator' e seu 'inverso', ou seja, dois números cujo produto seja 1. Neugebauer (1954) observa que é freqüentemente possível transcrever os problemas babilônicos para o nosso simbolismo moderno simplesmente trocando os ideogramas que eram usados para "comprimento", "largura", "somar", "multiplicar" pelas nossas letras e símbolos.

Usando nossa moderna notação, Bashmakova & Smirnova (2000) classificam os problemas das tábuas cuneiformes babilônicas como segue (onde **a**, **b** e **c** são dados, sendo **x** e **y** as incógnitas):

(I) $\begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$ (III) $ax^2 \pm bx = c$

Aos problemas do tipo I, II e III – que podem ser resolvidos por um algoritmo que corresponde totalmente à nossa fórmula para resolver equações quadráticas -

Bashmakova & Smirnova (2000, p. 4) chamam de "problemas canônicos". Entre os problemas ditos "canônicos" foi encontrada uma série de problemas mais abstratos que envolvem um 'fator' e seu 'inverso', ou seja, dois números cujo produto seja 1: "Um fator e seu inverso 2;30". Em nossa notação decimal, 2;30 = 2,5. Escrevendo este problema em nossa linguagem algébrica, fica assim:

$$\begin{cases} x+y=2{,}5 \\ xy=1 \end{cases}$$

A solução 'retórica' deste problema consiste em uma seqüência de operações que são realizadas, passo a passo, sem nenhuma explicação. O 'algoritmo' de resolução é 'generalizado' a partir de um grande número de problemas do mesmo tipo.

Um texto problema do período da dinastia de Hammurabi – o texto AO 8862, propõe o seguinte problema, considerado como "não canônico", ou seja, não é um problema do tipo I, II e III , de acordo com Bashmakova & Smirnova (2000): *"Comprimento, largura. Multipliquei comprimento e largura, assim obtendo a área. Então, somei com a área o excesso do comprimento sobre a largura: encontrei 3,3. Então eu somei comprimento e largura: 27. Uma pergunta: comprimento, largura e área."* (Senkere, apud Bashmakova & Smirnova, 2000, p. 5)

Através dos exemplos mostrados acima, percebe-se claramente que a álgebra babilônica estava bastante desenvolvida e, apesar de ser ainda uma álgebra retórica, isso não impedia que fossem tratados problemas mais abstratos.

• Terceiro Período – c. 600 a.C. a 300 d.C.

Período em que foi encontrado um número abundante de textos e que se estende aproximadamente de 600 a.C. a 300 d.C.[5], cobrindo não só o império neobabilônico de Nabucodonosor, mas também as eras Persa e Selêucida que se seguiram. Os textos deste último período estão fortemente influenciados pelo desenvolvimento da astronomia babilônica, que naquela época já tinha alcançado um nível bastante sofisticado, caracterizando-se por uma análise cuidadosa das diferentes efemérides. Em suas tábuas astronômicas (ou efemérides) anotavam, dia a dia, as

---

[5] A lacuna de tempo entre o segundo e o terceiro grupo de textos coincide com um período especialmente turbulento da história babilônica.

fases da lua, as horas do nascer e do pôr do sol, a posição dos planetas, bem como os fenômenos meteorológicos. Essas tábuas astronômicas – as primeiras do gênero – demonstram que os babilônios souberam estabelecer a regularidade de alguns fenômenos naturais e expressar tal regularidade numa forma aritmética elaborada de modo a prever seu retorno periódico.

A matemática se aperfeiçoava nas suas técnicas de cálculo, a álgebra procurava resolver problemas por meio de equações que ainda hoje requerem considerável habilidade numérica. Existem cálculos datados do período Selêucida que vão até 17 unidades sexagesimais. Estas operações numéricas complicadas já não estavam relacionadas com problemas práticos como lançamento de impostos ou de medição, mas com problemas de astronomia ou como lazer, pelo puro prazer do cálculo.

Segundo nos informa Almeida (1998), foi no período Selêucida que os babilônios começam a utilizar um símbolo para o zero, mesmo assim somente quando o zero figurasse em posições intermediárias e apenas em textos astronômicos, nunca matemáticos. De acordo com Eves (1997, p. 63), há tábuas astronômicas do século III a.C. que fazem uso explícito da regra de sinais da multiplicação.

Foi durante o reinado Selêucida que as tábuas de funções aparecem na astronomia babilônica para a compilação de efemérides do sol, da lua e dos planetas:

> Eles se dedicavam à observação do céu; analisavam os nascimentos e ocasos helíacos[6]; e nutriam um interesse especial pelos planetas, **anotando as posições que ocupavam durante o alvorecer e o pôr-do-sol**, mas **também em horas específicas**, como a de oposição (em que o planeta se encontra em seu ponto mais alto no céu noturno por volta da meia noite). (...) **Outros fenômenos celestes, como estrelas cadentes e cometas, eram observados e assinalados, assim como eclipses do Sol e da Lua**. (RONAN, 2001, p. 49-50, grifo nosso)

Podemos concluir que os babilônios foram únicos na elaboração de tábuas aritméticas, extremamente hábeis para fazer cálculos e certamente mais

---

[6] Helíaco: relativo ao Sol; diz-se do nascimento ou do ocaso de um astro quando coincide com o nascimento ou o ocaso do Sol.

desenvolvidos em álgebra que em geometria[7]. Os problemas por eles considerados são de uma profundidade e diversidade impressionante.

1.1.2 – O 'Instinto' Funcional Babilônico

Os matemáticos babilônios são conhecidos pelo seu 'instinto' para o trato com funções. De fato, foram talvez os mais infatigáveis elaboradores de tabelas aritméticas da história. É importante ressaltar que, por volta de 2000 a.C., os mesopotâmios já empregavam, em suas tábuas sexagesimais de recíprocos, quadrados e raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas, e assim como outras tábuas, a mesma noção de **dependência funcional** que adotamos hoje ao confeccionarmos uma tabela de valores de uma função.

Assim, quando construímos uma tabela de valores para a função $y = f(x) = x^2$ tomando para x valores inteiros e positivos, tal como a tabela seguinte, estamos fazendo nada mais do que uma tábua mesopotâmica de quadrados, a menos é claro da nossa notação decimal e do fato de os mesopotâmios não trabalharem com números negativos, nem conhecerem o zero:

X	$f(x) = x^2$
Domínio	Valor da função-imagem
1	1
2	4
3	9

Nessa tabela, assim como numa tabela babilônica de quadrados, os números da primeira coluna se relacionam aos números da segunda através da seguinte regra: tome um número (da primeira coluna), eleve-o ao quadrado (ou multiplique ele por ele mesmo), escreva-o na segunda coluna. Essa regra: eleve-o ao quadrado (ou

7 Embora seja fácil perceber que os conceitos geométricos ocuparam um lugar secundário na matemática babilônica, uma extensiva terminologia geométrica foi usada. Cf Neugebauer, 1957.

multiplique por ele mesmo) equivale ao conceito moderno de função. Se observarmos isso, uma significativa parte dos textos tabelas babilônicos são exemplos de função de acordo com o conceito atual, inclusive a Plimpton 322, o texto cuneiforme mais conhecido.

Já falamos da centena de tabletes com tabelas cuneiformes de inversos e do modo como efetuavam a divisão - para dividir M por N, os babilônios multiplicavam M por N' = 1/N. Para isso, eles procuravam em uma tabela de inversos o valor do inverso do número em questão (N), efetuavam a multiplicação M.1/N encontrando, assim, o valor da divisão. Ora, uma tabela desse tipo nada mais é que uma tabela de valores da função $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

Como exemplo de pensamento funcional, podemos ainda citar a tabela babilônica que lista os valores de **$n^3 + n^2$** para **n = 1, 2, 3, 4, ..., 30**, sobre a qual Botelho (1992) nos indaga: "Não seria isso, portanto, a relação de valores da função **$f(x) = n^3 + n^2$**, onde x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 30?". E que responde ele mesmo: "Não de acordo com a mentalidade da época, que não se preocupava com generalizações abstratas, e sim de acordo com os nossos tempos."

O tablete MLC 2078 dá resposta à seguinte pergunta: a que potência deve-se elevar um número x para obter um número dado? Isso significa encontrar o logaritmo do número dado, em um sistema de base x, ou seja, é o nosso conceito de função logarítmica. Além disso, convém notar o lembrado por Bashmakova & Smirnova (2000), de que os babilônios se ocupavam não só com problemas 'diretos' (*dado o lado do quadrado, calcular sua área*), mas também com o problema 'inverso' (*dada a área, calcular o lado do quadrado*). Ao problema 'direto' corresponde o nosso "*dado o lado x do quadrado, calcular sua área y*". Para resolvê-lo, basta multiplicar o número dado por ele mesmo, ou seja, determinar o valor da área y sendo $y = x^2$, que nada mais é do que a nossa simples e conhecida função quadrática $y = f(x) = x^2$. O problema 'inverso' é o nosso "*dada a área y, calcular o lado x do quadrado*", que se reduz à equação $y = x^2$, que deve ser resolvida extraindo-se a raiz quadrada de y, o que equivale à função inversa $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, conceito tão difundido na matemática moderna. Os primeiros problemas 'inversos' que aparecem na História da Matemática, de acordo com Bashmakova & Smirnova (2000), são encontrados na Babilônia.

Outro problema babilônico 'direto' sobre medidas de terrenos retangulares é o seguinte: *"sendo dados os lados de um terreno, encontrar a área S"*. Podemos resolver facilmente este problema através de uma simples multiplicação de seus lados, ou seja, chamando de *x e y* os lados dados, temos $S = xy$. Já o problema 'inverso', nesse caso, é um problema indeterminado *"dada a área S de um terreno, encontrar seus lados"*. Para determiná-lo, sendo *x e y* esses lados, havia duas opções:

(I) dando o valor de um de seus lados - por exemplo, fazendo $y = a$, obtemos a equação $ax = S$ que pode ser resolvida pela divisão $x = S/a$; ou

(II) dando a soma (ou a diferença) dos lados do retângulo – neste caso, obtemos um dos casos de sistemas canônicos babilônicos: $\mathbf{xs = S}$ e $\mathbf{x + y = a}$.

Este último problema é bem mais complexo que o anterior, que lhe deu origem. Segundo Bashmakova & Smirnova (2000), foi a análise deste tipo de problema que levou os sábios babilônicos, por volta de 1750 a.C., à descoberta da técnica de resolução das equações quadráticas.

Por volta de 300 a.C., os babilônios deram um grande passo à frente ao aplicarem a análise matemática à astronomia, e de uma forma bem diferente dos gregos, seus contemporâneos. Os babilônios, ao contrário dos gregos, não formularam nenhuma teoria relativa aos planetas, mas organizaram tabelas detalhadas de movimentos planetários, através das quais podiam 'predizer' ou 'antecipar' movimentos futuros:

> A técnica babilônia consistia em usar **uma série de seqüências compostas de números que aumentavam e diminuíam regularmente ou de números que mantinham entre si diferenças que aumentavam ou diminuíam regularmente**. Todas essas constantes numéricas eram engenhosamente dispostas, de modo a traduzir as periodicidades necessárias e proporcionar resultados quantitativamente precisos, **sem recurso a qualquer representação ou modelo geométrico**. (PRICE, 2000, p. 29, grifo nosso)

Historicamente, o progresso feito pelos babilônicos na tabulação e interpolação de dados astronômicos é realmente notável. Foi sua aritmética que os possibilitou a *fazer tal proeza*, auxiliando-os a calcular as velocidades variáveis com que os planetas pareciam mover-se pelo céu. Assim, a principal ferramenta para a computação das efemérides era as progressões aritméticas, crescentes e decrescentes com diferença constante entre dois limites fixos. Tábuas de funções de dois diferentes tipos, **funções escada** e **funções zig-zag**, como Neugebauer as chamou, foram usadas na astronomia babilônica durante o reinado Selêucida para a compilação de efemérides do sol, da lua e dos planetas.

As funções zig-zag eram baseadas em progressões aritméticas - daí a expressão 'modelo aritmético' utilizada para definir o modelo matemático dessas 'funções' - capazes de 'predizer' eclipses e outros eventos astronômicos que exerciam considerável influência em suas vidas. Embora essas tábuas de funções não tenham sido representadas de forma geométrica, mas apresentadas apenas aritmeticamente, devido a características peculiares que apresentam, foram denominadas **funções escada** e **funções zig-zag**:

> The basic periodic motions of the sun, moon, and planets were measured, and an **arithmetic model** capable of predicting their conjunctions and other important features was established by the Babylonian astronomers. (...)
> The Babylonians, as far as we know, had **no geometric model** but rather **used certain arithmetical functions** whose values at an instant in time described the position of a celestial body with respect to the background of fixed stars as seen from the earth. These **periodic functions are now sometimes called 'linear zigzag functions'** (...), but the **Babylonians did not display this information in graphical or other geometrical form**. Their linear zigzag functions **were represented by a tabulation of their values**. (RESNIKOFF and WELLS, 1973, p.84, grifo nosso)

Essas funções empiricamente tabuladas tornaram-se a fundamentação matemática para todo o subseqüente desenvolvimento da astronomia babilônica. "Essa descoberta representou algo novo e verdadeiramente científico, só seria retomada bem mais tarde, na Europa ocidental" (Ronan, 2001).

1.2 – A Matemática Grega

1.2.1 - Grécia Antiga

No segundo milênio a.C., a península grega foi ocupada por povos que, por volta de 900 a.C., já haviam estabelecido muitas colônias ao sul da 'bota' italiana e na costa oeste da península da Anatólia, onde hoje está a Turquia. As cidades do sul da Itália constituíam a Magna Grécia; e as cidades da Anatólia, a célebre Jônia. Muitos dos chamados 'matemáticos gregos' viveram na Jônia e na Magna Grécia e não no território da Grécia atual.

Ao longo da Ásia Menor surgiram cidades comerciais onde os antigos senhores de terras tinham de lutar contra uma classe de mercadores independentes. Durante os séculos VII e VI a.C., esta classe mercantil ganhou grande influência e, lutando ao lado de pequenos comerciantes e artesãos, deram ascensão à *polis* grega, ou seja, às cidades-estados autônomas.

As mais importantes destas cidades-estados desenvolveram-se na Jônia, cujo crescimento comercial ligou aquela região a toda a costa mediterrânica, à Mesopotâmia, ao Egito e a outras regiões mais distantes ainda, como o Irã, a Índia e até a China. É nesse ambiente culturalmente rico, propício e estimulante ao ato de pensar, que viviam os jônios, e em nenhuma outra parte isso era mais forte e verdadeiro que em Mileto, seu principal porto e mais rico mercado. E, "onde circulam mercadorias circulam também idéias e técnicas" (Simaan & Fontaine, 2003).

No final do século VI a.C., a Jônia é invadida e dominada pelos persas. Apesar da superioridade numérica do adversário, após alguns reveses, os gregos foram vencedores. Entretanto, durante o período de dominação, os persas irão perpetuar, em matéria de astronomia, a tradição babilônica, contribuição que só seria incorporada pelos gregos dois séculos mais tarde.

O último período da história antiga é o da dominação romana. Assim, Siracusa cai nas mãos de Roma em 212 a.C., Cartago em 146 a.C., a Grécia em 146 a.C., a Mesopotâmia em 64 a.C. e o Egito em 30 a.C.. Todo o Oriente dominado pelo Império

Romano, incluindo a Grécia, foi inteiramente reduzido à condição de colônia administrada por romanos. Entretanto, mesmo sem tanta originalidade e estímulo, a ciência oriental continuava a florescer, apresentando uma curiosa mistura de elementos helenísticos e orientais. A difusão do conhecimento se tornou mais fácil, de Roma e da Grécia à Mesopotâmia, à China e à Índia. A ciência helenística não só influenciou como também foi sucessivamente influenciada pela ciência desses países.

Alexandria se tornou o centro da Matemática antiga, produzindo trabalhos originais, embora as compilações e os comentários se tornassem, cada vez mais, a forma predominante de ciência. Entretanto, com o declínio da sociedade antiga, a escola de Alexandria foi desaparecendo gradualmente.

1.2.1.1 - Transformação e Permanência na Grécia Antiga

Pensando no Universo e procurando compreender os fenômenos, descobrir as suas razões e 'leis', os primeiros pensadores levantaram as seguintes questões fundamentais, de acordo com Caraça (1998):

(1) A natureza apresenta-nos diversidade, pluralidade de aspectos, formas, propriedades, etc. Existe, no entanto, para além dessa diversidade aparente um princípio único, ao qual tudo se reduza?

(2) Qual é a estrutura do Universo? Como foi criado? Como se movem os astros?

Dessas duas questões, é principalmente a primeira que nos interessa, por estar mais diretamente ligada com o nosso assunto. Em relação à primeira questão, as primeiras respostas foram dadas pelos filósofos de Mileto – colônia jônica da Ásia Menor – onde surgiu a primeira escola de filósofos. Esses primeiros filósofos afirmaram existir um elemento único ao qual tudo devia reduzir-se. Entretanto, esse elemento único diferia para cada filósofo. Para Tales, esse elemento único era *a água*. Para Anaximandro de Mileto (c. 611 – c. 545 a.C.), essa substância primordial era *infinita* e *indeterminada*. Assim, era o *indeterminado* – em grego *apeiros* – para Anaximandro, 'sem morte e sem corrupção', 'começo e origem do existente'. Para Anaxímenes de Mileto, contemporâneo de Tales e Anaximandro, a substância primordial era *o ar* - embora infinito, o ar não era indeterminado. Os filósofos de Mileto eram homens engajados nos assuntos práticos da cidade e a filosofia era, para eles, um assunto eminentemente prático.

A pouca distância do litoral da Jônia ficava a ilha de Samos, onde surgiria uma concepção filosófica oposta: a filosofia se torna um modo de viver. O pioneiro desse novo espírito da filosofia é Pitágoras, nativo de Samos, que se estabelece em Crotona, cidade grega ao sul da Itália, onde criou sua sociedade por volta de 530 a.C.. Para Pitágoras, o elemento essencial da natureza era o número.

Os pitagóricos salientavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza. A compreensão do mundo estaria na descoberta das relações numéricas existentes: a essência dos fenômenos estaria nos números e nas relações matemáticas. Segundo Russel (2003), muitas são as concepções que remetem a Pitágoras, como a noção de harmonia, no sentido do equilíbrio; o ajuste e a combinação de opostos, mediante uma afinação adequada; o conceito de caminho intermediário na ética, dentre outros. Retornaremos a Pitágoras adiante.

Por volta de 530 a.C. nasceu Heráclito na cidade de Éfeso, também colônia greco-jônica do litoral da Ásia Menor. A resposta de Heráclito à questão da existência de um elemento primordial e único foi muito diferente daquela dada pelos filósofos que o precederam e também pelos que o seguiram. Enquanto para os filósofos jônicos, a explicação se baseava na existência de uma substância primordial, *permanente*, para Heráclito o aspecto essencial da realidade era a *transformação* que as coisas estão *permanentemente* sofrendo. Para ele, tudo no universo está em permanente mudança, toda realidade é um contínuo 'vir-a-ser'.

Assim, enquanto "o mundo dos filósofos de Mileto era um mundo de permanência da matéria; o mundo de *Heráclito* era o mundo dinâmico da *transformação incessante*, do devir" (Caraça, 1998, p.65). Entretanto, suas teorias se baseiam nos ensinamentos dos jônios e de Pitágoras:

> Anaximandro afirmara que os elementos antagônicos voltam ao ilimitado para reparar as suas transgressões mútuas. De Pitágoras vem a noção de harmonia. Heráclito desenvolve uma nova teoria a partir desses ingredientes e aí está a sua descoberta e contribuição marcantes para a filosofia: o mundo real consiste de um ajuste equilibrado de tendências opostas. Por trás da luta de opostos, segundo certas normas, existe uma oculta harmonia ou afinação, que é o mundo.
>
> Com freqüência, esta noção universal não é evidente porque **"a natureza gosta de esconder"**. Na verdade, Heráclito parece ter sustentado que, num certo sentido, uma afinação deve ser algo que não salte aos olhos de imediato. "A afinação oculta é melhor do que a aparente." (RUSSEL, 2003, p. 40, grifo nosso)

De acordo com Heráclito, é impossível atingir a permanência, uma vez que tudo flui, tudo devém - a todo momento uma coisa nova. Para ele, o mundo era um estado de perpétua mudança, de tal forma que tudo o que percebemos com os sentidos é algo transitório. O fluxo e a mudança eram a verdadeira realidade: "Não se pode entrar duas vezes no mesmo rio, pois novas águas estão sempre fluindo". Russel (2003) nos informa que, devido a esta imagem, escritores posteriores atribuíram a Heráclito a famosa frase: "Todas as coisas estão em constante fluxo" e Sócrates se referia aos seguidores de Heráclito apelidando-os de "os fluentes".

A doutrina de Heráclito sobre o fluxo chama a atenção para o fato de todas as coisas estarem envolvidas em alguma espécie de movimento. Entretanto, da costa ocidental da Itália, na cidade grega de Eléia, viria a etapa seguinte da filosofia grega que nos levaria a outro extremo. Negando completamente o movimento, Parmênides acreditava que era na imutabilidade do ser que se encontrava a realidade e se fundamentava o conhecimento. De sua célebre obra, o *Poema*, são conhecidos apenas pequenos fragmentos e referências posteriores. Grande parte de sua obra, que tem o seu quê de impressionante e grandiosa, é dirigida, segundo Caraça (1998), contra a escola pitagórica e, não menos importante, a outra parte é contra Heráclito:

> Parmênides distinguia aquilo que era objeto puramente da **razão** – o que ele chamava a **verdade** – e o que era dado pela **observação**, pelos **sentidos** – o que ele denominava **opinião**. (...)
>
> Ao **existente** ele reconhece, na parte do **Poema** dedicada à verdade, as características seguintes – **unidade, homogeneidade; continuidade, imobilidade, eternidade**, relegando para o **vulgo da opinião** todos aqueles atributos que porventura contrariem estes. (CARAÇA, 1998, p. 73-74, grifos do autor)

Discípulo de Parmênides, Zenão viveu no século V a.C. e, através de seus paradoxos, procurou evidenciar a fragilidade das idéias de Heráclito, mostrando as contradições a que leva a própria noção de movimento. Através de cuidadosos argumentos, procurou mostrar as incoerências da idéia grandiosa dos pitagóricos de ordenação matemática do Universo. Não sabemos se deixou alguma coisa escrita, uma vez que seus paradoxos nos foram relatados por Aristóteles, cujo objetivo era refutar Zenão.

Segundo o relato de Aristóteles – e que desde então costuma ser repetido – é que Zenão queria, com seus paradoxos, demonstrar a impossibilidade do movimento. Segundo Ávila (1999), o mais provável é que Zenão quisesse mostrar a fragilidade das idéias de Heráclito, ou apontar as deficiências dos conceitos formulados e das próprias bases racionais do conhecimento.

É assim que as grandes concepções filosóficas da Grécia Antiga - o **devir heracliteano**, a **ordenação matemática dos pitagóricos**, a **imobilidade eterna dos eleatas** - originadas nas colônias gregas da Ásia Menor e da Itália se encontram e se chocam em meados do século V a.C.. Todos esses problemas são intensamente debatidos e é nesse contexto que Atenas torna-se a metrópole da cultura grega: a classe dos comerciantes e artesãos adquire peso econômico e é tomada por uma crescente febre de saber – as concepções das grandes escolas filosóficas descem ao povo que tende a apropriar-se delas.

1.2.1.2 – O Horror ao Movimento

Vimos como o **devir heracliteano** se contrapõe à **imobilidade eterna dos eleatas** e como essas duas concepções filosóficas disputaram a primazia pela inteligibilidade do Universo. A idéia grandiosa dos pitagóricos de **ordenação matemática do Universo**, que já se encontrava abalada pela dificuldade de compreensão da incomensurabilidade, foi finalmente arrasada pelos argumentos de Zenão, que vieram dar o 'golpe final' ao ideal pitagórico. Com esses argumentos, Zenão evidenciava a incompatibilidade da estrutura da reta - então formada apenas por uma sucessão de números inteiros, ou seja, era descontínua - com a máxima pitagórica de que "todas as coisas têm um número", ao questionar que número deveria representar o segmento entre dois números consecutivos. Também Heráclito teria suas concepções filosóficas atacadas pelos paradoxos de Zenão, que mostrariam as incoerências e dificuldades de compreensão da 'eterna transformação'.

O sistema filosófico de Platão também traria sua "defesa contra a fluência". Seu sistema filosófico iria impor à Ciência e Filosofia gregas, a partir do dobrar do século V para o IV a.C., duas limitações:

- a rejeição do **devir** como base de uma explicação racional do mundo;
- a rejeição do **manual** e do **mecânico**, banidos para fora do domínio da cultura.

Essas duas limitações iriam "pesar duramente sobre as possibilidades de construção matemática, obrigando o pensamento helênico a uma queda vertical, numa altura em que pareciam estar criadas as condições para uma ascensão vertiginosa", segundo Caraça (1998). E assim, o pensamento dominante grego é invadido pelo horror à transformação, e daí resulta o horror ao movimento, ao material, ao sensível, ao manual, do mecânico. Entretanto, o estudo do movimento não seria completamente abandonado, como nos informa Caraça (1998):

> Quer dizer que ele [o movimento] foi posto totalmente de parte? De modo nenhum! Procurou-se dar dele uma explicação que o relegasse para o museu das múmias e o tornasse conseqüentemente inofensivo, embora existente. E como há sempre um filósofo para cada tarefa, por mais retorsa e macabra, esse filósofo surgiu, na pessoa de *Aristóteles*.
>
> *Aristóteles*, que aliás conseguiu realizações interessantes em alguns domínios do pensamento, deu do movimento uma definição e uma teoria qualitativa tão sutis [vide *Física* de Aristóteles] que conseguiu torná-las totalmente incompreensíveis (...).
>
> Só duma coisa parece ter-se esquecido *Aristóteles* – de observar o movimento! O que foi origem dum percalço de vulto – afirmar (*Física*, livro IV 216 a) que *"a experiência mostra que os corpos, cuja força é maior, seja em peso, seja em ligeireza, (...) atravessam mais depressa um espaço igual e na proporção que as grandezas (peso ou ligeireza) têm entre si"*, afirmação que equivale a esta – os corpos caem com velocidades proporcionais aos pesos – e que a Física experimental mais tarde havia de desmentir totalmente (por obra de Galileu, o fundador da Física moderna e o verdadeiro iniciador do método experimental em Ciência). (CARAÇA, 1998, p.116, grifos do autor)

Segundo Caraça (1998), essas limitações foram decisivas na incapacidade grega para construir o conceito de função e, por conseqüência, para abordar o estudo quantitativo dos fenômenos naturais:

> (...) na tendência para o abandono da realidade sensível, da realidade fluente, e para o refúgio no seio do espiritualismo, onde se pode construir, à vontade, uma **permanência** que abrigue dos vendavais da transformação...
>
> Está o leitor recordado (...) sobre a essência do conceito de **variável**? Da sua natureza contraditória, de síntese do **ser** e **não ser**? Como poderia um tal conceito surgir na Grécia pós-socrática, dominada por uma doutrina filosófica que, como mostramos atrás, rejeitava a **contradição**, o **devir** e procurava, em tudo, **aquilo que guarda permanentemente** a sua identidade? Não! A **variável**, porque o é, **não guarda a sua identidade**, ultrapassa o lago tranqüilo, mas estéril da **permanência**. (CARAÇA, 1998, p.171-180, grifos do autor)

Entretanto, apesar das contradições não resolvidas acerca da incomensurabilidade, o ideal da 'ordenação matemática' dos primeiros pitagóricos não desapareceria e ainda brilharia com força em Platão e depois dele, embora tendo perdido sua feição 'quantitativa' e se refugiado nos domínios do 'qualitativo', em que o 'número' cede espaço à 'forma' e à 'figura'.

1.2.2 – O Alvorecer da Matemática Grega

> **The Greeks identified mathematics with the reality of the physical world and saw in mathematics the ultimate truth about the structure and design of the universe.** They founded the alliance between mathematics and disinterested study of nature, which has since become the very basis of modern science. Moreover, they went far enough in rationalizing nature to establish firmly the conviction that **the universe is indeed mathematically designed**, that it is controlled, lawful, and intelligible to man. (KLINE, 1972, p. 172, grifo nosso)

Os primeiros estudos da matemática grega tinham um objetivo principal: compreender o lugar do homem no universo de acordo com um esquema racional. Assim, era uma matemática que colocava não só a questão "Como?", mas também a moderna questão científica "Por quê?". A matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as idéias em seqüências lógicas, a encontrar os princípios fundamentais. Era a mais racional de todas as ciências e, não existindo dúvidas quanto à aquisição da Matemática Oriental pelos mercadores gregos através das suas rotas comerciais, os gregos logo descobriram o que os orientais tinham deixado por fazer: a sua racionalização. Partindo de conhecimentos acumulados há vários séculos adquiridos principalmente dos babilônios e de suas próprias observações, os gregos quiseram então explicar do que se compõe o mundo, ou seja, qual o elemento primeiro da matéria, e como o cosmos está organizado.

Desde cedo os gregos demonstraram tendência para a especulação abstrata. Em particular, transformaram os conhecimentos de Álgebra que haviam adquirido com os babilônios em Álgebra Geométrica, uma vez que adotaram o modelo geométrico em Matemática e passaram a formular todo o seu conhecimento em linguagem geométrica.

Entre todos os povos da Antigüidade Ocidental, foram os gregos que não apenas colecionaram e examinaram os fatos, mas também os sistematizaram em um grande esquema. Assim, embora estes estudos tenham raízes em civilizações anteriores, foi na Grécia que o estudo sistematizado, qualitativo e quantitativo de uma classe de fenômenos naturais com vistas a uma interpretação racional do mundo teve destaque:

> In connection with Babylonian astronomy, we find that problems involving continuous variation were studied, but only to the extent of tabulating the values of a function (such as the brightness of the moon, for example) for values of the argument (time) measured at equal intervals, and from this calculating the maximum (intensity) of the function. **The Greeks were the first, however, systematically to analyze the idea of continuous magnitude and to develop concepts leading to the integral and the derivative**. (BOYER, 1959, p.15-16)

Vale ressaltar que, para os gregos, número queria dizer *número inteiro*. Pitombeira (1994) nos lembra que os gregos não conheciam nem mesmo os números racionais, apenas utilizavam as razões entre inteiros. É assim que a igualdade, usando nossa notação moderna, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, onde *a, b, c* e *d* são números inteiros positivos, para os gregos queria dizer que *a* está para *b* assim como *c* está para *d*.

1.2.2.1 – As Origens da Matemática Grega

Os relatos que temos sobre as origens da matemática grega se concentram nas chamadas escolas Jônia e Pitagórica e em seus principais representantes – Tales e Pitágoras – embora as reconstruções de seus pensamentos se baseiem em narrações fragmentárias elaboradas nos séculos posteriores. Praticamente não existem documentos matemáticos ou científicos até Platão - século IV a.C.

Grandes navegadores e negociantes, os gregos mantiveram estreito contato com outros povos e, conseqüentemente, com outras culturas. É principalmente na Babilônia e no Egito que encontraram material para sua geometria e astronomia. Tales e Pitágoras, Demócrito e Eudoxo, todos eles viajaram ao Egito e à Babilônia. Segundo Waerden (1954), a tradição babilônica supriu o material que os gregos, em particular os pitagóricos, usaram para construir suas matemáticas.

Tales (c. 624 – 548 a.C.), um rico negociante da cidade de Mileto, visitou a Babilônia e o Egito na primeira metade do século VI a.C.. Segundo nos informa Struik (1997), a figura de Tales simboliza as circunstâncias sob as quais foram estabelecidos os fundamentos não só da nova Matemática, mas também da Ciência e da Filosofia modernas. Foi Tales quem trouxe a Matemática do Egito para a Grécia, introduzindo uma revolucionária inovação: de que as verdades matemáticas devem ser provadas. Tendo demonstrado vários teoremas da geometria plana – algumas de suas provas 'mais gerais' e outras 'mais empíricas' - Tales é considerado o pai da Matemática Dedutiva e a Jônia o berço da Matemática grega.

Devido à riqueza e diversidade de elementos da Matemática grega, vamos nos deter apenas ao que diz respeito diretamente ao nosso estudo, tentando, na medida do possível, não ir muito além do desejado.

1.2.2.2 - O Século VI a.C. e a Escola Pitagórica

A cerca de 50 km de Mileto, na ilha Jônia de Samos, por volta de 580 aC, nasceu Pitágoras, filósofo cuja vida muito pouco se sabe, apesar do tanto que já se escreveu sobre ela. Apesar de várias biografias de Pitágoras terem sido escritas na Antigüidade, inclusive uma por Aristóteles, elas foram perdidas e, como a ordem por ele fundada era uma comunidade secreta, fica muito difícil escrever sobre esse ser 'mítico' da História da Matemática.

Pitágoras viajou pelo Egito e Babilônia, possivelmente indo até a Índia. Por volta de 540 a.C., fundou em Crotona, sul da península Itálica, uma sociedade voltada ao estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática, provocando uma verdadeira epidemia de interesse pela Matemática, que contagiou a maioria das cidades-estados da Grécia de então.

Pitágoras foi o primeiro a conceber a Matemática como um sistema de pensamento mantido coeso por provas dedutivas, tendo sido ele também o primeiro a usar a palavra Matemática. Antes dele havia apenas a palavra *mathemata*, que designava conhecimento ou aprendizado em geral. Aristóteles escreveu em sua Metafísica I: "Os ditos pitagóricos, que foram os primeiros a se interessarem por Matemática, não apenas a desenvolveram, mas também, (...) imaginaram que os princípios da Matemática eram os princípios de todas as coisas". Proclus escreveu, em seu comentário no Livro I dos Elementos de Euclides: *"Pitágoras... transformou esta ciência numa forma liberal de educação, examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de uma maneira [...] intelectual."* (Thomas, 1939, apud Bashmakova & Smirnova, 2000, p. 13, tradução nossa)

O sistema de conhecimento dos primeiros pitagóricos consistia em quatro partes: aritmética, geometria, música e astronomia. Eles consideraram a aritmética – a ciência dos números – como a base da Matemática, e tentaram reduzir a geometria à aritmética assumindo que a razão entre dois segmentos poderia ser expressa pela razão entre dois números. Filolau, um dos mais importantes representantes da escola pitagórica afirma que "todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem o número". Caraça (1998), comenta esta frase que encerra a grandiosa idéia de uma ordenação matemática do Cosmos:

> No fundo duma afirmação destas palpita uma das idéias mais grandiosas e mais belas que até hoje têm sido emitidas na história da Ciência – a de que a compreensão do Universo consiste no estabelecimento de relações entre números, isto é de **leis matemáticas**; estamos, portanto, em face do aparecimento da idéia luminosa duma ordenação matemática do Cosmos. (CARAÇA, 1998, p. 67, grifo do autor)

Conforme Simmons (1987), a Ciência começa com Pitágoras no sentido de que ele executou deliberadamente o primeiro experimento científico e que foi o primeiro a conceber a conjectura sumamente ousada de que o mundo é um todo ordenado e compreensível. Ele foi o primeiro a aplicar a palavra *Cosmos* – que anteriormente significava ordem ou harmonia – a esse todo.

Embora a fundamentação racional do conhecimento tenha sua origem em Tales, é com Pitágoras - que teve a percepção genial de que todos os fenômenos se fundamentam no número e podem ser explicados em termos puramente numéricos - que adquire grande impulso. Segundo assinala Garbi (2003), a idéia de que a Matemática trata de conceitos abstratos acima da realidade física, a crença de que o mundo físico pode ser estudado através da Matemática e a concepção de Deus como o Grande Arquiteto do Universo são legados pitagóricos que sobrevivem até hoje.

Para Pitágoras, são os números que constituem o elemento primeiro, o 'modelo das coisas'. No fundo, o que Pitágoras propõe é a possibilidade da matematização do universo, que só veio a acontecer com Galileu, Kepler e Newton. A idéia de que a Matemática era a chave para a interpretação correta da natureza surgiu com os pitagóricos, ou provavelmente com o próprio Pitágoras. Esse ideal pitagórico é assim resumido por Aristóteles:

> (...) aqueles a quem se chama pitagóricos foram os primeiros a consagrar-se às Matemáticas e fizeram-nas progredir. Penetrados desta disciplina, pensaram que **os princípios das Matemáticas eram os princípios de todos os seres**. Como, destes princípios, os números são, pela sua natureza, os primeiros, e como, nos números, os pitagóricos pensavam aperceber uma multidão de analogias com as coisas que existem (...); como eles viam, além disso, que os números exprimiam as propriedades e as proporções musicais; como, enfim, todas as coisas lhe pareciam, na sua inteira natureza, ser formadas à semelhança dos números e que os números pareciam ser as realidades primordiais do Universo, consideraram que os princípios dos números eram os elementos de todos os seres e que **o Céu inteiro é harmonia e número.**[8] (Metafísica. A. 5, apud CARAÇA, 1998, p. 67, grifo nosso)

Na procura de leis eternas do universo, estudaram geometria, aritmética, música e astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico.[9] Como os ensinamentos da escola pitagórica eram inteiramente orais e o costume da irmandade atribuía todas as descobertas ao seu fundador, não sabemos exatamente que descobertas matemáticas se devem a Pitágoras e quais são devidas a outros membros de sua escola.

Na geometria, os pitagóricos deram demonstração geral a vários teoremas, em especial àquele que veio a ser chamado Teorema de Pitágoras, conhecido, sem prova, séculos antes por egípcios, chineses e mesopotâmios.

---

[8] É também em nome dessa harmonia e perfeição divinas que os pitagóricos são os primeiros a declarar a esfericidade da Terra. Simplesmente porque a esfera representa... a forma mais perfeita!

Por longos séculos seria estabelecido o dogma do círculo e da esfera como formas obrigatórias dos elementos do universo. Somente a custa de muitas hesitações e de muito trabalho que Kepler, mais de dois mil anos depois, conseguiria escapar dessa construção pitagórica que tanto o fascinava.

Desde o século V a.C., portanto, estão instauradas as bases da arquitetura cósmica que irão prevalecer até o século XVI de nossa era, com muitos ajustes e com um grande retrocesso no Ocidente cristão da Idade Média: a esfericidade da Terra, a harmonia das formas e dos movimentos determinada por um deus geômetra e musicista que só admite a imperfeição no mundo sublunar. Cf Simaan & Fontaine (2003, p. 31-32).

[9] Na Idade Média, esse grupo de matérias - a aritmética, geometria, música e astronomia - ficou conhecido como *quadrivium* (ou 'caminho quádruplo'), ao qual se acrescentava o *trivium,* formado de gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa culta. Cf Simmons, p. 673, 1987.

Na música, deram uma definição matemática da escala musical, utilizada até hoje. A lei dos intervalos musicais – descoberta que surgiu de um simples experimento com a lira – foi, segundo Simmons (1987), o primeiro fato quantitativo descoberto sobre o mundo natural. Assim, a redução da música a uma simples relação entre números inteiros se tornou possível aos pitagóricos a partir da descoberta, por eles, de dois fatos:

(I) **O som emitido por uma corda dedilhada depende do comprimento dessa corda;**

(II) **A harmonia do som é dada por cordas cujos comprimentos podem ser expressos como razões de números inteiros.**

É assim que descobrem a existência de uma relação matemática entre as notas da escala musical e os comprimentos de uma corda vibrante, ou de uma coluna de ar em vibração em uma flauta: uma coluna de ar ou uma corda de determinado comprimento daria uma nota; reduzindo seu comprimento à metade, daria uma nota uma oitava acima. A relação de comprimento de dois para três daria o intervalo musical conhecido como quinta, e a relação de três para quatro, uma quarta. Portanto, as razões entre os intervalos musicais são simples razões numéricas, a saber: **1:2** (uma oitava), **2:3** (uma quarta), **3:5** (uma quinta), isto é, as diferenças qualitativas dos sons das cordas da lira podem ser reduzidas às razões de seus comprimentos, e assim, a números.

Deste modo, se uma corda vibrante com doze unidades de comprimento é reduzida a oito unidades, soará uma quinta acima; se for reduzida a seis unidades, soará uma oitava. Assim, como a oitava e a quinta eram consideradas sons harmônicos, Pitágoras disse que os números 12, 8 e 6 estavam em 'progressão harmônica'. Música, harmonia e números – indissoluvelmente unidos de acordo com a doutrina pitagórica:

> Sejam a e b dois números quaisquer, e seja $m = \frac{a+b}{2}$ a sua média aritmética; chama-se média harmônica dos mesmos dois números àquele número h que forma com a, m e b uma proporção nas seguintes condições

(1) $a : m :: h : b$ ou seja $\frac{a}{m} = \frac{h}{b}$.

Daqui, tira-se inteiramente h = $\frac{a.b}{m}$ e, substituindo-se m pelo seu valor,

(2) $h = \frac{2.a.b}{a+b}$.

A proporção (1) toma, portanto, o aspecto

(3) $a : \frac{a+b}{2} :: \frac{2.a.b}{a+b} : b$

Pois bem: façamos, por exemplo, a = 12 e b = 6; vem m = 9, h = 8; a proporção é 12 : 9 :: 8 : 6. Ora, estes quatro números dão precisamente, as razões dos comprimentos das cordas do monocórdio que fornecem os intervalos musicais de oitava, quinta e quarta (...).

E como isso se dá sempre que seja a = 2.b, como o leitor facilmente reconhece, na relação numérica (3) está, afinal, condensada a harmonia musical!

Que mais seria preciso para inebriar uma mente ávida de encontrar o porquê da harmonia universal? (CARAÇA, 1998, p. 69)

Na astronomia, os pitagóricos quiseram não somente observar e descrever o movimento dos corpos celestes, mas também descobrir a regularidade de seus movimentos. Assim, reduziram os movimentos dos planetas a relações numéricas e foram os primeiros a acreditar que a Terra era esférica e se movia.

Os pitagóricos chegaram à conclusão de que "Tudo é número". As relações entre grandezas matemáticas e as leis da natureza são expressas em termos de números inteiros e suas razões. Desenvolveram uma teoria completa a respeito dos números, baseada, segundo Ronan (2001), em três espécies de observação:

(I) A relação existente entre os lados de um triângulo retângulo, onde o quadrado do maior lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados;

(II) A relação matemática existente entre as notas musicais e os comprimentos de uma corda vibrante ou de uma coluna de ar em vibração;

(III) A existência de relações numéricas definidas entre os tempos utilizados pelos corpos celestes em sua órbita ao redor da terra.

Segundo Simaan & Fontaine (2003), dizer que "Tudo é número" é primordial na História das Ciências, visto que, embora a matemática tenha se desenvolvido consideravelmente entre os egípcios e mesopotâmios, é a primeira vez, ao que parece, que ela é vista como um princípio organizador da realidade:

> O número é todas as coisas, que o número não representa meramente as relações dos fenômenos entre si, mas é a substância das coisas, a causa de todos os fenômenos da natureza. Pitágoras e seus seguidores foram levados a esta suposição ao perceberem como **tudo na natureza é governado por relações numéricas**, como a harmonia dos sons musicais depende de intervalos regulares, dos quais a avaliação numérica eles foram os primeiros a determinar. (DREYER, 1953, p. 36, apud PITOMBEIRA, 1994, grifo nosso).

Para Youschkevitch (1976), essa tentativa de determinar a mais simples lei da acústica atribuída aos primeiros pitagóricos é típica da busca pela interdependência quantitativa entre grandezas físicas como, por exemplo, a correspondência entre o comprimento da corda de uma lira e a intensidade da nota emitida quando esta corda é vibrada. Segundo Youschkevitch, o aparecimento desses fatos na Grécia Antiga pode ser considerado como novos 'brotos' do conceito de função.

Entretanto, da maior e mais bem conhecida descoberta dos pitagóricos, viria a sua tragédia. O famoso Teorema de Pitágoras levou imediatamente à descoberta dos incomensuráveis, que refutavam seu ponto de vista de que todas as coisas são números. De acordo com o Teorema de Pitágoras, o comprimento da diagonal do quadrado de lado unitário é a raíz quadrada de 2, que não pode ser expressa por um inteiro nem por uma razão de inteiros, ou seja, ela é incomensurável. Havia pelo menos uma coisa no mundo que podia ser expressa por uma relação numérica. Isso sugeriu aos gregos antigos que a geometria, e não a aritmética, era a fonte mais segura do conhecimento exato. Estava frustrada, assim, a primeira tentativa de aritmetização da Matemática, e o sonho pitagórico parecia acabado. A conseqüência imediata foi a inversão dos papéis da aritmética e da geometria e esta foi adotada como a base da Matemática. E assim, os gregos traduziram todas as operações aritméticas para uma linguagem geométrica e começaram a operar com segmentos, áreas e volumes.

De acordo com Bashmakova & Smirnova (2000), perto do fim do século V a.C., a Álgebra também foi posta numa "armadura geométrica". Inicia-se a geometrização da álgebra. E inicia-se justamente com aqueles para os quais os números eram "a pedra fundamental de todo o universo", o céu era feito de "harmonia e números" – os pitagóricos. Segundo Waerden (1954), embora seja duro de acreditar, foram particularmente os pitagóricos que estabeleceram as bases da álgebra geométrica, uma vez que o domínio dos números se mostrou pequeno frente o problema da incomensurabilidade da diagonal do quadrado. Problema que foi solucionado passando do domínio dos números para o domínio das grandezas geométricas: a álgebra geométrica era também válida para os segmentos irracionais e, portanto, uma ciência 'exata'. Estava mantida, desta forma, a consistência lógica da Matemática grega.

1.2.2.3 – A Álgebra Sincopada de Diofante

Diofante teve uma importância muito grande para o desenvolvimento da Matemática, especialmente na álgebra, sendo considerado o maior algebrista grego. Dentre os trabalhos que escreveu, foram preservados apenas seis dos treze livros. Destes, o mais importante é *Aritmética* que, segundo Struik (1997), revela um grande conhecimento da antiga álgebra da babilônica, e provavelmente também a hindu, devido ao tratamento dado por Diofante às equações indeterminadas:

> A **influência oriental** é ainda mais forte na Arithmetica, de Diofanto (c. 250 d.C.). (...) O seu tratamento engenhoso das equações indeterminadas revela que **a antiga álgebra da Babilônia ou talvez da Índia não só sobreviveu ao brilho da civilização grega, como também foi aperfeiçoada com a atividade de alguns homens**. Não se sabe como e quando isto aconteceu, assim como também se desconhece quem era Diofanto – pode ter sido um babilônio helenizado. O seu livro é um dos tratados mais fascinantes da Antigüidade greco-romana que foram conservados. (Struik, 1997, p. 105, grifo nosso)

A Aritmética de Diofante é uma coleção de cerca de 150 problemas, todos estudados em termos de exemplos numéricos específicos, onde encontramos a primeira utilização sistemática daquilo que poderíamos chamar de 'precursores' dos nossos símbolos algébricos. Diofante utilizava um símbolo especial para a incógnita, para algumas operações e para cada potência da incógnita. Seu trabalho apresenta uma 'álgebra sincopada'[10], em que certas abreviações são sistematicamente introduzidas para representar quantidades recorrentes e determinadas operações, permitindo a solução de problemas de maior complexidade como nunca havia sido feito anteriormente. Sua simbologia representou um grande passo no desenvolvimento da Álgebra, mesmo que seja considerada ainda bastante 'primitiva':

> Diophantus reduces all his problems, no matter how complicated, to equations in one unknown. Either he express the other unknowns in terms of that one, or he gives them arbitrary values to be modified afterwards, if necessary, in order to satisfy the other conditions of the problem. (...)
>
> The **algebraic symbolism of Diophantus is still rather primitive**. He had **a special symbol for the unknown** (which we shall always denote by ***s***), (...).
>
> (...) Diophantus uses **special names for the powers of unknown *s***; for them he uses the following **abbreviating symbols**:
>
> (**1**) $\overset{\circ}{M}$ = (...) = unity;
>
> (***s***) ς = (...) = number;
>
> (s^2) Δ^Y = (...) = square;
>
> (s^3) K^Y = (...) = cube;
>
> (s^6) K^YK = (...) = cubocube
>
> Moreover he has names for reciprocals of powers such as s^{-1}, s^{-2}, etc.
>
> For the addition of terms, Diophantus simply writes them in a row, (...)
>
> Diophantus has a definite sign for subtraction, something like an inverted Ψ. **Everything else, multiplication, equality, greater than and less than, he expresses in words**, (...). (Waerden, 1954, p. 281, grifo nosso)

Deste modo, encontramos em Diofante um grande avanço da 'álgebra' rumo à álgebra simbólica e, mesmo não tendo contribuído diretamente com nenhum caso de

---

10 Álgebra sincopada – Diofante usa nomes especiais para as potências da incógnita, utilizando uma abreviação para simplificar a escrita, daí o nome "Álgebra sincopada", que significa "abreviada", "simplificada". Não nos esqueçamos que ainda estamos no século III a.C. e a Álgebra ainda está 'engatinhando'.

dependência funcional, podemos dizer que representou um importante passo para o desenvolvimento da Álgebra e, conseqüentemente, para o futuro desenvolvimento dos estudos de dependências funcionais.

1.2.2.4 – Arquimedes

Arquimedes (c.287 a.C.-212 a.C.), o maior matemático grego e de toda a Antigüidade, viveu em Siracusa, na Ilha de Sicília. Em sua juventude, estudou no grande centro intelectual de Alexandria quando, provavelmente, conheceu seu amigo Eratóstenes, futuro diretor da biblioteca de Alexandria. Retornando a sua cidade natal, devotou o resto de sua vida à pesquisa matemática.

Embora tivesse escrito sobre uma variedade bastante grande de assuntos, incluindo geometria plana e sólida, aritmética, astronomia, hidrostática e mecânica, Arquimedes não foi um compilador de descobertas anteriores. Sua obra, no dizer de Ávila (1986), "pelos muitos elementos de criatividade que contém, e pelo uso magistral dos recursos de invenção e descoberta, enseja reflexões tão oportunas e enriquecedoras ao matemático de hoje como aos de muitas épocas passadas".

Como aconteceu com muitas obras na Antigüidade, as de Arquimedes também se perderam ao longo dos séculos ou foram destruídas nos vários incêndios que sofreu a biblioteca de Alexandria. O que temos hoje de sua obra provém de manuscritos copiados uns dos outros ao longo dos séculos. Esses manuscritos foram minuciosamente estudados e editados no final do século XIX pelo eminente filólogo dinamarquês J. L. Heiberg. Segundo Aaboe (2002), uma provável ordem cronológica dos trabalhos de Arquimedes é a seguinte:

1. Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas – Livro I
2. **A Quadratura da Parábola**
3. Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas – Livro II
4. **Sobre a esfera e o Cilindro – Livros I e II**
5. **Sobre as Espirais**
6. **Sobre os Cones e os Esferóides**

7. Sobre os Corpos Flutuantes

8. A Medida de um Círculo

9. O Contador dos Grãos de Areia

10. Método

Além desses trabalhos que foram preservados em grego, há dois que foram 'preservados' por meio das traduções árabes e alguns que se perderam, como o livro sobre a construção de máquinas para representar os movimentos do sol, da lua e dos corpos celestes - chamado *Sobre a Construção das Esferas.* Arquimedes gostava tanto de observar o movimento dos astros que fabricou, segundo dizem, um pequeno planetário - modelo reduzido representando o universo concebido até então – que reproduzia, através de seus mecanismos, o movimento que imaginavam ter os diferentes corpos celestes:

> (...) his greatest accomplishment in the field of astronomy, especially admired in antiquity, was the construction of a planetarium, a revolving open sphere with internal mechanisms with which he could imitate the motions of the sun, the moon and the 5 planets. A single turn started the entire complicated movement with he varying periods of rotation of the different celestial bodies. 'When Gallus set the sphere in motion', writes Cicero who had himself seen the apparatus, 'one could, at every turn, see the moon rise above the earth's horizon after the sun, just as occurs in the sky every day; and then one saw how the sun disappeared and how the moon entered into the shadow-cone of the earth with the sun on the opposite side...' (WAERDEN, 1954, p. 211)

Um breve olhar sobre cada um dos tratados de Arquimedes, embora de maneira resumida e incompleta, logo nos faz compreender a importância, o alcance e a originalidade de sua grandiosa obra, que anteciparia os modernos métodos do cálculo e da mecânica. Comecemos pelos dois trabalhos de Física que, segundo Aaboe (2002), são os únicos escritos não elementares da Antigüidade sobre problemas físicos que possuem sentido imediato para um leitor moderno:

(I) Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas: Livros I e II – Tratados nos quais primeiramente é demonstrada a lei das alavancas que, depois, é usada para achar o centro de gravidade de várias lâminas de formas diferentes. Vale lembrar que a noção de centro de gravidade é invenção de Arquimedes.

(II) Sobre os Corpos Flutuantes – Contém a lei da flutuação, de Arquimedes, claramente enunciada e impecavelmente justificada.

Sua obra de Aritmética e Astronomia - **O Contador dos Grãos de Areia** -, segundo Aaboe (2002), é um tratado mais popular no qual constrói um sistema de notação numérica para designar grandes números. A fim de testar suas idéias, decide escrever um número (10^{63}) - maior do que o número de grãos de areia que seriam necessários para encher todo o universo. Arquimedes fornece neste tratado uma das poucas fontes da astronomia grega antiga e chega a mencionar suas próprias tentativas de medir o diâmetro aparente do sol.

Entretanto, a maior parte da obra de Arquimedes é dedicada à Matemática Pura. Os problemas sobre os quais se debruça são quase todos do tipo que hoje exigem um tratamento envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral. Vejamos seus seis tratados geométricos – três sobre geometria plana, dois sobre geometria sólida e um sobre seu método de fazer descobertas:

(I) Quadratura da Parábola – Tratado em que demonstra o teorema de que a região de uma parábola cortada por uma linha transversal é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo com mesma base e altura. Gosta tanto deste teorema que o demonstra de três maneiras diferentes.

(II) Sobre a Esfera e o Cilindro: Livros I e II – Este é o mais profundo dos tratados, pois contém, dentre outras coisas, uma prova rigorosa de suas grandes descobertas acerca do volume e da área da superfície de uma esfera e da proporção que há entre as áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida. Trabalhando com um cilindro reto e uma esfera nele inscrita, demonstrou que o volume da esfera é $\frac{2}{3}$ do volume do cilindro e a área total da esfera é $\frac{2}{3}$ da área total do cilindro. Assim, $\frac{V_e}{V_c} = \frac{A_e}{A_c} = \frac{2}{3}$.

O cálculo do volume de uma esfera é considerado a mais maravilhosa de suas descobertas.

(III) Sobre Espirais – Tratado sobre a curva hoje denominada *Espiral de Arquimedes*. Nesse tratado, Arquimedes define a espiral em termos de movimento. Ele a define do seguinte modo:

> Se revolvermos uma reta com uma das extremidades fixas num movimento uniforme em um plano até que ela retorne à posição inicial, e se, ao mesmo tempo em que revolvermos a reta, um ponto move-se ao longo da reta num movimento uniforme, começando da extremidade fixa, o ponto descreverá uma espiral no plano. (Apud BARON, vol.1, 1985, p. 53)

Neste tratado, além de definir a espiral, Arquimedes descobre muitas propriedades surpreendentes desta curva.

(IV) Sobre os Cones e Esferóides – Denominação dada por Arquimedes aos sólidos de revolução gerados por parábolas, hipérboles e elipses em torno de seus eixos. Neste tratado, calcula volumes de segmentos desses sólidos e incidentalmente, segundo nos informa Simmons (1987, Vol. 1), Arquimedes prova e usa as 'fórmulas' para as somas dos primeiros **n** inteiros e seus quadrados.

(V) A Medida de um Círculo – Pequeno tratado no qual demonstra, com todo o rigor, como ninguém havia feito antes, que a área de um círculo é igual à de um triângulo com base igual a sua circunferência ***c*** e altura igual a seu raio ***r***, ou seja, a área do círculo é $A_c = \frac{1}{2}cr$.

Depois disso, mostra que a razão da área do círculo pelo quadrado de seu raio é igual à razão de sua circunferência pelo seu diâmetro. Em nossa notação, ficaria assim: $\frac{A}{r^2} = \frac{C}{2r}$. Esta é a razão que chamamos hoje de π, que Arquimedes passa a calcular com a seguinte aproximação $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ através da inscrição e circunscrição de polígonos com um número de lados cada vez maior na circunferência, chegando até ao polígono de 96 lados e obtendo, para o valor de π, uma aproximação por excesso que ainda hoje é suficiente para aplicações práticas: $\frac{22}{7}$.

Nesses seus estudos sobre a relação entre a circunferência e o diâmetro do círculo - onde aparece implicitamente o conceito de dependência entre variáveis - Arquimedes introduziu a primeira resolução por aproximação da História da Matemática e criou os conceitos de infinitamente grande e pequeno. Com a definição de π, e nossa moderna simbologia, temos as familiares fórmulas da circunferência de um círculo, $c = 2\pi r$ e de sua área, $A = \pi r^2$.

(VI) Método – Arquimedes tinha o costume de enviar cartas com suas descobertas ao astrônomo Conon em Alexandria, de quem era amigo. Após a morte de Conon, passou a enviar seus trabalhos a Dositeo, discípulo de Conon, e também a Eratóstenes, o grande bibliotecário de Alexandria. Nessas correspondências, Arquimedes faz referência a um certo 'método mecânico' de fazer descobertas.

Ao contrário do que fora afirmado por muitos séculos – de que Arquimedes havia ocultado da posteridade o segredo de seu 'método mecânico' de fazer descobertas –, foi em seu tratado denominado 'Método' que Arquimedes expôs seu 'segredo'. Entretanto, esse trabalho desapareceu e, com ele, os caminhos trilhados por aquele que foi considerado "o maior gênio do Mundo Antigo" em suas descobertas. Assim, embora as descobertas de Arquimedes sempre tenham sido conhecidas dos matemáticos pelos tratados formais que deixou, seu método de fazer descobertas permaneceu envolto em mistério até 1906, quando o acadêmico dinamarquês Heiberg revelou ao mundo o conteúdo de sua grande descoberta: um curioso manuscrito perdido[11].

---

[11] No séc X, foi feita uma cópia do seu tratado *Método*, mas, entre os séculos XII e XIV, essa cópia foi reutilizada como livro de orações: as páginas foram arrancadas, raspadas e as orações escritas perpendicularmente ao texto original.

Após ter publicado as obras de Euclides e Arquimedes, Heiberg (1854-1928) - ilustre professor dinamarquês de Filologia que prestou inestimável serviço à História da Matemática pelas suas notáveis pesquisas sobre as obras gregas antigas - soube, pela leitura de um artigo publicado, em 1899, numa revista especializada, da existência de um manuscrito encontrado no Mosteiro do Santo Sepulcro em Jerusalém e posteriormente levado para Constantinopla. O artigo contava que o manuscrito de Jerusalém – um códice – continha escritos religiosos e, por baixo do texto religioso, havia uma outra escrita - de natureza matemática. Por tudo o que leu sobre esse palimpsesto – pergaminho usado para nele se escrever várias vezes - e pelo seu conhecimento de obras antigas, Heiberg suspeitou que o conteúdo matemático fosse alguma obra de Arquimedes. Então, foi a Constantinopla e, após examinar minuciosamente o documento, anunciou ao mundo num artigo publicado em uma revista alemã, em 1906, seu achado: quase 200 páginas de textos das obras de Arquimedes, muitas já conhecidas. Entretanto, Encontrado acidentalmente em um palimpsesto[12] em Constantinopla em 1906, após estar perdido por aproximadamente mil anos, é considerado o mais interessante e curioso de todos os tratados de Arquimedes. Nesse manuscrito, o grande geômetra grego descreve um "método mecânico" para investigar questões matemáticas.

Como vimos, Arquimedes tinha o costume de enviar suas obras aos sábios de Alexandria, prefaciando-as com cartas a esses sábios. Sua obra "Método" contém como prefácio uma carta a Eratóstenes de Alexandria. Nesta carta, Arquimedes descreve a Eratóstenes o seu método de fazer descobertas Matemáticas por meio da Mecânica:

> *Arquimedes a Erastótenes,*
>
> *Saudações.*
>
> *Enviei-lhe em outra ocasião alguns teoremas descobertos por mim, meramente os enunciados, deixando-lhe a tarefa de descobrir as demonstrações então omitidas... Vendo em você um dedicado estudioso, de considerável eminência em Filosofia e um admirador da pesquisa matemática, julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos... Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento... Estou convencido de que ele será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorrem.*

Em relação às palavras finais da citação acima, é oportuno notar que o chamado "método dos indivisíveis", inventado no século XVII, e que deu origem ao Cálculo

havia também neste palimpsesto o texto quase completo de uma obra de Arquimedes, até então desconhecida, na qual revela o método por ele usado para chegar a muitas de suas descobertas. Assim, estava desvendado um mistério que havia intrigado os matemáticos por muitos séculos: saber como Arquimedes fazia suas descobertas. Cf Ávila, 1987, in RPM 10.

[12] Pergaminho usado para nele se escrever várias vezes.

Diferencial e Integral, é muito parecido com o antigo "método mecânico" de Arquimedes. Comentando essa parte final da citação, Smith (1986) observa:

> Talvez em toda a História da Matemática nenhuma verdade profética como essa jamais foi expressa em palavras. Parece até como se Arquimedes visse, numa visão, os métodos de Galileu, Cavalieri, Pascal, Newton, e muitos outros grandes matemáticos da Renascença e da atualidade. (SMITH, apud apud ÁVILA, 1986, p. 32)

No "Método", Arquimedes descreve a seu amigo Eratóstenes como "investigara alguns problemas de matemática por meio da mecânica". Ao terminar a "demonstração" referente à esfera - "uma das maiores realizações matemáticas de todos os tempos", segundo Simmons (1987, vol. 2) -, Arquimedes faz o seguinte comentário:

> *Deste teorema, segundo o qual* ***o volume da esfera é quatro vezes o do cone tendo por base um círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera,*** *eu concebi a idéia de que* ***a superfície da esfera é quatro vezes a de um de seus círculos máximos;*** *pois, a julgar pelo fato de que a área do círculo é igual à de um triângulo que tem por base a circunferência e a altura igual ao raio, vejo que, do mesmo modo, o volume da esfera é igual ao do cone com base igual à superfície da esfera e altura igual ao raio.*

Arquimedes chega à conclusão de que o volume de uma esfera é $V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$ e sua superfície é $S_e = 4\pi R^3$. Mais importante ainda foi o método que ele usou para descobri-la, método esse que corresponde à primeira manifestação da idéia básica do cálculo integral, que não nos aprofundaremos aqui.

As *contribuições de Arquimedes são tantas, e tão variadas, que chega a ser* difícil falar delas. Definiu a espiral como uma curva gerada pelo movimento, uma abordagem atípica na Grécia Antiga. Arquimedes foi também o primeiro a aplicar o conceito de infinito ao utilizar um número infinito de secções para calcular volumes, independentemente da forma como o infinito era compreendido por ele. Sem dúvida, descobriu e apresentou inúmeras relações funcionais. Em seu tratado "A medida de um Círculo", no qual mostra que a razão da área do círculo pelo quadrado de seu raio é igual à razão de sua circunferência pelo seu diâmetro, - e no qual aparece implicitamente a noção de dependência entre variáveis - introduziu a primeira resolução por aproximação e criou os conceitos de infinitamente grande e infinitamente pequeno, antecipando os modernos métodos de cálculo.

1.2.2.5 – Apolônio

Apolônio foi outro famoso membro da escola de Alexandria. Nasceu entre 246 e 221 a.C.. *Foi um grande astrônomo assim como um grande matemático.* Em seu livro ***Seções Cônicas***, fez um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides sobre esse assunto. Arquimedes também havia provado algumas proposições de seções cônicas em seus trabalhos sobre áreas e volumes. Tanto Arquimedes quanto os escritores mais antigos já representavam as seções cônicas por meio de, normalmente se referindo a eixos de coordenadas retangulares, e às vezes também a eixos oblíquos.

A grande contribuição de Apolônio foi fundamentar um assunto que assumiria grande importância para os matemáticos do século XVII: *as cônicas.* Apenas os sete primeiros livros, dos oito que escreveu, chegaram até nós – os quatro primeiros em grego e os outros três numa tradução árabe do século IX, de acordo com Eves (1997). Entretanto, ler seu trabalho não é tarefa fácil principalmente devido à sua 'álgebra', como nos informa Waeren (1954):

> Ler uma demonstração em Apolônio requer um estudo extenso e concentrado. Ao invés de uma fórmula algébrica concisa, encontramos uma longa sentença, em que cada segmento de linha é indicado por duas letras que precisam ser localizadas na figura. Para entender uma linha de pensamento,somos obrigados a transcrever estas sentenças em fórmulas concisas modernas. Os antigos não tinham esta ferramenta... (WAERDEN, 1954, p. 266)

Seu grande progresso em relação aos seus predecessores foi ter gerado todas as curvas - elipse, parábola e hipérbole - por meio de um cone circular duplo, reto ou oblíquo, uma forma mais completa e geral que seus predecessores.

A Geometria das Cônicas permaneceria na forma dada por Apolônio até Descartes, uma vez que os trabalhos de Apolônio, além de terem sido pouco lidos, também foram parcialmente perdidos.

1.2.2.6 – A Grande Obra de Ptolomeu

> É inevitável que nos vejamos levados a comparar a refinada ciência babilônia com a dos gregos. Em um e outro caso, percebemos como que uma tradição razoavelmente contínua que se transmite até os últimos séculos anteriores a Cristo, quando ambas, **a ciência grega e a babilônia, se enfrentam com o problema do movimento – enlouquecedoramente quase regular – dos planetas**. Naquele tempo, a ciência grega e a babilônia dispunham, cada qual, de um esquema amadurecido e complexo, cheio de requintes de caráter técnico e enfeixando no interior desse esquema, todas as mais relevantes observações e considerações acumuladas ao longo de séculos. (PRICE, 2000, p. 26, grifo nosso)

No apogeu do Império Romano, um grego de Alexandria, Ptolomeu (90 – 168 d.C.) produziu uma obra que foi, ao mesmo tempo, a suma e a conclusão de toda a astronomia antiga. De fato, o ponto mais alto da astronomia grega foi a grande obra de Ptolomeu, cujas fundações estão na Babilônia e em seus grandes predecessores gregos: Aristarco, Arquimedes, Eratóstenes, Apolônio e Hiparco, que havia continuado o trabalho de astronomia feito por Apolônio, levando também em consideração as observações babilônicas. Por volta de 150 d.C., Ptolomeu completa o trabalho de Hiparco e leva a astronomia teórica a um desenvolvimento verdadeiramente admirável. Esses 300 anos entre Hiparco e Ptolomeu não foi um período ocioso, pois o próprio Ptolomeu se refere a outros autores que fizeram a tentativa de explicar o movimento dos planetas.

Desta forma, a 'Compilação Matemática' de Ptolomeu, conhecida pelo seu nome arabizado *Almagesto*, não só utiliza o conhecimento babilônico em astronomia herdado pelos gregos, como adota as tábuas astronômicas babilônicas juntamente com o seu sistema numérico de base sexagesimal. Era a junção do modelo de mundo desenvolvido pelos gregos com o minucioso modelo matemático babilônico:

> Do ponto de vista grego, os planetas aparentemente giravam em círculos de maneira quase, mas não inteiramente, uniforme. **A margem de falta de uniformidade foi medida pelos babilônios, que a tornaram acuradamente previsível**. (...)
>
> Os gregos tinham admirável conceito pictórico dos movimentos celestes, mas visão rudimentar de algo que pudesse ser medido quantitativamente e não apenas percebido qualitativamente. **Os babilônios conheciam todas as constantes e os meios de relacionar a teoria a pormenorizadas observações numéricas, mas não dispunham do conceito pictórico que transformaria o sistema em algo mais que uma seqüência de números**.
>
> Esse extraordinário acaso matemático, (...) daí chegando a uma teoria que se revelou convincente representação pictórica, tão próxima da verdade quanto se podia verificar quantitativamente, constituiu como que uma dádiva gratuita concedida pela natureza à nossa civilização. Decorrência dessa dádiva e de sua conseqüente elaboração helenista por meio de técnicas trigonométricas, **o grande livro que foi o Almagesto pôde apresentar-se, pela primeira vez, como uma explicação matemática, suficiente e completa, dos mais complexos fenômenos**. (PRICE, 2000, p. 29-30, grifo nosso)

O *Almagesto* foi a síntese matemática da maneira como cada qual dos planetas parece mover-se contra o pano de fundo das estrelas fixas, apresentando novos resultados alcançados por Ptolomeu na teoria dos movimentos planetários, assim como um catálogo dos posições das estrelas e uma nova e ampla tabela de cordas. Sua importância e seu alcance podem ser medidos pelas palavras de Price (2000):

> É, pois, no Almagesto que vemos **o triunfo de uma explicação matemática da natureza**, alcançado ainda no período helenista e operando perfeitamente dentro do limite de todas as observações que se faziam possíveis a olho desarmado. Tratou-se, claramente, do primeiro setor científico a adquirir sensível e admirável perfeição. Em nossa história, **a teoria planetária matemática cedo se tornou uma região de conhecimento do mundo físico** em que a indiscutível lógica da Matemática mostrou-se adequada e suficiente. Foi o único ramo da ciência a sobreviver, virtualmente intacto, quando

> ruiu o Império Romano e se perdeu grande parte da avançada Matemática grega. Só a teoria planetária matemática reteve força e validez até depois de Copérnico, vendo-se ultrapassada tão-somente pela mais aperfeiçoada matemática de Kepler e pelas provas visuais diretas proporcionadas pelo telescópio de Galileu, após 1600. [...]
>
> Em todos os ramos da ciência de todas as outras culturas, nada há que se compare a esse rápido domínio de um corpo de conhecimento, requintado, **avançado e de caráter inteiramente matemático, para explicar a natureza**. (PRICE, 2000, p. 23-24)

Ptolomeu, assim como outros astrônomos que o precederam, sabia que as coordenadas das posições dos corpos celestes mudavam periodicamente com o tempo e, que em um círculo dado, cordas de comprimentos diferentes estavam relacionadas a arcos de tamanhos diferentes. Para sua época, o Almagesto foi uma explanação completa do sistema de mundo geocêntrico e uma explicação de todos os fenômenos do céu com excelente precisão, se tornando a principal referência até durante a Idade Média, como ressalta Struik (1997):

> A **Grande Coleção**, de Ptolomeu, mais conhecida pelo seu título arabizado **Almagesto** (c. 150 d.C.) foi uma obra de astronomia de superior mestria e originalidade, ainda que muitas idéias possam ter vindo de Hiparco ou de Kidinnu e de outros astrônomos babilônicos. Também contém **trigonometria**, juntamente com uma **tabela de cordas correspondentes a ângulos, por ordem crescente e em função da metade do ângulo**; [...].
>
> Encontramos no Almagesto a fórmula para o seno e o co-seno da soma e da diferença de dois ângulos, juntamente com um começo de trigonometria esférica. Os teoremas eram expressos **na forma geométrica** – a nossa notação trigonométrica atual data somente de Euler, do século XVIII. (Struik, 1997, p.103, grifo nosso)

De acordo com o sistema Ptolomaico, as posições do sol, da lua e dos planetas eram consideradas mudando contínua e periodicamente no tempo. A determinação destas posições é apresentada por Ptolomeu através de procedimentos padrões - às vezes explicados por meio de exemplos numéricos, ou formulados verbalmente numa maneira mais geral - usados para compilar várias tábuas astronômicas, isto é, para tabular as 'funções' correspondentes (não somente de uma, mas também de duas e, em vários casos, de três variáveis). Entretanto, em nenhum trabalho matemático antigo aparece uma palavra de significado equivalente à idéia de *função*. Na verdade, há uma grande diferença entre '*instinto funcional*' e a '*percepção da dependência* *funcional'*. Tabelas foram construídas, usadas, interpretadas,... mas em nenhum momento foi feita uma generalização dos casos específicos usados.

Mas, se entendermos que uma relação que associa cada elemento de um conjunto (como, por exemplo, os tempos t_1, t_2, t_3, ...) a um único elemento de um outro conjunto (por exemplo, uma variável angular do sistema planetário) por função, então, podemos dizer que esta concepção de função - que associa a cada posição no tempo uma única variável angular do sistema planetário - é abundante no Almagesto,. Entretanto, é importante ressaltar que estas funções estão claramente representadas, não por uma fórmula geral, mas por muitas tábuas de correspondência entre os elementos de cada um desses conjuntos. Assim, mais uma vez, observamos a presença de um '*instinto funcional*' no mundo antigo, embora a '*percepção da dependência funcional*' não apareça explicitamente em seus trabalhos.

Além do Almagesto, Ptolomeu escreveu outras obras, dentre elas um grande e *valioso tratado, a Geographia, no qual tenta mapear o mundo conhecido*, e a *maior* parte do texto consiste em uma lista de lugares, com suas latitudes e longitudes, um sistema de coordenadas que já existia pelo desde o tempo de Eudóxio, mas que nunca havia sido tão amplamente aplicado. A determinação da posição dos lugares da Terra pela latitude e pela longitude é um exemplo antigo de coordenadas sobre a esfera.

1.2.3 – O Declínio da Matemática Grega

O declínio ciência grega é determinado pelo fim de um desenvolvimento intelectual admirável que se iniciara com a busca pelos filósofos de um sentido para o mundo físico em que se encontravam. Nessa tentativa de racionalizar o mundo em que viviam, procuraram, na regularidade dos fenômenos da natureza, entender suas 'leis' e estabelecer seus padrões de dependência. Como nos informa Ronam (1984), foi desta procura pelas 'leis da natureza' que se constituiu sua ciência:

> Eles não teriam se chamado de cientistas – a palavra é do século XIX –, embora pudessem ter aceito o nome do século XVII – filósofo natural –, mas foi ciência o que praticaram; não a ciência experimental matematicamente orientada que temos hoje, mas, apesar de tudo, ciência, **uma tentativa de racionalizar o mundo da experimentação natural**, sem recorrer à intervenção divina. (RONAN, 1984, p. 131, grifo nosso)

Entretanto, de acordo com a citação de Warden (1954), parece que "a civilização grega envelheceu e perdeu a centelha da vida". As condições políticas e econômicas tiveram evidentemente um papel muito importante: guerras, taxas esmagadoras e, mais tarde, a hegemonia romana trouxe o fim da prosperidade grega. Quando a cidade de Alexandria foi tomada, uma grande parte de sua famosa biblioteca foi queimada e o Império Romano muito pouco se dedicou à ciência: enquanto importava escultores gregos, não se preocupou com o conhecimento em geral, e assim sábios e estudiosos - dentre eles os matemáticos - não receberam a devida importância, uma vez que nenhum incentivo foi dado às ciências.

Como ressalta Struik (1997), ao tentarmos compreender o declínio gradual da matemática grega, não podemos deixar de levar em consideração o seu lado técnico: "o modo geométrico primitivo de expressão, juntamente com a rejeição firme da notação algébrica, tornaram quase impossível qualquer avanço para além das seções cônicas". A grande limitação da matemática grega, segundo Kline (1972), foi sua incapacidade de compreender os números irracionais, o que significou não somente a limitação da aritmética e da álgebra, como uma tendência e uma ênfase à geometria, uma vez que o pensamento geométrico evitou o confronto explícito dos irracionais como um número. Assim, podemos concluir, com Boutroux (1920):

> Notáveis geômetras, **os antigos Gregos foram medíocres aritméticos**: a **numeração de posição escapou-lhes, da mesma forma que todo o simbolismo algébrico**. Ainda mais: o seu pensamento era **antialgébrico** por ser essencialmente concreto: interessavam-se muito apaixonadamente pela forma em si mesma (BOUTROUX, 1920, apud BOLL, 1979, p. 53, grifo nosso)

Não só a incapacidade de lidar com os irracionais, mas também o horror ao movimento e o horror ao infinito levariam a matemática grega a um 'beco sem saída', impedindo seu maior desenvolvimento. Assim, como nos mostra Caraça (1998), essas foram as três questões que constituíram o 'tendão de Aquiles' da matemática grega:

(1) **O abandono do ideal pitagórico de ordenação matemática do Universo** - devido a incapacidade numérica para resolver o problema da incomensurabilidade, optou-se pela degradação do *número* em relação à *Geometria*.

(2) **A invasão pelo horror ao infinito** - a exclusão do *conceito quantitativo de infinito* dos raciocínios matemáticos levou a matemática grega a tomar uma feição cada vez mais finitista.

(3) **O horror ao movimento** – o abandono das *concepções dinâmicas*, sempre que fosse possível.

Somando-se a todas essas dificuldades, ainda faltava à matemática grega um simbolismo próprio, o que impediu um completo progresso de sua Matemática. Entretanto, podemos concluir com Youschkevitch (1976), que as realizações desse povo tanto na descoberta de novas dependências funcionais quanto de novos métodos para estudar tais dependências foram, de fato, substanciais e tiveram um papel fundamental no desenvolvimento futuro da Matemática - desde a criação da álgebra moderna, da geometria analítica até o cálculo infinitesimal nos séculos XVI e XVII - mesmo que os gregos não tenham generalizado nenhum caso de dependência funcional e tenham estudado apenas casos específicos.

Podemos concluir que a Grécia deu importantes, intrigantes e contraditórios passos para o desenvolvimento da Matemática: ao mesmo tempo em que encontramos nesta civilização contribuições originais, que seriam fundamentais ao desenvolvimento futuro da Matemática; surpreendemo-nos ao nos deparar com a sua incapacidade de lidar com os irracionais, seu horror ao infinito e ao movimento, que 'travaram' o desenvolvimento de sua Álgebra e, portanto, da Matemática.

Capítulo II

A Caminho da Matematização da Ciência

O aprendizado de muitas coisas não ensina a compreensão.
Heráclito

2.1 - As Luzes do Oriente chegam à Europa

Com o declínio da civilização grega, a Matemática teve que esperar mais de mil anos para receber novas e decisivas contribuições para o desenvolvimento do conceito de função, o que só ocorreria por volta do século XIV. A situação não era muito propícia ao desenvolvimento da Matemática: Euclides foi cuidadosamente estudado, mas esse não foi o caso de Arquimedes ou Apolônio. Muitos dos escritos desses grandes matemáticos foram perdidos e outros por serem considerados extremamente difíceis não foram totalmente lidos.

O desenvolvimento futuro da matemática requeria urgentemente uma notação algébrica e os rigorosos métodos gregos não poderiam conduzir a esta notação. Era necessário retornar ao primitivo ponto de vista babilônio: multiplicar e dividir grandezas despreocupadamente, tratar expressões como $3 + \sqrt{2}$ simplesmente como um número sem se preocupar acerca de sua irracionalidade. Esse desprendimento da 'Álgebra Geométrica' dos gregos seria iniciado pelos os árabes que, por volta do século IX d.C., dariam um passo decisivo para o desenvolvimento da Álgebra, como veremos a seguir.

2.1.1 – A Cultura Árabe

No século VII d.C., em face de uma Europa desorganizada, levantou-se uma grande potência: o mundo árabe. Em poucas dezenas de anos, os árabes constituíram um império que abrangia todo o norte da África, a Península Ibérica, a Síria, a Arábia, a Pérsia e parte do Turquestão. Limitado a Ocidente pelo Atlântico, as suas fronteiras iam, a Oriente, até para lá do Indo. Estendendo-se no Oriente pelas terras que séculos antes tinham pertencido a outro grande império – o império de Alexandre, o Grande – os árabes ali foram "beber os restos sobreviventes da cultura grega e trouxe-os à Europa, com a qual manteve estreito contato durante muito tempo" (Caraça, 1998, p.146).

Assim, na Idade Média[13], o esplendor da civilização árabe, que desempenharia um papel fundamental para a História da Matemática, contrasta com retração da cultura ocidental. Os árabes herdaram a ciência grega - e também algo da ciência indiana e chinesa – e, mais tarde, transmitiram-na ao Ocidente. Deste modo, é através dos árabes que a Europa toma conhecimento não só da cultura grega, mas também de culturas de outras civilizações, como nos vem informar Caraça (1998) e Kline (1980):

> Aventura estranha e maravilhosa foi esta, que a cultura grega, ou o que dela restava passado o século III a.C., para se transmitir à Europa, não tivesse seguido o caminho normal – o Império Romano – e tivesse antes dado esta grande volta pela Índia, pela Pérsia e pelo norte da África. Estranha aventura essa que necessitou o concurso de grandes deslocações de povos – de milhares de quilômetros de extensão – em busca de uma ilusão de glória para alguns, de bem estar para a maioria, deslocações conduzidas, a mil anos de distância, por dois grandes agitadores de povos – *Alexandre* e *Mahomet*. (CARAÇA, 1998, p. 146)

> The progress that was made during this period was contributed by the **Hindus** and **Arabs**. We have already had occasion to see how the Hindus applied **the Babylonian principle of place value to base ten and converted the Babylonian separation symbol into a full-**

---

[13] No que se refere à história política, é costume designar a queda de Roma em 476 d.C. como o começo da Idade Média; e a queda de Constantinopla perante os turcos, em 1453, como o fim.

> **fledged zero**. In so far as history can ascertain the **Hindus were entirely original in creating one other idea which proved immensely important later on**. This was the concept of **negative numbers**. Corresponding to each number such as 5, they introduced a new number - 5 and called the old numbers positive to distinguish them from the new, negative ones. The Hindus showed, too, that these new numbers could be as useful as positive numbers by employing them to represent debts. In fact, they formulated the arithmetic operations on negative numbers with this application in mind.
>
> **These and other Hindu contributions were acquired by the Arabs who transmitted them to Europeans**. (KLINE, 1980, p. 93, grifo nosso)

Podemos dizer que, com os árabes, tem início um período de tradução, estudo e compilação de grandes obras matemáticas das civilizações Antigas e que culminaria com grandes contribuições dos próprios árabes. A tradição grega foi por eles cultivada, que traduziram fielmente os clássicos gregos para árabe – Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e outros. Estas cópias e traduções conservaram muitas obras gregas que, de outra forma, teriam sido perdidos. Mas os árabes não ficariam apenas com o mérito de 'excelentes copistas', uma vez que não se limitaram unicamente a copiar e armazenar resultados. Interpretaram a herança recebida, comentaram-na e adicionaram análises preciosas dos conteúdos e, acima de tudo, contribuíram significativamente com novos resultados.

Os califas Al-Mansur, Al-Rashid e Al-Mamun promoveram astronomia e a matemática durante os séculos VIII e IX. Em Bagdá, Al-Mamun organizou a "Casa da Sabedoria", com uma grande biblioteca e um observatório. Deram grandes contribuições à Astronomia e à Matemática, tendo sido decisivos na transmissão dos algarismos hindus para o Ocidente e, acima de tudo, trouxeram para a arte da matemática duas poderosas técnicas: a álgebra e a trigonometria.

Embora tenha havido grandes matemáticos, nos deteremos apenas naquele que teve um papel decisivo para o ramo da Matemática que é objeto de nosso estudo: **Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi** (780-850). Al-Khwarizmi escreveu dois livros historicamente importantes - um de aritmética e o outro de álgebra. No primeiro, um brilhante tratado sobre os algarismos hindus e sua arte de contagem, divulgou e encorajou o uso do sistema de numeração hindu que reunia três importantes características: a base dez, a notação posicional e o símbolo para o zero. Foi através de sua aritmética que Al-Khwarizmi divulgou para o Ocidente o sistema de numeração 'hindu-arábico' que hoje adotamos. No segundo livro, – evitando propositalmente a 'erudição grega' e escrevendo para o povo simples que se preocupava com questões de herança, por exemplo, e precisava de regras simples para montar e resolver problemas práticos do dia a dia – Al-Khwarizmi, no começo do século IX, deu um grande passo para o desenvolvimento da álgebra com o seu livro **Hisab al-jabr wal-muqabalah**, que mostra "um autêntico traço de ligação entre a matemática hindu (e, através dela, dos restos de matemática grega que tinham chegado à Índia) e a Europa" (Caraça, 1998). Fazendo jus à álgebra babilônica e sua grande influência no desenvolvimento matemático das civilizações antigas, Waerden (1954) vai além e acrescenta:

> It is probable **the tradition of these algebraic methods was never interrupted** so that, along with the scholarly tradition of Greek geometry, there has always existed **a more popular tradition of small algebraic problems and methods of solution**, a tradition which originates **in Babylonian algebra**, and which ends in Arabic algebra, with radiations into Greek culture, into China and India. (WAERDEN, 1954, p. 280, grifo nosso)

Em seu livro ***'Hisab al-jabr wal-muqabalah'***, Al-Khwarizmi trata da resolução de equações do 1º. e 2º. graus, das regras a que essa resolução deveria obedecer, da maneira de se fazer certas operações e da resolução de alguns problemas. A primeira dessas regras de resolução – ***Al-jebr*** – pode ser traduzida por ***restituição***, e corresponde exatamente à passagem de um termo de um membro para o outro, com troca de sinal; a segunda regra – ***muqabalah*** – corresponde ao cancelamento, nos dois lados de uma equação, de termos iguais. Foi tão grande a influência desse tratado, cujas regras se tornaram freqüentes pela simplicidade de aplicação, que o seu nome – ***al-jebr*** – acabou por designar tudo quanto diz respeito a equações, mostrando como "uma simples operação pode vir a designar todo um ramo duma ciência e, se prende, pela sua origem, a um dos capítulos mais importantes da História das Religiões e da Civilização" (Caraça, 1998, p. 147).

Al-Khwarizmi utiliza uma álgebra retórica, ou seja, uma álgebra totalmente verbal em que não só as operações como também os números são expressos por meio de palavras, mostrando, nesse aspecto, um retrocesso em relação à álgebra sincopada da *Arithmetica* de Diofante. Entretanto, podemos dizer que foi justamente esse passo para trás que possibilitou a álgebra dar inúmeros passos à frente: o retorno à tradição algébrica babilônica, apesar de ter trazido consigo a álgebra retórica, possibilitou a liberdade de multiplicar e dividir as grandezas despreocupadamente, que só o primitivo ponto de vista babilônio poderia trazer e que seria essencial para o desenvolvimento da álgebra. Deste modo podemos concluir que, embora a Grécia tenha deixado a sua influência na álgebra de Al-khowarizmi, foi a influência babilônica, e também hindu, que levou a álgebra a se desprender da 'camisa de força' imposta pela tradição geométrica grega:

> The chief merit of al-Khowarizmi's exposition was its return to the **Babylonian** and **Hindu** tradition of **working routinely with quantities as "mere" numbers** rather than geometric magnitudes, and of **reducing the solution of equations to operational procedures or algorithms**. (...)
> Al-Khowarizmi verifies his algorithms by means of geometric constructions that indicate Greek influence. (EDWARDS, 1982, p. 82-83, grifo nosso)

Entretanto, até onde se sabe, apesar de sua grande contribuição ao desenvolvimento da álgebra, os árabes não apresentaram contribuições significativas ao desenvolvimento do conceito de funções.

2.2 – Mudanças de Paradigmas

Para que as funções pudessem, enfim, emergir como instrumento matemático para o estudo das leis naturais, era necessário quebrar velhos paradigmas impregnados há muitos séculos na ciência: o primado da lei qualitativa em detrimento da quantitativa e a degradação dos sentidos como método de aquisição de conhecimento, ou seja, a condenação do método experimental. Com suas origens na Grécia Antiga, e tendo se transformado no principal obstáculo à Ciência, já não tinham lugar na sociedade, uma vez que:

> Para cada exigência nova que aparece, é uma insuficiência antiga que se descobre, é uma barreira que tem de se derrubar. E ao filósofo antigo cantonado detrás do **desprezo altivo pelo manual e pelo mecânico**, responde o cientista novo, **construtor dos seus**

próprios instrumentos de trabalho, instrumentos que, por vezes, na sua humildade aparente – tal a luneta de *Galileo* – são, na realidade, as alavancas poderosas a cujo impulso derruem duas dezenas de séculos de filosofia estéril.

(...) desenvolve-se no domínio intelectual a luta entre o filósofo tradicional, súdito do reinado espiritual platônico-aristotélico, para quem a verdade está no pensamento e nos seus quadros lógicos, e o filósofo novo para o qual ela [a verdade] há de ser **primeiro descoberta na Natureza**, pela **observação e experimentação**, e depois, mas só depois, **elaborada pelo pensamento**. (CARAÇA, 1998, p. 188, grifo nosso)

Assim, esses velhos paradigmas que já não tinham lugar na nova paisagem de mundo que se formava começariam a ser questionados, como veremos a seguir.

2.2.1 – O Método Experimental

O século XIII assiste ao surgimento das universidades de Paris, Oxford, Cambrige, Pádua e Nápoles. Na segunda metade do século XIII, o monge franciscano Roger Bacon (c.1210-1294), que estudou em Oxford e Paris, seria um dos primeiros a alertar sobre a importância da experimentação e das matemáticas na busca de novos conhecimentos:

Há uma ciência mais perfeita do que as outras, e que é precisa para a verificação delas – **a ciência da experimentação**, que se avantaja às ciências que dependem da argumentação, pois que estas não nos dão a certeza dos fatos, por mais forte que seja o raciocínio, a não ser que a experiência venha em seu auxílio para verificar as suas conclusões. **Só a ciência experimental pode verificar aquilo de que a natureza é capaz** e aquilo que é produto da arte ou da fraude. (ROGER BACON, apud apud MIORIM, 1995, p.80-81, grifo nosso)

O **abandono da matemática traz dano a todo o conhecimento**, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas deste mundo. (ROGER BACON, apud BOYER, 1974, p. 180, grifo nosso)

Roger Bacon "não condena o método dedutivo da dialética escolástica[14]", mas insiste que este "não é suficiente para se tirar conclusões as quais, para serem convincentes, devem passar pelo teste da experiência", portanto, "quanto à aquisição de novos conhecimentos, devemos recorrer antes à experiência do que às autoridades" (Russel, 2003, p. 252).

Na virada do século XV para o XVI, encontramos em Leonardo da Vinci (1452-1519) a reabilitação total dos sentidos através da valorização do lado experimental da ciência, e a percepção do papel que as matemáticas deveriam desempenhar nesse processo. É assim que, em seu 'Tratado da Pintura', defende a experimentação como método de aquisição de conhecimento:

> Dizem ser mecânico aquele conhecimento que sai da Experiência, e científico o que nasce e acaba na Razão, e semi-mecânico o que nasce na Ciência e acaba nas operações manuais. **Mas a mim me parece que são vãs e cheias de erro aquelas ciências** que não nascem na Experiência, mãe de toda a certeza, ou que não terminam na Experiência, isto é, **tais que a sua origem, meio ou fim não passa por nenhum dos cinco sentidos**. E se nós duvidamos da certeza de cada coisa que passa pelos sentidos, quão mormente devemos duvidar daquelas coisas que são rebeldes aos sentidos, como a essência de Deus e da alma e semelhantes, acerca das quais sempre se disputa e contende. (DA VINCI, apud CARAÇA, 1998, p. 189, grifo nosso)

---

[14] **Escolástica** - Corpo de doutrinas constituídas no século XIII pela combinação de elementos tirados de Aristóteles com elementos originários da especulação sobre textos sagrados. Foi a filosofia cristã da Idade Média, uma tentativa de organização racional na perspectiva da fé, tendo sido obra exclusivamente de homens da Igreja e de professores preocupados, acima de tudo, em transmitir e defender as idéias reveladas. Assim, a Escolástica era o exercício da atividade racional (ou seja, o uso de uma certa filosofia determinada, a neoplatônica ou a aristotélica), com vistas a demonstrar e esclarecer a verdade religiosa e, dentro do possível, defendê-la contra as heresias e a incredulidade. Desta forma, como se pode perceber, o objetivo da escolástica era o ensinamento religioso, o dogma. Por extensão, pode-se chamar Escolástica a toda filosofia que assuma a tarefa de ilustrar e defender racionalmente uma determinada tradição ou revelação religiosa. O método utilizado era o da síntese, em que todas as proposições são tiradas, por dedução, de princípios contidos nos textos revelados, interpretados de acordo com a tradição. A Escolástica medieval costuma ser dividida em três grandes períodos:

- **1º. Período**: a alta Escolástica, que vai do século IX ao fim do século XII, caracterizada pela confiança na harmonia intrínseca e substancial de fé e razão;
- **2º. Período**: o florescer da Escolástica, que vai de 1200 aos primeiros anos do século XIV, que é a época dos grandes sistemas, no qual o acordo entre fé e razão é considerado apenas parcial, sem que, contudo, se julgue possível o contraste entre ambas;
- **3º. Período**: a dissolução da Escolástica, que vai dos primeiros decênios do século XIV até o Renascimento, durante a qual o tema básico era , precisamente, o contraste entre fé e razão. Cf Abbagnano, 1970.

Mas Leonardo da Vinci não limita a aquisição da verdade a um simples método empírico: não basta apenas observar, investigar a natureza, o mundo sensível; é necessário submeter os dados dessas observações aos processos matemáticos. E mais uma vez, em seu 'Tratado da Pintura', Leonardo da Vinci vem em defesa dos processos matemáticos para averiguação da verdade: ***"Nenhuma investigação merece o nome de Ciência se não passa pela demonstração matemática;*** *nenhuma certeza existe onde não se pode aplicar um ramo das ciências matemáticas ou se não pode ligar com essas ciências"* (Apud Caraça, 1998, p. 189, grifo nosso).

2.2.2 - A Lei Quantitativa

A conseqüência imediata da aplicação do método empírico foi o resgate da "lei quantitativa" como "entidade fundamental da filosofia da Natureza" (Caraça, 1998, p. 190). Extremamente importante para o homem em seu trabalho de investigação da natureza, uma vez que permite a *repetição* e a *previsão*, é a existência de regularidades na natureza. A procura dessas regularidades – as leis naturais – foi fundamental para o desenvolvimento do conceito de função, uma vez que a busca pelas leis naturais foi determinante para o estudo das variações e das dependências funcionais.

Podemos dizer que há dois tipos fundamentais de lei, embora seja evidente que não podemos separá-los rigidamente:

(I) **Lei qualitativa** – aquela que diz respeito à variação de qualidade;

(II) **Lei quantitativa** – aquela que diz respeito à variação de quantidade.

Freqüentemente uma lei é, na verdade, qualitativa-quantitativa. Este é o tipo de lei que coloca em evidência a ligação íntima da qualidade e da quantidade, de tal modo que não pode ser classificada em nenhum dos dois tipos separadamente.

O grande passo dado na busca pelas leis naturais, e essencial para o desenvolvimento do conceito de função, foi a mudança do paradigma de lei: enquanto os antigos gregos procuraram 'leis qualitativas' em sua tentativa de explicar a natureza; no Renascimento, será a busca de 'leis quantitativas' que determinará o rumo da Ciência, como nos mostra Caraça (1998):

> Os construtores da Ciência Moderna, do Renascimento em diante, apercebendo-se desse perigo [o abuso da explicação qualitativa], deram rumo novo à barca da Ciência, dedicando-se à **observação** e **experimentação**, procurando **medir**, tentando explicar por variações de quantidade, tecendo uma teia de leis quantitativas. (CARAÇA, 1998, p. 117, grifo do autor)

O estudo das leis quantitativas será decisivo para a Ciência Moderna, em que o estudo do quantitativo que determinará o estado científico de cada ramo do conhecimento:

> Por toda a parte, em todos os ramos do conhecimento, há esta tendência para o quantitativo, para a medida (inclusive na geometria, para explicar as formas das figuras – coisa essencialmente qualitativa), de modo tal que pode afirmar-se que o estado **propriamente científico** de cada ramo só começa quando nele se introduz a **medida** e o estudo da variação quantitativa como explicação da evolução qualitativa.
>
> (...) podemos falar, plenamente, no **primado da lei quantitativa da Ciência Moderna**. (CARAÇA, 1998, p. 117, grifo do autor)

O estudo das leis quantitativas deu um novo rumo à Ciência, determinado pela nova sociedade e defendido explicitamente nos escritos de Leonardo da Vinci. Esse novo rumo da Ciência é, nada mais nada menos, do que o ideal pitagórico de ordenação matemática do Universo. É assim que vemos ressurgir aquele ideal de compreensão do mundo através da descoberta das relações numéricas existentes - a essência dos fenômenos reside nos números e nas relações matemáticas - formulado no século VI a.C., portanto há 20 séculos atrás. Mais tarde, na pena de Newton, esse ideal de ordenação matemática do Universo será formulado em termos lapidares: *"Os modernos, rejeitadas as formas substanciais e as qualidades ocultas, ocupam-se de referir a leis matemáticas os fenômenos naturais"* (Apud Caraça, 1998, p. 190).

Podemos concluir que essa nova sociedade, ao trazer à tona o ideal pitagórico de busca de uma ordenação matemática do Universo e a necessidade do estudo das leis quantitativas, traz também a necessidade do conceito de função como instrumento desse estudo. Assim, o surgimento do conceito de lei quantitativa, ao lado do método experimental, levaria à introdução do conceito de função e ao surgimento do cálculo infinitesimal, que seriam as bases da moderna Matemática. Dessa maneira, invertem-se as características que estiveram presentes na matemática durante séculos: de uma matemática preocupada com o *estudo qualitativo* dos fenômenos, que privilegia a figura sobre o número, que despreza tudo que lembre o movimento, o manual e o mecânico, para uma matemática preocupada fundamentalmente com o *estudo quantitativo* das relações que poderiam ser estabelecidas para a explicação dos fenômenos, que valoriza o manual, as artes práticas e mecânicas, que utiliza o número para melhor compreender as figuras e que tem, como base de sustentação, o movimento.

Assim, a Ciência se libertou do paradigma de lei qualitativa e se rendeu ao método experimental, se libertando daquele preconceito arraigado em relação a tudo que remetesse aos sentidos. Finalmente o Universo pôde ser estudado através dos números e suas relações, como almejaram os primeiros pitagóricos há dois mil anos atrás.

2.3 – A Ferramenta Matemática para o Estudo das Leis Quantitativas

O estudo das leis quantitativas foi fundamental e decisivo para o desenvolvimento da Ciência Moderna, de tal modo que seria natural de se esperar que tenha surgido a necessidade de uma ferramenta adequada ao estudo de algo tão importante. Assim, o conceito de **função**, cuja essência é a correspondência de dois conjuntos aparece na Matemática como a ferramenta própria para o estudo das leis.

Poderoso instrumento matemático, e essencial para o estudo das leis naturais, o conceito de função, entretanto, precisaria de um longo caminho para ser compreendido e se estabelecer. Até chegarmos finalmente a um conceito de função, "deu-se uma gestação lenta em que necessidade e instrumento interatuaram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente" (Caraça,1998).

2.3.1 – A Gênese da Noção de Função

Embora a matemática na Idade Média tivesse sido essencialmente prática, a matemática especulativa não desapareceu totalmente. O estudo das leis naturais, ou seja, das relações que poderiam ser estabelecidas para a explicação dos fenômenos foi essencial para que fosse dado um importante passo para o desenvolvimento do conceito de função. É assim que, "já no século XIV os estudiosos possuíam uma clara noção de função no seu sentido geral, entretanto não conseguiram formalizar adequadamente tal conceito (ou não diagnosticaram tal necessidade)" (Botelho, 1992).

Na base da definição de função estão a noção de **variável** e a de **correspondência** entre duas variáveis, que implica na idéia de **dependência**. Traduzir tal dependência em lei matemática é o principal objetivo de uma função, como nos informa Caraça (1954):

> As idéias fundamentais que estão na base da definição de função são a de variável e a de correspondência entre duas variáveis, isto é, entre dois conjuntos. A noção de função é, portanto, uma noção composta, cuja gênese pode ser figurada pelo esquema seguinte:
>
> **Número** / **Conjunto** ⇒ **Variável** / **Correspondência** ⇒ **Função**
>
> Toda a idéia de correspondência, mesmo na sua forma mais abstrata, implica a idéia de **dependência**, e o conceito de função tem, precisamente, por objetivos a tradução, em termos de rigor matemático, desse conceito de dependência, de **lei**, que domina o esforço construtivo das ciências da natureza.
>
> Os conceitos de dependência e de lei não se confundem; o primeiro é mais geral que o segundo – pode saber-se da dependência de dois fenômenos sem conhecer a lei que os liga. **O progresso das ciências de observação realiza-se na medida em que se chega à formação das leis de dependência dos fenômenos.**
>
> Quando, num determinado ramo da ciência, isso se consegue duma maneira reputada suficiente, esse ramo entra na **fase matemática**, a mais evoluída de seu desenvolvimento. (CARAÇA, 1954, p.56, grifos do autor)

2.3.2 - Renasce a Fluência de Heráclito: A Variável

A introdução do conceito de função como ferramenta necessária ao estudo das leis naturais traria consigo, como não poderia deixar de ser, um conjunto de idéias e concepções que lhe são inerentes: a noção de variável - um símbolo representativo de qualquer dos elementos de um conjunto em estudo. A **variável** é, portanto, **"o símbolo da *vida coletiva* do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um de seus membros, *mas não se reduz a ela*"** (Caraça, 1998, p. 120). Deste modo, podemos dizer que a variável nada mais é do que "a síntese do *ser* e *não ser*" de Heráclito.

O caráter contraditório de seu conceito - a variável ***é*** e ***não é*** cada um dos elementos do conjunto – levou à sua introdução tardia na Ciência, uma vez que, devido à sua essência – a síntese do *ser* e *não ser* – contrariava as idéias e concepções que queriam buscar na *realidade* a sua *permanência*. Assim, surge ligada à corrente de pensamento que vê na *fluência* a verdadeira *realidade*.

2.4 – Das Especulações sobre o Movimento ao Primeiro Gráfico no Século XIV

Durante o século XIV o estudo do movimento foi o tópico favorito nas universidades, especialmente nas Escolas de Filosofia Natural de Oxford e Paris que, "influenciadas pelos pensadores Robert Grosseteste e Roger Bacon", declararam ser a Matemática "o principal instrumento para o estudo do fenômeno natural". Foi nessas universidades "onde a noção de função primeiro ocorreu", embora "em uma forma mais geral" (Youschkevitch, 1976).

Até então, as qualidades, que poderiam ser mais ou menos intensas, não podiam ser medidas ou expressas em números. Já havia sido falado anteriormente sobre diferentes graus de calor e os estudiosos de Oxford e Paris no século XIV especularam sobre a possibilidade de reduzir qualidades como calor a números, assim como as quantidades - como duração, peso e tempo – que tinham magnitude (extensão), eram medidas.

No Merton College, em Oxford, entre os anos de 1328 e 1350, os estudos de Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead (conhecido pelos medievais como 'Calculator') e John Dumbleton em cinemática levaram aos conceitos de velocidade, velocidade instantânea e distância percorrida. Simultaneamente, a idéia de que as leis quantitativas da natureza eram leis do tipo funcional amadurecia na filosofia natural.

O matemático mais importante deste período foi, sem dúvida, Nicole de Oresme (c.1325-1382), bispo de Lisiex, na Normandia. Oresme aplicou a matemática ao movimento planetário, estudou o movimento dos corpos cadentes e também aplicou o conceito de 'centro de gravidade' aos corpos do universo. Em seu estudo sobre o movimento dos corpos cadentes, Oresme sugeriu que a velocidade de descida dos corpos na Terra dependia do tempo de duração da queda, e não da distância que ele tivesse percorrido; evidentemente ele pensava em termos de iguais aumentos de velocidades em tempos iguais.

A primeira sugestão antiga daquilo que agora chamamos de representação gráfica de funções é encontrada em Oresme[15], que usou um gráfico 'velocidade-tempo' para um corpo que se movia com velocidade constante, representando assim, a dependência entre duas variáveis graficamente através de um sistema de coordenadas. Em seu tratado chamado *De latitudinibus formarum* (c. 1360), Oresme traçou o gráfico de uma variável dependente *(latitudo)* contra uma independente *(longitudo)*, que é submetida a variação, revelando, assim, "uma espécie de transição vaga das coordenadas na esfera celeste ou terrestre, conhecidas pelos antigos, para a geometria moderna das coordenadas" (Struik, 1997).

[15] Marshall Cagett encontrou o que parece ser um gráfico mais antigo, traçado por Giovanni di Cosali, em que a reta de longitude é colocada em posição vertical. De qualquer modo, a exposição de Oresme é superior à de Cosali em clareza e influência. Cf Boyer, 1993, p. 192.

Em seu tratado (Figura 3), Oresme introduziu, pelo menos implicitamente, quatro idéias inovadoras, como nos informa Edwards (1982):

(1) A **medida de diversos tipos de variáveis físicas** (como temperatura, velocidade) **por meio de segmentos de reta**;

(2) Uma **noção de relação funcional entre variáveis** (por exemplo, velocidade como função do tempo);

(3) A **representação gráfica de uma relação funcional**, ao representar graficamente a relação velocidade-tempo.

(4) Um processo **conceitual de 'integração'** ou 'continuous summation' ao calcular a distância percorrida como a área abaixo do gráfico velocidade-tempo.

A representação gráfica de uma relação funcional pode ser considerada como um passo em direção à introdução de um sistema de coordenadas (os termos usados por Oresme, *latitude* e *longitude*, equivalem, num sentido mais amplo, às nossas **ordenada** e **abscissa**), embora o uso de coordenadas não fosse totalmente novo, visto que Apolônio, e outros antes dele, tinham usado um sistemas de coordenadas. Entretanto, a **representação gráfica** de uma **quantidade variável** era novidade.

O trabalho de Oresme, reimpresso diversas vezes ao longo dos 100 anos após sua primeira publicação, e dos estudiosos do 'Merton College' sobre o movimento foram amplamente difundidos pela Europa durante os séculos XV e XVI e teriam grande influência no desenvolvimento da Ciência Moderna.

Fig. 3: *'Tractatus de Latitudinibus Formarum'* de Oresme (1360)

2.5 – O Século XVI e as Bases da Ciência Moderna

2.5.1 – Nicolau Copérnico e a Revolução na Astronomia

> Copérnico não estava satisfeito com o sistema astronômico aristotélico-ptolomaico que por séculos havia dominado o pensamento ocidental. O centro de Terra, pensava ele, não era o centro do universo, mas apenas o centro da órbita da Lua. Copérnico acreditava que as perturbações aparentes nos movimentos observáveis dos planetas eram resultado da própria rotação da Terra em torno de seu eixo e de seu trajeto orbital. **"Nós giramos em torno do Sol"**, concluiu ele no *Comentário*[16], **"como qualquer outro planeta"**. (HAWKING, 2005, p. 4, grifo nosso)

Nicolau Copérnico (1473-1543), padre e matemático polonês, é freqüentemente considerado o fundador da astronomia moderna, por ter sido o primeiro a concluir que os planetas e o Sol não giram em torno da Terra. São encontradas especulações sobre um universo heliocêntrico desde os tempos mais remotos, tão remotos quanto os de Aristarco, no século III a.C., "mas a idéia não foi levada a sério antes de Copérnico" (Hawking, 2005).

Sua obra *'Das Revoluções das Esferas Celestes'* (*De Revolutionibus Orbitum Coelestium*), que concluiu em 1530, mas manteve sem publicar por treze anos. Copérnico temia expor-se ao desprezo do povo e à condenação da Igreja, como nos mostra este trecho do prefácio de sua obra em que faz uma longa dedicatória ao Papa Paulo III:

> Posso facilmente imaginar, Santíssimo Padre, que assim que algumas pessoas souberem que, nestes livros que escrevi (...), atribuo certos movimentos ao globo terrestre, não tardarão a exigir a

---

[16] Em 1514, Copérnico escreveu um breve 'Comentário sobre as teorias dos movimentos dos objetos celestes a partir de sua disposição' *(De hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus)*, mas recusou-se a publicar o manuscrito e só o fez circular discretamente, entre os amigos em quem mais confiava. O 'Comentário' foi uma primeira tentativa de propor uma teoria astronômica na qual a Terra se movesse e o Sol permanecesse em repouso. Cf Hawking, 2005, p. 4.

> altos brados meu afastamento, bem como o de minhas opiniões. (...) E, embora eu saiba que as concepções de um filósofo estão acima do juízo da multidão – já que é tarefa sua dedicar-se à busca da verdade em todas as coisas, na medida em que Deus o permite à razão humana -, acredito, contudo, que devemos evitar opiniões inteiramente estranhas ao que é direito. E, quando eu pensei em como essa exposição pareceria absurda àqueles que sabem que a opinião de que a Terra permanece imóvel no meio do céu como seu centro foi confirmada pelo julgamento de muitas eras, caso eu afirmasse, ao contrário, que a Terra se move, por muito tempo tive grande dificuldade em decidir se deveria revelar meus comentários escritos para revelar o movimento da Terra (...). Por isso, quando ponderei essas coisas comigo mesmo,o desdém que eu tinha motivos para temer, devido à novidade e ao absurdo de minha opinião, quase me levou a abandonar uma obra já realizada. (Apud HAWKING, 2005, p. 10-11)

Mas sua hesitação era devida também ao fato de ser perfeccionista e estar constantemente fazendo verificações e revisões em suas observações. Em 1543 sua obra foi finalmente publicada. Devido à oposição da Igreja, que considerava a premissa de um universo heliocêntrico contrária à Bíblia, e à incredulidade geral quanto à perspectiva de um universo não-geocêntrico[17], as idéias de Copérnico mantiveram-se "em relativa obscuridade por cerca de cem anos" (Hawking, 2005, p. 5). Para melhor compreender o motivo desse descaso pelas descobertas de Copérnico, o escritor e cientista alemão Johann Wolfgang von Goethe vem nos ajudar:

> De todas as descobertas e opiniões, nenhuma pode ter tido um efeito maior sobre o espírito humano do que a doutrina de Copérnico. Mal o mundo se tornara conhecido como redondo e completo em si mesmo, pediu-se que ele abrisse mão do enorme privilégio de ser o centro do universo. Talvez nunca se haja pedido tanto da humanidade – pois, ao admiti-lo, quanta coisa não desapareceria na bruma e na fumaça! Que aconteceu com o Éden, nosso mundo de inocência, piedade e poesia; com o testemunho dos sentidos; com a convicção de uma fé poético-religiosa? Não admira que seus contemporâneos não hajam querido deixar tudo isso ir embora e tenham oferecido toda a resistência possível a uma doutrina que autorizava e exigia daqueles a ela convertidos uma liberdade de visão e uma grandeza de pensamento até então desconhecidas, e mesmo jamais sonhadas. (GOETHE, apud HAWKING, 2005, p. 7)

---

[17] Em *Das Revoluções*, Copérnico, na verdade, não postulou um sistema heliocêntrico, mas, sim, um sistema heliostático. Ele considerava que o Sol não estava exatamente no centro do universo, mas apenas perto do centro. Cf Hawking, 2005, p. 5.

Consciente do grande impacto que sua obra causaria e da grande dificuldade que encontraria para fazer compreender suas idéias frente à tradicional interpretação da Bíblia, que sugeria que a Terra estava no centro do Universo, Copérnico deixa o julgamento de suas idéias revolucionárias aos grandes matemáticos que, segundo ele, saberão reconhecer sua contribuição, como nos mostra o trecho final do prefácio de sua obra:

> Mas, caso haja alguns "faladores" que, embora totalmente ignorantes em matemática, se encarreguem de emitir julgamento, e se, distorcendo escandalosamente o sentido de alguma passagem da Sagrada Escritura para servir aos seus propósitos, eles ousarem censurar e atacar minha obra, com esses importo-me tão pouco que chego a desdenhar seus julgamentos (...). **A matemática é escrita para matemáticos**; e, **entre eles, se não estou enganado, será reconhecida a contribuição de meus trabalhos** (...). Mas quanto ao que realizei (...), deixo-o para o julgamento de Vossa santidade, em particular, e de todos os outros doutos matemáticos. (Apud HAWKING, 2005, p. 14, grifo nosso)

De fato, o século XVII veria homens como Galileu Galilei, Johannes Kepler e Isaac Newton se basearem nas teorias copernicanas de um universo não-geocêntrico, derrubando definitivamente as idéias aristotélicas[18].

2.5.2 – O Simbolismo Algébrico de Viète

Foi no século XVI que a álgebra, enfim, começou a se emancipar de uma simbologia moderna, através do matemático francês François Viète (1540-1603). Sua vasta obra compreende trabalhos de trigonometria, álgebra e geometria. Pela sua importância, a de álgebra é considerada a sua principal obra. Publicada em 1591, sua

---

[18] Na visão geocêntrica de Aristóteles, a Terra era estacionária e os planetas Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, assim como o Sol e a Lua, realizavam órbitas circulares em torno dela. Cf Hawking, 2005.

álgebra *In Arten Analyticen Isagoge* teria o mérito de dar início à introdução do simbolismo algébrico moderno na Matemática. Nesse trabalho, Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar as constantes. A grande importância dessa notação foi tornar possível, pela primeira vez, colocar no papel equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários na forma simbólica.

A álgebra de Viète, entretanto, ainda diferia da nossa "no que diz respeito à insistência de Viète no princípio grego da homogeneidade, segundo o qual um produto de dois segmentos de reta era necessariamente concebido como uma área" e, deste modo, "os segmentos de reta só podiam ser adicionados a segmentos de reta, áreas a áreas e volumes a volumes", havendo também algumas dúvidas "se as equações de grau superior a 3 tinham realmente algum significado" (Struik, 1997, p. 151). Contudo, embora o simbolismo de Viète tivesse muitas imperfeições e logo tenha recebido várias emendas, significou um importante passo no processo de aperfeiçoamento do simbolismo matemático. De acordo com Boll (1979, p. 55), a criação da álgebra por Viète foi o prelúdio da fundação das matemáticas modernas por Descartes.

2.5.3 – Kepler e a Harmonia do Mundo

Há séculos que o pensamento vinha sendo refreando por três grandes dogmas: o geocentrismo, o movimento circular e o movimento uniforme. Copérnico acabara com o primeiro e a Johannes Kepler (1571-1630) caberia o mérito de acabar com os outros dois.

Durante o meio século posterior a Copérnico, ninguém havia tido suficiente coragem para defender sua teoria, "salvo alguns matemáticos eminentes como Rético, e alguns incorrigíveis intelectuais radicais, como Bruno" (Burtt, 1983, p. 43). Entretanto no início da última década daquele século XVI, o jovem estudante Kepler retomaria alguns corolários da obra de Copérnico. A revolução de Copérnico e o mapeamento estelar de Tycho Brahe (1546-1601), que dedicara a vida à busca da exatidão nas medidas astronômicas, tiveram um papel fundamental nas descobertas de Kepler.

Inicialmente motivado por princípios puramente místicos, Kepler somou às suas especulações místicas o firme propósito de encontrar fórmulas precisas confirmadas pelos dados empíricos, convencido de que o conhecimento perfeito era sempre matemático e que a teoria deveria refletir a exatidão dos fatos observados. Seu trabalho foi intenso e árduo, envolvendo séries intermináveis de longos e laboriosos cálculos, procurando adequar suas hipóteses aos dados empíricos, o que freqüentemente levava a contradições e exigiam recomeçar todo o trabalho novamente, o que levou Hawking (2005) a declarar: "Se alguma vez já se tivesse dado um prêmio para a pessoa na história que mais tivesse se dedicado à busca da precisão absoluta, o astrônomo alemão Johannes Kepler provavelmente teria sido o vencedor".

A grande motivação de Kepler, e também sua imensa dificuldade em aceitar os fatos, cada vez mais evidentes, vinham de antigos dogmas sobre a órbita dos planetas e suas velocidades. Em seus intermináveis cálculos e tentativas de ajustar sua teoria à realidade, Kepler foi abandonando seus modelos e, finalmente, os velhos dogmas. Foi assim que Kepler chegou às três famosas leis:

Primeira lei: A órbita dos planetas é uma elipse, de que um dos focos é o Sol.

Segunda lei: Os planetas varrem áreas iguais em tempos iguais. O movimento dos planetas não é uniforme. Ao se aproximarem do Sol, os planetas aceleram a marcha em sua órbita, e a diminuem ao se afastar. Mas essa variação não se dá de qualquer jeito: a reta que vai do Sol ao planeta (chamada de raio vetor) varre em sua trajetória áreas iguais em tempos iguais.

Terceira lei: Os cubos das distâncias médias entre os planetas e o Sol são proporcionais aos quadrados de seus períodos de revolução.

As duas primeiras leis foram publicadas no livro *Nova Astronomia* em 1609 e a terceira lei foi publicada em 1619, no livro *Harmonice Mundi.* Essas leis significaram o fim de dois dogmas arraigados na Ciência há mais de dois mil anos, nos quais o próprio Kepler havia acreditado com todas as suas forças: o dogma do movimento circular, derrubado pela primeira lei e o dogma do movimento uniforme, desfeito pela segunda lei. A aceitação dessas leis foi difícil para o próprio Kepler:

> Essa descoberta resultou de uma conjunção excepcional de circunstâncias: **as observações exatas de Tycho** e a **genialidade de Kepler**. Sem Tycho, Kepler não teria ultrapassado aquele mesmo estágio dos inumeráveis espíritos místicos que atravessaram o seu século. Tycho, apesar de tudo, nos legaria observações que – talvez – viessem a encontrar um Kepler. (FONTAINE & SIMAAN, 2003, p. 176, grifo nosso)

Após refazer exaustivamente seus cálculos, Kepler acabou por abandonar seu sistema de poliedros (Figura 4) e suas idéias sobre a perfeição de Deus e se render às evidências.

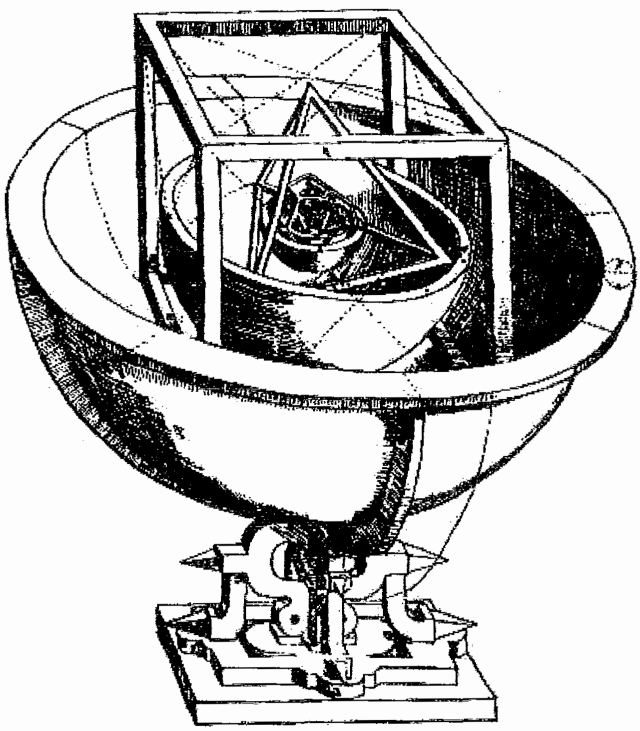

Fig. 4: Kepler - Sistema de Mundo com os Sólidos de Platão

Deste modo, Kepler abandonou seu modelo em que os cinco sólidos de Platão se ajustariam, perfeitamente, entre cada par de esferas planetárias (Figura 5). Finalmente, aceitou as leis e elas foram publicadas. Segundo Burtt (1983), encontramos em Kepler, claramente enunciada, a posição de que o mundo real é a harmonia matemática passível de ser descoberta nas coisas, o que levou a uma importante doutrina do conhecimento: *"todo conhecimento certo tem de ser o conhecimento das características quantitativas, o conhecimento perfeito é sempre matemático"* (Burtt, 1983, 51-52).

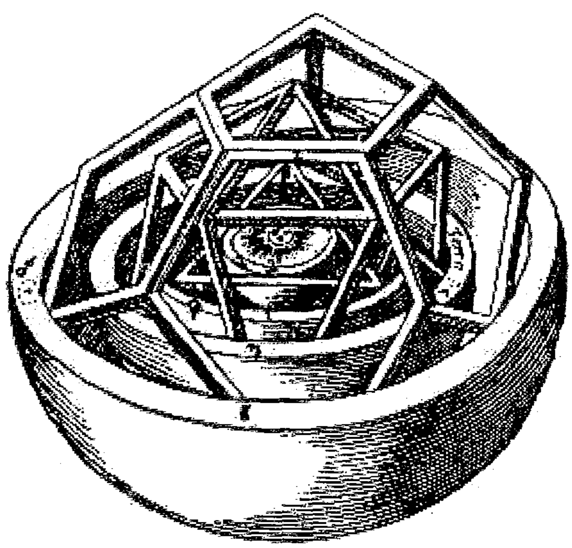

Fig. 5: Os Sólidos entre as Esferas Planetárias

Entretanto, não satisfeito, Kepler ainda procurava por algo, como nos mostra Ronan (2001):

> O lado místico de Kepler, contudo, ainda procurava alguma regularidade subjacente, alguma evidência do desígnio divino por trás desse novo sistema de movimento planetário, e (...) dedicou-se a procurar esse princípio. Sua perseverança foi recompensada, e em 1618 (...) publicou *Harmonia do Mundo*. Para ele, esse era seu feito máximo. Descobriu uma relação entre as velocidades dos planetas

> em suas órbitas elípticas e a harmonia musical; foi capaz de relacionar as velocidades (...) de cada planeta à escala musical. Essa foi a visão culminante de Kepler, a apoteose da "música das esferas" de Pitágoras e de Platão. Embora hoje em dia não se dê qualquer valor científico a essa relação astronômico-musical, damos importância a uma descoberta adicional que Kepler fez enquanto trabalhava nessa lei. É a que mostra que **a relação entre o tempo que cada planeta leva para completar uma órbita elíptica e sua distância média do Sol é a mesma para todos eles**. Sua importância especial reside no fato de que, se conhecermos os tempos orbitais (que são relativamente fáceis de obter) dos planetas e a distância média de apenas um deles em relação ao Sol, poderemos calcular a distância de todos eles. Gerações posteriores de astrônomos fariam bom uso dessa regra. (RONAN, 2001, p. 78)

Para finalizar, podemos dizer que na base da descoberta de suas três leis está a sua insistência de que as hipóteses matemáticas válidas devem ser passíveis de verificação exata no mundo observado, tendo sido "o primeiro a tentar um tratamento matemático exato para os problemas (da ciência astronômica); o primeiro a estabelecer leis naturais no sentido específico da nova ciência" (Eucken, 1878, apud Burtt, 1983, p. 53) e também "o primeiro a descobrir a arte de consultar com êxito a natureza quanto a suas leis, uma vez que seus predecessores simplesmente construíram conceitos explicativos que tentavam aplicar ao curso da natureza" (Apelt, s/d, apud Burtt, 1983, p. 53).

No entanto, a Astronomia Nova de Kepler foi "praticamente ignorada por seus contemporâneos. Era uma obra densa, mal estruturada, difícil de se ler na medida em que Kepler, não satisfeito em descrever minuciosamente suas pistas falsas, não omitia um cálculo sequer. Ele o reconhece: *'Eu próprio, um matemático, [...] relendo minha obra, [...] me canso das demonstrações que antes eu mesmo introduzira'*." (Fontaine & Simaan, 2003, p. 176)

Capítulo III

A Ciência Moderna

Tanto os platônicos, ao acreditarem na harmonia do universo,
como os cartesianos, ao acreditarem num método geral baseado na razão,
encontraram na Matemática a rainha das ciências.
Struik

3.1 – O Século XVII e a Revolução Científica

O século XVI foi uma época de profundas transformações na visão de mundo do homem ocidental, marcada por verdadeira paixão pelas descobertas. A redescoberta de antigas doutrinas filosóficas e científicas proporcionou a construção de uma sabedoria nova, oposta às concepções que prevaleceram na Idade Média; simultaneamente, viajantes e aventureiros rasgaram continentes e mares, descobrindo terras e povos. A Antigüidade greco-romana tinha renascido através de seus pensadores e artistas, enquanto se construía uma nova imagem geográfica do mundo.

Essa efervescência, que caracterizou a atmosfera intelectual do renascimento, trouxe consigo a rejeição das idéias até então vigentes e que estiveram garantidas, sobretudo pelo peso das autoridades agora contestadas. Tudo foi sacudido ou destruído: a unidade política, religiosa e espiritual da Europa; as afirmações da ciência e da filosofia medievais, calcadas principalmente em Aristóteles[19]; a autoridade da

[19] **O Modelo de Aristóteles** – Foi um modelo de raciocínio científico transmitido da Antigüidade para a Idade Média e o renascimento que era interpretado quase universalmente. De acordo com Stephen Gaukroger, Aristóteles havia-se interessado por duas áreas:

Bíblia, ao ser confrontada com as novas descobertas científicas e o prestígio da Igreja e do Estado abalado pelo movimento da Reforma e pelas guerras motivadas por dissidências políticas ou religiosas. Além disso, o conhecimento de idéias bem diferentes das que estavam em voga e que eram aceitas como únicas verdades pelo homem europeu e a descoberta de outros povos vivendo segundo padrões completamente diferentes daqueles que pareciam ser os únicos corretos levou o homem europeu a um clima de descrença e dúvidas.

Essa preocupação se generalizou a partir do final do século XVI caracterizando a investigação filosófica do século XVII. Surgem então, duas grandes orientações metodológicas abrindo as principais vertentes do pensamento moderno: de um lado, a perspectiva empirista proposta por Francis Bacon (1561–1626), que preconiza uma ciência sustentada pela observação e pela experimentação; e, do outro lado, inaugurando o racionalismo moderno, Descartes busca na razão – que as matemáticas encarnavam de maneira exemplar – os recursos para a recuperação da certeza científica.

De acordo com a tradição medieval anterior a Descartes, a natureza deveria ser contemplada como obra divina, restando ao homem apenas suplicar por bom tempo e fartas colheitas, sem jamais pensar em intervir na natureza. Rompendo com essa tradição, Descartes propõe uma forma organizada de investigação que capacitasse o homem a conhecer o mundo e a si próprio. A proposta cartesiana era baseada na suposição de que o conhecimento não era alcançado pela busca aleatória, ao acaso,

---

- a descoberta de argumentos por meio de "tópicos", que eram recursos destinados a mostrar, a quem trabalhasse num campo científico, como organizar a matéria de seu campo de modo a poder formular o tipo certo de perguntas;
- o estudo formal da inferência científica e da natureza dos argumentos demonstrativos.

A primeira dessas áreas era o "*método de descobrimento*" de Aristóteles, e a segunda era, em parte, seu "*método de apresentação*". Na interpretação posterior da teoria aristotélica, no entanto, o método de apresentação foi confundido com o método de descobrimento. Havia, então, uma confusão considerável quanto ao modo como o processo puramente dedutivo da demonstração científica, a partir de princípios elementares, poderia resultar em novos conhecimentos empíricos. Essa confusão era agravada pelo fato de que o método aristotélico original de descobrimento, Os Tópicos, tinha sido perdido ou se tornado irreconhecível, pois, do fim da Antigüidade em diante, estes últimos tinham sido usados exclusivamente num contexto retórico. Assim, a sua utilização, como meio para descobrir argumentos científicos, tinha sido completamente esquecida. Por isso, na Idade Média, os resultados da ciência aristotélica haviam perdido todo o contato com os processos de descobrimento que os haviam produzido.

Enquanto esses resultados permaneceram sem questionamento, o problema não foi evidenciado; mas quando, a partir do século XVI em diante, eles começaram a ser questionados de maneira séria e sistemática, passaram a ser vistos como meros dogmas, ou como o produto de uma doutrina do método que estava irremediavelmente equivocada. Ou seja, o fracasso empírico da ciência aristotélica, nas primeiras décadas do século XVII, passou a ser visto como decorrente, em última análise, de uma falha metodológica, proveniente de uma falta de método ou do emprego do método errado. Cf Gaukroger, 1999.

sem direção, mas por meio de uma investigação sistemática e organizada, usando do raciocínio e das ferramentas da Matemática que, portanto, tinha um papel fundamental no processo cartesiano de conhecimento da natureza e, conseqüentemente, da compreensão da grandeza e perfeição divina. Assim, não havia nenhum conflito entre fé e razão. Para Descartes, a própria certeza da existência da verdade, cuja única via de acesso era a razão, repousava em sua origem divina.

3.1.1 – Descartes e a Ciência Universal

> Em nossa época alguns homens muito talentosos tentaram ressuscitar esse método [algébrico], pois me parece que ele nada mais é do que a arte conhecida pelo nome bárbaro de "álgebra" – ou, pelo menos, **seria a álgebra, se os muitos números e figuras incompreensíveis que a abarrotam fossem eliminados** e ela tivesse, antes, a profusão de clareza e simplicidade que creio dever existir na verdadeira matemática. Foram essas idéias que me fizeram passar dos estudos específicos da aritmética e da geometria para uma investigação geral da matemática. Iniciei minha investigação indagando o que se pretende dizer, exatamente, com o termo *mathesis* [matemática ou saber], e porque, além da aritmética e da geometria, ciências como a astronomia, a música, a óptica e a mecânica, entre outras, são chamadas de ramos da matemática. (...) Por outro lado, para quem quer que tenha a mais ínfima instrução, evidencia-se o que é e o que não é pertinente à matemática em qualquer contexto. Quando atentei mais de perto para esse assunto, pude perceber que **o interesse exclusivo da matemática** volta-se para questões **de ordem ou de medida**, e que não importa que a medida em pauta envolva números, formas, estrelas, sons ou qualquer outro objeto. Isso me fez ver que **deve haver uma ciência geral que explique tudo o que possa indagar sobre a ordem e a medida, independente da matéria em exame, e que essa ciência deve ser denominada de *mathesis universalis*** (...). Até este momento, tenho dedicado todas as minhas energias a essa *mathesis universalis*, de modo a poder abordar as ciências mais avançadas no devido tempo. (DESCARTES, apud GAUKROGER, 1999, p. 136-137, grifo nosso)

Descartes (1596-1650) foi revolucionário, como filósofo e como 'matemático'. Plenamente convencido do potencial da razão humana, criou um método para o conhecimento do mundo através da ciência e do raciocínio centrado na dúvida, buscando assim, a reflexão independente da fé. Como os humanistas, ele rejeitou autoridade religiosa na indagação do conhecimento científico e filosófico[20]. Assim, encontramos em Descartes uma perseguição inexorável da certeza absoluta. De fato, o uso da razão, associado ao processo de "dividir cada uma das dificuldades... em tantas parcelas quanto possíveis e quantas necessárias fossem para melhor resolvê-las", passou a ser encarado como a (única) forma de busca da verdade. Para essa tarefa, ele escolheu a Matemática, e assim justificou a sua escolha: "entre todos os que antes de mim procuraram a verdade nas ciências, apenas os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações, isto é, algumas razões certas e evidentes".

A partir da Matemática, Descartes via o desconhecido como um termo ignorado que seria necessariamente descoberto desde que, a partir do já conhecido, fosse construída uma 'cadeia de razões' que a ele conduzisse: "Em matéria de progressões matemáticas, quando se tem os dois ou três primeiros termos, não é difícil encontrar os outros", justificou Descartes. Assim, generalizou o procedimento matemático que faz do desconhecido um termo relativo a outros termos (o conhecimento existente) e que, em função destes, pode ser descoberto.

Publicado em junho de 1637, seu tratado filosófico sobre a ciência universal '*Discours de la Méthode pour Bien Conduire as raison et Chercher la Vérité les Sciences'* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências) apresenta, como terceiro apêndice, a obra *'La Géométrie'*. Foi neste apêndice, com cerca de cem páginas, que a 'geometria analítica', como a chamamos hoje, apareceu publicada pela primeira vez. Assim, Descartes foi um matemático somente incidentalmente e sua 'geometria analítica'– ou como Voltaire a descreveu, "o método de dar equações algébricas às curvas" – foi apenas um apêndice de sua obra maior, O Método.

---

20 Por conta disso, os textos cartesianos foram incluídos no Índice de Livros Proibidos em 1663; Luís XIV reiterou uma proibição do ensino da filosofia cartesiana em 1685 e, na França, houve uma vasta oposição ao cartesianismo nas universidades até o século XVIII. Excluído da Academia de Ciências, o cartesianismo cedo se transformou em filosofia social específica, que aplicou o método da dúvida e o princípio das idéias claras e distintas ao pensamento vigente desmascarando a falsidade de preconceitos e a presunção de verdades definitivas.

3.1.1.1 – *"La Geometrie"* de Descartes

Na sua 'Geometria' não são encontrados nenhum dos axiomas, teoremas, demonstrações, etc. da matemática clássica, nem sequer qualquer tipo de sistema dedutivo. Descartes apresentou algumas provas sintéticas, mas foi a análise que o levou adiante. Depois de algumas preliminares, se dedicou a um dos problemas matemáticos mais difíceis que a Antigüidade legara - o problema do lugar geométrico de quatro retas ou mais, enunciado por Pappus: *"Dadas três retas (ou quatro retas) num plano, encontrar o lugar geométrico de um ponto que se move de tal forma que o produto das distâncias a duas retas dadas (ao longo de direções especificadas) é proporcional ao quadrado da distância da terceira linha [problema do lugar relativo a três retas], ou proporcional ao produto das distâncias às outras duas retas [problema do lugar relativo a quatro retas]"*.

Descartes passou, sem maiores rodeios, a tentar resolvê-lo analiticamente, pois para ele a matemática consistia na solução de problemas, e não na demonstração axiomática. Na sua exposição do método, ele estava interessado em promover justamente a solução de problemas através da análise. E foi na tentativa de resolvê-lo analiticamente que Descartes nos deu as fundações da Geometria Analítica:

> A análise mostra o verdadeiro caminho pelo qual uma coisa foi metodicamente descoberta e revela como os efeitos dependem das causas; de sorte que, se o leitor quiser segui-la e lançar cuidadosamente os olhos sobre tudo o que contém, não entenderá menos perfeitamente a coisa assim demonstrada e não a tornará menos sua do que se ele próprio a houvesse descoberto. (DESCARTES, "Objeções e Respostas", in Os Pensadores, 1973)

Já no Discurso do Método, Descartes apontava o excesso de figuras consideradas na análise dos geômetras como um fator que fatigava desnecessariamente a imaginação e a álgebra dos antigos como sendo uma arte confusa e obscura que embaraçava a mente. Portanto, o objetivo de seu método era duplo:

(I) Por processos algébricos libertar a geometria do excesso de diagramas;

(II) Dar significado às operações da álgebra através de interpretações geométricas.

Descartes percebeu que a natureza própria do espaço, ou extensão, era tal que suas relações deveriam sempre permitir a expressão por meio de fórmulas algébricas e que, no caminho inverso, as verdades numéricas poderiam ser plenamente representadas do ponto de vista espacial. A essência da idéia, quando aplicada ao plano, consistia em estabelecer uma correspondência entre os pontos do plano e suas distâncias a um conjunto de retas (não necessariamente perpendiculares em Descartes), fazendo com que a cada curva do plano correspondesse uma equação a duas incógnitas bem definida e, para cada equação dessas estivesse associada uma curva (ou conjunto de pontos) bem definida do plano.

A idéia de representação de elementos geométricos por meio de coordenadas, que por vezes se atribui a Descartes, era já conhecida e, em certos domínios, aplicada. Sua 'Geometria' não consistiu somente (como normalmente é considerado) na aplicação da álgebra à geometria; isto já tinha sido feito por Arquimedes e muitos outros[21], e tinha se tornado o método usual de procedimentos nos trabalhos matemáticos do século XVI.

O grande passo dado por Descartes foi dizer que um ponto no plano fica completamente determinado se suas distâncias, diga-se x e y, a duas retas desenhadas num ângulo determinado (Descartes usou eixos oblíquos), fossem dadas[22], e pensar que se uma equação $f(x,y) = 0$, tradicionalmente considerada indeterminada, fosse satisfeita por um infinito número de valores de x e y, então esses valores de x e de y determinariam as coordenadas dos pontos que formam a curva,

---

[21] Euclides escreveu vários textos além daqueles treze famosos livros que formam "Os Elementos". Dentre esses textos, encontra-se um, denominado "Data", que apresenta o que chamaríamos de 'aplicações da álgebra à geometria', sendo apresentado numa linguagem estritamente geométrica. Cf Struik, 1997, p. 90.

[22] Conta-se que Descartes teve a idéia da geometria analítica enquanto observava uma mosca andando no teto do seu quarto, próxima ao canto; seu problema imediato se tornou expressar o caminho da mosca em termos das distâncias às paredes adjacentes. Esta história, além de ser curiosa e plausível, nos lembra a já conhecida história da maçã de Newton. Cf Burton, 1984, p. 347.

cuja equação f(x,y) = 0 expressa uma propriedade geométrica, isto é, uma propriedade válida para todo ponto da curva.

Apêndice de sua obra filosófica, *La Geometrie*[23] é uma ilustração da aplicação do método de descoberta de verdades científicas:

> Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada, e damos nomes a todos os segmentos que pareçam necessários à construção – aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos. Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade, de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação, desde que os termos de uma dessas expressões juntos sejam iguais aos termos da outra. (DESCARTES, *La Geometrie,* tradução nossa)

Única publicação matemática de Descartes, *La Geometrie* é composta de três partes ou livros, a saber:

Livro I: Começa por uma comparação direta entre a aritmética e a geometria. Assim, para Descartes, como as operações usadas na aritmética são a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a extração de raízes, também seria possível na geometria reduzir qualquer problema a algo que não precisasse mais do que o conhecimento dos segmentos de linhas retas e, assim, seria possível resolvê-lo sem usar nada além das cinco operações aritméticas. Desta forma, Descartes introduziu os termos aritméticos diretamente na geometria, apresentando um meio algébrico de resolver problemas geométricos usando processos aritméticos, e vice-versa:

> Often it is not necessary thus to draw the lines on paper, but it is sufficient to designate each by a single letter. (...)

---

23 Os três apêndices do Discurso do Método - *La Dioptrique*, *Les Météores* e *La Geometrie* - eram, na verdade, ilustrações da aplicação do novo método de descoberta das verdades científicas. Embora o Discurso do Método fosse apenas um prefácio aos três apêndices, os sucessores de Descartes tiveram dificuldades para perceber como os três apêndices se relacionavam com seu método geral, e em edições subseqüentes do Discurso do Método eles freqüentemente foram omitidos. A história reverteu totalmente a seqüência e hoje o Discurso do Método é estudado pelos estudantes de filosofia moderna, enquanto estes três trabalhos da ciência estão quase que completamente esquecidos. Cf Burton, 1984, p. 346.

> Here it must be observed that by a^2, b^3, and similar expressions, I ordinarily mean only simply lines, wich, however, I name squares, cubes, etc., so that I may make use of the terms employed in algebra. (DESCARTES, *La Geometrie*, p. 298)

O livro apresenta instruções detalhadas para resolver geometricamente equações quadráticas, faz uma explanação de alguns dos princípios da geometria algébrica grega e revela um grande avanço em relação a estes. Encontra-se aqui nossa moderna notação para potências (x^3, x^4, ...). Sua notação representa o ápice de um século de desenvolvimentos na álgebra simbólica. Praticamente o único símbolo arcaico usado por Descartes é o da igualdade[24], entretanto, a substituição do = por æ não traz nenhum problema no desenvolvimento das idéias.

Num passo mais radical, Descartes quebrou com a tradição grega e separou números da sua correspondência com quantidades físicas. Ao invés de considerar a^2 (ou aa como ele também escrevia) e a^3, por exemplo, como uma área e um volume, ele considerava ambos como sendo nada mais do que uma linha. Para ele, a^2 era simplesmente o quarto termo da proporção $1 : a = a : a^2$ que poderia ser representado por uma linha uma vez que a fosse dado. Para fazer uma construção que correspondesse à proporção $1 : a = a : a^2$, ele escolhia arbitrariamente um segmento unitário ao qual relacionava todos os demais. Desta maneira, era possível representar qualquer potência de uma variável, ou um produto de variáveis, por meio de um segmento de reta. Com esta aritmetização da geometria, Descartes, marcava x num eixo dado e, formando um ângulo fixo não necessariamente perpendicular com esse eixo, marcava então um comprimento y, com o objetivo de construir pontos cuja distância aos eixos x e y satisfizessem uma relação dada.

Descartes conclui o Livro I com uma discussão detalhada do problema do lugar geométrico destacado por Pappus num comentário sobre 'As Cônicas' de Apolônio[25], e que nenhum dos antigos matemáticos havia solucionado inteiramente. A generalização do famoso problema do "lugar relativo a três ou quatro retas" proposta

---

24 Robert Record (c. 1510-1558) fez uso pela primeira vez do moderno sinal de igualdade em seu livro de álgebra "The Whetstone of Witte", publicada em 1557. Justificou a adoção de um par de segmentos paralelos como símbolo de igualdade alegando que "não pode haver nada mais igual". Outro símbolo moderno, o radical, foi introduzido em 1525 por Christoff Rudolff em sua álgebra "Die Coss". Cf Eves, 1997, p. 301.

25 Um caso particular deste problema havia sido considerado por Euclides e Apolônio.

por Pappus (final do século III a.C.) em seu comentário sobre as cônicas de Apolônio ocupa um lugar central em *La Geometrie.*

Esse problema (Figura 6), resolvido por Apolônio no Livro III de seu tratado "As Cônicas", em que mais de cinqüenta proposições cuidadosamente enunciadas, todas provadas por métodos sintéticos, levaram à solução: uma cônica. Meio milênio depois, Pappus sugeriu uma generalização desse problema para n retas, $n > 4$. Os contemporâneos de Pappus não foram felizes na tentativa de generalizar o problema. Foi nas tentativas de generalizá-lo para *n* retas que Descartes chegou, em 1637, à formulação do método das coordenadas.

Descartes deu ao problema um tratamento algébrico e completamente geral, expressando relações entre linhas [retas] mediante o uso de apenas duas variáveis. Descartes nota, numa abordagem matemática inédita, que "*desde que haja sempre um número infinito de pontos satisfazendo esta necessidade, é também necessário descobrir e traçar a curva que contém todos estes pontos*"(*La Geometrie, p.307).* Tradicionalmente, as equações algébricas com duas incógnitas, $F(x,y) = 0$ eram consideradas indeterminadas, uma vez que era impossível determinar as duas incógnitas a partir de uma equação deste tipo. Tudo o que se podia fazer, e que de modo algum era considerado uma solução geral da equação, era substituir x por valores arbitrariamente escolhidos e, depois, resolver a equação para y com cada um desses valores. Entretanto, através da sua abordagem, Descartes permitiu que esse processo fosse transformado numa solução geral: tomando x como a 'abscissa' de um ponto e o y como sua 'ordenada' correspondente pôde, então, variar a incógnita x de modo que a cada valor de x correspondesse um valor de y passível de ser calculado a partir da equação. Com isso, determinava-se um conjunto de pontos que formavam uma curva capaz de resolver a equação. Esse processo foi exemplificado na resolução cartesiana do problema de Pappus.

Sua abordagem consistiu em mostrar como o problema, explicitamente solucionado em relação a quatro linhas, porém com uma solução teoricamente generalizável para *n* linhas, podia ser reduzido, como todos os problemas geométricos, a um problema em que só precisaríamos conhecer os comprimentos de algumas linhas. Essas linhas eram os "eixos das coordenadas" , e os comprimentos nos dariam as "abscissas" e as "ordenadas"[26] dos pontos. O diagrama de Descartes deixa isso obscuro, pois ele ajustou os eixos ao problema, ao contrário do que fazemos hoje, utilizando um sistema de eixos não perpendiculares entre si, o que dificulta o entendimento.

O problema das quatro linhas (retas) foi apresentado por Descartes como a figura a seguir, onde as linhas cheias são as retas dadas, e as tracejadas são as retas buscadas. Descartes tomou as retas AB e BC como as retas principais e passou a relacionar todas as demais com elas.

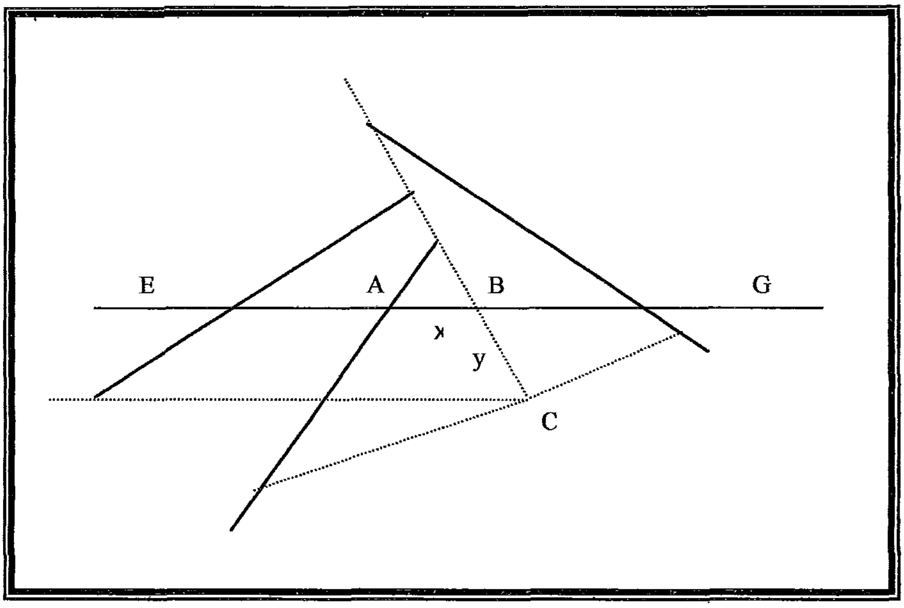

Fig. 6: O Problema de Papus

Dadas três retas (ou quatro retas) num plano, encontrar o lugar geométrico de um ponto que se move de tal forma que o produto das distâncias a duas retas dadas (ao longo de direções especificadas) é proporcional ao quadrado da distância da terceira linha [problema do lugar relativo a três retas], ou proporcional ao produto das distâncias às outras duas retas [problema do lugar relativo a quatro retas].

---

26 O nome '*coordenada*' não aparece no trabalho de Descartes. Este termo é devido a Leibniz, assim como '*abscissa*' e '*ordenada*' *(1692)*.

Descartes, ao notar que o problema poderia ser simplificado se todas as retas se referissem a dois eixos principais, estabeleceu x como sendo o comprimento do segmento AB ao longo da reta dada EG, e y como sendo o comprimento do segmento BC ao longo da reta BC que foi desenhada, onde C é um dos pontos que satisfazem o problema. O comprimento de cada um dos demais segmentos foi, então, expresso como uma função linear de x e y., introduzindo a idéia de sistema de eixos coordenados ao qual todas as retas se referem. Adiante, ele escreveu:

> First, I suppose the thing done, and since so many lines are confusing, I may simplify matters by considering one of the given lines and one of those to be drawn (as, for example, AB and BC) as the principal lines, to which I shall try to refer all the others. Call the segment of the line AB between A and B, x, and call BC, y. (...)
>
> Since this condition can be expressed by **a single equation in two unknown quantities**, we may **give any value we please to either x or y and find the value of the other from this equation**. (DESCARTES, 1954, p. 310-313, grifo nosso)

Aqui, pela primeira vez e de maneira totalmente clara, é afirmado que uma equação em x e y é um meio de introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir calcular o valor de uma delas a partir dos valores correspondentes da outra.

Livro II: Classifica as curvas em dois tipos, geométricas e mecânicas, e escreve sobre as curvas geométricas: "*all points of those curves which we may call 'geometric', that is, those which admit of precise and exact measurement, must bear a definite relation to all points of a straight line, and that this relation must be expressed by means of a single equation*" (*La Geometrie*, p. 319).

Afirma também que as propriedades das curvas dependem apenas dos ângulos que elas formam com outras retas e, quando conseguimos captar a relação entre todos os pontos de uma curva e todos os pontos de uma reta, sob a forma de uma equação, fica fácil descobrir a relação entre os pontos da curva e todas as outras retas e pontos dados. A partir dessas relações, pode-se descobrir os diâmetros, eixos, centros e outras retas e pontos com que cada curva tenha alguma relação. É o que possibilita a geometria analítica.

Mostra um método para encontrar a tangente a um ponto dado na curva cuja equação é conhecida e, depois, continua a tratar o problema de Pappus, abordado já no Livro I, agora numa abordagem bastante exaustiva.

Livro III: Trata da natureza das equações, os princípios básicos para determinar suas raízes e da natureza destas. Num resumo das principais propriedades das equações que iniciam o livro, Descartes recomenda que todos os termos da equação fossem postos juntos e, então, igualados a zero. Embora não tenha sido o primeiro a sugerir isto, foi o primeiro a mostrar e utilizar a vantagem desta disposição. Além da reforma da notação, que dá a esta parte do trabalho uma aparência moderna, Descartes é um dos primeiros a usar explicitamente a designação de raízes negativas e raízes imaginárias.

Introduz a notação algébrica usada em nossos dias: as últimas letras do alfabeto, **x**, **y** e **z** representando as incógnitas e as primeiras letras do alfabeto para representar as constantes. Descartes foi, talvez, o primeiro a usar a mesma letra para representar quantidades negativas e positivas e, num passo além, ressaltou o fato muito importante de que duas curvas podem se referir a um mesmo sistema de coordenadas, e que os pontos em que duas curvas intersectam pode ser determinado encontrando-se as raízes comuns dessas duas equações.

3.1.1.2 – As Expressões Analíticas e a Moderna Matemática

Estavam lançadas as bases da Geometria Analítica e uma revolução se iniciava na Matemática! Descartes renunciou ao estreito realismo dos antigos geômetras: um quadrado, um cubo não mais seriam pensados necessariamente como a medida de uma área, de um volume, porém como resultados de uma operação aritmética, homogêneos entre si, posto que todos correspondem a números. Assim, acha-se consumado o passo decisivo para um cálculo abstrato e geral. O símbolo único da incógnita, ao qual o expoente é associado para nele diferenciar estruturalmente as potências substitui os símbolos múltiplos que diferenciavam qualitativamente as diversas potências, indicando espécies distintas de grandezas, como superfícies e volumes. A notação moderna por ele introduzida proporcionava facilidade e clareza às expressões e, conseqüentemente ao cálculo:

> Os méritos de Descartes encontram-se sobretudo na **aplicação consistente da desenvolvida álgebra do século XVI à análise geométrica dos antigos** e, através disto, num enorme alargamento da sua aplicabilidade. Um segundo mérito é a **definitiva rejeição de Descartes das restrições de homogeneidade dos seus predecessores**, ainda freqüentes na *'logística speciosa'* de Viète, de forma que x^2, x^3, xy eram agora considerados como segmentos de reta. Uma **equação algébrica tornou-se uma relação entre números**, um novo avanço na abstração matemática. O Ocidente, ao alcançar a tradição aritmético-algébrica do Oriente, rapidamente a ultrapassou. (Struik, 1997, p. 166, grifo nosso)

Para Descartes, uma equação era somente uma ferramenta no estudo das curvas, através da qual descobria as suas propriedades. Dada a descrição geométrica de uma curva, ele escrevia sua equação. Embora Stifel e Harriot já tivessem empregado esta forma algumas vezes, Descartes foi o primeiro a perceber, segundo nos informa Ball (1940), a vantagem que se obtinha ao colocar todos os termos de uma equação em um lado e igualá-los a zero. Descartes mudou a face da Matemática deixou as fundações para a Matemática moderna, abrindo o caminho para o desenvolvimento do cálculo de Newton e Leibniz.

Ao mostrar que a dependência entre quantidades variáveis poderia ser escrita através de uma equação em x e y, de modo que os valores de uma delas pudessem ser calculados a partir dos valores correspondentes da outra, Descartes revolucionou a Matemática e, em particular, o desenvolvimento do estudo das funções. Introduzir funções por meio de expressões analíticas se tornou cada vez mais predominante na Matemática. Segundo o filósofo inglês John Stuart Mill, "foi o maior passo já dado por um único homem no progresso das ciências exatas" (Apud Burton, 1984).

Descartes costuma ser considerado o ponto que separa a Matemática Medieval da Matemática Moderna, como podemos perceber nas palavras de Boll a seguir:

> A **união do espaço e do número é uma descoberta moderna** (1619), cuja **parte preponderante se deve a René Descartes**. Os antigos conheciam apenas o espaço **sem** o número...
>
> Era necessário que aparecesse um espírito livre – foi Descartes. (...) Como Laplace afirmava com razão, as ciências matemáticas mudaram de aspecto e o 10 de Novembro de 1619 pode ser considerado como a data oficial do nascimento das matemáticas modernas. A concepção de Descartes forneceu aos matemáticos os métodos gerais que até então **lhes havia faltado e cuja falta muitas vezes os tinha tornado estéreis**. (BOLL, 1979, p. 91-109, grifo nosso)

Contemporâneo de Descartes, Fermat (1601-1665) desenvolveu sua geometria analítica por volta de 1629, portanto, antes de Descartes. Infelizmente, Fermat nunca publicou esse seu trabalho de 1629, embora seus manuscritos tenham circulado a Europa a partir de 1636 e só tenha sido publicado postumamente em 1679. Sua geometria analítica foi desenvolvida sob outro ponto de vista, visto que ele sempre começava com a equação e, então, descrevia a curva. Descartes, por outro lado, começava pela descrição geométrica da curva e, só depois, determinava sua equação. Deste modo, Descartes e Fermat enfatizaram dois diferentes aspectos da relação entre equações e curvas. Segundo nos informa Katz (1993), ambos perceberam a conexão entre curva geométrica e equação algébrica a duas variáveis, utilizaram eixos como ferramenta básica de seu estudo, usaram as seções cônicas como principais exemplos e, finalmente, embora ambos tenham se ocupado com a geometria analítica das curvas ao invés de funções, cada um compreendeu, de sua maneira, a idéia básica de uma função, ou seja, que a mudança em uma variável determinava uma mudança na outra.

A partir de Descartes e Fermat, o pensamento funcional se tornou cada vez mais presente no trabalho matemático e o método analítico de se tratar funções jamais deixou de ser utilizado. Entretanto, ressaltamos, com Botelho (1992), um detalhe muito importante, que não poderia deixar de ser mencionado: a análise cartesiana era centrada basicamente nas curvas, que eram vistas apenas como uma materialização da relação entre x e y, e não como uma função $y = f(x)$.

3.1.2 – Galileu e as Leis da Natureza

Galileu (1564-1642), assim como Descartes, estava certo que a natureza era matematicamente planejada. É famosa esta sua declaração feita em 1610, afirmando que o livro da natureza está escrito em linguagem matemática:

> Philosophy [nature] is written in that great book which ever lies before our eyes – I mean the universe – but we cannot understand it if we do not first learn the language and the grasp the symbols in which it is written. **The book is written in the mathematical language**, and the symbols are triangles, circles and other geometrical figures, without which one wanders in vain through a dark labyrinth. (Apud KLINE, 1972, p. 329, grifo nosso)

Antes de Galileu, os filósofos concentravam-se em explicar o **porquê** dos fenômenos naturais. Com Galileu, no entanto, nasceu a procura por explicações matemáticas para descrever **como** esses fenômenos ocorrem, ou seja, o importante para ele não era saber o **porquê**, mas o **como**. E era através da Matemática, aliada a alguma experimentação, que ele buscava as respostas às suas perguntas:

> Acima de tudo, devemos a Galileu, mais do que a qualquer outro homem deste período, o espírito da ciência moderna baseada na harmonia da experimentação e da teoria, **com realce para o uso intensivo da matemática** (embora exista menos experimentação em Galileu do que é hábito crer). Nos *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638, sendo as duas novas ciências 'mecânica e movimentos locais'), Galileu foi conduzido ao **estudo matemático do movimento, à relação entre distância, velocidade e aceleração**. (STRUIK, 1997, p. 160, grifo nosso)

Do estudo matemático do movimento derivou o conceito que seria fundamental, e também central, em praticamente todos os trabalhos dos próximos dois séculos – o conceito de uma função ou uma relação entre variáveis. Encontramos essa noção em quase toda parte no livro em que Galileu fundou a mecânica moderna - *'Diálogos Sobre Duas Novas Ciências'* -, publicado em 1638, logo após *La Geometrie* de

Descartes. Por toda a sua obra são estabelecidas diversas relações funcionais, expressas por Galileu em palavras e na linguagem das proporções.

Para citar alguns exemplos, na parte de sua obra dedicada à resistência dos materiais, encontramos: *"A razão das áreas dos cilindros de volume igual, desconsideradas as suas bases, tem entre si uma proporção equivalente à raiz quadrada da razão de seus comprimentos"* e, novamente, *"Os volumes de cilindros retos possuindo superfícies curvas iguais são inversamente proporcionais às suas alturas"* (Apud Hawking, 2005, p. 131-133). No seu trabalho sobre o movimento ele estabeleceu, por exemplo, *"As distâncias percorridas por um corpo em queda a partir do repouso, com um movimento uniformemente acelerado, estão entre si como os quadrados dos intervalos de tempo empregados em percorrer essas distâncias"* (Apud Hawking, 2005, p. 232). Esses poucos exemplos já são suficientes para percebermos que a linguagem de Galileu demonstra claramente que ele estava de posse da noção de função.

Todo o trabalho de Galileu está impregnado de noções de variável e função, mesmo que apenas implicitamente. As relações funcionais eram expressas por palavras e através de proporções matemáticas, estando a apenas um pequeno passo da linguagem simbólica.

3.2 – O Século XVIII e a Revolução na Matemática

Os franceses chamaram o século XVIII de "siècle des lumières" - século das luzes - por causa de sua ênfase na **razão como um caminho para conhecimento.** Mais comumente, ele foi chamado de **Iluminismo.**

Na segunda metade do século XVIII, a idéia de que uma Revolução Científica afetando todos os aspectos de ciência natural estava em processo se tornou lugar comum, mas inicialmente o termo era usado apenas com referência à Matemática e à

Astronomia. Matemáticos como D'Alembert tinham cunhado a expressão "Revolução Científica", tendo a Matemática como a maior força revolucionária. Esta revolução foi um evento cultural associado a grandes nomes, tais como:

- Galileu Galilei (1564-1642),
- Johannes Kepler (1571-1630),
- René Descartes (1596-1650),
- Isaak Newton (1642-1727).

A Filosofia Natural nunca poderia voltar ao seu curso anterior. Como D'Alembert observou: "Uma vez que as fundações de uma revolução sejam colocadas, quase sempre é a geração seguinte que completa aquela revolução". O século dezessete tinha começado a revolução; o século dezoito a completaria.

3.2.1 – O Método Analítico

Como vimos, no início do século XVII o estabelecimento de relações funcionais entre quantidades físicas foi ganhando força numa medida cada vez mais crescente como sendo a nova concepção de leis quantitativas da natureza. Estudar a relação entre o movimento e suas causas se tornou o problema principal da ciência. Como conseqüência, um novo método de introduzir funções se tornaria, por um longo tempo, o principal método nas matemáticas e em suas aplicações: o método analítico.

Como antes, as funções ainda continuariam a ser freqüentemente introduzidas verbalmente, por meio de gráficos e, também como antes, as tabelas de funções continuariam a ser muito usadas. No entanto, na pesquisa teórica, o método analítico de introduzir funções por meio de fórmulas e equações veio para o primeiro plano, produzindo uma revolução no desenvolvimento da Matemática:

> Introduction of functions in the form of equations effected a real revolution in the development of mathematics. The use of analytical expressions, the operations with witch are carried out according to strictly specified rules, imparted a feature of a regular calculus to the study of functions, thus opening up entirely new horizons. Originating in the course of applying algebra to geometry, **this method of representing functions was immediately extended to other branches of mathematics and in the first place to the realm of infinitesimal calculations**. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 53, grifo nosso)

Essa mudança de idéias tomou lugar, segundo nos informa Youschkevitch (1976), no final do século XVI, quando as funções ainda estavam sendo introduzidas apenas por meio dos métodos antigos, e a função logarítmica foi introduzida. Em 1614, Napier (1550 – 1617) publicou seu famoso trabalho '*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*' – Uma Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos – no qual o conceito de função logarítmica aparecia implicitamente por toda a obra. Sua segunda obra sobre os logaritmos '*Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*', com a descrição completa dos métodos que utilizava para construir suas tabelas, foi publicada postumamente, em 1617. Três anos depois, em 1620, J Bürgi publicou suas tábuas logarítmicas, que calculou começando de relações enfatizadas anteriormente por Stiefel (em 1544), embora já conhecida por Arquimedes, entre a progressão geométrica de potências de alguma quantidade (por exemplo: q, q^2, q^3, ...) e a progressão aritmética dessas potências (1, 2, 3, ...). Bürgi intuitivamente entendeu que essa relação era contínua, como foi evidenciado pelo processo de interpolação usado por ele.

Entretanto, seria a geometria analítica de Fermat e Descartes que abriria caminho para o método analítico de introduzir funções. A classe de funções analíticas estudadas era geralmente expressa por meio de somas de séries infinitas. O método analítico, com sua extraordinária eficácia, revolucionou a Matemática e o conceito de função assumiu um papel central em todas as ciências exatas. Estava se iniciando uma nova era na Matemática. Ao fazer da teoria das equações algébricas e do novo simbolismo da álgebra o principal instrumento de seu método para estudar as curvas planas, Descartes abriu o caminho para a descrição e análise das figuras no plano e no espaço através da álgebra.

Em pouco tempo a mecânica se beneficiaria disso. As trajetórias dos corpos foram identificadas com equações algébricas, cuja manipulação era o método mais adequado para o estudo das questões relativas a variação e interseção dessas trajetórias. Daí completou-se o trinômio "tajetória – equação – curva".

Pouco depois, apoiando-se em importantes trabalhos anteriores acerca do movimento dos corpos celestes realizados por Thyco Brahe (1546-1601), Johannes Kepler (1571-1630), Galileu Galileu (1564-1642), Christian Huygens (1629-1695), Newton (1642-1727) lança os fundamentos de um novo modo de explicar e entender os fenômenos naturais através de sua obra *'Principia Mathematica Philosophiae Naturalis'* (1687), que estabelecia a mecânica sobre uma fundamentação axiomática e continha a lei da gravitação universal. Por uma dedução matemática rigorosa, demonstrou que as leis de Kepler sobre os movimentos dos planetas se explicam por meio da lei gravitacional. Nessa magnífica obra, Newton exprime a relação causa-efeito por leis ou princípios e traduz essas leis em expressões matemáticas.

Esse método, de natureza local, uma vez que se aplicava a um espaço-tempo delimitado, estava de acordo com o método reducionista cartesiano, logo se transformando num poderoso modelo a ser seguido na busca de explicações e de entendimentos para os fenômenos em geral. "Acabou-se o mistério, inicia-se o que viria a ser chamado a era da razão e o protótipo do pensar racional é a obra de Newton" (D'Ambrosio, 1994). Nas comemorações dos 300 anos de Newton em Cambrige, foi declarado:

> Newton não foi o iniciador da idade da razão. Foi o último dos mágicos, o último dos babilônios e sumerianos, o último grande espírito a contemplar o mundo visível e intelectual com os mesmos olhos daqueles que começaram a construir nossa herança intelectual, há mais ou menos 10.000 anos. (Royal Society Newton Tercentenary Celebrations, Cambrige, 1947, p. 27-34, apud Price, 2000, p.36)

Muitas das funções introduzidas no século XVII foram estudadas primeiro como curvas, antes de o conceito de função estar totalmente estabelecido. Kline (1972) cita, como exemplo disso, as funções transcendentais elementares, tais como log x, sen x, e a^x; e, também, uma curva que poderíamos representar por $y = ae^{-cx}$ com $x \geq 0$, descrita pelo aluno de Galileu, Evangelista Torricelli (1608-1647), em uma carta de

1644 (e que não fora publicada antes de 1900). Esta curva já havia sido encontrada por Descartes em 1639, mas sem nenhuma conexão com logaritmos. É claro que, nessa época, os valores tabulados de funções trigonométricas e logarítmicas já eram conhecidos com grande precisão.

É importante também ressaltar, com Kline (1972), que antigas e novas curvas eram agora introduzidas por meio de movimento. Na Grécia Antiga, umas poucas curvas, como a quadratriz e a espiral de Arquimedes, tinham sido definidas em termos do movimento, mas naquela época isso era uma exceção nas matemáticas. A atitude foi um pouco diferente no século XVII: Mersenne (1588-1648), em 1615 definiu a ciclóide (que já era conhecida anteriormente) como o lugar de um ponto numa roda que gira pelo chão; Galileu, em 1638, demonstrou que o caminho de um projétil atirado no ar (com um ângulo de inclinação em relação ao solo) descreve uma parábola. Mas, seria com Roberval, Isaac Barrow e Newton, aluno de Barrow, que o conceito de uma curva como sendo o caminho de um ponto em movimento ganharia reconhecimento e aceitação explicitamente.

Gradualmente os termos e simbolismos para os vários tipos de funções representadas por essas curvas foram introduzidos. Havia muitas dificuldades para serem vencidas. Por exemplo, o uso de funções na forma a^x, com x tomando valores positivos e negativos, inteiros e fracionários se tornou comum no século XVII. Foi assumido (até o século XIX, quando os números irracionais foram, finalmente, definidos) que as funções também eram definidas para valores irracionais de x, de modo que ninguém questionava uma expressão da forma $2^{\sqrt{2}}$, que era entendida como sendo um valor intermediário entre dois expoentes racionais acima e abaixo de $\sqrt{2}$. A distinção cartesiana entre curvas geométricas e mecânicas abriria caminho para a distinção entre funções algébricas e transcendentes, feita claramente em 1667 por James Gregory (1638-1675) e provada por Leibniz, ao mostrar que *sen x* não poderia ser uma função algébrica de x.

Segundo nos informa Botelho (1992), a restrição cartesiana de tratamento analítico apenas às funções algébricas, deixando de fora inclusive as curvas mecânicas, estudadas desde a Grécia antiga, gerava um problema diante do objetivo de representar todas as funções, pelo menos as já conhecidas, de uma única maneira. Uma solução temporária para este problema foi conseguida em meados do século XVII através de trabalhos de vários matemáticos como Mercator, Gregory e Newton, que, independente uns dos outros, descobriram como desenvolver funções em séries de potências infinitas, o que possibilitou a representação analítica de todas as relações funcionais da época.

3.2.2 – O Conceito de Função

A idéia de **curva** em Descartes e a de **fluente** em Newton já se aproximam da noção moderna de função – correspondência entre variáveis e lei física. Entretanto, ainda há um longo caminho a percorrer em busca de sua conceituação.

Desde o princípio do seu trabalho com o cálculo, iniciado em 1665, Newton usou o termo "fluente" para representar qualquer relação entre variáveis, como nos informa Struik:

> (...) mostra que o autor [Newton] estava na posse completa do cálculo a que ele chamava "teoria dos fluxões". **Newton descobriu o seu método geral durante os anos 1665-66**, quando permaneceu na sua terra natal, no campo, (...).
>
> A **descoberta dos "fluxões" por Newton** estava ligada a seus estudos sobre **séries infinitas** através da *Arithmetica*, de Wallis. Isso levou-o a estender o teorema do binômio a expoentes fracionários e negativos e, assim, à descoberta das séries binomiais. **Este fato ajudou-o a estabelecer a sua teoria das fluxões para "todas" as funções, algébricas ou transcendentes**. Uma "fluxão", expressa por um ponto em cima de uma letra (letras marcadas), era um valor finito, uma velocidade; as letras sem ponto representavam as "fluentes". (Struik, 1997, p. 178, grifo nosso)

Segundo nos informam Cohen & Westfall (2002), no tratado *"Para resolver problemas pelo movimento, as proposições que seguem são suficientes"*, de outubro 1666, Newton apóia-se firmemente naquela descoberta central da nova geometria analítica - a de que **uma equação algébrica expressa a natureza da curva** –

introduzindo a seguinte proposição: *"Dada uma equação que expresse a relação entre duas ou mais linhas [retas], x, y, z etc., descritas por dois ou mais corpos em movimento..."* (Apud Cohen & Westfall, 2002, p. 452). Embora a aplicação de considerações sobre o movimento à geometria não tenha se originado em Newton, se tornou central para seus avanços mais importantes na Matemática:

> O *princípio maior* sobre o qual se alicerça o método das fluxões é este princípio simplíssimo, extraído da *mecânica racional*: que a ***quantidade matemática*, particularmente a *extensão*, pode ser concebida como gerada por um *movimento local* contínuo**; e que ***toda e qualquer quantidade* (pelo menos por *analogia e acomodação*) pode ser concebida como gerada de maneira similar**; conseqüentemente, deve haver velocidades [ou índices] *comparativas* de aumento e diminuição durante essas gerações, *relações* estas que são fixas e determináveis e, portanto, podem ser (problematicamente) propostas para serem encontradas. (...)
>
> E desses princípios *simples*, manipulados com vasta dose de habilidade e sagacidade, ele deduz seu ***método das fluxões***, o qual, se o considerarmos apenas *até onde* ele o levou, juntamente com a *aplicação* que fez dele, aqui, ali ou acolá, direta ou indiretamente, expressa ou tacitamente, às descobertas mais curiosas da *arte* e da *natureza*, assim como às mais sublimes *teorias*, poderemos merecidamente julgar a *maior obra da genialidade* e o mais nobre esforço jamais feito pela mente humana. (COLSON, 1737, apud COHEN & WESTFALL, 2002, p. 481-482, grifo nosso)

Newton deu a esse método o nome de método das *fluxões* - designação extraída do particípio passado do verbo latino *fluere*, que significa 'fluir' – por considerar que o pano de fundo de todos os fenômenos do movimento, o tempo, fluía uniformemente. Para Newton, o tempo era a variável independente da qual todas as outras dependiam, uma interpretação avançada naquela época quando as variáveis de uma curva ainda não eram vistas como dependentes de uma única variável independente.

Nesta passagem de seu *Treatise on the Quadrature of Curves* (1704), Newton define as quantidades matemáticas como sendo geradas através do movimento, fala de sua descoberta do método das fluxões, bem como define fluxões como sendo as derivadas e fluentes como as funções primitivas:

> 1. Eu considero que **as quantidades matemáticas são dadas pelo movimento contínuo** e não que consistem em partes muito pequenas. As linhas [retas] não se compõem juntando partes extremamente pequenas. As linhas [retas] são geradas por pontos que se movem, as superfícies por linhas [retas] que se movem, os corpos por superfícies que movem, os ângulos pela rotação de semi-raios, o tempo por um fluxo contínuo, e o mesmo em outros casos. Estas coisas ocorrem na Natureza e podemos percebê-las diariamente ao observarmos os corpos em movimento.
>
> 2. Como eu considerei que, no mesmo intervalo de tempo, as quantidades com grandes velocidades se tornam maiores do que as quantidades com pequenas velocidades, tentei determinar uma quantidade a partir da velocidade a que ela se move. A estas **velocidades** chamei **fluxões** e às **quantidades geradas por elas** chamei **fluentes** e em 1665 e 1666 descobri e elaborei o método das fluxões que aqui usei para a quadratura das curvas.
>
> 3. As fluxões comportam-se como incrementos dos fluentes em intervalos de tempo extremamente pequenos. Mais precisamente, elas são diretamente proporcionais a eles. (Apud GARDING, 1981, p. 131, grifo nosso)

O trabalho mais antigo de Newton, *Methodus Fluxionum* (Method of Fluxions), apareceu apenas em 1736, nove anos após sua morte. Nesse trabalho, "cuja composição data de 1671", Newton se aproxima bastante do sentido atual de função "com a expressão *'relata quantitas'* no sentido do que nós chamaríamos hoje de *variável dependente* e em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) aparece o vocábulo *'genita'*, designando expressões como $A^3\ B^4\ C^2$, onde A, B e C representam *variáveis independentes*" (Costa,1929, p. 143).

Um exemplo da maneira como Newton explicou o seu método em *Method of Fluxions* nos é dado por Struik (1997): "As variáveis de fluentes são representadas por v, x, y, z, ... *'e as velocidades pelas quais qualquer fluente varia pelo movimento gerador (que eu posso chamar fluxões, ou simplesmente velocidades, ou celeridades) represento-as pelas mesmas letras ponteadas:* $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ *'.*"

A expressão ***analítica*** foi primeiro usada por James Gregory (1638-1675) em sua obra *'Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura'* (1667), onde definiu uma quantidade *analítica* como uma quantidade obtida por uma sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável, como a passagem ao limite. Ao que parece, foi a primeira definição, embora implícita, de função.

Segundo Youschkevitch (1976), a palavra **função** aparece pela primeira vez em 1673 num manuscrito de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), *'The inverse method of tangents, or about functions'*, onde o termo aparece com um significado estritamente geométrico. Esse mesmo significado apareceria em seus artigos de 1692 e 1694. Em suas correspondências trocadas com Johnn Bernoulli (1667-1748), entre 1694 e 1698, a palavra função figuraria várias vezes, entretanto, na busca por um termo geral que representasse quantidades dependentes de uma variável, seu significado vai se aproximando, pouco a pouco, de uma expressão analítica.

Entretanto, Johann Bernoulli usaria o termo *função* pela primeira vez em sua carta de 5 de julho de 1698, quando o termo é empregado em um sentido mais preciso e também é definido de uma maneira bem geral como sendo ***"quantidades compostas, de alguma maneira, dessa grandeza variável e de constantes"*** (Costa,1929, p. 144). Entretanto, durante os próximos 20 anos o termo *função* ainda permaneceria pouco conhecido.

Mas a prática que a geometria analítica impunha foi chamando cada vez mais a atenção para o aspecto analítico que a função podia revestir e assim, dois anos mais tarde, **Johann Bernoulli** usaria o termo ***função*** pela primeira vez no **sentido analítico** e com um significado mais preciso. Foi assim que, em **1718**, Johann Bernoulli publicou um artigo que viria a ter grande divulgação, contendo a primeira definição explícita de uma função como uma expressão analítica: ***"Chamamos função de uma quantidade variável a uma quantidade composta, de qualquer forma, dessa variável e constantes".*** Um retoque final nesta definição seria dado 30 anos depois pelo aluno de Johann Bernoulli, Leonhard Euler (1707-1783).

Com os trabalhos de Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783), de Euler e de Daniel Bernoulli (1700-1782) sobre o problema das cordas vibrantes – surgido em meados do século XVIII, em conexão com o estudo das vibrações transversais de uma corda flexível e esticada, como uma corda de violino – seria dado um grande impulso no desenvolvimento do conceito de função, que logo se ampliaria.

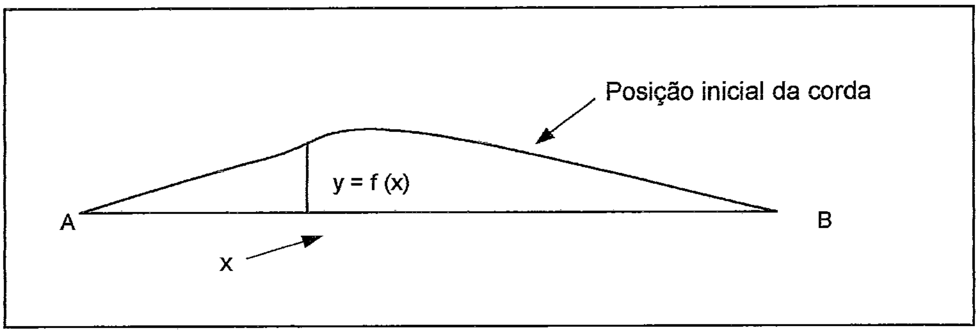

Fig. 7: Problema das Cordas Vibrantes

O primeiro estudo significativo sobre o fenômeno das vibrações de uma corda é devido a D'Alembert que, em 1747, resolveu o problema para uma determinada condição inicial por meio de uma equação de derivadas parciais e provou que a solução geral do problema poderia ser representada por uma função arbitrária que, segundo Bos (1985), é descrita, dada uma determinada condição inicial, pela equação:

$$y = \tfrac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)]$$

Como poderia haver uma grande variedade de condições iniciais, D'Alembert restringiu a apenas aquelas que poderiam ser descritas por uma única expressão analítica, afirmando que, sem essa restrição, nenhuma solução do problema seria possível através da análise matemática. Euler não tinha a mesma opinião. Para ele, as condições iniciais poderiam abranger curvas mais gerais, até mesmo aquelas que não podem ser escritas através de uma lei analítica. Seguiu-se, então, entre Euler e D'Alembert, uma polêmica sobre o tipo de funções que podiam ser admitidas para o perfil inicial da corda. D'Alembert "insistia em que tais funções só podiam ser aquelas dadas por uma única expressão analítica, como os polinômios, as funções trigonométricas, a função exponencial, a função logarítmica, etc", enquanto, para Euler, "não havia por que ser tão restritivo", insistindo "em admitir funções mais gerais" (Ávila, 1985, p. 16-18). A questão era a descobrir se toda posição inicial poderia ser descrita por uma função f(x), uma vez que o conceito de função do século XVIII referia-se a fórmulas e, deste modo, a relação entre x e y só poderia ser chamada de função se pudesse ser descrita por uma fórmula.

Em 1748, Euler publicou sua obra *'Introductio in analysin infinitorum'* em dois volumes, que foi o primeiro trabalho em que o conceito de função ocupou um papel central e explícito. No capítulo I do volume I, Euler submete o conceito de função a um estudo detalhado, começando por definir as noções iniciais. Deste modo, define uma constante como uma quantidade que assume um, e apenas um valor; enquanto a variável é definida como a quantidade que pode assumir qualquer valor de um conjunto:

> A variable quantity is an indeterminate, or universal, quantity wich comprises in itself absolutely all determinate values. Thus, a variable quantity comprises in itself absolutely all numbers, both positive and negative, both integer and fractional, both rational and irrational and transcendent. Even zero and imaginary numbers are not excluded from the meaning of a variable quantity. (Apud YOUSCHKEVITCH, 1976, P. 61)

Em sua definição de função, Euler seguiu seu professor Johann Bernoulli, mudando, no entanto, a palavra *'quantidade'* por *'expressão analítica'*: ***"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma maneira, dessa quantidade variável e de números ou quantidades constantes".***

Euler, então, enumera as operações através das quais as expressões analíticas podem ser obtidas, começando pelas operações algébricas e, depois, as transcendentes, chegando às funções exponenciais e logarítmicas e, finalmente, a um infinito número de outras funções fornecidas pelo cálculo diferencial e integral. Estabeleceu um tratamento estritamente analítico para as funções trigonométricas. Percebendo a dificuldade de enumerar os vários métodos de expressar funções analiticamente, no Capítulo 4 dessa mesma obra, Euler os reduz a apenas um, que declara ser universal e simultaneamente, a forma mais conveniente de se expressar analiticamente uma função – a **série de potências infinitas**. Assim, Euler sugeriu sem, contudo, conseguir provar, que toda função poderia ser desenvolvida desse modo, ressaltando que os expoentes não precisariam ser obrigatoriamente positivos, mas podiam ser quaisquer números :

$$A + Bx + Cx^2 + \dots$$

A noção de função, a esta altura, já havia evoluído o suficiente para permitir uma classificação das funções elementares. Assim, Euler distingue as funções uniformes das multiformes, as explícitas das implícitas, as algébricas das transcendentes e, também, as contínuas das descontínuas. A ele devemos a notação f(x) para denotar uma função de x, introduzida em 1734-35, nos 'Comentários de Petersburgo'. Euler, também pela primeira vez, introduziu as funções de uma variável complexa que, ao contrário das funções reais de variável real, não apresentavam um apelo geométrico imediato. Sem o apoio da visualização gráfica, aumentou a necessidade de definições mais precisas e cuidadosas.

A partir de então, muitas definições surgiriam na tentativa de precisar o conceito de função, que seria identificada como uma expressão analítica até os séculos XVIII e XIX, apesar de logo se perceber que essa definição conduzia a diversas incoerências e limitações, uma vez que uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes. Esta noção, associada às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que lhe alteraram profundamente a sua natureza e significado.

Euler formulou uma nova definição de função no prefácio de seu livro *'Institutiones Calculi Differentialis'*, publicado em **1755**. Agora, a idéia de relação deveria ser dada de uma maneira mais universal e abstrata o quanto possível, e foi o que Euler fez quando formulou sua nova definição de função:

> If some quantities so depend on other quantities that if the later are changed the former undergo change, then the former quantities are called functions of the latter. This denomination is of broadest nature and comprises every method by means of which one quantity could be determined by others. **If, therefore, x denotes a variable quantity, then all quantities which depend upon x in any way or are determined by it are called functions of it**. (EULER, apud YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 70)

Neste conceito, não é dada tanta ênfase à expressão analítica, e a função é definida como uma dependência entre duas variáveis x e y, de tal modo que, quando x varia, y também varia. Embora ainda apresentasse grandes restrições, esta definição de função exerceu grande influência em todo o desenvolvimento subseqüente da Matemática. O isolamento da classe de funções contínuas, ou seja, as funções analíticas representadas por séries de potências, e a descoberta de suas principais propriedades, foram de substancial importância.

Em **1821**, em seu *'Cours d'analyse ... 1re partie: analyse algábrique'*, Augustin Cauchy (1789-1857) assim definiu uma função: **"Chamam-se funções de uma, ou várias quantidades variáveis, às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou mais várias outras quantidades constantes ou variáveis"** (apud apud Zuffi & Pacca, 1999, p. 247). Entretanto, essa definição ainda era bastante vaga e incompleta.

Joseph Fourier (1768-1830), em suas pesquisas sobre a propagação do calor iniciadas em fins do século XVIII, foi levado a considerar as séries trigonométricas envolvendo uma relação mais geral entre as variáveis do que as que já haviam sido estudadas anteriormente por Euler e Bernoulli. Segundo Simmons (1987), Fourier afirmava que gráficos arbitrários – por exemplo, uma linha poligonal com alguns vértices e mesmo algumas lacunas – podiam ser representados por séries trigonométricas e, portanto, deveriam ser tratados como funções legítimas, e causou um choque a muitos ao provar que isto era correto. Essas séries entrariam para a história como as 'Séries de Fourier'.

Em **1822**, Fourier publica seu livro *'The Analytical Theory of Heat'*, onde aparece, pela primeira vez, uma concepção de função desvinculada da idéia de necessidade de uma fórmula para defini-la: ***"Uma função f representa uma sucessão de valores ou ordenadas arbitrárias. (...) Não supomos essas ordenadas sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem umas às outras de qualquer maneira, e cada uma é dada como se fosse uma grandeza única"*** (Fourier, apud Ávila, 2002, p. 92).

Essa formulação bastante geral do conceito de função assim aparece no último capítulo de seu livro:

> Above all, it must be remarked that **the function f (x)**, to which this proof applies, is **entirely arbitrary**, and not subject to a continuous law.... In general **the function f (x) represents a succession of values being given to the abscissa x, there are an equal number of ordinates f (x).... We do not suppose these ordinates to be subject to a common law; they succeed each other in any manner whatever, and each of them is given as if were a single quantity**.
>
> It may follow from the very nature of the problem, and from the analysis which is applicable to it, that the passage from one ordinate to the following is effected in a continuous manner. But special

> conditions are then concerned, and the general equation, considered by itself, is independent of these conditions. **It is rigorously applicable to discontinuous functions**. (FOURIER, Apud EDWARDS, p. 307, grifo nosso)

Entretanto, o aparecimento de funções cada vez mais gerais ia ocorrendo naturalmente e ao mesmo tempo exigindo o desenvolvimento de conceitos e processos mais adequados ao seu tratamento. E isso exigia uma maior precisão do conceito de função, que ia sendo reformulado a cada nova dificuldade apresentada.

Em 1834, segundo Youschkevitch (1976), Lobatchevsky (1793-1856) publicou o artigo de *'On the disappearance [convergence] of trigonometric series'*, onde estabeleceu a seguinte definição:

> General conception demands that a **function of x be called a number which is given for each x and which changes gradually together with x. The value of the function could be given either by an analytical expression, or by a condition which offers a means for testing all numbers and selecting one of them; or, lastly, the dependence may exist but remain unknown**.
>
> (...) that **any change and relation in it is represented by an analytical function**. Meanwhile the broad view of the theory allows the existence of dependence only in the sense that numbers, in connection with one another, be regarded as though given together. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 77, grifo nosso)

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) contribuiu muito para o correto entendimento da natureza de uma função. Em seu artigo de **1837**, foi o primeiro a dar uma definição mais ampla de função, como correspondência que leva elementos de um conjunto (o domínio) em elementos de outro conjunto (o contradomínio). Esta definição admitia tanto as funções contínuas como as descontínuas, tendo sido amplamente aceita até meados do século XX:

> Uma **variável** é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; **se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor de y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x**. A variável **x**, à qual se atribuem valores a vontade, é chamada **variável**

> **independente** e a variável **y**, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada **variável dependente**. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o **campo de definição da função** e os valores assumidos por y constituem o **campo de valores da função**. (Apud EVES, 1997, p. 661, grifo nosso).

Segundo Simmons (1987), Dirichlet adicionou à definição que não importa se y depende de x de acordo com alguma 'fórmula' ou 'lei' ou 'operação matemática'. Então, enfatizou isso dando um exemplo de uma função descontínua a cada ponto do intervalo $0 \leq x \leq 1$, descrita de acordo com sua definição:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para os valores racionais de } x \\ 1 & \text{para os valores irracionais de } x \end{cases}$$

Embora essa definição de Dirichlet chegue muito perto da atual, na época dele os conceitos de conjunto e de número real ainda não tinham sido rigorosamente estabelecidos. Isso só aconteceria no final do século XIX, com os trabalhos de Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916) e Cantor (1829-1920), naquilo que seria chamado a *aritmetização da Análise*. Em 1872, com os "cortes de Dedekind" no sistema de números racionais e o axioma de Cantor-Dedekind, segundo o qual os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência1 a 1 com os números reais, são eliminados os problemas lógicos que envolviam a construção do conjunto dos números reais, possibilitando elaborar uma definição de função muito mais abrangente, em conjuntos quaisquer, e não apenas numéricos. Estamos chegando à uma definição final (?) de função, que seria dada somente no século XX.

Finalmente, em 1939, foi proposta por Bourbaki a definição de função que é usada atualmente nos meios matemáticos e científicos: **"Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de XxY, tal que, se (x, y) $\in$ f e (x, y') $\in$ f, então y = y'."** (Apud Zuffi & Pacca, 1999, p. 133). Segundo Monna (1972), é assim que essa definição aparece, em 1939, no primeiro livro da série Bourbaki – *'Les structures fondamentales de l'analyse, Théorie de ensenmbles'*:

> Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite **relation fonctionnelle en y,** ou **relation fonctionelle de E vers F**, si,

quelque soit x ∈ E, il existe un élément y de F, et un Seúl, qui soit dans la relation considérée avec x.

On donne le om de **fonction** à l'opération qui associe ainsi à tout élément x ∈ E, l'élément y ∈ F que se trouve dans la relation donnée avec x; on dit que y est la **valeur** de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est **déterminée** par la relation fonctionnelle considérée. Deux relations fonctionnelles **equivalentes** déterminent la **même** fonction. (BOURBAKI, 1939, apud MONNA, 1972, p. 82, grifo do autor)

Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x pertencente ao conjunto E e uma variável y pertencente ao conjunto F, é dita **relação funcional em y**, ou **relação funcional de E em F**, se, **qualquer que seja x ∈ E, existe um, e apenas um, elemento y de F na relação considerada com x**.

Dá-se o nome de **função** à operação que associa, segundo essa definição, todo elemento x ∈ E, a um elemento y ∈ F. Dizemos que y é o valor da função para o elemento x e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam uma mesma função. (BOURBAKI, 1939, apud MONNA, 1972, p. 82, tradução nossa)

Nessa definição de função há de se observar a exigência de que, a cada elemento x do domínio seja associado um, e apenas um, y do contra-domínio. Entretanto, é importante ressaltar que a razão dessa exigência não se deve a nenhuma restrição matemática, mas a uma herança de suas origens nas leis físicas. De fato, essa convenção tem origem nas descrições de fenômenos físicos, que são funções do tempo, ou seja, funções cuja variável independente é o tempo. E como o tempo é concebido como uma grandeza estritamente crescente, ou seja, uma grandeza que nunca volta, não anda para trás, as relações que descrevem fenômenos físicos associam a cada tempo um único valor, o que deixaria suas marcas mesmo nessa última e atual definição de função, que associa a cada variável independente, uma única imagem.

Capítulo IV

A Introdução do Estudo das Funções no Ensino Secundário Brasileiro

Após o estudo do desenvolvimento do conceito de função, queremos mostrar como se deu a sua introdução no ensino secundário brasileiro.

Nas páginas a seguir tentamos mostrar o desenrolar dos acontecimentos que precederam o momento histórico da introdução do estudo de funções no ensino secundário brasileiro (que hoje é denominado Ensino Fundamental e Ensino Médio). Nesse contexto histórico, destacamos a figura de Euclides Roxo que, inspirado pelos movimentos de renovação do ensino da Matemática na França, Alemanha e Estados Unidos, insurge como principal personagem na luta pela modernização do ensino de Matemática em nosso país. Através de extensas publicações em jornais da época, seguidas de acalorados debates, da publicação de inúmeros livros didáticos e, especialmente, através dos programas de ensino do Colégio Pedro II, então considerado colégio padrão, Euclides Roxo divulga as principais tendências mundiais de modernização do ensino da Matemática, dentre elas, a introdução do estudo das funções.

Antes de iniciarmos a nossa pesquisa sobre como o estudo das Funções foi incorporado ao Ensino da Matemática Secundária no Brasil, vamos fazer um breve histórico sobre o ensino desta disciplina em nosso país desde os tempos de colônia e ver como este ensino foi sendo gradualmente, e lentamente, desenvolvido ao longo da história de nosso país.

4.1 – A Matemática no Brasil Colônia (1500 - 1822)

4.1.1 – As Escolas Jesuíticas

Em 1549 chegava ao Brasil, com o primeiro governador-geral Tomé de Sousa, a primeira missão de jesuítas, dirigida pelo padre Manuel da Nóbrega, que fundou e organizou a catequese dos índios, sendo ajudado mais tarde por outros missionários da Companhia de Jesus que aqui chegariam em 1553 junto com padre José de Anchieta.

Foi com as primeiras missões dos padres da Companhia de Jesus - os jesuítas - que o Brasil teve seus primeiros mestres. Foram praticamente os únicos durante pouco mais de dois séculos (1549 -1759), tendo fundado nossas primeiras escolas de 'ler e escrever'. Mesmo depois da expulsão dos jesuítas de nosso país, o seu ensino continuou pela obra de seus ex-alunos. De acordo com Azevedo (1971), os jesuítas fundaram não só nossas primeiras escolas, mas também nossas primeiras bibliotecas:

> A igreja e a escola aparecem, na vida colonial, tão irmanadas que não há aldeia de índios, nem vila ou cidade, no raio de ação missionária, em que, ao lado do templo católico, - igreja, ermida ou capela - , não se encontre ao menos a escola de ler e escrever para meninos. A princípio, o ensino elementar e, depois, o de humanidades, [...] o ensino superior, [...].
>
> É nesses colégios e nas casas de jesuítas que se instalaram as primeiras bibliotecas do país e, por um largo período, os únicos focos de irradiação de cultura , no litoral e no planalto. (AZEVEDO, p. 251-252, 1971)

Durante esse longo período, nossas escolas elementares seguiram a tradição clássico-humanista, expressa em 1599 pelo *Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Jesu*, o código máximo da Companhia de Jesus, que estabelecia regras para os cursos, programas, métodos e disciplinas de suas escolas. O conhecimento era completamente sistematizado, estando no topo da pirâmide a Teologia, ensinada de acordo com a doutrina de Aristóteles e São Tomás de Aquino, como nos informa Schwartzman (2001):

> O objetivo maior era **preservar o conhecimento tradicional e impedir qualquer possível inovação epistemológica**. Os jesuítas não se opunham a novas informações ou técnicas, mas não toleravam o ponto de vista filosófico mais amplo e as instituições intelectuais inovadoras que haviam surgido em algumas partes da Europa. As questões que os professores deviam levantar, e os textos que os estudantes deviam ler estavam sujeitos a um controle estrito. A obediência às autoridades religiosas devia ser respeitada em todas as questões relacionadas com a disciplina e o estudo; nas explicações, nenhuma referência era feita a autores ou livros não autorizados; nenhum novo método de ensino ou de discussão devia ser introduzido, e a ninguém se permitia levantar novas questões, [...].
>
> A escolha dos livros que podiam ser lidos pelos estudantes estava limitada à *Summa Theologica* de São Tomás, às obras filosóficas de Aristóteles, comentários selecionados e **livros orientados para cultivar as humanidades**. A doutrina aristotélica era defendida com ciúme contra qualquer interpretação não aprovada pela hierarquia da Igreja, [...]. (SCHWARTZMAN, p13, 2001, grifo nosso)

Nessas escolas, excessivamente literárias e dogmáticas, muito pouco, ou mesmo nada, havia das matemáticas. Na parte equivalente ao nosso ensino médio, o ensino estava calcado apenas nas humanidades clássicas. Seria apenas nos estudos superiores que as matemáticas apareciam, ainda que 'timidamente' nas escolas jesuíticas:

> Nessa proposta de ensino, **na parte equivalente ao ensino médio – os *'studia inferiora'*** – seria proposto **um ensino baseado apenas nas humanidades clássicas**, que teria como disciplinas: a retórica, as humanidades e a gramática. As ciências e, em particular **as matemáticas,** estariam reservadas **apenas aos *'studia superiora'***. Entretanto, mesmo nesses estudos superiores, que seriam desenvolvidos no curso de filosofia e ciências, ou de artes, **as matemáticas seriam pouco estudadas**.
>
> Nos programas iniciais dos cursos de filosofia das escolas jesuíticas da Europa, os estudos das matemáticas seriam desenvolvidos em uma aula diária, em cada um dos três anos de sua duração. No 'Ratio' de 1586, entretanto, o tempo destinado a elas seria reduzido para dois anos e, no 'Ratio' de 1599 – que seria revisto apenas após a restauração da ordem em 1814 – era sugerido que esses estudos começassem apenas em meados do 2º ano de curso. (MIORIM, 1995, p. 163, grifo nosso)

Apesar dessa redução gradativa do já pequeno tempo destinado aos estudos matemáticos, as propostas educacionais da Companhia de Jesus nunca deixariam de evidenciar a importância desse estudo, como podemos observar através do seguinte fragmento do *Ratio* de 1586:

> Ensinam aos poetas o nascimento e o ocaso dos astros;
> aos historiadores a situação e as distâncias dos diversos lugares;
> aos filósofos exemplos de sólidas demonstrações;
> aos políticos métodos verdadeiramente admiráveis para dirigir os assuntos internos e os relativos à guerra;
> aos físicos os modos e a diversidade dos movimentos celestes, da luz ...
> aos jurisconsultos e aos canonistas o cômputo;
> sem falar dos serviços prestados pelo trabalho dos matemáticos ao Estado, à medicina, à navegação e à agricultura.
> É necessário, pois, **esforçar-se para que as matemáticas floresçam em nossos colégios do mesmo modo que as demais disciplinas.** (Ratio, 1586, apud apud MIORIM, 1995, p. 164, grifo nosso)

Entretanto, essas orientações nem sempre eram seguidas, uma vez que as matemáticas não eram vistas com 'bons olhos' por muitos jesuítas. Como nos informa Miorim (1995), os estudos das "relações misteriosas entre números e entre estes e as letras - a gematria[27] - inquietavam os religiosos, que encaravam como 'ciência vã' a busca de relações abstratas que aparentemente não ocupam nenhum lugar na escala dos seres". Assim, as matemáticas eram vistas por muitos padres da Companhia como uma ciência especulativa e inútil, uma vez que era relacionada à procura de 'relações abstratas', 'misteriosas', consideradas vãs e inúteis por si mesmas. O estudo das matemáticas roubaria tempo importante dos estudos das letras, estas sim consideradas relevantes para a formação do homem. Essa hostilidade dos jesuítas em relação às matemáticas pode ser confirmada com as seguintes palavras do 'douto Jean Bouhier (1673 -1746), presidente do Parlamento de Dijon, filólogo, historiador e poeta acadêmico':

---

[27] Gematria ou aritmografia – pseudociência mística muito popular entre os hebreus e outros povos antigos e que reviveu na Idade Média. Utilizava antigos sistemas de numeração alfabéticos para substituir letras por valores numéricos num nome - Cf. Haward Eves, p. 324.

> O estudo das ciências especulativas, como a geometria, a astronomia, a física, é um entretimento sobremaneira vão; todos estes conhecimentos, estéreis e infrutíferos, são inúteis por si mesmos. **Os homens não nasceram para medir linhas, examinar as relações entre os ângulos e perder o seu tempo em considerações sobre os distintos movimentos da matéria**. (DOINVILLE, 1954, apud apud MIORIM, 1995, p. 165, grifo nosso)

Não simpatizantes com as matemáticas, os jesuítas fundaram nossas primeiras escolas de "ler e escrever", tendo sido praticamente os únicos durante pouco mais de dois séculos (1549 -1759). As escolas da Bahia e de São Vicente foram as primeiras do país. Nelas não havia aulas de Matemática, ou seja, não se ensinavam nem as quatro operações, como nos mostra Clóvis Pereira da Silva:

> Desse modo, o Padre Manuel da Nóbrega, logo após sua chegada ao Brasil na armada de Tomé de Souza, em 29 de março de 1549, tomou as primeiras providências para a criação de uma escola, a qual foi instituída a seguir com órfãos trazidos da metrópole. Assim, **as primeiras noções do alfabeto – ler e escrever – foram dadas na Bahia, em 15 de abril de 1549**, pelo jesuíta Vicente Rijo Rodrigues (1528 -1600), o qual se tornou o primeiro mestre-escola do Brasil.
>
> Em 1550 chegou a São Vicente, São Paulo, o jesuíta Leonardo Nunes, trazendo de Portugal doze órfãos e ali construiu um pavilhão de taipa no qual funcionou também uma escola – o pavilhão servia ainda de alojamento para todos. Naquela escola, **Leonardo Nunes ensinava a ler e escrever e os estudos iniciais de latim**.
>
> As escolas da Bahia e de São Vicente foram, portanto, as primeiras do país. **Nelas não havia aulas de Matemática**, isto é, as quatro operações algébricas: adição, multiplicação, divisão e subtração.
>
> O primeiro curso de Artes – ou ciências naturais – que foi ministrado no Brasil, foi iniciado em 1572, no Colégio da Bahia, mantido pelos inacianos. Ali se estudava durante três anos: Matemática, Lógica, Física, Metafísica e Ética. **Esse curso era considerado de nível superior**, e conduzia o aluno aos graus de bacharel ou licenciado. (PEREIRA da SILVA, 1992, p. 32, grifo nosso)

Em 1573, os jesuítas inauguraram o Colégio do Rio de Janeiro, onde se iniciou um curso elementar de ler, escrever e algarismos – **as quatro operações**. Mais tarde, foram introduzidos os cursos de Artes e de Humanidades. O estudo sistemático das ciências fazia parte do curso de Artes ou de cursos especiais, como o de Matemática, que existiu no Colégio da Bahia. Como nos informa P. Silva (1992), "dos dezessete

Colégios mantidos pelos jesuítas no Brasil Colônia, todos possuíam o curso elementar, que tinha uma duração média de um ano, e em apenas oito desses colégios funcionavam os cursos de Artes, também conhecidos como cursos de Filosofia".

Assim, o ensino da Matemática no Brasil começou, com os jesuítas, pela lição de algarismos - as quatro operações, ensino este que foi gradativamente elevado desde o curso elementar até o curso de Artes. De acordo com P. Silva (1992), "em 1605, nos Colégios da Bahia, do Rio de Janeiro e de Pernambuco, havia a aula de Aritmética, título genérico usado para designar um maior ou menor desenvolvimento do ensino da Matemática. Dentre os assuntos da aula de Aritmética, figuravam: razões e proporções, bem como o ensino de Geometria Euclidiana".

Não temos mais informações sobre o ensino de Matemática nos colégios que os jesuítas estabeleceram no Brasil. Essa escassez de informações talvez seja um indício de que os estudos matemáticos fossem pouco desenvolvidos nessas escolas, que enfatizavam os estudos do tipo clássico-humanístico, visando apenas à formação de clérigos e letrados. Uma prova contundente de que os jesuítas teriam sido fiéis a essa tradição clássico-humanística, segundo Azevedo (1971), é o fato de que nas várias gerações de estudantes que passaram pelos colégios da Companhia, nenhum deles se destacou na Colônia por qualquer interesse pelas ciências físicas e naturais ou com atividades científicas, técnicas e artísticas. Foram todos letrados, cronistas, historiadores, poetas ou oradores sacros.

Porém, em algumas escolas jesuíticas, devido ao empenho de alguns de seus mestres, os estudos matemáticos seriam mais incentivados. Entretanto, seria "apenas em meados do século XVIII, quando a 'revolução cartesiana' começaria a dar seus frutos nas escolas jesuíticas, que as matemáticas passariam a ser consideradas como um dos 'melhores elementos culturais'." (MIORIM, 1985, p. 165)

No entanto, o Marquês de Pombal viria abalar esta estrutura escolar jesuítica, expulsando-os, em 1759, de nosso país. Com a expulsão dos jesuítas do Brasil, o sistema educacional brasileiro praticamente desmoronou, restando apenas alguns poucos centros educacionais dirigidos por alguns padres-professores formados pelas escolas jesuíticas e por outras ordens religiosas:

> **Em 1759, com a expulsão dos jesuítas, o que sofreu o Brasil não foi uma reforma de ensino, mas a destruição pura e simples de todo o sistema colonial do ensino jesuítico**. Não foi um sistema ou tipo pedagógico que se transformou ou se substituiu por outro, mas uma organização escolar que se extinguiu sem que essa destruição fosse acompanhada de medidas imediatas, bastante eficazes para lhe atenuar os efeitos ou reduzir a sua extensão. Quando o decreto do Marquês de Pombal dispersou os padres da Companhia, expulsando-os da Colônia e confiscando-lhes os bens, **fecharam-se de um momento para outro todos os seus colégios**, de que não ficaram senão os edifícios, e se desconjuntou, desmoronando-se completamente, o aparelhamento de educação, montado e dirigido pelos jesuítas no território brasileiro. [...] **A não serem, portanto, os estudos elementares de arte militar, dois ou três seminários, algumas aulas de clérigos seculares e outras, de filosofia, em conventos de carmelitas e franciscanos, o ensino no Brasil até 1759 se concentrava quase todo nas mãos dos padres da Companhia cujo sistema de organização escolar era o único existente no país**. (AZEVEDO, 1971, p. 547 – 548, grifo nosso)

A reforma Pombalina do ensino tinha como objetivo principal "a remodelação dos métodos educacionais existentes, via introdução da filosofia moderna e das ciências naturais" (P. Silva, 1992, p. 39). Entretanto, ao invés de remodelar, desenvolver, enriquecer e alargar o sistema colonial de ensino aqui implantado pelos jesuítas, "o Marquês de Pombal o eliminou e, uma vez completada a sua destruição, esperou treze anos para começar a reconstruir, no período de um governo, o que os jesuítas conseguiram em dois séculos" (Azevedo, 1971, p. 548). Assim, em 1772 são criadas as aulas-régias, aulas isoladas de matérias fragmentadas e dispersas, que estavam longe da estrutura sistemática de ensino então destruída:

> A partir de 1772, entretanto, seriam criadas pela reforma pombalina as chamadas 'aulas régias' – aulas de disciplinas isoladas – que tinham como objetivo o preenchimento da lacuna deixada pela eliminação da estrutura escolar jesuítica.
>
> Essa medida representaria um retrocesso em termos institucionais, uma vez que essas aulas eram 'avulsas', o que significa que eram dadas em locais diferentes, sem nenhuma articulação entre elas e sem que houvesse um planejamento do trabalho escolar. Além disso, os professores recrutados para essas aulas não possuíam uma formação adequada, [...]. (MIORIM, 1995, p.166-7)

É assim que, através da reforma pombalina, as aulas avulsas são instaladas no Brasil com a denominação de 'aulas régias'. Massunaga (1989) assinala que o termo 'aula' aqui significa 'escola' que tinham por fim ministrar disciplinas isoladas (mas destituídas de qualquer plano sistemático de estudos) e reuniam alunos em diversos estágios de aprendizagem sob um só professor, o qual, na grande maioria dos casos, não apresentava competência nem na matéria que lecionava, nem em técnicas didático-pedagógicas. As aulas avulsas são extintas em 1857.

Entretanto, foi por meio dessas aulas régias que começaram a ser modificados os conteúdos escolares, principalmente com introdução de novas disciplinas, tais como a aritmética, a álgebra e a geometria. É somente no final do século XVIII que "ao lado das matérias de ensino literário e religioso – o latim, a retórica, o grego, o hebraico, a filosofia, a teologia – **a paisagem escolar do Brasil inclui as matemáticas**. A estas, depois de 1800, agregar-se-ão outras disciplinas, como o desenho, o francês, o inglês" (B. Silva, 1969, apud Miorim, 1995, p 167, grifo nosso).

A criação do Seminário de Olinda, em 1798, pelo bispo Azeredo Coutinho, representava, de acordo com Azevedo (1971), "o primeiro e tardio reflexo, na Colônia, da grande renovação educacional que se processou no Reino por iniciativa do primeiro ministro de D. José". Foi onde mais fortemente se manifestaram os princípios que orientaram as reformas pombalinas, que eram em grande parte inspiradas nas idéias dos enciclopedistas. Tendo entrado em funcionamento em 1800, esse Seminário viria dar um alento à educação secundária brasileira, uma vez que empregava métodos mais suaves, dava maior atenção às matemáticas e às ciências físicas e naturais:

> Somente em princípios de 1800 Azeredo Coutinho [...] rompe com a velha tradição colonial de ensino jesuítico, ao fundar o seminário de Olinda em novos moldes e com vistas mais largas: ministrando o ensino do desenho, **das ciências físicas e matemáticas**, da química, da botânica e da mineralogia, ao lado das disciplinas dos antigos colégios de jesuítas, esse seminário, com efeito, 'transformou as condições do ensino e, com este, as condições intelectuais da capitania' de Pernambuco.
>
> [...] o Seminário de Olinda, logo considerado 'o melhor colégio de instrução secundária no Brasil', [...] representa, na sua orientação como nos seus métodos, uma 'ruptura com a tradição jesuítica do ensino colonial'. As novas tendências pedagógicas exprimem-se não só no ambiente liberal que nele se criou, com métodos mais suaves e mais humanos, no respeito maior à personalidade do menino, nas transformações profundas das relações dos adultos com as crianças,

> dos mestres com os discípulos, **mas ainda pela importância dada, no plano de estudos, ao ensino das matemáticas e das ciências físicas e naturais**. (AZEVEDO, 1971, p. 281- 566, grifo nosso)

Embora Azeredo Coutinho tenha permanecido por pouco tempo na direção do Seminário, suas idéias sobre e seus métodos de ensino permaneceriam, servindo de inspiração àqueles que se dedicassem à questão do ensino em nosso país. Foi o primeiro núcleo estabelecido na Colônia, de ensino renovado em que já entravam as ciências. De espírito avançado, o Seminário de Olinda se tornou o foco de irradiação das idéias liberais, como nos informam Azevedo (1994) e Morim (1995):

> Mas nem sobre esse colégio – o melhor que, do ponto de vista das tendências novas, se fundou no Brasil, e que representava, na sua orientação como nos seus métodos, uma ruptura com a tradição jesuítica do ensino colonial – se modelou qualquer outro no crepúsculo desse longo período e até 1837, em que, sob a Regência, se criou o Colégio Pedro II, nem frutificaram os esforços, isolados e individuais, de brasileiros, [...]. (AZEVEDO, 1994, p.31)

> [...] seria um foco de irradiação das novas idéias e pode ser entendido como um indicador do caminho que as discussões sobre o ensino secundário tomariam durante o século XIX e início do século XX, em que estariam presentes, de um lado, os defensores do ensino clássico-humanístico e, de outro, os defensores de uma nova tendência educacional, mais preocupada com o desenvolvimento dos estudos científicos. (MIORIM, 1995, p.170)

A atividade educacional no Brasil durante todo o período colonial era bastante pequena. Entretanto, compondo este cenário educacional juntamente com as escolas religiosas, não podemos deixar de destacar o ensino militar.

4.1.2 – O Ensino Militar

No processo de ocupação do território brasileiro e de defesa de suas riquezas se fez necessário as primeiras escolas para o ensino da engenharia necessária para promover as primeiras grandes obras em nosso país. Assim, por Cartas Régias de 1699, foram instituídas as primeiras *Aulas de Fortificação* no Brasil, ficando as do Rio de Janeiro a cargo do Capitão Engenheiro Gregório Gomes Henriques, que aqui já lecionava desde o ano anterior.

Em 19 de agosto de 1738, foi criada no Rio de Janeiro, a *Aula do Regimento de Artilharia*, que deveria ser freqüentada pelo menos por cinco anos, sendo o Sargento-mor José Fernandes Pinto Alpoim (1698-1770) seu responsável. Alpoim publicou dois compêndios sobre a arte militar - o *Exame de artilheiros* e o *Exame de bombeiros* - ambos redigidos pelo método de perguntas e respostas e apresentando apenas uma matemática elementar, segundo nos informa Castro (1999):

> Os capítulos da arte militar propriamente dita são, em ambos, **precedidos da matemática necessária à sua compreensão**. Dos três capítulos e quatro apêndices de que se compõe o Exame de artilheiros, **os dois primeiros capítulos tratam de aritmética e geometria**. Dos dez capítulos que contém o Exame de bombeiros, **os quatro primeiros referem-se, respectivamente, a geometria, trigonometria, iongemetria e altimetria**.
>
> Nesses livros, **a matemática entra, apenas, nos seus aspectos mais elementares**, mas, de qualquer forma, não temos conhecimento de trabalhos matemáticos mais antigos, escritos por autor nascido na Colônia. (CASTRO, 1999, p. 18 –19, grifo nosso)

Em 1774, a 'Aula do Regimento de Artilharia' foi acrescida da cadeira 'Arquitetura Militar' e passou a ser denominada 'Aula Militar do Regimento de Artilharia', considerada "marco inicial da formação de Engenheiros Militares no Brasil"[28]. Em dezembro de 1792, esta Aula Militar deu origem à 'Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho'[29], instalada na Casa do Trem de Artilharia, onde hoje se ergue o Museu Histórico Nacional, na cidade do Rio de Janeiro. Segundo nos informa Pardal (1984), 'Aula' e 'Academia' eram sinônimas de 'Instituição de Ensino'.

---

28 PIRASSUNUNGA, Adailton. *O ensino militar no Brasil*, p. 27, apud Pardal, 1984, p. 193.

29 A instituição acima 'foi substituída pela Academia real Militar', criada por D. João VI por Carta de 4 de dezembro de 1810, cujas aulas tiveram início em 23 de abril de 1811.

4.1.3 – A Vinda da Família Real Portuguesa

Um acontecimento muito importante viria mudar a realidade da colônia: a vinda da família real para o Brasil. No dia 22 de janeiro de 1808, a família real portuguesa, tendo fugido da invasão napoleônica a Portugal, chega ao Brasil. Assim, Dom João VI, com sua comitiva real, instala-se no Brasil. Devido a essa transferência, a colônia brasileira é promovida a "Reino Unido" com Portugal, e o Rio de Janeiro toma-se a capital efetiva do Império português. Muita coisa, então, mudaria na colônia. D. João VI trouxe muitas inovações, e nos dez anos seguintes o Brasil teria seus primeiros cursos superiores, assim como cursos de formação para várias profissões.

Com a chegada da família real, começa realmente a se formar 'um ambiente mais favorável a estudos matemáticos' com a transferência para a cidade e Corte do Rio de Janeiro da 'Companhia dos Guardas-Marinha' com seu diretor e boa parte dos professores da 'Academia Real da Marinha'. São criadas algumas escolas de nível superior, bem como a Imprensa Régia, O Museu Real, a Biblioteca Real, o Observatório Astronômico, o primeiro Banco do Brasil (que veio a falir), o Real Arquivo Militar e outras importantes instituições para nosso país, como nos informa Azevedo (1971):

> A vinda de D. João VI, com toda a sua corte, numa época de decadência da vida colonial, [...] foi certamente, pelas suas fecundas conseqüências, um acontecimento político do maior alcance para o Brasil, sob todos os aspectos. Não foi apenas a mudança, já de si tão importante, de uma corte inteira, com cerca de 15 mil pessoas [...], e com todas as riquezas que o rei e a sua comitiva puderam, na fuga, embarcar para o Rio de Janeiro, onde se instalou a nova sede do governo. [...] **D. João VI, o criador de instituições, funda, entre outras, museus, escolas e bibliotecas, inaugura a Imprensa Régia e estimula, por todas as formas, a produção econômica e intelectual transfigurando a velha aldeia colonial na capital do novo Império Português e em nosso centro de cultura, com a sua biblioteca que em 1823 já se considerava uma das melhores do mundo, e com a sua imprensa** [...]. (AZEVEDO, 1971, p. 329, grifo nosso)

Logo ao chegar em nosso país, D. João VI expede Carta Régia abrindo os portos do Brasil às nações amigas, - 'primeiro ato de clarividência de D. João VI, em

1808' segundo Azevedo (1971), - um ato que não só põe fim ao monopólio comercial de Portugal, mas também abre as portas do Brasil ao conhecimento:

> É, porém **com a instalação da corte portuguesa no Brasil que se inicia propriamente a história de nossa cultura** [...]. A primeira medida, de alcance não só comercial e político, mas cultural, tomada por D. João VI, foi sem dúvida, a abertura dos portos da Colônia às nações estrangeiras [...], franqueando os portos do Brasil à navegação e ao comércio exterior e, em conseqüência, facilitando as nossas relações intelectuais com os países europeus [...]. (AZEVEDO, 1971, p. 380, grifo nosso)

> Esse ato do Príncipe Regente abrindo os portos de nosso país às nações amigas, em 28 de janeiro de 1808, além do seu significado comercial, concedendo ao Brasil a liberdade de comércio e terminando, dessa forma, com o regime do monopólio de mercadorias por parte da metrópole, sem dúvida o regime que mais fortemente caracterizava o estatuto colonial de nosso país, também significou algo muito importante, a saber, a permissão aos brasileiros que não podiam, por motivos financeiros, estudar na Europa nem nos Estados Unidos da América do Norte, de tomar conhecimento da existência lá fora, de algo dito civilização e cultura. Uma vez que, **logo a seguir, foram criadas escolas de nível superior em nosso país**, [...]. (PEREIRA da SILVA, 1992, p. 53, grifo nosso)

Após a chegada da família real portuguesa no Brasil em 1808, a 'Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho' foi substituída pela Academia Real Militar[30],

---

[30] Após a Independência, a Academia Real Militar passou a *Academia Imperial Militar*. Em 1832, essa instituição se fundiu com a academia dos Guardas-Marinha, instalada no Brasil em 1808, formando a

Academia Militar e de Marinha da Corte do Império do Brasil, com os cursos de matemática, militar, construção naval e pontes e calçadas.

As duas Academias se separaram em 1834 e o estatuto, de 22/10/1833, para a *Academia Militar do Império do Brasil*, ou *Academia Militar da Corte* estabeleceu 'um Curso Militar para os Oficiais das três armas principais do Exército', em três anos, e 'um curso completo para os Oficiais engenheiros de todas as classes', com três anos iniciais, um 4º. Ano – com trigonometria esférica, Ótica, Astronomia, Geodésia, um 5º. Ano – com Arquitetura Militar e Civil, Fortificações, Minas, Ataque e Defesa das Praças e, um 6º. ano – com Hidráulica e Construção Prática.

Em janeiro de 1839, a Academia Militar sofreu nova reforma, passando à denominação de Escola Militar, com cursos de Infantaria, cavalaria, Artilharia e Engenharia, este em cinco anos, ampliado para sete pelo regulamento de 1842, que o estendeu, definitivamente aos alunos civis, o que já ocorria, mas sob certas condições. ...

A partir de meados do século XIX, cresce a consciência de ser impossível realizar na mesma escola a formação de militares e de engenheiros civis, cuja demanda aumentava com o desenvolvimento econômico do País, exigindo a construção de estradas de ferro, de portos, de obras públicas, etc. Por outro lado, a formação militar reclamava exercícios práticos, um regime militar com disciplina de quartel e internato para os alunos.

criada por D. João VI por Carta de Régia de 4 de dezembro de 1810, instituição a partir da qual se desenvolveu o ensino sistemático da Matemática Superior[31] no Brasil e cujas aulas tiveram início em 23 de abril de 1811:

> Faço saber a todos que esta carta virem, que tenho consideração ao muito ao meu real serviço, ao bem público dos meus vassalos e a defesa e segurança dos meus vastos domínios, que se estabeleça no Brasil e na minha real corte da cidade do Rio de Janeiro, um Curso regular de ciências exatas e de observação, [...]; hei por bem que na minha atual corte e cidade do Rio de Janeiro, se estabeleça uma **Academia Real Militar** para **um curso completo de ciências matemáticas**, de ciências de observação, quais a física, mineralogia, metalurgia e história natural, compreenderá o reino vegetal e animal e das ciências militares em toda sua extensão, tanto de tática como de fortificação e artilharia, [...]. (BRITO, 1958, apud PEREIRA da SILVA, 1992, p. 55, grifo nosso)

Segundo Azevedo (1971), "foi francamente reconstrutora e quase revolucionária a ação de D. João VI, quando estabeleceu na sua corte e cidade do Rio de Janeiro, uma Academia Real Militar 'para um curso completo de ciências matemáticas e de ciências de observação e das ciências militares em toda a sua extensão". Esta, dentre

---

Assim, pelo decreto 2116 de 01/03/1858, a Escola Militar passou à denominação de *Escola Central* 'destinada ao ensino da Matemática e das Ciências Físicas e matemáticas e também das doutrinas próprias da Engenharia Civil'. O curso matemático e de ciências naturais era também seguido pelos militares, que em seguida passavam à recém-criada escola Militar de Aplicação do exército, na Praia Vermelha. Os engenheiros civis tinham mais dois anos de estudos específicos. ...

Embora a Escola Central continuasse sob a jurisdição do Ministério da guerra e com regime militar rigoroso, sua criação representou o passo fundamental para a emancipação do ensino da engenharia civil no Brasil. [...]

O interesse em concentrar os estudos militares numa só Escola, a inutilidade de forçar os futuros engenheiros civis à disciplina militar e a necessidade de ampliar os cursos de engenharia civil levaram, em 1874, à transferência, para o Ministério do império, da Escola Central, sob a denominação de *Escola Politécnica.* [...] Em 23/01/1896, o decreto 2221 nomeou-a *Escola Politécnica do Rio de Janeiro.* [...]

O decreto 24738, de 14/07/1934, criou a Universidade Técnica Federal, [...], formada pela Escola Politécnica, pela escola Nacional de Química, ..., e por mais oito institutos: de Física, Química, Mecânica, Ensaios de Materiais, Eletrotécnica, Metalurgia, Hidro e Aerodinâmica, Organização do Trabalho. [...]

[...] pela lei 452, de 05/07/1937, que criou a Universidade do Brasil, extinguindo pois a incipiente Universidade Técnica Federal.

Em 1965, a Universidade do Brasil passou à denominação de Universidade Federal do Rio de Janeiro, [...]. (PARDAL, 1984, pp. 193-6).

[31] Embora o nosso interesse central neste trabalho não seja a Matemática Superior, é importante observar a 'paisagem educacional brasileira' naquele momento, para que possamos melhor entender a história do nosso ensino secundário de Matemática.

outras medidas que foram tomadas por D. João VI, representa um grande avanço cultural para o nosso país:

> Certamente, abrindo os portos à navegação e ao comércio exterior; derrogando o alvará de 5 de janeiro de 1785, que ordenara o fechamento de todas as fábricas; fundando a Imprensa Régia em que se imprimiram as primeiras obras editadas no país; **inaugurando a primeira biblioteca pública que é hoje a Biblioteca Nacional**, e criando os cursos médico-cirúrgicos na Bahia e no Rio, **a Academia de Marinha e a Academia Real Militar**, o Real Horto, denominado mais tarde Real Jardim Botânico, e o Museu Real, o grande 'criador de instituições', por essas e por outras medidas, inaugurou o ciclo das viagens e das expedições científicas, abriu o campo à troca de mercadorias, à imigração de pessoas, idéias e costumes e à transformação, embora lenta, dos velhos hábitos coloniais. [...] inaugurou-se para o país uma fase tão importante que, a não ser em uma ou outra esfera da cultura , como a científica, o século XIX não foi senão a germinação e o desenvolvimento das sementes lançadas por D. João VI, na sua fecunda administração. (AZEVEDO, 1994, p. 31-32, grifo nosso)

Entretanto, essa 'fecunda administração' não daria um importante passo para desenvolver um ambiente favorável aos estudos matemáticos em nosso país - a entrada franca de livros no Brasil – que só aconteceria em 1821, na regência de D. Pedro I. E, apesar das iniciativas de D. João VI criando instituições de ensino, como a Escola de Cirurgia da Bahia, a Academia Médico-Cirúrgica e a Academia Real Militar, as novas instituições, isoladas e dispersas não conseguiram produzir grande motivação aos estudos científicos e matemáticos, uma vez que todas essas reformas empreendidas por D. João VI no Brasil, não foram, de fato, suficientes para operarem transformações profundas na mentalidade colonial do país:

> A instrução que se ministra nos colégios mantém, pelo geral, **um caráter estritamente literário**, e a rede escassa, cujas malhas, na urdidura do sistema escolar em formação, são constituídas pelas instituições de ensino médio (colégios ou aulas), quase todas dirigidas ainda por padres, [...]. **Toda a educação**, [...], **nos colégios, em seminários e à sombra dos conventos, é ainda uma força centrípeta que atrai o homem para um foco absorvente, - a literatura, a eloqüência a erudição**. (AZEVEDO, 1971, p. 381-382, grifo nosso)

Na Academia Real Militar se criou um Curso de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, com duração de quatro anos. Os livros adotados eram de Euler, Bézout, Monge, Lacroix e outros destacados textos franceses. A Academia Militar era de nível superior, "embora os dois primeiros anos fossem dedicados ao ensino da matemática, pois os candidatos à admissão bastavam ter 15 anos e 'darem conta das quatro primeiras operações', de acordo com a Carta de Lei de 4 / 12 / 1810" (PARDAL, 1984, p.194). Nesses dois primeiros anos, eram ministradas as seguintes disciplinas: "1°. Ano – Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho; 2°. Ano - Álgebra, Geometria, Geometria Analítica (com aplicações à Álgebra e à Geometria), Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Descritiva e Desenho" (Pereira da Silva, 1992, p.55).

Nos parece que as disciplinas ministradas nesses dois primeiros anos eram as disciplinas não somente básicas como também preparatórias para o curso[32], uma vez que aos candidatos à admissão bastava terem 15 anos e 'darem conta das quatro primeiras operações'. O baixo grau de exigência para a admissão – apenas as quatro primeiras operações – reflete a deficiência do ensino secundário de então, devida dentre outros, a dois fatores principais:

(1) **A colonização de exploração**: Portugal não tinha interesse em promover qualquer desenvolvimento cultural no Brasil, uma vez que "o colonialismo português era predatório e espoliativo, sem a intenção de criar no Mundo Novo uma sociedade complexa, com instituições para produzir e transmitir o conhecimento" (GODINHO, 1961-70; LANG, 1979; MAXWELL, 1972; apud SCHWARTZMAN, cap. 3, p. 4, 2001). Por isso, D. João VI cuida, segundo Azevedo (1994), senão de atender "às necessidades mais urgentes do meio brasileiro".

(2) **O atraso intelectual de Portugal**: a própria ignorância impedia Portugal de desenvolver culturalmente a colônia, uma vez que a metrópole portuguesa estava afastada das tendências modernas:

---

[32] Seu curso completo tinha sete anos, sendo obrigatório somente para os oficiais de Engenharia e de Artilharia, mas não para os de Infantaria e de Cavalaria. Das duas cadeiras do 6°. Ano, a de "Fortificação, Arquitetura Civil, Estradas, Portos e Canais" era a única do curso que abordava a construção civil, correspondendo, aproximadamente, ao 6°. Ano da Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho. (PARDAL, 1984, p. 194)

> Portugal chega em meados do século XVIII com sua Universidade – a de Coimbra – tão medieval como sempre fora. A filosofia moderna (Descartes), a ciência físico-matemática, os novos métodos de estudo da língua latina eram desconhecidos em Portugal. O ensino jesuítico, solidamente instalado, continuava formando elementos da corte dentro dos moldes do Ratio Studiorum. (RIBEIRO, 2000, p.32)

Assim, no período colonial, o ensino em nosso país continuava sendo um reflexo das escolas jesuíticas, de ênfase literária; ou, se não, era um ensino técnico-profissionalizante que visava o 'aparelhamento' da colônia, como podemos perceber em Azevedo (1994):

> As escolas médico-cirúrgicas da Bahia e do Rio, como as Academias Militar e Naval, destinaram-se, de fato, a fornecer os médico-cirurgiões e os engenheiros de que o governo português, transladado para o Brasil, necessitava para reorganizar o Exército e a Marinha. Lançando as bases dessas e outras escolas técnico-profissionais, dom João VI não somente alargava o campo do ensino superior, mas **dando ao econômico e ao técnico a primazia sobre o literário, inaugurou a 'profissionalização' do ensino desse grau que conservou o caráter utilitário – se não exclusivo, preponderante – por pouco mais de 125 anos da vida nacional.** Nenhuma idéia ou tentativa de criação de universidade, que, mesmo depois da Independência, não passou de projetos [...]; nenhum esforço no sentido de instituir escolas destinadas a estudos e a pesquisas científicas nem de romper contra a poderosa homogeneidade do ensino jesuítico que [...] se conservava ainda quase intacta nos seminários e colégios de padres. (AZEVEDO, 1994, p. 32, grifo nosso)

4.2 – A Matemática no Brasil Império (1822-1889)

Em 1822, com a proclamação da Independência do Brasil e início do Império, novas orientações na política educacional começavam a surgir dos debates travados na Constituinte de 1823. Assim, "as idéias, como costuma acontecer nas crises das transformações políticas, tomam outro rumo e, pela primeira vez, as preocupações da educação popular, - como base do sistema de sufrágio universal, passam a dominar os espíritos da elite culta, constituída de sacerdotes, bacharéis e letrados. Mas desse movimento político em favor da educação popular". (AZEVEDO, 1971, p. 572)

Entretanto, passado pouco mais de um século após a independência, muito pouco teria mudado na política educacional brasileira. No relatório apresentado pelo Ministro do Império Antônio Pinto Chichorro da Gama, em 1834, sobre a situação em que se encontravam as aulas avulsas no Brasil, com relação ao ensino das matemáticas eram apresentados os seguintes dados:

> Na Província do Rio de Janeiro, das **duas vagas existentes - uma de Geometria e outra de Aritmética, Geometria e Álgebra – a primeira estava vaga, ou seja, não estava em funcionamento, e a segunda, embora estivesse 'provida', não possuía alunos matriculados**.
> Nas demais províncias a situação não era diferente: das treze vagas existentes – apenas para geometria – duas estavam em funcionamento, enquanto as demais encontravam-se vagas. (HAIDAR, 1972, apud MIORIM, 1995, p.168-169, grifo nosso)

Essas informações nos mostram uma triste realidade: ainda na primeira metade do século XIX, as aulas avulsas das disciplinas matemáticas em nosso país existiam em um número extremamente reduzido e que, além disso, eram muito pouco freqüentadas. Até o Ato Adicional de 1834, não havia no Brasil ensino secundário público sistematizado, ou seja, um ensino ministrado por estabelecimentos especialmente criados pela União para promovê-lo. Na realidade, o que havia em termos de estudos secundários promovidos pelos poderes públicos eram as chamadas aulas avulsas – Latim, Retórica, Filosofia, Geometria, Comércio e Francês – espalhadas pelos quatro cantos do Império, não ultrapassando o total de uma centena.

Com o Ato Adicional de 1834, entretanto, esta triste realidade começaria a mudar, embora de maneira um tanto quanto caótica. Surgem, então, as primeiras providências tentando imprimir alguma organização aos estudos públicos secundários, mesmo que através da reunião de cadeiras avulsas existentes nas capitais das províncias. São fundados o Ateneu do Rio Grande do Norte (1835) e os Liceus da Bahia e da Paraíba (1836), entretanto:

> Tais estabelecimentos, e outros que lhes seguem, não passam de conglomerados de aulas avulsas funcionando num mesmo prédio: as matérias não são distribuídas por diferentes anos; cada aluno estuda o que quer e como quer, concluindo seus estudos no tempo que lhe convém; limitam-se, quase sempre, a oferecer as disciplinas exigidas como preparatórias para ingresso nas Academias. De fato, a função específica do ensino secundário nessa época é a de preparação aos cursos profissionais superiores. Assim, ele se caracteriza mais por ser um tipo de ensino, **o que leva aos cursos superiores**, destinados **às camadas privilegiadas da sociedade**; contrapõe-se, desse modo, ao chamado **'ensino de primeiras letras'**, destinado às **camadas populares das aglomerações urbanas** (SILVA, 1959, apud MASSUNAGA, 1989, p. 14, grifo nosso).

Os colégios existentes nas províncias eram de responsabilidade da iniciativa particular, muitos pertencendo a ordens religiosas, outros pertencendo a professores civis. Em todos esses estabelecimentos, o ensino tinha como único objetivo a preparação para as escolas superiores.

Durante todo o período colonial e imperial, além das aulas avulsas, que vão sendo aos poucos suprimidas, existiam também os Seminários e colégios mantidos por ordens religiosas - inclusive por jesuítas, que retornariam ao Brasil em 1842, 83 anos depois de terem sido expulsos. Havia também, principalmente na Cidade do Rio de Janeiro, as escolas e professores particulares. Todos esses estabelecimentos de ensino secundário, inclusive os Liceus das Províncias - o Ateneu do Rio Grande do Norte, criado em 1835; e os Liceus da Bahia e da Paraíba, criados em 1836 – tinham como objetivo comum a preparação dos alunos para o ingresso nas academias militares e Escolas Superiores. Esse caráter propedêutico do ensino secundário tinha como conseqüência direta o oferecimento apenas das matérias exigidas pelos exames de seleção das escolas superiores. De acordo com Miorim (1995), a situação das escolas secundárias brasileiras, durante esse período, pode ser avaliada pelas seguintes palavras de Gonçalves Dias[33], apresentadas em seu relatório de 1852, dirigido ao governo imperial, onde é apresentada uma avaliação de alguns Liceus Provinciais:

---

[33] O poeta Antônio Gonçalves Dias foi encarregado, em 1849, pelo governo imperial de "visitar os estabelecimentos de instrução pública das províncias do Norte do Brasil" e apresentar um relatório sobre a situação encontrada. Esse relatório foi apresentado em 1852 e representou o "primeiro levantamento regional do ensino brasileiro". Tal relatório encontra-se reproduzido na íntegra no livro *História da instrução pública no Brasil, 1500 a 1889*, de José Pires de Almeida, escrito em francês no ano de 1889 e publicado em sua tradução para o português em 1989 pelo INEP - Cf. MIORIM (1995),

> O grande inconveniente da nossa instrução secundária é de não se ocupar de outra coisa senão de preparar moços para a carreira médica ou jurídica. Os nossos Liceus são escolas preparatórias das Academias, - e escolas más... A insuficiência destes estudos, a facilidade de tais exames nas Academias, o meio por que sabemos que se pode fazer, são outros tantos obstáculos para que prosperem os Liceus. **Se algum deles tem querido introduzir, no quadro do ensino secundário, noções das ciências naturais e exatas, - tais como as Matemáticas puras, a Química, a Física, a Botânica, a Agrimensura, vêem definhar esses estudos, por que não são necessários para nenhum grau literário**... (DIAS, 1852, apud apud MIORIM, 1995, p. 172, grifo desta)

Entretanto, a criação do Colégio Pedro II, a 2 de dezembro de 1837, representaria um primeiro passo na direção de mudanças no ensino secundário brasileiro. Embora as disciplinas clássico-humanísticas fossem predominantes em seus planos de estudos, estes nunca deixaram de contemplar as matemáticas:

> Pela primeira vez, seria apresentado um plano gradual e integral de estudos para o ensino secundário, onde os alunos seriam promovidos por série e não mais por disciplinas e obteriam, ao final do curso, um título de bacharel em letras, que lhes garantiria a matrícula em qualquer escola superior, sem a necessidade de prestar exames. Nesse plano de estudos, nos moldes dos colégios franceses, **predominariam as disciplinas clássico-humanistas**. Apesar desse predomínio, **as matemáticas**, as línguas modernas, as ciências naturais e físicas e a história**, seriam também contempladas, mostrando uma tentativa de conciliação entre o ensino clássico e as tendências modernas**, [...]. **As matemáticas – aritmética, geometria e álgebra – teriam, assim, seu lugar garantido e apareceriam em todas as oito séries do curso.**
>
> Em todas as várias reformas pelas quais passariam os planos de estudo do Colégio Pedro II, durante o período imperial; ora predominando o ensino clássico, ora o científico; as matemáticas – com inclusão da trigonometria – estariam sempre presentes, variando apenas a quantidade de horas destinadas ao seu ensino e, em alguns momentos, a profundidade de seus conteúdos. (MIORIM, 1995, p.173-4, grifo nosso)

O Colégio Pedro II foi a primeira instituição pública de ensino secundário com caráter sistemático no Brasil. O objetivo de sua criação foi o de servir de modelo ou padrão de ensino secundário na Capital, conforme se constata no discurso proferido por ocasião de sua inauguração, a 25 de março de 1838, pelo então Ministro e Secretário de Estado Bernardo Pereira de Vasconcelos:

> Não concluirei este discurso sem repetir a V. Ex. que o intento do regente Interino, criando este Colégio, é oferecer um exemplar ou norma aos que já se acham instituídos nesta Capital por alguns particulares; convencido como está de que a educação colegial é preferível à educação privada. (VASCONCELOS, 1838, apud MASSUNAGA, 1989, p. 1)

Massunaga (1989) observa que o objetivo de se criar um colégio modelo para o ensino secundário é atingido, tendo em vista "que o 'status' de colégio-padrão vigorou para o Pedro II até pelo menos os anos 60, abrangendo, portanto, mais de um século", tendo vivido sob o regime monárquico e sob o regime republicano; passado por várias reformas educacionais; funcionado sob diversas concepções de ensino secundário e dentro de diferentes orientações de política educacional. E, apesar dessa variedade de circunstâncias, manteve-se em relação ao Colégio o caráter de instituição-padrão de ensino secundário, embora estivesse longe de satisfazer às necessidades da complexa sociedade brasileira de então, uma vez que:

> [...] na sociedade brasileira do Império, organizada em termos do trinômio escravidão-latifúndio-monocultura, só freqüentam escola crianças e adolescentes das classes privilegiadas, não tendo os membros das classes desfavorecidas motivação alguma para a matrícula e freqüência escolar. Assim, **ao final do Império, menos de 3% da população brasileira freqüenta as escolas existentes, de todos os níveis e ramos**. (MOREIRA, 1960, apud MASSUNAGA, 1989, p. 14 -15)

Entretanto, especificamente em relação ao município da corte, é importante mencionar o que talvez tenha sido a mais importante tentativa do governo na época para moralizar e melhorar o ensino: a *Reforma do Ensino Primário e Secundário do Município da Corte*, autorizada pelo poder legislativo através de decreto baixado em 17 de setembro de 1851 e regulamentada por decreto assinado em 17 de fevereiro de 1854. Entre suas principais medidas, de acordo com Massunaga (1989), citamos:

(a) a criação da Inspetoria Geral de Instrução Primária e Secundária, um organismo técnico-administrativo destinado a fiscalizar e orientar o ensino público e particular da Capital, tendo como um de seus membros o reitor do Pedro II;
(b) os Exames Gerais de Preparatórios na Corte, para cuja realização baixam-se minuciosas instruções, visando evitar fraudes;
(c) estabelecimento de normas para o exercício da liberdade de ensino; e
(d) previsão de um sistema de preparação do professor primário.

No final do Império, mudanças significativas na estrutura econômica propiciaram várias transformações na ordem social, e o ensino secundário adquiriu uma nova importância perante a população. A extinção do tráfico de escravos favoreceu os investimentos em outras áreas econômicas além da agricultura, ensejando um relativo desenvolvimento industrial e técnico. Isto possibilitou uma aceleração da circulação social e um aumento da vida urbana. O ensino secundário ganhou uma nova importância, passando a representar um canal de ascensão social para os nascidos em camadas menos favorecidas. Porém, "no Império, somente têm acesso ao ensino secundário e superior os membros das camadas economicamente privilegiadas, para as quais a importância desses dois tipos de ensino está ligada á questão do 'status' por ele simbolizado" (Massunaga,1989, p. 17).

Embora no Período Imperial (1822-1889) fosse ensinado Aritmética, Geometria e Álgebra, no entanto, o ensino das Funções só apareceria nos programas do Colégio Pedro II nos primeiros anos da República.

4.3 – A Matemática no Brasil República (1889 - ...)

Um ano antes da República, o Diário Oficial de 10 de abril publicou o então esperado "Programa de exames de preparatórios" para o ano de 1888, exigidos para a matrícula nos cursos superiores, cujas provas eram escritas e orais. Segundo nos informa Valente (2004), para prestar exame de Aritmética, o candidato teria que ter sido já habilitado em Português e, somente se fosse habilitado nessas duas disciplinas, poderia prestar exames de Álgebra ou Geometria.

Os pontos para Álgebra eram, de acordo com Valente (2004):

(1) Emprego dos sinais algébricos e suas conseqüências principais;
(2) Estudo comparativo das operações fundamentais e bem assim das potências e raízes que se referem ao 2°. grau;
(3) Propriedades gerais dos números;
(4) Equações do 1°. e 2°. graus a uma incógnita;
(5) Da eliminação das equações do 1°. grau a muitas incógnitas;
(6) Análise indeterminada do 1°. grau entre duas variáveis;
(7) Discussão dos problemas e equações do 1°. e 2°. graus a uma incógnita. Problemas – exercícios sobre cálculo algébrico.

Com a implantação do regime republicano no Brasil, em 1889, todo o sistema educacional passaria por uma grande mudança. Em 19 de abril de 1890, através de decreto, o Governo da República cria a Secretaria de Estado dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos, nomeando como ministro desta pasta, Benjamin Constant, que reformou toda a instrução pública - a primária e secundária - até a superior em todo o país.

Com a reforma Benjamim Constant, oficializada através de decreto a 8 de novembro de 1890, todo o sistema educacional brasileiro passaria por uma profunda reforma e a tradição clássico-humanista daria lugar a uma formação científica, na qual a Matemática ocuparia o lugar central. Segundo nos informa Miorim:

> A Reforma, elaborada segundo a Filosofia de Augusto Comte, representaria uma ruptura com a tradição clássico-humanista existente até então no ensino secundário. Era uma tentativa de introduzir uma formação científica – nos moldes positivistas – em substituição à formação literária existente. Isso seria realizado, entretanto, não pela eliminação das disciplinas tradicionais – latim e grego – mas por meio do acréscimo das disciplinas científicas, o que ampliaria ainda mais o caráter enciclopédico do currículo de nossa escola secundária.

> Na parte relativa **ao ensino de matemática – considerada a ciência fundamental dentro do Positivismo – estariam contempladas todas as partes que compõem tanto a matemática abstrata como a matemática concreta**, dentro da hierarquia estabelecida por Comte. (MIORIM, 1995, p. 175, grifo nosso)

Assim, na última década do século XIX, a Matemática ganha destaque inédito, deixando de ser uma 'disciplina periférica' para ser a 'disciplina central' dentro do sistema educacional brasileiro. Como nos informa Miorim (1985) citando Bastos Silva (1969), o programa de Matemática da escola secundária ficaria assim distribuído:

> **1°. Ano** – aritmética (estudo completo) e álgebra elementar (estudo completo);
> **2°. Ano** – geometria preliminar, trigonometria retilínea, geometria especial (estudo perfunctório das seções cônicas, da concóide, da limaçon de Pascal e da espiral de Arquimedes);
> **3°. Ano** – geometria geral e seu complemento algébrico, cálculo diferencial e integral (limitado às teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita);
> **4°. Ano** – 1°. período: mecânica geral (limitada às teorias gerais de equilíbrio e movimento dos sólidos invariáveis, e precedida das noções rigorosamente indispensáveis ao estudo do cálculo das variações); 2°. período: astronomia (precedida da trigonometria esférica), geometria celeste e noções sucintas de mecânica celeste (gravitação universal).

De acordo com o que nos informa Beltrame, "o objetivo desta reforma, em relação ao ensino secundário, era conseguir superar o caráter exclusivamente preparatório do mesmo, restaurando-lhe o sentido formativo inexistente desde a expulsão dos jesuítas" (BELTRAME, 2000, p. 56). Das várias reformas que ocorreriam após a Reforma Benjamim Constant, até 1930, nenhuma produziria mudanças tão significativas no ensino secundário brasileiro.

O Colégio Pedro II, ou Ginásio Nacional, como ficou denominado pelo novo regime, teve, em seu programa de 1892, introduzido um novo conceito - **o de função.** Assim, pela primeira vez aparece o conteúdo "*Da função e da equação*"[34] nos

---

[34] "Da funcção e da equação" - "Programma de Ensino do Gymnasio Nacional no anno de 1892, organizado pelo Plano de Reforma de 8 de novembro, Art. 6°. do Regulamento de 22 de novembro de 1890" (Beltrame,2000, pp.180-1).

programas de ensino do Pedro II. Essa introdução não se deu por acaso, pois a Reforma Benjamin Constant previa, para o ano de 1895, o estudo de Cálculo Infinitesimal no 3°. ano e, sendo o estudo de funções fundamental para o Cálculo, seria sensato começar seu estudo logo no 1°. ano.

O programa de ensino para o ano de 1893, assim como o de 1892[35], contemplaria o ensino de funções, que se apresenta como *"Da função e da equação"*[36], entretanto, este é transferido para o 2°. ano. Apesar de novos regulamentos serem estabelecidos para o Ginásio Nacional, a reforma Benjamin Constant de 1890, modificada em 1891, continuaria em vigor sendo realmente posta em prática em 1895, visto que é neste ano de 1895 que o Cálculo passaria a constar nos programas de ensino do 4° ano. Ainda em 1895, seria introduzida no 4° ano , juntamente com o Cálculo, a Geometria Analítica. No 2°. Ano, o conteúdo de funções aparece nos programas da seguinte forma: *"Das funções e das equações e sua respectiva classificação"*[37]. Até 1897, o estudo da Álgebra permanecerá, em linhas gerais, como o de 1895. Porém, o item que trata do ensino das funções apresenta-se agora como *"Das funções e das equações, classificação e transformação"*[38].

Em 1898, o ministro Amaro Cavalcanti introduz no ensino secundário dois cursos simultâneos: *Curso Propedêutico* ou *Realista*, de 6 anos, e o *Curso Clássico* ou *Humanista*, de 7 anos, "como alternativa ao enciclopedismo do plano de Benjamin Constant" (BELTRAME, 2000, p.79). Porém, este regulamento vigorou apenas durante o ano de 1898.

Em 1899, Amaro Cavalcanti equipara os colégios estaduais e particulares ao Ginásio Nacional. Entretanto, esta equiparação acabou não acontecendo, na prática, para todos os colégios, uma vez que "o exame de madureza só seria realizado nas

---

35 Em 1892, o Ministério da Instrução Pública, Correios e Telégrafos foi extinto, ficando os assuntos e interesses do ensino subordinados ao novo Ministério da Justiça e Negócios Interiores sob a presidência de Fernando Lobo Leite Pereira. Cf BELTRAME, 2000, p.63.

36 "Da funcção e da equação" – "Programma de Ensino do Gymnasio Nacional no anno de 1893, pelo Plano da Reforma de 28 de dezembro de 1892" (BELTRAME, 2000, pp 182-183).

37 "Das funcções e das equações e sua respectiva classificação" – "Programma de Ensino do Gymnasio Nacional para o anno de 1895 de accordo com o regulamento approvado pelo decreto n°. 1652 de 15 de janeiro de 1894" (BELTRAME, 2000, pp. 184-186).

38 "Das funcções e das equações, classificação e transformação" – "Programma do Ensino do Gymnasio Nacional de accordo com o regulamento approvado pelo decreto n°. 1652 de 15 de janeiro de 1894 para o anno de 1897" (BELTRAME, 2000, pp 187-190).

localidades onde existissem cursos superiores, pois o júri do exame seria constituído por professores destes cursos" (BELTRAME, 2000, p.83)

Em 1898, o item referente ao estudo das funções se apresentaria da mesma forma que em 1897. De acordo com regulamento baixado em 1899, a Congregação do Ginásio Nacional passou a organizar os programas de ensino trienalmente, os quais só seriam executados após sua aprovação pelo Governo.

Os programas de ensino para os anos de 1899, 1900 e 1901 difere dos anteriores, primeiramente, pela forma de apresentação: agora, o programa aparece dividido pelas áreas e não pelos anos e, além disso, traz orientações gerais para os professores. Foram excluídos os estudos de Geometria Analítica e Cálculo. O item referente ao estudo das funções se apresenta simplesmente como *"Da função e da equação"*[39].

Em 1901, o ensino secundário passaria por uma nova reforma de ensino, a reforma Epitácio Pessoa, a qual representa uma mudança radical ao uniformizar o ensino secundário estadual e particular em todo o país ao Ginásio Nacional, tanto em relação ao currículo quanto à organização didática do ensino secundário. O programa de ensino de 1901 para Álgebra permanece o mesmo de 1899, devendo vigorar até 1906, conforme consta no programa[40]. Segundo nos informa Beltrame (2000), como uma nova reforma de ensino aconteceria em 1911, e o respectivo programa de ensino seria implantado em 1912, podemos supor que o programa de 1899 realmente foi adotado até 1911, quando a Lei Rividávia[41] eliminará o estudo das funções do ensino brasileiro, a fim de torná-lo "mais prático". Neste mesmo ano de 1911, o Ginásio Nacional volta a se chamar Colégio Pedro II.

---

39 "Da funcção e da equação" – "Programma do Ensino do Gymnasio Nacional de accordo com o regulamento approvado pelo decreto nº. 3251 de 8 de abril de 1899. Para os annos de 1899, 1900 e 1901" (BELTRAME, 2000, pp. 198-9).

40 "Programma do Ensino do Gymnasio Nacional de accordo com o regulamento approvado pelo decreto nº. 3914 de 26 de janeiro de 1901. Para os annos de 1901, 1902 e 1903 e 1904, 1905 e 1906. (Resolução da Congregação em 21 de julho de 1904, approvada pelo Sr. Ministro em 3 de agosto de 1904.)" (BELTRAME, 2000, pp 198-9).

41 "Lei orgânica do Ensino Superior e Fundamental da República" – Decreto № 8.659 de 5 de abril de 1911.

Com o objetivo de estabelecer a livre competição entre os estabelecimentos de ensino oficiais e particulares, a Lei Rividávia estabeleceu o exame de vestibular. Essa lei seria desastrosa para o ensino da Matemática em nosso país, uma vez que "com a preocupação de infundir um critério prático aos estudos das disciplinas", estabeleceu "um programa bem dosado e despido de superfluidade". Em Matemática, isso significou a **exclusão do estudo das funções** dos programas de ensino do Colégio Pedro II. Analisando o programa de ensino de 1912, logo podemos notar que **não é mencionado o estudo de funções**. O mesmo ocorrendo no programa de 1915, que permaneceria até 1918.

No programa de ensino de 1919, embora não seja mencionado o ensino de funções, aparece em Álgebra o seguinte conteúdo: *"Representação gráfica da equação do 1º. grau da forma ax + by = c. Gráfico da temperatura e do movimento de um trem de estrada de ferro"*[42]. É a primeira vez que aparece num programa **o estudo da representação gráfica de uma equação.**

Nos anos que seguem, os programas não mencionam o estudo das funções, que só apareceria novamente no programa de 1929, ficando desta maneira, uma década sem ser mencionado nos programas de ensino.

4.3.1 - O Movimento de Renovação do Ensino de Matemática

O movimento de renovação do ensino da Matemática surge em 1900, na França, quando uma comissão da câmara dos Deputados promove um grande inquérito sobre o ensino secundário e defende a introdução de 'novos elementos' a fim de tornar o ensino mais significativo e de acordo com os novos avanços da Matemática:

---

42 "Representação graphica da equação do 1º. Gráo da forma ax + by = c. Graphico da temperatura e do movimento de um trem de estrada de ferro" – "Programmas de Ensino do Collegio Pedro II para o anno de 1919" (BELTRAME, 2000, pp 213-7).

> Essa comissão concluiu pela necessidade de uma renovação do ensino, no sentido de torná-lo **mais simples e mais intuitivo e de se passarem para o ensino secundário certos assuntos que, de há longo tempo, eram considerados como pertencendo à Matemática superior** e que, não somente são de fácil compreensão, mas, o que mais importa, são de grande significação para a moderna vida cultural, especialmente para as ciências físicas e naturais e para a técnica; tais são: **a noção de função, a representação gráfica e as noções de cálculo infinitesimal**. (ROXO, *O Ensino da Matemática na Escola Secundária – O Moderno Movimento da Reforma e seus Precursores,* Jornal do Comércio, 30 de novembro de 1930, p. 10 -11 – grifos do autor)

Entretanto, o grande impulso para essa idéia de renovação do ensino da Matemática viria da Alemanha, na figura de Félix Klein, que traçou as diretivas do movimento renovador do ensino não só de sua pátria, mas também de todo um movimento internacional renovador do ensino da Matemática, coordenando diversas iniciativas que atuavam isoladamente em diferentes países:

> A fim de que possamos apreciar melhor a significação do movimento de renovação do ensino da Matemática, de que nos vamos ocupar, indispensável se torna lançar um rápido golpe de vista sobre a evolução deste ensino nos principais países do mundo, (França, Inglaterra, Alemanha, Itália e América do Norte), a partir das últimas décadas do século passado [séc XIX]. [...]
>
> **O grande impulso, para o progresso dessa idéia de renovação e para a convergência de esforços dos vários países, partiu incontestavelmente da Alemanha, sob a influência predominante de FELIX KLEIN**, o grande mestre da Universidade de Gottingen, que, com as suas memoráveis conferências, não só despertou a atenção a atenção das associações pedagógicas de sua pátria, como traçou as diretivas do movimento renovador, coordenando esforços que atuavam esparsamente. (ROXO, *O Ensino da Matemática na Escola Secundária – O Moderno Movimento da Reforma e seus Precursores,* Jornal do Comércio, 30 de novembro de 1930, p. 10 -11 – grifo nosso)

Em seus discursos, Klein enfatizaria a necessidade de introduzir o estudo das funções no ensino pré-universitário:

> O que nós pedimos para a reforma é realmente bem modesto quando se compara com o estado atual da ciência. Desejamos somente que **o conceito geral de função**... penetre como um fermento em todo o ensino médio; mas nunca por definições abstratas, mas por meio de exemplos elementares... que cheguem ao aluno como algo vivo... (KLEIN, apud MIORIM, 1995, p. 107, grifo daquele)

As propostas de renovação seriam ampliadas após a criação da Comissão Internacional para o Ensino da Matemática, em 1908. Embora o Brasil tenha sido convidado a participar das atividades desta comissão como 'país convidado' – sem direito a voto –, a nossa primeira e única participação aconteceria somente em 1912, durante o 5º. Congresso Internacional de Matemática, realizado de 21 a 28 de outubro, em Cambridge, mas de maneira muito rápida e sem interferir na prática brasileira de ensino da Matemática.

4.3.1.1 - O Movimento Brasileiro de Renovação do Ensino da Matemática

Na década de 20, o Brasil começa a viver um clima de intensas buscas por soluções de problemas educacionais que a época apresentava. Foi uma época de grandes desafios e contrastes, como podemos perceber nos trechos a seguir:

> **O Colégio Pedro II, nos anos 20,** representa uma **instituição emblemática,** num Brasil **sem escolas** e com **milhões de analfabetos.** O **secundário** chama para si todo **o centro dos debates** sobre **educação** a que a década irá assistir, e que prosseguirá nos anos 30 e 40. [...] São fundadas associações [...], com destaque para a **Associação Brasileira de Educação**, criada em 1924; inquéritos, enquetes sobre a educação buscarão fórmulas para o melhor ensino; será desencadeada a discussão do que melhor constituiria a cultura geral escolar: ensino clássico-literário ou científico. (VALENTE, 2003, p. 63, grifo nosso)

> A **década de 1920 viveu o clima do 'entusiasmo pela educação'**, cujo significado era a crença de que, pela multiplicação das instituições escolares, da disseminação da educação escolar, era possível incorporar grandes camadas da população no rumo do progresso nacional; **e do 'otimismo pedagógico'**, ... (NAGLE, 1974, p. 99-100, apud VALENTE, 2004, p. 85, grifo nosso).

No ano de 1924, educadores brasileiros com idéias renovadoras sobre o ensino criam a ABE - Associação Brasileira de Educação -, uma sociedade de educadores, a primeira que se instituiu no Brasil, com caráter nacional. Foi, sem dúvida, um dos instrumentos mais eficazes de difusão do pensamento pedagógico europeu e norte-americano em nosso país e um dos mais importantes, senão o mais importante, centro de coordenação e de debates para o estudo e propostas de solução dos problemas educacionais brasileiros, ventilados de todas as formas através de inquéritos, comunicados à imprensa, cursos de férias e congressos que promoveu nas capitais dos estados.

Na ABE, que representava um movimento renovador, estariam concentradas as reivindicações quanto aos problemas da educação nacional, assim como a tomada das medidas necessárias para solucioná-los. A ABE representava, nas palavras de Romanelli (1999), "a tomada de consciência e o compromisso assumido por um grupo no engajamento por uma luta que iria perdurar por alguns decênios" (Apud Beltrame, 2000, p. 116). Nesse período, muitas discussões foram travadas em torno do ensino da Matemática no Brasil.

Na 3ª. Conferência Nacional de Educação, realizada em 1929 na cidade de São Paulo, Euclides Roxo, então diretor do Colégio Pedro II, expôs suas idéias sobre a orientação do ensino da Matemática e a mudança radical para os programas de ensino desta disciplina proposta pela Congregação do Colégio Pedro II em 1928:

> Entre nós, até 1929, o ensino da aritmética, o da álgebra e o da geometria eram feitos separadamente. O estudante prestava, pelo regime de preparatórios que vigorou até 1925, um exame distinto para cada uma daquelas disciplinas. No regimento Rocha Vaz, de curso seriado, continuou a vigorar o mesmo processo de ensino e de exames inteiramente separados para as três matérias. Em 1928, propusemos à congregação do colégio Pedro II, a modificação dos programas de matemática, de acordo com a orientação do moderno movimento de reforma e a conseqüente unificação do curso, em uma

> disciplina única sob a denominação de Matemática lecionada em 5 anos, passando de então por diante, a haver apenas exames de matemática nas diversas séries do Curso. (MARTINS, 1984, apud BELTRAME, 2000, p. 117)

Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II de 1925 a 1935, foi uma figura importante na defesa da modernização do ensino da Matemática no Brasil. Publicou inúmeros artigos no Jornal do Comércio, de novembro de 1930 a março de 1931, expondo e defendendo as idéias de Félix Klein e da Comissão Internacional do Ensino da Matemática (CIEM / IMUK) em relação ao ensino da Matemática difundidas na Europa, em particular na Alemanha, já a partir do início do século XX. Nesses artigos, bem como nos livros de Matemática que escreveu para o Ensino Secundário, Euclides Roxo defendia uma nova orientação para o ensino da Matemática, orientação esta que tentava implantar nos programas do Colégio Pedro II.

4.3.1.2 – A Introdução do Estudo de Funções no Ensino

Muitas das idéias modernizadoras defendidas por Euclides Roxo já estariam presentes nos programas de ensino de 1929 e 1930. O programa de ensino para o ano de 1929, sob o título único de Matemática, busca uma integração de conteúdos da aritmética, álgebra e geometria. Nessa proposta estavam presentes muitas idéias modernizadoras defendidas pelo Movimento Internacional para Modernização do Ensino de Matemática. Neste programa é introduzida, no 1º. Ano, **a noção intuitiva de função** através da representação gráfica de dados estatísticos, geográficos , etc., até chegar aos gráficos de uma lei específica, com o seguinte tópico: *"Uso dos gráficos. Representação por meio de barras ou diagramas de dados estatísticos, geográficos, meteorológicos, etc. Gráficos representativos de uma lei precisa"*[43]. No 3º. Ano, seriam introduzidas, pela primeira vez num programa, as noções de coordenadas e geometria analítica, além do estudo das funções de forma mais acentuada: *"Noções*

---

[43] *"Uso dos graphicos. Representação por meio de barras ou diagrammas de dados estatísticos, geographicos, meteorológicos, etc. Graphicos representativos de uma lei precisa"* - "Programmas de ensino do Collegio Pedro II para o anno de 1929" (BELTRAME, 2000, p.229).

sobre eixos coordenados. Coordenadas de um ponto; abscissa e ordenada. Dadas as coordenadas, determinar o ponto. Representação gráfica de uma função de 1º. e do 2º. grau a duas variáveis"[44]. No 6º. Ano era dado um curso complementar para os estudantes que se destinavam às Escolas Militares e Politécnica, no qual se estudava Álgebra Superior, Geometria Analítica, Cálculo e Geometria Descritiva.

O programa de 1930, enfim, pode ser considerado um aperfeiçoamento do programa de 1929, uma vez que apresenta instruções para execução dos programas dos dois primeiros anos. As 'Instruções para Execução do Programa do Primeiro Ano' destacam, dentre outras coisas, a introdução paulatina da noção de função:

> O ensino terá, no 1º.ano, tanto quanto possível, um caráter **vivo e intuitivo**, e os primeiros conhecimentos serão adquiridos experimentalmente, [...] Nesta fase do curso a indução será a base essencial para a aquisição de conhecimentos matemáticos [...]
>
> A **representação gráfica das variações sucessivas de grandezas** (dados geográficos, estatísticos, meteorológicos), constituirá uma boa **introdução intuitiva à noção de função** que será desenvolvida nas séries seguintes.
>
> Tomando enunciados simples, far-se-á o estudante exercitar-se em traduzi-los na linguagem algébrica, de modo que ele se vá habituando a utilizar a álgebra como um meio natural de exprimir os fatos a respeito dos números e como uma linguagem simbólica especialmente adequada a estabelecer as condições de um problema de um modo natural e vantajoso. É a própria dificuldade crescente dos problemas que justifica a necessidade de aprender a manipular os símbolos algébricos.[45] (BELTRAME, 2000, p.236-237, grifo nosso)

O programa de ensino para o ano de 1930 será mais abrangente abordando, desde o 1º. Ano, as coordenadas cartesianas e o traçado de gráficos, através das *"Noções sobre eixos coordenados. Coordenadas de um ponto: abscissa e ordenada. Dadas as coordenadas, determinar o ponto. Traçado de gráficos e diagramas. Exercícios"*. No 2º. Ano, serão abordados os mesmos tópicos do 1º. Ano, acrescidos da *"Representação gráfica de uma função do 1º. Grau e do 2º. Grau a duas variáveis"* (BELTRAME, 2000, p.236-241). Nas instruções para execução do programa do 2º. Ano é destacada a importância da continuidade do ensino de funções iniciado no 1º. Ano,

---

44 "Programmas de ensino do Collegio Pedro II para o anno de 1929" (BELTRAME, 2000, p. 231).

45 "Programmas de ensino do Collegio Pedro II para o anno de 1930 - Instruções para Execução do Programa do Primeiro Anno."

que deverá ser agora desenvolvido de maneira a solidificar os conhecimentos adquiridos e permitir uma abordagem mais avançada:

> A **noção de função**, já esboçada no 1°. ano **com auxílio dos gráficos**, pode ser agora **mais acentuada** estudando-se a representação gráfica de **y = ax + b** e aplicando-a à **resolução gráfica de um sistema de duas equações a duas incógnitas**. Aliás, em todo o curso não se deve perder de vista a grande vantagem que se pode tirar das explicações gráficas e dos traçados de diagramas para o esclarecimento e o apoio concreto de quase todas as verdades matemáticas.[46] (BELTRAME, 2000, p.239, grifo nosso)

Neste ano de 1930 é adotado no colégio Pedro II um novo livro didático, lançado por Euclides Roxo em 1929: ***'Curso de Matemática Elementar – De acordo com os programas atuais do Colégio Pedro II'.*** O livro teve grande divulgação e foi saudado pela ABE através do *Jornal do Comércio* de 25 de setembro de 1930 no qual Roxo foi citado por "haver corajosa e brilhantemente empreendido a publicação de uma obra de matemática pondo a causa didática de acordo com a mais moderna e melhor orientação do ensino da disciplina" (Valente, 2003, p. 78).

Este livro tinha como objetivo colocar em prática a modernização do ensino no Brasil. Assim, a seqüência dos conteúdos a serem ensinados é apresentada de forma reestruturada a fim de promover um ensino simultâneo da Aritmética, Geometria e Álgebra. No longo prefácio desse livro, Euclides Roxo sintetiza as idéias e princípios do movimento de renovação do ensino da Matemática, fala de seus precursores e de sua posição em defesa dessas idéias:

> Procuraremos resumir, de acordo com Klein, as tendências desse movimento de reforma.
>
> 1°.) **Tornar essencialmente predominante o ponto de vista psicológico**: Significa isso que o ensino não deve depender unicamente da matéria ensinada, mas deve atender antes de tudo ao indivíduo a quem se tem de ensinar. [...] Aplicado particularmente ao ensino da matemática, esse princípio geral nos conduz a **começar sempre pela intuição viva e concreta e só pouco a pouco trazer ao primeiro plano os elementos lógicos** [...]

---

46 "Programmas de ensino do Collegio Pedro II para o anno de 1930 - Instruções para Execução do Programa do Segundo Anno."

> 2º.) **Na escolha da matéria a ensinar ter em vista as aplicações da Matemática ao conjunto das outras disciplinas**: procurando aliviar o estudante de uma grande sobrecarga de estudos cujo interesse é puramente formalístico e tornar o ensino mais vivo e mais produtivo.
>
> 3º.) **Subordinar o ensino da Matemática à finalidade da escola moderna**: "tornar os indivíduos moral e intelectualmente aptos a cooperarem na obra da civilização hodierna, essencialmente orientada para o sucesso prático". Daí decorre a necessidade de se ter em vista, no ensino da matemática, as suas aplicações às ciências físicas e naturais e à técnica. (ROXO, 1929)

Euclides Roxo continua, então, dizendo que essas três tendências gerais se harmonizam e se fortalecem mutuamente e que delas decorrem outras características e modalidades, que também se entrelaçam e se completam. São elas:

> a) **a fusão da Aritmética, Álgebra e Geometria** (incluída a Trigonometria). A esse respeito diz Klein: "não quero dizer que essas partes devam ser completamente fundidas, mas não devem ser tão separadas como sucede hoje freqüentemente nas escolas, [...]."
>
> b) **introdução precoce da noção de função**, que, para Klein, é o âmago do moderno movimento de reforma, apresentada – o que não se deve perder de vista – sob forma geométrica e expressa, eficazmente, pelas **representações gráficas**, das quais diz Klein: "penetram não somente através da grande literatura moderna das ciências exatas, mas, pode-se dizer, surgem em todas as cogitações da vida atual." [...]
>
> c) abandono, em parte, da rígida didática de Euclides [...], com a **introdução da idéia da mobilidade de cada figura**, [...].
>
> d) **introdução, desde cedo, de noções de coordenadas e de geometria analítica**, a qual "é acessível à compreensão dos meninos desde as primeiras séries e, por isso, deveria penetrar em todo o ensino da Matemática" ao invés de, como se faz atualmente, "sobrepor-se como uma nova construção à parte ao estudo já concluído da Geometria Elementar".
>
> e) introdução de noções de **cálculo diferencial e integral**, [...].
>
> h) finalmente, um princípio que preside a todos os que precedem, o do **método histórico** no desenvolvimento da matemática, [...].
>
> Mais ou menos de acordo com esses princípios, têm sido reformados os programas dos cursos secundários de quase todos os países civilizados, [...]. (ROXO, 1929)

Terminando o longo prefácio, Euclides Roxo fala dos livros de Matemática que foram escritos em outros países para o ensino secundário de acordo com o movimento internacional de reforma e, em especial, do compêndio escrito por Ernst Breslich, e que foi tomado como modelo por Euclides Roxo para o livro que escreveu representando **a primeira tentativa feita no Brasil** para a **renovação dos métodos de ensino** da Matemática no curso secundário:

> Inúmeros compêndios surgiram apresentando soluções diversas para o problema didático posto em foco, [...]
>
> Nenhuma tentativa, entretanto, se nos afigura tão interessante e eficaz, como a que foi levada a cabo pela "School of Education", da Universidade de Chicago, onde um grupo de professores iniciou, em 1903, sob a direção de Jorge Myers, a experiência de um programa e de um compêndio "along fusion lines", segundo a expressão americana.
>
> Esse compêndio, sucessivamente revisto e modificado durante 25 anos, de acordo com os conselhos da prática e as reações dos alunos, foi definitivamente redigido por Ernst Breslich, [...]
>
> De fato, **não nos parece que nenhum outro [compêndio] tinha de maneira mais feliz harmonizado quase todas as tendências da grande reforma**.
>
> **Não hesitamos, por isso, em tomá-lo para modelo deste modesto trabalho**. [...]
>
> Tanto aquele programa [programa do Colégio Pedro II para 1929] como este compêndio representam **a primeira tentativa, feita no Brasil, para renovação dos métodos de ensino da Matemática, no curso secundário, de acordo com o movimento de reforma, cujas diretivas procuramos acentuar**.
>
> Perante a nossa consciência de professor brasileiro, que há quatorze anos assiste, nas suas aulas e nas bancas oficiais de exame, a demonstração de completa falência dos antigos métodos, impunha-se-nos o dever iniludível deste árduo empreendimento. Contamos com a resistência do meio naturalmente hostil, por comodismo e apego à tradição, a qualquer movimento inovador, principalmente quando, como acontece com este, exige dos professores um certo esforço de adaptação e maior atividade e trabalho nas aulas. (ROXO, 1929, grifo nosso)

Euclides Roxo já contava com a resistência dos professores às inovações implantadas e às que se pretendia implantar, e as reações logo apareceram, como é o caso da matéria publicada no Jornal do Comércio pelo professor Ramalho Novo em junho daquele mesmo ano, atacando a fusão das disciplinas matemáticas Aritmética, Álgebra e Geometria no Colégio Pedro II:

> A Congregação do Colégio Pedro II resolveu modificar radicalmente o ensino da Matemática nos cursos ginasiais do nosso país.
>
> Antigamente, isto é, até o ano passado, esse estudo era feito em três partes perfeitamente distintas: a Aritmética, a Álgebra e a Geometria – lecionadas separadamente e com exames finais nas diferentes séries do curso. Desde o ano de 1929 em diante, conforme o novo programa oficial já publicado, o ensino das três disciplinas será feito simultaneamente. Logo na 1ª. série, os jovens colegiais terão de estudar Aritmética, parte da Álgebra e algumas noções de Geometria. (RAMALHO NOVO, Jornal do Comércio, 23 de junho de 1929, p. 7)

Ramalho Novo continua sua matéria falando do ensino da Matemática nos séculos anteriores e do movimento de reação contra o ensino parcelado das diversas partes da Matemática:

> **Até o fim do século XVIII não se fazia estudo isolado das diversas partes componentes da Matemática Elementar**. No famoso papiro de Ahmes – para citar uma obra da Antigüidade – e na Geometria do grande Adrien-Marie Legendre – este já do século XVIII – a Aritmética e a Geometria eram estudadas conjuntamente. O mesmo consórcio aparecia nos "Elementos" de Euclides [...].
>
> **As diversas partes da Matemática começaram a ser estudadas separadamente por Kummer, Dedekind, Weiertrass e kropecker – no fim do século XVIII e princípios do século XIX**.
>
> Essa modificação no plano geral do ensino da Matemática refletiu-se, como podemos ver claramente, nos livros didáticos do tempo. [...].
>
> No fim de alguns anos - quase meio século - os professores de Matemática observaram que **o estudo inteiramente isolado da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, além de ser defeituoso, era pouco interessante para os alunos**. Havia realmente, nesse tempo, a preocupação absurda de exigir-se do estudante uma determinada solução aritmética ou algébrica para um dado problema. [...]
>
> Com o matemático alemão **Félix Klein**, começou **a esboçar-se um notável movimento de reação contra o ensino parcelado da Matemática**; não só Klein, [...] e muitos outros, eram partidários de um ensino harmônico, mas em conjunto, das diversas partes da ciência de Lagrange. (RAMALHO NOVO, Jornal do Comércio, 23 de junho de 1929, p. 7, grifo nosso)

Ramalho Novo prossegue, criticando a fusão das diversas partes da Matemática no programa de ensino de 1929 do Colégio Pedro II, considerando isto um retrocesso no ensino da Matemática, e finaliza a matéria com um irônico comentário sobre o livro escrito por Euclides Roxo:

> Os matemáticos filiados a essa corrente dos Klein (na Alemanha), do de Paolis (na Itália), dos Breslich (nos Estados Unidos) passaram ao extremo oposto na metodologia da grande ciência: a Aritmética, a Álgebra (com noções de Analítica), a Geometria (a duas e três dimensões), e a Trigonometria (dá a Genometria, segundo Klein), eram estudadas numa confusão caótica ao mesmo tempo. [...].
>
> Os resultados obtidos com essa extrema confusão foram, como era de se prever, desastrosos para o ensino. [...].
>
> Se o estudo parcelado da Aritmética, da Álgebra e da Geometria é imperfeito, muito mais defeituoso é ainda a fusão completa de tais disciplinas.
>
> Devemos procurar um meio termo (uma divisão áurea) entre um Weiertrass e um Klein [...].
>
> O programa do Pedro II – decalcado do livro de Breslich ..., representa um verdadeiro retrocesso no ensino da Matemática.
>
> Entre os dois famosos mestres alemães – Klein e Weierstrass – os professores do Pedro II adotaram uma tradução incompleta e defeituosa do... Breslich. (RAMALHO NOVO, Jornal do Comércio, 23 de junho de 1929, p. 7)

Euclides Roxo, entretanto, não se intimida diante das reações extremadas, contrárias às suas idéias, de alguns de seus colegas e publica diversos artigos no Jornal do Comércio com o intuito de defender a nova orientação para o ensino de Matemática introduzidas nos programas do Colégio Pedro II e nos livros que publicou. Em seu artigo *"O Ensino da Matemática na Escola Secundária: I - O Moderno Movimento da Reforma e seus Precursores"* - publicado no Jornal do Comércio em 30 de novembro de 1930, Euclides Roxo faz uma longa introdução histórica ao movimento de renovação do ensino, não deixando de salientar o que repetiria em várias de suas publicações - que suas idéias nada tinham de original – e que os trabalhos de Klein seriam a principal fonte das informações que apresentaria em seus artigos:

> **Os trabalhos de Klein constituirão, por isso, uma das principais fontes das informações que apresentarei nestes despretensiosos artigos**, que julgamos indispensável escrever

> como uma justificação, perante os meios educacionais brasileiros, das últimas modificações, introduzidas nos programas de Matemática do Colégio Pedro II. (ROXO, *O Ensino da Matemática na Escola Secundária – O Moderno Movimento da Reforma e seus Precursores,* Jornal do Comércio, 30 de novembro de 1930, p. 10 -11 – grifo nosso)

A seguir, Euclides Roxo fala da origem do movimento de renovação do ensino da Matemática em 1900, na França, com o grande inquérito sobre o ensino secundário feito por uma comissão da câmara dos Deputados, e das principais conclusões desta comissão:

> Pode-se, porém, dizer que o grande movimento de renovação se iniciou em França, em 1900, com o famoso inquérito promovido por uma comissão da câmara dos Deputados, a qual, depois de pôr-se em contato com um grande número de corporações oficiais, apresentou um relatório completo sobre o ensino secundário em França, longa cadeia, de que o ensino da Matemática é um dos elos mais importantes. Essa comissão concluiu pela necessidade de uma renovação do ensino, (...) **e de se passarem para o ensino secundário** (...) **a noção de função, a representação gráfica** (...). (ROXO, *O Ensino da Matemática na Escola Secundária – O Moderno Movimento da Reforma e seus Precursores,* Jornal do Comércio, 30 de novembro de 1930, p. 10 -11 – grifos do autor)

As idéias renovadoras de Euclides Roxo logo provocariam reações dentro da própria congregação do colégio Pedro II, como é o caso das polêmicas travadas em artigos do Jornal do Comércio com os professores Almeida Lisboa e o coronel Sebastião Fontes:

> De decadência em decadência, de supressão em supressão, chegamos aos programas atuais do professor Euclides Roxo, [...] Não compreendo que tão mesquinha reforma tivesse tal patrono.
>
> O professor Roxo quis dar ao ensino da matemática um caráter utilitário e essencialmente prático. Julgo que não atingiu esse objetivo. [...]
>
> O Sr. Euclides Roxo quer nos convencer de que se apoiou no Congresso Internacional de Ensino da Matemática e na autoridade incontestável de Klein para abolir o ensino da matemática no Brasil. (LISBOA, *"Os Programas de Matemática do Colégio Pedro II"*, Jornal do Comércio, 21 de dezembro de 1930, p 9)

> Sem falsa modéstia, posso falar com pleno conhecimento de causa, portanto: a meu ver, a atual maneira de ensinar a matemática é anárquica e ineficiente. Os novos métodos constituem uma experiência que nós, grandes cultores de matemática, terreno que palmilhamos bem, podendo dar lições a outros povos, devíamos odiar o Sr. Von Klein, tão citado pelo Sr. Roxo, [...] (FONTES, *"A Nova Orientação do Ensino da Matemática Secundária"*, Jornal do Comércio, 05 de dezembro de 1930, p. 6)

Em fins de 1930, assim que foi instalado o novo Governo sob a presidência de Getúlio Vargas, a princípio em caráter provisório, procurou-se estabelecer condições de infra-estrutura administrativa que dessem suporte ao novo regime. Assim, novos órgãos foram criados e, dentre eles, ainda em 1930, o Ministério da Educação e Saúde Pública, que existira no início da República, entretanto teve pouca duração. Tendo Francisco Campos à frente desta pasta, este Ministério logo mostrou a que veio - já em 1931 estabeleceu uma grande reforma do ensino brasileiro, imprimindo uma tendência renovadora com os diversos decretos de 1931 e 1932:

> 1. Decreto nº. 19.850 – de 11 de abril de 1931:
>   Cria o Conselho Nacional de Educação.
> 2. Decreto nº.19.851 – de 11 de abril de 1931:
>   Dispõe sobre a organização do ensino superior no Brasil e adota o regime universitário.
> 3. Decreto nº.19.852 - de 11 de abril de 1931:
>   Dispões sobre a organização da Universidade do Rio de Janeiro.
> 4. Decreto nº.19.890 - de 11 de abril de 1931 [portaria de 30 de junho de 1931]
>   Dispõe sobre a organização do ensino secundário.
> 5. Decreto nº.20.158 - de 30 de junho de 1931:
>   Organiza o ensino comercial, regulamenta a profissão de contador e dá outras providências.
> 6. Decreto nº.21.241 - de 14 de abril de 1932:
>   Consolida as disposições sobre a organização do Ensino Secundário.
>
> (ROMANELLI, 1999, apud BELTRAME, 2000, p.127-8)

Euclides Roxo, tendo sido convidado por Francisco Campos para participar da reforma do ensino secundário na parte relativa ao ensino da Matemática, organiza, agora em âmbito nacional, os programas e as instruções pedagógicas para todas as séries do ensino secundário a partir dos estabelecidos no Colégio Pedro II. Francisco Campos reformula o ensino e, na parte relativa ao ensino de Matemática, acata todas as idéias modernizadoras de Euclides Roxo que são, ao menos oficialmente, implantadas em todas as escolas secundárias brasileiras. Roxo organiza, então, os programas e as respectivas instruções pedagógicas da reforma, a partir dos estabelecidos no Colégio Pedro II, só que agora para todas as séries do secundário e com abrangência nacional:

> As concepções modernizadoras de ensino, que Roxo imaginava concretizá-las primeiramente no âmbito do Colégio Pedro II com as eventuais e necessárias correções de rota impostas pela realidade da sala de aula, tomam, então, **proporções nacionais** e mais, **impostas, via decreto, sem uma discussão prévia mais ampla** – ambiente totalmente oposto ao que Klein teve na Alemanha, onde as mudanças foram feitas de forma gradativa e a partir do convencimento e da preparação dos professores. (BRAGA, 2003, p. 77, grifo nosso)

O novo programa é instituído em portaria ministerial de 30 de junho de 1931. Através desta Reforma, ficariam estabelecidos definitivamente o currículo seriado, a freqüência obrigatória, dois ciclos, um fundamental e outro complementar, e a exigência de habilitação neles para o ingresso no ensino superior. É importante ressaltar que um dos seus aspectos mais relevantes da Reforma Francisco Campos foi ter dado ao ensino secundário uma concepção de caráter educativo em contraposição ao de mero curso preparatório e de ser a primeira tentativa de introduzir no ensino secundário os princípios modernizadores da educação:

> O ensino secundário passa a ter dois ciclos: **um fundamental**, de cinco anos, e **outro complementar**, de dois anos, este último visando à preparação para o curso superior. Com isso, **pretendia-se evitar que o ensino secundário permanecesse meramente propedêutico, descuidando-se da formação geral do aluno**. Todas as escolas se equiparam ao Colégio Pedro II, até então considerado modelo. (ARANHA, 1996, apud BRAGA, 2003, p. 75, grifo nosso)

O objetivo do ensino de Matemática deixaria de ser apenas o 'desenvolvimento do raciocínio', mas também incluiria o desenvolvimento de outras 'habilidades' intelectuais, como podemos observar no seguinte trecho da reforma:

> O ensino da Matemática tem por fim desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o, ao mesmo tempo, à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara do pensamento em linguagem precisa.
>
> Além, disso, para atender ao interesse imediato de sua utilidade ao valor educativo dos seus métodos, procurará, não só despertar no aluno a capacidade de resolver e agir, com presteza e atenção, como ainda favorecer-lhe o desenvolvimento da faculdade de **compreensão e de análise das relações quantitativas e especiais, necessárias às aplicações nos diversos domínios da vida prática e à interpretação exata e profunda do mundo objetivo**. [...]
>
> Em seguida, visará o ensino da Matemática a habituar o estudante ao emprego, com segurança, das idéias e dos conceitos que formam a estrutura do pensamento quantitativo, exercitando-lhe a faculdade de discernir **quando e em que condições admitem os fenômenos naturais a aplicação dos processos matemáticos**. Para isso, é essencial que ele aprenda, analisando uma situação complexa, a fixar relações lógicas entre os fatos, descobrindo e estabelecendo **a lei geral que os rege**, cujas propriedades e significação devem ficar bem compreendidas. (Decreto nº. 19.890, 1931, BICUDO, apud apud ROCHA, 2001, 210-213, grifo nosso)

Para que o aluno viesse a ser 'um descobridor' e não 'um receptor passivo de conhecimentos' era sugerido o uso do método heurístico. Nas 'Instruções Pedagógicas' da Reforma, é contemplada uma visão mais moderna dos conteúdos matemáticos. Nessas 'Instruções', é sugerida a eliminação de 'assuntos de interesse puramente formalístico', de 'processos de cálculos desprovidos de interesse didático' e é **introduzido o conceito de função**, as noções de cálculo infinitesimal, além de propor o ensino simultâneo da Aritmética, da Álgebra e da Geometria. No seguinte trecho das 'Instruções Pedagógicas' da Reforma, podemos ver explicitamente essa nova visão do ensino da Matemática:

> **A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação**. A acentuação clara dos três pontos de vista – aritmético, algébrico e geométrico – não deve, por isso, estabelecer barreiras

intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas.

Para dar unidade à matéria, estabelecendo-se essa estreita correlação entre as diferentes modalidades do pensamento matemático, será adotada, como idéia central do ensino, **a noção de função**, apresentada, a princípio, **intuitivamente e desenvolvida, nas séries sucessivas, de modo gradativo, tanto sob a forma geométrica como sob a analítica.**

Como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 5ª. série o ensino das noções fundamentais e iniciais do cálculo das derivadas, [...]. Essas noções não serão ensinadas como matéria à parte, mas entrelaçadas ao corpo das demais disciplinas matemáticas. [...]

O assunto deverá, portanto, ser escolhido de modo que se ensinem exclusivamente as noções e os processos que tenham importância nas aplicações práticas, ou sejam necessárias à ligação íntima das partes que o constituem. [...]

Desde cedo deverá o aluno acostumar-se a fazer, antes da resolução dos problemas, uma idéia aproximada do resultado, por estimativa, ou por meio de esboço gráfico. Convém ainda que se habitue a ter a intuição, quer a respeito da possibilidade de resolução do problema, quer sobre a natureza e o número das soluções. (Decreto nº. 19.890, 1931, apud apud BELTRAME, 2000, p. 248-251, grifo nosso)

Os aspectos modernizadores desta reforma aparecem detalhados nas 'Orientações Específicas' da Reforma, como nos informa Miorim (1985):

Com relação ao estabelecimento de inter-relações entre os três ramos, são apresentadas sugestões para que sejam **representadas geometricamente as grandezas numéricas**, para que seja estabelecida uma **correlação entre conceitos e expressões algébricas com as noções de geometria intuitiva**; através da associação com as noções de perímetro, área, volume e segmentos orientados; e para que seja utilizado **o conceito de função em todas as oportunidades que surgirem, tanto na álgebra como na geometria; através da ênfase na dependência entre grandezas e na determinação da relação existente entre elas**. (MIORIM, 1985, p 190, grifo nosso)

Nas 'orientações específicas', encontra-se uma listagem dos conceitos a serem trabalhados em cada série, demonstrando claramente a tentativa de articulação gradativa entre os vários campos da matemática:

> **Na 1ª. série**, os três campos aparecem separados e são listados os conceitos fundamentais de cada um deles. [...] Os temas propostos para a aritmética e a álgebra são os que tradicionalmente dão início a estes ramos. A única novidade seria **o 'traçado de gráficos'**, colocado como o último item da aritmética.
>
> **Na 2ª. série**, a articulação começa a ficar mais definida.[...] A aritmética e a álgebra aparecem como um único campo, onde **é introduzida a noção de função de uma variável e a sua representação gráfica**. Após a introdução deste 'elemento unificador', percebe-se um caminho novo que vai trabalhando, de forma articulada, noções que antes eram estudadas separadamente. Isso fica claro pela seguinte seqüência proposta: o estudo das funções y = ax e y = a / x, proporções e suas propriedades, porcentagens, juros..., equações do 1º. grau, sistemas de equações do 1º. grau com duas variáveis, representação gráfica da função linear de uma variável e de um sistema de duas equações com duas incógnitas, ...
>
> **Na 3ª. série**, a **articulação entre a aritmética e a álgebra continua através da ampliação do estudo das funções, de sua representação gráfica** e das equações e igualdades algébricas. [...]
>
> Na 4ª. e 5ª. séries, essas características básicas permanecem, culminando com a introdução das noções básicas do cálculo infinitesimal. (MIORIM, 1985, p. 191-2, grifo nosso)

A Álgebra é apresentada como a linguagem mais apropriada para exprimir as relações de dependência entre as variáveis:

> Em todo o curso, os conceitos e processos matemáticos serão sempre apresentados em graus sucessivos, passando-se paulatinamente dos mais fáceis aos mais complexos. [...]
>
> A Álgebra deve mostrar-se como **linguagem simbólica eminentemente apta a exprimir, de maneira concisa**, **relações entre as grandezas**. Assim, é de se adotar, logo de início, **o uso da fórmula**, a que se chegará naturalmente pelo estudo das regras de avaliação de áreas e volumes, ou pelos problemas de juros e desconto comercial, podendo-se mesmo alargar a exemplificação com outras fórmulas obtidas de formulários técnicos. **A fórmula será considerada sob os aspectos da construção, significação, uso e correlação entre as grandezas, a saber**:
>
> a) **como linguagem concisa**;
>
> b) **como regra concisa de cálculo**;
>
> c) **como uma solução geral e**
>
> d) **como expressão da dependência de uma variável em relação a outra**. (Decreto nº. 19.890, 1931, apud apud BELTRAME, 2000, p. 248-251, grifo nosso)

Ainda nas 'Instruções Pedagógicas para o Programa de Matemática', na parte relativa à Álgebra, é sugerido que o ensino das funções seja desenvolvido de maneira gradativa, com uma abordagem mais intuitiva no começo e, aos poucos, mais geral e abstrata. Apresentado como idéia coordenadora do ensino, o estudo das funções deveria ser desenvolvido através da representação algébrica, gráfica e também através das tabelas, três ferramentas importantíssimas deste estudo:

> **A noção de função constituirá a idéia coordenadora do ensino**. Introduzida, a princípio, intuitivamente, será depois desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob ponto de vista geral e abstrato. Antes mesmo de se formular qualquer definição e de usar a notação especial, o professor não deixará, nas múltiplas ocasiões que se apresentarem, tanto em Álgebra como em Geometria, de chamar a atenção para a dependência de uma grandeza em relação a outra ou como é determinada por uma ou por várias outras.
>
> **A representação gráfica** e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o estudo das funções e permitir, assim, uma estreita conexão entre os diversos ramos das matemáticas elementares.
>
> Além disso, isolado ou unido à fórmula, **o gráfico ainda desempenha papel notável como instrumento de análise e generalização, tal a vivacidade e o poder expressivo deste meio de representação**, sobretudo, no estudo das propriedades das funções empíricas. Não há perder de vista, porém, em todo o curso que a representação gráfica não é, por si mesma, o objetivo procurado, mas apenas um meio de dominar visualmente a variação das funções.
>
> Ao lado dele, **a tabela merece também ser devidamente apreciada.** Como recursos indispensáveis à resolução rápida dos problemas da vida prática, é necessário que o estudante perceba serem **tabelas**, **gráficos** e **fórmulas algébricas** representações da mesma espécie de conexão entre quantidades, e verifique a possibilidade de se tomar qualquer desses meios como ponto de partida, conforme as circunstâncias. (BELTRAME, 2000, p.248-251, grifo nosso)

Em 22 de Fevereiro de 1931, Euclides Roxo publica no Jornal do Comércio a matéria intitulada 'O Ensino da Matemática na Escola Secundária: XII – Principais Escopos e Diretivas do Movimento de Reforma: O Conceito de Função como Idéia Axial do Ensino' na qual apresenta a principal tese das conferências de Klein, e o princípio fundamental do movimento de reforma, que é trazer para o ponto central do ensino da Matemática a noção de função, apresentada de modo adequado:

> [...] as opiniões se afirmam acordes quanto à vantagem de estabelecer, **como núcleo ou idéia axial do ensino da Matemática o conceito de função**, apresentados sob forma gráfica, analítica e desenvolvido, gradativamente, desde as primeiras séries do curso secundário. [...]
>
> Essa noção é, com efeito, adequada a dar ao ensino a unidade e a conexão que tanto o vivificam e fortalecem, [...]
>
> De fato, entre os principais escopos do ensino da Matemática, não se pode, como já acentuado têm os autores que vimos citando, deixar de incuir, com Young, **"ajudar a compreender melhor as leis da natureza"**, a **"ressaltar distintamente as relações matemáticas que se apresentam no organismo social e nas atividades da vida moderna, bem como o auxílio, prestado pela Matemática à resolução dos problemas que aí se apresentam."** (Euclides Roxo, 'O Ensino da Matemática na Escola Secundária: XII – Principais Escopos e Diretivas do Movimento de Reforma: O Conceito de Função como Idéia Axial do Ensino', Jornal do Comércio, 22 de Fevereiro de 1931, grifo nosso)

Desenvolvida gradativamente desde as primeiras séries do curso secundário, a noção de função é apresentada como a ferramenta adequada para dar unidade e conexão ao ensino da Matemática, a fim de acabar com a descontinuidade existente entre a Matemática secundária e a superior. São de Klein as palavras que mostram como deve ser o ensino secundário de Matemática:

> "**O ensino secundário deve, tanto quanto possível, dentro da sua esfera, preparar para os estudos superiores e não torná-los difíceis ou impraticáveis.**" [...]
>
> "Chegam os estudantes à Universidade, **sem qualquer conhecimento teórico das funções** (inclusive os princípios do cálculo infinitesimal). A conseqüência é que certas partes importantes da sua profissão ficam, para eles, completamente impenetráveis." [...]
>
> "Que parece de tal procedimento aos Senhores professores secundários que persistem em afirmar ser o cálculo infinitesimal demasiado difícil para o liceu? Ou acaso as faculdades intelectuais dos novos universitários elevam-se bruscamente, de tal maneira que eles, desprovidos daquela preparação matemática, podem agora, de uma feita, compreender uma exposição tão condensada? **É à escola secundária que compete preencher esta lacuna, tanto mais quanto, conforme já mostrei claramente, ela pode fazê-lo sem acréscimo de trabalho**." (Euclides Roxo, Jornal do Comércio, 22 de Fevereiro de 1931, grifos do autor)

Euclides Roxo faz menção ao ensino secundário francês, no qual já se achavam introduzidas, há muito, a noção de função e as representações gráficas, baseadas em noções de Geometria Analítica, embora sem as conexões desejadas do ponto de vista de Klein. É o que se pode observar nas notáveis obras 'Notions de Matématiques' de Jules Tannery (1903) e 'Algébre' de Emile Borel (1903) Eis como Jules Tannery se manifesta sobre o assunto no prefácio de seu livro:

> Só se pode saber um pouco o que são as matemáticas, só se pode suspeitar a sua extensão extraordinária, a natureza dos problemas que elas estabelecem e resolvem, **quando se sabe o que é uma função, de que modo se estuda uma função, como se seguem as suas variações, como se lhe representa a marcha por uma curva, de que maneira a álgebra e a geometria se auxiliam entre si, de que sorte o número e o espaço se esclarecem mutuamente, como é que se determina uma tangente, uma área, um volume, de que modo o homem é levado a criar novas funções, novas curvas e a estudar-lhes as propriedades.** São dessas noções e desses métodos que precisamos para ler os livros técnicos, em que as matemáticas intervêm. Elas são indispensáveis a quem quiser compreender alguma coisa no atual movimento científico, que se acelera, nas aplicações da ciência que modernamente se multiplicam, e que, dia a dia, tendem a modificar mais profundamente a nossa maneira de pensar e de agir.
>
> E **essas noções são simples e fáceis, desde que se reduzam ao que têm de essencial**, [...] **Elas devem** (aquelas noções) **penetrar, segundo penso, cada vez mais o ensino elementar, para abreviá-lo e fortificá-lo**. (TANNERY, apud ROXO, Jornal do Comércio, 22 de Fevereiro de 1931, grifo nosso)

Euclides Roxo cita Klein que, convencido de que o ensino da Matemática na escola secundária deveria se desenvolver em torno da noção de função, exclamava: "A representação gráfica das dependências funcionais penetram hoje através de todos os ramos da atividade; é a forma típica que reveste o pensamento matemático, onde quer que se nos apresente" (Klein, apud Roxo, 1931). Euclides Roxo ainda nos informa que os americanos puseram em prática, 'com o seu magnífico senso das realidades, as tendências preconizadas pelos reformadores' e introduziram largamente os gráficos no ensino da Matemática, uma vez que:

> 1. O **estudo dos gráficos** é muito concreto e por isso pode de algum modo contrabalançar a tendência que tem a Álgebra a tornar-se uma aplicação mecânica de regras decoradas.

> 2. As representações gráficas estão presentemente usadas, de maneira tão extensa, nos jornais diários, revistas e livros, que uma certa familiaridade com esses recursos faz parte da cultura geral.
>
> 3. Esse modo de representar variáveis é muito usado em outras ciências. Para estudar, com sucesso, Física, Mecânica, Química, Meteorologia, Economia política, etc, o estudante precisa estar habituado aos gráficos.
>
> 4. **Muitos fatos matemáticos tornam-se, pelos gráficos, perceptíveis à vista.**
>
> 5. O estudo dos gráficos habilita o estudante a resolver muitos problemas que absolutamente não poderia fazer de outro modo: resolução de equações de grau superior, equações transcendentes, etc.
>
> 6. O estudante adquire uma idéia clara de **uma das noções mais importantes** da matemática adiantada, a saber, a **funcionalidade.**
>
> 7. Os gráficos interessam os estudantes e são facilmente compreendidos.
>
> A ***National Committee on Mathematical Requirements*** **adota completamente a opinião de KLEIN sobre a adequação do conceito de funcionalidade para constituir a idéia unificadora do ensino da Matemática.**
>
> A grande idéia que é mais própria a unificar o curso é a da **relação funcional.** O **conceito de uma variável** e da **dependência de uma variável em relação à outra** é de importância fundamental para qualquer pessoa. (ROXO, Jornal do Comércio, 22 de fevereiro de 1931, grifo nosso)

Euclides Roxo mostra, ainda, que a idéia de dependência entre duas variáveis deve estar presente em todo o ensino secundário: o conceito de função deve ser trabalhado inicialmente através de muitos exemplos concretos a fim de se mostrar a dependência funcional, que só adquire significação para o aluno quando é resultado de uma longa experiência matemática e de um treinamento considerável, em suas diversas formas:

> Nada há em qualquer desses conceitos, porém, que impeça a apresentação de exemplos concretos específicos e ilustrações de dependência, mesmo que nas partes elementares do curso. Pra chegar a este fim, encontram-se meios na **tabulação de dados**, no **estudo das fórmulas**, dos **gráficos** e no uso destes.
>
> **O princípio dominante e fundamental do curso deve ser a idéia de dependência entre duas variáveis**, [...]. O professor deve ter essa idéia sempre em mente, e o progresso do aluno deve ser conscientemente dirigido segundo as linhas que apresentarem, uma após a outra, as idéias, das quais finalmente depende a formação do conceito geral de funcionalidade. [...]

> Além disso, o aluno deve ser levado a tomar o hábito de pensar a respeito das **conexões que existem entre quantidades dependentes**, [...].
>
> Para atingir a esse fim, o professor não deve ter em mente nenhuma definição a ser recitada pelo aluno, nenhuma resposta automática a um dado quesito, nenhum exercício de memória, absolutamente, mas antes a preocupação de não deixar instante algum, em que uma quantidade se apresente ligada a outra, ou determinada por uma ou por algumas outras, sem chamar a atenção para o fato e procurar fazer o estudante 'see how it works'. (ROXO, Jornal do Comércio, 22 de Fevereiro de 1931, grifo nosso)

Em 1934, Gustavo Capanema assume o Ministério da Educação e Saúde. Em 1936, esse ministro inicia os trabalhos para a elaboração do Plano Nacional de Educação, previsto pela Constituição de 1934 e que seriam elaborados pelo Conselho Nacional de Educação. Com o objetivo de recolher informações e estudos para a elaboração desse plano, são distribuídos questionários sobre todos os graus do ensino.

Para debater sobre qual a orientação deveria ser dada ao ensino secundário brasileiro, a ABE promoveu uma série de conferências entre maio e agosto de 1937. E, dentre os conferencistas, estava Euclides Roxo. Ele apresentou as idéias, bem como suas origens, sobre o ensino da Matemática no curso secundário, defendidas por ele aqui no Brasil desde o final da década de 20 e que haviam sido implantadas pela Reforma Francisco Campos. Entretanto, com o Golpe Militar, naquele mesmo ano, o Plano Nacional de Educação não seria posto em prática, permanecendo em vigor a Reforma Francisco Campos.

Ainda nesse mesmo ano de 1937, Euclides Roxo, com suas idéias ainda mais amadurecidas, escreveu o livro 'A Matemática na Escola Secundária', onde expõe de forma mais clara o conteúdo de seus artigos publicados no Jornal do Comércio no início da década de 30 e sistematiza suas idéias sobre o ensino da Matemática na escola secundária, mostrando as principais tendências e diretrizes dos movimentos de reforma.

Em 1939, Gustavo Capanema retoma os trabalhos sobre o ensino secundário e começa a organizar e reunir informações para uma futura reforma educacional. Uma das propostas apresentadas ao ministro, para o curso secundário, procedeu do Colégio Pedro II. Este estudo foi elaborado por uma comissão que tinha como relator, Euclides Roxo, e novamente ele se fez presente nas discussões sobre a educação brasileira. Fazendo parte oficialmente de uma comissão responsável pela elaboração dos programas de Matemática, Euclides Roxo agora não está sozinho como estivera ao tomar parte na Reforma Francisco Campos, mas com outros educadores que nem sempre compartilham das mesmas idéias renovadoras que ele e tendo de lutar bravamente para preservá-las, uma vez que o confronto acirrado com os defensores do programa tradicional e ultrapassado de ensino foi inevitável.

Em 4 de abril de 1942, Gustavo Capanema promulga a Lei Orgânica do Ensino Secundário. Segundo Valente (2003), quem lê o programa de matemática aprovado por Capanema logo percebe que os pontos de vista de Euclides Roxo foram, em sua essência, mantidos.

Podemos dizer, definitivamente, que foi através de Euclides Roxo - este educador brasileiro, que compreendeu as propostas do movimento de renovação do ensino da Matemática que ocorria em âmbito mundial, percebeu a necessidade de implantá-las também em nosso país, divulgou-as e lutou bravamente por sua implantação, desde o final da década de 20 até o início da década de 40 do século passado - que o ensino secundário brasileiro de Matemática entra no século XX.

Penetrando o ensino secundário de nosso país a partir de 1931, quando seu estudo foi introduzido através da reforma Francisco Campos, a compreensão e definição de função ainda sofreriam uma longa evolução em nossos livros didáticos, percorrendo as várias definições ocorridas ao longo da história de seu desenvolvimento. Entretanto, o estudo das diversas definições de função adotadas pelos livros didáticos ao longo da história de nossa educação foge ao objetivo desse trabalho.

4.3.1.3 – A Definição de Função no Ensino Brasileiro Atual

A evolução histórica da definição de função nos dá uma pista do quanto pode ser difícil de ser compreendida pelos estudantes. A definição formal introduzida em

1939 por Bourbaki é hoje considerada, por muitos educadores brasileiros, demasiado abstrata, e até mesmo limitada:

> Essa definição apresenta **o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a idéia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza função de outra) ou resultado de um movimento**. Quem pensaria numa rotação como um conjunto de pares ordenados? Os matemáticos e (principalmente) os usuários da Matemática olham para uma função como **uma correspondência**, não como um conjunto de pares ordenados. Poder-se-ia talvez abrir uma exceção para os lógicos, quando querem mostrar que todas as noções matemáticas se reduzem, em última análise, à idéia pura de conjunto. (LIMA, CARVALHO, WAGNER, MORGADO, 1997, p. 81, grifo nosso)

Atualmente, essa definição não é a mais ensinada no Ensino Médio. Observamos uma tendência a se dar preferência à definição de Dirichlet, ao invés daquela dada por Bourbaki em 1939, como podemos notar no trecho a seguir:

> Só após longo e sólido trabalho neste sentido, preferivelmente no 1.º grau, é possível sistematizar o conceito e apresentar uma definição que não precisa ser mais formal do que a que foi dada por Dirichlet, em 1837: **"Se uma variável y é relacionada à variável x, de modo que, sempre que um valor é dado a x, existe uma regra segundo a qual um único valor de y é determinado, então y é dito uma função da variável independente x"** (...).
>
> De fato, a maioria das situações em que as funções são utilizadas tratam de variações de uma grandeza em função da outra, (...).
>
> (...) a apresentação da definição mais formal de função, como conjunto de pares ordenados, não faz o menor sentido para o aluno de 1º. ou 2º. grau. A noção de relação também não tem nenhum valor em si, nem contribui para que o aluno desses níveis perceba o significado de função. (TINOCO, 1998, p. 49)

Não é nosso objetivo discutir qual a melhor definição a ser adotada, nem as implicações da adoção desta ou daquela, mas apenas deixar em aberto esta questão sobre qual seria a mais adequada, a mais abrangente, a mais compreensível... nesse nível de ensino.

Considerações Finais

De acordo com o que foi exposto, o primeiro estágio para o conceito de função está na Antigüidade, onde os babilônios e os gregos aparecem como as duas civilizações precursoras na utilização da noção de dependência funcional, embora não tenham feito nenhuma tentativa de generalização. Dentre os casos particulares de dependência funcional estabelecidos por esses povos, podemos citar as tábuas astronômicas babilônicas, que estabelecem a regularidade de alguns fenômenos naturais numa forma aritmética elaborada de modo a prever seu retorno periódico, a escala musical estabelecida pelos primeiros pitagóricos e as relações geométricas estabelecidas nos tratados de Arquimedes.

Desde a Grécia Antiga a música inspirou o estudo das dependências funcionais. Podemos dizer que as primeiras leis físicas quantitativas foram determinadas através do estudo de cordas vibrantes. Os primeiros pitagóricos estudaram as relações do comprimento de uma corda com o som emitido e descobriram que essas relações podiam ser expressas por razões de números inteiros. Assim, estabeleceram as primeiras relações funcionais ao determinar essas razões. Na Idade Média, motivado pela busca da "música das esferas", Kepler procurou incansavelmente por uma harmonia musical das esferas celestes e... descobriu sua terceira lei. No século XVIII, o estudo das cordas vibrantes se tornou objeto de um minucioso estudo matemático e de uma famosa polêmica entre D'Alembert, Euler e Daniel Bernoulli centrada na interpretação do conceito de função e que teve seu desfecho com os estudos das séries de Fourier. Esse problema das cordas vibrantes foi de substancial importância no desenvolvimento do conceito de função, visto que, na tentativa de encontrar a solução mais abrangente, foram aparecendo certas funções que não satisfaziam à definição então vigente. Com a descoberta de novas funções, novos estudos foram empreendidos na busca de um conceito geral que englobasse todas as funções então conhecidas e... novas definições!

Deste modo, o conceito de função surge lentamente do estudo das leis naturais e delas se afasta rumo à abstração e à generalização, na busca de um conceito geral que englobasse todas as funções que foram surgindo. Por muito tempo foi identificado com sendo uma expressão analítica, uma interpretação que logo se mostrou insuficiente, surgindo a necessidade de ser generalizado para que se tornasse mais abrangente. Foi sendo evidenciado no conceito de função o que nele havia de essencial – a correspondência entre duas variáveis. Entretanto, manteve um viés com sua origem. O estudo das curvas descritas por leis naturais apoiava-se, em primeiro lugar, na idéia intuitiva de uma quantidade variando continuamente no tempo – os fluxões de Newton -, e o uso das coordenadas cartesianas implicava na idéia do tempo como um parâmetro independente, ou seja, a variável independente da qual todas as outras dependiam e que deveria com elas se relacionar da seguinte forma: a cada valor t de tempo corresponde um, e apenas um, valor da variável dependente, uma vez que o tempo não volta. Deste modo, mesmo tendo caminhado para uma abstração cada vez maior, o conceito de função manteve na essência de sua definição algo trazido do estudo das leis físicas: para cada x do domínio, um único y do contradomínio.

Tendo aparecido pela primeira vez nos escritos de Leibniz no final do século XVII e com um significado puramente geométrico, a palavra função logo seria empregada como um conceito mais amplo. Durante pouco mais de dois séculos, o conceito de função foi sendo conduzido, cada vez mais, à abstração rumo a uma maior generalização. Resulta de uma longa e tortuosa evolução histórica que chega ao século XX com a seguinte definição:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x pertencente ao conjunto E e uma variável y pertencente ao conjunto F, é dita relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um, e apenas um, elemento y de F na relação considerada com x.
>
> Dá-se o nome de função à operação que associa, segundo essa definição, todo elemento $x \in E$, a um elemento $y \in F$. Dizemos que y é o valor da função para o elemento x e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam uma mesma função. (BOURBAKI, 1939, apud MONNA, 1972, p. 82, tradução nossa)

Finalmente, podemos concluir que apesar de a noção intuitiva de função ter surgido por volta de três mil anos atrás nas elaboradas tabelas babilônicas,... as primeiras relações funcionais terem sido estabelecidas há mais de 2500 anos por Pitágoras... e de Arquimedes ter chegado tão perto, não só do cálculo diferencial e integral, mas também deste conceito, seu desenvolvimento formal completo só aparece no início do século XX. Isso mostra como pode ser enorme a distância entre intuição e formalismo.

Após nosso estudo sobre o desenvolvimento do conceito de função, mostramos sua introdução no ensino secundário brasileiro. Para isso, buscamos um pouco da história de nosso ensino secundário de Matemática desde os tempos de Brasil colônia até a República. A análise de publicações da época, tais como jornais e livros, e de fontes documentais, representadas principalmente pelos programas de ensino do Colégio Pedro II, mostra o momento histórico em que as funções chegam às escolas brasileiras.

Através desse pequeno histórico, podemos perceber as transformações sofridas pelo ensino da Matemática no Brasil, bem como as diversas contradições ao longo de sua tortuosa história, seus pequenos avanços e, em alguns momentos, grandes retrocessos.

O ensino das funções aparece, pela primeira vez em um programa de ensino secundário brasileiro, em 1892 no Colégio Pedro II, embora de maneira tímida, intitulado *'Da Função e da Equação'.* Os programas para os anos seguintes apresentariam, com um ou outro acréscimo, o estudo de funções. Embora não seja mencionado que conteúdos eram abordados, os programas de ensino do Colégio Pedro II relativos ao período de 1892 a 1911 demonstram que o estudo de funções estava presente no ensino brasileiro de então.

Entretanto, com a Lei Rividávia (5 de abril de 1911), a partir do ano letivo de 1912 o estudo das funções seria excluído dos programas de ensino do Colégio Pedro II, só aparecendo novamente em 1929, após quase duas décadas sem ser mencionado nos programas de ensino dessa instituição. Nos programas de 1919, no entanto, constatamos um fato curioso: embora não seja mencionado o estudo das funções, é nesse ano que, pela primeira vez num programa de ensino brasileiro, aparece o estudo da representação gráfica de uma equação.

Foi na segunda década do século XX, porém, que a lenta evolução do ensino da Matemática em nosso país ganharia dois grandes aliados:

(I) A criação, em 1924, da Associação Brasileira de Educação – ABE, um centro de coordenação de estudos, debates e propostas visando a solução de problemas educacionais brasileiros. Foi a primeira associação de educadores que se instituiu no Brasil com caráter nacional, sendo um dos principais instrumentos de difusão do movimento de renovação do ensino da Matemática iniciado na Europa em fins do século XIX, e seguido pelos Estados Unidos no século XX.

(II) O professor Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II de 1925 a 1935, que se destacou como principal personagem na luta pela modernização do ensino da Matemática em nosso país.

Muitas das idéias modernizadoras defendidas por Euclides Roxo já estariam presentes nos programas de ensino do Colégio Pedro II de 1929, quando o ensino das funções retorna ao ensino secundário brasileiro. Assim, é introduzida, no 1º. Ano, *a noção intuitiva de função*. Seria somente **a partir de 1931**, no entanto, com a Reforma Francisco Campos, que **o ensino das funções seria introduzido no ensino secundário de todo o país.**

No entanto, a compreensão e definição de função ainda sofreriam uma longa evolução em nossos livros didáticos. Como eram definidas as funções nesses livros? Adotavam qual definição? A de expressão analítica? Uma fórmula? As definições apresentadas em nossos livros didáticos percorreriam as várias definições ocorridas ao longo da história do desenvolvimento de seu próprio conceito? Para responder a essas questões, seria necessária uma análise dos livros didáticos daquela época aos nossos dias, a fim de acompanhar a trajetória da apresentação do conceito de função ao longo da história de nossa educação, o que foge ao âmbito desse trabalho.

A evolução histórica do conceito de função ao longo dos séculos XVIII, XIX, até meados do século XX, sugere o quanto é difícil para o aluno compreendê-lo em seu primeiro contato com esse conceito. Nos dias de hoje, ainda há divergências quanto à melhor definição a ser adotada no Ensino Fundamental e Médio: a de Dirichlet? Ou a de Bourbaki? Qual a melhor maneira de apresentá-las? Esperamos que este trabalho possa inspirar outros que venham responder a todos esses questionamentos...

Referências Bibliográficas

AABOE, ASGER, **Episódios da História Antiga da Matemática**, Tradução do Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

ABBAGNANO, NICOLA, **Dicionário de Filosofia**, São Paulo, 1970.

ALMEIDA, MANOEL DE CAMPOS, **Origens da Matemática**, Curitiba, Editora Universitária Champagnat, 1998.

ÁVILA, GERALDO, "Evolução dos Conceitos de Função e de Integral", **Revista Matemática Universitária**, nº 1, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

ÁVILA, GERALDO, "Arquimedes, o Rigor e o Método", **Revista Matemática Universitária**, nº 4, Sociedade Brasileira de Matemática, 1986.

ÁVILA, GERALDO, "Arquimedes, a Esfera e o Cilindro", **RPM – Revista do Professor de Matemática**, nº 10, Sociedade Brasileira de Matemática, 1987.

ÁVILA, GERALDO, "Kepler e a Órbita Elíptica", **RPM – Revista do Professor de Matemática**, nº 15, Sociedade Brasileira de Matemática, 1989.

ÁVILA, GERALDO, "Os Paradoxos de Zenão", **RPM – Revista do Professor de Matemática**, nº 39, Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

ÁVILA, GERALDO, "O Ensino do Cálculo e da Análise", **Revista Matemática Universitária**, nº 33, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

AZEVEDO, FERNANDO DE, **A Cultura Brasileira**, 5ª. Edição [revista e ampliada], São Paulo, Brasil, Edições Melhoramentos, Editora da USP, 1971.

AZEVEDO, FERNANDO DE (org.), **As Ciências no Brasil**, vol. 1, 2ª. Edição, Rio de Janeiro, Brasil, Editora UFRJ, 1994.

BALL, W. W. ROUSE, "History of Mathematics from Descartes to Huygens", **A Short Account of the History of Mathematics**, Chapter XV, London, Macmillan and Co. Limited, 1940.

BARON, MARGARET E., **The Origins of The Infinitesimal Calculus**, Firdt Edition, Printed in Hungary, Pergamon Press, 1969.

BARON, MARGARET E.; BOS, H. J. M., **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo - Unidade I: A Matemática Grega**, 5 volumes, (Tradução: José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes, Título Original: 'History of Mathematics: Origins and Development of Calculus', 1974), Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985.

BASHMAKOVA, I. G.; SMIRNOVA, G. S., **The Beginnings and Evolution of Algebra**, Translated from Russian by Abe Shenitzer, Published by The Mathematical Association of America, USA, 2000.

BELL, E. T., "The Beginnings of Modern Mathematics", **The Development of Mathematics**, Second Edition, McGraw-Hill Book Company Inc, New York – London, 1945.

BELTRAME, JOSILENE, **Os Programas de Ensino de Matemática do Colégio Pedro II: 1837 – 1932**, Tese de M.Sc., PUC/RJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2000.

BOLL, MARCELL, **As Etapas da Matemática**, 3ª. Edição, Título Original: Histoire des Mathématiques, Tradução de J.N., Publicações Europa-América, LDA, Portugal, 1979.

BOS, H. J. M.; MARGARET E., **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo - Unidade V: O Cálculo no Século XVIII**, 5 volumes, (Tradução: José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes, Título Original: 'History of Mathematics: Origins and Development of Calculus', 1974), Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985.

BOTELHO, GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO, "A Evolução do Conceito de Função", **Revista Ciência e Engenharia**, v. 1, nº 1, pp. 101-123, 1992.

BOYER, CARL BENJAMIN, **The History of the Calculus and it's Conceptual Development**, New York, USA, Dover Publications, 1959.

BOYER, CARL BENJAMIN, **História da Matemática**, 10ª. Edição, São Paulo, Brasil, Editora Edgard Blücher Ltda, 1993.

BRAGA, CIRO, **O Processo Inicial de Disciplinarização de Função na Matemática do Ensino do Secundário Brasileiro,** Tese de M.Sc., PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2003.

BURTON, DAVID M., "The Mechanical World: Descartes and Newton", **The History of Mathematics, An Introduction**, Chapter 8, USA, Allyn and Bacon Inc, 1984.

BURTT, EDWIN ARTHUR, **As Bases Metafísicas da Ciência Moderna**, Tradução de José Viegas Filho e Orlando Araújo Henriques, Título Original: 'The Metaphysical Foudations of Modern Physical Science', Editora Universidade de Brasília, 1983.

CALINGER, RONALD, **Classics of Mathematics**, 1st. Edition, Moore Publishing Company, Illinois, USA, 1982.

CARAÇA, BENTO JESUS DE, **Lições de Álgebra e Análise** - Volume I, 2ª. Edição (1ª. Edição em 1935), Lisboa, Portugal, Composto e Impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, 1945.

CARAÇA, BENTO JESUS DE, **Lições de Álgebra e Análise** - Volume II: Funções, Limites, Continuidade, 2ª. Edição (1ª. Edição em 1940), Lisboa, Portugal, Composto e Impresso na Tipografia Matemática, 1954.

CARAÇA, BENTO JESUS DE, **Conceitos Fundamentais da Matemática**, 2ª. Edição, Lisboa, Portugal, Gradiva Publicações Ltda, 1998.

CASTRO, FRANCISCO MENDES DE OLIVEIRA, **A Matemática no Brasil**, 2ª. Edição, São Paulo, SP, Editora Unicamp, 1999.

COHEN, BERNARD; WESTFALL, RICHARD S., **Newton: Textos, Antecedentes, Comentários**, Tradução Vera Ribeiro, Rio de Janeiro, Editoras Contraponto e EDUERJ, 2002.

COSTA, MANUEL AMOROSO, **As Idéas Fundamentaes da Mathematica**, Biblioteca Scientifica Brasileira, Rio de Janeiro, Litho-Typographia Pimenta de Mello & C., 1929.

D'AMBROSIO, UBIRATAN, "Uma rápida visão histórica", **Educação e Matemática - Revista da Associação de Professores de Matemática**, Lisboa, Portugal, nº 32, 1994.

DESCARTES, RENÉ, **La Geometrie**, Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Márcia L. Latham (The Geometry of René Descartes with a Facsimile of the Fist Edition), New York, 1954.

EDWARDS, CHARLES HENRY, **The Historical Development of the Calculus**, Springer-Verlag, New York, 1982.

EVES, HOWARD, **Introdução à História da Matemática**, Tradução: Hygino H. Domingues, 2ª. Edição, Campinas, SP, Editora da Unicamp, 1997.

FONTES, SEBASTIÃO, "A Nova Orientação do Ensino da Matemática Secundária", **Jornal do Comércio**, p. 6, Rio de Janeiro, 05 de dezembro de 1930.

GARBI, GILBERTO, "A Matemática Grega em uma Casca de Noz", **RPM – Revista do Professor de Matemática**, nº 51, pp.15-23, Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

GARDING, LARS, "O Século Heróico", **Encontro com a Matemática**, Tradução de Célio Alvarenga e Maria Manuela Alvarenga, Capítulo 6, (Título original: Encounter with Mathematics, 1977), Editora Universidade de Brasília, Brasília, DF, 1981.

GAUKROGER, STEPHEN, **Descartes – Uma Biografia Intelectual**, Tradução: Vera Ribeiro, EdUERJ e Contraponto Editora Ltda, Rio de Janeiro, 1999.

HAWKING, STEPHEN, **Os Gênios da Ciência Sobre os Ombros de Gigantes – As Mais Importantes Idéias e Descobertas da Física e da Astronomia**, (Tradução de

Heloísa B. S. Rocha, Lis Lemos P. H. Moriconi; Título Original: 'On the Shoulders of Giants'), Editora Campus, Rio de Janeiro, 2005.

KATZ, VITOR J., **A History of Mathematics, An Introduction**, "Geometry, Algebra, and Probability in the Seventeenth Century", Chapter 11, Harper Collins, USA, 1993.

KLINE, MORRIS, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, New York, Oxford University Press, USA, 1972.

KLINE, MORRIS, **Mathematics in Western Culture**, First Published by Oxford University Press, New York, 1953, Oxford University Press, USA, 1980.

LIMA, ELON LAGES; CARVALHO, PAULO CEZAR PINTO; WAGNER, EDUARDO; MORGADO, AUGUSTO CÉSAR, **A Matemática no Ensino Médio – Volume 1**, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1997.

MASSUNAGA, MAGDA RIGAUD PANTOJA, **O Colégio Pedro II e o Ensino Secundário Brasileiro: 1930 – 1961**, Tese de M.Sc., UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

MELO E SOUZA, JULIO CESAR DE, **As Grandes Fantasias da Matemática**, Rio de Janeiro, Editora Getulio Costa, 1945.

MIORIM, MARIA ÂNGELA, **O Ensino de Matemática: Evolução e Modernização**, Tese de D.Sc., UNICAMP/SP, São Paulo, 1995.

MONNA, A. F., "The Concept of Function in the 19^{th} and 20^{th} Centuries, in Particular with Regard to the Discussios between Baire, Borel and Lebesgue", **Archive for History of Exact Sciences**, Volume 9, pp. 57-84, Edited by C. Truesdell, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

NEUGEBAUER, OTTO, **The Exact Sciences in Antiquity**, Second Edition, Brown University Press, Providence, Rhode Island, 1957.

NEUGEBAUER, OTTO, **A History of Ancient Mathematical Astronomy**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 1975.

NOVO, M. RAMALHO, "Questões *de Ensino – A Matemática no Pedro II"*, **Jornal do Comércio**, p. 7, Rio de Janeiro, 23 de junho de 1929.

Os Pensadores, Descartes, Volume XV, São Paulo, 1973.

PARDAL, PAULO, **Memórias da Escola Politécnica**, Rio de Janeiro, UFRJ: Escola de Engenharia, Biblioteca Reprográfica Xerox, 1984.

PITOMBEIRA, JOÃO BOSCO, "Os Elementos de Euclides", **Caderno da RPM**, Volume 5, Número 1, pp. 01-42, Sociedade Brasileira de Matemática, 1994.

PRICE, DEREK DE SOLLA, **A Ciência desde a Babilônia**, Tradução de Leônidas Hegenberg e Octanny S. de Mota, Editora Itatiaia, Belo Horizonte – Rio de Janeiro, 2000.

RESNIKOFF, H. L.; WELLS JR, R. O., **Mathematics in Civilization,** USA, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1973.

RIBEIRO, MARIA LUISA DOS SANTOS, **História da Educação Brasileira: a Organização Escolar**, 16ª. Edição Revista e Ampliada, 1ª. Edição – 1978, Campinas, SP, Editora Autores Associados, 2000.

ROCHA, JOSÉ LOURENÇO DA, **A Matemática do curso secundário na Reforma Francisco Campos**, Tese de M.Sc., PUC/RJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2001.

RONAN, COLIN A., **História Ilustrada da Ciência – Volume I: Das Origens à Grécia**, (Tradução: Jorge Enéas Fortes; Título Original: 'The Cambrige Illustrated History of the World's Science', 1ª. Edição, 1983) , Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 2001.

RONAN, COLIN A., **História Ilustrada da Ciência – Volume II: Oriente, Roma e Idade Média**, (Tradução: Jorge Enéas Fortes; Título Original: 'The Cambrige Illustrated History of the World's Science', 1ª. Edição, 1983) , Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 2001.

RONAN, COLIN A., **História Ilustrada da Ciência – Volume III: Da Renascença à Revolução Cintífica** (Tradução: Jorge Enéas Fortes; Título Original: 'The Cambrige

Ilustrated History of the World's Science', 1ª. Edição, 1983) , Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 2001.

ROXO, EUCLIDES DE MEDEIROS GUIMARÃES, **Curso de Matemática Elementar – De acordo com os programas atuais do Colégio Pedro II**, Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves, 1929.

ROXO, EUCLIDES DE MEDEIROS GUIMARÃES, "*O Ensino da Matemática na Escola Secundária – (I) O Moderno Movimento da Reforma e seus Precursores*", **Jornal do Comércio**, pp. 10 -11, Rio de Janeiro, 30 de novembro de 1930.

ROXO, EUCLIDES DE MEDEIROS GUIMARÃES, "*O Ensino da Matemática na Escola Secundária – (VI) Principais Escopos e Diretivas do Movimento de Reforma: Subordinação do ensino da Matemática à Finalidade da Escola Moderna*", **Jornal do Comércio**, pp. 9, Rio de Janeiro, 4 de janeiro de 1931.

ROXO, EUCLIDES DE MEDEIROS GUIMARÃES, "*O Ensino da Matemática na Escola Secundária – (XII) Principais Escopos e Diretivas do Movimento de Reforma: O Conceito de Função como Idéia Axial do Ensino*", **Jornal do Comércio**, pp. 15, Rio de Janeiro, 22 de fevereiro de 1931.

RUSSEL, BERTRAND, **História do Pensamento Ocidental**, Tradução: Laura Alves e Aurélio Rebello, Rio de Janeiro, Ediouro, 2003.

SCHWARTZMAN, SIMON, **Um Espaço para a Ciência: A Formação da Comunidade Científica no Brasil,** Brasília, Ministério da Ciência e Tecnologia, 2001.
Disponível em: http://www.schwartzman.org.br
Acesso em 16 de agosto de 2004.

SILVA, CLÓVIS PEREIRA da, **A Matemática no Brasil: uma História de seu Desenvolvimento**, 1ª. Edição, Curitiba, PR, Editora UFPR, 1992.

SIMAAN, ARKAN; FONTAINE, JOËLLE, **A Imagem do Mundo dos Babilônios a Newton,** tradução Dorothée de Bruchard, São Paulo, SP, Companhia das Letras, 2003.

SIMMONS, GEORGE F., **Cálculo com Geometria Analítica**, Volume I, Tradução Seiji Hariki, São Paulo, McGraw-Hill, 1987.

SIMMONS, GEORGE F., **Cálculo com Geometria Analítica**, Volume II, Tradução Seiji Hariki, São Paulo, McGraw-Hill, 1987.

STRUIK, DIRK J., **História Concisa das Matemáticas**, 3ª. Edição, Lisboa, Gradiva, 1997.

TINOCO, LUCIA A. A. (Coordenação), **Construindo o Conceito de Função no 1º. Grau**, Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ, 1998.

UFRJ – Sistema de Bibliotecas e Informação – SIBI, **Manual para Elaboração e Normalização de Dissertações e Teses**, Série Manual de Procedimentos, nº. 05, 3ª. Edição revisada, atualizada e ampliada, Rio de Janeiro, 2004.

WAERDEN, B. L. VAN DER, **Science Awakening**, English Translation by Arnold Dresden With Additions of the Author, P. Noordhoff Ltda, Groningen, Holland, 1954.

VALENTE, WAGNER RODRIGUES, (Org.), **O Nascimento da Matemática no Ginásio**, 1ª. Edição, São Paulo, SP, Editora Annablume, Fapesp, 2004.

VALENTE, WAGNER RODRIGUES, (Org.), **Euclides Roxo e a Modernização do Ensino da Matemática no Brasil**, 1ª. Edição, São Paulo, SP, SBEM – Biblioteca do Educador Matemático, 2003.

WAERDEN, B. L. VAN DER, **Science Awakening**, 1st. Edition, P. Noordhoff Ltd, Groningen, Holanda, English Translation by Arnold Dresden, 1954.

YOUSCHKEVITCH, A. P., "The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century", **Archive for History of Exact Sciences**, Volume 16, p. 36-85, Edited by C. Truesdell, Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1976.

ZUFFI, EDNA MAURA; PACCA, JESUÍNA L. A., "O Conceito de Função: seu Desenvolvimento Histórico e sua Apresentação no Ensino Médio", **In: III Seminário Nacional de História da Matemática**, pp. 243-254, Espírito Santo, ES, Brasil, Março de 1999.

Anexo

O Ensino da Matemática na Escola Secundária

X I I

PRINCIPAIS ESCOPOS E DIRETIVAS DO MOVIMENTO DE REFORMA
O CONCEITO DE FUNÇÃO COMO IDÉIA AXIAL DO ENSINO

Em sua conferência intitulada '*Von dem notiwendingen Ziel des mathematichen Uinterrichts na den hoeheren Schulen*', e feita no curso de férias de 1904, observava Klein, com satisfação, que algumas tendências, por ele aconselhadas, como o desenvolvimento da intuição espacial e uma consideração mais intensa das aplicações, já começavam a prevalecer.

Por outro lado, porém, achava que o princípio por ele formulado – de que o *ensino da Matemática deve permanecer na mais viva relação com as outras matérias*, isto é, com as diversas partes integrantes da formação geral do espírito – não tivera ainda plena satisfação.

Com efeito, observava o professor de "Gottingen" que uma grande parte do ensino da Matemática nas classes superiores (principalmente a teórica) ainda apresentava como a simples justaposição de um novo capítulo, interessante por si mesmo, mas inteiramente isolado. Desse modo, dizia ele, só de maneira muito indireta se prepara uma compreensão clara dos princípios matemáticos que entram na formação da nossa cultura hodierna.

"Tais princípios repousam muito essencialmente sobre a noção de função e a sua representação sob a forma geométrica e analítica."

Daí a necessidade, – que constitui, para KLEIN, a principal tese das suas conferências e o âmago do movimento de reforma, – de trazer para o ponto central do ensino da Matemática a *noção de função,* apresentada de modo adequado.

Eis como, em traços gerais, Klein imaginava que se pudesse realizar esse *desideratum:* começar na 2ª série com a representação das funções mais simples, como: $y = ax + b$, $y = x^2$, $y = 1/x$. A teoria das equações algébricas e a trigonometria fornecem ocasião para se estudarem funções gradativamente mais complicadas, bem como as curvas que as representam. No mesmo sentido operam os exemplos tirados das aplicações, principalmente da Física, donde resulta a idéia de que uma função pode também ser dada empiricamente. Nas classes superiores, poder-se-á, então, dessas concepções, já tornadas familiares ao aluno, fazer sair as noções gerais do cálculo diferencial e integral.

A extensão que se dará a esse estudo tem que obedecer à finalidade educativa de cada tipo de escola; em todo caso (para ficar só na Física) deverão ser estudadas matematicamente: a lei da queda dos corpos, as leis do pêndulo e do movimento ondulatório.

Nos exemplos que terão de ser tratados, a face formal só deve ser acentuada o quanto basta para levar a um conhecimento seguro; mas o formalismo não deve sufocar a intuição: *o principal é uma compreensão clara das noções* *fundamentais e a sua significação intuitivamente apreendida .*

"Ouve-se geralmente dizer que o primeiro contato com a Matemática Superior (Cálculo Infinitesimal) acarreta, para o aluno, uma *revolução do pensamento.* A marcha didática que eu proponho, diz Klein, deve poupar-lhe essa revolução, uma vez que ele, desde cedo, se habitua ao curso das idéias que vão prevalecer mais tarde."

"Dita *revolução* é apenas uma pedra de toque para a inadequação do método de ensino, no começo adotado, aos objetivos didáticos, que são depois trazidos à consideração do aluno."

Da nova feição aconselhada, não acredita KLEIN que sobrevenha, de modo algum, acréscimo de matéria a ensinar. Os assuntos disciplinares tradicionais encaixam-se, sem forçamento, em o novo curso de idéias, tornando-se até, freqüentemente, mais simples e mais facilmente acessíveis.

Por outro lado, não importa que sejam, de algum modo, reduzidas certas partes do programa de ensino até hoje adotado. São assuntos que se cultivam unicamente por sua significação formal, como certos problemas complicados de construção geométrica, equações que se resolvem artificiosamente, certos desenvolvimentos trigonométricos massudos, etc. A nova matéria oferece, porém, oportunidade bastante para educação formal do espírito.

Em defesa de sua tese, KLEIN procura mostrar, ainda de outro modo, quanto se faz sentir, na Universidade, a má orientação do velho ensino secundário da Matemática.

"O ensino secundário deve, tanto quanto possível, dentro da sua esfera, preparar para os estudos superiores e não torná-los difíceis ou impraticáveis. Tomarei como casos típicos mais comuns a formação dos juristas, dos médicos e dos químicos."

"Quanto aos médicos e aos juristas, está desde muito, excluída a idéia de que eles possam ouvir qualquer lição de Matemática na Universidade: os estudos profissionais não deixam tempo para isso."

"Chegam os estudantes à Universidade, sem qualquer conhecimento teórico das funções (inclusive os princípios do cálculo infinitesimal). *A conseqüência é que certas partes importantes da sua profissão ficam, para eles, completamente impenetráveis."*

"Para os juristas, isso se acentua recentemente com respeito às questões de estatística, dos processos atuários, até como o verificamos diariamente em *nosso seminário de seguros.*"

"Quanto aos médicos, a queixa é velha: já as lições iniciais sobre Física Experimental têm de manter-se, - graças à falta, nos ouvintes, de um preparo suficiente de Matemática - em um nível tão baixo, que as principais noções só podem ser apresentadas em forma um tanto confusa."

"Pior ainda acontece em fisiologia, onde, a propósito da determinação quantitativa dos fenômenos, apresentam-se relações teórico-funcionais um tanto complicadas. Os livros didáticos tiram-se de embaraços, como podem, *fazendo introduções resumidas sobre cálculo infinitesimal,* em lugar das inserções, usadas outrora, de *Matemática Elementar* (nas quais se faziam, não raro tendo em vista um fim particular, raciocínios próprios do cálculo infinitesimal, mas sem mencionar os princípios gerais)."

"Que parece de tal procedimento aos Senhores professores secundários que persistem em afirmar ser o cálculo infinitesimal demasiado difícil para o liceu? Ou acaso as faculdades intelectuais dos novos universitários elevam-se bruscamente, de tal maneira que eles, desprovidos daquela preparação matemática, podem agora, de uma feita, compreender uma *exposição tão condensada*? É *à escola secundária que compete preencher esta lacuna, tanto mais quanto, conforme já mostrei claramente, ela pode fazê-lo sem acréscimo de trabalho*."

"As mesmas conclusões leva-nos a situação algo diversamente apresentada, dos nossos químicos universitários. A necessidade de se conhecerem os fundamentos iniciais do cálculo infinitesimal (mormente a partir do desenvolvimento da físico-química) é, na Química, tão imediatamente clara, que nós, em 'Gottingen', procuramos de dez anos a esta parte (1904) resolver a dificuldade com um curso preparatório para Químicos."

"Tudo isso se refere, continua KLEIN, a situações especiais na Universidade, cuja consideração apenas comprovaria as reflexões gerais anteriormente feitas sobre a insuficiência da formação matemática fornecida pela escola secundária."

"Sem entrar na consideração do ensino da Matemática para as escolas técnicas superiores, lembrarei que só poderá ser vantajosa a supressão da *descontinuidade* existente entre a Matemática secundária e a superior".

Se ainda se controverte, embora restritamente, a conveniência de dar, no ensino secundário, noções de cálculo infinitesimal, as opiniões se afirmam acordes quanto à vantagem de estabelecer, como núcleo ou *idéia axial* do ensino da Matemática o *conceito de função, apresentados sob forma gráfica, analítica e desenvolvido, gradativamente, desde as primeiras séries do curso secundário.*

Essa noção é, com efeito, adequada a dar ao ensino a unidade e a conexão que tanto o vivificam e fortalecem, permitindo ainda formar no estudante a mentalidade desde logo afeita a hodierna concepção dos fenômenos, tanto dos puramente científicos, como dos da vida civil.

De fato, entre os principais escopos do ensino da Matemática, não se pode, como já acentuado têm os autores que vimos citando, deixar de incuir, com Young, "ajudar a compreender melhor as leis da natureza", a "ressaltar distintamente as relações matemáticas que se apresentam no organismo social e nas atividades da vida moderna, bem como o auxílio, prestado pela Matemática à resolução dos problemas que aí se apresentam."

Isso não significa, repitamo-lo, necessariamente uma diminuição do valor estritamente lógico da Matemática para os alunos; ao contrário, deve-se esperar que, com reduzir a manipulação meramente técnica, com omitir problemas cujo único mérito é a sua complexidade, com despertar o interesse do aluno pelas conexões entre a Matemática abstrata e o ambiente concreto, os aspectos lógicos da matéria far-se-ão mais claramente ressair, o que Percy Nunn faz sentir quando diz: "It is of the first importance that the pupil should be made to perceive clearly and feel constantly that both formulae and manipulation always refer, to realities beyond themselves"; e acrescenta que a incompetência em Matemática e a aversão por esta matéria procedem, quase sempre, do desprezo deste princípio fundamental do ensino; mesmo no caso de existir inclinação natural pela técnica matemática, o que é raro, aquele desprezo conduz freqüentemente a uma pasmosa cegueira em relação ao significado real das idéias e das operações matemáticas.

Assim, segundo Nunn, em um curso de Álgebra, por exemplo, além da construção de um sistema eficiente de expressão simbólica, ao procurar dar-se conta do ponto de vista numérico, das fórmulas, o jovem algebrista dificilmente pode deixar de notar, com interesse, que aquelas *variáveis* de caracteres largamente diversos estão, contudo, ligadas muitas vezes, entre si, por leis quantitativas idênticas. A partir desse instante, é natural que ele preste uma atenção crescente àquela forma de conexão entre as variáveis; eventualmente, sob o nome proibido de *funções* - elas se podem tornar o objeto principal do estudo.

Na verdade, um dos maiores obstáculos à modernização do ensino da Matemática tem sido a força impeditiva do preconceito em relação a certos termos, símbolos e processos, cujo emprego é, por assim dizer, proibido em Matemática elementar por constituírem como que privilégios ou títulos de nobreza da Matemática, dita, superior.

É o que Nunn denomina, muito bem, "The invalid principle of formal segregation".

Isso acontece com a palavra *função*, usada, aliás, na linguagem corrente por pessoas medianamente cultas, com uma acepção idêntica, embora menos precisa, à que ela tem em Matemática; apesar disso, entre nós, por exemplo, foi quase um escândalo pedagógico a introdução desse termo nos programas do Pedro II.

No ensino secundário francês, embora sem as conexões que seriam para desejar, do ponto de vista de Klein, já se acham, de há muito, introduzidas a noção de função e as representações gráficas, baseadas em noções de Geometria Analítica. É o que se observava nas notáveis obras *Notions de Matématiques* de Jules Tannery (1903) e *Algébre* de Emile Borel (1903).

Eis como, sobre o assunto, se manifesta, no prefácio, o primeiro desses autores:

"Só se pode saber um pouco o que são as matemáticas, só se pode suspeitar a sua extensão extraordinária, a natureza dos problemas que elas estabelecem e resolvem, quando se sabe o que é uma função, de que modo se estuda uma função, como se seguem as suas variações, como se lhe representa a marcha por uma curva, de que maneira a álgebra e a geometria se auxiliam entre si, de que sorte o número e o espaço se esclarecem mutuamente, como é que se determina uma tangente, uma área, um volume, de que modo o homem é levado a criar novas funções, novas curvas e a estudar-lhes as propriedades. São dessas noções e desses métodos que precisamos para ler os livros técnicos, em que as matemáticas intervêm. Elas são indispensáveis a quem quiser compreender alguma coisa no atual movimento científico, que se acelera, nas aplicações da ciência que modernamente se multiplicam, e que, dia a dia, tendem a modificar mais profundamente a nossa maneira de pensar e de agir."

"E essas noções são simples e fáceis, desde que se reduzam ao que têm de essencial, mais fáceis do que muitas das demonstrações que ninguém receia dar aos alunos, apesar de longas e complicadas e sem alcance algum, além daquilo que elas provam. Elas devem (aquelas noções) penetrar, segundo penso, cada vez mais o ensino elementar, para abreviá-lo e fortificá-lo."

"Quanto à formação dos espíritos, por certo que ela nos deve preocupar, mas pensa alguém que os métodos particulares e limitados, que as questões que os alunos sentem confusamente serem inúteis e fictícias, contribuem, melhor que os métodos gerais para essa formação? E se os alunos puderem entrever a força desses métodos, estarão eles menos dispostos a fazer um esforço para se apossarem de tais recursos e aplicá-los com segurança?"

Klein, ao notar que nos planos de ensino prussianos para 1901, ainda não haviam sido adotadas as propostas votadas no Congresso de Meram, sobre a predominância da idéia de função, exclamava:

"Sim, meus senhores, estou plenamente convencido de que o conceito de função, sob forma geométrica, deve ser a alma do ensino da Matemática na escola secundária! Em torno dessa noção, grupam-se facilmente todos os assuntos a ensinar em Matemática e esta se vem ressentindo, até aqui, muitas vezes, de uma conexão devidamente planejada."

"Além disso, a própria significação objetiva de tal noção nunca será superestimada. A representação gráfica das dependências funcionais penetram hoje através de todos os rumos da atividade; é a forma típica que reveste o pensamento matemático, onde quer que se nos apresente."

"Nas ciências exatas, isto é assás conhecido, mas, ainda por toda a parte, deparam-se-nos freqüentemente curvas referidas a sistema - xy. Ocorrem-me, por exemplo, as curvas de pressão atmosférica, os gráficos de cotações da bolsa, etc. Não podemos mais abrir um jornal, sem que nos salte pela frente uma dessas figuras!"

Klein lembra então como são sugestivos os horários gráficos de estrada de ferro, usados somente para serviço interno das estações (e isso mesmo na Alemanha, pois, entre nós, nem aí), lastimando que o público não possa adquirir o hábito de ler essas representações gráficas.

Nessa mesma conferência, Klein, pondo fora de dúvida que a educação do pensamento funcional (*funklionalen Denken*) é, hoje, de grande necessidade para vastas esferas de atividade, criticava o fato dos programas alemães de então só iniciarem esse estudo nas últimas classes, quando os primeiros exemplos de representação gráfica deveriam, a seu ver, aparecer nos primeiros anos do curso, pois acrescentava, "de outro modo não faremos justiça à significação realmente fundamental que tal assunto tem no ensino secundário (*der wirklich fundamental Bedentungv desses Gegenstandes em Lehrunterrichte*)".

Só o precoce afeiçoamento à idéia de funcionalidade trará pleno benefício aos colegiais. Sem dúvida, não se cogita, naquelas primeiras classes, de um estudo completo, mas apenas da idéia de uma natural associação de duas séries de valores numéricos determinados, da qual, como que nasce insensivelmente a imagem da continuidade.

É preciso também que não se comece por amedrontar o aluno dizendo: "Vamos agora a uma coisa inteiramente nova que só pertence propriamente à Matemática superior!"

Seria inútil acrescentar que as últimas instruções (1914) para o ensino da Prússia, (1923) da Baviera, da Saxônia, já adotaram plenamente as idéias de Klein e os modernos compêndios alemães como o de Behrendsen e o de Lorcher-Loffler realizam admiravelmente a concatenação da matéria sob a diretriz do conceito de função.

Os americanos, ainda neste ponto, puseram em prática, com o seu magnífico senso das realidades, as tendências preconizadas pelos reformadores. Introduziram largamente os gráficos no ensino da Matemática: SCHULVTZE suminariza nos seguintes itens as razões que militam em favor desse uso:

1. O estudo dos gráficos é muito concreto e por isso pode de algum modo contrabalançar a tendência que tem a Álgebra a tornar-se uma aplicação mecânica de regras decoradas.

2. As representações gráficas estão presentemente usadas, de maneira tão extensa, nos jornais diários, revistas e livros, que uma certa familiaridade com esses recursos faz parte da cultura geral.

3. Esse modo de representar variáveis é muito usado em outras ciências.

Para estudar, com sucesso, Física, Mecânica, Química, Meteorologia, Economia política, etc, o estudante precisa estar habituado aos gráficos.

4. Muitos fatos matemáticos tornam-se, pelos gráficos, perceptíveis à vista.

5. O estudo dos gráficos habilita o estudante a resolver muitos problemas que absolutamente não poderia fazer de outro modo: resolução de equações de grau superior, equações transcendentes, etc.

6. O estudante adquire uma idéia clara de uma das noções mais importantes da matemática adiantada, a saber, a funcionalidade.

7. Os gráficos interessam os estudantes e são facilmente compreendidos.

A *National Committee on Mathematical Requirements* adota completamente a opinião de KLEIN sobre a adequação do conceito de funcionalidade para constituir a idéia unificadora do ensino da Matemática.

"A grande idéia que é mais própria a unificar o curso é a da *relação funcional.* O conceito de uma variável e da dependência de uma variável em relação a outra é de importância fundamental para qualquer pessoa."

Verdade é que as formas gerais e abstratas desses conceitos só adquirem significação para o aluno como resultado de uma longa experiência matemática e de um treinamento considerável.

Nada há em qualquer desses conceitos, porém, que impeça a apresentação de exemplos concretos específicos e ilustrações de dependência, mesmo que nas partes elementares do curso. Pra chegar a este fim, encontram-se meios na tabulação de dados, no estudo das fórmulas, dos gráficos e no uso destes.

"O princípio dominante e fundamental do curso deve ser a idéia de dependência entre duas variáveis, inclusive os métodos para definir o curso é a *relação funcional.* O professor deve ter essa idéia sempre em mente, e o progresso do aluno deve ser conscientemente dirigido segundo as linhas que apresentarem, uma após a outra, as idéias, das quais finalmente depende a formação do conceito geral de funcionalidade."

Aliás, o relatório, que é bastante condensado, contém um capítulo inteiro dedicado à questão do conceito de função, o que os autores justificam pelo fato de haver aquela recomendação provocado particular malentendido da parte dos professores.

Procura-se explicar naquele capítulo que não se advoga o ensino de nenhuma espécie de *teoria* das funções, nem mesmo da notação e das definições de tal teoria, pelo menos nas primeiras classes; talvez mesmo a palavra função devesse ser evitada nas primeiras séries.

"O que se deseja é que a idéia de relação ou dependência entre quantidades variáveis.... ao espírito do aluno pelo exame de numerosos exemplos concretos de tal relação. Devem-se-lhe mostrar os cálculos de relações em um grande número de casos antes que a idéia de função venha a ter qualquer significação para ele. Além disso, o aluno deve ser levado a tomar o hábito de pensar a respeito das conexões que existem entre quantidades dependentes, não somente porque tal hábito forma o melhor fundamento para uma apreciação da teoria que se possa seguir mais tarde, mas principalmente porque esse hábito habilita-lo-á a pensar mais claramente sobre quantidades com as quais ele terá de lidar na vida real, quer ele prossiga ou não os seus estudos de matemática."

Para atingir a esse fim, o professor não deve ter em mente nenhuma definição a ser recitada pelo aluno, nenhuma resposta automática a um dado quesito, nenhum exercício de memória, absolutamente, mas antes a preocupação de não deixar instante algum, em que uma quantidade se apresente ligada a outra, ou determinada por uma ou por algumas outras, sem chamar a atenção para o fato e procurar fazer o estudante 'see how it works'.

Essas ocasiões se apresentam em milhares de casos, tanto em Álgebra, como em Geometria, e no capítulo que estamos resumindo, delineiam-se, com algum pormenor, alguns casos típicos desse aspecto.

Nunca será demasiado insistir, porém, conclui-se acolá, no grande papel que a idéia de função desempenha na vida do mundo ambiente. Mesmo quando não se trate de nenhuma avaliação, os problemas da vida real exigem freqüentemente a aptidão para pensar corretamente sobre natureza das relações que existem entre quantidades interdependentes.

Euclides Roxo
Professor de Matemática do Colégio Pedro II
Jornal do Comércio,
22 de fevereiro de 1931
página 15